

Università degli Studi di Palermo

Dottorato in *Storia dell'Arte e dell'Architettura* - Ciclo XXXII
Dipartimento di Architettura DARCH - ICAR/17

RILIEVO E ANALISI GEOMETRICA, DIMENSIONALE E COSTRUTTIVA
DELLE VOLTE A MUQARNAS
COSTRUITE A PALERMO NEL XII SECOLO

Maria Antonietta Badalamenti



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PALERMO

Dottorato in Storia dell'arte e dell'architettura

Dipartimento di Architettura DARCH

ICAR/17

RILIEVO E ANALISI GEOMETRICA, DIMENSIONALE E
COSTRUTTIVA DELLE VOLTE A MUQARNAS
COSTRUITE A PALERMO NEL XII SECOLO

IL DOTTORE
MARIA ANTONIETTA BADALAMENTI

IL COORDINATORE
FILIPPO SCHILLECI

IL TUTOR
FABRIZIO AGNELLO

CICLO XXXII

ANNO CONSEGUIMENTO TITOLO 2020

Ringrazio:

il Professore, Fabrizio Agnello, che mi supporta e sopporta da anni, che mi ha accompagnato con fiducia durante lo svolgimento di questo lavoro e che con tanta pazienza, mi ha aiutata a esprimere con maggior chiarezza gli intenti di questa ricerca; il collegio dei docenti, per l'interesse mostrato e gli utili consigli; il Professor Alireza Naser Eslami, per la sua disponibilità e per le utili indicazioni datemi durante il nostro incontro; Rita, Sara e Sofia per l'affetto dimostratomi; l'architetto Mirco Cannella, amico e socio, grazie al quale imparo sempre qualcosa; i miei compagni di dottorato Sevda, Gaia e Gabriele; i miei amici, per il loro entusiasmo.

Dedico questo lavoro alla mia famiglia, Luca, Franca e Corrado, Valeria e Salvo, che mi hanno sostenuto con il loro affetto e la loro stima, tollerando le mie assenze e il volubile umore.

INDICE

Premessa	5
PARTE PRIMA. Strumenti e metodi di ricerca	9
1. Documentazione tridimensionale: strumenti e procedure.....	17
2. Caratteri ricorrenti delle strutture a muqarnas di Palermo.....	22
3. Proposta di uno schema geometrico di riferimento.....	25
4. Note metrologiche.....	29
PARTE SECONDA. Strutture a muqarnas di Palermo	37
1. I muqarnas della Cappella della SS. Trinità.....	39
2. Volte a muqarnas nella Zisa di Palermo.....	53
I muqarnas della sala centrale del piano terra	
Piccola nicchia a muqarnas del piano terra	
I muqarnas dei livelli superiori	
3. Nicchia a muqarnas nella Cattedrale di Palermo.....	73
4. I muqarnas del Palazzo Reale di Palermo.....	77
Soffitto a muqarnas della Cappella Palatina	
Volta a muqarnas nella Torre Pisana	
CONCLUSIONI	
Considerazioni sulla costruzione di muqarnas in pietra a Palermo.....	93
BIBLIOGRAFIA	101

PREMESSA

Questa ricerca affronta lo studio delle caratteristiche geometriche e costruttive delle volte a muqarnas costruite a Palermo nel XII secolo, al fine di contribuire al dibattito ancora aperto sulle origini di questi apparati decorativi e la loro trasmissione.

Gli assunti da cui la ricerca prende le mosse sono principalmente due: il Rilievo e il Disegno sono strumenti privilegiati per indagare, conoscere e comprendere l'architettura¹; la Sicilia nel XII secolo è un luogo di sperimentazione e non di sola ricezione di codici provenienti dall'Egitto².

Le discipline del rilievo e del disegno hanno storicamente contribuito alla conoscenza delle matrici progettuali delle opere di architettura realizzate in epoca antica e medievale, il cui progetto era prevalentemente concepito e disegnato utilizzando precise e ricorrenti costruzioni geometriche. Ad eccezione di isolati studi compiuti nell'ultimo decennio, si può affermare che ad oggi non sia stata condotta una ricerca sistematica e comparativa sui muqarnas di Palermo, in cui l'analisi geometrica, fondata sul rilievo, potrebbe sopperire alla carenza o all'assenza di documenti relativi alla loro progettazione.

Lo studio proposto si prefigge pertanto due obiettivi:

- i. costituire, tramite il rilievo con laser scanner, un archivio digitale tridimensionale dei muqarnas di Palermo;
- ii. dimostrare l'ipotesi che i progetti dei muqarnas di Palermo siano stati concepiti assumendo come riferimento un unico schema geometrico e metrico.

1. UGO V., *Fondamenti della rappresentazione architettonica*, Bologna 2002 (ed. or. 1994).

2. BEHRENS-ABOUSEIF D., MASSAIU M., *Arab Avant-Garde Art in the Twelfth Century. Cairo or Palermo?* in *The world of the fatimids*, Monaco 2018, pp. 266-279.

La prima parte della tesi è dedicata alla formulazione di una proposta per il disegno di un unico schema di riferimento sotteso al progetto delle strutture a muqarnas di Palermo; lo schema proposto funge da riferimento generale per la composizione delle strutture e il dimensionamento delle celle compositive. Alla definizione dello schema si è giunti induttivamente, a partire dall'analisi di uno dei casi studio. Le successive verifiche hanno permesso di precisare l'ipotesi iniziale e verificare la congruenza con gli altri casi studio, avvalorando così l'ipotesi di un loro apparentamento.

Si è ritenuto inoltre opportuno eseguire studi sulla metrologia antica, per verificare analogie dimensionali tra lo schema proposto e scale di misura in uso in medioriente, al fine di essere d'ausilio alle ricerche ancora aperte sulla trasmissione e derivazione di questi apparati.

La seconda parte della ricerca è dedicata alle strutture a muqarnas di Palermo e, per ciascuna di esse, agli esiti dell'analisi geometrica.

La parte conclusiva della tesi tratta delle caratteristiche costruttive delle strutture a muqarnas di Palermo realizzate in pietra; rimane escluso il soffitto ligneo che copre la navata centrale della Cappella Palatina del Palazzo Reale, la cui tecnica costruttiva è stata oggetto di precedenti studi.

PARTE PRIMA

Strumenti e metodi di ricerca.



Fig. 1.
Masjid-i Jami'-i Gulpayagan 1105-1118,
Iran.
S.Blair, J. Bloom collection, MIT Libraries,
Aga Khan Visual Archive, image ID:
IMG09655.

Gli studi sull'origine dei muqarnas¹ sono in accordo nell'affermare che tali strutture siano state introdotte come suddivisione in più parti della tromba d'angolo, elemento di raccordo fra la cupola e gli angoli delle strutture sottostanti a pianta poligonale o quadrata². La suddivisione tridimensionale della tromba d'angolo, applicata nel mondo islamico a partire dal X secolo, si è evoluta fino alla costituzione di apparati più complessi, composti per organizzazione di identiche celle elementari su più livelli aggettanti (Fig. 1-3).

Il muqarnas, nato con finalità strutturali limitate al raccordo, ha subito ulteriori evoluzioni tra il X e il XII secolo³,

1. Muqarnas (A.), *a type of decoration typical for Islamic architecture all over the central and eastern parts of the Muslim world; for its counterpart in the Muslim West, see muqarbaş. The term derives from the Greek κορωνίς (Latin coronis, Fr. corniche, Eng. cornice), and has no explanation whatsoever in any of the Arabic dictionaries that could be associated with its function in Islamic architecture. It is therefore a popular term, or rather, a mason's technical term.*

BEHRENS-ABOUSEIF D., "Muqarnas", in *Encyclopaedia of Islam (Second Edition)*, November 2019 (Prima pubblicazione online 2012). Vedi anche Heinrichs secondo cui l'etimologia del termine muqarnas non ha origini tecniche, ma potrebbe derivare dal termine morfologico geografico *qurnās*. (...) *It is the geographical morphological term qurnās (also qirnās) which is defined as shabīh al-anf yutaqa ddam fi l-jabal 'something like a nose projecting in a mountain'. (...) if we accept the suggested etymology the verb qarnasa would mean something like 'to furnish a structure with projecting overhanging elements'.*(...), in HEINRICHS W., *The etymology of muqarnas: some observation*, in AA.VV., *Humanism, culture, and language in the Near East: studies in honor of Georg Krotkoff*, Eisenbrauns 1997, pp. 179-184.

2. La soluzione bizantina alla stessa questione è data dal pennacchio.

3. [*Arab. muqarnas; muqarnaş; muqarbaş; Sp. mocárabes*] *Three-dimensional decorative device used widely in Islamic architecture, in which tiers of individual elements, including niche-like cells, brackets and pendants, are projected over those below. Muqarnas decoration, executed in stucco, brick, wood and stone, was consistently applied to cornices, squinches, pendentives, the inner surfaces of vaults and other parts of buildings throughout the Islamic world from the 12th century. Seen from below, the muqarnas presents a stunning visual effect as light plays over the deeply sculpted but regularly composed surface; this explains the comparison of muqarnas in European*

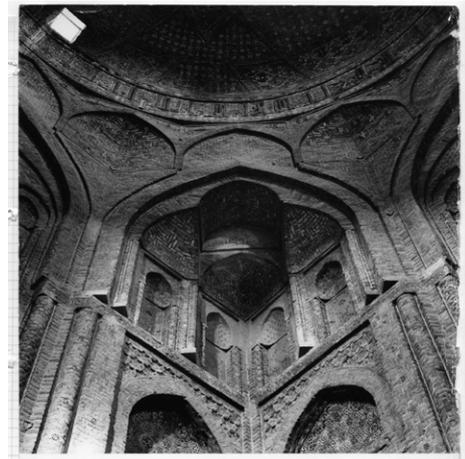


Fig. 2. Tripla tromba d'angolo nella Moschea del venerdì a Isfahan, Iran XI secolo. M.Ecochard, Iran Album, Aga Khan Trust for Culture, image ID: IAA106482.

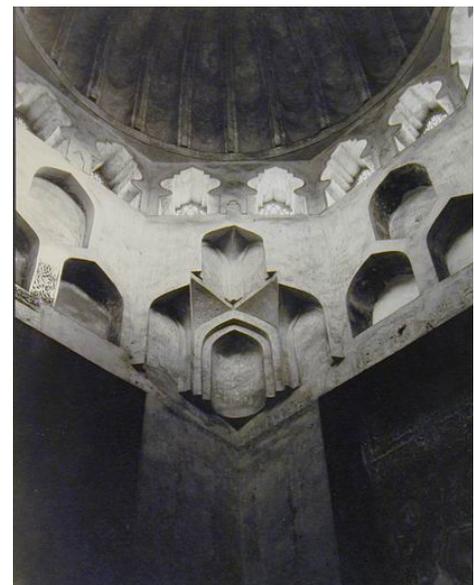


Fig. 3. Mashhad al-Sayyida Ruqayya, 1133, Cairo. Creswell Archive, Ashmolean Museum, neg. EA.CA.3909. Fine Arts Library, Harvard College Library, image ID: ICR1472.

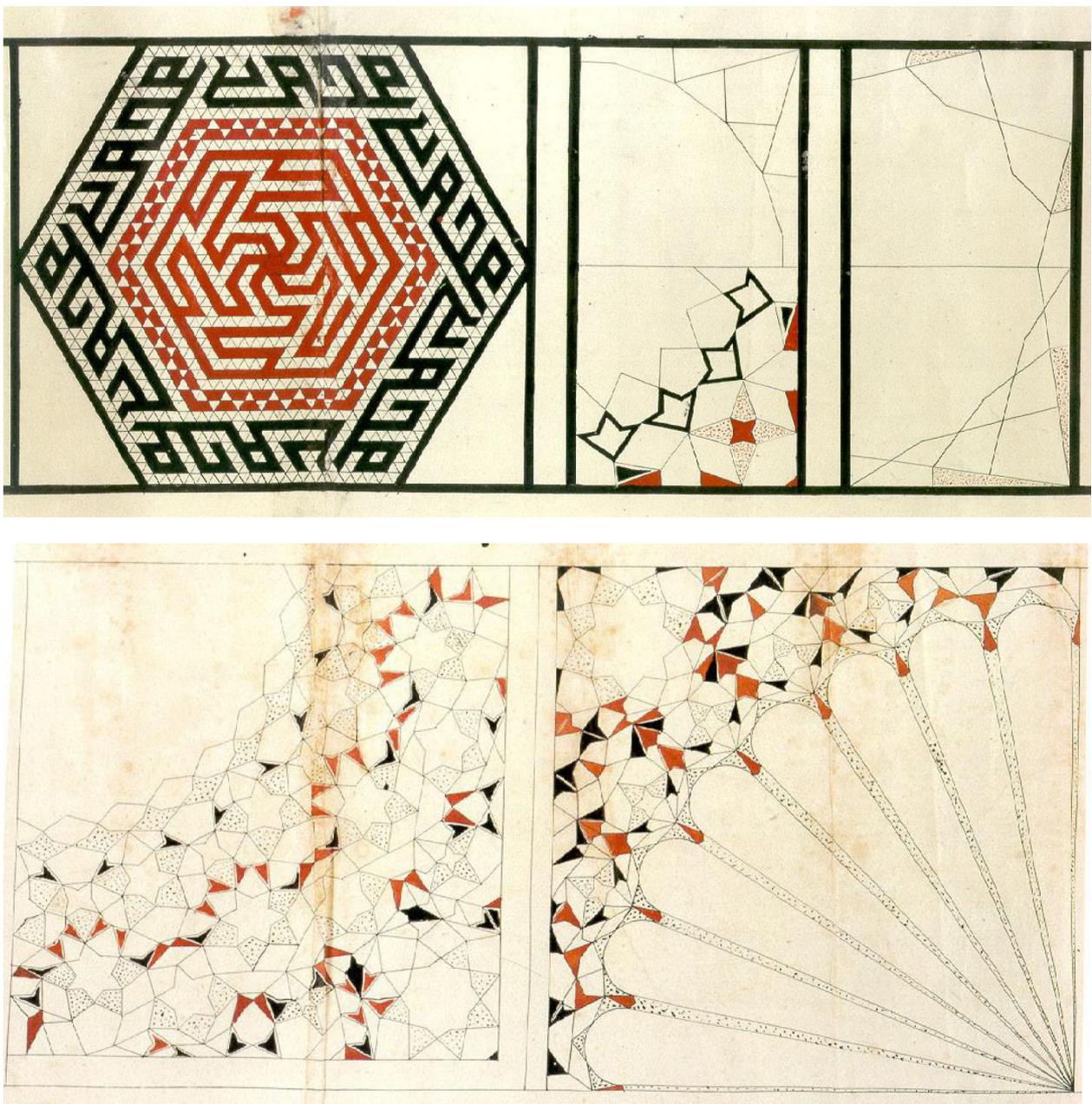


Fig. 4.
Alcuni disegni contenuti nella pergamena di Topkapi.

fino alla definizione completa di un sistema⁴ composto da nicchie aggettanti dalla morfologia differenziata, con applicazioni diversificate e finalità decorative.

Non si conoscono testi antichi che documentino la pratica della costruzione di strutture a muqarnas, mentre è certo che circolassero disegni di tracciati regolatori sottesi alla progettazione e alla realizzazione di tali strutture.

Il tracciato regolatore, utilizzato dai progettisti e dalle maestranze per controllare la compiutezza dei sistemi a muqarnas, è lo strumento capace di restituire contestualmente informazioni sull'accostamento delle celle costitutive e sull'oggetto di tali celle rispetto alle pareti di fondo.

La pergamena di Topkapi⁵, lunga circa 30 metri, con i suoi 114 modelli per la progettazione di sistemi decorativi (Figg. 4-5), testimonia l'importanza che il disegno dei tracciati regolatori riveste nel progetto dei sistemi a muqarnas, e ancor di più l'importanza della loro trascrizione grafica al fine di consentirne la trasmissione e la condivisione.

La comprensione delle matrici geometriche sottese al disegno dei tracciati regolatori, e dei modi in cui tali tracciati danno forma alla complessa struttura tridimensionale delle volte, è indispensabile allo studio di questi sistemi.

Gli studi sui tracciati regolatori prodotti all'inizio del XX secolo sono contraddistinti da un alto livello teorico e di

languages with 'stalactite vaulting' (Ger. Stalaktitengewölbe) or 'honeycombs' (Fr. alvéoles). The Arabic term muqarnas first appears in the 12th century, but a related verb had been used a century earlier to describe deeply carved and moulded stucco ornament on Islamic architecture. TABBAA Y., 2003. "Muqarnas", in Grove Art Online, Nov. 2019.

4. "Muqarnas. System of projecting niches used for zones of transition and for architectural decoration", PETERSON A., *Dictionary of Islamic architecture*, New York 2002 (ed. or. Londra 1996), p. 206.

2. NECIPOĞLU G., *The Topkapi Scroll. Geometry and Ornament in Islamic Architecture*, Oxford 1995.

NECIPOĞLU G., *Geometric design in Timurid/Turkmen architectural practice: thoughts on a recently discovered scroll and its late gothic parallels*, in *Timurid Art and Culture: Iran and Central Asia in the Fifteenth Century*, Supplemento di *Muqarnas* vol. VI, Leiden 1992, pp. 48-66.

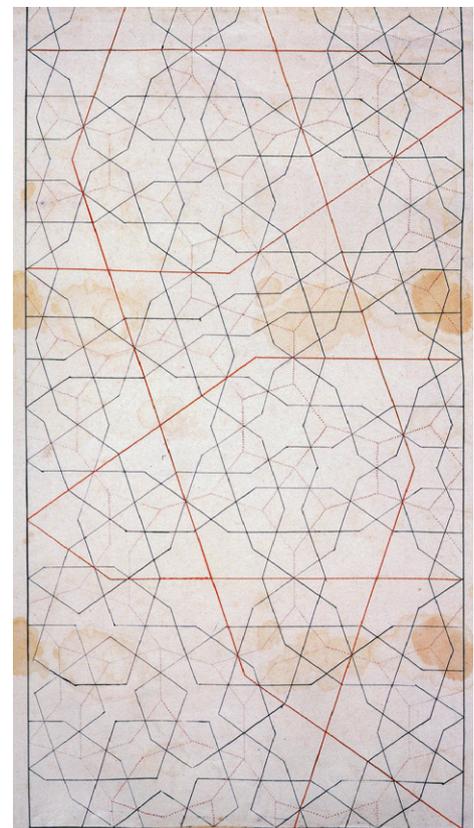
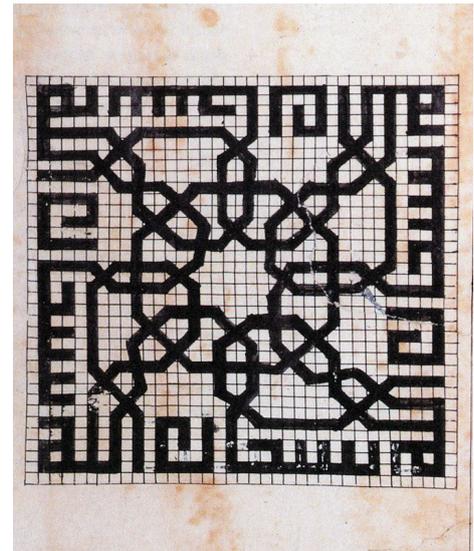


Fig. 5. Alcuni disegni contenuti nella pergamena di Topkapi.

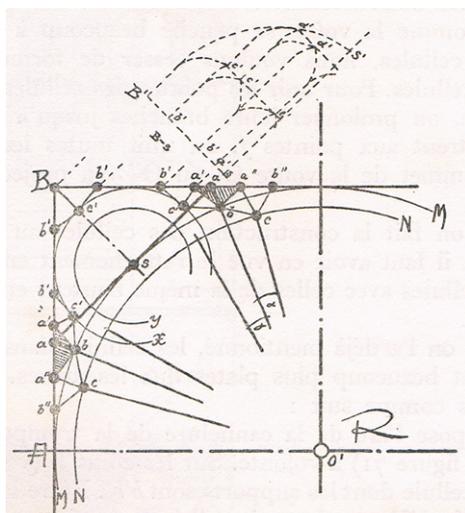


Fig. 6.
Studi di J. Rosintal (op. cit. p.76)

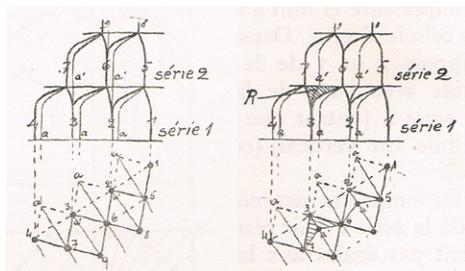


Fig. 7.
Studi di J. Rosintal (op. cit. p.72)

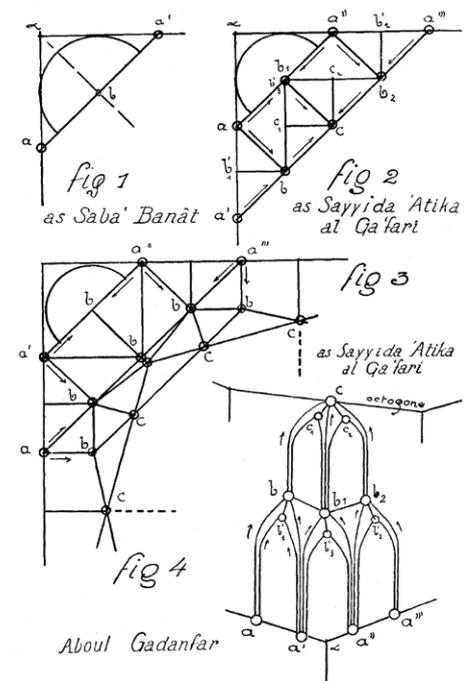


Fig. 8.
Studi di M. Edmond Pauty (op. cit. pg.135)

astrazione, dovuto in gran parte all'impossibilità di rilevare accuratamente la complessa morfologia tridimensionale delle strutture a muqarnas con le procedure e gli strumenti dell'epoca. Tale limite⁶ ha fatto sì che il confronto con l'opera costruita sia stato condotto in molti casi sulla scorta di osservazioni effettuate *in situ* o con l'ausilio di immagini fotografiche.

Queste prime ricerche monografiche hanno l'indiscutibile merito di aver compreso e definito le leggi generali⁷ sottese alla progettazione di tali strutture, principi basilari mai contraddetti dalle successive ricerche⁸ (Figg. 6-8).

Gli studi condotti durante la seconda metà del XX secolo si sono incentrati sull'analisi geometrica dei tracciati regolatori come risultato dell'addizione di singole celle elementari⁹, che generano le complesse strutture per

6. Il 'limite' determinato dalla mancanza di un rilievo accurato è qui inteso come traslazione del 'limite kantiano'. Immanuel Kant è il maggior esponente della corrente filosofica del criticismo o filosofia del limite, che si propone di risolvere i problemi della conoscenza filosofica attraverso la loro scomposizione in problemi elementari. In questo modo il campo dell'indagine filosofica si restringe ma al contempo le affermazioni che vengono fatte al suo interno acquisiscono maggiore veridicità.

7. A esempio il *principio della biforcazione*, definito da Rosintal e riconosciuto in tutti gli studi come fondamento del disegno dei tracciati regolatori. "Ce principe de bifurcation, avec la theorie exposee, nous donne la clef de la reconstruction des stalactites", in J. Rosintal, *Pendentifs Trompes et Stalactites dans l'architecture orientale*, Parigi 1928 (ed. or. 1913), p. 69.

8. ROSINTAL J., *Pendentifs Trompes et Stalactites dans l'architecture orientale*, Parigi 1928 (ed. or. 1913).

PAUTY M. E., *Contribution a l'Etude des Stalactites*, in *Le Bulletin de l'Institut français d'archéologie orientale*, 1929, pp. 129-153, <https://www.ifao.egnet.net/bifao/29/>.

ÉCOCHARD M., *Notes d'Archéologie Musulmane*, in *Bulletin D'études Orientales* 7/8, 1937, pp. 83-111, www.jstor.org/stable/41603411.

ÉCOCHARD M., *Filiation de monuments grecs, byzantins et islamiques. Une question de geometrie*, Parigi 1977.

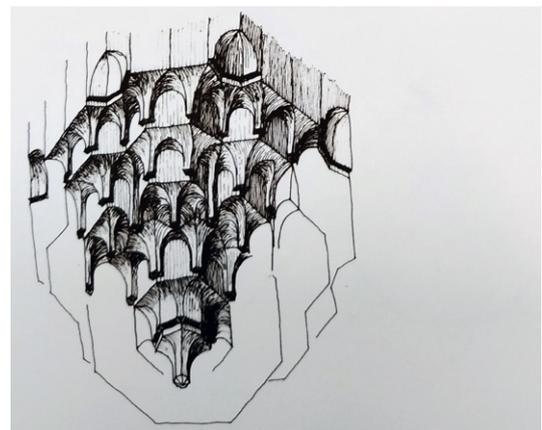
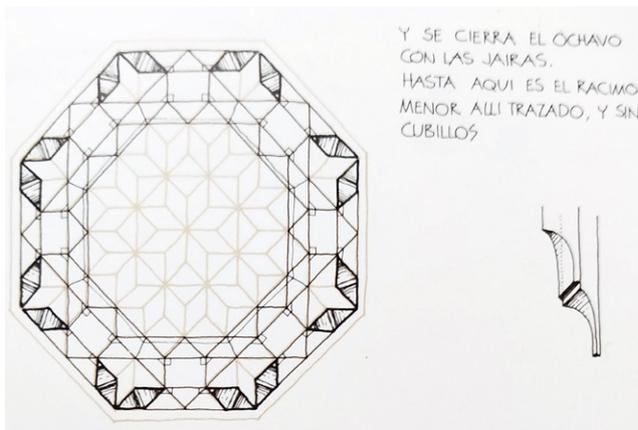
9. PACCARD A., *Traditional islamic craft in moroccan architecture*, Saint Joriz, 1980.

NUERE E., *De las plantillas para los racimos de mocarabes. Lectura dibujada*, in *La carpinteria de lazo. Lectura dibujada del manuscrito de Fray Andrés de San Miguel*, Malaga 1990, pp. 269-283.

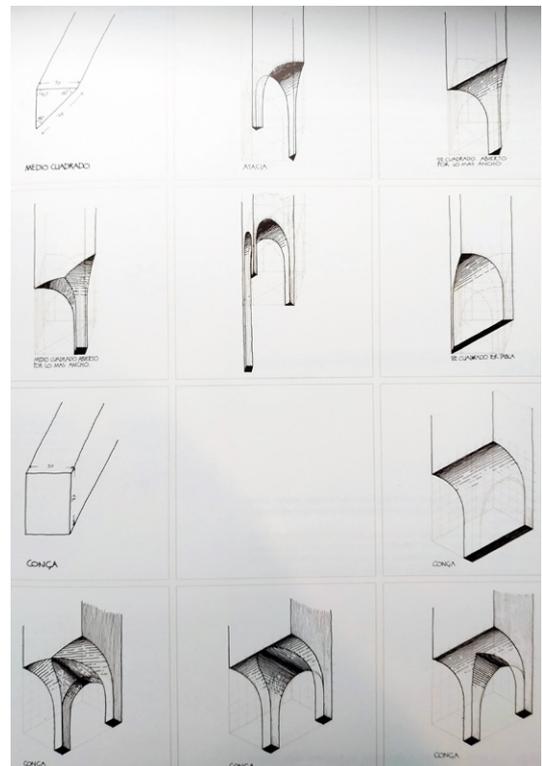
FERNANDEZ-PUERTAS A., *Muqarbas ou Muqarbas*, in:

giustapposizione e ripetizione.

I muqarnas analizzati in questi studi, nella maggior parte dei casi, sono muqarnas in legno, le cui celle elementari sono ottenute scolpendo piccoli ceppi (prismi esatti), che vengono poi assemblati tra di loro (Figg. 9-11).



Figg. 9-11. Studi di E. Nuere
in alto (op. cit. p. 274);
in basso a sinistra (op. cit. p. 275);
in basso a destra (op. cit. p. 279).



Encyclopédie de l'Islam, Parigi 1993.
 CASTERA J. M, *Art decoratif au Maroc*, Parigi 1996.

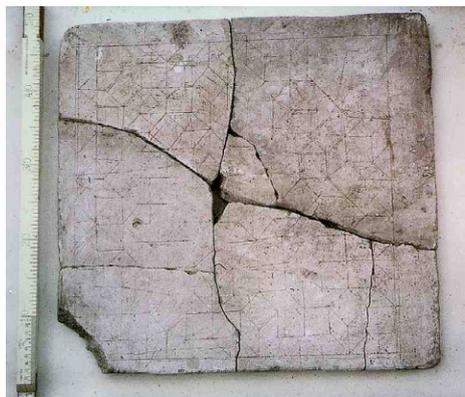


Fig. 12. Lastra in stucco con tracciato regolatore (XIII secolo).

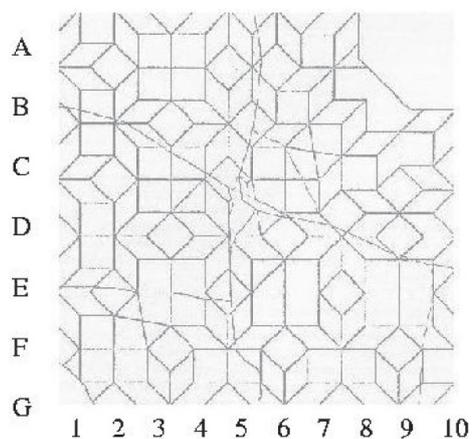
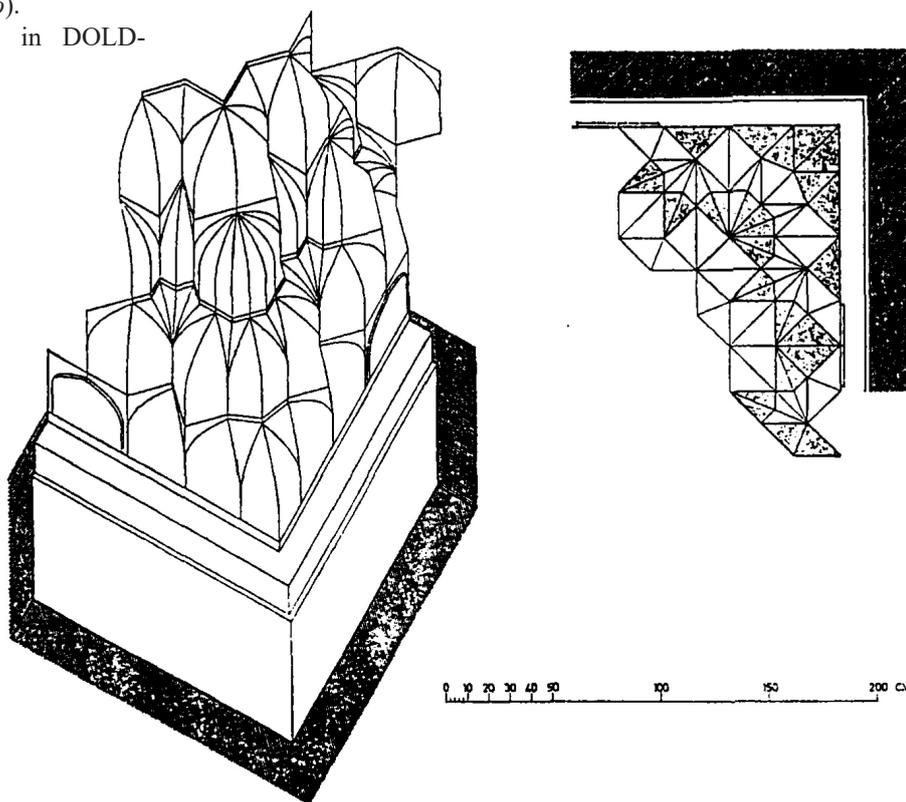


Fig. 13 (sopra), Fig. 14 (sotto). Ricostruzioni di U. Harb, in DOLD-SAMPLONIUS Y.



Dello stesso periodo il prezioso studio di Harb sui resti rinvenuti durante gli scavi del palazzo ilkhaniide di Takht-i Sulayman nella regione dell'Azerbaigian in Iran (XIII secolo).

La ricerca di Harb, basata sulla comparazione tra le informazioni desunte dall'analisi geometrica di un tracciato regolatore inciso su una lastra in stucco¹⁰ (Fig. 12) rinvenuta durante gli scavi, e alcuni frammenti di muqarnas (anch'essi rinvenuti durante gli scavi), giunge alla ricostruzione congetturale del progetto e alla definizione tridimensionale del sistema a muqarnas¹¹ (Figg. 13, 14).

Alla fine del XX secolo, parallelamente agli studi citati, viene avviato uno studio dei tracciati regolatori che inizia ad avvalersi di strumenti di rilievo più accurati

10. Si tratta dell'esempio più antico di disegno di un tracciato regolatore a noi giunto.

11. Lo studio di Harb e gli studi successivi hanno indirizzato e confortato questa ricerca, in particolare per le informazioni sulla lastra in stucco che conserva il disegno del tracciato regolatore.

e principalmente di strumenti digitali avanzati per la rappresentazione. Queste ricerche aprono le porte ai più recenti studi sul disegno e la costruzione tridimensionale automatica di strutture a muqarnas tramite algoritmi generativi¹² (Fig. 15).

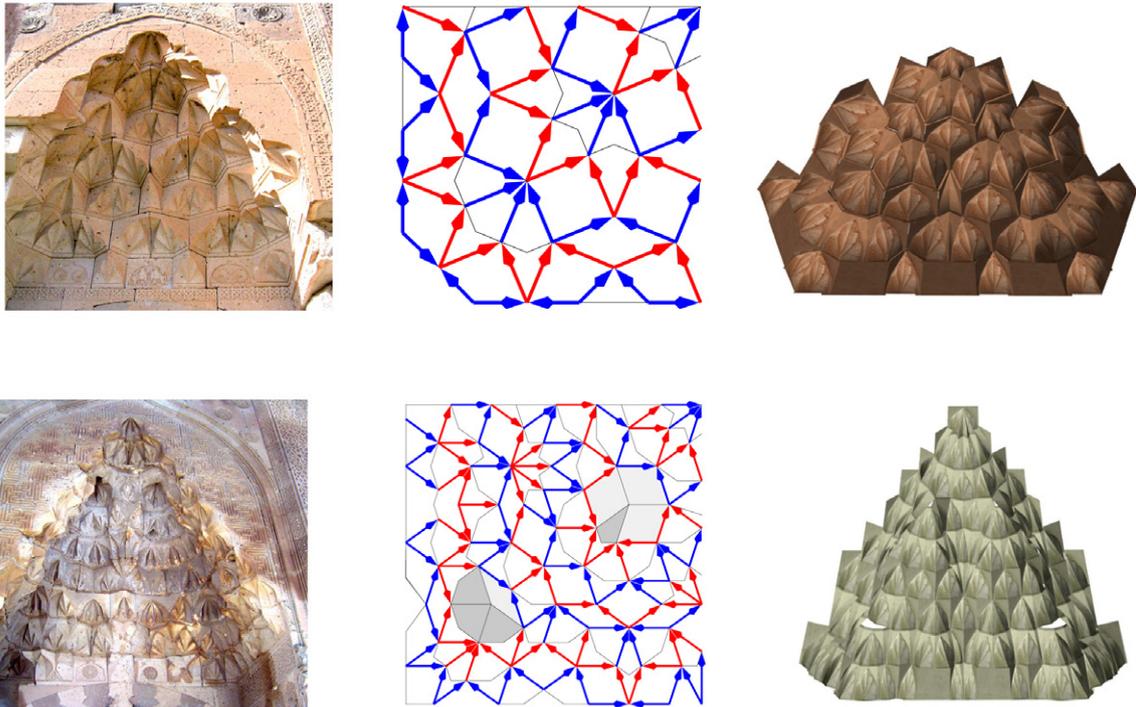
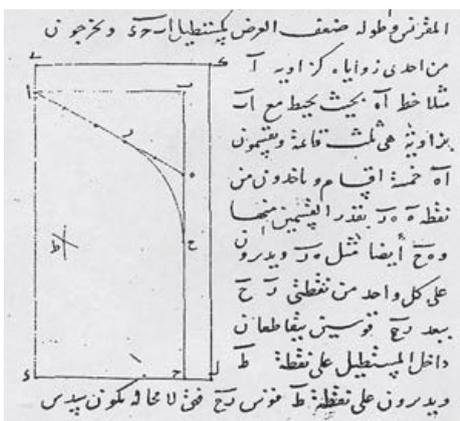
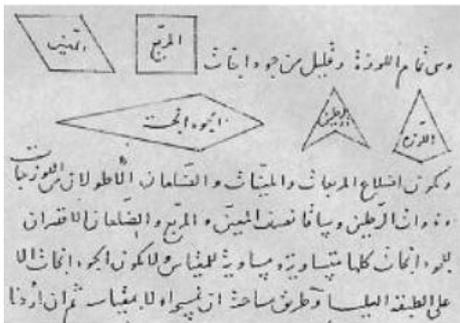


Fig. 15. Costruzione di modelli tramite il software *GraphToMuq*, che genera automaticamente rappresentazioni tridimensionali da dati bidimensionali. In alto, portale di Alay Han; in basso, portale d'ingresso di Agzikara Han. In Harmsen S., Jungblut D., Kromker S., *Seljuk Muqarnas along the Silk Road*, September 2007, p. 9.

12. *The intellectual power of an algorithm lies in its ability to infer new knowledge and to extend certain limits of the human intellect.* (Terzidis, 2003). *The term algorithm is related with transformation of a process into a procedure with finite number of steps. Constitution of an algorithm is considered as a way of thinking, instead of merely translating a process into computer environment. Before computers, Al-Kashi's detailed instructions for artisans on muqarnas making can be accepted as algorithms. Cache suggests considering Vitruvius's descriptions on how to settle on a hill as algorithms. Whether computers are used or not, an algorithm consists of deduction, induction, abstraction, generalization, and structured logic (Terzidis, 2003). There are several reasons about the selection of muqarnas as a source of intuition for algorithmic inquiries. To name but a few, the relationship between the part and the whole, the changing tension between its visual and mathematical complexity, consisting of repetitive and iterative elements, involving explicit geometric characteristics apart from being open to new and multiple explorations can be listed.* In GÜZELCİ O. Z., *A study on measuring complexity in muqarnas patterns*, in *The Turkish Online Journal of Design, Art and Communication - TOJDAC* 9, April 2019, p. 191-201.



Figg. 16, 17. Disegni di al-Kashi delle figure base delle celle elementari e della sagoma base.

