Dalle trasformazioni quadratiche alle trasformazioni birazionali.

Un percorso attraverso la corrispondenza di Luigi Cremona.

Maria Alessandra Vaccaro

Abstract

It is quite well-known the dependence of Cremona's idea from the works of Magnus, much less known, however, and cited mostly second-hand, it seems to be the connection between the birth of birational transformations and Schiaparelli's article of 1862. Just as are little known considerations on the history of the quadratic transformations appeared in the correspondence Cremona-Hirst. Therefore the aim of this work is to trace the origins of birational transformations making use also of the correspondence with Hirst and Schiaparelli.

Introduzione

Luigi Cremona nella prefazione del suo lavoro del 1863 *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. Nota I.*[1] scrive: "*I signori Magnus e Schiaparelli, l'uno nel tomo 8° del giornale di Crelle, l'altro in un recentissimo volume delle Memorie dell'Accademia scientifica di Torino, cercarono le formole analitiche per la trasformazione geometrica di una figura piana in un'altra pur piana, sotto la condizione che ad un punto qualunque dell'una corrisponda un sol punto nell'altra, e reciprocamente a ciascun punto di questa un punto unico di quella (trasformazione di primo ordine). E dall'analisi de' citati autori sembrerebbe doversi concludere che, nella più generale ipotesi, alle rette di una figura corrispondono nell'altra coniche circoscritte ad un triangolo fisso (reale o no); ossia che la più generale trasformazione di primo ordine sia quella che lo Schiaparelli appella trasformazione conica.*"
L'autore, dopo aver fatto riferimento ai lavori di Magnus e Schiaparelli sulle trasformazioni quadratiche, in cui si evince che la più generale trasformazione del primo ordine sia la trasformazione conica, espone la sua intuizione, ovvero che la composizione di trasformazioni

[1] [Cremona 1863].

coniche genera una trasformazione che è ancora del primo ordine. Tale idea lo conduce alla definizione delle trasformazioni birazionali:

"*Ma egli è evidente che applicando ad una figura più trasformazioni coniche successive, dalla composizione di queste nascerà una trasformazione che sarà ancora di primo ordine, benché in essa alle rette della figura data corrisponderebbero nella trasformata, non già coniche, ma curve d'ordine più elevato. In questo breve scritto mi propongo di mostrare direttamente la possibilità di trasformazioni geometriche di figure piane, nelle quali le rette abbiano per corrispondenti delle curve di un dato ordine qualsivoglia.*"

Nella letteratura, anche sulla scia di quanto scritto da Cremona nella prefazione prima citata, si accetta generalmente la dipendenza dell'idea cremoniana dai lavori di Magnus[2]. La pubblicazione della corrispondenza Hirst-Cremona[3] offre nuovi elementi a questo riguardo. Meno noto, e comunque citato in gran parte di seconda mano, sembra il legame tra la nascita delle trasformazioni cremoniane e la memoria di Schiaparelli[4] del 1862. Così come sono poco note le riflessioni sulla storia delle trasformazioni quadratiche apparse nella corrispondenza di Cremona con Hirst. Pertanto lo scopo di questo lavoro è quello di esaminare l'evoluzione delle idee di Cremona nel periodo che va dall'elaborazione della memoria [Cremona 1861-62], scritta sotto l'impulso della lettura della succitata memoria di Schiaparelli, al suo superamento ed approfondimento nel più noto lavoro [Cremona 1863]. Per tale analisi verrà utilizzata una lettera di Cremona a Schiaparelli, pubblicata in [A. Gabba 1954], che si colloca cronologicamente fra le due memorie e il successivo scambio epistolare fra Cremona e Hirst a partire dal 1864. In particolare, attraverso tali corrispondenze, si evince che il matematico

---

[2] A parte quanto già citato dallo stesso Cremona, si rimanda a [Darboux 1905], [Coolidge 1940], [Hudson 1927], [Snyder 1970] e più recentemente a [Bodini 1994] e [Déserti 2009].

[3] Si veda [Nurzia 1999].

[4] Oltre lo stesso Cremona, viene citato marginalmente per esempio da Beltrami, Bottazzini, Déserti, Hirst, Hudson, Loria, Pascal, Snyder e da Gabba che ne ha pubblicato in [L. Gabba 1941]. Un esame diretto del lavoro di Schiaparelli si è avuto recentemente in [Caddeo - Franzoni - Piu 2013].

italiano, proprio dall'analisi del lavoro dell'astronomo, ampliando la sua visione riguardo le opere di Steiner e Magnus, si rende conto che la composizione di trasformazioni quadratiche porta ad ottenere trasformazioni di ordine superiore. Nello stesso quadro di riferimento riguardo le riflessioni di Cremona sulle trasformazioni quadratiche[5], va notato che fornisce il suo contributo anche Beltrami, che nell'anno accademico 1862-63 insegna a Bologna e che, come si vedrà, cita le memorie di Steiner e Magnus ed è in contatto con Schiaparelli. Nel dialogo tra Cremona e Hirst sulle origini storiche delle trasformazioni birazionali s'inserisce anche la figura di Bellavitis che era in contatto con Schiaparelli e a cui il matematico inglese riconosce lo sviluppo sistematico della teoria dell'inversione.

In tale contesto, dalle osservazioni sulle proprietà più generali di tali composizioni, nasce la prima memoria di Cremona su quelle che successivamente furono chiamate trasformazioni cremoniane. In realtà la definizione data dal geometra italiano è di carattere generale e solo alcuni anni dopo, Noether in [Noether 1872] fornisce una dimostrazione del teorema che afferma la sostituibilità di qualunque trasformazione cremoniana mediante una serie di trasformazioni quadratiche. Nel 1901, a distanza di quasi trent'anni, Segre in [Segre 1901] si accorge di un errore nella dimostrazione di Noether e nello stesso anno Castelnuovo in [Castelnuovo 1901] prova che ogni trasformazione di Cremona può essere espressa come prodotto di trasformazioni di De Jonquières, ognuna delle quali è prodotto di trasformazioni quadratiche. Per ulteriori sviluppi si rinvia al lavoro di Déserti[6] in cui gli aspetti storici s'intrecciano con le applicazioni del gruppo di Cremona a temi di ricerca contemporanea.

Nella corrispondenza con Hirst, le prime tracce sulle trasformazioni cremoniane si ritrovano in una lettera dell'Agosto del 1864, anche se, quasi certamente, i due matematici ne avevano

[5] Tra la moltitudine di lavori apparsi sulle trasformazioni quadratiche, tra cui per esempio anche quelli sulle inversioni circolari, si sono presi in considerazione soltanto quei lavori che potrebbero aver influenzato l'opera di Cremona.

[6] [Déserti 2009].

già parlato di presenza durante il soggiorno di Hirst a Bologna (Giugno 1864). Da tale corrispondenza si evince che tra la pubblicazione delle sue due memorie sulle trasformazioni geometriche delle figure piane, Cremona, oltre a completare la sua conoscenza sui lavori di Magnus, ebbe la possibilità di leggere e rapportare le sue idee con il recentissimo lavoro di De Jonquières[7] sulle trasformazioni che da lui prendono il nome. Infatti, nel suo secondo lavoro Cremona confronta ampiamente i suoi risultati con quelli del matematico francese sviluppando quanto aveva comunicato per corrispondenza all'amico Hirst. Tuttavia gli aspetti relativi all'interazione tra i punti di vista di Cremona e di De Jonquières non verranno analizzati in tale lavoro. Così come non verrà esaminata la generalizzazione nello spazio delle trasformazioni birazionali, fatta ad esempio da Cayley, Cremona e Noether partendo sempre dall'analisi di un caso particolare di trasformazioni quadratiche studiato dallo stesso Magnus in [Magnus 1837].

Il contatto epistolare tra Cremona e Hirst prosegue con varie precisazioni di carattere storico e con la presentazione da parte del matematico inglese di una trasformazione quadratica, ispirata a quelle iperboliche trattate da Schiaparelli, alcuni aspetti della quale appaiono del tutto sconosciuti, non essendo presenti nel lavoro pubblicato da Hirst nel 1865, e nello stesso tempo interessanti dal punto di vista storico.

Schiaparelli e il suo dialogo con Cremona

Giovanni Virginio Schiaparelli (1835 - 1910) è passato alla storia come l'astronomo che ha scoperto i cosiddetti canali di Marte, grazie alle sue osservazioni condotte a partire dal 1877 con il telescopio Merz dell'Osservatorio astronomico di Brera, a Milano. Egli nasce il 14 Marzo 1835 a Savigliano, in provincia di Cuneo e dopo essersi laureato nel 1854 in ingegneria al Politecnico di Torino, tra il 1857 e il 1859 studia astronomia all'Osservatorio

[7] [De Jonquières 1864].

Reale di Berlino e a quello di Pulkovo (San Pietroburgo). Nel 1860 rientra in Italia e prende servizio come secondo astronomo presso l'Osservatorio di Brera; successivamente, nel 1862, viene nominato primo astronomo e direttore dello stesso osservatorio, carica che manterrà fino al 1900. Da qui inizia la sua brillante carriera che lo porterà a divenire una personalità molto autorevole dell'astronomia mondiale e a ricevere numerosi riconoscimenti, quali le medaglie d'oro della Società Italiana delle Scienze (Società dei XL), della Royal Astronomical Society di Londra, della Deutsche Akademie der Naturforscher Leopoldina e il premio Lalande dell'Académie des Sciences di Parigi. Nel 1889 viene nominato senatore del Regno d'Italia; muore a Milano il 4 Luglio 1910.

La personalità dello Schiaparelli emerge non solo per la feconda attività scientifica nel campo dell'astronomia, ma anche per le sue ricerche di carattere matematico. Egli indaga sulla probabilità delle orbite iperboliche[8], sul principio della media aritmetica[9], sulle maree prodotte in un pianeta o in un satellite dall'azione del suo corpo centrale[10] e nel 1898, già sessantenne, pubblica la lunga memoria [Schiaparelli 1898]. Tale saggio, in cui Schiaparelli congettura profonde analogie tra l'evoluzione di strutture organiche e le curve geometriche, è un tentativo di realizzare un primo modello geometrico della teoria dell'evoluzione[11].

Citando l'allievo di Schiaparelli Giovanni Celoria[12], "*in una sua pubblicazione giovanile "Sulla trasformazione geometrica delle figure ed in particolare sulla trasformazione iperbolica*[13]*", studiò egli le proprietà aritmetiche delle trasformazioni geometriche,*

[8] [Schiaparelli 1874].

[9] [Schiaparelli 1907].

[10] [Schiaparelli 1894].

[11] Tra i lavori di carattere matematico su tale memoria, si vedano anche i lavori [Canadelli 2010], [Bazzani - Bocci - Freguglia - Rogora 2011] e [Giorello - Guzzardi 2011].

[12] [Celoria 1911].

[13] [Schiaparelli 1862].

divinando per tal modo con geniale intuito come si potesse studiare geometricamente la teoria dei numeri."

Anche l'astronomo Luigi Gabba[14], che curò l'edizione nazionale in undici tomi delle *Opere* di Schiaparelli, afferma "*farà forse stupore il vedere come esso* (il tomo VIII) *presenti per primo una lunga memoria di argomento geometrico "Sulla trasformazione geometrica delle figure ed in particolare sulla trasformazione iperbolica". E' il primo lavoro pubblicato dallo Schiaparelli, nel quale, investigando le proprietà aritmetiche delle trasformazioni geometriche, ebbe l'intuizione dello studio geometrico della teoria dei numeri.*"

Il succitato lavoro di Schiaparelli *Sulla trasformazione geometrica delle figure ed in particolare sulla trasformazione iperbolica,* certamente coinvolse e aumentò l'interesse di Cremona per le trasformazioni quadratiche e ciò si evince in modo abbastanza chiaro dalla corrispondenza Cremona-Schiaparelli.

Schiaparelli, dopo aver esaminato a fondo il metodo delle trasformazioni geometriche, si occupa delle trasformazioni del primo ordine, studiando tre casi particolari di cui fornisce la formulazione analitica:

a) trasformazioni lineari (affinità), "*che conservano il parallelismo delle rette e le proporzionalità delle misure prese nella stessa direzione*";
b) trasformazioni omografiche (proiettività), "*che conservano il grado delle curve e i rapporti anarmonici dei punti situati in linea retta e delle rette convergenti ad un punto*";
c) trasformazioni coniche, "*che conservano i rapporti anarmonici delle proiezioni dei punti sugli assi cartesiani e, in genere, duplicano il grado delle linee trasformate*".

Schiaparelli classifica ogni trasformazione conica[15] in ciclica, iperbolica e parabolica, le cui equazioni si riducono, mediante una trasformazione omografica sulle coordinate x ed y, a:

---

[14] [L. Gabba 1941].

