"Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)", n.2 Numero speciale n.5, 2019
G.R.I.M. (Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo)

Le Equazioni Algebriche: i metodi risolutivi nella storia della matematica

Francesca Saviella Benanti, Cinzia Cerroni
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Palermo

E-mail: francescasaviella.benanti@unipa.it, cinzia.cerroni@unipa.it

Abstract/Riassunto: Nel presente lavoro si illustrerà un percorso didattico che usa la metodologia della storia della matematica nell'insegnamento. Si tratteranno, in particolare, i vari metodi risolutivi delle equazioni di primo e di secondo grado nella storia, dal metodo di falsa posizione degli egizi, ai metodi del completamento a quadrato o delle applicazioni delle aree nei greci, fino ai metodi risolutivi di René Descartes (Cartesio). I metodi geometrici dei greci e di Cartesio sono svolti con il software di geometria dinamica Geogebra. Il percorso si conclude con i riferimenti storici al rinascimento e alle formule risolutive delle equazioni di terzo e quarto grado e a Évariste Galois.

1. Il percorso didattico sui metodi risolutivi delle equazioni algebriche

Il percorso ha l'obiettivo di far comprendere agli studenti il significato di equazione come modello matematico e il valore del simbolismo algebrico come conquista e non come un insieme di regole astratte. Il percorso didattico usa la metodologia della storia della matematica nell'insegnamento [Giacardi 2013]. Riteniamo, infatti, che i metodi risolutivi del passato, che usano tecniche di algebra retorica o sincopata e metodi geometrici, siano funzionali al raggiungimento dell'obiettivo.

1.1 Equazioni di primo grado negli Arabi

Il primo esempio affrontato è il problema 24 del papiro di Ahmes (da nome dello scriba che lo trascrisse nel 1650 a.c) o papiro di Rhind (dal nome dell'antiquario che lo acquistò a Luxor nel 1858):
"determinare quale sia il valore del "mucchio" se il mucchio e un settimo del mucchio sono uguali a 19." La tecnica usata nel papiro, dove si procede in modo retorico, senza l'uso di simbolo, è il cosiddetto "metodo di falsa posizione", che consiste nell'attribuire all'incognita un valore che molto probabilmente è falso, e su questo valore eseguire le operazioni indicate a sinistra del segno di uguaglianza. Il risultato di questa operazione viene poi confrontato con il risultato desiderato, e ricorrendo all'uso di proporzioni si trova la soluzione esatta. Nel problema 24 il valore attribuito all'incognita è 7. Tradotto in simboli il procedimento:

$$x + \frac{1}{7}x = 19, \text{ per } x = 7,\ 7 + \frac{1}{7} * 7 = 8, \text{ pertanto } 8 : 19 = 7 : x \text{ e quindi } x = \frac{19}{8} * 7.$$

La lettura del problema 24 del papiro di Ahmes e la sua eventuale traduzione in simboli, dopo aver determinato la soluzione in modo retorico, riteniamo che faccia comprendere agli studenti il significato di messa in equazione e di modellizzazione di un problema. Inoltre, mette gli studenti in contatto con la storia e lo sviluppo della matematica e in particolare dell'algebra. Il percorso prosegue con la regola di falsa posizione e di doppia falsa posizione [Franci, Toti Rigatelli 1979].

1.2 Equazioni di primo grado nei greci

Il secondo libro degli Elementi di Euclide (300 a.c.) è noto anche come libro dell’Algebra Geometrica. In esso sono presenti metodi geometrici di risoluzione di equazioni di primo e di secondo grado. Il primo problema affrontato è il seguente: “*Dato un quadrato del quale sia nota l’area b^2 determinare un lato del rettangolo a esso equivalente di cui sia dato l’altro lato* a”.