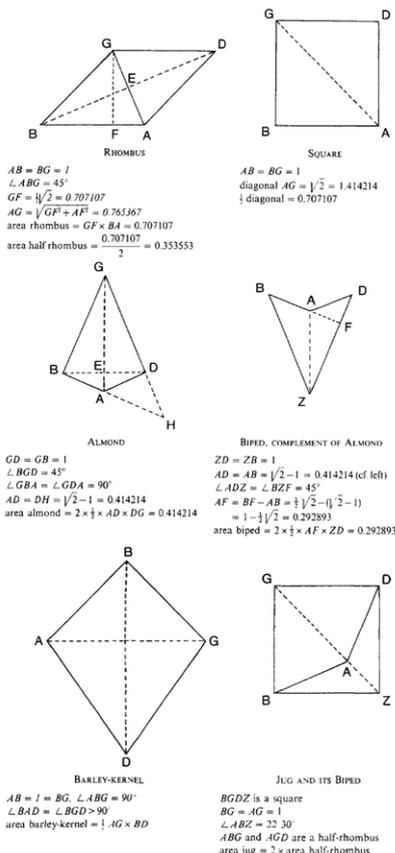


Fig. 18. Studio di Dold-Samplonius sulle figure base di al-Kashi.

Alla base degli studi sui muqarnas il trattato di al-Kashi¹³ *Miftāḥ al-ḥisāb* (*La chiave della matematica*)¹⁴, terminato nel 1427 sotto il patrocinio di Ulugh Beg, sovrano timuride di Samarcanda, grande mecenate anche lui astronomo.

Il trattato si fonda sull'assunto che la matematica, scienza capace di produrre regole generali, possa essere la *chiave* per la risoluzione di questioni pratiche.

Al-Kashi nel libro IV del trattato, *Sulla misura*, descrive il procedimento necessario al calcolo delle superfici di una struttura a muqarnas, il più antico documento noto sull'argomento.

È probabile che il calcolo di queste superfici nasca dalla necessità di computare l'opera a fini retributivi.

Il calcolo, in sistema sessagesimale, si basa sulla semplificazione e classificazione degli elementi compositivi, secondo criteri geometrici e morfologici.

13. Ghiyath al-Din Jamshid Mas'ud al-Kashi (1380 circa, Kāshān, Persia, Iran - 1429, Samarcanda, Uzbekistan), è considerato uno dei più grandi matematici e astronomi del mondo islamico. *He was a master computer of extraordinary ability, his wide application of iterative algorithms, and his sure touch in so laying out a computation that he controlled the maximum error and maintained a running check at all stages, in short, his talent to optimize a problem let him appear as the first modern mathematician.* (E. S. KENNEDY, Y. DOLD SAMPLONIUS).

14. Per gli studi su al-Kashi si rimanda a Yvonne Dold-Samplonius e ai suoi scritti:

DOLD-SAMPLONIUS Y., *Practical Arabic Mathematics: Measuring the Muqarnas by al-Eshi*, CENTAURUS 35, 1992, pp.193-242.

DOLD-SAMPLONIUS Y., *How al-Kashi Measures the Muqarnas: A Second Look*, in *Mathematische Probleme im Mittelalter: Der lateinische und arabische Sprachbereich*, in Wolfenbütteler Mittelalter-Studien 10, Wiesbaden 1996, pp. 56-90.

DOLD-SAMPLONIUS Y., *Calculation of Arches and Domes in 15th Century Samarkand*, in *Nexus III. Architecture and Mathematics*, Pisa 2000, pp. 45-55.

DOLD-SAMPLONIUS Y. *Calculating Surface Areas and Volumes in Islamic Architecture*, in *The Enterprise of Science in Islam. New Perspectives*, Cambridge Mass. 2003, pp. 235-265.

DOLD-SAMPLONIUS Y., HARMSSEN S. L., *The Muqarnas Plate Found at Takht-i Sulayman: A New Interpretation*. In *Muqarnas XXII*, 2005, pp. 85-94.

1. Documentazione tridimensionale: strumenti e procedure

Questa ricerca, avvalendosi del rilievo con laser scanner di tutti i sistemi a muqarnas ancora presenti a Palermo, ha permesso uno studio sistematico e comparativo, eseguito sulla scorta delle nuvole di punti, vere e proprie repliche digitali delle strutture.

Il confronto fra manufatto e ipotesi interpretativa, possibile solo con l'ausilio di un accurato rilievo, è risultato di fatto impraticabile, per le strutture a muqarnas, fino alla recente introduzione dei laser a scansione e delle procedure fotogrammetriche SfM. Le tecniche tradizionali del rilievo, infatti, mal si prestavano a documentare l'articolata morfologia di queste strutture.

Osservando, ad esempio, le rappresentazioni della sezione longitudinale della Cappella Palatina, si nota che il disegno del soffitto a muqarnas che copre la navata centrale manifesta la difficoltà di discernere e discretizzare una complessa morfologia attraverso l'osservazione a distanza dal piano di calpestio (Fig. 1); il primo rilievo accurato di cui si abbia notizia viene realizzato con l'ausilio di un ponteggio, che ha permesso l'uso di fili a piombo e di longimetri a diretto contatto con l'opera, ma anche in questo caso i disegni, che documentano in modo esemplare la consistenza dell'opera, mal si prestano alla comprensione della struttura tridimensionale del soffitto (Figg. 2-4).



Fig. 1. Soffitto a muqarnas sezione longitudinale. Stralcio della sezione longitudinale della navata centrale della Cappella Palatina, in HITTORF J. J., ZANTH L., *Architecture moderne de la Sicile*, Parigi 1835. Disegno di Bigant.

L'evoluzione tecnologica ha reso disponibili nuovi strumenti di rilievo che producono in tempi rapidi un'accurata replica tridimensionale digitale dei manufatti rilevati, e nuovi strumenti per la rappresentazione che consentono di estrarre informazioni geometriche e dimensionali dai dati di rilievo.

I primi scanner laser sono stati introdotti circa venti anni addietro e da almeno quindici anni tali strumenti sono utilizzati da università e centri di ricerca. Appare dunque incomprensibile la carenza di ricerche sui muqarnas basate su rilievi con laser scanner; una possibile spiegazione può essere data dall'instabilità politica e dall'assenza di sicurezza che, negli ultimi venti anni, ha caratterizzato le aree geografiche dove sono ubicate le più antiche e rilevanti testimonianze di tali strutture. Altra causa del ritardo nell'applicazione delle tecnologie digitali di rilievo allo studio di muqarnas è la tradizionale separazione fra le competenze dei topografi e quelle degli studiosi che indagano gli aspetti storici e costruttivi delle opere di architettura. Grazie alla semplicità di utilizzo dei laser a scansione tali distanze si sono progressivamente ridotte e molti architetti utilizzano oggi questi dispositivi.

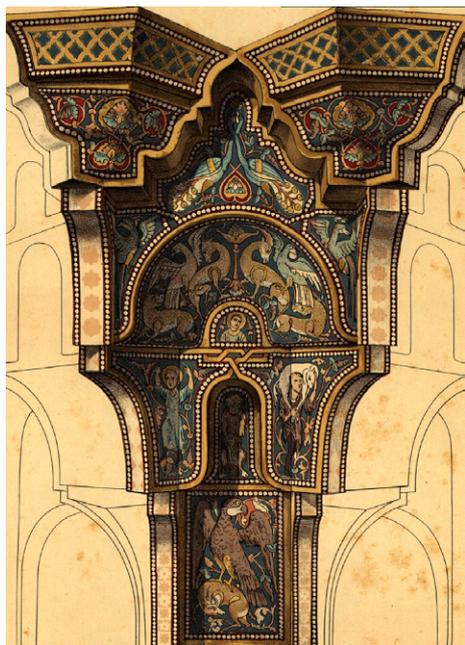


Fig. 2. TERZIA., AMARI M., BOGLINO L., *La Cappella di San Pietro*, Palermo 1889, Tav. LIII. Disegno di A. Terzi.

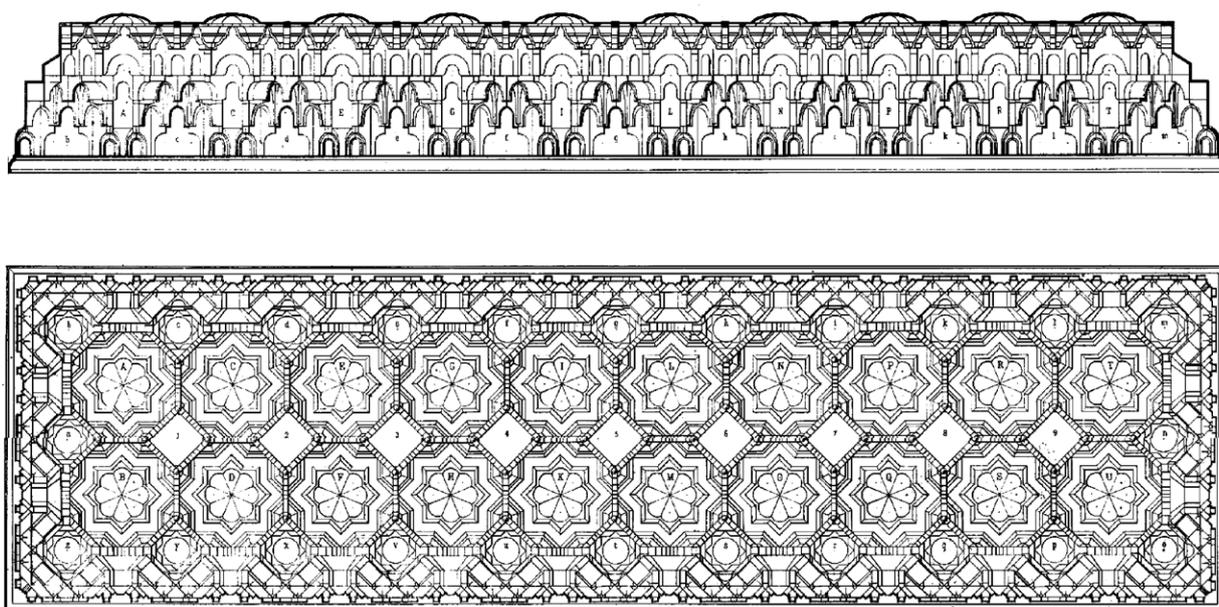


Fig. 3. Pianta e sezione longitudinale del soffitto della navata centrale della Cappella Palatina, in TERZIA A., AMARI M., BOGLINO L., *La Cappella di San Pietro*, Palermo 1889, Tav. XXXVI. Disegno di A. Terzi.

Va tuttavia osservato che le ricerche che utilizzano il rilievo digitale per l'analisi del progetto di architetture di epoca antica e medievale, fortemente fondato sul disegno e sulle corrispondenze geometrico-proporzionali, risultano ancor oggi minoritarie.

Troppo spesso le tecnologie digitali per il rilievo e per la rappresentazione sono utilizzate per produrre repliche digitali fedeli di manufatti esistenti, certamente utili per la loro divulgazione, ma mute, perché incapaci di veicolare la competenza sottesa alla loro realizzazione. Tale utilizzo delle tecnologie mortifica le loro potenzialità euristiche¹.

Non è un caso che i primi studi dedicati all'analisi geometrica di alcune strutture a muqarnas di Palermo siano stati condotti in anni recenti sulla scorta di rilievi eseguiti con strumenti topografici e con laser scanner². La disponibilità di una accurata e puntuale documentazione tridimensionale ha consentito agli studiosi la formulazione di interessanti ipotesi e in altri casi ha consentito significativi avanzamenti rispetto a studi precedenti.

I rilievi condotti per questa ricerca sono stati eseguiti con uno scanner a modulazione di fase Leica HDS 7000, capace di una portata massima di 80 m e di una accuratezza di 2 mm sulla superficie rilevata; le scansioni sono state eseguite posizionando lo strumento a una distanza compresa fra 3 m e 12 m dalle strutture, utilizzando una risoluzione equivalente³ pari a 3,1 mm a 10 m.

1. *Ha senso rilevare un edificio fuori da un'operazione di restauro, o da qualsiasi altra attività che l'abbia richiesto? Secondo me sì, perché il rilievo di architettura ha una finalità sua propria che è la conoscenza. In prima istanza, il rilievo di architettura è la ricostruzione del progetto dell'opera studiata. (...) il rilievo è un processo di conoscenza. Dunque non è il frutto di una certa attività di studio, ma è quella attività.*, MIGLIARI R., *Principi teorici e prime acquisizioni nel rilievo del Colosseo*, in *Disegnare. Idee. Immagini*, Anno X, n. 18/19, Roma 1999, p. 33.

2. AGNELLO F., *Rilievo e rappresentazione del soffitto della navata centrale della Cappella Palatina*, in (a cura di) B. Brenk, *La cappella Palatina a Palermo*, collana *Mirabilia Italiae*, Modena 2010, pp. 295-352.

3. I laser scanner, come tutti gli strumenti topografici, acquisiscono le misure in coordinate polari (angolo azimutale, angolo zenitale,



Fig. 4. TERZIA., AMARI M., BOGLINO L., *La Cappella di San Pietro*, Palermo 1889, Tav. XXXVII. Disegno di A. Terzi.

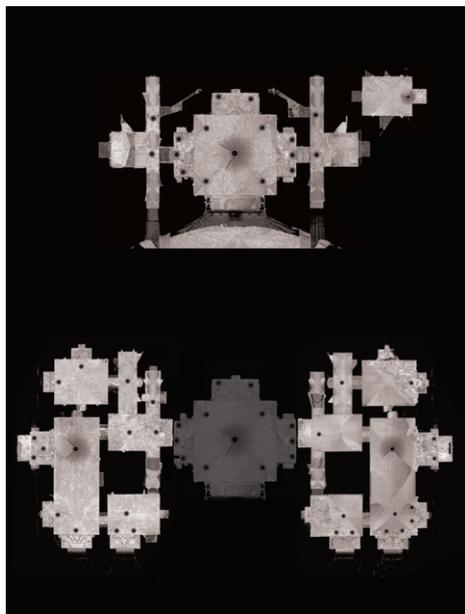


Fig. 5. Nuvola di punti del piano terra e del primo piano della Zisa di Palermo.



Figg. 6-8. Viste delle nuvole di punti di acune strutture a muqarnas del primo piano della Zisa di Palermo (ReCap Pro di Autodesk).

Il rilievo con laser scanner ha interessato le seguenti strutture a muqarnas:

- nicchie della Cappella della Zisa (Cappella della SS. Trinità);
- volte della Zisa di Palermo;
- nicchia nella Cattedrale di Palermo;
- nicchia nella Torre Pisana nel Palazzo Reale di Palermo;
- soffitto sulla navata centrale della Cappella Palatina nel Palazzo Reale di Palermo.

La campagna di rilievi, utile ai fini di questo studio, ha permesso la costituzione di una prima banca dati digitale esaustiva dei muqarnas sopravvissuti a Palermo, con l'esclusione della Cuba e dello Scibene, manufatti che hanno subito profonde trasformazioni e che conservano porzioni frammentarie o estremamente degradate delle originarie strutture a muqarnas.

Per ciascuna struttura rilevata sono state acquisite scansioni da diversi punti di stazionamento, al fine di ridurre al minimo le superfici non raggiunte dal raggio laser; le scansioni relative a una stessa struttura sono state riferite a un unico sistema di coordinate attraverso il processo di orientamento relativo⁴.

Le fasi successive di elaborazione sono state dedicate al campionamento e alla rotazione delle nuvole di punti.

Il processo di campionamento ha consentito di ottenere una distribuzione regolare dei punti della nuvola, attraverso la rimozione dei punti ridondanti (prodotti dal rilievo di una stessa porzione di superficie da diversi punti di stazionamento dello strumento) o dei punti sovrabbondanti

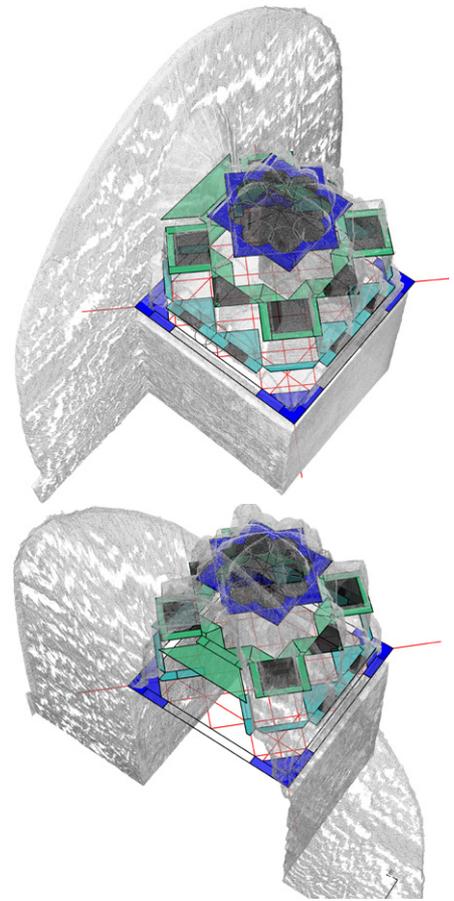
distanza). Al fine di determinare il passo angolare che lo strumento adotta nella misurazione viene inserita una distanza fra due punti adiacenti che appartengono alla superficie di una sfera che ha raggio pari a 10 m e centro nel baricentro dello strumento; assegnata tale distanza lo strumento provvede al calcolo dell'angolo corrispondente sia sul piano orizzontale (azimutale) che sul piano verticale (zenitale).

4. Le operazioni di orientamento delle nuvole di punti sono state eseguite con il software ReCap Pro di Autodesk.

(dovuti alla variabile distanza fra le superfici e lo scanner).

La rotazione, intorno all'asse z, è stata eseguita per assegnare alle superfici verticali delle nicchie la giacitura del piano coordinato xz o yz⁵.

Ultima fase del processo di elaborazione è stata dedicata alla conversione delle nuvole di punti in formati che ne consentissero la visualizzazione e la manipolazione nel software utilizzato per le operazioni di disegno e di modellazione 3D⁶.



5. Campionamento e rotazione sono stati eseguiti con il software freeware CloudCompare.

6. Disegno e modellazione 3D sono stati eseguiti con il software McNeel Rhinoceros 6.0.

Figg. 9, 10. Viste della nuvola di punti della piccola nicchia a muqarnas al piano terra della Zisa in ambiente NURBS e studio del tracciato regolatore e delle forme base delle celle elementari nei diversi livelli.

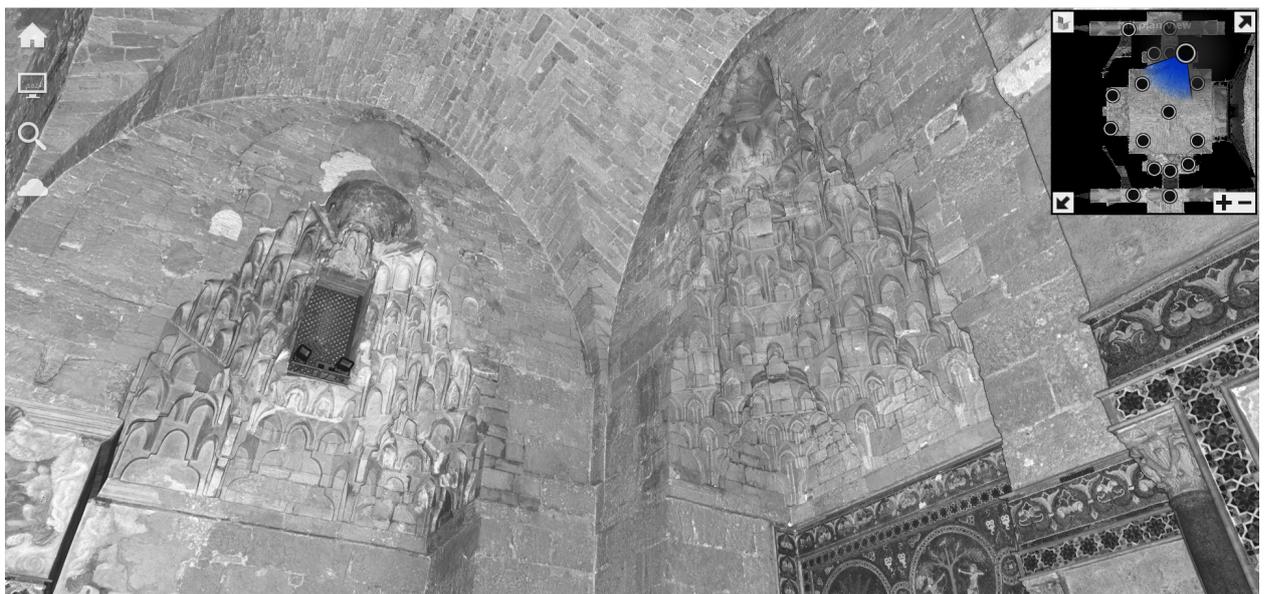
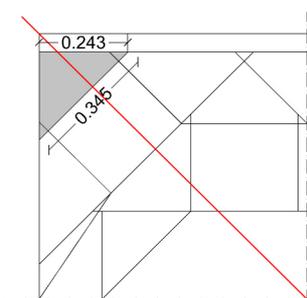
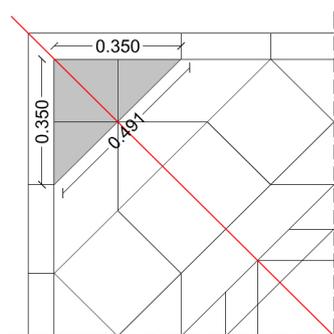


Fig. 11. Vista della nuvola di punti delle strutture a muqarnas della Sala della Fontana della Zisa di PALERMO (ReCap Pro di Autodesk).

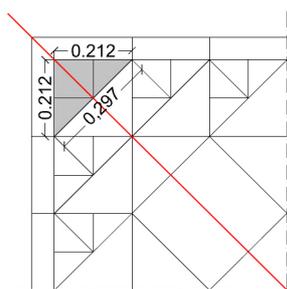
2. Caratteri ricorrenti delle strutture a muqarnas di Palermo



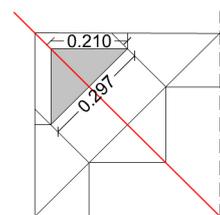
Cappella della SS. Trinità



Cappella Palatina



Zisa, Sala della fontana,
nicchia centrale M0.1



Cattedrale

Le ricerche, già citate, sulla nicchia a muqarnas della Sala della fontana della Zisa¹ e sul soffitto ligneo della navata centrale della Cappella Palatina² hanno affrontato le questioni relative all'individuazione delle celle elementari e delle loro modalità di accostamento.

Il lavoro compiuto sulla nicchia centrale della Sala della fontana ha fornito una valida ed esaustiva classificazione delle celle elementari che la costituiscono; tali celle sono presenti in tutti i sistemi a muqarnas di Palermo.

Il lavoro sui muqarnas della Cappella Palatina ha svelato la complessa semplicità della tecnica costruttiva utilizzata, confermando che l'unicità di tale struttura non sia ravvisabile solo nelle mirabili decorazioni pittoriche che la ricoprono, ma anche nell'originale costruzione del sistema strutturale.

Entrambi gli studi hanno proposto un'analisi geometrica dei tracciati regolatori sottesi alla progettazione delle due strutture, giungendo a soluzioni eterogenee che sembrano negare il loro apparentamento sotto il profilo geometrico e dimensionale.

In generale, come già osservato, gli studi sui tracciati regolatori dei muqarnas sono affetti da un carattere episodico e ogni analisi geometrica sembra risolvere l'interpretazione del progetto di una singola struttura.

Altro aspetto che caratterizza molti degli studi sui sistemi a muqarnas è la scarsa attenzione alle caratteristiche dimensionali degli elementi e dei tracciati regolatori; la forte strutturazione geometrica di tali sistemi conduce gli studiosi a ritenere secondaria, se non ininfluyente, la caratterizzazione dimensionale di tali manufatti.

Figg. 1-3. Analisi dimensionale degli angoli.

1. GAROFALO V., op. cit.

2. AGNELLO F., op. cit.

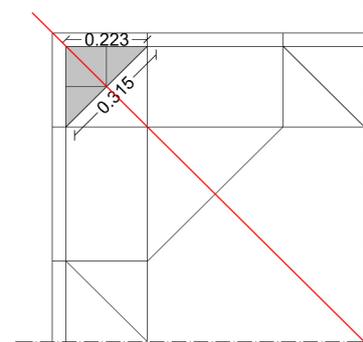
In questa sede si intende sostenere l'ipotesi di un apparentamento tra le strutture a muqarnas di Palermo, sotto il profilo *geometrico, dimensionale, costruttivo e compositivo*.

Le strutture a muqarnas nascono, secondo gli studi più accreditati, dalla soluzione di un problema di raccordo angolare; la loro logica compositiva assegna pertanto all'angolo un ruolo fondamentale, sia nel progetto che nella costruzione.

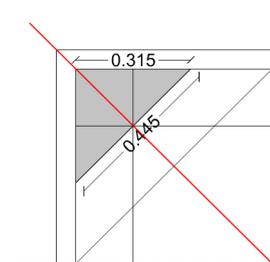
Le strutture a muqarnas presenti a Palermo sono tutte caratterizzate da una *geometria simmetrica*, che assume come riferimento sia i piani verticali paralleli ai lati del vano e ulteriori piani verticali ruotati a 45°, secondo le direzioni delle bisettrici degli angoli.

L'analisi *dimensionale* ha rivelato, indipendentemente dalla dimensione complessiva della struttura e dalla tecnica costruttiva utilizzata, la ricorrenza di alcune dimensioni presenti in uno stesso manufatto, sia in pianta che in alzato, e la ricorrenza di alcune dimensioni in tutti i manufatti studiati. L'angolo gioca un ruolo importante sia nella progettazione che nella costruzione di queste strutture; per tale motivo le prime osservazioni, condotte in questa ricerca, hanno riguardato l'analisi degli angoli delle volte studiate. In tutti i casi studiati gli angoli sono definiti da celle la cui proiezione in pianta è un triangolo rettangolo isoscele; dall'analisi dimensionale dei triangoli è emersa la ricorrenza delle seguenti misure: 21, 35 e 31,5 cm. Ulteriori analogie dimensionali, che accomunano le volte studiate, sono ravvisabili nell'altezza dei filari, in particolare 35 cm e 42 cm.

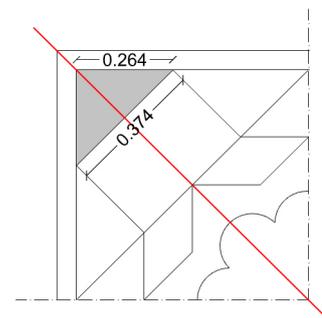
Dal punto di vista *costruttivo* le strutture a muqarnas si basano sull'oggetto progressivo di livelli orizzontali sovrapposti, secondo uno schema che dal punto di vista strutturale riecheggia le false volte in pietra dell'antichità micenea. Nelle volte in pietra studiate tali livelli sono sempre il risultato della sovrapposizione di due filari orizzontali, solitamente di pari altezza. Il filare più basso



Torre Pisana



Zisa, Sala della fontana, nicchie laterali M0.2 - M0.3



Zisa, nicchia al piano terra M0.4

Figg. 4-7. Analisi dimensionale degli angoli.



Fig. 8. Nicchia centrale della sala della fontana della Zisa (2019).



Figg. 9, 10. Struttura a muqarnas sita al primo livello della Zisa di Palermo. La struttura è composta: da due moduli angolari uguali e simmetrici rispetto al piano bisettore dell'angolo; da un modulo centrale identificato al primo livello da elementi a L ortogonali alla parete di fondo.

ospita blocchi definiti da facce verticali, mentre i blocchi superiori sono scavati a formare le superfici curve (Fig. 8). Tutte le volte muqarnas di Palermo coprono vani rettangolari o quadrati e presentano una disposizione simmetrica, riferita a piani verticali paralleli alle pareti che racchiudono il vano. Ulteriori simmetrie si basano su piani verticali bisettori, ruotati di 45° rispetto alle pareti del vano. Una delle caratteristiche specifiche della *composizione* delle strutture a muqarnas di Palermo è la loro articolazione per 'moduli', caratterizzati da una specifica composizione di celle elementari; i 'moduli', chiaramente identificabili nella proiezione in pianta, si dispongono in modo continuo (A+A+A) o alternato (A+B+A) (Figg. 9-11).

La transizione tra due moduli è sempre contrassegnata da 'elementi a L', posti in giacitura ortogonale o ruotati di 45° rispetto ai lati dello spazio coperto. La composizione dei moduli e la loro posizione seguono le regole di simmetria dell'intera struttura, e i moduli angolari hanno sempre composizione simmetrica rispetto al piano bisettore.



Fig. 11. Struttura a muqarnas della SS. Trinità. La struttura è composta da due moduli disposti in modo alternato (A+B+A+B+A). I moduli sono separati da elementi a L ortogonali e disposti a 45° rispetto alla parete di fondo.

3. Proposta di uno schema geometrico di riferimento

La presenza di caratteristiche comuni ha suggerito la ricerca di un unico e semplice dispositivo per il disegno dei tracciati regolatori di tutte le strutture a muqarnas di Palermo¹, compatibile con gli strumenti di disegno dell'epoca.

Tale dispositivo deve consentire:

- il controllo generale dei tracciati regolatori;
- il controllo dimensionale e proporzionale degli alzati;
- la standardizzazione delle celle costitutive, attraverso l'uso di misure codificate.

Il dispositivo proposto si basa sulla suddivisione delle bisettrici della pianta del vano coperto dalla volta, in unità di lunghezza pari a 21 cm.

Le rette passanti per i punti di divisione, orientate in direzione ortogonale ai lati della volta, o ruotate di 45° , intersecano il perimetro delle volte in punti in cui sono posizionati gli 'elementi a L' di separazione, o altri elementi rilevanti.

Le bisettrici delle strutture di maggiore dimensione sono state suddivise in 12 unità da 21 cm (Fig. 1), mentre le bisettrici delle volte di minore dimensione sono state suddivise in 6 unità da 21 cm.

Diverse argomentazioni supportano la scelta delle bisettrici come elementi strutturanti nella progettazione delle volte a muqarnas:

- i muqarnas nascono, come già osservato, dalla soluzione di un problema di raccordo angolare;
- gli angoli delle strutture a muqarnas di Palermo mostrano una simmetria rispetto al piano verticale bisettore;
- la proiezione in pianta degli angoli di tutte le volte a

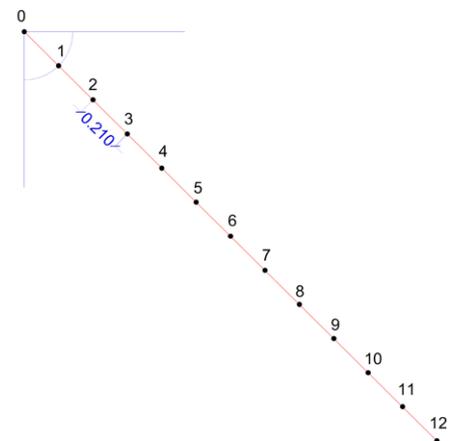


Fig. 1. Suddivisione della bisettrice in 12 unità di 21 cm.

1. La presenza di una griglia 'diagonale' è stata ipotizzata, per la prima volta in questo studio, durante l'analisi geometrica dei muqarnas della Cappella della SS. Trinità; la definizione dell'ipotesi è stata ispirata dalle evidenti congruenze geometriche e metriche tra la struttura a muqarnas e il contesto architettonico.

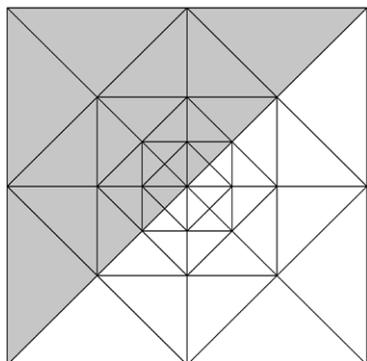


Fig. 2. Triangolo rettangolo isoscele, generato dalla divisione del quadrato tramite le sue diagonali.

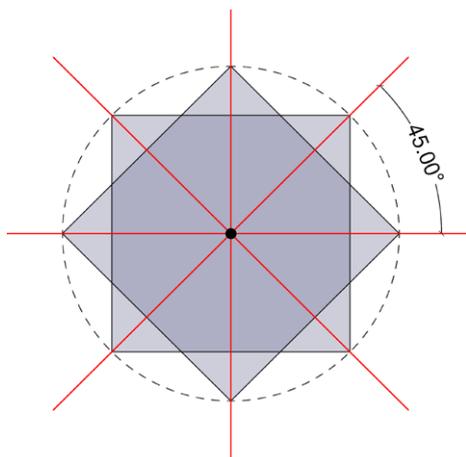


Fig. 3. Stella a otto punte prodotta per rotazione del quadrato.

muqarnas studiate è un triangolo rettangolo isoscele, figura generata dalla divisione del quadrato tramite le sue diagonali (Fig. 2);

- il quadrato e le sue diagonali producono, per rotazione, la stella a otto punte, figura archetipica nella decorazione di matrice islamica (Fig. 3).

L'ipotesi che si ritiene ragionevole avanzare è che lo schema proposto rispondesse all'esigenza di utilizzare disegni basati su regole semplici e concetti condivisi; la divisione delle bisettrici in unità di lunghezza costante offriva un riferimento certo e facilmente replicabile, simile per certi versi, alla carta millimetrata ampiamente utilizzata dai tecnici fino a poco tempo addietro.

La simmetria speculare dei muqarnas rispetto alle bisettrici, consente inoltre di ridurre la rappresentazione del tracciato regolatore a una sua porzione ripetibile.

L'uso dello schema basato sulle bisettrici fornisce inoltre, come sarà dimostrato nei paragrafi successivi, una ragione geometrica alla posizione degli elementi a L di separazione fra i moduli; gli studi precedenti sulle volte a muqarnas di Palermo avevano considerato tali enti come parti *a priori* della composizione generale e non hanno fornito alcuna dimostrazione riguardo la loro posizione e la loro dimensione.

La dimensione dell'unità scelta (21 cm) trova interessanti corrispondenze negli studi sulla metrologia del mondo antico² e negli studi di Harb sui ritrovamenti emersi durante gli scavi del Palazzo di Takht-i Sulayman.

Gli studi di Harb hanno stimolato numerose ricerche in ambito matematico; ai fini di questo studio ha assunto particolare rilevanza un articolo di Yvonne Dold-Samplonius, che riporta una descrizione accurata degli elementi rinvenuti da Harb, e in particolare di alcuni frammenti di muqarnas e di una lastra con l'incisione di un tracciato regolatore.

2. Vedi paragrafo seguente *Note metrologiche*

(Descrizione della lastra)

La lastra, alta 47 cm, larga 50 cm e spessa da 3,5 a 4 cm, contiene un campo quadratico lungo 42 cm, coperto da una griglia geometrica. (...) Il disegno consiste principalmente di quadrati e rombi, con triangoli rettangoli isosceli lungo i bordi. I lati dei quadrati e dei rombi, così come i cateti dei triangoli, sono tutti lunghi 3,5 cm. Le loro tracce sono state disposte simmetricamente attorno ad un asse diagonale. La costruzione è completata nell'angolo in alto a destra da un quarto di ottagono irregolare. Gli angoli delle varie figure sono tutti multipli di 45°, ad eccezione di alcuni quadrangoli semi-regolari e triangoli isosceli lungo la diagonale. Sotto la griglia chiaramente tracciata sono visibili linee scarsamente cancellate che in alcuni punti potrebbero essere state linee ausiliarie ma in altri sembrano non avere una connessione diretta con il disegno reale. L'artigiano sembra aver rielaborato il suo progetto e non è chiaro se il progetto sia mai stato utilizzato o se sia stato completamente abbandonato. (...) Poiché rimane una questione aperta se il disegno sulla lastra sia mai stato eseguito, non è chiaro se gli elementi prefabbricati (rinvenuti durante gli scavi) corrispondano alla lastra.

(Descrizione dei frammenti)

Diversi elementi a muqarnas sono stati ritrovati sotto le rovine del palazzo. Questi elementi potrebbero essere stati usati per la costruzione di volte del palazzo che non è più possibile individuare. Non è chiaro se esista una relazione fra la lastra incisa e gli elementi ritrovati. Riguardo agli elementi descritti in dettaglio da Harb, si può osservare quanto segue. Gli elementi ritrovati hanno tre dimensioni,

rispettivamente 21, 26 e 42 cm. È stato trovato un solo elemento di 42 cm (due volte 21) e la sua altezza è indeterminata, in quanto si tratta di un elemento intermedio.

L'altezza delle celle con un'unità di misura di 21 è 42, e l'altezza delle celle con un'unità di misura di 26 è 52: pertanto l'altezza delle celle è il doppio della loro unità di misura.³

L'unità di 21 cm per la suddivisione delle bisettrici, emersa dall'analisi geometrica condotta sui rilievi delle volte di Palermo, ricorre, nel testo appena citato, fra le dimensioni degli elementi rinvenuti; il suo doppio, 42 cm, definisce il campo quadratico inciso sulla lastra.

Ulteriori corrispondenze fra le dimensioni delle celle delle strutture a muqarnas di Palermo e quelle riportate da Harb sono emerse nello studio delle singole strutture. Tali corrispondenze supportano l'ipotesi che le strutture a muqarnas di Palermo siano state progettate secondo una stessa matrice geometrica e dimensionale e potrebbero contribuire a un avanzamento degli studi sulla provenienza o sulla formazione delle maestranze⁴.

3. DOLD-SAMPLONIUS Y., HARMSEN S. L., op. cit., pg. 88.

4. Questa ricerca si propone di dimostrare che il rilievo e il disegno come operazione critica forniscano una valida strada per la formulazione di ipotesi storiche in mancanza di documentazione.

4. Note metrologiche

Al fine di contribuire all'attribuzione di una identificazione geografica delle dimensioni che ricorrono nelle celle delle volte studiate e nello schema di riferimento proposto, è stata eseguita una sintetica rassegna di studi sulla metrologia.

Gli spunti più interessanti sulle corrispondenze dimensionali fra i casi studiati, sono emersi a seguito della lettura di *Metrologia e circolazione monetaria degli antichi* di Angelo Segre, che dedica un'ampia sezione alla metrologia antica del medio oriente, articolata nelle sue declinazioni regionali. Le considerazioni di Segre sono di seguito riassunte, enucleando i passaggi di maggior interesse per questo studio; in particolare sarà evidenziata la trasformazione, o la permanenza, di alcune unità di misura del mondo antico.

Sistema egiziano

Il valore che si mantiene inalterato nell'antichità egiziana è quello del cubito reale egiziano o *mesh suten*, pari a 0,525 m¹. Tale valore resta uguale anche nella sua connotazione di cubito nilometrico antico, utilizzato per la misurazione del livello del Nilo.