[15] E' importante rimarcare il fatto che Schiaparelli è di sicuro in contatto con Giusto Bellavitis, come si evince da tale citazione: "*Il signor Bellavitis, insigne matematico di Padova, mi ha fatto notare che*

$$x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2}, \quad y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2}, \qquad \text{per una trasformazione ciclica,}$$

$$\text{(I)} \qquad x = \frac{1}{y'}, \qquad y = \frac{1}{x'}, \qquad \text{per una trasformazione iperbolica,}$$

$$x = \frac{x'}{(x' + y')^2}, \; y = \frac{y'}{(x' + y')^2}, \qquad \text{per una trasformazione parabolica.}$$

Come già detto, Schiaparelli considera questi casi, che sono tutti involutori, come particolari. Alla fine del paragrafo VIII egli torna al caso generale delle trasformazioni quadratiche. Stabilito che ognuna di tali trasformazioni ha tre punti base (chiamati da lui cardinali), punti reali o complessi, distinti o no, per cui passano tutte le coniche immagini di rette, distingue le trasformazioni quadratiche in base a tali punti. Più precisamente, ogni trasformazione quadratica si ottiene come composizione di due omografie con:

i) una trasformazione iperbolica nel caso in cui tutti e tre i punti base sono reali;
ii) una trasformazione ciclica nel caso in cui due dei punti base sono immaginari[16];
iii) una trasformazione parabolica nel caso in cui due dei punti base sono infinitamente vicini (punto doppio).

Quindi Schiaparelli afferma che in ogni caso una trasformazione quadratica si ottiene come prodotto di una trasformazione conica e di due omografiche. In realtà egli trascura il caso in cui i punti base degenerano in un punto triplo, ovvero quello in cui le coniche si osculano in punto[17].

Successivamente, dopo aver esteso le trasformazioni del primo ordine al caso tridimensionale, l'autore si sofferma ad analizzare alcune proprietà della trasformazione iperbolica:

---

questa trasformazione conica comprende in sé quella ch'ei chiamò derivazione di trasformazione e che era stata studiata già da Poncelet, da Magnus, da Steiner e dallo stesso Bellavitis (Nuovi saggi dell'Accademia di Padova Vol. IV, pag. 284)."

[16] Tali casi sono equivalenti dal punto di vista complesso.

[17] Per maggiori approfondimenti sulla classificazione delle trasformazioni quadratiche si rimanda a [Beltrametti - Carletti - Gallarati - Monti Bragadin 2002].

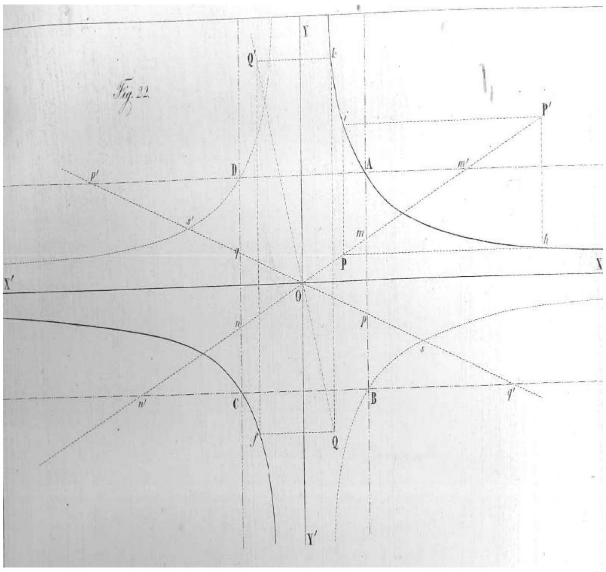
1) il punto iniziale P e il trasformato P' appartengono alla stessa retta per l'origine, quindi ogni retta per l'origine rimane globalmente invariata;

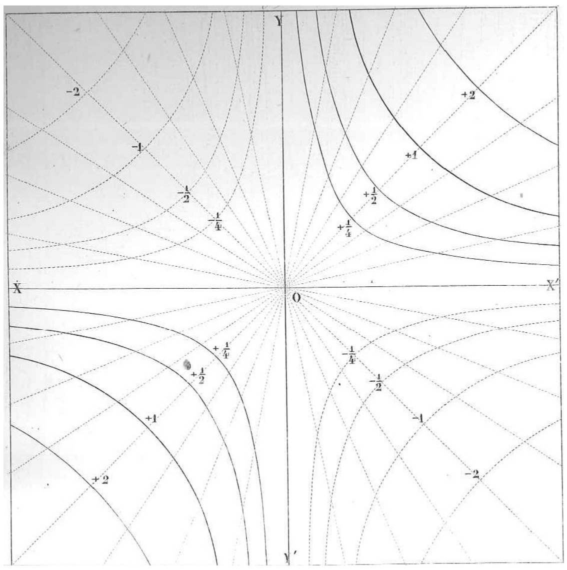
2) i trasformati dei punti del I e III quadrante rimangono negli stessi quadranti, i punti del II quadrante si trasformano in punti del IV e viceversa;

3) condotte quattro rette *AB*, *BC*, *CD*, *DA* parallele agli assi e aventi distanza 1 dall'origine, i punti di *AB* sono trasformati in quelli di *AD* e viceversa; l'analogo vale per le rette *CB* e *CD* (si veda la prima delle figure seguenti). Chiaramente il luogo dei punti in cui tali rette orizzontali e verticali intersecano le loro trasformate è proprio l'iperbole di equazione $xy = 1$, i cui punti rimangono invariati;

4) ogni punto dell'iperbole di equazione $xy = -1$ si scambia con quello della stessa curva che è opposto rispetto al centro O;

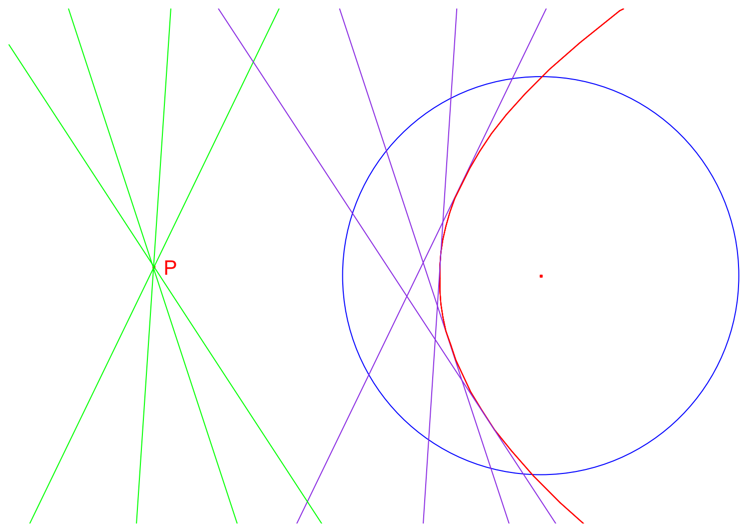
5) ogni iperbole di equazione $xy = a$ viene trasformata in un'altra simile e concentrica di equazione $x'y' = \frac{1}{a}$. Tali iperboli, dette parallele, sono raffigurate nella seconda immagine.





In relazione all'intuizione avuta da Cremona è opportuno richiamare la proprietà dello Schiaparelli secondo la quale mediante una trasformazione iperbolica il grado delle curve viene generalmente duplicato. Fanno eccezione le curve passanti per l'origine, per cui ad una curva di grado *m* ne corrisponde una di grado 2*m*-1. Ma potrebbe anche accadere che il grado della curva trasformata sia minore: infatti, trattandosi di trasformazioni reciproche, la curva di partenza e quella trasformata possono invertire il loro ruolo, cosicché, secondo Schiaparelli, "*in tal guisa molte curve di secondo grado potranno ridursi al primo e molte di terzo e di quarto grado potranno ricondursi al secondo. Se per esempio vogliamo esaminare quale sia l'effetto della trasformazione iperbolica sopra una retta qualunque, troveremo anzitutto, ch'essa si convertirà in una curva di secondo grado* (iperbole). *[...] Quando in un piano siano descritte più rette, esse si trasformeranno in un sistema d'iperboli passanti per l'origine O, e aventi asintoti paralleli gli assi e paralleli fra loro. [...] La proposizione inversa è egualmente vera: cioè un sistema d'iperboli passanti per l'origine e aventi gli asintoti paralleli agli assi dopo la trasformazione si cambierà in un sistema di rette. Tutte queste proposizioni si ottengono anche con una discussione analitica fondata sulle equazioni (I).*"

A questa memoria dell'astronomo di Brera Cremona diede seguito pubblicando il lavoro [Cremona 1861-62]. In questo scritto Cremona applica *l'idea feconda* dello Schiaparelli ad una trasformazione nel piano duale con l'unica condizione che ad ogni retta corrisponda una sola retta (cioè una trasformazione generalmente biunivoca nello spazio duale). In questo momento Cremona appare ancora legato all'idea che le più generali trasformazioni di questo tipo siano le quadratiche. Pertanto, egli considera qui una trasformazione biunivoca che non è altro che quella considerata da Schiaparelli tradotta per dualità, in cui alle rette di un fascio corrispondono rette tangenti ad una conica, che in forma canonica sarà una parabola. Citando lo stesso autore "*ad un punto corrisponderà una conica; cioè quando in una delle due figure una retta gira intorno ad un punto dato, la retta corrispondente nell'altra figura si muove inviluppando una conica. Le coniche di una figura che per tal guisa corrispondono ai punti dell'altra sono tutte inscritte in un triangolo determinato. Ed in generale, ad una curva della classe n data nella prima figura corrisponde nella seconda una curva della classe 2n, la quale tocca in n punti ciascuna delle rette formanti il triangolo suddetto*." Cremona dice di dimostrare, anche se in realtà enuncia soltanto il suo risultato, che la trasformazione più generale può essere ricondotta, mediante omografie, a due tipi principali: "*Nel primo, i punti si trasformano in parabole tutte tangenti a due rette determinate che s'incrociano nel centro di trasformazione. Nel secondo, ai punti corrispondono parabole, per le quali il suddetto centro è il fuoco comune.*" Quindi pone la sua attenzione sul secondo tipo di trasformazione, quello in cui "*le parabole corrispondenti a punti sono confocali [...]. Due rette omologhe sono situate dalla stessa banda rispetto al centro di trasformazione e hanno da esso distanze reciproche: la qual cosa costituisce una completa analogia fra questa trasformazione e l'inversione, nella quale i punti omologhi sono in linea retta con un centro fisso e hanno da esso distanze inversamente proporzionali.*"



Anche se elementare appare interessante vedere come ad esempio viene trasformata per dualità la solita inversione circolare[18]. Considereremo il cerchio come quello unitario di centro l'origine. Ci sembra che questa trasformazione sia in realtà poco nota.

Pensando l'inverso di un *punto* come il	Per dualità si avrà che l'inverso duale di una

[18] L'inverso M' di un qualsiasi punto del piano M rispetto ad una circonferenza di centro I, si ottiene come intersezione della retta IM con la polare di M rispetto a tale circonferenza: M' è il quarto armonico con M e i due punti d'intersezione della retta IM con la circonferenza.

punto intersezione della *polare* con la *congiungente* tra il *centro* del cerchio e il *punto* dato.	*retta* è la *retta* che *congiunge* il *polo* della *retta* con l'*intersezione* tra la *retta duale* del centro (la retta all'infinito) e la *retta* data, quindi la parallela condotta dal polo alla retta data.

Ci sembra questo un bello esempio di geometria elementare. Rispetto a questa inversione duale, l'inverso di una retta è una retta ad essa parallela, l'inverso di un punto è la curva duale di una circonferenza passante per il centro, quindi una parabola di fuoco il centro, e così via.

Tale lavoro porta la data di approvazione del 27 Marzo 1862. Nei sei mesi successivi Cremona matura l'idea chiave che diede origine alle trasformazioni che portano il suo nome, ovvero che comunque preso un intero *n*, esistono trasformazioni piane birazionali d'ordine *n* e sente l'esigenza di darne comunicazione a Schiaparelli il 22 Novembre 1862. Tale lettera, pubblicata da Alberto Gabba, nipote dell'astronomo Luigi Gabba, in [A. Gabba 1954], gioca un ruolo essenziale per l'interesse cronologico che riveste nella storia delle trasformazioni birazionali secondo il pensiero di Cremona poiché anticipa di circa sei mesi la memoria dello stesso autore del 1863. Se ne riporta uno stralcio in cui il matematico focalizza il problema:

"*Le domando inoltre licenza di farLe un'obbiezione relativa alla sua Memoria, obbiezione che colpirebbe anche la Memoria di Magnus sullo stesso argomento (Crelle, t. 8). É egli vero che la più generale trasformazione di 1° ordine (cioè in cui ad un punto corrisponde un punto solo) sia quella nella quale ad una retta corrisponde una conica circoscritta ad un triangolo fisso? Mi pare che si possano ottenere trasformazioni nelle quali ad una retta corrisponda una curva d'ordine qualunque. Infatti: sia R una retta fissa nello spazio e K una curva gobba d'ordine n-1, avente n-2 punti comuni con R (tali curve sono possibili sulla superficie d'un iperboloide rigato, come io ho già dimostrato nei Comptes rendus, 24 juin 1861). Sian poi P e P' due piani fissi, situati comunque nello spazio. Da un punto qualunque a di P si può* *condurre una sola retta che incontri R e K; tal retta seghi P' in a'. I punti a, a' si riguardino come corrispondenti; onde una figura in P si trasformerà in una figura in P', e la trasformazione è di 1° ordine. Ma ad una retta qualunque D situata in P che cosa corrisponde in P'? Le rette appoggiate alle tre direttrici D, R, K formano una superficie d'ordine n; e la curva d'ordine n secondo la quale questa superficie è segata dal piano P', è ciò che corrisponde alla retta D.*"[19] Per meglio comprendere l'evoluzione del pensiero di Cremona, ci pare ora opportuno fare qualche passo indietro nel tempo, occupandoci brevemente dei lavori che precedono quello di Schiaparelli.