Questo problema equivale all’equazione: $ax = b^2$ e si risolve con la prop. I 43 degli Elementi di Euclide: “*In ogni parallelogramma i complementi dei parallelogrammi [posti] intorno alla diagonale sono uguali fra loro”.* Cioè dato un parallelogramma, scelto ad arbitrio un punto di una delle due diagonali e tracciate da esso le rette parallele ai lati, si ottengono quattro parallelogrammi; i due che non sono attraversati dalla diagonale scelta sono equivalenti. Si procede nel modo seguente (cf. Fig. 1): si traccia un quadrato di lato b, ABCD, si prolunga il lato AB, fino ad E, di un segmento lungo a, si completa il rettangolo AECF. Si traccia la retta per ED e si prolunga il lato AC fino ad intersecare la retta ED nel punto G. Si completa il rettangolo AFGI. Il lato CG = FI è la soluzione dell’equazione. Infatti per la proposizione I 43 l’area del rettangolo DFHI è equivalente all’area del quadrato ABCD e quindi $ax = b^2$. Questa costruzione si può fare in laboratorio con il software Geogebra con singole equazioni. Lo studente comprende il significato geometrico delle equazioni e riacquista il significato di equivalenza e di figure equivalenti. Si procede con altri metodi quali l’applicazione del I teorema di Euclide e del teorema di Talete e i metodi di applicazioni delle aree per la risoluzione delle equazioni di II grado [Franci, Toti Rigatelli 1979].

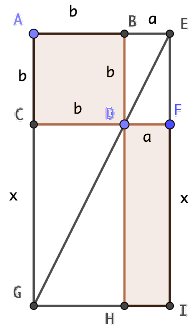

Figura 1

1.3 Metodi risolutivi equazioni di secondo grado nella Géométrie di Cartesio

Reneé Descartes (1596-1650) nel primo libro della Géométrie (1637) determina la soluzione delle equazioni di secondo grado costruibili con riga e compasso. In particolare, vengono trattate le tre equazioni:

$$\text{I } x^2 + ax - b^2 = 0 \quad (a > 0,\ b > 0)$$

$$\text{II } x^2 - ax - b^2 = 0 \ (a > 0,\ b > 0)$$

$$\text{III } x^2 - ax + b^2 = 0 \ (a > 0,\ b > 0)$$

Riportiamo il metodo risolutivo delle equazioni della I e della II forma, che vengono trattate nel percorso. Si consideri il segmento AB = b, si conduca per B la perpendicolare ad AB e su questa si prenda un punto O, tale che OB = a/2. Si descriva poi con centro O la circonferenza di raggio OB. Siano P e Q i punti in cui la retta AO incontra la circonferenza, allora AP è la soluzione positiva dell’equazione I e AQ dell’equazione II (Cfr. Fig. 2).

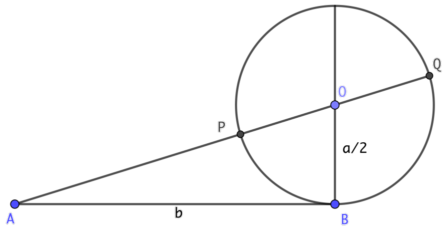

Figura 2

Infatti, per il teorema della secante e della tangente si ha:

$$\mathrm{AP} : \mathrm{AB} = \mathrm{AB} : \mathrm{AQ}$$

$$b^2 = \mathrm{AP} \times \mathrm{AQ}$$

Posto AP = x, AQ = $x + a$

$$x\,(x + a) = b^2$$

$$x^2 + ax - b^2 = 0\ .$$

Ponendo AQ = x si ha il caso II. Si procede successivamente con il caso III, che ha un'altra costruzione [Franci, Toti Rigatelli 1979]. Queste costruzioni si possono fare in laboratorio con il software Geogebra con singole equazioni. Lo studente comprende il significato geometrico delle equazioni e il calcolo con i segmenti. Inoltre, la costruzione delle equazioni comporta anche la costruzione delle frazioni e della radice quadrata. Il percorso si conclude con i riferimenti storici al rinascimento e alle formule risolutive delle equazioni di terzo e quarto grado e a Évariste Galois.

Bibliografia

Frajese, A., & Maccioni, L. (a cura di) (1977). *Gli Elementi di Euclide.* UTET.
Franci, R., & Toti Rigatelli, L. (1979). *Storia della teoria delle equazioni algebriche.* Ugo Mursia Editore.
Giacardi, L. (2013). La Storia della Matematica nell'insegnamento. Roma.
http://crf.uniroma2.it/wpcontent/
uploads/2013/07/GIACARDI-StoriaInsegnamento.pdf
Lojacono, E. (a cura di) (1983). *René Descartes Opere scientifiche*, Vol. II: *Discorso sul metodo; La diottri ca; Le meteore; La geometria*. UTET