Si ipotizza che il valore del *mesh suten*, ravvisabile anche in Erodoto, fosse in uso in Persia e che fosse stato poi adottato da tutti i Paesi assoggettati al suo dominio. La sua originaria suddivisione in 7 palmi viene abbandonata a favore di una suddivisione duodecimale², come confermato

1. Ibidem, p.4.

2. *Le divisioni dei cubiti reali egiziani come quelle dei cubiti babilonesi e greci si riconnettono direttamente come in quasi tutti i paesi del Mediterraneo coi dati suggeriti dalle dimensioni del corpo umano: dita, palmi, piedi ecc. Sembra però particolare dell'Egitto e della Palestina e di Babilonia nell'età neobabilonese la divisibilità del*

dallo studio di un campione conservato al Museo di Torino³. Oltre al cubito reale (*mesh suten*) circolavano altri cubiti, che Segre identifica con i valori di 0,513 m e di 0,518 m. Anche per questi cubiti gli studi su una delle canne conservate al Museo di Torino confermano la suddivisione secondo un sistema in base 12.

Il piede alessandrino, di valore pari a 0,309 m, viene adottato per usi comuni in Egitto, sotto l'impero romano; sembra comunque che il *mesh suten* (cubito reale) sia stato rimasto in uso fino alla più tarda età bizantina.

Durante l'impero romano la *scala di misure* adottata in tutti i Paesi assoggettati (e quindi anche in Egitto) è riferita al *miglio*, di valore pari a 1478,9 m, e alla sua suddivisione in 8 *stadi*⁴. Si riporta la tabella.

Miliarium	.	m.	1478,9		1				
Stadium	.	»	184,86		8		1		
Passus	.	»	1,4789	1000		125		1	
Cubitus	.	»	0,44367	$3333\frac{1}{3}$		$416\frac{2}{3}$		$3\frac{1}{2}$	1
Pes	.	»	0,29578	5000		625		5	$1\frac{1}{2}$ 1

Per quanto riguarda il cubito nilometrico, l'autore suppone che il suo valore abbia subito una trasformazione dovuta all'uso, durante l'impero, del palmo alessandrino. Da ciò deriverebbe un altro cubito, di valore pari a 0,5407 m, la cui misura è pari a quella del cubito nero usato durante il califfato di al-Ma'mun⁵ per la costruzione di edifici.

cubito reale in 7 palmi, la quale contrasta con quella duodecimale del medesimo introdotta nella valle del Nilo probabilmente per influssi semitici. Ibidem. p. 3.

3. *Questo cubito però è suscettibile anche di una divisione in 6 palmi, la quale risulta da un campione del Museo di Torino, di basalto grigio verde, ottimo per l'accuratezza del lavoro, per lo stato di conservazione, per la sua divisione in 24 dita già osservata dal Lepsius e le sue partizioni in terzi e quarti (...), Ibidem. p. 5*

4. *I ragguagli delle misure romane in quelle alessandrine usate in Egitto sotto l'impero sono assai semplici perchè, dato il rapporto di 24/25 fra il piede italico e alessandrino, le misure alessandrine prendono una divisione duodecimale in base al piede alessandrino ed una decimale in base a quello romano. Ibidem, p. 44.*

5. Califfo abbaside (VIII e il IX secolo), noto per aver fondato a Baghdad la *Bayt al-Hikma* (Casa della Sapienza), in cui si avviò la

Sistema giudaico e siriano

La *scala di misure*⁶ che Segre propone per questo sistema si basa su misure individuate dall'autore servendosi di fonti giudaiche, delle tavole di Erone, e in particolare del Trattato di Giuliano di Ascalona, architetto bizantino vissuto nel VI secolo d.C. ad Ascalona, a nord di Gaza. Tale sistema era in uso anche in Egitto, in Persia e nei Paesi limitrofi. La *scala di misure* proposta segue un sistema di suddivisione sessagesimale, che si sviluppa suddividendo in sottomultipli il valore della *parasanga* persiana (*parsah* in arabo *Kibrath hâ 'ârez*), una misura itineraria del mondo antico corrispondente a circa 6300 metri.

<i>Παρασάγγη</i>	m. 6300	1									
<i>μίλιον = mil o techum</i>											
<i>shabbat</i>	» 1575	4	1								
<i>στάδιον — ris</i>	» 210	30	7 1/2	1							
<i>πλέθρον</i>	» 35	180	45	6	1						
<i>ἄκαινα ο κάλαμος</i>	» 3,50	1800	450	60	10	1					
<i>σογυιά = chehel</i>	» 2,10	3000	750	100	16 2/3	1 2/3	1				
<i>βῆμα = pesi'ah</i>	» 1,05	6000	1500	200	33 1/3	3 1/3	2	1			
<i>πῆχυς = amm'ah</i>	» 0,525	12000	3000	400	66 2/3	6 2/3	4	2	1		
<i>πους — 'ammah garmida</i>	» 0,350	18000	4500	600	100	10	6	3	1 1/2	1	
<i>σπιθαμή = zereh.</i>	» 0,2625	24000	6000	800	133 1/3	13 1/3	8	4	2 1/3	1 1/3	1

Dalla combinazione dei dati di Erone e Giuliano di Ascalona l'autore individua l'uso di 6 cubiti⁷:

- un cubito filetereo del valore di 0,45 metri;
- un cubito filetereo del valore identico al valore del *mesh suten* egizio, ossia pari a 0,525 metri⁸;

traduzione in lingua araba di testi provenienti dalla Grecia, dalla Persia e dall'India, nonché la composizione di nuove opere scientifiche.

6. Ibidem, Cap. 3, Tabella p. 78.

7. Il valore del quarto e del quinto cubito derivano dall'*Ooguia* (2,10 metri) e dalle sue declinazioni *Ooguia geometrica* (2,166 m) e *Ooguia semplice* (1,935m circa).

8. *Gli Ebrei quindi al tempo di Ezechiele e della Cronica si sono serviti ordinariamente di un cubito più piccolo, che doveva essere eguale al mesh nets egiziano di mm. 450, mentre per il nuovo tempio avevano*

- un cubito identificabile con il *mesh nets*, o cubito corto, pari a 0,45404 metri; tale valore equivale al doppio della lunghezza dello *spitame reale* (*zereth*), pari a di 0,22702 m. Il valore dello *spitame reale* è, a sua volta, in relazione con la *Ooguia* (*chebel*);
- un cubito di valore pari a 0,4683 m derivato dal valore dell'*Ooguia* semplice⁹;
- un cubito di valore pari a 0,462 m, prossimo al valore del cubito alessandrino imperiale, di valore pari a 0,46215 metri.

Ai valori sopra riportati Segre aggiunge un cubito bipedale, raccontato da Erone, adoperato in Palestina, e corrispondente al valore di 0,70 metri, suddiviso in 4/3, 8, 16, e 32¹⁰. Il sistema di misura di Erone viene riportato nella seguente tabella e risulta coincidente con la scala di misure della tabella precedente.

<i>Μίλιον</i>	m.	1575	1																
<i>πλέθρον (α)</i>	»	420	$3 \frac{3}{4}$	1															
<i>σταδιον</i>	»	210	$7 \frac{1}{2}$	2	1														
<i>πλέθρον (β)</i>	»	35	45	12	6	1													
<i>ἀκαινα</i>	»	4,2	375	100	50	$8 \frac{1}{3}$	1												
<i>πᾶσσον</i>	»	2,1	750	200	100	$16 \frac{2}{3}$	2	1											
<i>ἀμπελος</i>	»	1,75	900	240	120	20	$2 \frac{2}{5}$	$1 \frac{1}{5}$	1										
<i>οὐργιά</i>	»	1.575	1000	$266 \frac{2}{3}$	$133 \frac{1}{3}$	$22 \frac{2}{9}$	$2 \frac{2}{3}$	$1 \frac{1}{3}$	$1 \frac{1}{9}$	1									
<i>βῆμα = πῆχυς</i>	»	0,700	2250	600	300	50	6	3	$2 \frac{1}{2}$	$2 \frac{1}{4}$	1								
cubito filetereo	»	0,525	3000	800	400	$66 \frac{2}{3}$	8	4	$3 \frac{1}{3}$	3	$1 \frac{1}{3}$								
<i>ποῦς</i>	»	0,350	4500	1200	600	100	12	6	5	$4 \frac{1}{2}$	2	1							

stabilito di usare un cubito di 7 palmi, mm. 525, eguale quindi al *mesh suten* che avevano diviso in 6 palmi. Ibidem, p. 82.

9. Gli Ebrei però usavano altri cubiti oltre questi due di 7 e di 6 palmi, tanto è vero che nel castello di Susan erano depositati due cubiti che differivano fra loro di un mezzo dito e di cui il più piccolo superava di 1/2 dito il cubito di Mosè. Il cubito di 24 1/2 dita doveva quindi corrispondere a circa 459,38 mm.; quello di 25 dita, eguale a 468,5 mm, si sarebbe dovuto identificare al cubito menzionato da Giuliano di Ascalona, che fa l'*Ooguia* semplice eguale a 25/28 di quella geometrica. Ibidem, p. 83.

10. Infine esiste tutta una serie di misure di Erone che Hultsch aveva assegnato all'Egitto, ma che effettivamente non possono attribuirsi che ai paesi dell'Asia minore e della Palestina, perchè estranee al sistema metrico egiziano dell'età imperiale e bizantina a noi ben noto. Ibidem, p. 80.

Si può quindi dedurre che il *miglio* (*thecum shabbhat* o *mil*) di valore pari a 1575 m, corrispondesse alla suddivisione in 4 parti della *parasanga*.

Sistema metrico assiro-babilonese e persiano

Secondo l'autore le misure di lunghezza babilonesi nelle età più recenti, fanno ancora riferimento alla suddivisione della *parasanga* persiana¹¹. Le suddivisioni (sessagesimali) del *danna беру*, il cui valore è equivalente a quello della *parasanga*, vengono riassunte nella seguente tabella; resta incognito il valore di un cubito babilonese¹².

<i>danna</i> (1)	<i>beru</i>	m. 6300	1						
<i>us</i>	—	» 210	30	1					
1 (2)	<i>aslu</i>	» 35	180	6	1				
1/2 (2)	<i>subban</i>	» 17,5	360	12	2	1			
<i>GAR</i> (-DU)	—	» 3,5	1800	60	10	5	1		
<i>gi</i>	<i>qanu</i>	» 1,75	3600	120	20	10	2	1	
<i>kus ara</i> o <i>gus gal</i>	<i>ammāt urē</i> o <i>ammāt rabitu</i>	» 437,5	14400	480	80	40	8	4	1
<i>kus</i>	<i>ammātu</i>	» 291,72	1600	720	120	60	12	6	1 1/2 1
<i>kus</i>	<i>ammātu</i>	» 195,1	32400	1080	180	90	18	9	2 1/4 1 1/2 1

L'autore riconnette le misure arabo-persiane a quelle babilonesi, attraverso quelle della Persia sasanide, con divisione della *parasanga* in 3.

<i>parasanga</i>	m. 6300	1			
<i>miglio mil</i>	» 2100	3	1		
<i>braccio bá</i>	» 2,10	1000	1000	1	
<i>dérá</i> del commercio persiano moderno (3)	» 1,050 circa	6000	2000	2	1
<i>cubito</i>	» 0,525	12000	4000	4	2 1

11. (...) come mi parè si possa dedurre dalla divisione della *parasanga* persiana in 30 stadii, divisione che troviamo costantemente in Erodoto e che, come si è visto, si è conservata in Palestina, dove il miglio è stato introdotto dividendo per 4 la *parasanga*. Ibidem, p. 115.

12. La determinazione diretta dei cubiti babilonesi allo stato attuale delle nostre conoscenze sembra impossibile. Ibidem, p. 118.

Gli studi di metrologia hanno permesso di individuare interessanti analogie fra alcune delle dimensioni che ricorrono nei casi studio e le unità di misura in uso in medio oriente nell'antichità, in particolare con la *scala di misure* proposta per il sistema giudaico e siriano, i cui valori compaiono nel trattato di urbanistica pubblicato nel VI secolo d.C. da Giuliano di Ascalona¹³.

13. La fonte usata da Segre per la definizione della *scala di misure giudaiche e siriane* conferma che queste misure antiche dovessero essere in uso anche in tempi più prossimi ai secoli di costruzione dei sistemi a muqarnas studiati.

PARTE SECONDA

Strutture a muqarnas di Palermo.

La quasi totalità delle strutture a muqarnas ad oggi presenti in Sicilia è ubicata nella città di Palermo, capitale del Regno normanno¹. Le uniche volte a muqarnas ubicate fuori dalla città si trovano nella Chiesa dei Santi Pietro e Paolo a Casalvecchio Siculo e nel Castello di Caronia, entrambi nella provincia di Messina. La più antica struttura conservata è il soffitto ligneo dipinto che copre la navata centrale della Cappella Palatina del Palazzo Reale, costruita durante il regno di Ruggero II, tra il 1130 e il 1154. Le altre strutture, in pietra e stucco, sono state costruite nella seconda metà del XII secolo, su commissione dei successori di Ruggero II, Guglielmo I e Guglielmo II. Le strutture a muqarnas di Palermo sono caratterizzate da alcune peculiarità compositive:

- la disposizione simmetrica rispetto a piani verticali ortogonali alle pareti di fondo o ruotati a 45°;
- l'articolazione in unità compositive o 'moduli';
- la simmetria dei 'moduli' posti lungo i lati rispetto a un piano verticale perpendicolare alla parete;
- la simmetria dei 'moduli' angolari rispetto al piano verticale bisettore, ruotato a 45°;
- la presenza, al primo registro, di elementi dal profilo a L paralleli o ortogonali alle pareti di fondo; questi ultimi sono sempre interposti fra due moduli consecutivi;
- la presenza, in sommità, di una 'cuffia' costituita da una superficie conica su direttrice semicircolare.

Nei paragrafi che seguono sarà descritta l'analisi geometrica della proiezione in pianta delle volte rilevate, al fine di verificare l'efficacia del dispositivo geometrico proposto, basato sulla divisione delle bisettrici degli angoli in 12 unità da 21 cm. Saranno altresì evidenziate alcune proprietà dimensionali ricorrenti.

1. MASSAIU M., (Tesi di dottorato) *The Representation of Power in the Art and Architecture of the Kingdom of Sicily during the Norman Period (1130-1189 AD)*, Vol. I, Cordoba 2018. La prima parte della tesi descrive in modo preciso ed esaustivo il contesto storico e culturale presente in Sicilia sotto la dominazione normanna.

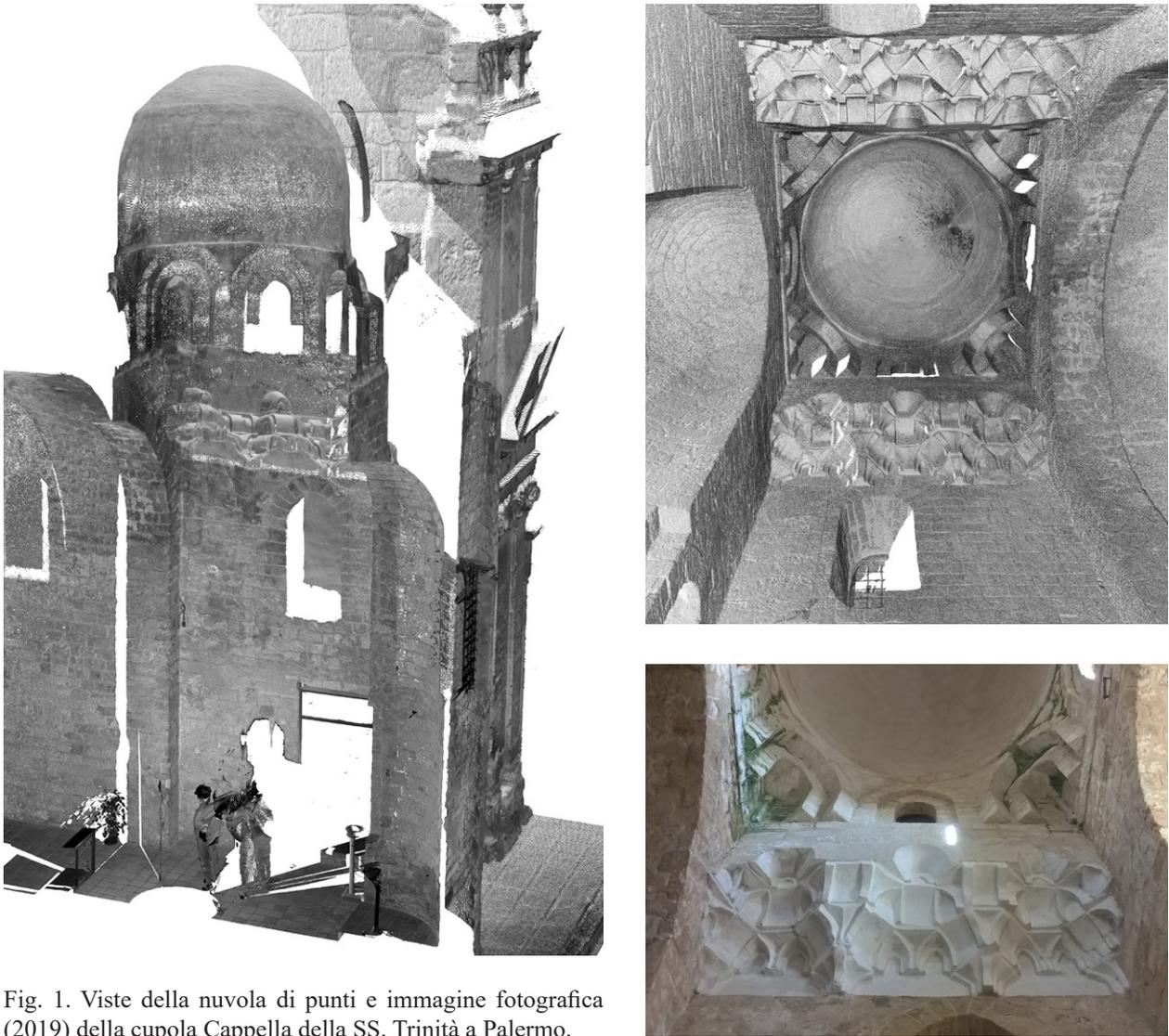
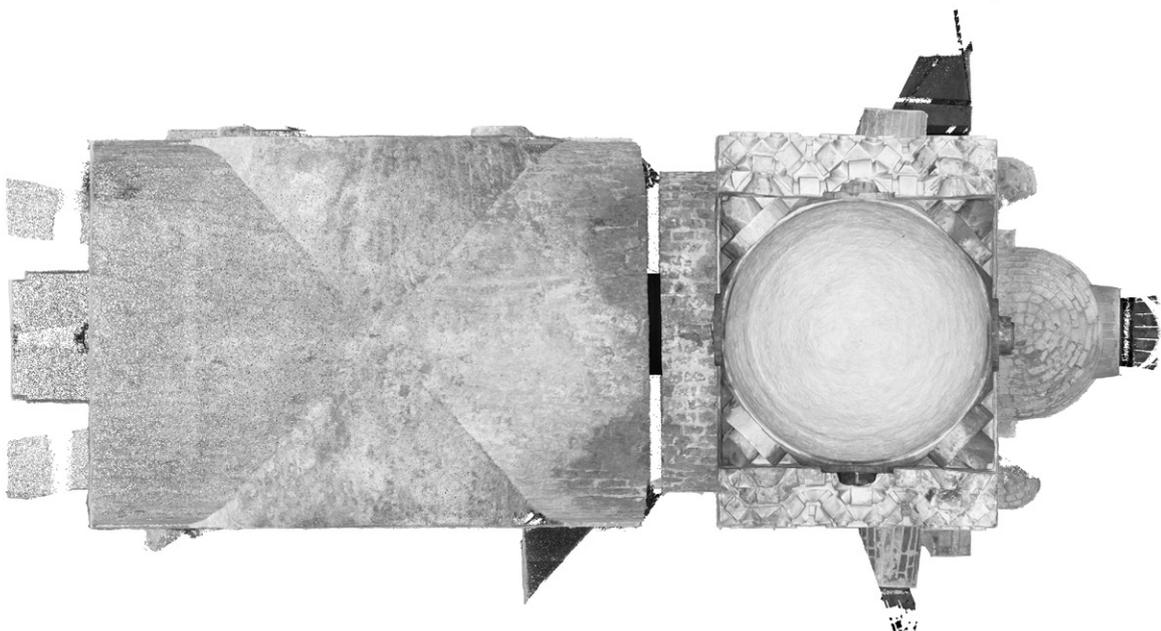


Fig. 1. Viste della nuvola di punti e immagine fotografica (2019) della cupola Cappella della SS. Trinità a Palermo.



1. I muqarnas della Cappella della SS. Trinità

La cappella della SS. Trinità appartiene al complesso della Zisa, edificato per volere di Guglielmo I (1154-1166) durante gli ultimi anni del suo regno e concluso dal suo successore Guglielmo II (1166-1189).

É una chiesa a navata unica, la cui zona presbiteriale è definita da un vano rettangolare, trasversale e simmetrico all'asse longitudinale della chiesa; il vano è coperto da una complessa struttura, composta da una cupola a calotta liscia estradossata su tamburo ottagonale¹, fiancheggiata da due volte a muqarnas.

Al fine di comprendere le relazioni tra l'architettura e la decorazione a muqarnas, il rilievo con tecniche laser scanning è stato esteso all'intera cappella e a parte dell'esterno (Fig. 1), mentre l'analisi geometrica è stata limitata alla zona presbiteriale.

Il tamburo ottagonale, posizionato sull'asse longitudinale della cappella, è circoscritto da un quadrato che ha lati di lunghezza pari al lato corto dello spazio rettangolare; le parti residuali dello spazio rettangolare sono coperte da due strutture a muqarnas simmetriche.

L'impianto geometrico del vano si basa sulla combinazione fra il quadrato base e la sua rotazione di 45°, che definisce la profondità delle nicchie coperte dalle volte a muqarnas: il lato maggiore del rettangolo ha pertanto dimensione equivalente alla diagonale del quadrato base².

La profondità della volta a muqarnas è quindi pari alla metà della differenza tra la dimensione della diagonale del quadrato base (4,98 m) e la dimensione del lato dello stesso quadrato (3,52 m): $(4,98-3,52)/2= 0,73$ m (Fig. 2).

1. ANTISTA G., *Le cupole in pietra d'età medievale nel mediterraneo (Sicilia e Maghreb)*, Palermo 2016, pp. 11-22

2. Questa particolare costruzione richiama la risoluzione geometrica di una equazione di secondo grado nota come *completamento del quadrato*. Si rimanda all'Appendice dello stesso paragrafo.

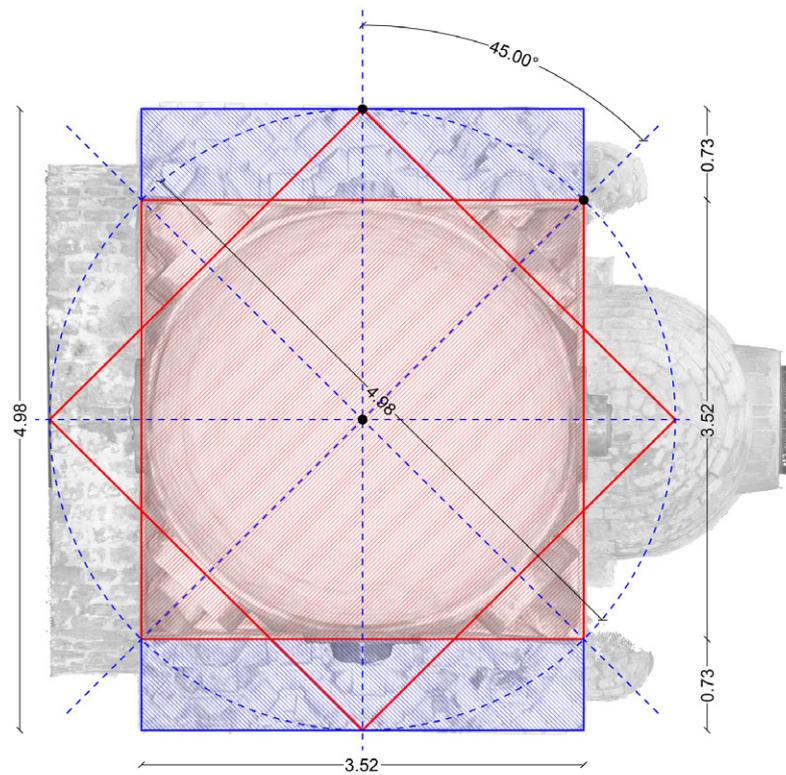


Fig. 2. Analisi dello schema geometrico del vano. In rosso il quadrato base, in blu le nicchie coperte dalle volte a muqarnas.

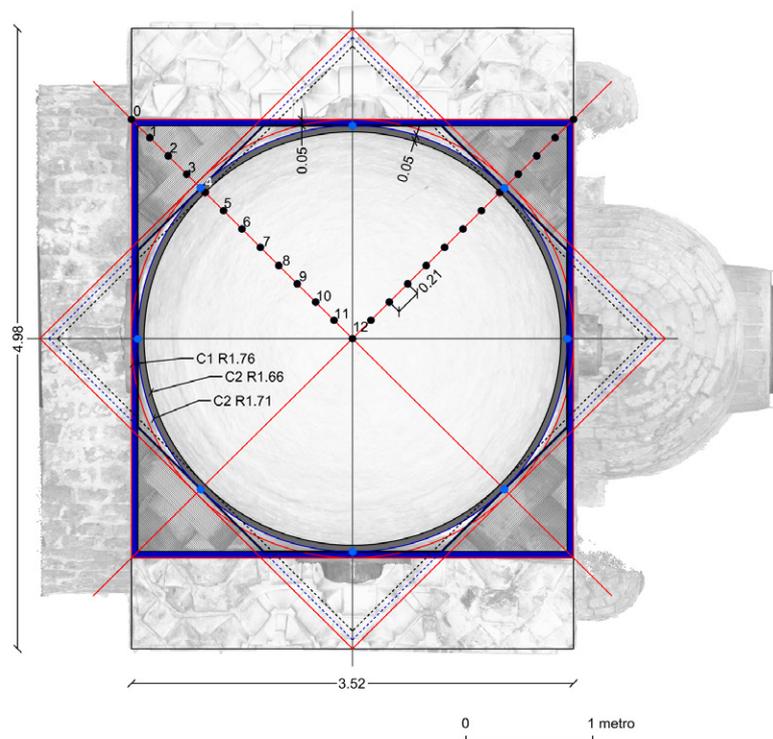


Fig. 3. Disegno in pianta del sistema cupola tamburo. In grigio cornice della cupola, in blu cornice del tamburo.

Lo studio della Cappella della SS. Trinità ha fortemente indirizzato la definizione dell'ipotesi sulla divisione delle bisettrici dei vani coperti dalle volte a muqarnas.

La dimensione dell'unità, 21 cm, è risultata dalla suddivisione della metà della diagonale del quadrato base (249 cm) in dodici parti. Tale valore, pari a 20,75 cm, è assimilabile a 21 cm (Fig. 3).

L'osservazione *in situ* e le sezioni della nuvola di punti mostrano che sia il tamburo che la cupola si impostano su cornici.

Il raggio della cupola, al netto della cornice, è pari a 8 unità (1,66 m).

Considerata la circonferenza C1 inscritta al quadrato base (raggio 1,76 m), e la circonferenza interna della cupola C2 (raggio 1,66 m), si traccia una circonferenza intermedia C3 (raggio 1,71 m).

Tale circonferenza definisce:

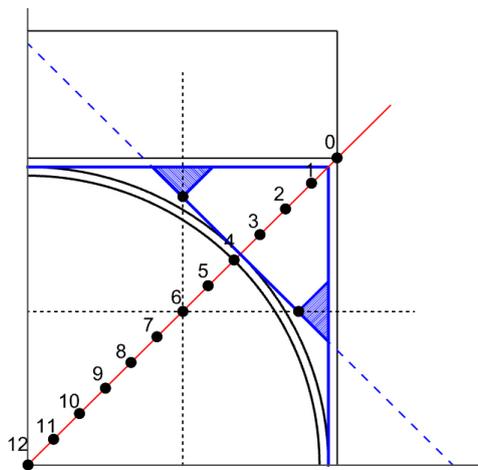
- il bordo esterno della cornice della cupola, di profondità pari a 5 cm (1,71-1,66m).
- all'intersezione con gli assi del quadrato, lo spessore della cornice interna al quadrato stesso, pari a 5 cm (1,76-1,71 m)
- all'intersezione con le diagonali del quadrato, la profondità delle nicchie angolari del tamburo ottagonale. (Fig. 3)

La pianta delle nicchie angolari, che fanno da transizione tra il quadrato base e il tamburo ottagonale, è definita da triangoli rettangoli isosceli, posti ai vertici del quadrato.

Tali nicchie sono composte dall'addizione di archi a tutto sesto degradanti, che inquadrano gli spigoli verticali del vano quadrato.

Lo spazio terminale della nicchia è definito da due elementi la cui geometria è assimilabile a una cella elementare di muqarnas, nota con il nome di *sarwaliyya sagira* o *medio quadrato*³.

3. L'elemento chiamato dagli stuccatori *Sarwaliyya sagira* "pantaloni piccoli" o dai pittori *Sagira* "piccolo" ed è usato per pezzi d'angolo, si genera sottraendo, ad un prisma a base di triangolo rettangolo, una



I conci d'imposta degli archi aggettano dalla cornice, lasciando a vista dei peducci, la cui proiezione in pianta corrisponde a triangoli rettangoli isosceli di ipotenusa pari a 34,5 cm, qui denominati T2.

Quattro monofore con archi a tutto sesto degradanti si alternano alle nicchie angolari; il loro disegno segue la stessa matrice geometrica delle nicchie angolari e il loro dimensionamento è identico. (Figg. 4, 5)

volta a crociera su pianta quadrata (...), in V. Garofalo, *I muqarnas metodologie per uno studio. La nicchia centrale dell'iwān alla Zisa di Palermo*, Tesi di Dottorato, Palermo 2003, p. 35.

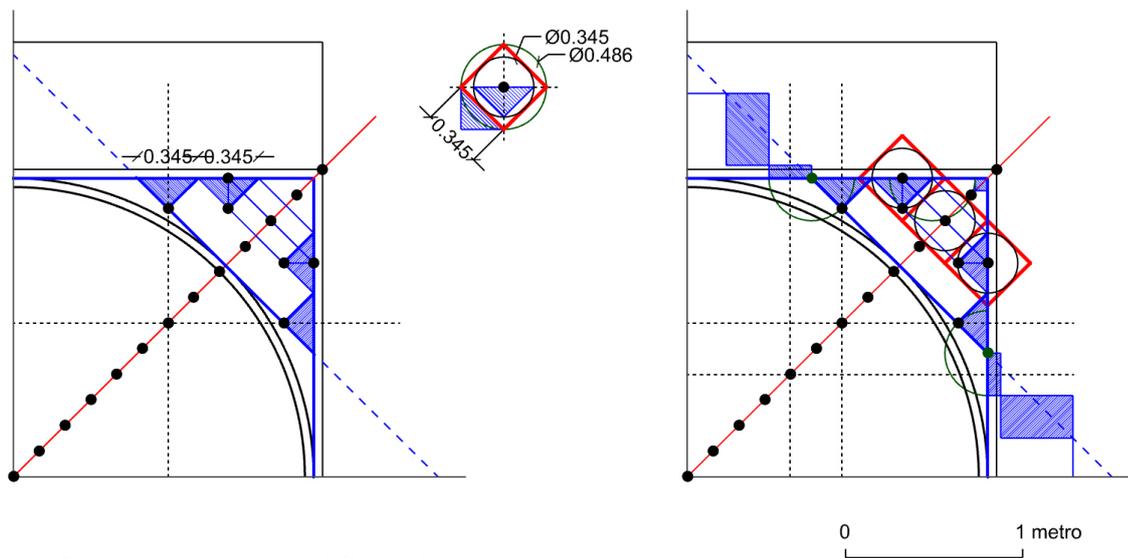


Fig. 4. Costruzione geometrica delle nicchie angolari.

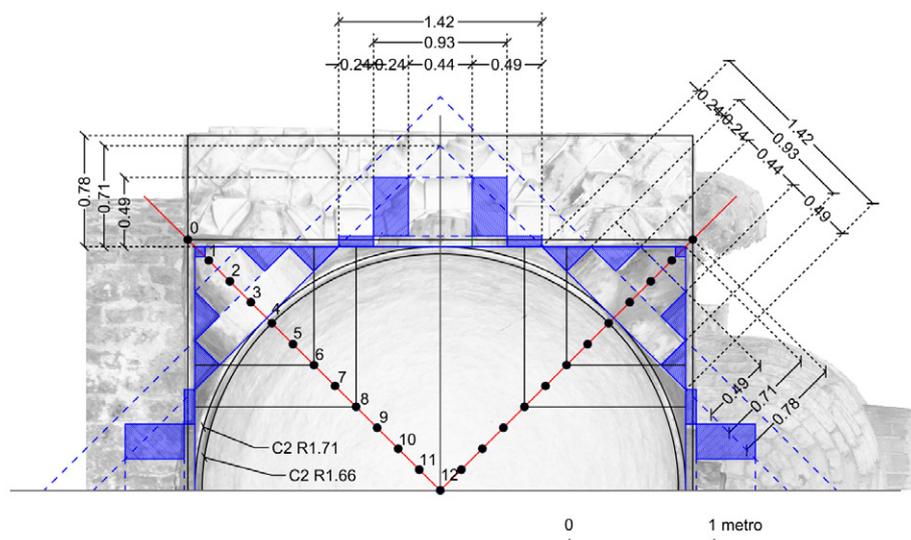


Fig. 5. Disegno in pianta delle nicchie angolari e delle monofore del tamburo.

retta ortogonale alla bisettrice che passa per il punto 4.

Il modulo 'A' centrale è delimitato da due triangoli T2 le cui ipotenuse sono allineate ai prolungamenti delle rette che corrispondono in pianta al piano di fondo del primo arco della nicchia angolare del tamburo.

Lo spazio residuo tra due moduli 'A' consecutivi definisce, al primo filare, lo spessore dell'elemento a L ortogonale alla parete di fondo della volta; tale spessore è maggiore di quello degli elementi a L paralleli alla parete di fondo.

Gli elementi a L, posti lungo le pareti della volta, si combinano con gli analoghi elementi ortogonali, in una aggregazione a forma di T (Fig. 9); quelli posti sull'angolo sono ortogonali tra loro.

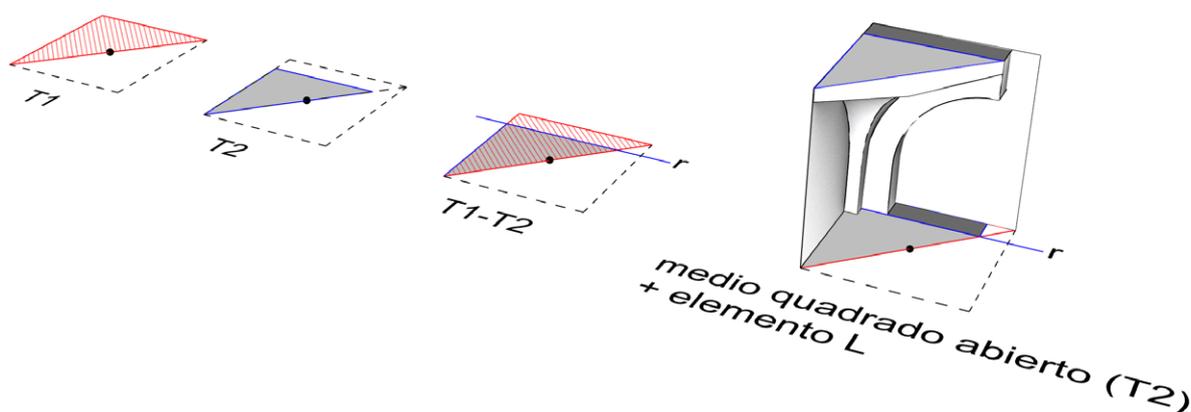


Fig. 7. Definizione dell'angolo per sottrazione tra i due triangoli base T1 e T2.

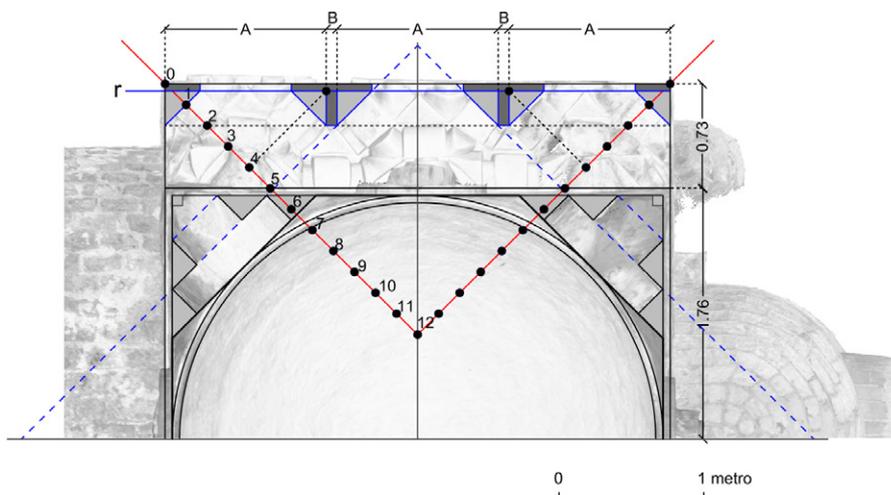


Fig. 8. Disegno del primo filare, definizione dei moduli compositivi e degli elementi a L ortogonali.

Lo schema compositivo della struttura a muqarnas può dunque essere espresso dalla sequenza A+B+A+B+A.

L'analisi geometrica del primo filare ha evidenziato interessanti relazioni geometriche e di allineamento con le nicchie angolari del tamburo, suggerendo che le tre parti in cui si articola il vano (tamburo con cupola e volte a muqarnas simmetriche), fanno parte di un progetto unitario.

Al secondo filare si ravvisa ancora una volta la stretta connessione fra il disegno della volta a muqarnas e le nicchie del tamburo: sul punto di intersezione fra i prolungamenti delle linee a 45° che definiscono in pianta il limite esterno di tali nicchie, è posizionato un triangolo T2 del modulo principale centrale.

Sui punti di intersezione fra queste rette e la retta parallela alla parete di fondo condotta per il punto 3 della bisettrice, si posizionano due elementi a L orientati a 45° , identici agli elementi a L del primo registro ortogonali alla parete. La duplicazione per simmetria degli elementi a L a 45° , rispetto a un asse perpendicolare alla parete di fondo, lascia uno spazio coperto da un triangolo T2, la cui ipotenusa definisce, per prolungamento, una retta s che delimita la proiezione in pianta del secondo filare. (Fig. 10)

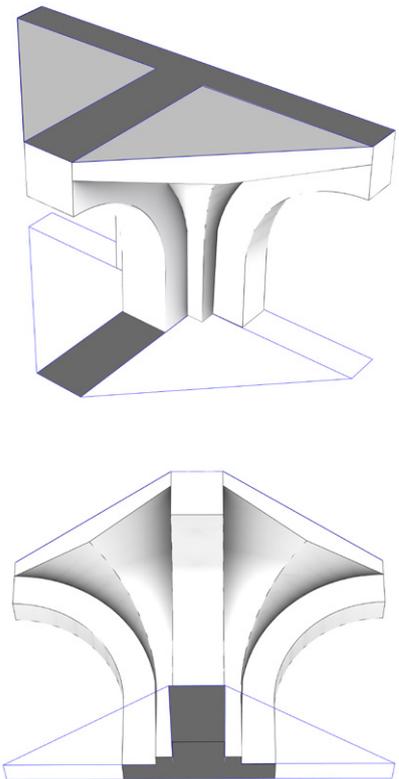


Fig. 9. Aggregazione a forma di T degli elementi a L.