La discussione fra Hirst e Cremona sulle origini delle trasformazioni birazionali

Nel 1832 Ludwig Immanuel Magnus (1790 - 1861) in [Magnus 1832] analizza e studia le trasformazioni quadratiche del primo ordine tra due piani, ovvero con la condizione che ad ogni punto del primo piano corrisponda solamente un punto del secondo e viceversa. Come già detto, tali trasformazioni individuano in ogni piano tre punti, detti punti principali, tali che alle rette di un piano corrispondono coniche passanti per i punti principali dell'altro piano. Magnus in una nota in calce precisa che ad una conica che non passa per i tre punti principali di uno dei due piani, corrisponde in generale una curva di quarto grado a cui appartengono i punti principali di tale piano come punti singolari.

Tale lavoro è sicuramente noto a Cremona, tant'è vero che cita Magnus nell'introduzione alla sua nota del 1863 e, probabilmente, è proprio la necessità di confutare l'erronea convinzione

[19] Per avvalorare il rapporto di stima e amicizia che si era instaurato tra Cremona e Schiaparelli si riporta uno stralcio di una lettera di Cremona del 12 Luglio 1864 "*Io faccio sempre voto che la troppo esigente Urania le permetta una volta di fare una visitina alle Ninfe ed alle Silfidi, che sarebbe pericoloso di lasciare al buio in compagnia de' Bonzi e degli Apostoli*" ed uno di una lettera di Schiaparelli: "*G. V. Schiaparelli unisce i propri voti a quelli delle ombre di Desargues e di Steiner, perché il prof. Cremona ancora per un altro mezzo secolo possa continuare l'opera loro*".

dell'impossibilità di ottenere nel piano trasformazioni di grado $n > 3$ che spinge Cremona a dimostrare vera la sua ipotesi.

Ma in realtà è Magnus che si occupa per primo delle trasformazioni quadratiche del primo ordine? Nello stesso anno in cui appare nel giornale di Crelle il succitato lavoro di Magnus, viene pubblicato il testo di Jacob Steiner (1796 - 1863) [Steiner 1832]. In una lettera inviata a Cremona (St Johns' Wood, 16 Ottobre 1864) Hirst presume che i due matematici siano giunti indipendentemente alla scoperta di tali trasformazioni e chiede all'amico se è a conoscenza di ricerche precedenti sullo stesso argomento:

"*Steiners Geom. Gestalten, in which the principles of conic transformation are so ably developed, bears precisely the same date (1832) as the 8th volume of Crelle's Journal in which Magnus first gave his treatment of the same subject. Neither of these authors mentions the other so that I presume they discovered the transformation simultaneously and indipendently. Magnus appears to have been led to the subject by Plücker's previous paper in the 5th volume of Crelle which I have not yet seen. Do you know of any previous researches on the same subject?*"[20].

Cremona puntualizza[21] che il lavoro di Magnus è stato pubblicato prima del libro di Steiner e ciò si evince dalla prefazione (pag. IX) del succitato testo. Qui Steiner afferma che i risultati

---

[20] "*Geom. Gestalten di Steiner, in cui i principi della trasformazione conica sono così abilmente sviluppati porta proprio la stessa data (1832) dell'ottavo volume del Giornale di Crelle in cui Magnus diede per primo la sua elaborazione dello stesso argomento. Nessuno di questi autori cita l'altro cosicché presumo che essi scoprirono la trasformazione simultaneamente ed indipendentemente. Sembra che Magnus sia stato spinto a tale soggetto dal precedente lavoro di Plücker nel quinto volume di Crelle che non ho ancora visto. Sai qualcosa delle ricerche precedenti sullo stesso tema?*"

[21] Dalla lettera di Cremona a Hirst, Bologna, 28 Ottobre 1864:

"*Io credo che nessuno prima di Steiner e Magnus abbia parlato della trasformazione conica. La memoria di Magnus, che è nell'8° volume di Crelle è uscita alla luce prima del libro di Steiner. Voi ve ne potete persuadere leggendo con attenzione la seconda parte della pag. IX, prefazione della* principali, ivi contenuti, erano stati trovati da lui già dal 1828; successivamente, grazie anche al fatto che non ne faceva alcun mistero, qualcuno li ha resi pubblici:

"*Die Hauptresultate, welche in diesem Werk entwickelt werden, habe ich schon von mehreren Jahren gefunden (und zwar die letzten vor der Mitte des Jahres 1828), in einer Epoche wo mir, als Privatlehrer, mehr Zeit und Musse zu Gebote stand, als seither, wo nicht selten drückende Amtsgeschäfte die Ausarbeitung verzögerten. Dass mittlerweile Einiges davon ins Publicum gekommen ist (wie z. B. namentlich ein Theil der Resultate in §.59. dieses Bandes), ist leicht erklärlich, da ich kein Geheimnils daraus machte. Diese Theilnahme war mir ein Beweis, dass meine Untersuchungen Beifall finden, sie erregt jetzt in mir die Hoffnung, dass nun auch die vollstaändige Mittheilung derselben nicht unberücksichtigt bleiben werde, denn es ist nicht unwahrscheinlich, dass durch gehörige Verschmelzung von Resultaten und Ideen des Einen mit Methoden des Andern noch mehr als eine neue Entdeckung sich machen lassen werde*"[22].

Inoltre, Cremona comunica all'amico (Bologna, 28 Ottobre 1864) che Magnus non aveva tardato a replicare contro le presunte insinuazioni di Steiner:

"*Contro queste insinuazioni di Steiner (legittime o no?) Magnus protestò nella pag. VII della prefazione della sua Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie*

Systematische Entwicklung, ove Steiner allude manifestamente con sottile ironia alla pubblicazione di Magnus."

[22] "*I risultati principali, che sono sviluppati in questo lavoro, li ho già trovati da alcuni anni (e precisamente gli ultimi dalla metà del 1828), un'epoca in cui, come insegnante privato, avevo più tempo libero a disposizione, che adesso, in cui le elaborazioni subiscono un ritardo a causa di non rare opprimenti mansioni. Nel frattempo qualcuno è arrivato a rendere pubblico (come per esempio una parte del risultato in §.59. di questo volume), è facilmente spiegabile, poiché non ne ho fatto nessun mistero. Quest'interesse era per me una prova che le mie ricerche trovano approvazione, e suscita in me la speranza che solo anche l'intera comunicazione delle stesse non rimanga ignorata, poiché non è improbabile che attraverso la giusta fusione dei risultati e le idee di uno con i metodi di un altro sia fatta ancora più che una nuova scoperta*."

(Berlin 1833), libro che io ho potuto consultare da poco tempo. Ivi Magnus fa anche allusione a trasformazioni in cui ad una retta corrisponda per es. una curva di 4° ordine con tre punti doppi e tre punti semplici fissi, ecc. Ma non dice di più su questo proposito. Dichiara inoltre che, se si estende la trasformazione conica allo spazio, ad un piano non corrisponde una superficie di 2° ordine, e con ciò vuole contraddire Steiner (Systemat. p. 295). Ma questi ha evidentemente inteso parlare di un caso particolare della trasformazione (in gewissen besondern Fällen)".

Magnus, dopo aver precisato che l'argomento in questione è stato reso pubblico solo grazie a lui, specifica che nei paragrafi del lavoro di Steiner si trovano solo quei risultati che aveva già trovato e resi noti ed anche altri dettagli minori, mentre rimangono omessi altri particolari da lui forniti:

"*In einer zu Ende des vorigen Jahres erschienenen Schrift unter dem Titel: Systematische Darstellung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten... von Jacob Steiner, die mir erst im Anfage des gegenwärtigen Jahres, als die erste Abtheilung der vorliegenden Sammlung größtentheils schon die Presse verlassen hatte, zu Gesicht gekommen, ist die oben erwähnte Verwandtschaft ebenfalls behandelt. Hr. Steiner sagt in seiner Vorrede, daß er die Resultate schon im Jahre 1828 gefunden habe, ohne sie bekannt zu machen, und fügt dann die Bemerkung hinzu: es sey leicht erklärlich, daß dieser Gegenstand in's Publicum gekommen sey, da er kein Geheimniß daraus gemacht habe. – Da nun dieser Gegenstand nur durch mich in's Publicum gekommen, so muß ich annehmen, Hr. St. will durch diese Bemerkung zu verstehen geben, ich habe diese Sache durch sein angebliches Nichtgeheimhalten erfahren. [...] Uebrigens spricht Hr. St. in derselben Vorrede zwar noch von einer vollständigen Mittheilung des genannten Gegenstandes; dessen ungeachtet finden sich in dem darauf bezüglichen Paragraphen seiner Schrift nur diejenigen Resultate, die ich bereits gefunden und bekannt gemacht hatte, und außerdem einige unbedeutende Einzelnheiten, wogegen denn* *wieder andere von mir gegebene Details weggelassen find. Und was die von Hrn. St. versuchte Ausdehnung auf den Raum betrifft, so ist diese, selbst wenn man seine Darstellung nur als eine Andeutung einer ausführlicheren Behandlung ansehen wollte, gänzlich mißlungen zu nennen, indem er nur particuläre Fälle der allgemeinen Verwandtschaft (zum Theil sogar ohne die unumgänglich nöthigen Bestimmungen) aufführt, den Hauptfall aber nicht einmal erwähnt*"[23].

Hirst risponde (Portsmouth, 19 Novembre 1864) a Cremona mostrandosi sorpreso del fatto che Magnus faccia riferimento a trasformazioni quartiche poiché nel lavoro apparso nel giornale di Crelle sembra chiaro che nella più generale trasformazione del primo ordine ad una retta di un piano corrisponde una conica nell'altro e viceversa:

"*The reference made to Magnus by Steiner in the preface of his Geometrische Gestalten had hitherto escaped me; it is quite evident that Magnus' paper in the 8th volume of Crelle had*

[23] "*Alla fine dello scorso anno è stato pubblicato un lavoro dal titolo: Systematische Darstellung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten... di Jacob Steiner, che mi è giunto in visione solo all'inizio di quest'anno, dopo che avevo già dato alla stampa la prima parte della presente raccolta in massima parte, che tratta ugualmente della succitata trasformazione. Herr Steiner dice nella sua prefazione che egli aveva trovato i risultati già nel 1828, senza farli conoscere, e poi inoltre aggiunge l'osservazione: è facilmente spiegabile che queste ricerche sono state pubblicate, di ciò non ne ha fatto mistero. - Poiché questo argomento è stato reso pubblico solo grazie a me, allora devo supporre che Herr Steiner vuole dare ad intendere attraverso la sua osservazione che io ho appreso questa cosa grazie al suo presunto segreto non tenuto. Dopo aver raccontato la storia della scoperta di quella trasformazione, che, come ho detto, è venuta fuori dalla generalizzazione delle collineazioni, e che in nessun modo, come Herr Steiner sembra credere, una nuova idea è quella di fondo, posso astenermi dal fare commenti riguardo quelle dichiarazioni infondate. Inoltre Herr Steiner parla nella prefazione stessa ancora di una versione intera del citato argomento; tuttavia si trovano nei relativi paragrafi del suo lavoro solo quei risultati, che io avevo già trovato e resi pubblici e inoltre anche alcuni dettagli minori, mentre si trovano ancora omessi altri dettagli forniti da me. E per quanto riguarda i tentativi di Herr Steiner di estendere allo spazio, anche se si vuole guardare la sua rappresentazione come solo un accenno di una trattazione più dettagliata, ciò è completamente fallito, dato che egli elenca solo i casi particolari della trasformazione generale (in parte perfino senza la necessaria determinazione), senza nemmeno menzionare il caso principale.*"

previously appeared and excited his hanger. Magnus' reply in his Sammlung von Aufgaben I have not yet been able to see; but must do so, as I shall shortly have to make allusion to the History of Quadric Transformation. I am surprised to hear that he there alludes to quartic transformation; for in his paper in the 8th volume of Crelle he regards the subject from a very restricted point of view, and makes it appear that if to a point in one plane corresponds but one point in the second and vice versa the transformation must be at most of the second order; that is to say to a right line in either plane must correspond a conic in the other. For, says he, the coordinates x, y of a point in the first plane must be related to the coordinates x_1, y_1 *of the corresponding point in the second plane by two equations of the form:*

$$(1)\qquad (ax+by+c)x_1 + (a'x+b'y+c')y_1 + (a''x+b''y+c'') = 0$$

$$(a_1x+b_1y+c_1)x_1 + (a'_1x+b'_1y+c'_1)y_1 + (a''_1x+b''_1y+c''_1) = 0.$$

He overlooks the fact that $x_1\, y_1$ *might be related in a similar manner to* $x_2\, y_2$ *, and these again to* $x_3\, y_3$*, and so on successively up to* $x_n\, y_n$*; and that, consequently, if from the 2n equations similar to (1) the intermediate 2(n-1) variables* $x_1\, y_1$*,* $x_2\, y_2$*, etc.* $x_{n-1}\, y_{n-1}$ *were eliminated, we should obtain two relations between x, y and* x_n*,* y_n *of a very different form; though still characterized by the property that to every value of x, y would correspond but one value of* x_n*,* y_n*, and vice versa. The transformation thus obtained would, of course, be the general one which you first investigated geometrically*"[24].

[24] "*Mi deve essere sfuggito il riferimento fatto a Magnus da Steiner nella prefazione del suo Geometrische Gestalten; è abbastanza evidente che il lavoro di Magnus è apparso precedentemente nell'ottavo volume di Crelle e ha provocato il suo spadino. Non sono ancora stato in grado di vedere la replica di Magnus nel suo Sammlung von Aufgaben; ma devo farlo poiché fra breve farò riferimento alla Storia delle Trasformazioni Quadratiche. Sono sorpreso di sentire che egli lì allude a trasformazioni quartiche; perché nel suo lavoro nell'ottavo volume di Crelle considera il soggetto da un punto di vista molto limitato e fa apparire che se ad un punto in piano corrisponde un sol punto nel secondo e viceversa la trasformazione deve essere al più del secondo ordine; che equivale a dire che*

I successivi lavori di Magnus, [Magnus 1833] e [Magnus 1837], vengono citati entrambi da Cremona in una successiva lettera ad Hirst del 20 Dicembre 1864. Qui il matematico italiano ipotizza che Magnus possa essersi accorto del suo errore, ma non approfondisce ulteriormente e confessa all'amico che non conosceva ancora il secondo lavoro di Magnus quando aveva pubblicato la sua nota del 1863:

"*Poiché non vi è possibile di consultare l'opera di Magnus (Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie, Bd.I, Berlin 1833), io voglio trasferirvene alcuni passi, che vi possono interessare per la parte storica: da essi vedrete che, dopo la pubblicazione della sua Memoria nel tomo 8° di Crelle, Magnus deve essersi accorto del suo errore di credere che la più generale trasformazione di una figura piana in un'altra, le quali si corrispondano punto per punto, sia del 2° ordine: però non fa allusione a quest'errore, e si limita a trattare nella Sammlung il soggetto da un altro punto di vista. [...] A pag. 230 poi, ove entra in materia, Magnus assume le due equazioni*

$$(ay+bx+c)u + (a'y+b'x+c')t + (a''y+b''x+c'')=0$$

$$(\alpha y+\beta x+\gamma)u + (\alpha' y+\beta' x+\gamma')t + (\alpha'' y+\beta'' x+\gamma'')=0$$

---

ad una retta in qualunque piano deve corrispondere una conica nell'altro. Egli dice che le coordinate x, y di un punto del primo piano devono essere in relazione con le coordinate x_1 y_1 del punto corrispondente nel secondo piano attraverso due equazioni della forma:

$$\text{(I)} \qquad (ax+by+c)x_1 + (a'x+b'y+c')y_1 + (a''x+b''y+c'') = 0$$

$$(a_1x+b_1y+c_1)x_1 + (a'_1x+b'_1y+c'_1)y_1 + (a''_1x+b''_1y+c''_1) = 0.$$

Egli trascura il fatto che x_1 y_1 potrebbero essere in relazione in un modo simile a x_2 y_2 e queste a loro volta a x_3 y_3 e così via successivamente fino a x_n y_n; e che, di conseguenza, se dalle 2n equazioni simili ad (I) fossero eliminate le 2(n-1) variabili intermedie x_1 y_1, x_2 y_2, etc. x_{n-1} y_{n-1}, otterremmo due relazioni tra x, y e x_n, y_n di forma molto differente; anche se caratterizzate ancora dalla proprietà che ad ogni valore di x, y corrisponderebbe un solo valore di x_n, y_n e viceversa. La trasformazione allora ottenuta sarebbe, naturalmente, quella più generale su cui tu per primo hai indagato geometricamente."

come definizione della Verwandtschaft (trasformazione) *che prende a studiare, ma non dice menomamente che questa sia la più generale in cui i punti si corrispondano ad uno ad uno.*
E' poi superfluo che vi dica che non avevo ancora fatta questa osservazione, anzi non conosceva l'opera di Magnus, quando pubblicai la mia Nota Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane."

La "derivazione di trasformazione" di Bellavitis

Nella discussione fra Cremona e Hirst sulle origini della nozione di trasformazione birazionale si colloca anche la "riscoperta" da parte di Hirst dei lavori di Bellavitis sulle trasformazioni quadratiche. Il matematico inglese è guidato, molto probabilmente, dal riferimento esplicito di Schiaparelli ai lavori di Bellavitis. Hirst pone l'attenzione sulla priorità del matematico veneto riguardo la definizione del concetto d'inversione[25] (sia quella ordinaria che quella quadrica), considerata non come strumento per la risoluzione di singoli problemi, ma come oggetto di studio sistematico[26]. Ci è sembrato quindi che tale "riscoperta" costituisca un elemento significativo nel dialogo Hirst-Cremona, almeno per quanto concerne l'interesse per la storia di tali trasformazioni.
Giusto Bellavitis[27] (1803 - 1880), l'ideatore del metodo delle equipollenze[28], teoria che anticipa il moderno calcolo vettoriale, pubblica oltre duecento memorie in diversi settori della matematica, ma le sue ricerche più feconde riguardano l'algebra e la geometria: *Saggio di applicazioni di un nuovo metodo di Geometria analitica (Calcolo delle equipollenze)* (1835),

---

[25] In realtà in quel periodo in ambiente inglese l'"invenzione" dell'inversione circolare era generalmente attribuita a Stubbs come si vedrà più avanti.

[26] Oggi tale fatto è generalmente riconosciuto. In [Patterson 1933] l'autore scrive: "*For a systematic development of the theory of inversion from a definition such as we give today, we turn to Italy and the work of Bellavitis*".

[27] Per maggiori riferimenti bibliografici si rimanda a [Canepa 1994].

[28] Per ulteriori approfondimenti si rinvia a [Freguglia 1992].

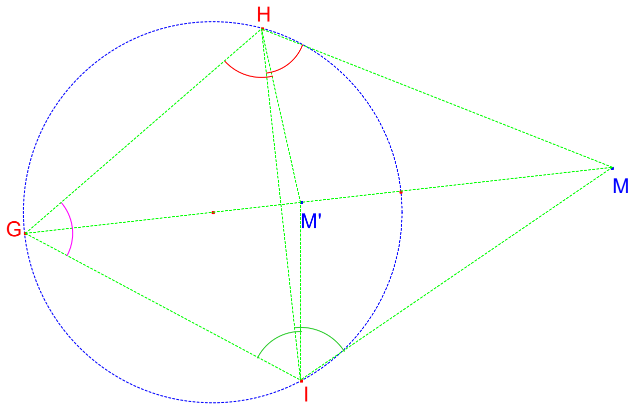
Teoria delle figure inverse, e loro uso nella Geometria elementare (1836), *Memoria sul metodo delle equipollenze* (1837), pubblicati tutti negli Annali delle scienze del Regno Lombardo-Veneto. Nel 1838 appare negli Atti dell'Accademia di Padova il lavoro *Saggio di geometria derivata* in cui il matematico di Bassano espone i principi della Geometria di "derivazione" (nome con il quale l'autore indica le trasformazioni geometriche): "*Parmi che il nome più conveniente ed espressivo dei metodi che ora mi propongo di esporre, sia quello di metodi di derivazione: infatti il loro processo consiste nel dedurre le proprietà delle figure da quelle di altre meglio conosciute, che si suppongono derivate dalle prime secondo una data legge. È dunque facile prevedere che in questa Memoria si debbono esporre le più utili maniere di derivare una figura da un'altra, ed indicare in pari tempo le leggi, secondo le quali le proprietà d'una figura si mutano o si conservano le stesse rispetto all'altra: alcuni esempii serviranno poi a mostrare l'uso di queste derivazioni e di queste leggi. Le derivazioni che andremo considerando sono: la projezione, che comprende l'affinità e la similitudine; la derivazione polare, che contiene la reciprocità e la derivazione polare-parabolica; e la trasformazione, di cui è un caso particolare l'inversione.*"

Lo sforzo didattico, di mettere cioè al corrente l'ambiente matematico italiano della nuova geometria d'oltralpe, è evidente e significativo. Occorre forse ricordare che si tratta di uno scritto di ben venti anni antecedente all'istituzione delle cattedre di Geometria Superiore della nuova Italia unitaria. Scrive infatti Bellavitis riferendosi al trattato di Poncelet:

"*L'Opera del Poncelet, intitolata Traité des propriétés projectives des figures, Paris 1822, contiene la maggior parte di queste nuove dottrine, e ne presenta numerosissime applicazioni; [...] esse rimangono ignorate o non curate da qualche giovane matematico e pare che in Italia non vi si abbia fatta tutta l'attenzione che meritavano. Io credo perciò che sarebbe proficua pei giovani studiosi un'opera che nel ristretto spazio e quasi in un quadro presentasse i più generali metodi geometrici, ne mostrasse la concatenazione, e rendesse* *palese il modo con cui debbono adoperarsi per la soluzione dei problemi e per lo scoprimento di nuovi teoremi.*"

Dopo essersi occupato delle proiezioni, in particolare di omologie, passa alla trasformazione polare delle figure piane e alla trasformazione delle figure nello spazio. Analizza poi le proprietà metriche proiettive e le proprietà proiettive di una conica dedotte da quelle della circonferenza facendo uso delle affinità. Non è qui il caso di addentrarci nell'esame di questo lavoro: ci limitiamo a osservare che si tratta del primo tentativo di introdurre in Italia in modo organico la geometria proiettiva riferendosi soprattutto ai testi classici (oltre che dei citati Poncelet e Steiner) di Möbius, Plücker e Magnus, testi che il matematico veneto sembra aver maturato a fondo. Per quello che riguarda in particolare questo intervento, va rilevato che la presenza (assai rilevante in tutta l'opera) di Magnus si riflette anche nell'ultima parte in cui Bellavitis prende in esame le trasformazioni quadratiche che egli chiama semplicemente "trasformazioni": "*Può dirsi in qualche maniera che le derivazioni precedentemente considerate non mutano la forma delle figure, poiché non mai le rette si cangiano in curve, né queste in quelle. Ora accennerò un'altra derivazione, la quale muta le rette in coniche: io la chiamerò per tal motivo trasformazione. La trasformazione da una figura ad un'altra fu presentata dai Geometri sotto varii aspetti, cui giova conoscere, se non fosse per altro, per convincersi della identità delle risultanze. Noi accenneremo qui brevemente quelle leggi di trasformazione che s'appoggiano a sole considerazioni geometriche, riserbando ad un'apposita nota l'esame dei metodi algebrici.*"

Il modo in cui egli lavora è quindi puramente geometrico. In un piano contenente una figura, considera tre punti arbitrari G, H, I e ad ogni punto M della figura corrisponde il punto M' in modo tale che si abbia l'uguaglianza fra gli angoli $M\hat{H}I = G\hat{H}M'$ e $M\hat{I}H = G\hat{I}M'$ (sotto tale ipotesi si avrà che $M\hat{G}I = H\hat{G}M'$).



Tutti i punti determinati in tal modo appartengono ad una seconda figura, trasformata della prima. Seguendo Magnus, chiama i punti G, H, I punti cardinali della trasformazione e, citando Steiner, denota il triangolo da essi formato triangolo cardinale. Consideriamo ora il fascio (che Bellavitis chiama stella) di rette per H e quello di centro I. Se il punto M si muove lungo una retta, la corrispondenza che alla retta HM fa corrispondere la retta IM è una proiettività tra i due fasci. Per quanto precedentemente dimostrato risulta che anche la corrispondenza tra HM' e IM' è una proiettività: quindi il punto M' descrive una conica che passa per i tre punti cardinali. A tale legge vi sono due eccezioni: "*1.° se la retta passa per uno dei punti cardinali, la sua trasformata è un'altra retta di quel medesimo punto cardinale, ed i loro punti corrispondenti formano due rette collineari; 2.° se la retta sia un lato del triangolo cardinale, tutti i suoi punti hanno per unico trasformato il punto cardinale opposto a quel lato. […] Sono pure canoni della trasformazione i seguenti: la trasformata di ogni conica che passa per tre punti cardinali, − o per due soltanto, – o per uno, – o per nessuno, è una retta, – una conica che passa pei medesimi due punti cardinali, – una curva del 3.° ordine che ha in quel punto cardinale un punto doppio, – una curva del 4.° ordine che ha un punto doppio in ciascuno dei punti cardinali*". La trasformata della retta all'infinito è la circonferenza che circoscrive il triangolo cardinale, ma, afferma Bellavitis, che esistono altri casi in cui ciò non accade. Ad esempio nel caso particolare in cui gli angoli $M\hat{H}M'$ e $M\hat{I}M'$ siano costantemente retti, allora il terzo punto G è all'infinito, ovvero la retta impropria è la trasformata di sé stessa. Naturalmente la trasformazione individuata da Bellavitis si articola in vari casi, a seconda che i tre punti dati siano al finito o all'infinito, reali o immaginari, distinti o coincidenti. Negli ultimi paragrafi di questo lavoro Bellavitis ritrova, come caso particolare di tale trasformazione, l'inversione circolare di cui si era occupato nella sua memoria del 1836 sulla teoria delle figure inverse e, nell'ultimo paragrafo, accenna, brevemente, ma chiaramente, alla generalizzazione che, successivamente, porterà Hirst alla definizione dell'inversione quadrica: "*La projezione e la legge di continuità ci autorizzano a generalizzare la trasformazione indicata nel §. precedente* (inversione circolare)*, mutando il circolo ausiliario in una conica, e prendendo ad arbitrio il punto I; gli altri due punti cardinali K L saranno le intersezioni della conica colla polare di I. Per qualunque punto M si condurrà la retta IM, la quale sarà tagliata dalla conica nei punti P Q, ed il punto M' armonico coi tre P M Q sarà il punto trasformato di M. Si osservi che anche la figura trasformata ha i medesimi punti cardinali I K L, ma che il K di una figura corrisponde coll'L dell'altra, e viceversa; invece I corrisponde a sé medesimo.*"