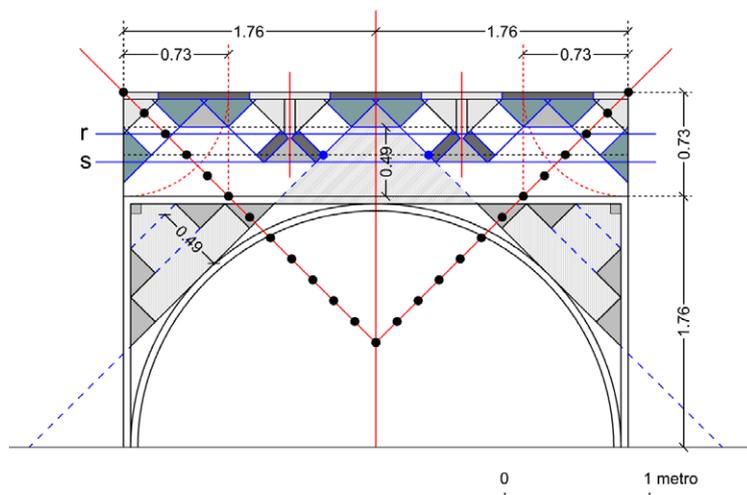


Fig. 10. Disegno del secondo filare.

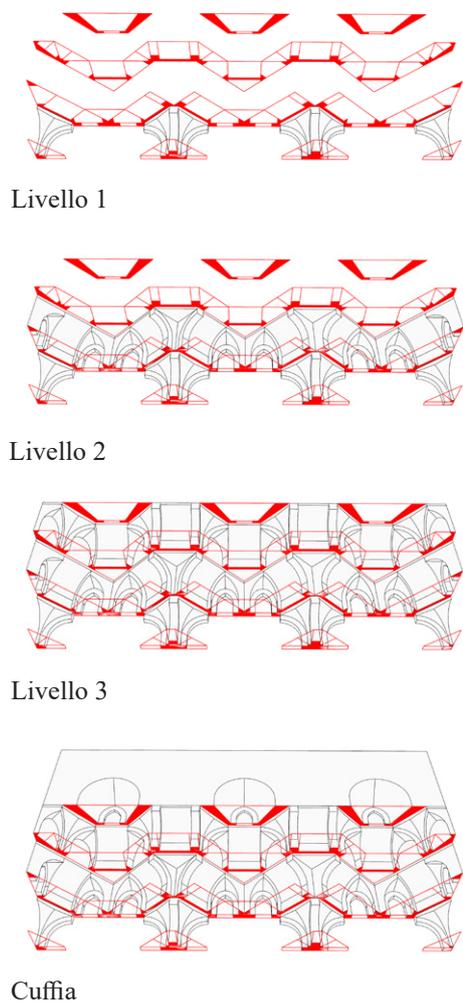


Fig. 13. Costruzione del modello 3d della struttura a muqarnas per filari.

La profondità del terzo filare, definita dalla distanza fra la retta *s* e il lato del quadrato di base che delimita la struttura a muqarnas, corrisponde esattamente all'oggetto degli elementi a L del primo filare, orientati in direzione perpendicolare alla parete di fondo. Elementi identici e con lo stesso orientamento vengono posizionati sui punti di intersezione fra la retta *s* e le rette ortogonali alle bisettrici che passano per i punti **9**. Le rette perpendicolari alla parete di fondo che passano per i punti **11** delle bisettrici definiscono l'ampiezza della nicchia del modulo principale al terzo filare. (Fig. 12)

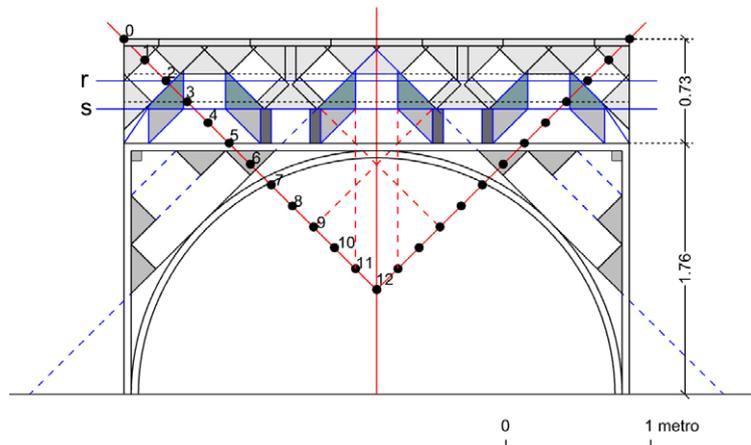


Fig. 12. Disegno in pianta del terzo filare.

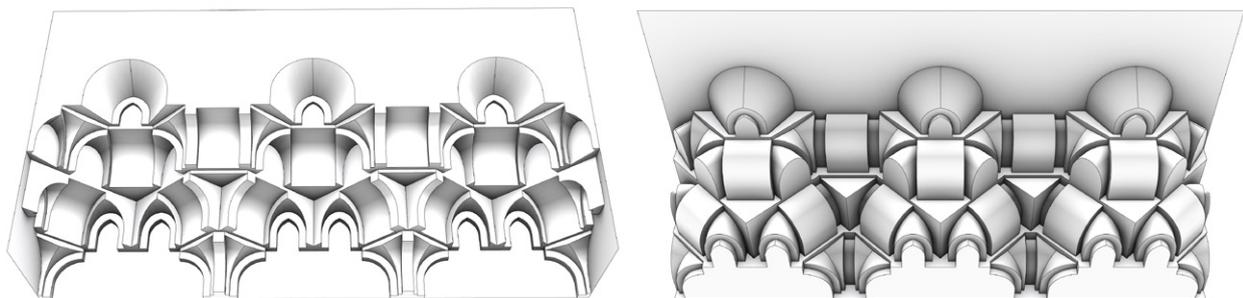


Fig. 14. Vista del modello 3D della struttura a muqarnas.

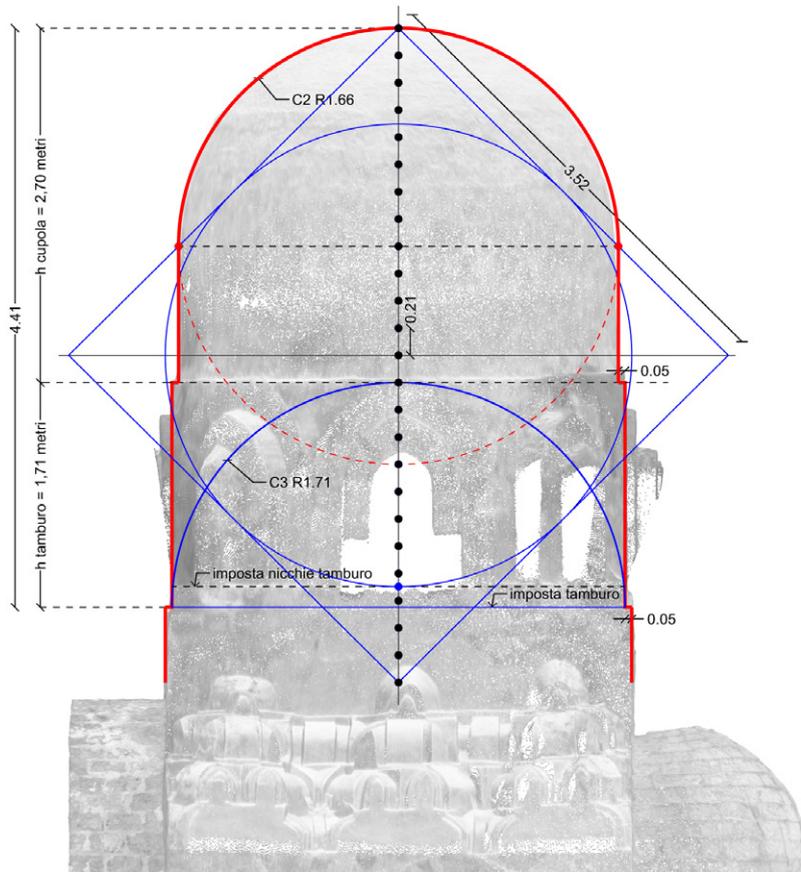


Fig. 15. Analisi geometrica dell'alzato. Studio del sistema cupola tamburo e congruenze con lo schema geometrico di pianta.

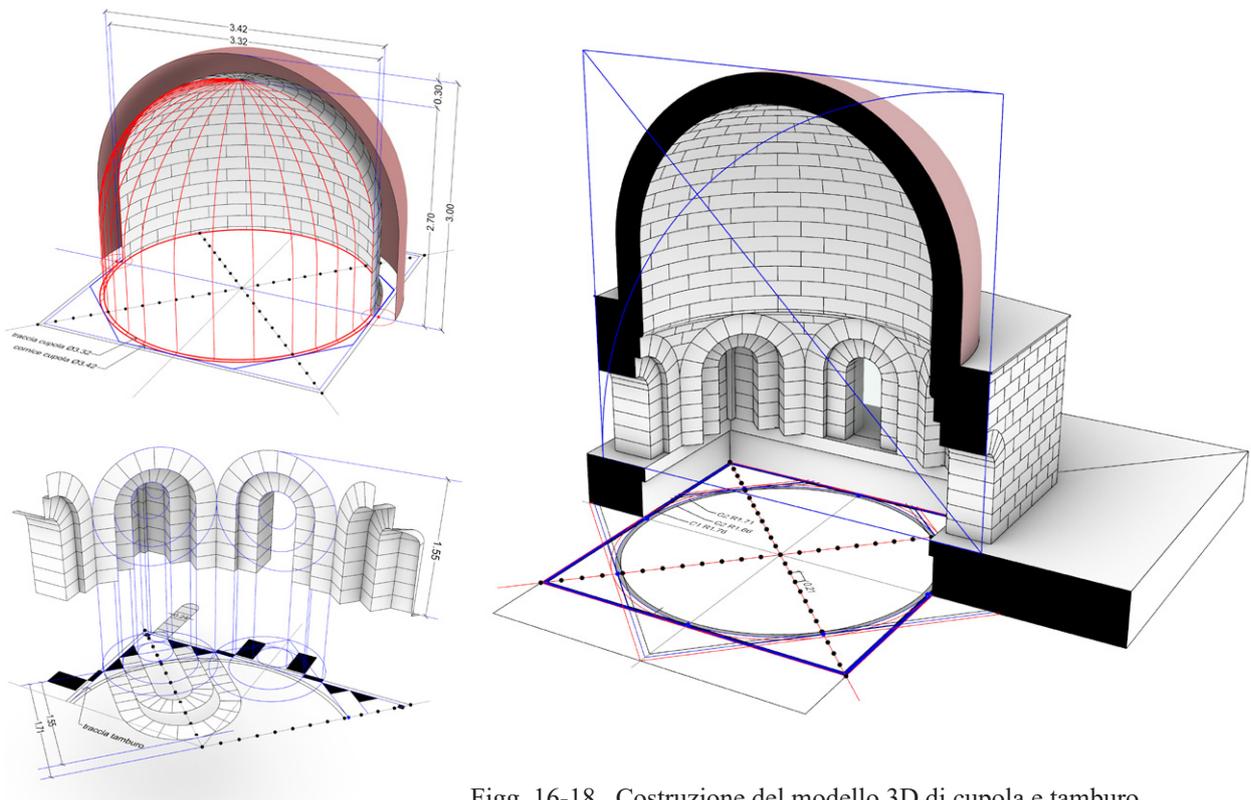


Fig. 16-18. Costruzione del modello 3D di cupola e tamburo.

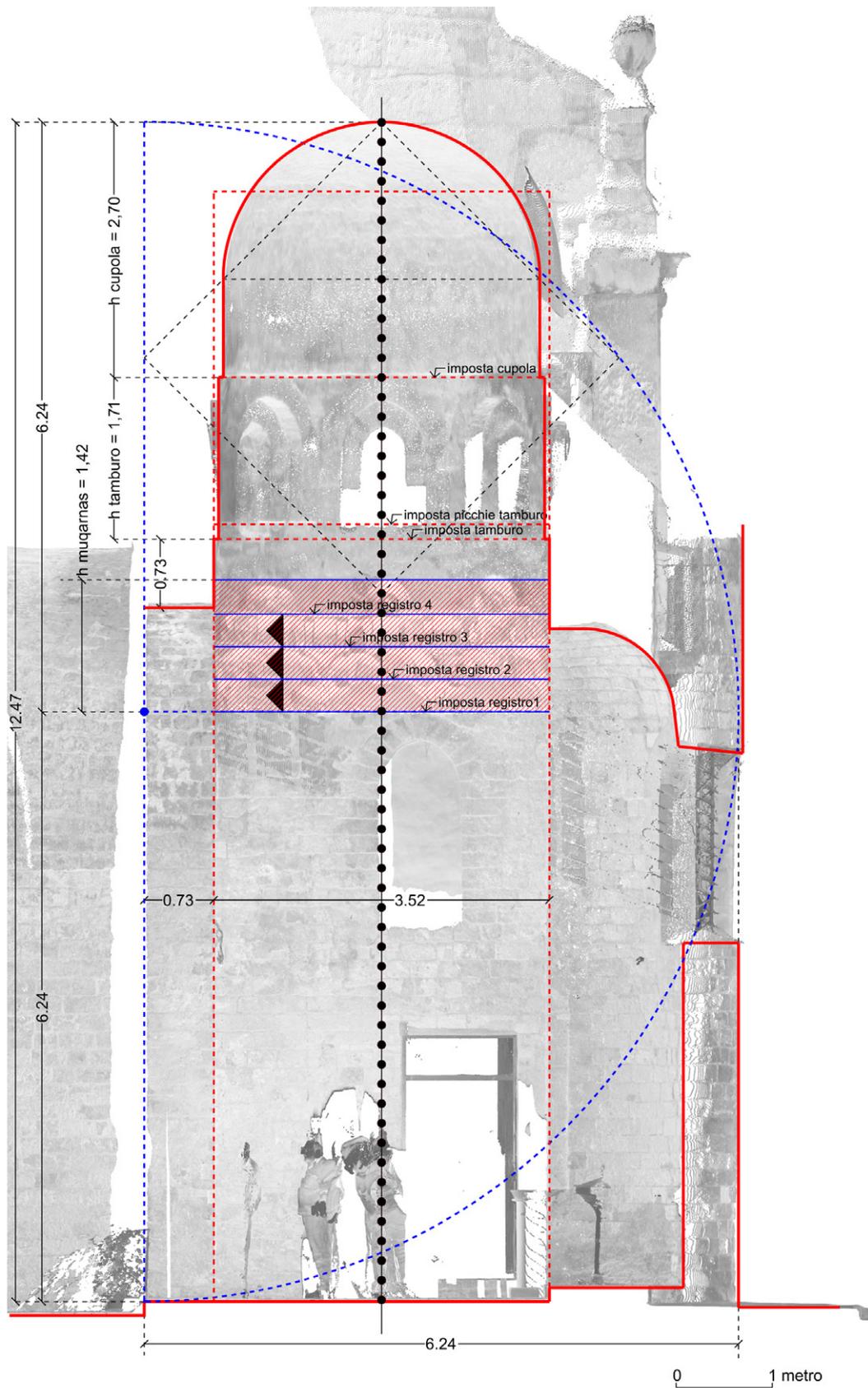


Fig. 22. Analisi geometrica dell'alzato.
La struttura a muqarnas si imposta a metà dell'altezza dell'intero vano.

Lo schema geometrico del disegno di pianta è utilizzato per il disegno dell'alzato.

Il profilo di sezione della cupola è definito da una semicirconferenza $C2$. Sull'estremità superiore del diametro verticale di $C2$ si posiziona il quadrato base ruotato a 45° e la sua diagonale verticale, divisa in 24 unità. L'altezza complessiva del vano della cupola corrisponde a 13 unità. Sulla retta orizzontale che definisce il limite inferiore della cupola, si posiziona l'estremità superiore del diametro verticale di una circonferenza $C3$; la retta orizzontale che passa per il centro della semicirconferenza definisce la quota di imposta del tamburo. La differenza fra i raggi di $C2$ e $C3$ definisce ovviamente l'aggetto della cornice della cupola. La circonferenza inscritta al quadrato base ruotato di 45° definisce la linea d'imposta delle nicchie del tamburo. (Fig. 15)

Sulla base dei dati 'rilevati', e interpretati attraverso l'analisi geometrica di pianta e alzato, si costruisce il modello tridimensionale (Figg. 16-21), che evidenzia ancora una volta la congruenza tra le dimensioni di pianta e alzato: altezza e larghezza del sistema cupola- tamburo sono ancora una volta definite grazie alle relazioni fra quadrato e ribaltamento della diagonale (Fig. 18).

Con riferimento al segmento che misura la distanza fra il piano di calpestio e l'estremità superiore dell'intradosso della cupola, la retta orizzontale che passa per il suo punto medio definisce la quota di imposta delle volte a muqarnas. I filari della volta hanno altezza costante pari all'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele $T2$ (34,5 cm) (Fig. 22).

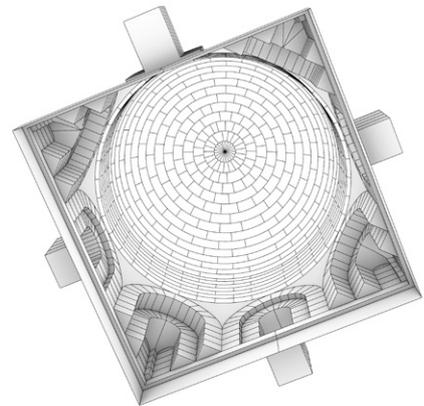
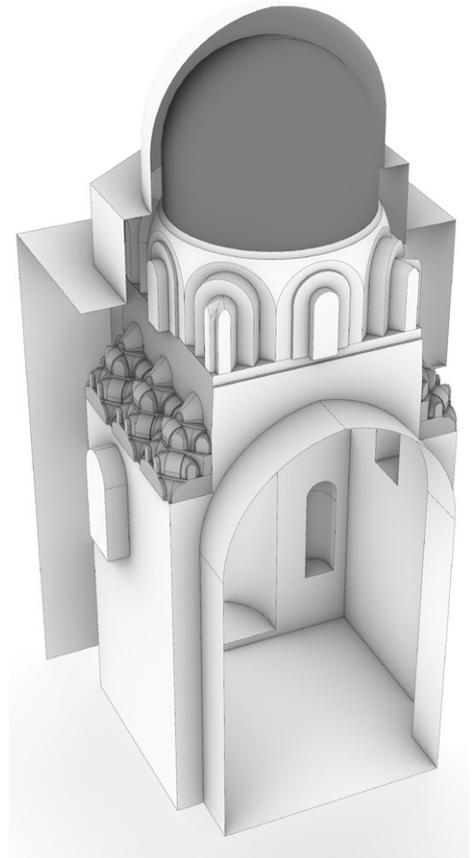


Fig. 19-21. Viste del modello 3D.

APPENDICE

Risoluzione geometrica di una equazione di II grado attraverso il metodo del ‘completamento del quadrato’ illustrato da al-Khwārizmī.

L’equazione da risolvere è un’equazione di secondo grado del tipo: $x^2 + px = q$.

I termini dell’equazione vengono interpretati come aree:

x^2 = all’area del quadrato ABCD di lato x (in rosso);

xp = all’area di un rettangolo con lato maggiore pari a x e lato minore pari a p , ossia alla somma dei quattro rettangoli di dimensioni x e $p/4$ (in blu).

Il “completamento” si applica aggiungendo quattro quadrati congruenti di lato $p/4$ alla nostra “equazione” (in bianco).

In tal modo si otterrà un quadrato più grande EFGH dato dalla somma del quadrato ABCD, dei 4 rettangoli e dei quattro quadrati di completamento.

L’area di questo quadrato sarà pari a:

$$x^2 + px + 4(p/4)^2$$

ossia

$$(x + p/2)^2,$$

il valore del lato del quadrato elevato alla seconda.

Per effetto del completamento:

$$x^2 + px = q \text{ diventa } (x + p/2)^2 = q + p^2/4$$

La risoluzione dell’equazione ha risultato positivo:

$$x = (-p + \sqrt{p^2 + 4q})/2$$

Applicazione della la risoluzione geometrica di al-Khwārizmī al caso studio

L’area del quadrato di base ABCD, in cui

$$x = 3,52 \text{ m}$$

$$p/4 = 0,73 \text{ m}$$

sarà:

$$(3,52 \text{ m})^2 = 12,3904 \text{ m}^2$$

l’area del rettangolo, composto dall’addizione dei quattro rettangoli (in blu) con lato minore pari a $p/4$ e lato maggiore pari a x , sarà:

$$3,52 \text{ m} \times (4 \times 0,73 \text{ m}) = 10,2784 \text{ m}^2$$

l’area totale dei quattro quadrati di completamento:

$$(0,73 \text{ m})^2 \times 4 = 2,1316 \text{ m}^2$$

Quindi l’area del quadrato più grande EFGH sarà:

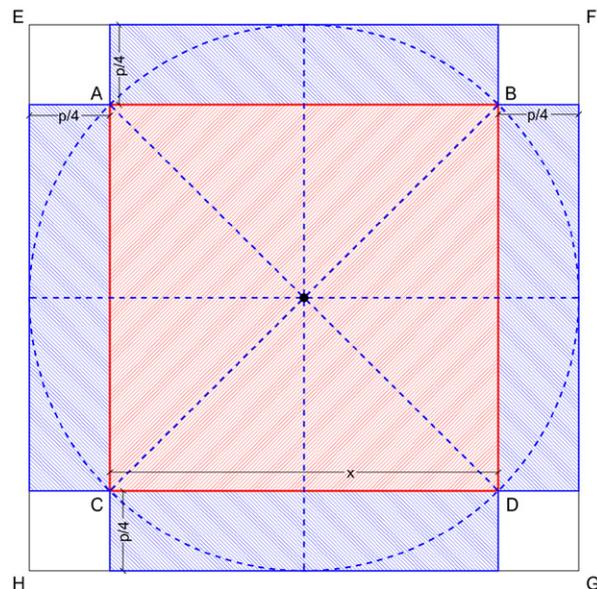
$$12,3904 \text{ m}^2 + 10,2784 \text{ m}^2 + 2,1316 \text{ m}^2 = 24,8004 \text{ m}^2$$

con lato pari a:

$$\sqrt{24,8004 \text{ m}^2} = 4,98 \text{ m}$$

ossia uguale alla dimensione della diagonale del quadrato di base:

$$3,52 \times \sqrt{2} = \sim 4,98 \text{ m}$$



Questo metodo è stato illustrato dal matematico Abū Ja'far Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (780 d.C. circa- 850 d.C. circa) nel suo trattato “*L'al-Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa al-muqābala*” (*Manuale di calcolo per completamento e riduzione - 830 d.C. circa*)¹.

Il matematico, oltre che astronomo e geografo, visse a Baghdad alla corte del califfo abbaside al-Ma'mūn, per volere del quale fu istituita a Baghdad la *Bait al-hikma* (Casa del Sapere), in cui si formò traducendo e studiando manoscritti scientifici provenienti dal mondo greco, indiano e persiano. Al-Khwārizmī riporta nella prefazione come esplicita richiesta del califfo l'intenzione di “*Comporre una breve opera sul calcolo per mezzo (delle regole) di Completamento e Riduzione, limitandosi a quegli aspetti più facili e utili della matematica di cui ci si serve costantemente nei casi di eredità, donazioni, distruzioni, sentenze e commerci e in tutti gli altri affari umani, o quando si vogliono effettuare misurazioni di terreni, scavi di canali, calcoli geometrici e altre cose del genere*”. Con questa premessa al trattato Al-Khwārizmī esplicita lo scopo comune a tutti i suoi lavori, rendere la scienza matematica utile alla risoluzione di questioni pratiche².

Il trattato contiene una presentazione sistematica dei metodi risolutivi delle equazioni algebriche di primo e secondo grado con il metodo del “completamento” (*al-jabr*), ossia addizionando due termini uguali a sinistra e a destra del simbolo di uguaglianza.

Al-Khwārizmī nel suo trattato distingue sei tipi di equazioni di I e di II grado con coefficienti interi e positivi, ne enuncia la regola risolutiva e, alla maniera greca, ne fornisce una dimostrazione geometrica³. La coincidenza esistente tra la dimostrazione geometrica della risoluzione dell'equazione di secondo grado di quarto tipo $ax^2+bx=c$ e la definizione dello spazio architettonico della zona della crociera della cappella induce a ipotizzare che l'impianto sia stato disegnato da architetti di lingua araba a conoscenza del trattato di al-Khwārizmī.

1. “È probabile che proprio alle opere indiane, assieme a quelle persiane e babilonesi, si sia ispirato al-Khuwarizmi dato che la sua famosa opera *Al-Kitah al muhtasar fi isab al-giabr wa-l-muqabala* (Il libro conciso dei calcoli di trasporto e riduzione) appare più un punto d'arrivo, la sistemazione di una materia già esistente, che una creazione originale. Egli racconta nella prefazione del suo libro di essere stato sollecitato a scriverlo dal califfo di Bagdad al-Mamun. È da quest'opera, comunque, che l'algebra prese questo nome; *al-giabr*, qui inteso come “trasporto” di un termine da un membro all'altro, così diremmo noi, per poi operare una “riduzione” (*al-muqabala*) tra i vari termini simili. (...) Questo nulla toglie alla grande importanza storica e scientifica che ebbe la sua opera per la matematica europea poiché è proprio da essa che i matematici, almeno sino a Cardano, appresero questa ‘arte’, sia mediante traduzioni dirette (ricordiamo quelle di Roberto di Chester e di Gherardo da Cremona entrambe del XII secolo) e sia attraverso le opere di Savasorda (*Abraham bar Hyyva*) del XII-XIII secolo e del contemporaneo Leonardo Pisano (1170 ?- 1228 ?).”, SILVIO MARACCHIA, *DOSSIER Algebra – al-giabr*, www.treccani.it

2. Si ricorda in particolare il trattato noto come “*De numero indorum*” (*Sul calcolo numerico indiano*), in cui al-Khwārizmī presenta un'esposizione completa del sistema di numerazione indiano introducendo la scrittura posizionale in base 10 con lo zero, trattazione così convincente per cui si diffuse l'errata convinzione che il nostro sistema di numerazione sia di origine araba.

3. “Non tiene però mai conto delle soluzioni negative in quanto vi era un forte legame con le grandezze geometriche (quindi sempre positive), e un ancoraggio ai problemi concreti della vita quotidiana. Peraltro questo atteggiamento rimarrà a lungo immutato anche negli algebristi che seguono e non verrà messo in discussione se non nel sec. XVII.”, in L. NOTARANGELO N. FERRARA, *Al-Khwarizmi e il suo trattato: “L'al-Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa al-muqābala”*, Tesina di divulgazione e museologia della matematica, A.A 2016/2017 Università degli Studi di Ferrara - Dipartimento di Matematica

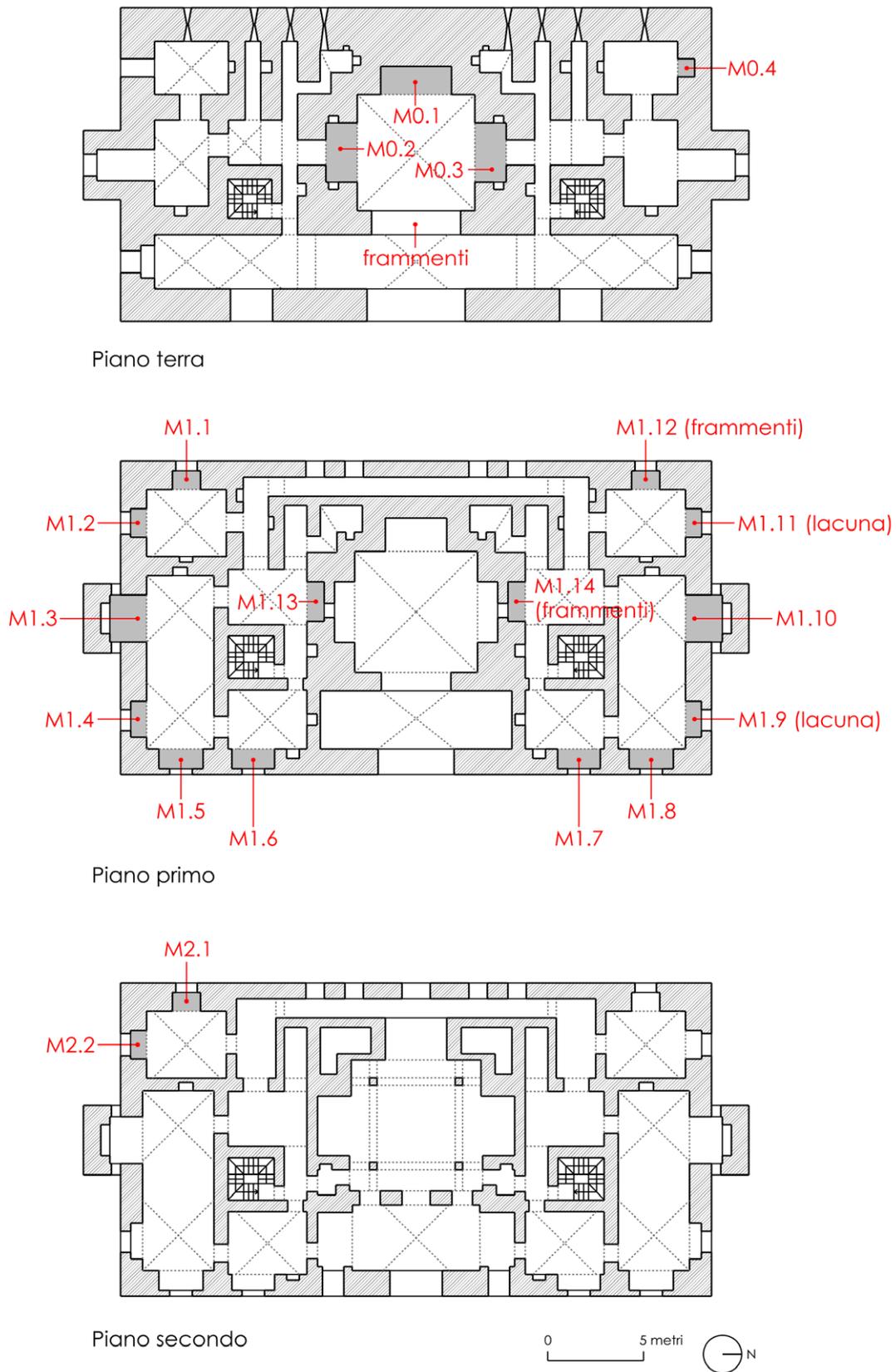


Fig. 1. Schema della collocazione delle nicchie al piano terra e nomenclatura utilizzata.

2. Volte a muqarnas nella Zisa di Palermo

I sistemi a muqarnas del complesso della Zisa riflettono l'eterogeneità delle soluzioni possibili, generate per accostamento di celle elementari.

Sui tre livelli dell'edificio sono ancora presenti in totale venti nicchie a muqarnas (Fig. 1):

- quattro al piano terra;
- quattordici al primo piano;
- due al secondo piano.

Il loro stato di conservazione è variabile, a causa dei crolli che nel 1971 hanno interessato l'ala nord del palazzo¹.

La disposizione dei sistemi a muqarnas è simmetrica sui due lati nord e sud del palazzo; tutti le strutture sono in pietra tagliata, autoportanti ma non portanti².

Tutte le volte sono state rilevate con laser scanner.

I muqarnas della sala centrale al piano terra

La sala centrale, nota come "Sala della fontana", ospita nicchie a muqarnas su tre lati (Fig. 1).

La nicchia centrale, M0.1 (Fig. 2), posta di fronte all'ingresso, è composta da dodici filari sormontati da chiusura a 'cuffia'.

Le due nicchie sull'asse trasversale della sala, M0.2 (Fig. 3) e M0.3 (Fig. 4), anch'esse contraddistinte da chiusura a 'cuffia', hanno lo stesso tracciato regolatore, ma sono interessate da un rifacimento nella zona centrale.



Fig. 2. M0.1 (2019).



Fig. 3. M0.2 (2019).



Fig. 4. M0.3 (2019).

1. CARONIA G., *La Zisa di Palermo. Storia e restauro*, Bari 1982.

2. STAACKE U. *La Zisa: un palazzo normanno a Palermo. La cultura musulmana negli edifici dei Re*, Palermo 1991.

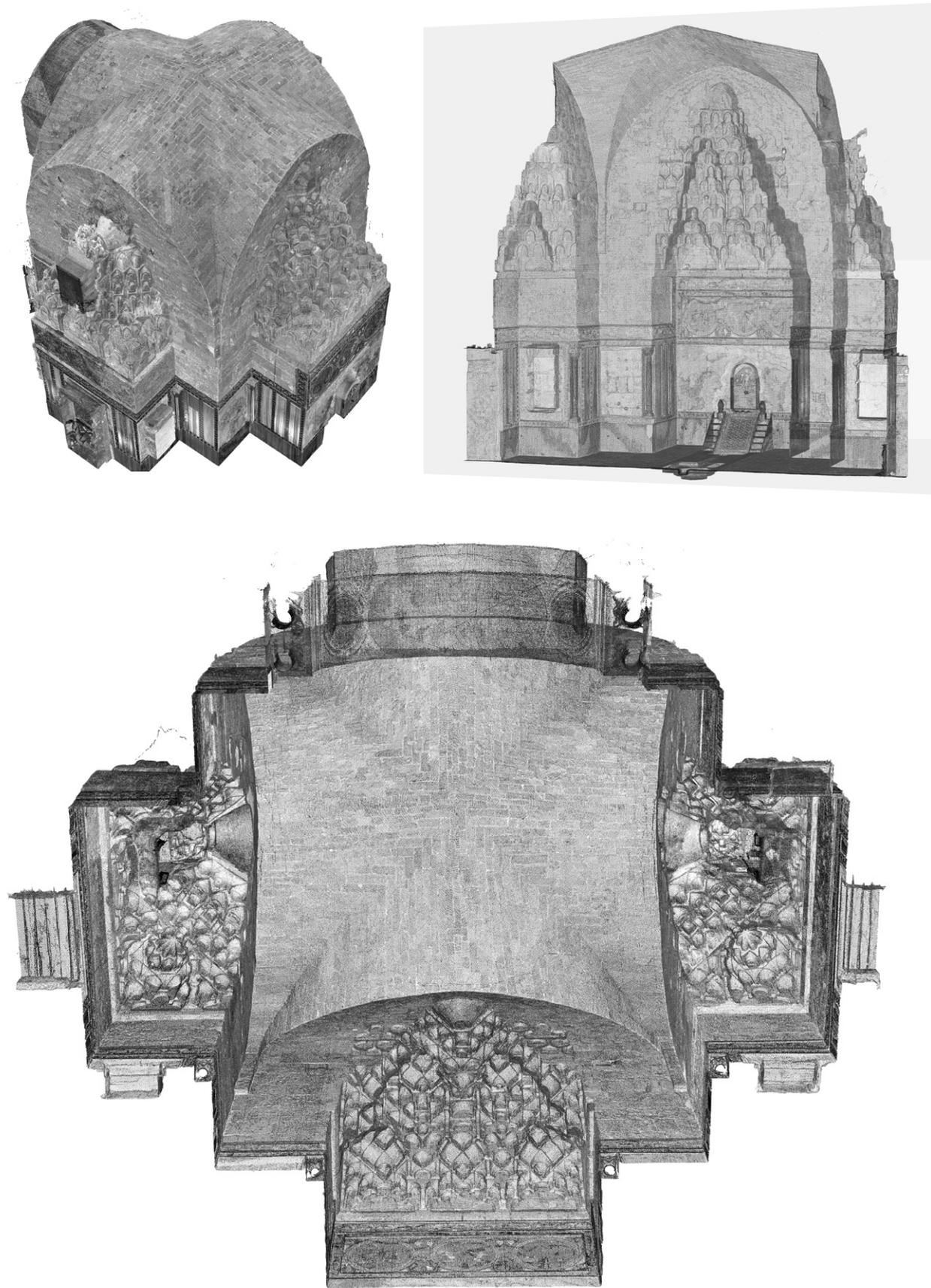


Fig. 5. Viste della nuvola di punti della Sala della fontana.

La nicchia centrale (M0.1)

Gli studi sul tracciato regolatore della nicchia centrale, condotti da Ecochard¹, si sono basati sull'applicazione di una griglia quadrangolare derivata dalla suddivisione in parti uguali della larghezza e della profondità della nicchia; gli studi condotti da Garofalo² si sono invece basati sull'identità dimensionale delle celle costitutive. Il primo approccio, che non tiene conto dello spessore degli elementi a L aggettanti, ammette eccezioni e irregolarità di solito estranee alla logica compositiva di tali strutture. (Fig. 6). Il secondo approccio non convince per la complessità della matrice geometrica sottesa al sistema (Fig. 7).

Entrambi gli approcci assumono *a priori* il dimensionamento e il disegno del primo registro, composto da elementi a L posti, come nel caso della SS. Trinità, in direzione parallela e ortogonale alla parete di fondo.

Sulla proiezione in pianta della nuvola di punti vengono applicate le bisettrici degli angoli e viene determinato il loro punto di intersezione, che cade sul margine esterno della volta; l'intero impianto della volta è quindi determinato da due quadrati. Riportando sulle bisettrici una suddivisione in segmenti di lunghezza pari a 21 cm, si individuano 14 unità. Le prime due unità a partire dagli angoli definiscono l'aggetto dei primi due filari. Le rimanenti 12 unità costituiscono le diagonali di due quadrati, che circoscrivono in pianta la proiezione della restante parte della volta.

Anche in questa volta è riconoscibile la presenza di moduli, ma, a differenza delle volte della SS. Trinità, essi non includono tutti i filari.