Il contributo di Beltrami del 1862

Nella nota [Beltrami 1862] appare evidente l'interesse di Eugenio Beltrami (1835 - 1900) per le trasformazioni quadratiche[29]. Considerato in un piano un quadrilatero completo, ovvero il sistema costituito da quattro punti e dai sei segmenti che a due a due li congiungono, ogni altra retta del piano viene trasformata in una conica (la *conica dei nove punti*[30] relativa a tale retta), circoscritta al triangolo, che chiama fondamentale, formato dai punti d'intersezione

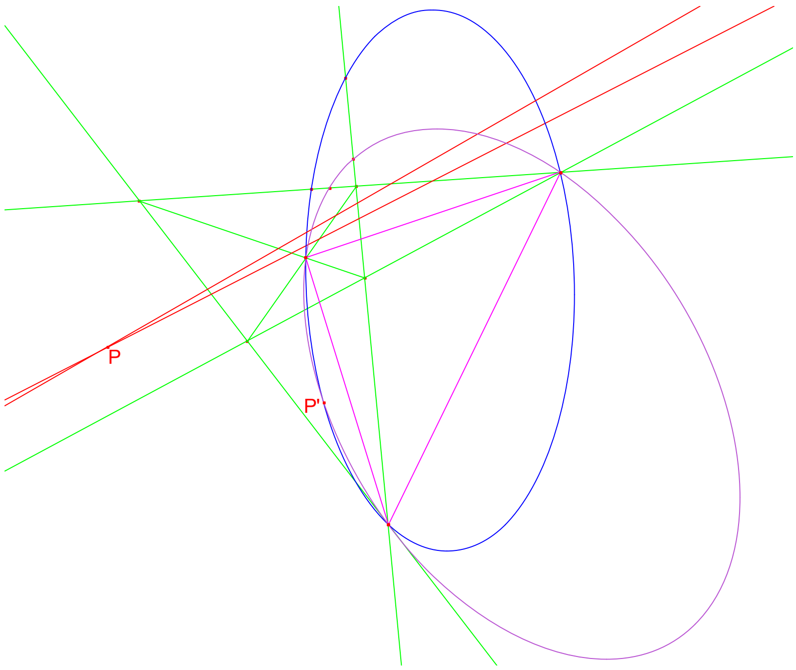
[29] Nell'Ottobre 1862 Beltrami fu nominato professore straordinario di Algebra complementare e Geometria analitica all'Università di Bologna ed è molto probabile che abbia discusso con Cremona sul tema delle trasformazioni quadratiche.

[30] Tale conica passa per i tre vertici del triangolo fondamentale e per i coniugati armonici dei sei punti d'intersezione di una qualsiasi retta con i lati del quadrilatero o dei loro prolungamenti.

delle tre coppie di lati opposti del quadrilatero. Viceversa, ogni conica circoscritta ad un tale triangolo, connesso con un quadrilatero, si può considerare come corrispondente ad un'unica retta del piano.

In tal modo Beltrami presenta questa trasformazione: "*Abbiamo qui dunque una correlazione di punti la quale procede con questa legge, che ad ogni punto del piano corrisponde un altro punto unico ed individuato del piano stesso, e ad ogni retta corrisponde una unica ed individuata conica circoscritta ad un triangolo invariabile di forma e di posizione, e reciprocamente. Questa correlazione rientra in quella più generale che venne già discussa da parecchi geometri, in particolare da Steiner (Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, Berlino 1832), da Magnus (Giornale di Crelle, tomo VIII, 1832), e più recentemente dal chiar. sig. prof. Schiaparelli (Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino, serie 2ª, tomo XXI, 1862)*". Beltrami era in contatto con Schiaparelli già dal 1861, come si evince dalla sua lettera inviata al prof. Enrico Betti il 2 Ottobre 1863 e pubblicata in [Giacardi - Tazzioli 2012]. Inoltre in [Negri Lodrini 2013-14] si ribadisce che i primi incontri di Beltrami con Schiaparelli risalgono al 1861.

Dato un qualunque punto P del piano e due qualsiasi rette passanti per tale punto, le coniche dei nove punti corrispondenti a tali rette s'intersecano, oltre che nei vertici del triangolo fondamentale, anche in un quarto punto P', che è il trasformato del punto di partenza, come si evince dalla seguente immagine:

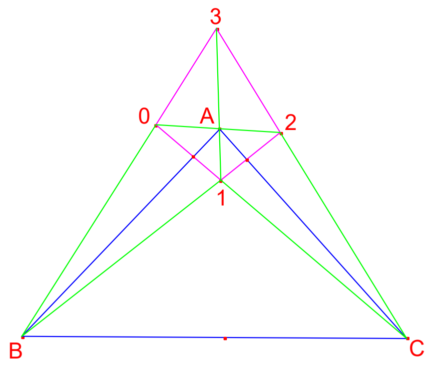


Indicando con (α, β, γ) e $(\alpha', \beta', \gamma')$ le coordinate di due punti corrispondenti, le equazioni che rappresentano tale trasformazione sono date da:

$$\alpha\alpha' : \beta\beta' : \gamma\gamma' = a^2 : b^2 : c^2,$$

essendo a, b, c, parametri relativi alle coordinate dei vertici del quadrilatero completo. Da tali equazioni si deduce che gli unici punti del piano che sono fissati, sono i quattro vertici del quadrilatero, detti punti doppi della trasformazione. Inoltre, poiché in ogni retta esiste solo una coppia di punti corrispondenti (che sono i punti d'intersezione della stessa retta con la conica corrispondente), ne segue che condizione necessaria e sufficiente affinché una retta del piano sia tangente alla conica che le corrisponde è che essa passi per uno dei vertici del quadrilatero. Attraverso considerazioni di tipo analitico Beltrami deduce il seguente teorema: "*Se le infinite tangenti di una stessa conica circoscritta al triangolo fondamentale si riguardano come altrettante trasversali, ad esse corrispondono infinite coniche tutte tangenti ad una medesima retta, che è quella cui corrisponde la conica data*". Come caso particolare di questo teorema si ha che le infinite tangenti della conica corrispondente alla retta all'infinito sono trasformate in infinite coniche tutte tangenti alla retta impropria, ovvero sono delle parabole, così come alle rette che incontrano tale conica in due punti reali e distinti corrispondono iperboli, mentre a quelle che non la incontrano corrispondono ellissi.

Beltrami prosegue la sua analisi esponendo la proprietà più importante di tale trasformazione. Dapprima precisa che le rette polari di uno stesso punto rispetto al sistema delle infinite coniche circoscritte ad un quadrilatero s'intersecano tutte in uno stesso punto e che il luogo geometrico dei poli di una qualsiasi retta rispetto al suddetto sistema non è altro che la conica di nove punti corrispondente a quella retta. Inoltre se da un punto del piano si conducono le rette ai tre vertici del triangolo fondamentale e di tali rette si determinano le coniugate armoniche rispetto ai due lati del quadrilatero, le tre nuove rette così ottenute passano tutte per uno stesso punto, che è il corrispondente del primo. "*Se il primo punto si muove nel piano descrivendo una retta, il punto determinato nel modo anzidetto descrive una conica circoscritta al triangolo fondamentale, e questa conica non è altro che la conica corrispondente a quella retta*". A tutti i punti di una retta passante per uno dei vertici del triangolo fondamentale corrispondono punti di un'altra retta passante per lo stesso vertice e coniugata armonicamente con la prima rispetto ai due lati del quadrilatero che concorrono in quel vertice. Quindi Beltrami enuncia il teorema relativo all'involuzione delle rette condotte da un vertice del triangolo a più coppie di punti corrispondenti e le rette fissate di tale involuzione sono quelle che congiungono ogni vertice del triangolo ai quattro punti doppi, punti che sono a due a due allineati col vertice stesso. Facendo uso di quest'ultimo teorema si vede facilmente che "*a ciascun punto di uno dei lati del triangolo fondamentale corrisponde il vertice opposto e a ciascun vertice corrisponde un punto arbitrario del lato opposto*".



Nell'ultima parte del suo lavoro Beltrami passa ad analizzare il grado della trasformata di una curva, dimostrando che ad una curva di grado n non può corrispondere una curva di grado maggiore di $2n$. Inoltre dimostra che se si vuole determinare una curva di grado n, la cui corrispondente abbia grado m, per quanto detto sopra $m \geq \frac{1}{2}n$, è sufficiente che $2n - m$ punti della curva di partenza cadano nei tre vertici del triangolo fondamentale. Così ad esempio una conica viene trasformata in una retta se passa per tutti e tre i vertici, in un'altra conica se passa soltanto per due vertici e in una curva di terzo grado se passa per un solo vertice del triangolo.

Nel 1874 Beltrami ritornerà sul tema delle trasformazioni quadratiche in [Beltrami 1874], in cui, mediante una trasformazione iperbolica, ottiene una rappresentazione proiettiva dell'ipocicloide tricuspide[31].

La memoria di Cremona del 1863

Nel primo dei due lavori relativi alle trasformazioni geometriche delle figure piane, il punto di partenza di Cremona consiste nell'imporre le condizioni necessarie cui deve soddisfare l'insieme di curve di un piano affinché siano immagini di un fascio di rette di un altro piano. Dal fatto che tali curve corrispondono a rette, si può dedurre che gli elementi di una *rete*

[31] Di tale lavoro di Beltrami se ne sono occupate N. Palladino e M. A. Vaccaro in *L'ipocicloide tricuspide e l'estetica nella Matematica*, in preparazione.

omaloidica di grado n[32] di una trasformazione che muta rette in curve di grado n devono soddisfare la proprietà che per ogni coppia di punti esiste soltanto una curva della rete che passa per quei due punti. Ora, poiché una curva di grado n è determinata da $\frac{n(n+3)}{2}$ condizioni, allora le curve della rete devono soddisfare $\frac{n(n+3)}{2} - 2 = \frac{(n-1)(n+4)}{2}$ condizioni comuni. Inoltre, poiché due rette hanno uno ed un solo punto in comune, allora, analogamente, due curve della rete devono avere uno ed un solo punto in comune; quindi, dato che due curve di grado n hanno n^2 punti in comune, necessariamente tutte le curve della rete dovranno avere $n^2 - 1$ intersezioni comuni. D'altra parte, siccome un punto di molteplicità r comune a due curve è equivalente a r^2 loro intersezioni, indicato con x_r il numero di punti di molteplicità r tra quelli comuni a tutte le curve della rete, si deve avere che:

$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 + ... + (n-1)^2 x_{n-1} = n^2 - 1. \tag{1}$$

D'altro canto, il fatto che una curva possiede un punto di molteplicità r equivale ad imporre $\frac{r(r+1)}{2}$ condizioni e considerato che gli $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{n-1}$ punti comuni alle curve della rete costituiscono le $\frac{(n-1)(n+4)}{2}$ condizioni che la determinano, allora deve essere soddisfatta anche la seguente equazione:

$$x_1 + 3x_2 + 6x_3 + ... + \frac{n(n-1)}{2} x_{n-1} = \frac{(n-1)(n+4)}{2}. \tag{2}$$

Se per riduzione dalle (1) e (2) si elimina x_1, si ottiene l'equazione:

$$x_2 + 3x_3 + ... + \frac{(n-1)(n-2)}{2} x_{n-1} = \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

[32] Si definisce *rete* un sistema lineare di curve di grado n di dimensione (proiettiva) due. Una rete di curve algebriche di grado n si dice *omaloidica* se ha un numero di punti base (comuni a tutte le curve), contati con la loro molteplicità, pari a $n^2 - 1$.

da cui si ricava la soluzione più immediata delle due equazioni, ovvero

$$x_{n-1} = 1,\ x_2 = x_3 = \dots = x_{n-2} = 0 \text{ e } x_1 = 2(n-1).$$

Cremona afferma che le equazioni (1) e (2) sono le uniche condizioni cui devono soddisfare i numeri interi positivi $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ e basandosi su tali equazioni ricava, per esempio, che per $n = 2$, le due equazioni si riducono alla singola $x_1 = 3$, che significa che alle rette di una figura corrispondono nell'altra curve di secondo grado circoscritte ad un triangolo, ottenendo così ciò che era stato determinato da Magnus, Steiner e Schiaparelli. Invece se si considera $n = 3$, dalle due equazioni si ottiene: $x_1 = 4$ e $x_2 = 1$, ovvero le curve della rete hanno tutte un punto doppio (e sono quindi razionali) e quattro punti semplici in comune. E seguitando così Cremona procede a costruire per ogni n, utilizzando metodi puramente geometrici, trasformazioni di grado n.

L'inversione quadrica di Hirst

Il rapporto di amicizia tra Cremona e Thomas Archer Hirst (1830 - 1892) è profondo e duraturo. Il matematico inglese nasce il 22 Aprile 1830 a Heckmondwike, nel Yorkshire, e dopo aver conseguito il dottorato a Marburg nel 1852, con una tesi dal titolo *On conjugate diameters of the triaxial ellipsoid*, relatore il professore Wilhelm Schell, continua i suoi studi a Gottinga, dove incontra Gauss, a Berlino, dove diviene amico di Dirichlet e Steiner, a Parigi e Roma. Nel Giugno del 1859 a Cremona incontra per la prima volta il matematico italiano, ma la loro amicizia si svilupperà solo a partire dal 1864 durante un soggiorno di un mese di Hirst a Bologna. In quel periodo (1860-1865) Hirst insegna matematica all'University College School di Londra occupandosi di superfici pedali e la conoscenza con Cremona é così determinante per lui da orientare le sue ricerche sulla geometria pura. Dal 1865 al 1867 insegna fisica matematica all'University College di Londra e successivamente viene nominato professore di matematica pura, incarico che manterrà fino al 1870. Nel 1865 Hirst è tra i fondatori della London Mathematical Society e nel decennio 1873-83 è primo direttore degli Studi del Royal Naval College di Greenwich. A causa di un'epidemia d'influenza e avendo il fisico debilitato da precarie condizioni di salute, muore a Londra il 16 Febbraio 1892.

Il sodalizio umano che s'instaura fra i due matematici avvia una collaborazione scientifica che si rivela proficua per entrambi: Hirst si occupa della traduzione di alcuni lavori di Cremona per la pubblicazione su riviste inglesi e si fa carico di comunicarne i risultati per la divulgazione in congressi scientifici (ad esempio, il thirty-fourth Meeting of the British Association for the Advancement of Science, tenutosi a Bath nel Settembre del 1864). Dal canto suo Cremona tiene costantemente aggiornato Hirst sullo stato delle sue ricerche, sugli avvenimenti scientifici italiani e cura la traduzione del suo articolo *On the quadric inversion of plane curves* per la pubblicazione sugli Annali di Matematica.

Citando L. Nurzia[33] da cui si sono attinte principalmente tali notizie "*La corrispondenza tra Cremona e Hirst rappresenta un documento di estremo interesse non solo perché permise di aprire un canale di comunicazione tra il mondo matematico italiano e quello britannico, ma anche perché l'amicizia scientifica e umana li portava a trattare temi di varia natura esprimendo sempre apertamente il loro pensiero*".

Nel 1865 viene stampato il lavoro di Hirst [Hirst 1865] e pubblicato nello stesso anno presso gli Annali di Matematica Pura ed Applicata[34] tradotto in italiano, come si è già detto, proprio da Cremona[35]. Si riporta un breve stralcio dall'introduzione:

---

[33] [Nurzia 1999].

[34] T. A. Hirst, *Sull'inversione quadrica delle curve piane*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, s. I, VII, 1865, pp. 49-65.

[35] Cremona in una nota a piè pagina introduce così il lavoro del suo amico e collega: *Stimiamo cosa buona e utile il far conoscere ai lettori degli Annali questo importante ed elegantissimo lavoro del nostro amico, il Sig. Hirst. Chiediamo poi licenza di derivare quadrico da quadro, come cubico da cubo.*

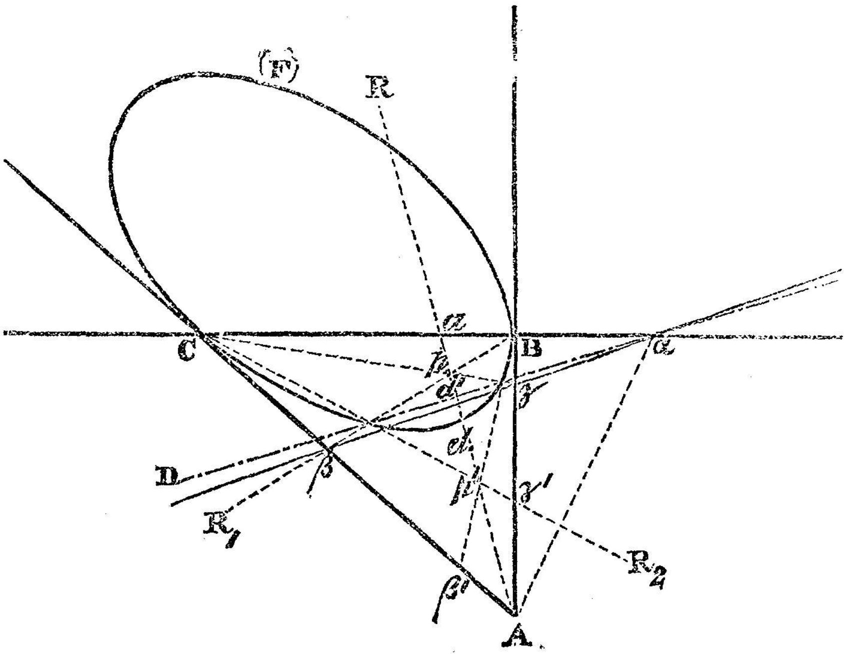
"*Il metodo di inversione che forma l'argomento di questa memoria è un'immediata generalizzazione di quello che ora è universalmente adoperato. In luogo di un circolo fisso coll'origine nel suo centro, si prende come curva fondamentale una qualsivoglia conica (quadrica) fissa, e si pone l'origine in un punto qualunque del suo piano. Per tal modo parecchie relazioni descrittive che nella teoria ordinaria sono mascherate, riguadagnano quella generalità e quel risalto che loro competono. Essendomi da molto tempo convinto della utilità di questo metodo generalizzato di inversione, credo desiderabile che se ne stabiliscano i primi principi generali, collo scopo di futuri rinvii. E siccome vorrei che il lettore si familiarizzasse il più possibile cogli effetti della inversione, così faccio uso di considerazioni puramente geometriche e do sempre la preferenza alla diretta e immediata contemplazione delle varie forme geometriche che si offrono da sé stesse. […] La relazione che il metodo presente ha con quello, un po' più generale, della trasformazione quadrica, sviluppato nel 1832 da Steiner nel suo libro Geometrische Gestalten, e da Magnus nell'8° volume del giornale di Crelle, offre alcuni punti importanti sui quali mi propongo di ritornare in una futura occasione (*).*

In una nota a piè pagina Hirst aggiunge:

(*) Non senza interesse ho trovato di recente che il metodo dell'inversione quadrica fu esplicitamente suggerito, quantunque non sviluppato, dal prof. Bellavitis di Padova, non meno di ventisette anni fa. Considerando la data della sua pubblicazione, la memoria, nell'ultimo paragrafo della quale è suggerito quel metodo, è rimarchevole per più rispetti. Ha per titolo Saggio di Geometria derivata[36]*, e fa parte del 4° volume dei Nuovi Saggi dell'i. r. Accademia di scienze, lettere ed arti di Padova. Due anni prima, cioè nel 1836, lo stesso geometra aveva esposti completamente i principii dell'ordinario metodo dell'inversione circolare; la quale ultima, dopo un lasso di sette anni fu proposta (sembra) per la prima volta*

[36] [Bellavitis 1838].

in Inghilterra dal sig. J. W. Stubbs in una memoria On the application of a new method to the geometry of curves and curves surfaces, inserita nel Philosophical Magazine vol. XXIII, pag. 338[37]".



L'inversione quadrica altro non è che l'inversione polare rispetto ad una conica fondamentale, ovvero l'inverso di un punto è l'intersezione della sua polare, rispetto ad una conica *F*, con la retta che lo congiunge con l'origine *A*. Le diverse coppie di punti inversi p e p' su una retta qualunque *R* passante per l'origine *A*, formano un'involuzione, i cui punti doppi sono le intersezioni reali o immaginarie della retta *R* con la conica fondamentale *F*.

Hirst, seguendo le notazioni introdotte da Magnus, chiama *punti principali* l'origine *A* e i due punti di contatto *B* e *C* delle tangenti condotte da *A* alla conica fondamentale *F*; *triangolo principale* il triangolo di vertici i punti principali e *rette principali* le polari *BC*, *AB* ed *AC*. Tuttavia quando si vuole distinguere i punti *B* e *C* dall'origine *A* (che è sempre reale), questi si diranno *punti fondamentali* e, per analogia, *rette fondamentali*, le rette *AB* ed *AC*. Ad eccezione dei tre punti principali, ciascuno dei quali è inverso di ogni punto della sua polare,

[37] Patterson in [Patterson 1933] fa risalire le origini dell'inversione circolare attorno agli anni venti dell'Ottocento mediante i lavori di Dandelin, Quetelet e Steiner.

ogni punto p ha un unico inverso p'. Inoltre i punti della conica F sono gli unici punti che godono della proprietà di essere inversi di se stessi. Da ciò segue il seguente teorema: "*se due curve hanno un contatto r-esimo in un punto p che non sia sopra una retta principale, anche le loro inverse avranno un contatto r-esimo nel punto inverso p'* ".

Quindi Hirst passa ad occuparsi della relazione che sussiste fra gli ordini delle curve inverse affermando che "*l'inversa quadrica completa di una curva qualunque dell'ordine n è una curva dell'ordine 2n, che ha un punto multiplo del grado n in ciascuno dei tre punti principali*". Puntualizza il fatto che ha utilizzato il termine "completa" perché in alcune circostanze la curva inversa si decompone in una o più delle rette principali, ciascuna presa una o più volte, e in una *effettiva* curva inversa di grado minore che passa un minor numero di volte per i punti principali.

Riguardo l'inversa di una retta, essa è, in generale, una conica passante per i tre punti principali, per le due intersezioni della conica fondamentale con la retta e per il polo di quest'ultima rispetto alla conica. Nel caso in cui la retta passa per un punto principale, allora la conica inversa si decompone nella retta principale (polare di quel punto) e in un'altra retta, l'inversa effettiva, passante per il punto principale opposto a quella della retta principale. Da ciò segue che "*l'inversa effettiva di una retta passante per uno dei due punti fondamentali è una retta passante per l'altro e queste rette inverse si segano sempre sulla conica fondamentale*". Da quest'ultimo teorema e dal precedente si ottiene che "*se l'una di due curve inverse ha un contatto r-esimo (non sopra una retta principale) con una retta passante per un punto fondamentale, l'altra avrà un contatto r-esimo colla retta inversa che passa per l'altro punto fondamentale; e i punti di contatto, essendo inversi fra loro, sono collineari coll'origine*".

Indicando con I la conica inversa della retta impropria e osservato che l'inverso del punto all'infinito di una retta R, passante per l'origine, è il punto medio del segmento che la conica fondamentale F intercetta su R e che i punti impropri di F appartengono necessariamente pure ad I, allora si ha che "*la conica I circoscritta al triangolo principale, che è inversa della retta all'infinito, è simile e similmente posta alla conica fondamentale, della quale taglia pel mezzo tutte le corde convergenti all'origine*".

Hirst dopo aver investigato sulle tangenti alle curve inverse nei punti inversi ed esaminato le singolarità delle curve inverse, analizza alcuni casi speciali dell'inversione quadrica che corrispondono ad ipotesi particolari riguardo la posizione dell'origine A e la natura della conica fondamentale F[38].

1. Nel caso in cui la conica fondamentale F sia un'iperbole con centro nell'origine A, gli asintoti costituiscono le rette fondamentali e le loro intersezioni con la retta impropria sono i punti fondamentali. Ogni retta parallela ad un asintoto ha per inversa una retta parallela all'altro e tali rette si tagliano sull'iperbole fondamentale. L'inversa di ogni altra retta del piano è un'iperbole passante per l'origine con asintoti paralleli a quelli dell'iperbole fondamentale. Inoltre l'inversa della retta all'infinito, la conica I, si risolve in questi stessi asintoti. Le tangenti a due curve inverse in due punti inversi p e p' s'intersecano su una retta D che divide a metà pp' ed è parallela al diametro dell'iperbole fondamentale coniugato a pp'. In definitiva Hirst conclude che "*quando la conica fondamentale è un'iperbole equilatera, l'origine essendo sempre nel centro di essa, il metodo d'inversione diviene identico colla trasformazione iperbolica studiata dal prof. Schiaparelli di Milano, nella sua interessante memoria Sulla trasformazione geometrica delle figure. Allora la retta D, sulla quale si intersecano le tangenti a due curve inverse in punti inversi p, p', non solamente divide per metà pp', ma è inclinata dello stesso angolo, come pp', a ciascuno degli asintoti dell'iperbole fondamentale*".

[38] Casi speciali dell'inversione quadrica, relativi a particolari scelte della conica e dell'origine, sono illustrati in [Caddeo - Franzoni - Piu 2013].

2. Nel caso in cui la conica fondamentale F sia un'ellisse con centro nell'origine A, l'inversa di ogni retta del piano è un'ellisse passante per l'origine. L'ellisse I inversa della retta impropria si risolve in un punto che coincide con l'origine. Le tangenti a due curve inverse in due punti inversi p e p' s'intersecano ancora su una retta D che dimezza pp' ed è parallela al diametro dell'ellisse fondamentale coniugato a pp'. Quindi "*quando la conica fondamentale è un circolo col centro nell'origine, abbiamo il caso dell'inversione circolare, e i punti circolari (immaginari) all'infinito sono i punti fondamentali; la retta D diviene, com'è noto, perpendicolare a pp' nel suo punto di mezzo. L'inversa circolare di una retta passante per uno dei punti circolari è una retta passante per l'altro, e le due rette si segano sul circolo fondamentale*".
3. Nel caso in cui la conica fondamentale sia costituita da due rette reali F_1 ed F_2 che s'intersecano nel punto F, allora i punti fondamentali B e C coincidono con F e la retta principale BC è la coniugata armonica di AF rispetto alle rette F_1 e F_2. La conica I inversa della retta impropria è un'iperbole per la quale AF è un diametro e gli asintoti sono paralleli ad F_1 e F_2.
4. Nel caso in cui la conica fondamentale sia costituita da due rette immaginarie che s'intersecano in un punto reale F, gli effetti dell'inversione sono analoghi a quelli considerati nel caso precedente.