La volta sembra infatti articolata secondo tre differenti strutture compositive combinate fra loro: la prima

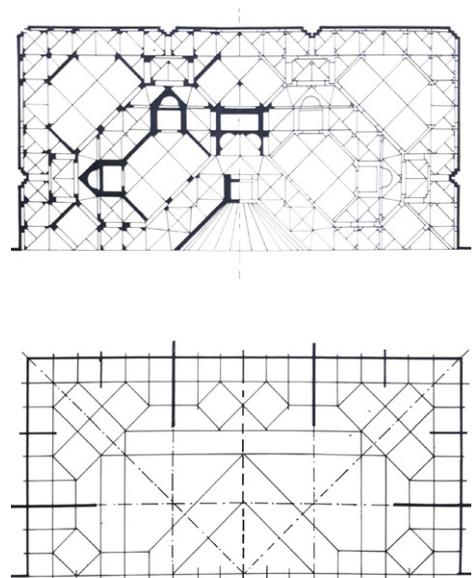


Fig. 6. Studio di Écochard sul tracciato regolatore della nicchia centrale.

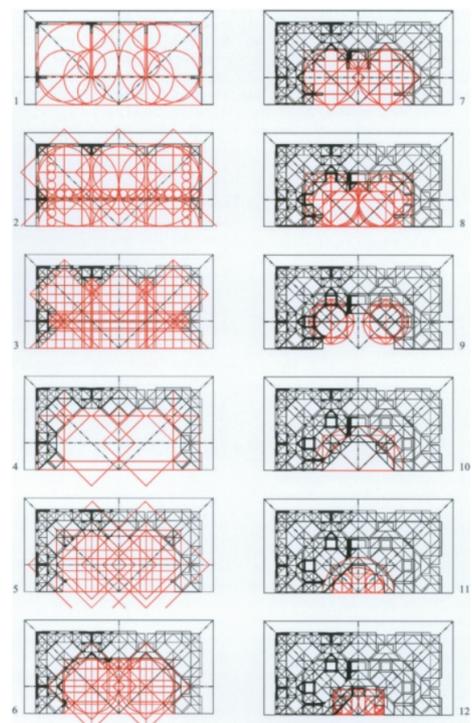
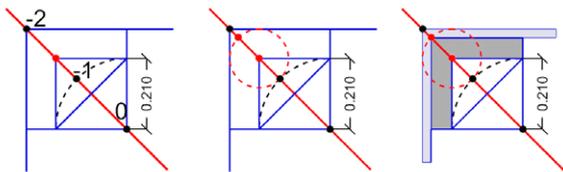
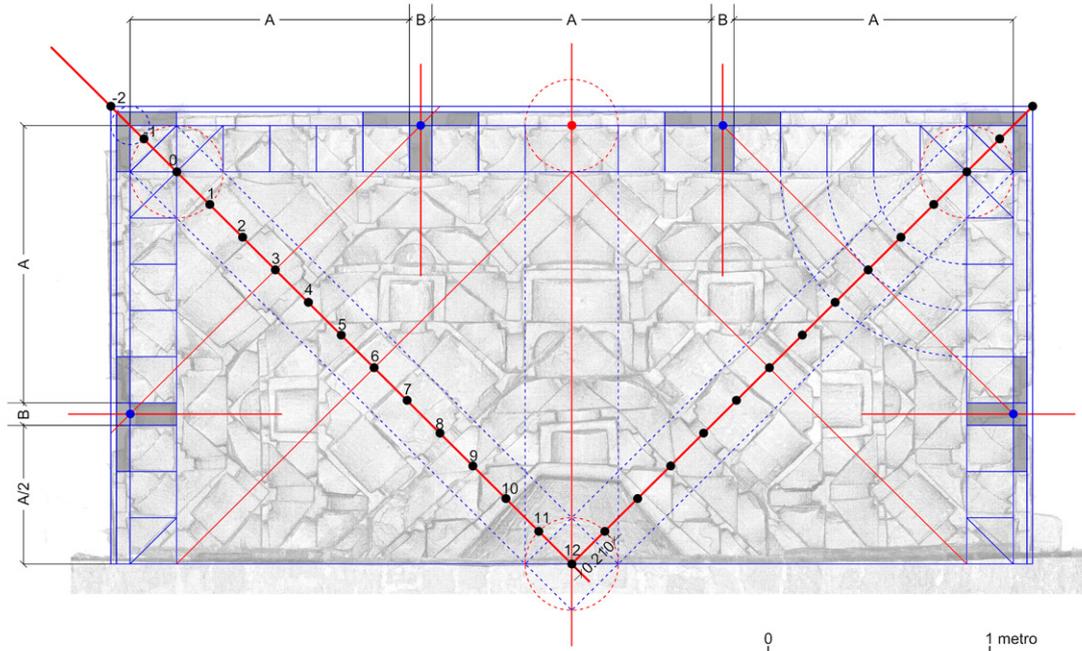


Fig. 7. Studio del tracciato regolatore della nicchia centrale (Garofalo).

1. ÉCOCHARD M., *Filiation de monuments ...*, op. cit., p. 74

2. GAROFALO V., op. cit., p. 371.



Figg. 8, 9. Moduli compositivi, disegno in pianta del primo livello e disegno della figura geometrica di riferimento.

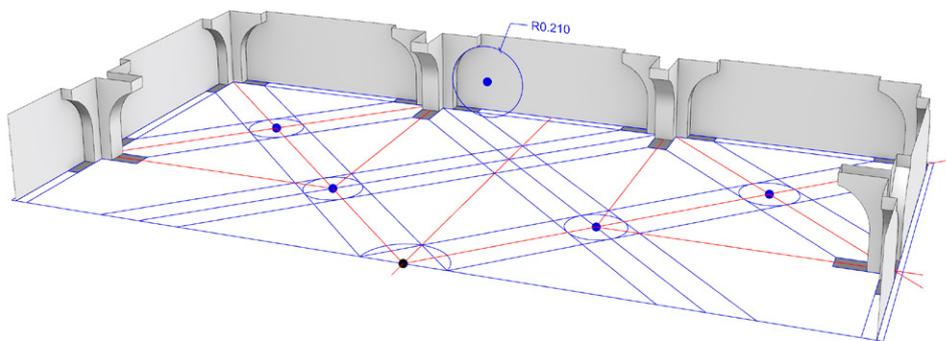


Fig. 10. Modello 3D del primo filare. Esso è composto esclusivamente da elementi a L con giacitura parallela e perpendicolare alle pareti di fondo.

comprende i primi quattro filari ed è conclusa superiormente da piccoli elementi di pianta quadrata chiusi da volte a crociera (unione di 4 celle elementari uguali tra loro), posti al quinto filare.

La seconda comprende i filari dal quinto al nono ed è anch'essa conclusa da piccoli elementi di pianta quadrata chiusi da volte a crociera (identici a quelli del quinto livello), posti al decimo filare; i moduli di questa seconda parte si dispongono intorno agli angoli, e non si congiungono al centro.

La parte centrale della volta è infatti occupata, dal quinto al dodicesimo filare, da una struttura compositiva indipendente conclusa dalla cuffia sommitale.

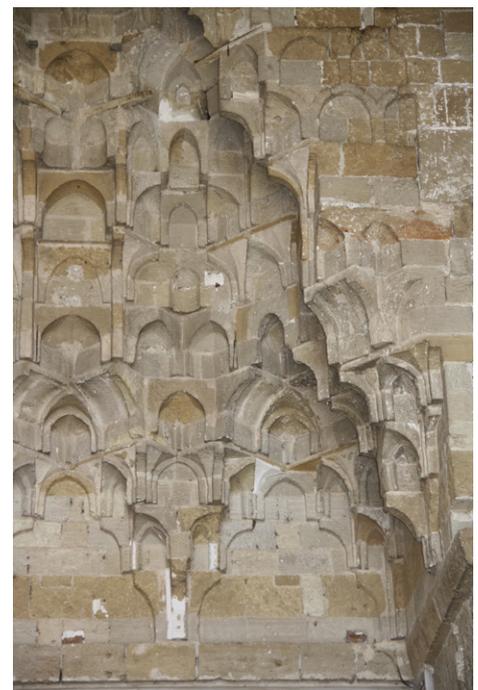
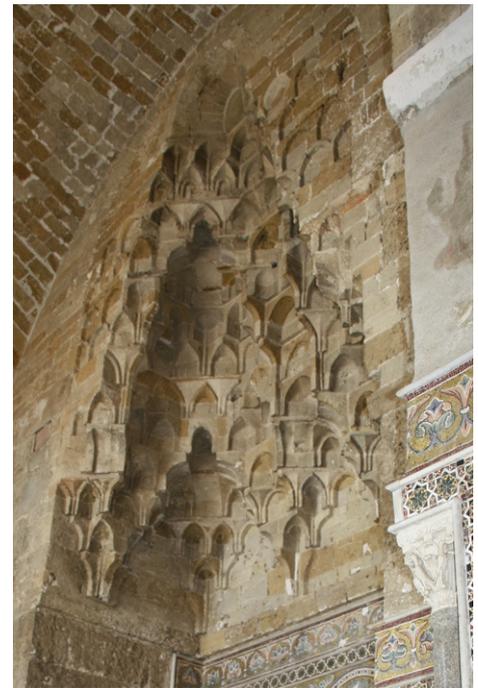
La prima struttura compositiva è costituita da due moduli compositivi alternati; il modulo più grande è riprodotto sull'angolo secondo una simmetria regolata dal piano bisettore.

La figura geometrica di riferimento di questa struttura compositiva è un quadrato di lato 21 cm, pari all'unità della bisettrice; tali quadrati sono definiti geometricamente da archi di circonferenza che hanno centro nell'angolo e raggi corrispondenti alle unità delle bisettrici (Fig. 8).

Il disegno del quadrato di lato 21 cm, sull'angolo della volta, fornisce anche lo spessore degli elementi a L del primo filare paralleli alle pareti della volta e quello di una piccola cornice che corre lungo l'imposta (Fig. 9).

Al primo filare il posizionamento degli elementi a L ortogonali alle pareti della volta è determinato dalle divisioni delle bisettrici, e in particolare dalle rette ortogonali a esse che passano per i punti di divisione 3.

La posizione di tali elementi rispetta pienamente la griglia di quadrati di lato 21 cm; la distanza fra gli assi di due elementi a L ortogonali alla parete è infatti pari a 6 quadrati. La seconda struttura compositiva è costituita, come già accennato, da moduli che attraversano i filari dal quinto al nono, e sono anch'essi chiusi alla sommità da una piccola volta a crociera posta al decimo filare.



Figg. 11, 12. Nicchia M.01 (2019).

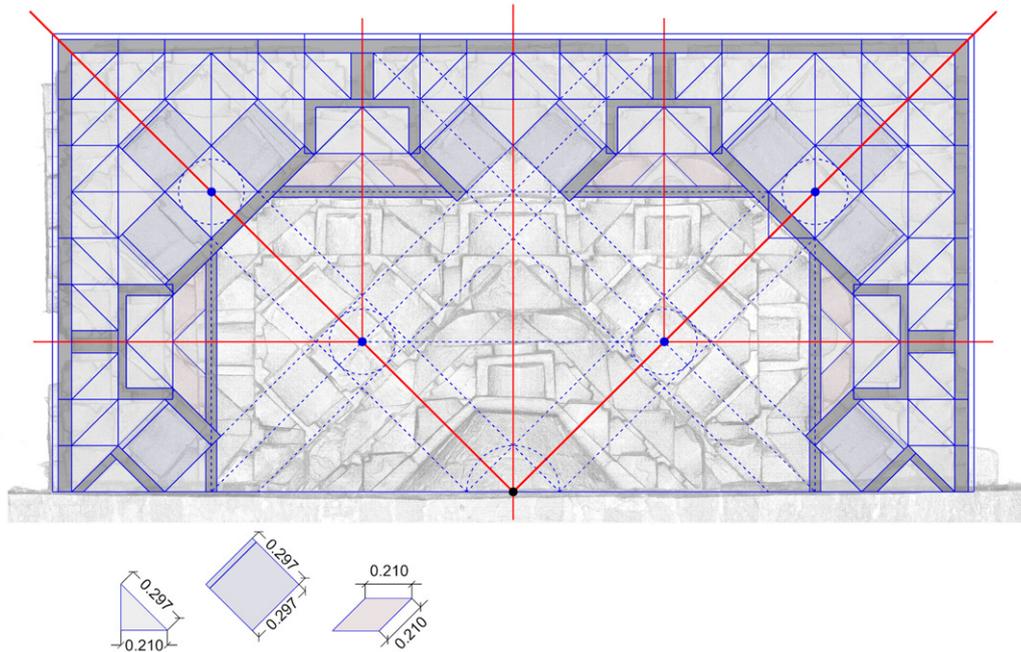


Fig. 13. Disegno in pianta dei primi 6 filari.

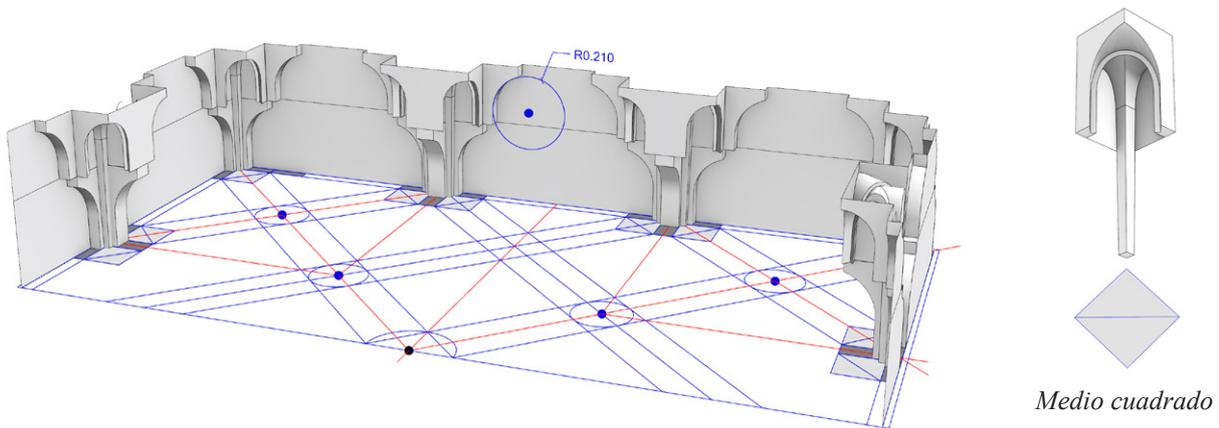


Fig. 14. Modello tridimensionale del secondo filare. Esso è composto da elementi a L con giacitura parallela alle pareti di fondo e da elementi a base quadrata noti con il nome di *medio cuadrado*.

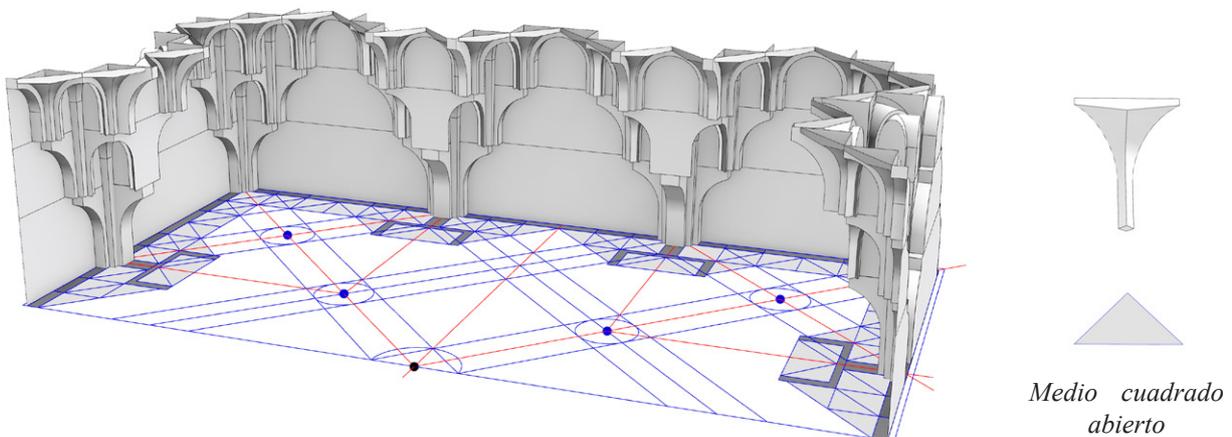


Fig. 15. Modello tridimensionale del terzo filare. Esso è composto da elementi a L con giacitura parallela e perpendicolare alle pareti di fondo, da elementi a base quadrata noti con il nome di *medio cuadrado*, da elementi di transizione a base triangolare noti con il nome di *medio cuadrado abierto*.

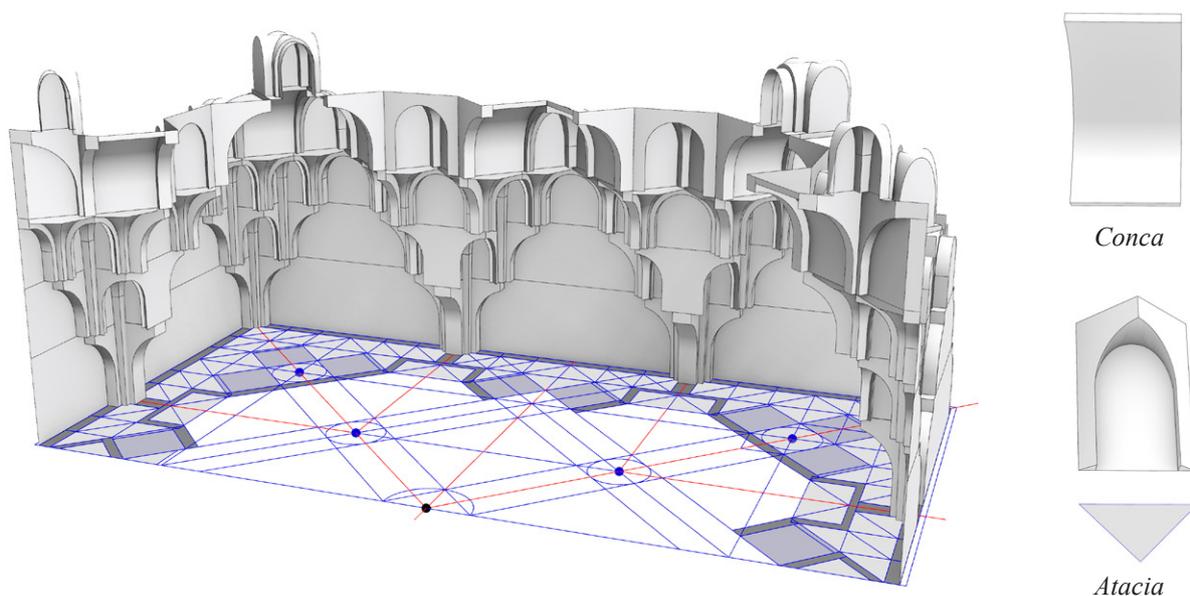


Fig. 16. Modello tridimensionale del quarto filare con chiusura a coda dei moduli angolari. Il quarto filare è composto da elementi a L con giacitura perpendicolare alle pareti di fondo, da elementi a base quadrata denominati *conca*, da elementi a base triangolare denominati *atacia*.

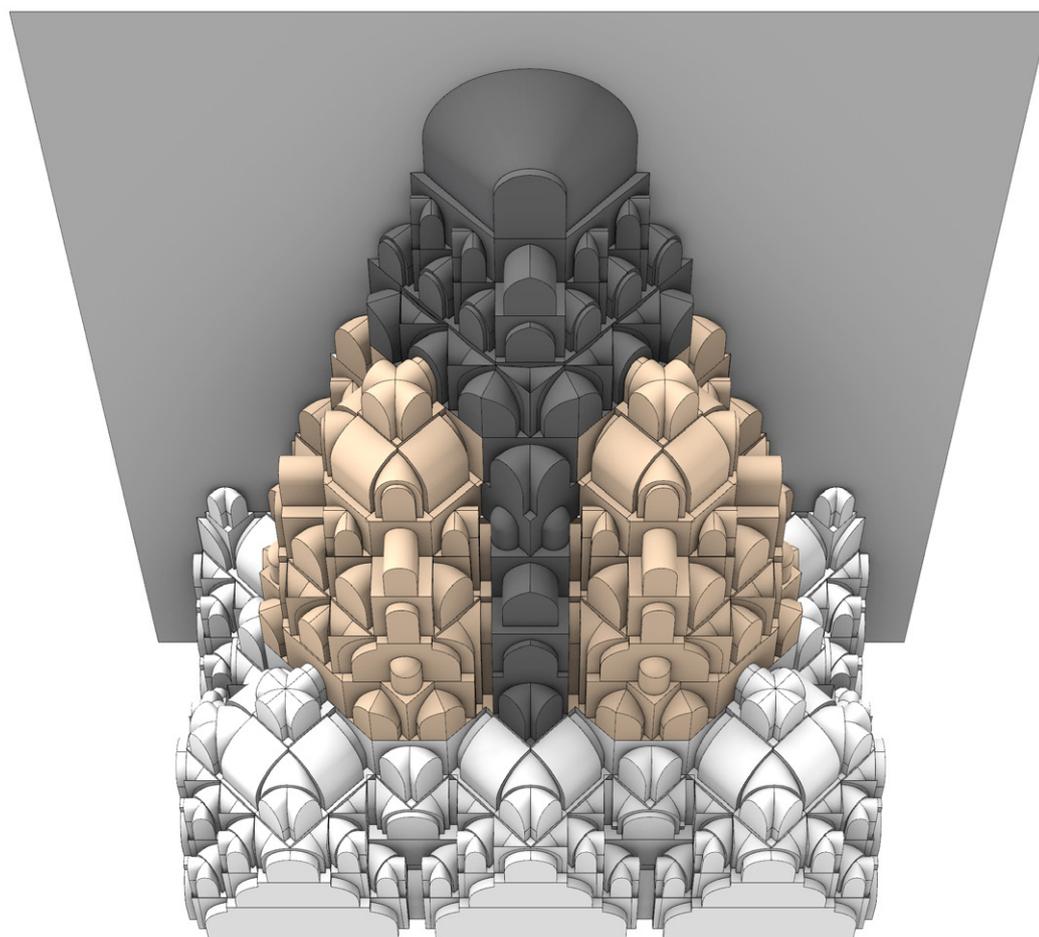


Fig. 17. Modello 3D della nicchia centrale. La composizione si evolve secondo tre moduli compositivi: in grigio chiaro la prima struttura, dal primo al quarto filare, in beige la seconda struttura dal quinto al nono filare, in grigio scuro il modulo centrale.

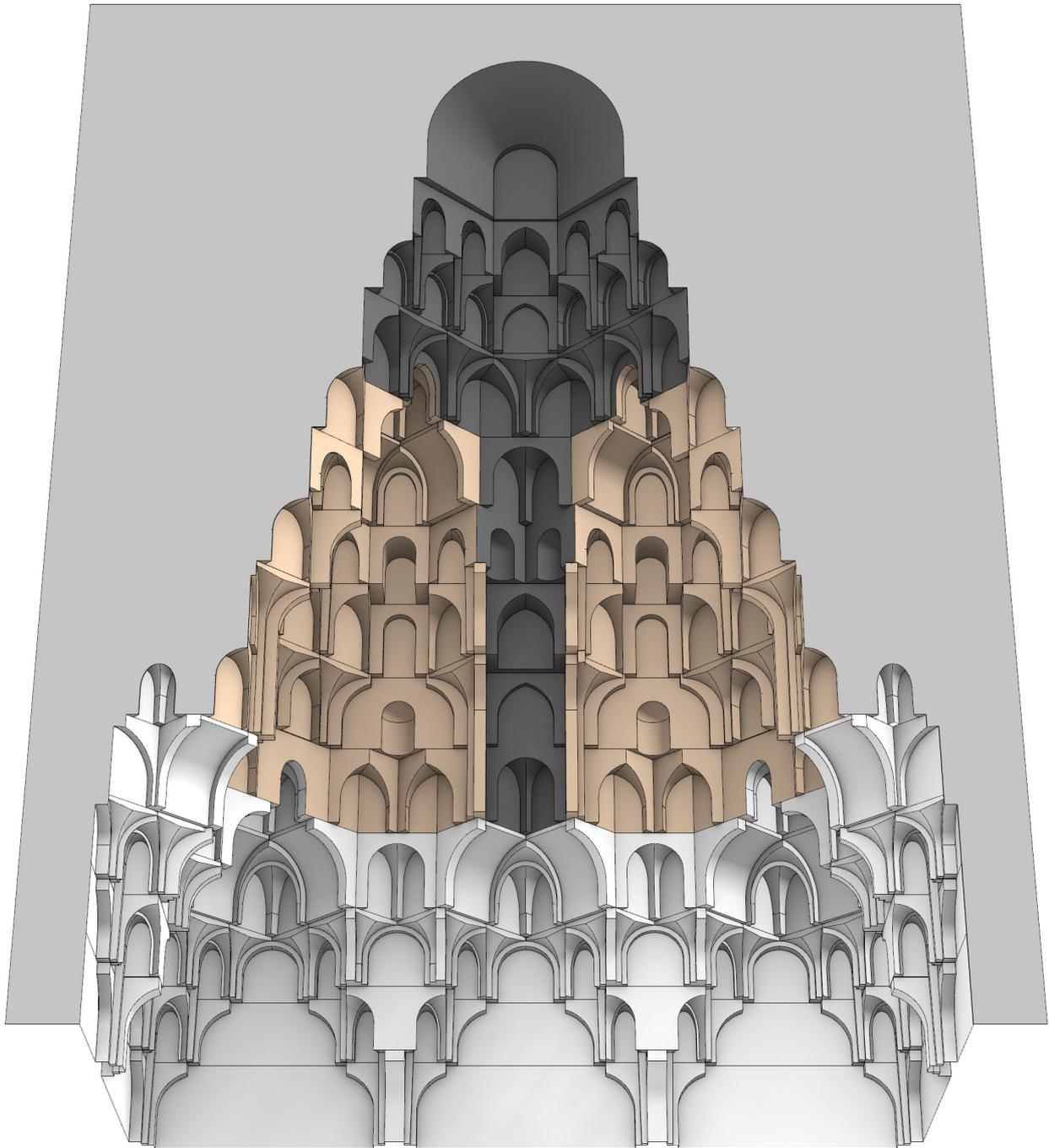


Fig. 18. Modello 3D della nicchia centrale.

La composizione si evolve secondo tre moduli compositivi: in grigio chiaro la prima struttura, dal primo al quarto filare, in beige la seconda struttura dal quinto al nono filare in grigio scuro il modulo centrale. Il quinto filare funge da transizione tra le due strutture compositive, concluse in pianta da elementi a L con giacitura parallela e ortogonale alla parete.

Questa struttura compositiva è ordinata da rette orientate a 45° , ottenute per prolungamento di rette del tracciato che regola la composizione dei primi quattro filari.

La proiezione in pianta mostra chiaramente le somiglianze fra le due strutture compositive (Fig. 20).

I moduli, ancora una volta identici, si dispongono intorno agli angoli secondo una simmetria determinata dal piano bisettore. La parte centrale della volta, dal quinto al dodicesimo filare, è occupata da un modulo di ‘riempimento’ concluso in sommità, come nella SS. Trinità, da un elemento ‘a cuffia’ (Figg. 17, 18).

L’analisi della proiezione parallela verticale della nuvola consente di osservare le seguenti proprietà dimensionali (Fig. 19):

- l’altezza della cornice di base è pari a 21 cm;
- i filari successivi hanno altezze pari a 35 cm (multiplo di 7 cm) o 42 cm, doppio di 21 cm.

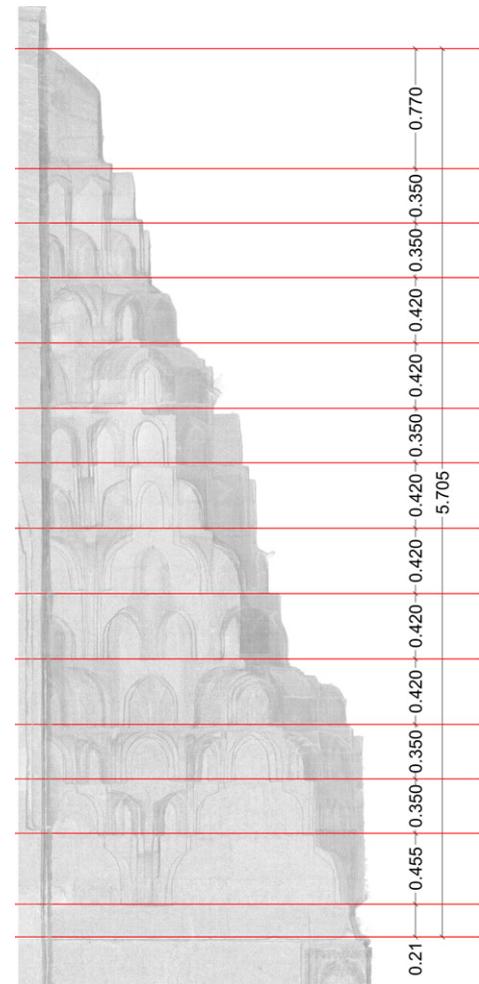


Fig. 19. Nuvola di punti e altezza dei filari.

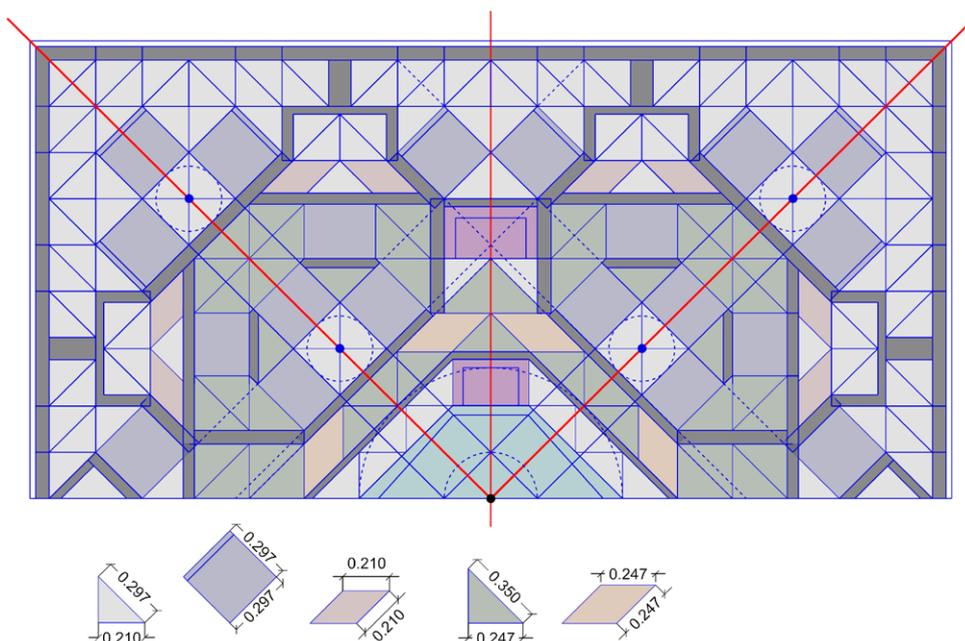


Fig. 20. Disegno in pianta dei filari successivi. viene introdotto un nuovo triangolo rettangolo isoscele con cateti di lunghezza pari a 35 cm.

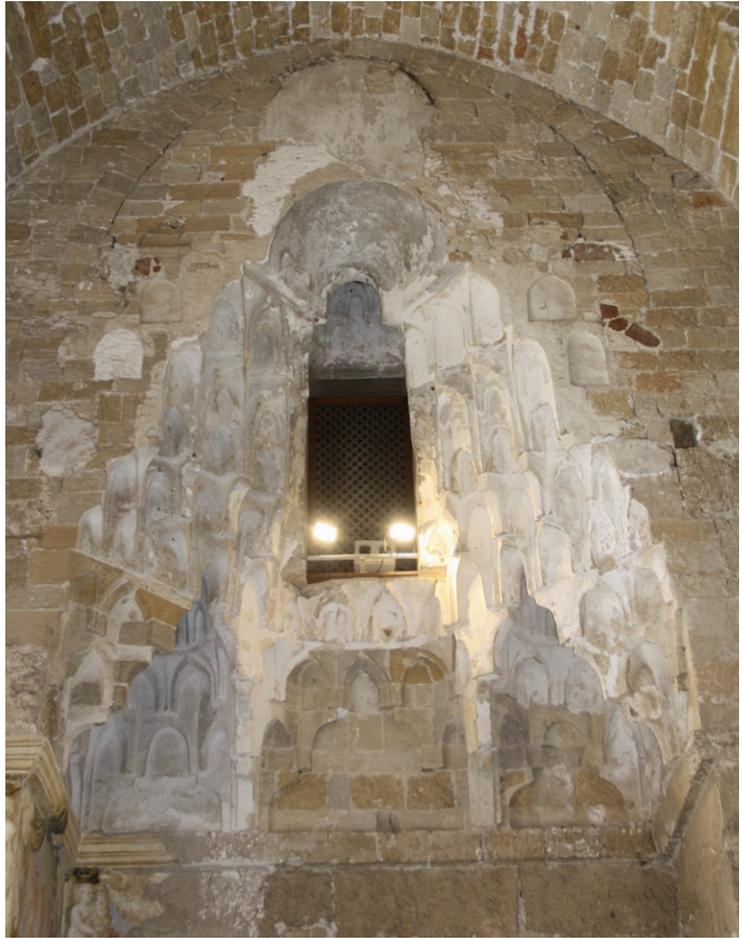


Fig. 21. Nicchia M.02, (2019).



Fig. 22. Nicchia M.03, (2019).

Nicchie laterali (M0.2 - M0.3)

Le due nicchie sono simmetriche¹ e sono entrambe interessate da un rifacimento nella zona sommitale, che determina l'abbassamento dell'altezza totale delle due strutture rispetto a quella originaria, che era pari a quella della nicchia centrale; porzioni della struttura centrale originaria sono tutt'oggi visibili.

Le variazioni rispetto all'impianto originale sono dovute probabilmente all'apertura di due porte sul vano centrale, riconducibili presumibilmente alle trasformazioni operate nella sala durante il vicereame spagnolo (XVI-XVII sec.) con l'introduzione di un solaio alla quota intermedia, simile alla trasformazione operata nella Torre Pisana del Palazzo Reale (Figg. 21-24).

Le 'nuove' celle sono simili per morfologia e per tecnica costruttiva ad alcuni muqarnas del primo piano e ai muqarnas della Cappella della SS. Trinità.

L'applicazione delle bisettrici degli angoli rivela che le due volte hanno pianta rettangolare non corrispondente a due quadrati; le due bisettrici si intersecano al di là della nicchia, ma la profondità del rettangolo è fissata dai punti di divisione 12 delle bisettrici.

L'intera struttura sembra regolata dalle divisioni delle dodici unità delle bisettrici in tre parti; i punti 4 definiscono i centri delle cupolette a forma di ottagono stellato che concludono le strutture angolari, mentre le rette ortogonali alle pareti della nicchia che passano per i punti di divisione 8 definiscono la posizione degli elementi a L ortogonali alla parete di fondo e alle pareti laterali, cui è assegnato ancora una volta il ruolo di elemento separatore dei moduli (Fig. 26).

Come per la nicchia centrale M0.1, la composizione



Fig. 23. Nicchia M.02, particolare (2019).



Fig. 24. Nicchia M.03, particolare della zona sommitale (2019).

1. Per tale motivo si è scelto di proporre lo studio di una sola delle due strutture, M1.2.

appare definita per aggregazione di strutture compositive che non attraversano tutti i filari, delimitate da elementi a L ortogonali e ruotati a 45°. La prima struttura compositiva comprende i primi tre filari ed è conclusa superiormente da una cupola stellata (quarto e quinto registro).

La descrizione dell'analisi geometrica delle porzioni centrali superiori della volte viene omessa in questa sede, in attesa di più precise informazioni circa la loro datazione. L'esame dell'alzato, condotto limitatamente alla porzione 'originaria' della volta (registri 1-4), rivela che le altezze dei filari variano fra 42 cm e 45,5 cm (Fig. 25).

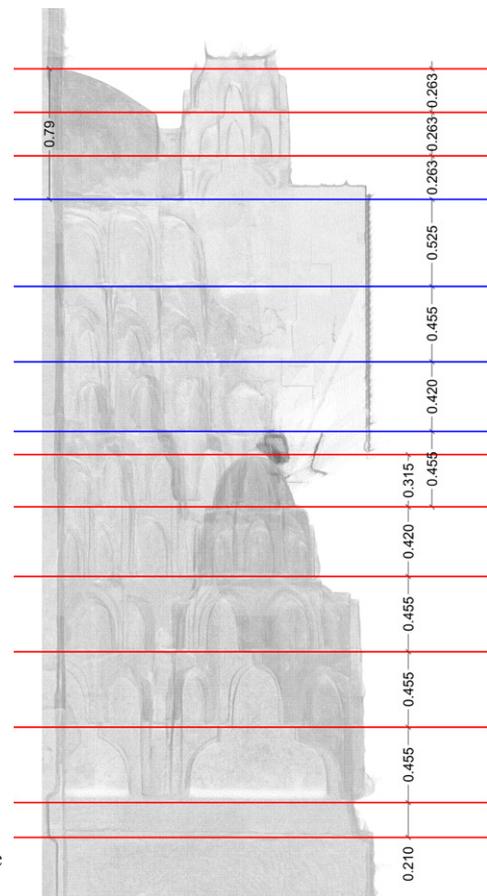


Fig. 25. Vista laterale della nuvola di punti della struttura M0.2 e altezze dei filari.