Hirst non analizza il caso particolare in cui la conica fondamentale sia una parabola. Riguardo l'analisi dei suddetti casi particolari, i primi due corrispondono rispettivamente alla trasformazione iperbolica (come ribadisce lo stesso autore) e a quella ciclica di Schiaparelli, invece il terzo e il quarto caso sono analoghi alla trasformazione parabolica.

La data di pubblicazione sui Proceedings of the Royal Society di tale manoscritto è il 2 Marzo 1865; in una lettera inviata a Cremona il 16 Ottobre 1864, di cui riportiamo uno stralcio perché sembra chiarire bene il ruolo che il dialogo fra i due matematici ha avuto nello sviluppo delle loro idee, Hirst descrive per la prima volta all'amico i suoi studi sull'inversione quadrica:

"*Quadric inversion bears precisely the same relation to the more general conic transformation of Steiner and Magnus, that the homological transformation of Poncelet bears to the homographical transformation of Chasles (or what is the same the collinear transformation of Möbius). In fact just as in two homographic figures in the same plane there are in general but three points which coincide with their corresponding points, whilst in homological figures there are an infinite number situated on the axis of homology; so in two figures (isographic according to de Jonquières) obtained from each other by conical transformation there are but four points which coincide with their corresponding points, whilst in two quadric inverse figures there are an infinite number situated all on the fundamental conic. Again just as two homographic figures in different planes may always be projected into two homological figures in the same plane, so two figures, in different planes, obtained one from the other by conical transformation, may always be projected into two quadric-inverse figures in the same plane"* [39].

Hirst sottolinea la curiosa differenza nella storia di tali trasformazioni, ovvero mentre la scoperta delle figure omologiche ha preceduto quella delle figure omografiche, i principi della

[39] "*L'inversione quadrica produce esattamente la stessa relazione alla più generale trasformazione conica di Steiner e Magnus, che la trasformazione omologica di Poncelet dà alla trasformazione omografica di Chasles (o che è lo stesso la trasformazione collineare di Möbius). Infatti, così come in due figure omografiche nello stesso piano ci sono in generale solo tre punti che coincidono con i loro punti corrispondenti, mentre in figure omologiche ce ne sono un numero infinito situato sull'asse di omologia; così in due figure (isografiche secondo de Jonquières) ottenute una dall'altra mediante trasformazione conica esistono solo quattro punti che coincidono con i loro punti corrispondenti, mentre in due figure inverse quadriche ce ne sono un numero infinito situati tutti sulla conica fondamentale. Ancora una volta proprio come due figure omografiche in piani diversi possono essere sempre proiettati in due figure omologiche sullo stesso piano, così due figure, in piani diversi, ottenuti uno dall'altro mediante trasformazione conica, possono essere sempre proiettati in due figure inverse quadriche nello stesso piano*".

trasformazione conica sono stati sviluppati prima di quelli dell'inversione quadrica. Afferma che fu Bellavitis il primo a suggerire l'inversione quadrica e per ulteriori approfondimenti rimanda all'ultimo paragrafo del "*Saggio di geometria derivata*".

Sempre nella stessa lettera Hirst illustra a Cremona come poter ottenere l'ipocicloide a tre cuspidi, detta anche quartica di Steiner, mediante inversione quadrica di un cerchio rispetto ad un altro cerchio fondamentale:

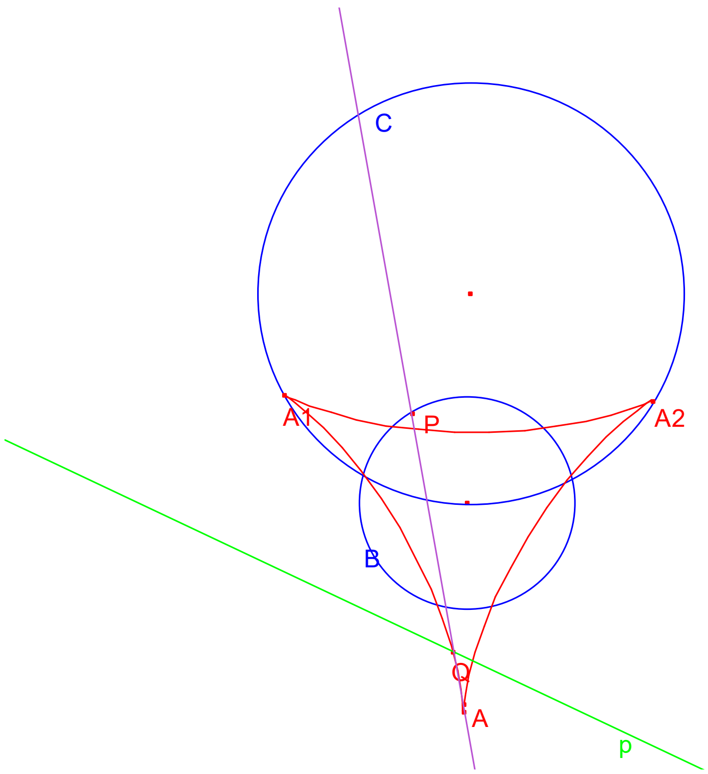
"*you perhaps remember our conversation (near the Porta S. Stefano) on Steiner's quartic of the third class, which has three cusps, and touches the line at infinity at the circular points; I then remarked that I myself had stumbled on the same curve but could not recall how. Here is another method of generating it to be added to the many already proposed by Steiner, Schaefli, Schroeter and yourself*[40].

It is the envelope of the hyperbolas, circumscribed to an equilateral triangle, which have their asymptotic angles equal to one another, and to each angle of the triangle.

An equivalent definition (by Quadric Inversion) is the following.

Take any circle (B), and a circle (C) passing through the centre of the first, and having twice as great a radius. Let A be the external centre of similitude of the two circles.

[40] Cremona si era già interessato all'ipocicloide a tre cuspidi pubblicando il manoscritto [Cremona 1864].



Then the quadric inverse of (B) relative to the origin A, and the fundamental circle (C) will be precisely Steiners' quartic. In other words if p and p' be a pair of coniugate points, relative to (C), on a line passing through A then as p describes the circle (B), its quadric inverse p' will describe Steiners' quartic. The three cusps of the latter will be at A, and at the points A_1, A_2 of contact of the two tangents from A to (C). The equation of this quartic generated as a hypocycloid is, I think, given by Salmon in his Higher Plane Curves p.214. I may observe that the quadric inverse of the circle, concentric with (B) and whose diameter is AC, is the line at infinity, and all properties of the concentric circles (AC) and (B) can at once be transferred by quadric inversion to Steiners' quartic. (**)

(**) *The quadric inverse of each tangent of (B) is a hyperbola circumscribed to A A_1 A_2 the angle between whose asymptotes is a third of two right angles. Hence the first definition. The cuspidal tangents meet in B*"[41].

[41] "*forse ricorderai la nostra conversazione (vicino Porta S. Stefano) sulla quartica di Steiner di terza classe, che ha tre cuspidi, e che tocca la retta all'infinito nei punti circolari; poi ho notato che mi ero*

In una lettera successiva, quella del 28 Ottobre 1864, Cremona dice all'amico:

"*Mi piace assai la proprietà che la quantic inversion nasca dalla trasformazione generale di 1° ordine, come la quadric inversion dalla trasformazione conica. Vi è in ciò una ricca sorgente di teoremi.*

Nella vostra memoria sulla quadric inversion spero che non ometterete la bella proprietà dell'ipocicloide a tre regressi, di cui mi parlate nella vostra lettera. Io ho un'affezione speciale per questa curva; e voi, col vostro metodo, potrete manifestarne molte altre proprietà ancora inosservate."

---

imbattuto sulla stessa curva, ma non riuscivo a ricordare come. Ecco un altro metodo per generarla da aggiungere ai tanti già proposti da Steiner, Schaefli, Schroeter e te stesso.

È l'inviluppo delle iperboli, circoscritte ad un triangolo equilatero, che hanno i loro angoli asintotici uguali l'uno l'altro e ad ogni angolo del triangolo.

Una definizione equivalente (di inversione quadrica) è la seguente.

Prendi un qualsiasi cerchio (B) e un cerchio (C) che passa per il centro del primo e che ha il raggio doppio. Sia A il centro esterno di similitudine dei due cerchi. Allora l'inverso quadrico di (B) rispetto all'origine A e al cerchio fondamentale (C) sarà precisamente la quartica di Steiner. In altre parole se p e p' sono una coppia di punti coniugati, rispetto a (C), su una retta passante per A, allora come p descrive il cerchio (B), il suo inverso quadrico p' descriverà la quartica di Steiner. Le tre cuspidi di quest'ultima saranno in A e nei punti A_1, A_2 di contatto delle due tangenti da A a (C). L'equazione di questa quartica generata come un'ipocicloide è, credo, data da Salmon nel suo Higher Plane Curves p. 214. Posso osservare che l'inverso quadrico del cerchio, concentrico con (B) e il cui diametro sia AC, è la retta all'infinito e tutte le proprietà dei cerchi concentrici (AC) e (B) possono essere immediatamente trasferite per inversione quadrica alla quartica di Steiner. (**)

(**) *L'inverso quadrico di ogni tangente di (B) è un'iperbole circoscritta a A A_1 A_2 l'angolo tra i cui asintoti è un terzo di due angoli retti. Da qui la prima definizione. Le tangenti cuspidali s'intersecano in B*".

In realtà Hirst nel suo lavoro non pubblicherà tale risultato e l'ipocicloide tricuspide ottenuta come inversa quadrica di una circonferenza, rimarrà a lungo inedita ed esposta soltanto nella corrispondenza tra Cremona e Hirst[42].

Hirst tornerà più volte sul tema dell'inversione quadrica sia presentando a Bath, nel Settembre 1864, *On a generalization of the method of geometrical inversion* e a Birmingham, nel Settembre 1865, *On quadric transformation* rispettivamente Report of the thirty-fourth and the thirty-fifth Meeting of the British Association for the Advancement of Science, che pubblicando nel 1866 e nel 1881 altri due lavori[43] sullo stesso argomento.

Conclusione

Dopo la pubblicazione del lavoro di Cremona del 1863 sulle trasformazioni che da lui presero il nome, lo studio esaustivo di casi particolari di trasformazioni quadratiche, in quanto tali, non è più al centro delle attenzioni dei matematici, bensì come esempi più semplici e parte dello studio delle trasformazioni birazionali, le quali aprono un altro capitolo della storia della geometria algebrica[44].

Cremona e Hirst continuarono a dialogare su tale soggetto, stimolati anche da alcuni lavori che giudicavano ricchi di imprecisioni. In particolare, nel 1866 dopo la pubblicazione di [Transon 1865-66], Cremona suggerisce all'amico d'intervenire, come si evince dalla lettera datata, Bologna, 31 marzo 1866: "*Avete veduto gli articoli del sig. Abel Transon sur la projection gauche, nei Nouvelles Annales (settembre 1865 e febbraio 1866)? Questa*

---

[42] In realtà Lemaire usa la trasformazione quadratica di Hirst per dedurre l'ipocicloide tricuspide da una circonferenza, ma è probabile che non conoscesse la teoria del matematico inglese che rimase non pubblicata [Lemaire 1929, pp. 175-176].

[43] Per maggiori approfondimenti si veda [Hirst 1866] e [Hirst 1881].

[44] Casi particolari di trasformazioni quadratiche verranno studiati ancora per vari decenni anche da matematici di primo piano, quali Fréchet o Dickson, ma nella storia complessiva della geometria algebrica tali lavori hanno giocato un ruolo secondario.

projection gauche non è che la trasformazione di Steiner; perché dunque la si produce come una novità? Poteva il sig. Transon ignorare il lavoro di Steiner, mentre questo è citato da voi, ed egli parla della vostra Memoria? Di più egli cita Magnus e ne riproduce l'errore; eppure negli stessi Nouvelles Annales il sig. Jonquières ha parlato della trasformazione in cui i punti si corrispondono ad uno ad uno, e le rette corrispondono a curve di ordine n! Sarebbe una buona cosa che voi scriveste in proposito al sig. Prouhet: voi lo potete fare tanto più facilmente, perché i vostri diritti non sono stati disconosciuti."

A seguito di tale suggerimento, il matematico inglese pubblica l'articolo [Hirst 1866] in cui dà la versione geometrica della forma più generale delle trasformazioni quadratiche fornite da Magnus, riesaminando quanto aveva già esposto durante il congresso tenutosi a Bath nel 1864, tuttavia senza pubblicarlo. Ancora nel 1881, a seguito della pubblicazione nel 1880 di due lavori di S. Kantor [Kantor 1880][45], Hirst riprende con qualche aggiornamento ed approfondimento la stessa tematica. Anche in questo caso, come nel precedente e come si evince abbastanza chiaramente dalla corrispondenza, Hirst è interessato a puntualizzare gli aspetti storici, nonché concettuali, della nascita e i successivi sviluppi delle trasformazioni quadratiche, alla luce anche del loro legame con la trattazione effettuata da Cremona.

La problematica storica relativa alle trasformazioni quadratiche, molto presente nei testi classici di geometria algebrica, sembra poco trattata dagli storici della Matematica. Un'ampia trattazione con molti riferimenti bibliografici è presente in testi di rassegna, quali l'Hudson o lo Snyder. Interessanti riferimenti si trovano in alcuni trattati classici, quali l'Enriques-Chisini.