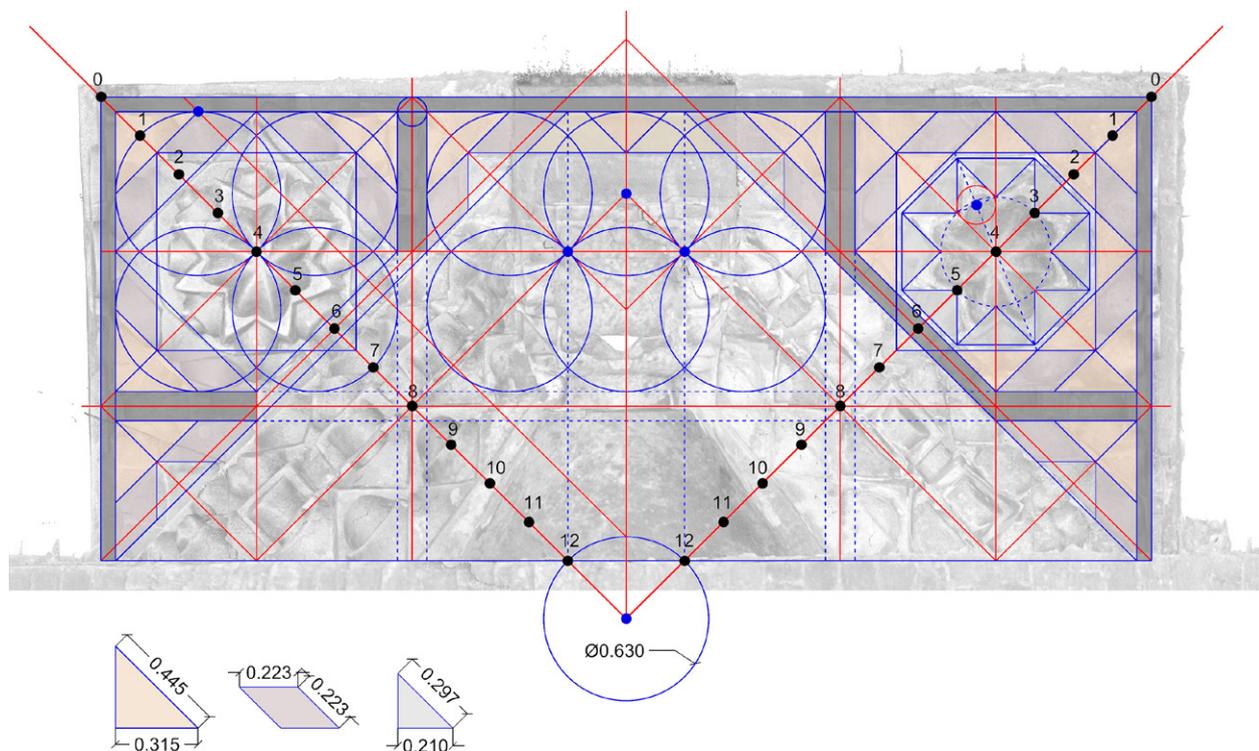


Fig. 26. Analisi geometrica della struttura compositiva dei primi tre filari e della chiusura a cupola stellata (quarto e quinto filare).

Piccola nicchia a muqarnas del piano terra (M0.4)

A destra dell'ingresso dell'odierno percorso di visita della Zisa si trova un vano che ospita una piccola nicchia a muqarnas con chiusura a cupola; la collocazione di questa nicchia lascia supporre che, con molta probabilità, il palazzo avesse originariamente molte più decorazioni a muqarnas di quelle attuali.

La piccola struttura è molto interessante ai fini della ricerca perchè, come la nicchia centrale della Sala della fontana, non è rivestita da uno strato di stucco, ma manifesta la sua essenza materica. Essa sembra far parte delle strutture a muqarnas del primo cantiere. Questa struttura si disegna suddividendo la bisettrice in 6 unità di 21 cm¹ (Fig. 27-31).

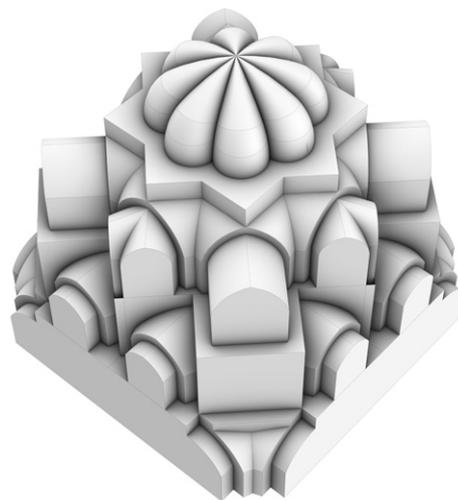
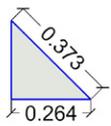
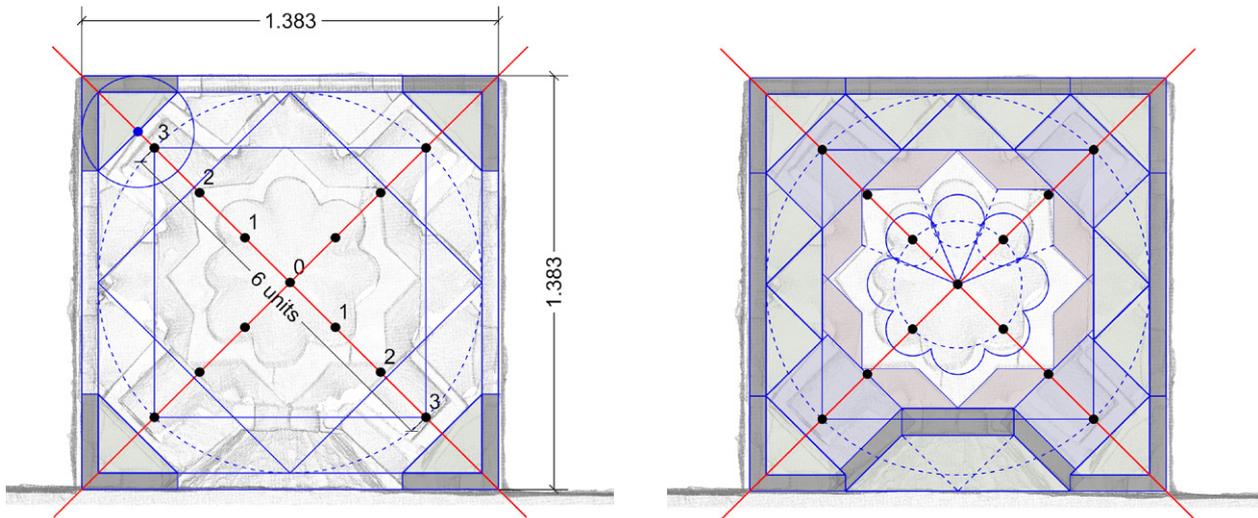


Fig. 27. Vista del modello tridimensionale.

1. Nel caso specifico l'unità è pari a 21,2 cm.



Fig. 28. Nicchia M0.4 (2019).



Figg. 29, 30.
 (a sinistra) Nuvola di punti e suddivisione della bisettrice in unità da 21 cm. Disegno del triangolo rettangolo isoscele che funge da figura base e dimensionamento del primo filare.

(a destra) Disegno del tracciato regolatore.

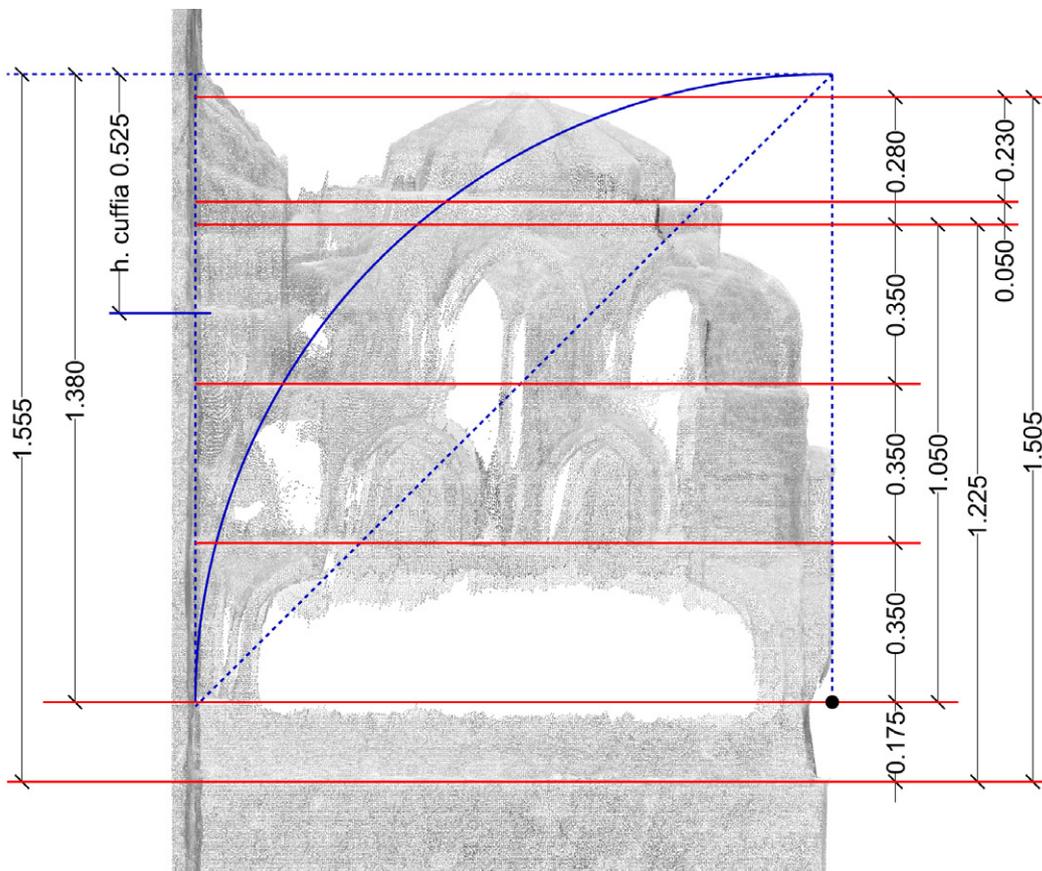


Fig. 31. Vista laterale della nuvola e studio dell'alzato.

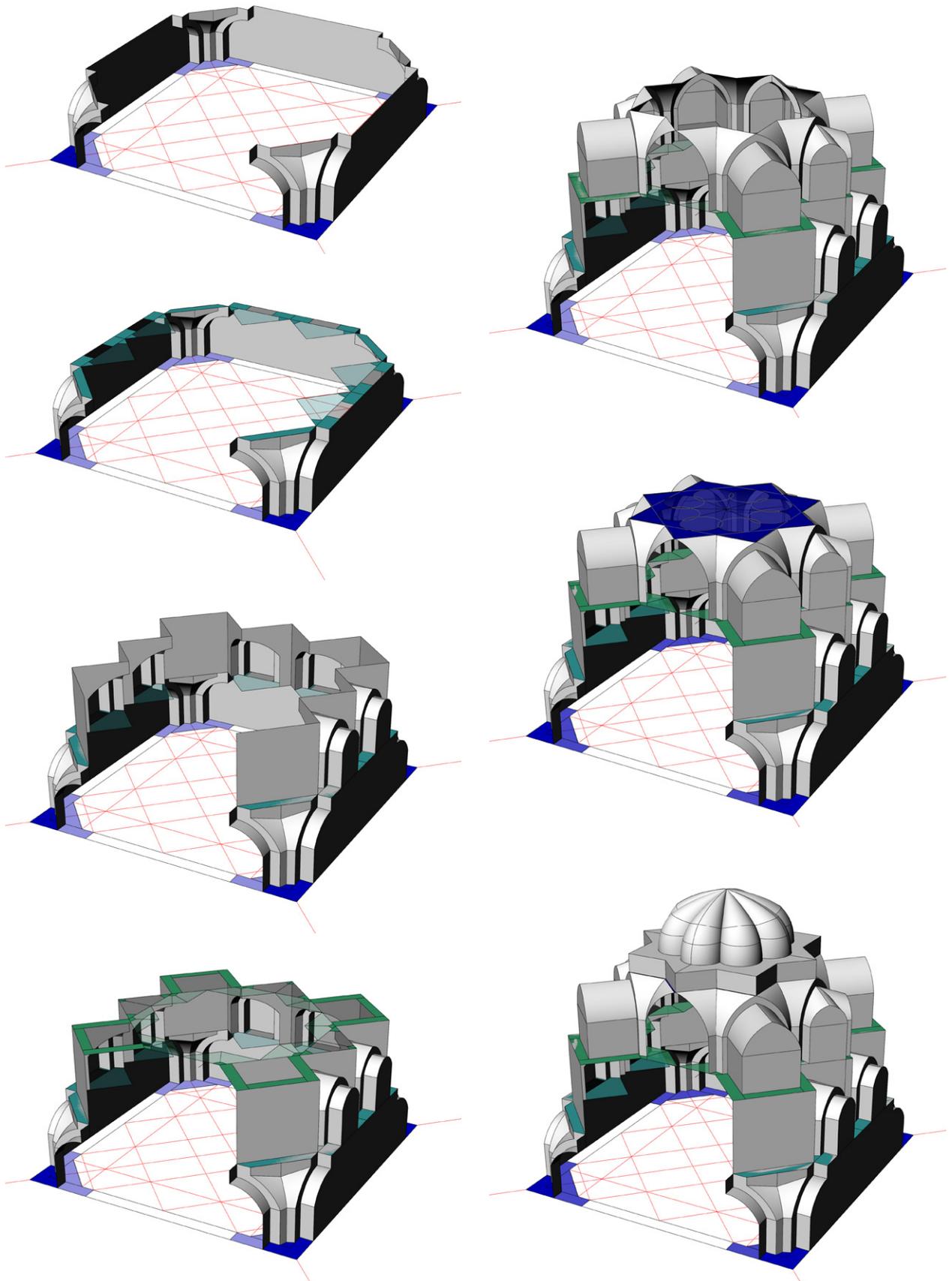


Fig. 32. Costruzione del modello 3D per filari.



M1.5 (2019).



M1.6 (2019).



M1.13 (2019).



M1.7 (2019).



M1.8, M1.9 (2019).

I muqarnas dei livelli superiori

Al primo livello della Zisa sono presenti 14 nicchie a muqarnas di finitura, dimensioni e composizione differenziata.

Tale eterogeneità manifesta in pieno la possibilità di numerose variazioni compositive dei sistemi a muqarnas, seppur questi siano sempre definiti in pianta da poche forme elementari, e nello spazio tridimensionale dalla combinazione di celle sempre uguali. Ogni sistema è caratterizzato dalla chiusura in alto a ‘cuffia’.

Le strutture del primo livello sono contraddistinte da una spessa finitura in stucco, in alcuni casi dipinta a tinta unica.

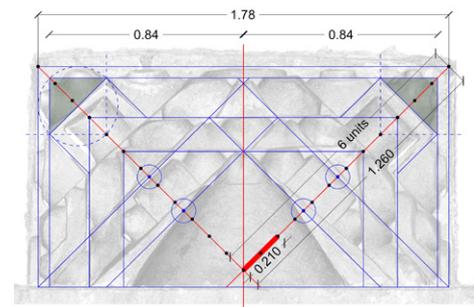
La definizione delle celle elementari che compongono tali strutture, in alcuni casi, è meno precisa e più abbozzata rispetto alla definizione delle celle della nicchia centrale della Sala della fontana e della piccola nicchia al piano terra. È possibile osservare, attraverso l’analisi geometrica della proiezione parallela orizzontale delle nuvole di punti acquisite per ciascuna nicchia, la presenza di deformazioni di alcune celle elementari; a titolo esemplificativo accade che alcuni elementi la cui base dovrebbe corrispondere al rombo, hanno base corrispondente a un parallelogramma con lati opposti uguali e paralleli e angoli opposti uguali.

Alle deformazioni che riguardano la morfologia delle singole celle si aggiungono alterazioni nel loro accostamento, che seguono le simmetrie e le assialità del sistema; per tale motivo si reputa che tali alterazioni facciano parte del progetto e non siano dovute a modificazioni strutturali o a errori in fase di realizzazione. In pianta, ma maggiormente negli alzati, si rileva uno scostamento rispetto alle misure riscontrate e riportate negli altri casi studio.

Le altezze dei filari sono comprese tra i 24 cm e i 32 cm circa.



M1.1 (2019)



M1.1, Tracciato regolatore



M1.4 (2019).

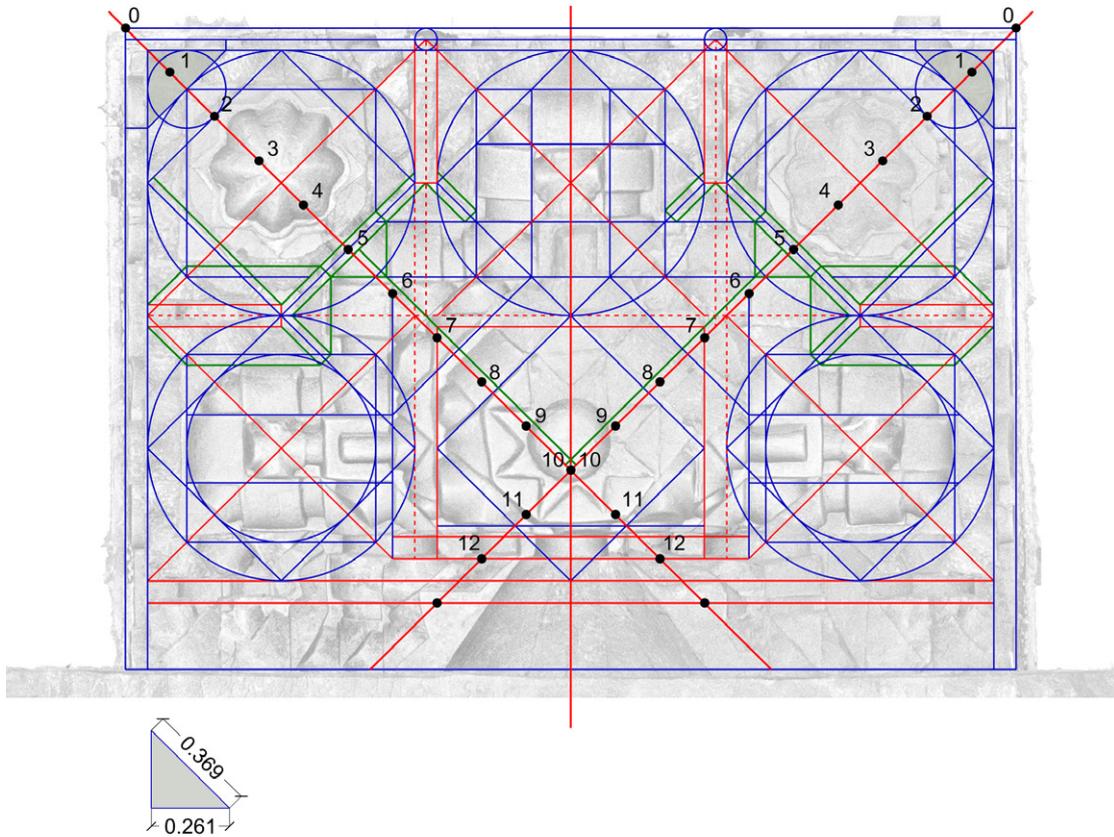


Fig. 33. Nuvola di punti della nicchia M1.3 e schema geometrico. In verde le variazioni.

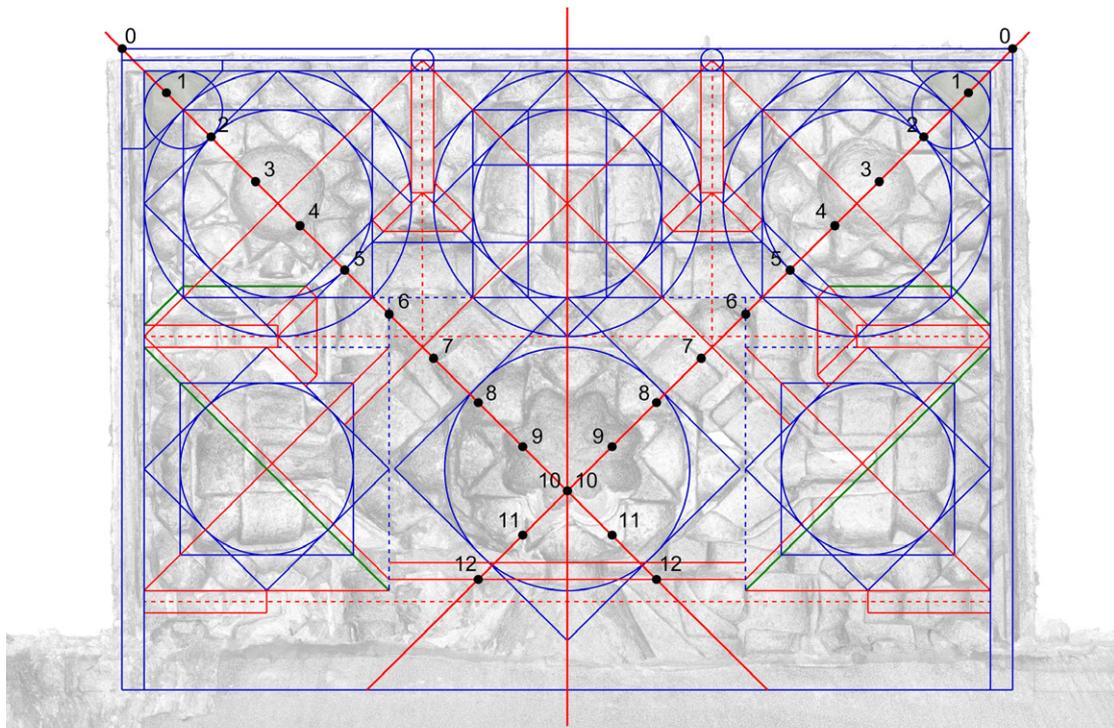


Fig. 34. Nuvola di punti della nicchia M1.10 e schema geometrico. In verde le variazioni.

M1.3 e M1.10

Le due volte sono le più grandi e le più complesse fra quelle presenti al primo livello della Zisa; la proiezione in pianta delle nuvole di punti mostra una simile disposizione, basata su 6 unità modulari molto profonde, cinque delle quali disposte lungo i bordi della volta, e da un'unità di chiusura della porzione superiore della parte centrale.

Le volte M1.3 e M1.10 mostrano uno schema planimetrico diverso da quello delle altre volte studiate, che riecheggia la struttura a quinconce di molte chiese a pianta centrale bizantine.

I moduli, di pianta quadrata, si ripetono identicamente secondo la seguente articolazione:

- agli angoli sono posizionati due moduli conclusi da una cupoletta a forma di ottagono stellato;
- sui lati della volta sono posizionati tre moduli conclusi da piccole volte a crociera;
- il modulo che chiude la parte centrale superiore ha chiusura definita da una cupoletta sferica impostata su una base ottagonale.

Ancora una volta, è possibile rintracciare una connessione fra il tracciato regolatore e le bisettrici divise in dodici unità da 21 cm; il baricentro delle unità angolari corrisponde al baricentro di quadrati ruotati di 45°, la cui ampiezza è definita dalle rette ortogonali alle bisettrici che passano per i punti di divisione **2** e **5**. I lati del quadrato circoscritto sono allineati alla retta che passano per il punto di divisione delle bisettrici intermedio fra **6** e **7**. Posizionando un identico quadrato in asse alla struttura, i lati perpendicolari alla parete di fondo si allineano alle rette che passano per i punti di divisione **7**; lo spazio residuale fra i quadrati così posizionati determina lo spessore degli elementi a L ortogonali alla parete di fondo. L'asse degli elementi a L ortogonali ai fianchi è invece allineato ai lati dei quadrati che hanno direzione parallela alla parete di fondo.



Fig. 35. M1.3 (2019).



Fig. 36. M1.10 (2019).



Fig. 37. M1.10 particolare (2019).

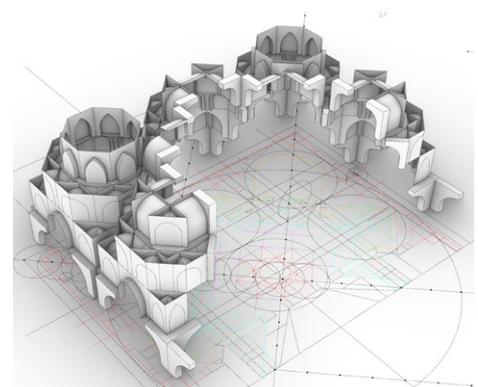


Fig. 38. M1.3 costruzione del modello 3D.

Le rette che passano per il punto di divisione intermedio fra **0** e **1** definiscono l'aggetto del primo registro; la retta parallela alla parete di fondo, che passa per il punto di divisione **12**, determina il piano di appoggio della cuffia sommitale. (Fig. 33, 34)

Le altezze dei filari delle due volte sono comprese tra 26 e 32 cm circa (Figg. 39, 40).

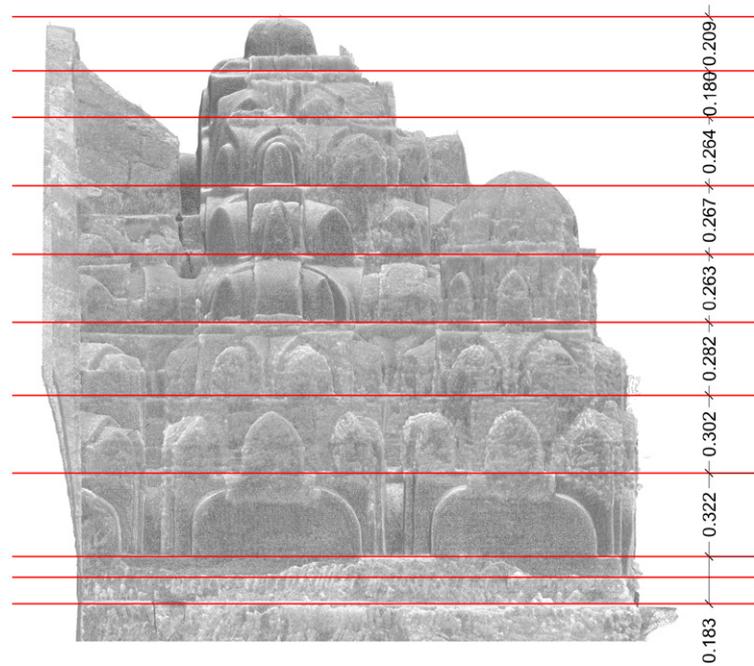


Fig. 39. Nuvola di punti della nicchia M0.3 e altezza dei filari.

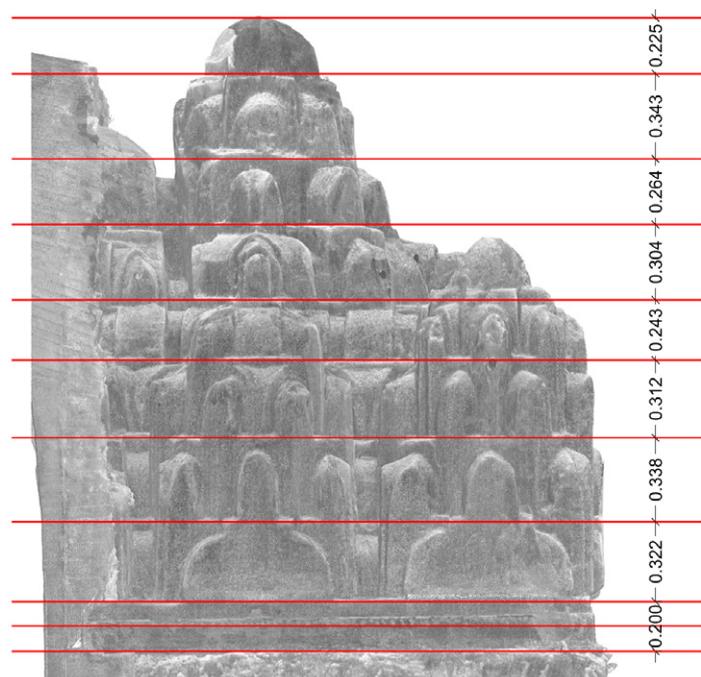


Fig. 40. Nuvola di punti della nicchia M0.10 e altezza dei filari.

3. Nicchia a muqarnas nella Cattedrale di Palermo

Una struttura a muqarnas, simile per morfologia e per dimensioni alla piccola struttura della Zisa, si trova in una nicchia sita a fianco dell'originaria abside meridionale della Cattedrale di Palermo.

Essa è composta da quattro filari sormontati da una chiusura a cupola, ed è l'unica struttura a non essere caratterizzata dall'elemento a 'cuffia'. La struttura è in pietra ricoperta da un consistente strato di stucco (Fig. 1).

Anche in questo caso la suddivisione della bisettrice in unità da 21 cm risolve il disegno del tracciato regolatore (Figg. 4, 5).

Lo studio dell'alzato evidenzia che:

- la struttura si imposta su una cornice di altezza pari a 17,5 cm;
- l'altezza dei filari è sempre pari a 35 cm;



Fig. 1. Nicchia a muqarnas nella Cattedrale di Palermo (2019).

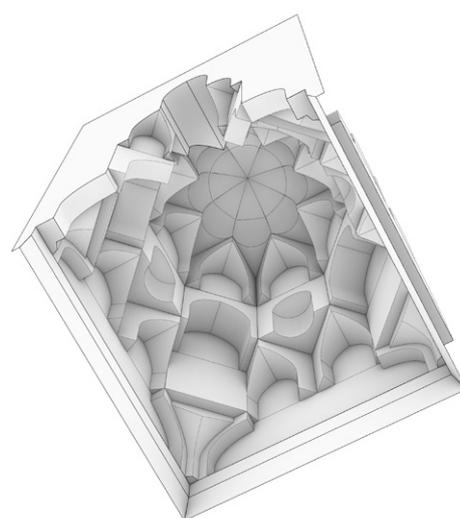


Fig. 2. Vista del modello 3D.

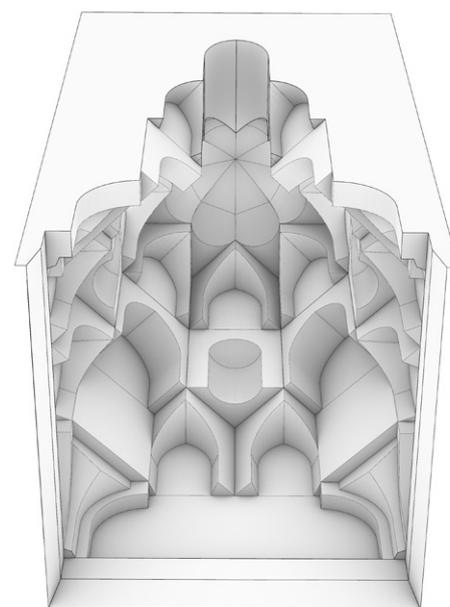


Fig. 3. Vista del modello 3D.

- l'elemento sommitale a cupola ha altezza pari a 17,5 cm, l'intero sistema ha altezza totale pari a 1,75 m (Fig. 7).

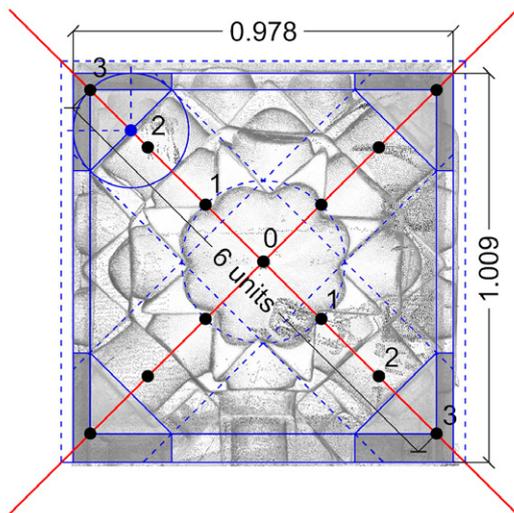


Fig. 4. (in alto) Nuvola di punti, suddivisione della bisettrice in 6 unità e disegno dell'angolo.

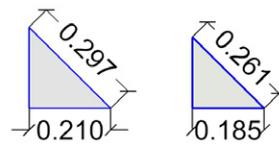
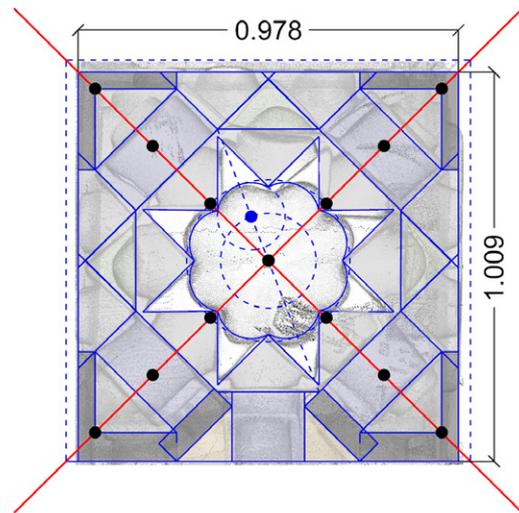


Fig. 5. (in alto a destra) Disegno del tracciato regolatore.

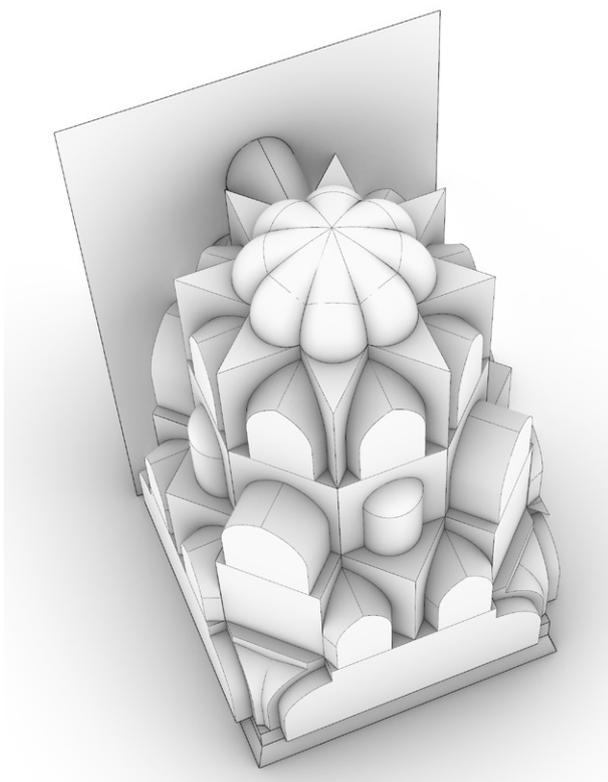


Fig. 6. Vista del modello 3D.

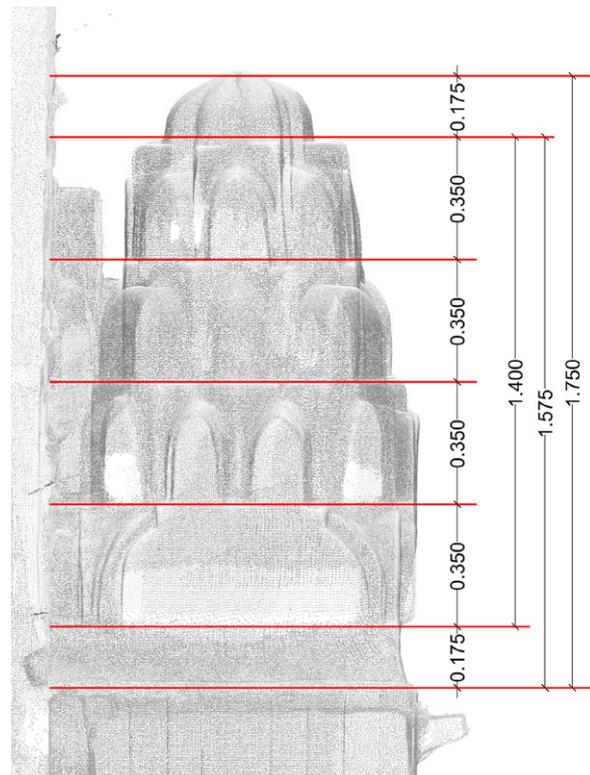


Fig. 7. Vista laterale della nuvola e studio dell'alzato.

4. I muqarnas del Palazzo Reale di Palermo

Il Palazzo Reale di Palermo ospita due strutture a muqarnas differenti tra loro per materiale, costruzione destinazione e datazione: il soffitto che copre la navata centrale della Cappella Palatina e una volta che si trova al quarto livello della Torre Pisana in un ambiente sito sul lato meridionale della torre.

Il soffitto della Cappella Palatina è uno dei più noti in letteratura; esso è l'unica struttura di muqarnas in legno presente in Sicilia. La sua notorietà è in gran parte legata alle pitture che decorano ogni cella elementare, caratteristica che lo rende l'unico esemplare noto al mondo.

I recenti studi hanno dimostrato che tale unicità va ravvisata anche nella sua peculiare struttura costruttiva. Questa è composta da una intelaiatura portante e da elementi leggeri portati, che costituiscono le geometrie voltate delle celle compositive.

Ogni cella elementare condivide con la sua prossima la faccia laterale e gli elementi voltati si costruiscono come superfici rigate appoggiate a centine secondarie.

I muqarnas in legno nell'occidente islamico sono invece costruiti attraverso il montaggio di prismi solidi sostenuti da una struttura portante (Fig.1).

La volta a muqarnas nella Torre Pisana è indubbiamente successiva alla struttura della Cappella Palatina; essa è una struttura in pietra ricoperta da uno strato di stucco, ed è molto simile per costruzione e morfologia alle strutture a muqarnas della Zisa.

Seppur esistono evidenti differenze tra le due strutture, l'analisi delle proiezioni parallele orizzontali ha permesso di osservare evidenti congruenze tra i tracciati regolatori e gli schemi geometrici sottesi al progetto di entrambi i sistemi.

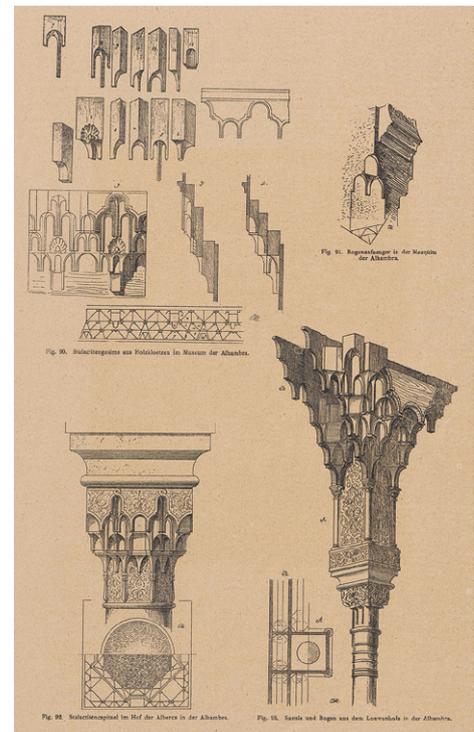


Fig. 1. Studio di muqarnas dell'Alhambra, UHDE C., *Baudenkmäler in Spanien und Portugal*, Berlino, 1892, p. 33.



Fig. 2. Modello mesh texturizzato ottenuto con tecniche SfM (M.A. Badalamenti, M. Cannella, D. Carbone).



Fig. 3. Cappella Palatina, soffitto a muqarnas. Foto da ponteggio (2005)

Muqarnas ceiling of the Palatine Chapel

Il soffitto che copre la navata centrale della Cappella Palatina è costituito da una struttura in legno idealmente suddivisibile in una zona centrale orizzontale composta da coppie di stelle voltate e una zona verticale composta dalle parteti a muqarnas. Il soffitto conta dieci campate più due pareti di fondo contenenti gli angoli; le stelle a otto punte sono intervallate da quadrati nella zona centrale e da ottagoni stellati nella zona laterale, e sono circonscritte da pendenti con altezze differenti, che, come stalattiti, assumono direzione verticale. Le pareti verticali a muqarnas sono composte da 5 livelli con chiusura a ‘cuffia’.

L’analisi geometrica della pianta è stata condotta sulla prima campata ovest del soffitto.