Partendo proprio da queste esigenze, che storicamente appaiono molto ben fondate, cioè dalla necessità di esaminare il lungo periodo di trent'anni, si ha che l'esame di casi particolari di

[45] Nel primo lavoro Kantor determina il numero di gruppi ciclici in una trasformazione quadratica piana e nel secondo generalizza il suo risultato per una trasformazione cremoniana di qualsiasi ordine.

trasformazioni quadratiche e della loro utilità nello studio di curve algebriche preparava il terreno per la decisiva generalizzazione operata dal matematico pavese. A volte infatti sembra che la storiografia trascuri il lavoro preparatorio che spesso consiste nello studio di faticosi e talvolta oscuri casi particolari. Tale attività precede le generalizzazioni che segnano le vere svolte del pensiero matematico, sviluppando anche le capacità intuitive, importanti per la Matematica, che possono nascere soltanto attraverso questo genere di lavoro. Riteniamo che proprio mediante questo esame attento e puntiglioso di casi particolari, che spesso si rivela solo attraverso la corrispondenza, Cremona abbia sviluppato la sua famosa capacità intuitiva. La storia della geometria algebrica è ricca di tali esempi[46], come dichiara André Weil nell'introduzione del libro Foundations of Algebraic Geometry:

"*Algebraic geometry, in spite of its beauty and importance, has long been held in disrepute by many mathematicians as lacking proper foundations. The mathematician who first explores a promising new field is privileged to take a good deal for granted that a critical investigator would feel bound to justify step by step; at times when vast territories are being opened up, nothing could be more harmful to the progress of mathematics than a literal observance of strict standards of rigor. Nor should one forget, when discussing such subjects as algebraic geometry, and in particular the work of the Italian school, that the so-called intuition of earlier mathematicians, reckless as their use of it may sometimes appear to us, often rested on a most painstaking study of numerous special examples, from which they gained an insight not always found among modern exponents of the axiomatic creed. [...] As in other kinds of war, so in this bloodless battle with an ever retreating foe which it is our good luck to be waging, it is possible for the advancing army to outrun its services of supply and incur*

[46] Tra quelli più noti citiamo la corrispondenza fra Enriques e Castelnuovo [Bottazzini - Conte - Gario 1996], tanto ricca di esempi concreti sulla cui base si sono formate le loro straordinarie e famose capacità intuitive.

disaster unless it waits for the quartermaster to perform his inglorious but indispensable tasks"[47].

Bibliografia

[Bazzani - Bocci - Freguglia - Rogora 2011] A. Bazzani, C. Bocci, P. Freguglia, E. Rogora, *Il contributo di Giovanni Virginio Schiaparelli allo studio matematico della Teoria dell'Evoluzione*, La Matematica nella società e nella cultura, Serie I, Vol. IV, N. 2, 2011, pp. 181-209.

[Bellavitis 1838] G. Bellavitis, *Saggio di geometria derivata*, Atti dell'Accademia di Padova, vol. IV, 1838.

[Beltrametti - Carletti - Gallarati - Monti Bragadin 2002] M. C. Beltrametti, E. Carletti, D. Gallarati, G. Monti Bragadin, *Letture su curve, superficie e varietà proiettive speciali. Un'introduzione alla geometria algebrica*, Bollati Boringhieri, Torino 2002.

[Beltrami 1862] E. Beltrami, *Intorno alle coniche di nove punti e ad alcune questioni che ne dipendono*, Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie II, vol. II, 1862.

[Beltrami 1874] E. Beltrami, *Intorno ad alcuni teoremi di Feuerbach e di Steiner,* Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie III, tomo V, 1874, pp. 543-566.

---

47 "*La Geometria algebrica, nonostante la sua bellezza e importanza, è stata a lungo tenuta in discredito da molti matematici per mancanza di fondamenta adeguate. Il matematico che per primo esplora un nuovo promettente campo ha il privilegio di dare per scontato ciò che un investigatore critico si sentirebbe obbligato a giustificare passo dopo passo; a volte quando vasti territori sono stati aperti, niente potrebbe essere più dannoso per il progresso della matematica che un rispetto letterale di ristretti standard di rigore. Né si deve dimenticare, quando si parla di temi come la geometria algebrica, e in particolare il lavoro della scuola italiana, che la cosiddetta intuizione di matematici precedenti, incauta come il loro uso potrebbe apparirci talvolta, spesso poggiava su un più scrupoloso studio di numerosi esempi particolari, da cui hanno conseguito una intuizione non sempre trovata tra gli esponenti moderni del credo assiomatico. […] Come in altri tipi di guerra, così in questa battaglia incruenta con un nemico sempre in ritirata, che è la nostra fortuna, è possibile che l'esercito che avanza corre più veloce dei servizi di fornitura e incorre in disastri se non attende il furiere che esercita le sue funzioni senza gloria, ma indispensabili*".

[Bodini 1994] A. Bodini, *Der Einfluß von Magnus auf das Werk von Cremona*, Mathematische Semesterberichte, 41, 1994, pp. 17-21.

[Bottazzini - Conte - Gario 1996] U. Bottazzini, A. Conte, P. Gario, *Riposte armonie. Lettere di Federigo Enriques a Guido Castelnuovo*, Bollati Boringhieri, Torino, 1996.

[Caddeo - Franzoni - Piu 2013] R. Caddeo, G. Franzoni, P. Piu, *Inverting Beauty*, Proceedings of the Second ESMA Conference held in Cagliari, September 2013, http://www.math-art.eu/Cagliari2013-Lectures.php

[Canadelli 2010] G. V. Schiaparelli, *Forme organiche naturali e forme geometriche pure. Studio comparativo,* prefazione di Elena Canadelli, Lampi di Stampa, Milano, 2010.

[Canepa 1994] G. Canepa, *Le carte Bellavitis*, Le Scienze Matematiche nel Veneto dell'Ottocento, Venezia, Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, 1994, pp. 49-59.

[Castelnuovo 1901] G. Castelnuovo, *Le trasformazioni generatrici del gruppo cremoniano nel piano*, Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, 36, 1901, pp. 861-874.

[Celoria 1911] G. Celoria, *L'opera di Giovanni Schiaparelli*, Scientia. Rivista internazionale di sintesi scientifica, volume 9, 1911, pp. 293-309.

[Coolidge 1940] J.L. Coolidge, *A history of geometrical methods*, Oxford University Press, 1940.

[Cremona 1861-62] L. Cremona, *Intorno alla trasformazione geometrica di una figura piana in un'altra pur piana, sotto la condizione che ad una retta qualunque di ciascuna delle due figure corrisponda nell'altra una sola retta*, Rendiconti dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Anno accademico 1861-1862, pp. 88-91.

[Cremona 1863] L. Cremona, *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. Nota I.*, Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, tomo II, 1863, pp. 621-630, e Giornale di Matematiche, volume I, 1863, pp. 305-311.

[Cremona 1864] L. Cremona, *Sur l'hypocycloide à trois rebroussements*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 64, 1864, pp. 101-123.

[Darboux 1905] M. G. Darboux, *A survey of the development of geometric methods*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 11, no. 10, 1905, pp. 517-543.

[Déserti 2009] J. Déserti, *Odyssée dans le groupe de Cremona*, Gazette des Mathématiciens, Société Mathématique de France, no. 122, 2009, pp. 31-44.

[De Jonquières 1864] E. De Jonquières, *De la transformation géométrique des figures planes, et d'un mode de génération de certaines courbes à double courbure de tous les ordres*, Nouvelles Annales de Mathématiques, deuxième série, III, 1864, pp. 97-111.

[Enriques - Chisini 1934] F. Enriques, O. Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche 1 e 2*, Zanichelli, Bologna, 1985.

[Freguglia 1992] P. Freguglia, *Dalle equipollenze ai sistemi lineari. Il contributo italiano al calcolo geometrico*, Urbino, Quattroventi, 1992.

[A. Gabba 1954] A. Gabba, *Le trasformazioni cremoniane in una lettera di Luigi Cremona a Giovanni Schiaparelli*, Istituto Lombardo di Scienze e Lettere Rendiconto della Classe di Scienze Matematiche e Naturali, 1954, pp. 290-294.

[L. Gabba 1941] L. Gabba, *La nuova edizione delle "Opere" di G. V. Schiaparelli*, Estratto da: Rendiconti del Seminario matematico e fisico di Milano, volume 15, 1941.

[Giacardi - Tazzioli 2012] L. Giacardi, R. Tazzioli, *Le lettere di Eugenio Beltrami a Betti, Tardy e Gherardi*, Ed. Mimesis, Milano, 2012.

[Giorello - Guzzardi 2011] G. Giorello, L. Guzzardi, *G. V. Schiaparelli: from scientific observations to scientific imagination*, Mem. S.A.It. Vol. 82, 2011, pp. 219-224.

[Hirst 1865] T. A. Hirst, *On the quadric inversion of plane curves*, Proceedings of the Royal Society, XIV, 1865, pp. 91-106.

[Hirst 1866] T. A. Hirst, *Sur la transformation quadratique*, Nouvelles Annales de Mathématiques, 2 série, tome 5, 1866, pp. 213-218.

[Hirst 1881] T. A. Hirst, *On quadric transformation*, The quarterly journal of pure and applied mathematics, Vol. 17, 1881, pp. 301-311.

[Hudson 1927] H. P. Hudson, *Cremona transformations in plane and space*, Cambridge University Press, 1927.

[Kantor 1880] S. Kantor, *Wie viele cyclische Gruppen giebt es in einer quadratischen Transformation der Ebene?*, *Beantwortung derselben Frage für Cremona'sche Transformation*, Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo X, 1880, pp. 64-70, pp. 71-73.

[Lemaire 1929] J. Lemaire, *Hypocycloïdes et Épicycloïdes*, Librairie Vuibert, Paris, 1929.

[Loria 1931] G. Loria, *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche*, IV Edizione, Cedam, Padova, 1931.

[Magnus 1832] L. I. Magnus, *Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes de géométrie*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 8, 1832, pp. 51-63.

[Magnus 1833] L. I. Magnus, *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie,* Duncker & Humbolt, Berlin, 1833.

[Magnus 1837] L. I. Magnus, *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes,* Duncker & Humbolt, Berlin, 1837.

[Negri Lodrini 2013-14] M. P. Negri Lodrini, *Le lettere inedite del matematico Eugenio Beltrami all'astronomo Giovanni Schiaparelli*, Bollettino Storico Cremonese, Nuova serie XIX, 2013-2014.

[Noether 1872] M. Noether, *Zur Theorie der eindentigen Ebenentransformationen*, Math. Ann., 5, 1872, pp. 635-639.

[Nurzia 1999] L. Nurzia, *La corrispondenza di Luigi Cremona (1830-1903)*, volume IV, Quaderni P.RI.ST.EM. N.11, Palermo, 1999.

[Pascal 1910] E. Pascal, *Repertorium der höheren mathematik*, Leipzig, Teubner, 1910.

[Patterson 1933] B.C. Patterson, *The Origins of the Geometric Principle of Inversion*, Isis, Vol. 19, No. 1, 1933, pp. 154-180.

[Schiaparelli 1862] G. V. Schiaparelli, *Sulla trasformazione geometrica delle figure ed in particolare sulla trasformazione iperbolica*, Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino, serie 2ª, tom. XXI, 1862.

[Schiaparelli 1874] G.V. Schiaparelli, *Sul calcolo di Laplace intorno alla probabilità delle orbite planetarie iperboliche*, Rendiconti dell'Istituto Lombardo (2) VII, 1874, pp. 77-80.

[Schiaparelli 1894] G. V. Schiaparelli, *Sulle maree prodotte in un pianeta o in un satellite dall'azione del suo corpo centrale*, Atti dell'I. R. Accademia degli Agiati, Rovereto, 1894.

[Schiaparelli 1898] G. V. Schiaparelli, *Studio comparativo tra le forme organiche naturali e le forme geometriche pure*, in T. Vignoli, *Peregrinazioni antropologiche e fisiche*, Ulrico Hoepli, Milano, 1898.

[Schiaparelli 1907] G. V. Schiaparelli, *Come si possa giustificare l'uso della media aritmetica nel calcolo dei risultati d'osservazione*, Rendiconti dell'Istituto Lombardo (2) 40, 1907, pp. 752-764.

[Segre 1901] C. Segre, *Un'osservazione relativa alla riducibilità delle trasformazioni cremoniane e dei sistemi lineari di curve piane per mezzo di trasformazioni quadratiche*, Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, 36, 1901, pp. 377-383.

[Snyder 1970] V. Snyder, *Selected topics in algebraic geometry*, AMS Chelsea Publishing Company, New York, 1970.

[Steiner 1832] J. Steiner, *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität, usw*, Ber1in, 1832.

[Transon 1865-66] A. Transon, *De la projection gauche*, Nouvelles annales de mathématiques Sér. 2, 4, 1865, pp. 385-393 e Sér. 2, 5, 1866, pp. 63-70.

[Weil 1962] A. Weil, *Foundations of Algebraic Geometry*, American Mathematical Society, Colloquium Publications, vol. XXIX, Providence, 1962.

Maria Alessandra Vaccaro
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo
Via Archirafi n. 34, 90123 Palermo
Tel. 091-23891082, Fax 091-23891024
e-mail: marialessandra.vaccaro@unipa.it