Il soffitto è costruito per moduli alterni (A+B+A+B+A), che al primo livello hanno pari ampiezza ($84 \text{ cm} = 21 \text{ cm} \cdot 4$). La peculiare struttura costruttiva fa sì che il disegno del tracciato regolatore sia ‘rigidamente’ progettato, in particolare nella definizione degli angoli; il modulo A agli angoli è simmetrico rispetto al piano bisettore.

La suddivisione della bisettrice dell’angolo in 12 unità di 21 cm soddisfa ancora una volta il disegno del tracciato regolatore. Per i punti di suddivisione 2, 4, 6, 8 e 10 passano le rette che individuano gli assi di simmetria interni ai moduli e le giaciture delle rette che disegnano l’ottagono stellato e il triangolo rettangolo isoscele, figura base delle diverse celle compositive poste ai primi tre filari.

Lo schema geometrico proposto definisce:

- la dimensione degli elementi a L del primo filare posti in giacitura parallela rispetto alle pareti di fondo;
- la dimensione degli elementi a L ruotati di 45° posti al primo filare, che fungono da separazione tra i moduli A e B (Figg. 5, 6).

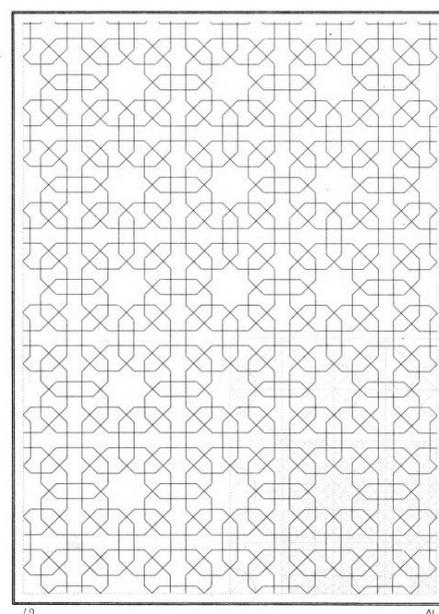
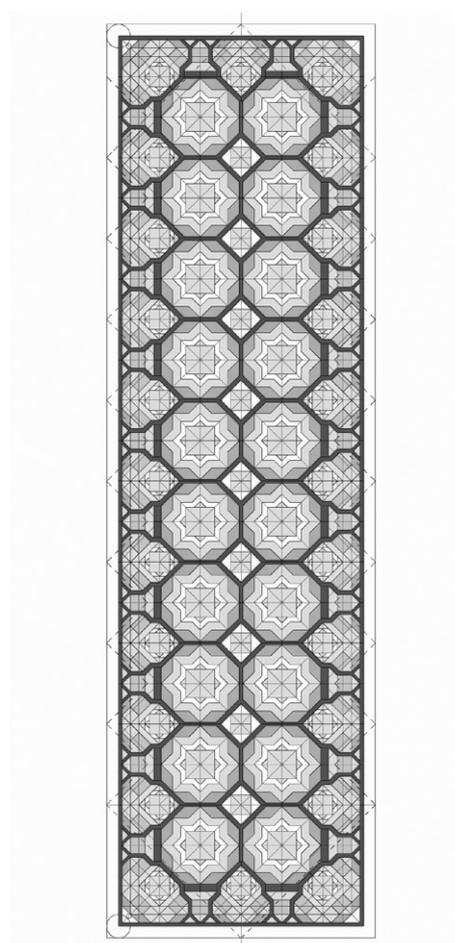


Fig. 4. Confronto tra il tracciato regolatore del soffitto della Cappella Palatina (*sopra*) e pattern decorativi (*sotto* BOURGOIN J., *Les Éléments de l’Art Arabe*, Parigi 1879, p. 99).

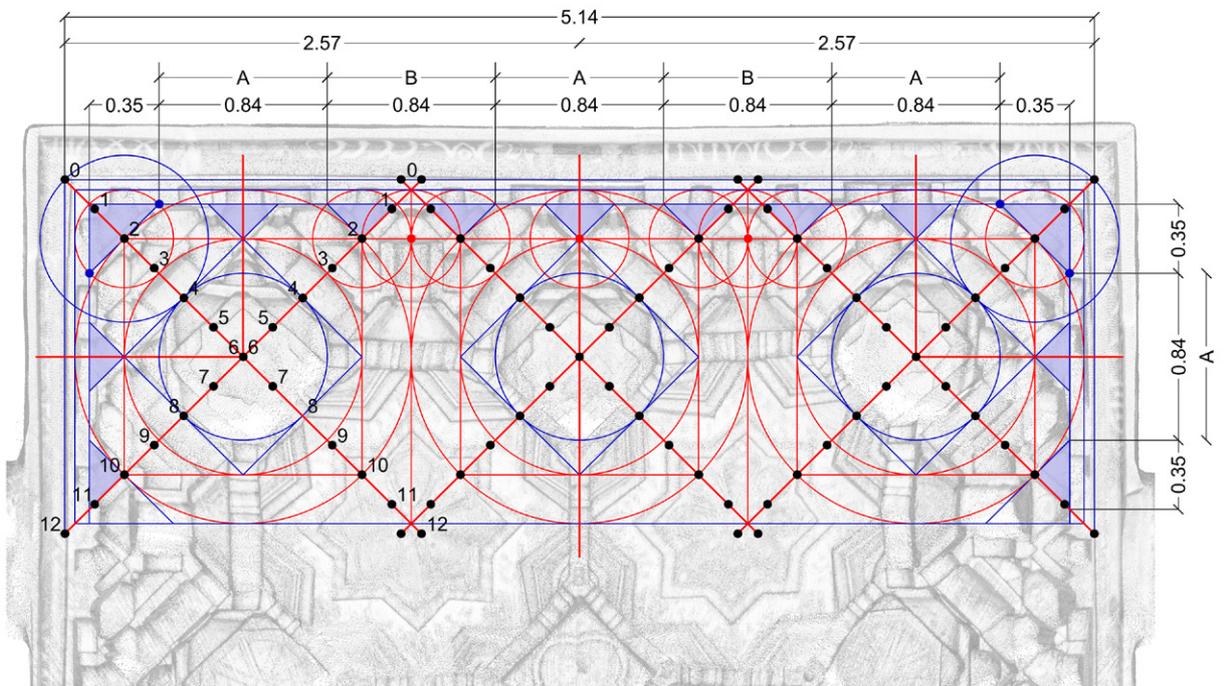


Fig. 5. Nuvola di punti, suddivisione della diagonale e schema compositivo. Il triangolo base della composizione è un triangolo rettangolo isoscele con ipotenusa pari a 35 cm.

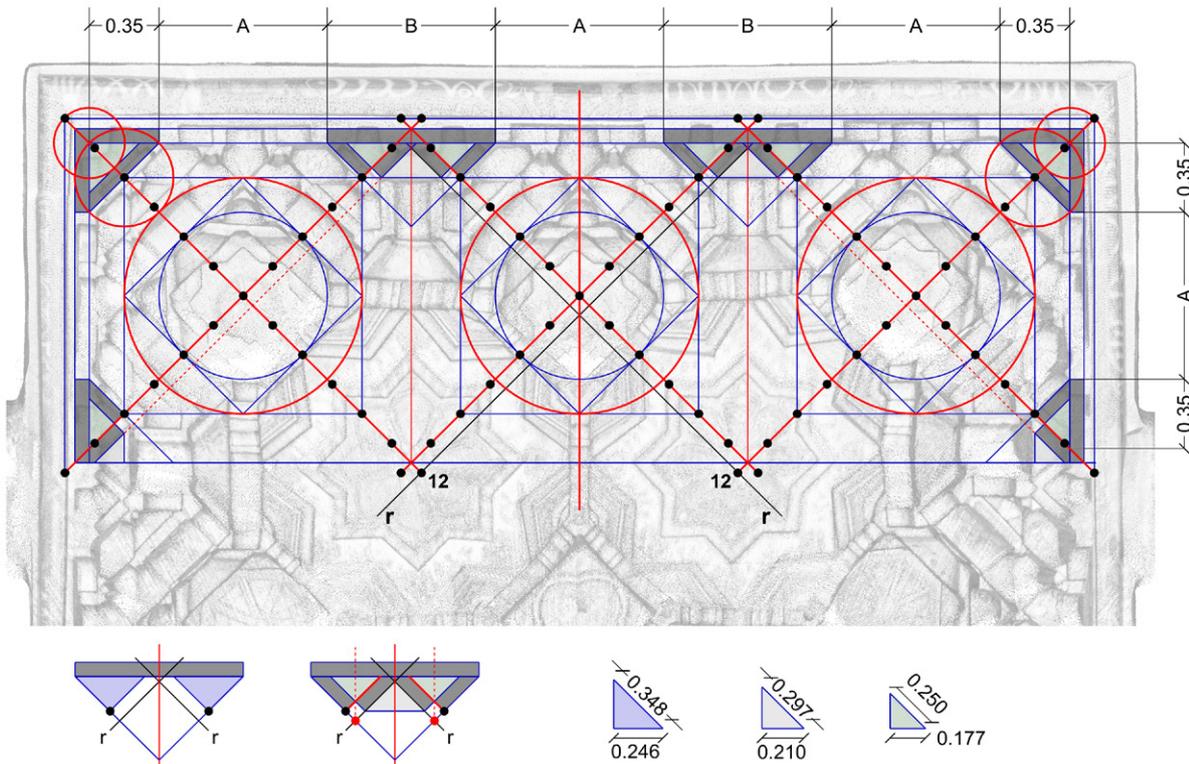
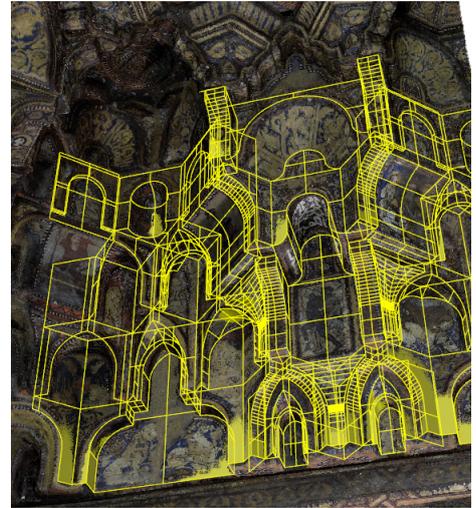


Fig. 6. Nuvola di punti e disegno del primo filare.

Questi elementi sono delimitati, sul modulo B, dalle bisettrici e dalle rette r che attraversano i punti di divisione **12** (Fig. 6).

L'altezza totale del soffitto, compresa la cornice, è pari a pari a 2,57 m ed equivale alla metà della dimensione del lato corto della navata. L'altezza dei filari varia ed è pari a circa 42 cm nei due filari più bassi, e circa 36 cm nei tre superiori (Fig. 10).



7. Nuvola di punti texturizzata e costruzione del modello 3D.

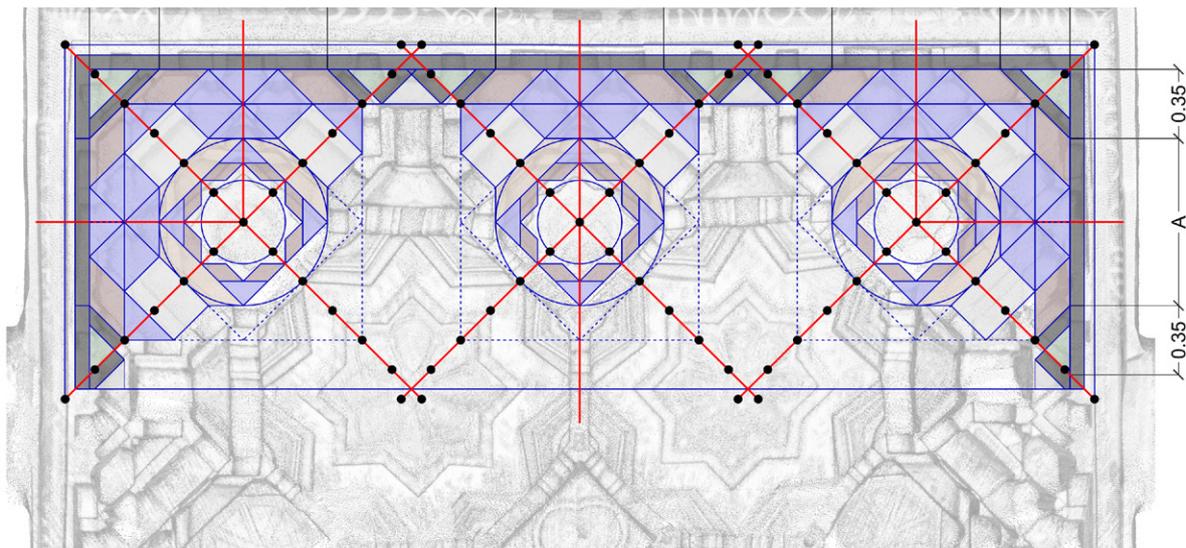


Fig. 8. Nuvola di punti e disegno del tracciato regolatore del modulo A.

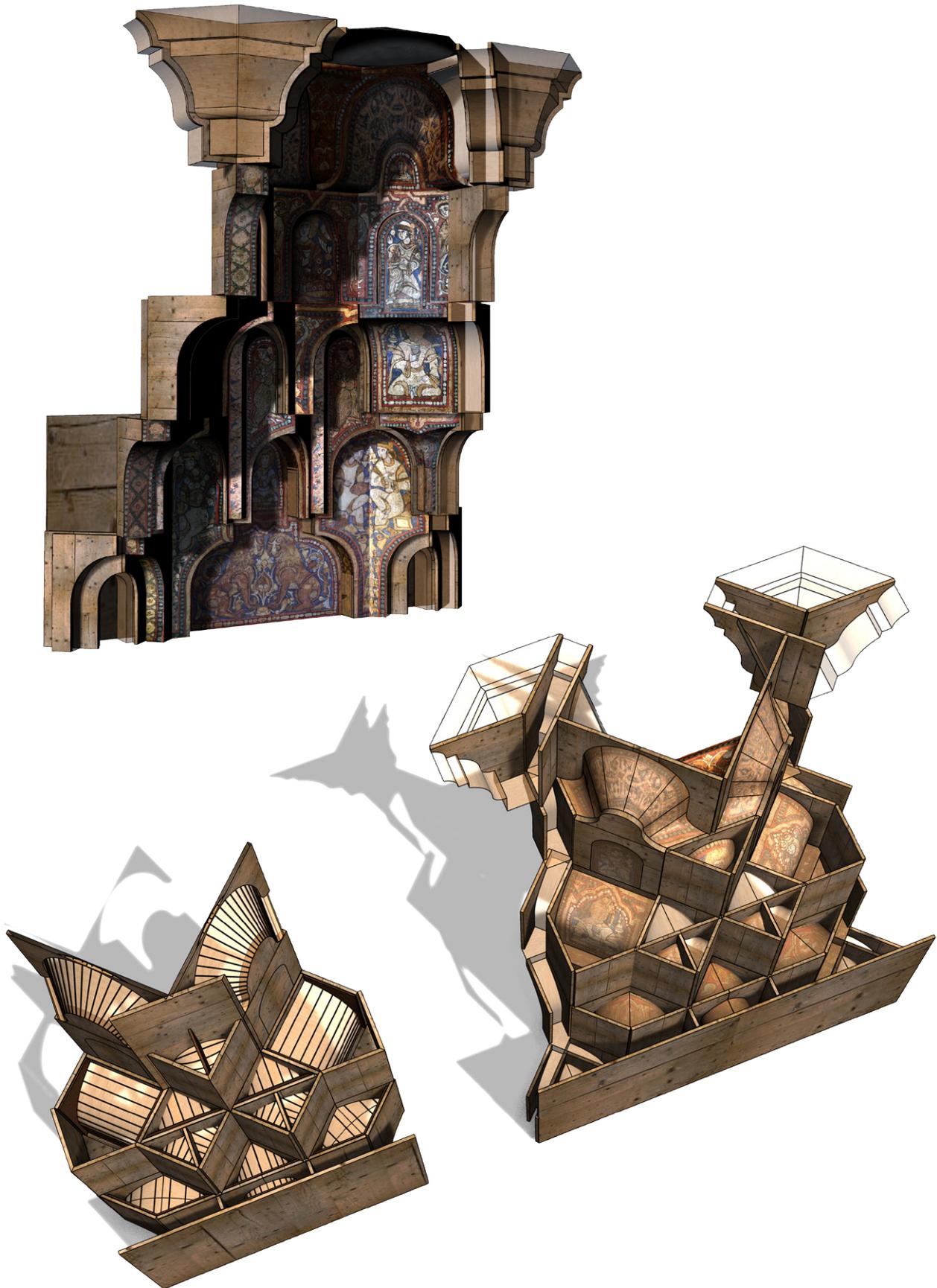


Fig. 8. Estradosso. Modello costruttivo texturizzato.

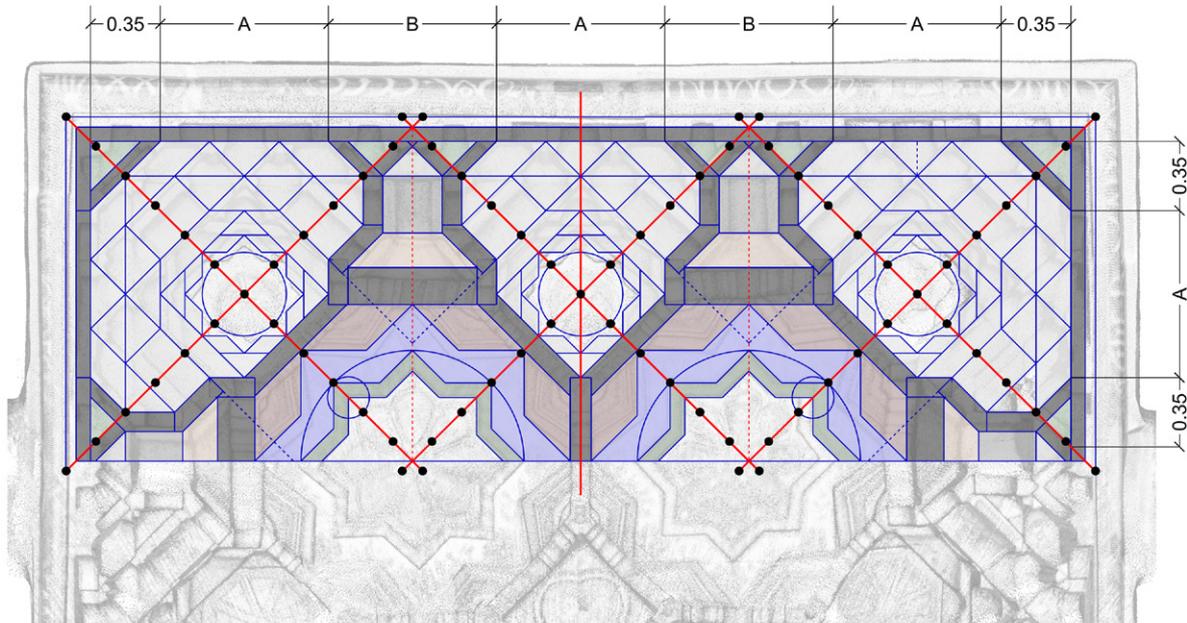


Fig. 9. Nuvola di punti e disegno del tracciato regolatore del modulo B.

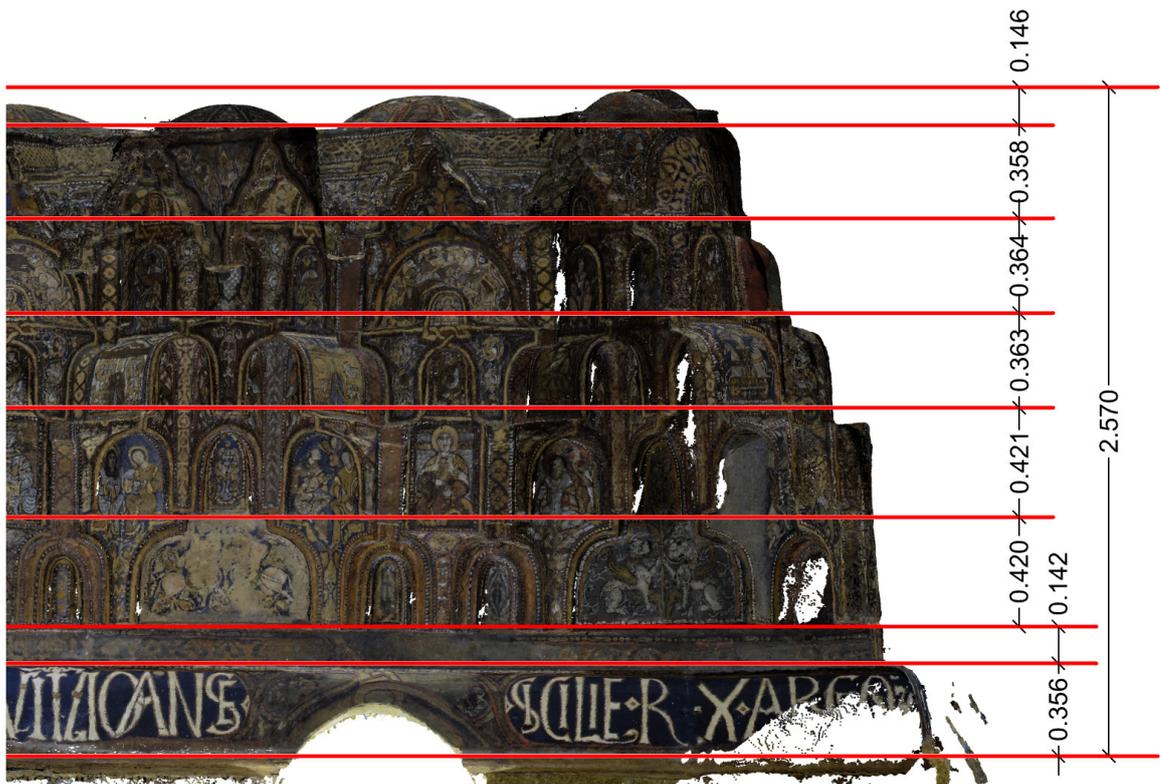


Fig. 10. Nuvola di punti texturizzata e altezza dei filari.



Fig. 11. Volta a muqarnas della Torre Pisana (2012).

Nella pagina seguente

Figg. 12, 13, 14. Torre Pisana, stanza dei muqarnas dopo la demolizione di un soppalco durante il restauro condotto dall'Ing. Francesco Valenti (inizio XIX secolo). Archivio fotografico digitale Soprintendenza BB.CC.AA. di Palermo, Monumento n. 6 Palazzo Reale, file n. 127 bis, file n. 128, file n. 127.

Volta a muqarnas nella Torre Pisana

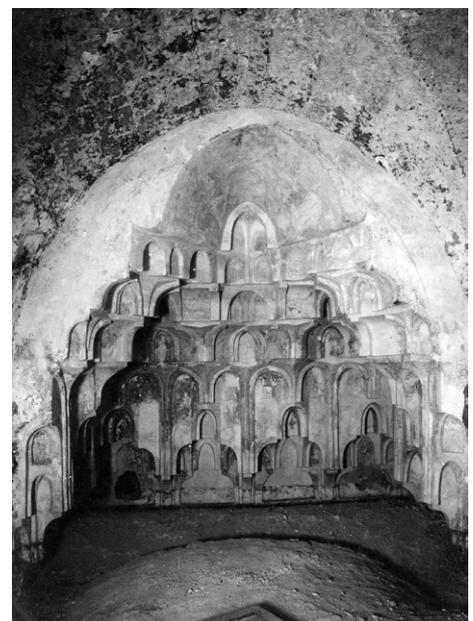
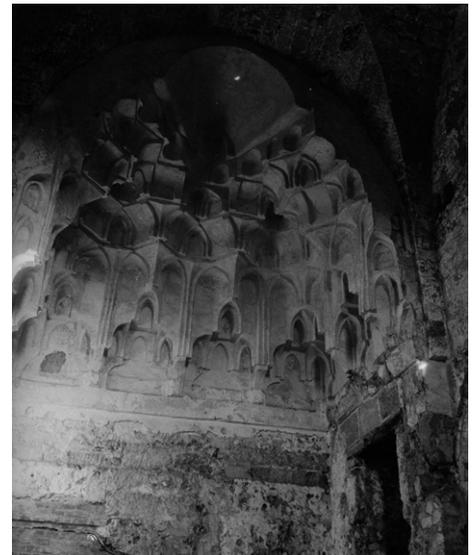
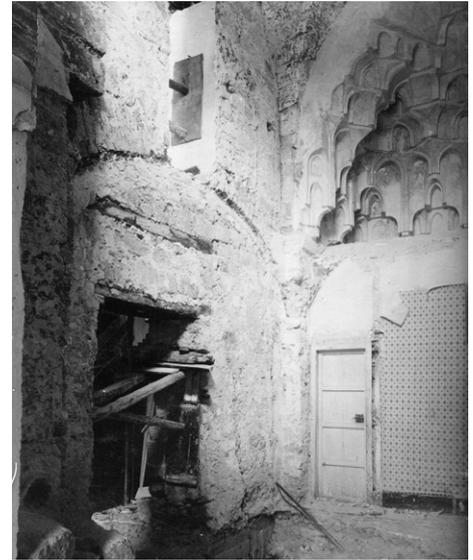
La volta a muqarnas della Torre Pisana è una struttura in pietra tagliata ricoperta da uno strato di stucco; essa è composta da sette filari con chiusura sommitale a ‘cuffia’. L’esame della struttura geometrica del primo filare prende le mosse dalla rappresentazione delle bisettrici del vano rettangolare e dalla loro divisione in 12 parti da 21 cm; si osserva in questo caso che l’intersezione fra le due bisettrici avviene nella parte terminale dell’ultima unità, poco prima del punto di divisione **12**.

Analogamente alle volte centrali del piano terra della Zisa, anche questa struttura è composta da tre unità compositive: la prima attraversa i primi quattro filari, la seconda il quinto e il sesto filare, la terza include il settimo filare e la cuffia sommitale. Le prime due strutture compositive sono costituite da moduli identici tra loro.

Le rette ortogonali alle pareti della volta, che passano per i punti di divisione **3** delle bisettrici, determinano l’oggetto della prima struttura compositiva.

I punti di divisione **6** delle bisettrici determinano, come per le volte laterali dell’*iwān* della Zisa, i centri di cupolette a forma di ottagono stellato, che concludono la soluzione angolare. Le rette ortogonali alle pareti della volta, condotte per i punti **6** delle bisettrici, determinano la posizione degli elementi a L ortogonali alle pareti della volta, cui è assegnata la funzione di separazione fra moduli adiacenti. A differenza delle volte dell’*iwān* della Zisa e di quelle della SS. Trinità, l’elemento a L ortogonale alla parete si posiziona, al primo filare, anche sull’asse di simmetria generale.

La posizione degli elementi a L ortogonali ai fianchi della volta è data dalla retta parallela alla parete di fondo che passa per i punti di divisione **12** delle bisettrici (Figg. 15-17).



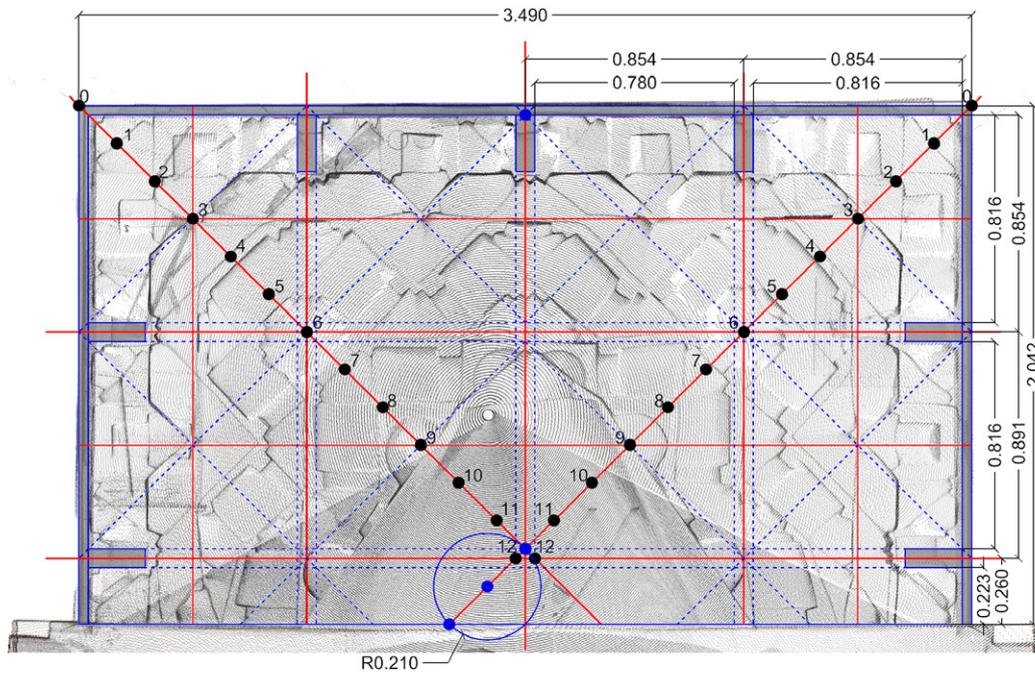


Fig. 15. Nuvola di punti, suddivisione della bisettrice e disegno del primo filare.

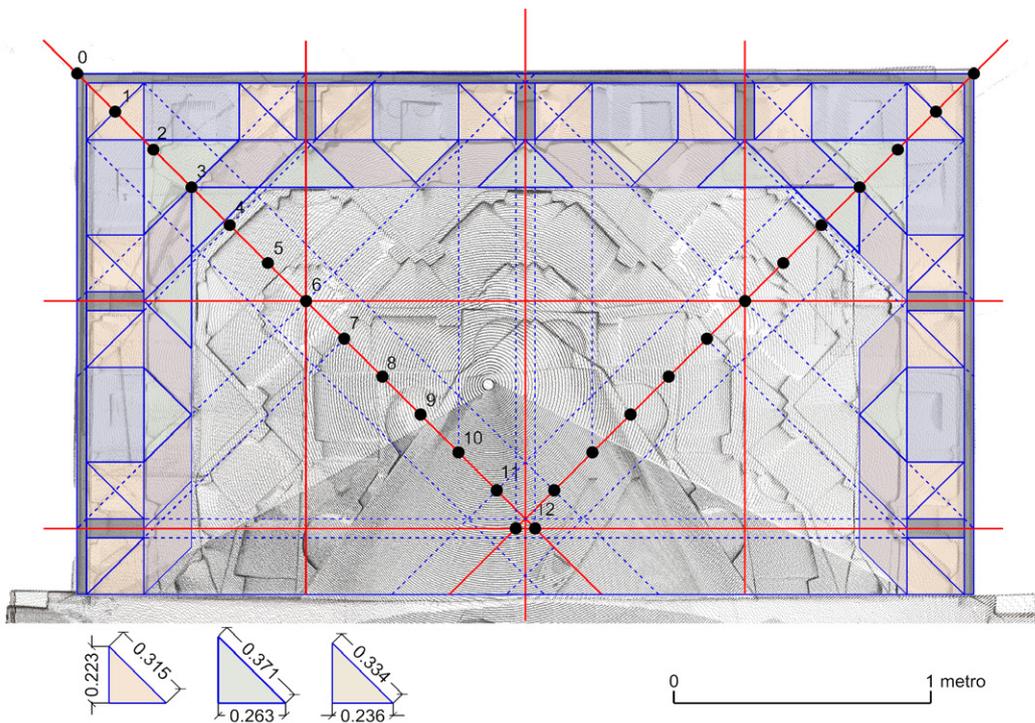


Fig. 16. Nuvola di punti, suddivisione della bisettrice e disegno dei primi quattro filari.

L'altezza totale della struttura è pari alla sua larghezza, ossia 3,49 m; le altezze dei filari 1, 2, 5, 6 sono pari a 35 cm; le altezze degli altri filari hanno valori compresi tra 28 cm e 45 cm, mentre la cornice ha altezza pari a 21 cm (Fig. 18).

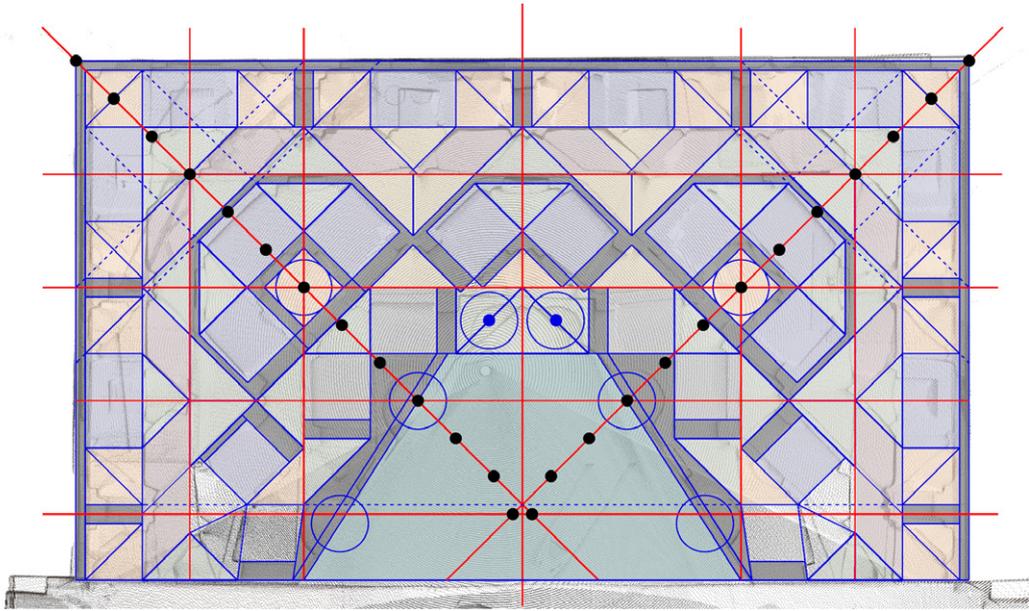


Fig. 17. Disegno del tracciato regolatore.

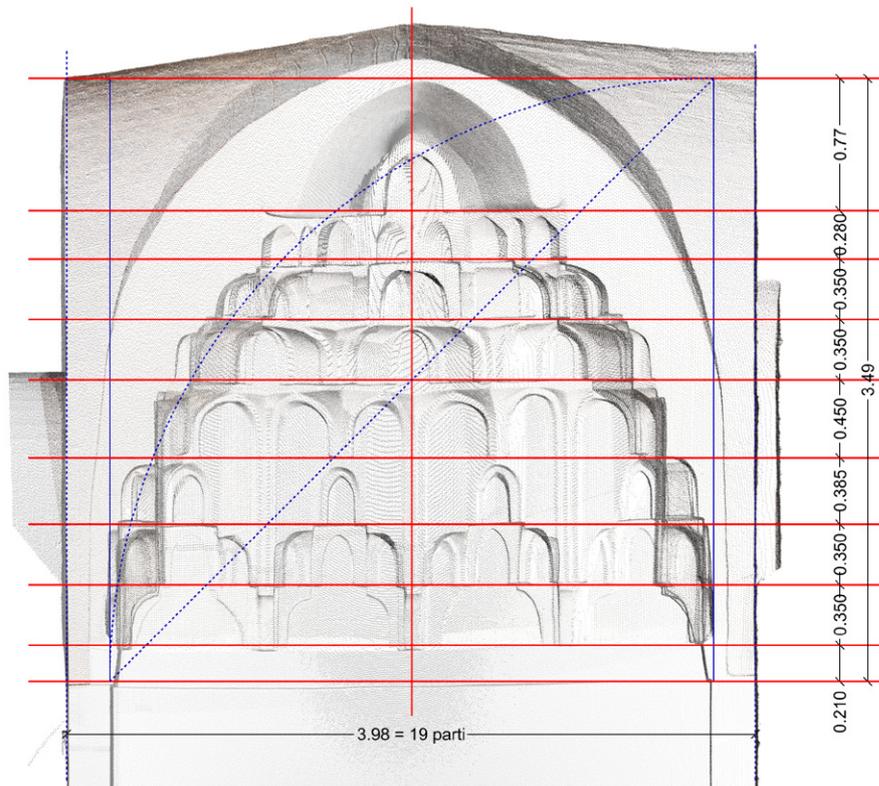


Fig. 18. Studio dell'alzato.

Caratteri comuni ai casi studio

Le volte esaminate possono essere ricondotte a due macrocategorie:

- volte di medie e grandi dimensioni su pianta rettangolare
- volte di piccola dimensione su pianta quadrata.

Per entrambi i tipi è stata proposta l'applicazione di rette bisettrici divise in unità da 21 cm.

Moduli compositivi

Nelle volte di media e grande dimensione è chiaramente ravvisabile la composizione per moduli, ovvero per aggregazioni di celle elementari eterogenee disposte su più filari.

Altezza dei moduli

In alcuni casi, come nel soffitto della Cappella Palatina e nelle volte della SS. Trinità, i moduli includono tutti i filari della volta, dall'imposta alla sommità.

In altri casi, come nelle volta centrale dell'iwan della Zisa e nella volta della Torre Pisana, i moduli si concludono su un filare intermedio; tale filare definisce il piano di imposta dei moduli superiori, che raggiungono il filare più alto.

Ripetizione e variazione dei moduli

Le volte della SS. Trinità e nel soffitto della Cappella Palatina, non a caso entrambe appartenenti a un edificio religioso, hanno identica struttura modulare, basata sull'alternanza fra moduli 'A' principali e moduli 'B' secondari; nella SS. Trinità la cuffia conclude i moduli 'A', mentre nella Palatina è posta sui moduli 'B'.

Laddove il modulo non copre l'intera altezza della struttura, esso si ripete identicamente nella parte inferiore, sia nella volta centrale dell'iwan della Zisa, che nella Torre Pisana. Nelle parti superiori delle due volte, si assiste invece, per la sola parte centrale, all'interposizione di un modulo diverso.

Posizione e ruolo degli elementi a L

Gli elementi a L hanno un ruolo primario nel progetto di tutte le volte studiate; al primo filare gli elementi a L ortogonali alle pareti della volta delimitano sempre i moduli; nei filari successivi tali elementi assumono diverse direzioni, ma rimane immutato il loro ruolo di elementi strutturanti della composizione. Uno degli esiti più significativi dello studio condotto è l'aver evidenziato la stretta connessione fra la posizione di tali elementi e il progetto generale delle strutture.

Il ruolo delle bisettrici

L'ipotesi sull'importanza del ruolo svolto dalle bisettrici delle figure quadrate e rettangolari che definiscono la pianta delle volte, e delle loro divisioni in unità da 21 cm, è stata verificata dall'analisi delle singole strutture.

Le bisettrici non agiscono sempre nello stesso modo, ma il loro ruolo è stato verificato per tutte le strutture esaminate. Una costante ricorrente è il ruolo esercitato dai punti di divisione **6** e **12**. Tale ruolo è stato verificato sia per le volte la cui proiezione in pianta corrisponde esattamente a un doppio quadrato (volta centrale dell'*iwan* della Zisa), che negli altri casi, quando il punto di intersezione fra le bisettrici ricade all'interno (Torre Pisana) o all'esterno (volte laterali dell'*iwan* e volte del primo piano della Zisa). La verifica eseguita conduce a ipotizzare che fosse sufficiente, per definire il progetto delle strutture, rappresentarne una porzione delimitata da una bisettrice e da rette ortogonali ai lati del rettangolo, corrispondente a metà del modulo angolare e a metà del modulo delle pareti.

Dimensioni ricorrenti

La dimensione 21 cm delle unità delle bisettrici, e il suo doppio 42 cm, ricorrono, come già osservato, in diverse celle delle strutture a muqarnas:

- nella volta centrale dell'*iwan* della Zisa il quadrato base della maglia quadrangolare dei primi 4 filari misura 21 cm;

- nella cupoletta della Cattedrale il triangolo rettangolo isoscele angolare ha cateto pari a 21 cm; al primo filare del modulo B dei muqarnas del soffitto ligneo della Cappella Palatina il triangolo base ha cateto pari a 21 cm;
- la misura 42 cm ricorre nell'altezza di alcuni filari delle volte della Zisa;
- la dimensione 35 cm ricorre nell'altezza di molti filari delle volte della Zisa, della Torre Pisana, della Cappella della SS. Trinità e della Cattedrale;
- la misura 26,3 cm ricorre nella proiezione orizzontale di celle delle volte della Torre Pisana e delle piccole nicchie della Zisa e della Cattedrale;
- la misura 31,5 cm ricorre nella proiezione orizzontale di celle delle volte della Torre Pisana e delle nicchie laterali della Sala della fontana della Zisa;

Corrispondenze metrologiche

Riguardo alle corrispondenze fra le dimensioni ricorrenti nelle volte studiate e gli appunti di metrologia desunti dal testo di Segre, si ravvisano similitudini interessanti con le seguenti misure di lunghezza giudaiche e siriane:

il *Plethron (ris)*, di lunghezza pari a 210 m, corrisponde alla divisione della *parasanga* in 30 parti;

la *Ooguya (chebel)*, di lunghezza pari a 2,10 m, corrisponde alla divisione della *parasanga* in 3000 parti;

La dimensione dell'unità riportata sulle bisettrici è pari alla decima parte della *Ooguya*; tale misura non trova corrispondenza nelle sottounità del sistema di misurazione giudaico siriano, ma la sua presenza nelle descrizioni di Harb e la ricorrenza del numero 21, anche se in diverso ordine di grandezza, merita probabilmente un approfondimento.

Altre misure estratte dallo stesso sistema trovano corrispondenze nei casi studiati:

il *Pus ('ammah garmida)*, di lunghezza pari a 35 cm, corrisponde alla divisione in 6 parti della *Ooguya (chebel)*; tale misura ricorre, come già osservato, nell'altezza di

molti filari.

Lo *Spitame (zereth)*, di lunghezza pari a 26,25 cm, corrisponde alla divisione della *Ooguya (chebel)* in 8 parti.

Divisione duodecimale

Un aspetto significativo dello schema proposto per l'interpretazione geometrica delle volte è la divisione delle bisettrici in 12 parti. La divisione duodecimale, ampiamente diffusa nei sistemi di misurazione antichi, è una derivazione del sistema sessagesimale, usato dai matematici arabi fino al medioevo, e anch'esso alla base delle scale di misura antiche.

Il successo perdurante di tali sistemi è legato alla possibilità di utilizzare un maggior numero di divisori rispetto al sistema decimale. In termini pratici tale possibilità aumenta il numero di frazioni la cui risoluzione è un numero intero¹. Ancor oggi il sistema sessagesimale e quello duodecimale regolano la misura del tempo.

1. "(...) La base 12 è stata studiata da matematici di diverse epoche, tanto che a più riprese c'è stato chi proponeva di convertire completamente il nostro sistema numerico da decimale a duodecimale. I motivi sono chiari: la base 12 non ha gli inconvenienti delle basi troppo grandi ed ha il vantaggio di avere molti divisori. Mentre il 10 è divisibile soltanto per 2 e per 5, il 12 divide esattamente 2, 3, 4 e 6 (e, di conseguenza, anche 8, 9 e 10 - A nella notazione duodecimale - non sono primi rispetto ad esso). Il 12 appartiene, infatti, all'insieme dei cosiddetti numeri "altamente composti", cioè numeri che hanno più divisori di qualsiasi intero minore; per trovare un numero che ne abbia di più bisognerebbe salire fino a 24. (...) Come si vede, usando la base 12 scomparirebbero tutti i numeri periodici nelle frazioni aventi come denominatore 3 o un suo multiplo. In altre parole, sarebbe sempre possibile dividere esattamente una quantità (ad esempio, una somma in denaro) in tre, quattro o sei parti uguali." in S. Borgogni, *Basi numeriche non decimali*, Ottobre 2010, Rivista on line matematicamente.it magazine.

CONCLUSIONI

Considerazioni sulla costruzione di muqarnas in pietra a Palermo

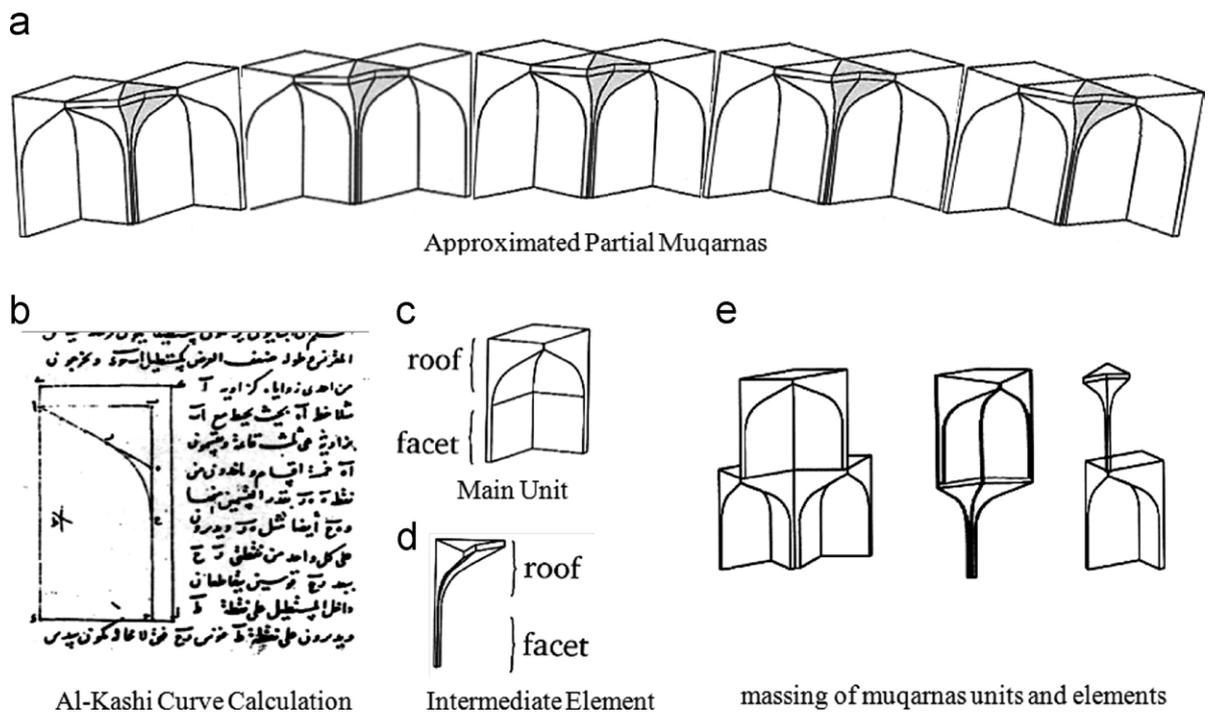


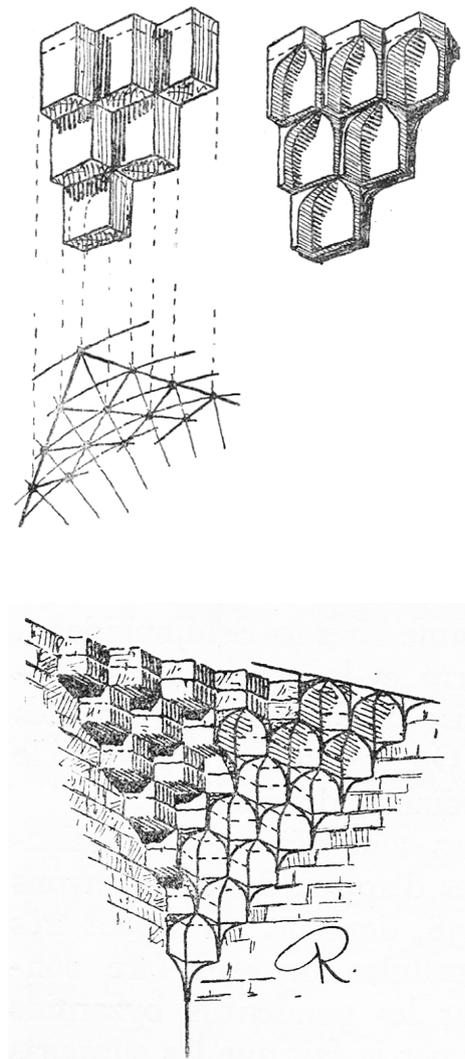
Fig. 1. Studio sulle celle elementari dei muqarnas e sul loro 'accrescimento' (Mohamad Kashef).

Le strutture in pietra descritte sono tutte accomunate da uno stesso sistema costruttivo: i filari sono composti da due parti, una parte piana e la sovrastante parte curva. Questa tecnica costruttiva rimarca la descrizione dei muqarnas del matematico iraniano al-Kashi nel libro IV del suo trattato *La chiave dell'aritmetica*, intitolato *Sulla misura*, in cui egli descrive il procedimento utile al calcolo delle superfici di una struttura a muqarnas:

Il muqarnas è un soffitto come una scala con sfaccettature e un tetto piano. Ogni sfaccettatura interseca quella adiacente con un angolo retto, o metà angolo retto, o la loro somma, o un altro di questi due. Le due sfaccettature possono essere pensate come in piedi su un piano parallelo all'orizzonte. Sopra di esse è costruita una superficie piana, non parallela all'orizzonte, o due superfici, piate o curve, che costituiscono il loro tetto. Entrambe le sfaccettature insieme al loro tetto sono chiamate una cella. Le celle adiacenti, che hanno le loro basi su una stessa superficie parallela all'orizzonte, sono chiamate un livello¹.

La suddivisione di ciascun filare in due parti sovrapposte caratterizzate da differente complessità geometrica riflette, molto probabilmente, un'esigenza di semplificazione e standardizzazione del lavoro di cantiere, nonché la suddivisione delle maestranze in base al livello di competenza; la complessità e articolazione del cantiere medievale è stata già avanzata da diversi studiosi e, in tempi recenti, in studi sulla costruzione dei mosaici.

1. DOLD-SAMPLONIUS Y., *Practical Arabic...*, op. cit. pg. 202



Figg. 2-3. Differenti tipologie costruttive di strutture a muqarnas. 2. muqarnas in legno; 3. muqarnas in pietra (Rosintal, op. cit.).



Figg. 4-6. Nicchia centrale della Sala della fontana (2019).

Brenk riconosce, nei mosaici ‘bizantini’ della Sicilia normanna la presenza di artigiani con diversi gradi di specializzazione, addetti alla costruzione degli sfondi, degli elementi di paesaggio naturale o architettonico, negli abiti, nei piedi, nei volti. È facile immaginare che il compito di costruire i volti venisse assegnato agli artigiani più esperti e meglio retribuiti.

Allo stesso modo è possibile immaginare che nel cantiere di costruzione di una struttura a muqarnas la parte inferiore di ciascun filare, costituita da blocchi di pietra la cui forma è definita da semplici superfici verticali, venisse probabilmente assegnato alle maestranze meno abili.

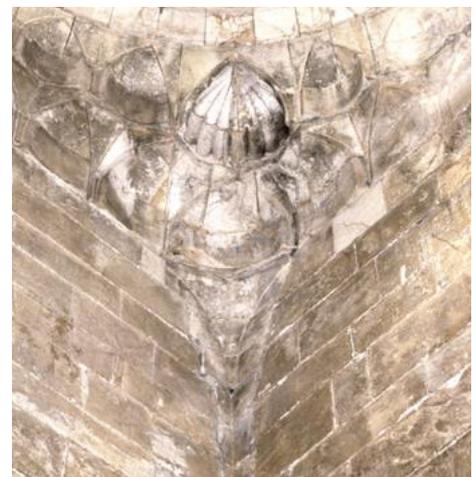
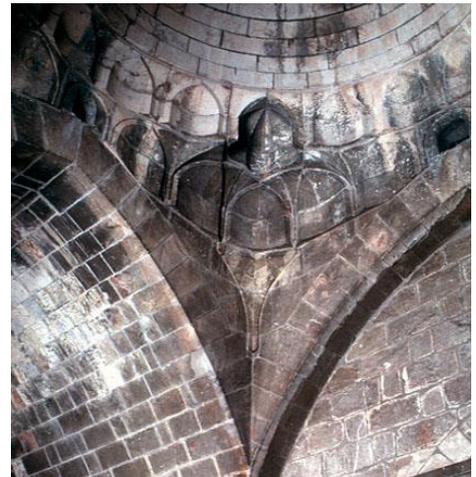
Per contro, alla costruzione del ‘tetto’ (la parte superiore) di ciascun livello dovevano essere assegnate le maestranze più abili; i conci di tale parte richiedono infatti scalpellini capaci di incidere la pietra secondo profili a semplice (archi) e a doppia (volte) curvatura.

Tale suddivisione è particolarmente evidente nelle strutture del complesso monumentale della Zisa, non rivestite da uno strato di stucco: la nicchia centrale e i filari bassi delle nicchie laterali nella Sala della fontana e, ancora al piano terra, la piccola nicchia del piano terra.

Negli altri casi tale suddivisione viene rivelata dalla tessitura muraria della parete su cui si apre la nicchia, in prossimità della struttura a muqarnas, ovvero da lacune nello strato di rivestimento a stucco o ancora da lacune della struttura in pietra dovute a crolli.

Si può dunque affermare che la partizione di ciascun livello in una parte inferiore ‘semplice’ e in una parte superiore ‘complessa’ sia riconoscibile in tutte le volte in pietra oggetto di questo studio.

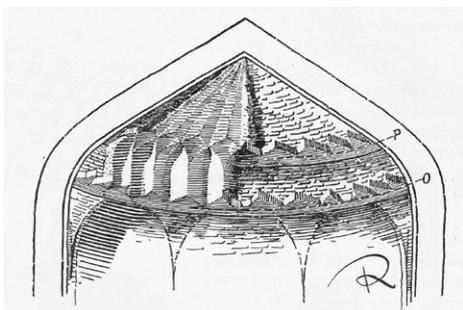
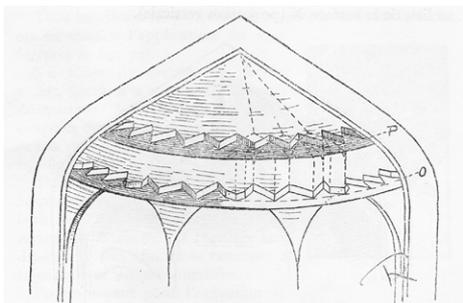
Per ciò che riguarda la parte superiore dei filari, l’osservazione ravvicinata rivela ulteriori peculiarità nella tecnica costruttiva: si osserva infatti che la zona sommitale della parte superiore è talvolta costituita da un semplice concio ‘piatto’ di spessore variabile fra 3 e 4 cm. Tale concio costituisce la base di appoggio per



Figg. 7-9.
The Ernst Herzfeld Papers.
Freer Gallery of Art and Arthur M. Sackler
Gallery Archives. Smithsonian Institution,
Washington. Mashhad
7. Madrasa Kāmiliyya, Firdaws, Aleppo
8. Mashhad of al-Husayn, Aleppo
9. Al-Muhassin, Aleppo



Fig. 10. Nicchia centrale della Sala della fontana (2019)



Figg. 11, 12. Costruzione dei muqarnas in gesso (Rosintal, op. cit.).

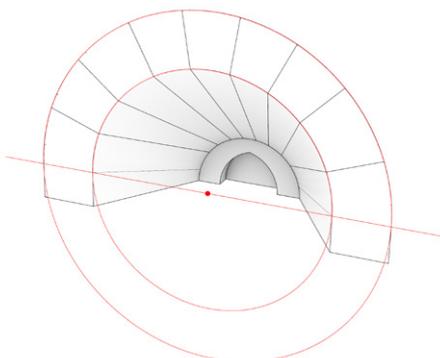


Fig. 13. Elemento a 'cuffia'

i blocchi della parte inferiore del filare successivo. Parziali erosioni rivelano che, in corrispondenza dei conci 'piatti', le complesse superfici che caratterizzano la parte superiore del livello sono realizzate in stucco (Fig. 10). Tale artificio, che consentiva una notevole semplificazione nella realizzazione, ricorre diffusamente nella tradizione costruttiva delle strutture a muqarnas, identificando una precisa tipologia costruttiva; le volte a stucco sono spesso caratterizzate dalla presenza di elementi piatti, con funzione portante, incassati come mensole nella muratura e da strutture di raccordo complesse modellate con la malta (Figg. 11, 12).

L'analisi costruttiva conferma la presenza di quelle modularità dimensionali, ampiamente descritte nel corso di questo studio, con riferimento all'analisi dei tracciati regolatori. L'altezza dei filari delle volte studiate è quasi sempre prossima a 35 cm; in questi casi la parte superiore e la parte inferiore di ciascun filare hanno la medesima altezza pari a circa 17,5 cm. Nei casi in cui l'altezza complessiva del filare è maggiore di 35 cm, la parte bassa continua a mantenere un'altezza pari a circa 17,5 cm mentre la parte superiore ha maggiore dimensione.

Altra peculiarità formale e costruttiva delle volte in pietra di Palermo è la presenza di un elemento posto a conclusione sommitale delle strutture che ricorre in tutte le volte studiate: una 'cuffia' costituita da una superficie conica definita da una direttrice semicircolare che si imposta sul livello più alto in modo diretto o con l'interposizione di uno o due ulteriori blocchi di pietra che seguono la direzione delle generatrici del cono (Fig. 13). La soluzione costruttiva di queste superfici coniche è una chiara derivazione della costruzione di superfici analoghe nel soffitto in legno sulla navata centrale della Cappella Palatina. La superficie conica è come noto una 'rigata' ossia una superficie prodotta dal movimento di una retta 'generatrice' lungo una linea 'direttrice'. La suddivisione della semicirconferenza consente di identificare superfici

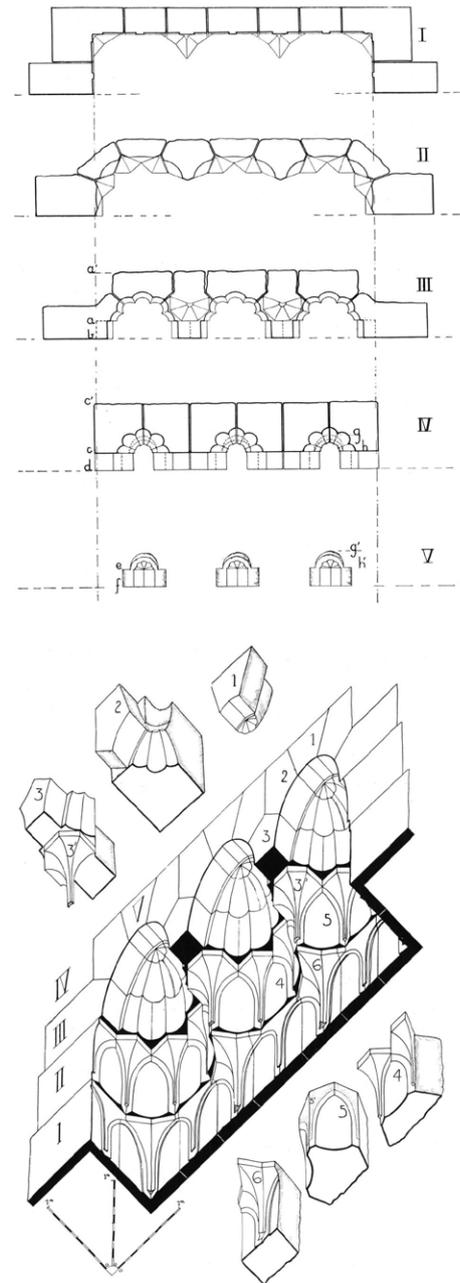
piane di forma triangolare delimitate da due rette generatrici e da una corda della semicirconferenza. Tale superficie viene risolta costruttivamente con sottili listelli di legno nella Cappella Palatina e con blocchi di pietra rastremati nelle strutture studiate.

L'analisi costruttiva concorre con l'analisi geometrico dimensionale alla identificazione di similitudini fra le strutture studiate e analoghe strutture prodotte in Siria, Iraq e Iran.

Tale ipotesi, avanzata anche in studi recenti, va in controtendenza a una consolidata consuetudine ereditata dagli studi di storia dell'arte della prima metà del XX secolo, che identifica l'Egitto come il luogo di provenienza delle maestranze addette alla costruzione delle strutture a muqarnas di Palermo.

Tale ipotesi viene smentita dalla datazione, poichè le volte costruite a Palermo sono più antiche di quelle ad oggi rinvenute in Egitto, nonchè dall'analisi geometrico dimensionale e costruttiva condotta in questo studio.

Le ipotesi avanzate in questo studio sono state formulate grazie alla disponibilità di rilievi accurati; l'esecuzione di analoghi rilievi delle strutture ubicate in medio oriente consentirà di avvalorare o smentire le ipotesi qui proposte.



Figg. 14, 15.
 Syria, Castello di Sahyūn. Nicchia a muqarnas su un portale del XII sec.
 Schema costruttivo in pianta e assonometria cavaliere iposcopica del portale e dei blocchi che lo compongono, (Écochard)

(a destra) Fig. 16.
 Nicchia M1.14 sita al primo livello della Zisa.



Fig. 17. Nuvola di punti della piccola nicchia a muqarnassita al piano terra della Zisa M0.4 (REVIT).

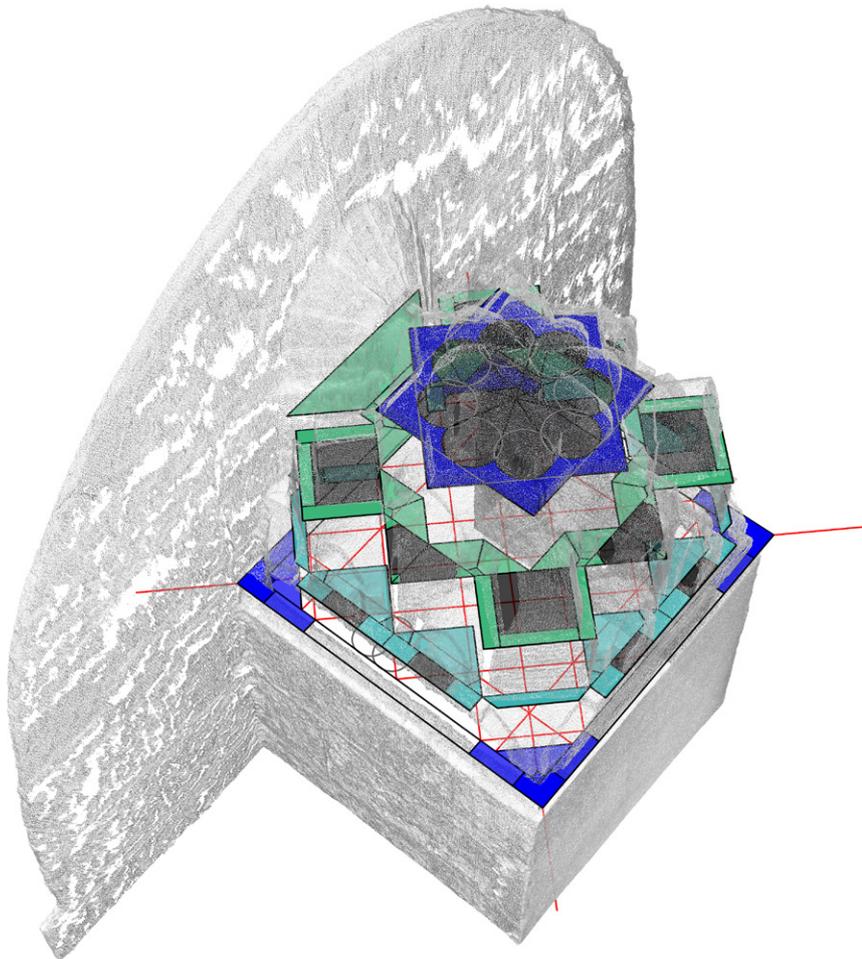


Fig. 18. Nuvola di punti in ambiente NURBS, individuazione dei filari.

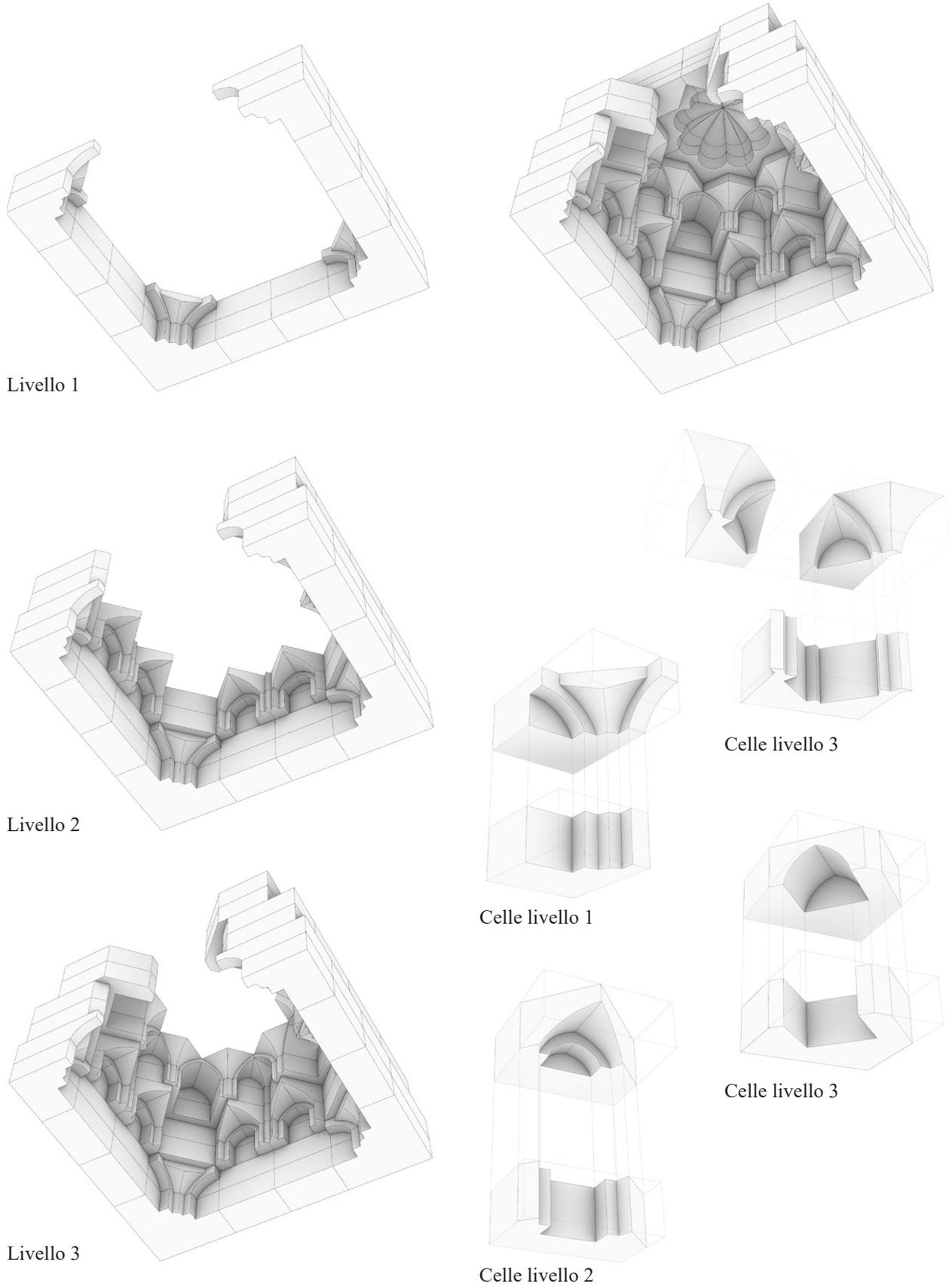


Fig. 19. Modello costruttivo della nicchia M0.4 e costruzione delle celle compositive.

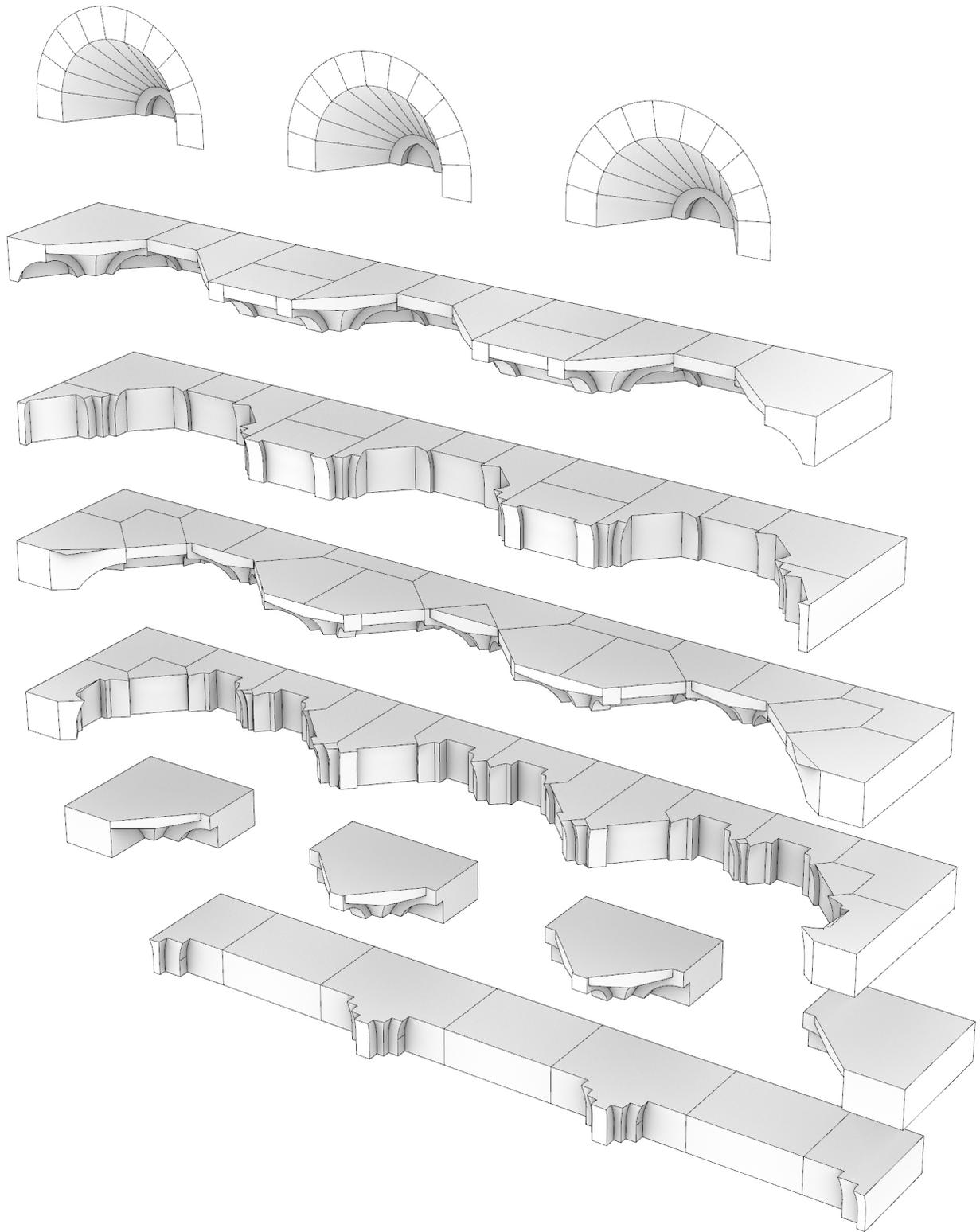


Fig. 20. Ipotesi sul sistema costruttivo delle strutture a muqarnas della Cappella della SS. Trinità di Palermo.

BIBLIOGRAFIA

- Abdullahin Y., Rashid Bin Embi M., *Evolution of Islamic geometric patterns*, ScienceDirect, marzo 2013
- Achille C., *Tecnologia laser scanner. Dal rilievo architettonico alla costruzione del modello: applicazioni, limiti e prospettive*, Milano 2002
- Agnello F., *Rilievo e rappresentazione del soffitto della navata centrale della Cappella Palatina*, in (a cura di) B. Brenk, *La cappella Palatina a Palermo*, Modena 2010, pp. 295-352
- Alaçam S., Güzelci O. Z., *Computational interpretations of 2D muqarnas projections in 3D form finding*, gennaio 2016, <https://www.researchgate.net/publication/310374670>
- Amari M., *Biblioteca arabo – sicula* (versione italiana) Torino-Roma 1880
- Amari M., Boglino L., Carini I., Cavallari F.S., Terzi A., *La Cappella di San Pietro della Reggia di Palermo*, Brangi editore, Palermo 1889
- Amari M., *Storia dei musulmani di Sicilia*, Ed. elettronica 2009-2019 (ed. or. Vol. I Firenze 1854, Vol. II 1855, Vol. III 1868)
- Antista G., *Le cupole in pietra d'età medievale nel mediterraneo (Sicilia e Maghreb)*, Palermo 2016, pp. 11-22
- Behrens-Abouseif D., *Islamic Architecture in Cairo. An Introduction*, in *Studies in Islamic art and Architecture, supplement to Muqarnas*, vol. III, 1989
- Behrens-Abouseif D., Massaiu M., *Arab Avant-Garde Art in the Twelfth Century. Cairo or Palermo?*, in *The world of the fatimids*, Monaco 2018
- Bellafiore G., *Architettura in Sicilia nelle età islamica e normanna (827-1194)*, Palermo 1990
- Blair S., *Surveyor versus epigrapher*, in *Muqarnas VII*, 1991, pp. 66-73
- Bloom J., *The introduction of Muqarnas into Egypt*, in *Muqarnas V*, 1988
- Bourgoin J., *Les Éléments de l'Art Arabe*, Parigi 1879
- Bresc H., *Palermo al tempo dei Normanni*, Palermo 2012
- Calandra R., La Manna A., Scuderi V., Malignaggi D., *Palazzo dei Normanni*, Palermo 1991
- Caronia G., *La Zisa di Palermo. Storia e restauro*, Bari 1982
- Castera J. M., *Arabesques for Abu Dhabi*, <http://castera.net/entrelacs/public/articles/Abu-Dhabi.pdf>
- Castera J. M., *Art decoratif au Maroc*, Parigi 1996

Castera J. M., *La coupole à muqarnas de la salle des deux soeurs à l'Alhambra de Grenade*, <http://castera.net/entrelacs/public/articles/Venise04-fr.pdf>

Crichlow K., *Islamic patterns. An analytical and cosmological approach*, London 1976

Dabbour L. M., *Geometric proportions: the underlying structure of design process for Islamic geometric patterns*, ScienceDirect, agosto 2012

De Luca L., *Verso la caratterizzazione semantica di rappresentazioni digitali di artefatti architettonici: linee programmatiche di ricerca*, in DISEGNARECON, dicembre 2011

De Rubertis R., *Memetica della rappresentazione*, in DISEGNARECON, giugno 2012

Disegno come modello. Riflessioni sul disegno nell'era informatica, (a cura di) Migliari R., Roma 2004

Dold-Samplonius Y., *Calculating Surface Areas and Volumes in Islamic Architecture*, in *The Enterprise of Science in Islam. New Perspectives*, MIT Press, Cambridge Mass. 2003, pp. 235–265

Dold-Samplonius Y., *Calculation of Arches and Domes in 15th Century Samarkand*, in Nexus III, Architecture and Mathematics, Pisa 2000, pp. 45-55

Dold-Samplonius Y., Harmsen S. L., *The Muqarnas Plate Found at Takht-i Sulayman: A New Interpretation*, In *Muqarnas: An Annual on the Visual Culture of the Islamic World*, XXII, 2005, pp. 85-94

Dold-Samplonius Y., *How al-Kashi Measures the Muqarnas: A Second Look*, in *Mathematische Probleme im Mittelalter: Der lateinische und arabische Sprachbereich*, Wolfenbütteler Mittelalter-Studien Vol. 10, Wiesbaden 1996, pp. 56-90

Dold-Samplonius Y., *Practical Arabic Mathematics: Measuring the Muqarnas by al-Kashi*, Centaurus Vol. 35, 1992, pp.193-242

Ecochard M., *Notes d'archéologie musulmane*, in Bulletin D'études Orientales, 7/8, 1937, pp. 83–111

Ecochard M., *Filiation de monuments grecs, byzantins et islamiques. Une question de geometrie*, Parigi 1977

Ecochard, M. *La Restauration des monuments islamiques en Syrie*, s.n. ca. 1943

Feyles M., Filippucci M., *Scrittura/Disegno. Riduzione, Tecnica, Interpretazione*, atti del seminario di studi «Trascrizioni», Palermo 2011

Güzelci O. Z., *A study on measuring complexity in muqarnas patterns*, The Turkish Online Journal of Design, Art and Communication - TOJDAC, April 2019 Volume 9 Issue 2, p. 191-201

Garofalo V., *A methodology for studying muqarnas: the extant examples in Palermo*, in *Muqarnas* 2010, Vol. 27, pp. 357-406

Golvin L., *Recherches Archeologiques a la Qal'a des Banū Hammâd*, Paris 1965

Goury J., Jones, O., *Plans, elevations, sections, and details of the Alhambra. From drawings taken on the spot in 1834 by Jules Goury, and in 1834 and 1837 by Owen Jones*, Volume 1, Londra 1843

Grube E. J., *La pittura islamica nella Sicilia normanna del XII secolo*, in (a cura di Carlo Bertelli) *La pittura in Italia. L'Altomedioevo*, Milano 1994, pp. 1-27

Hammad M., *Architectures Ayyoubides, le style austère à Alep*, Photographies d'architecture Exposition Centre Culturel Arabe Syrien Mars Parigi 2004 (Unpublished paper) <https://archnet.org/sites/1810/publications/3406>

Harb U., *Ilkhanidische Sralukritengewolbe*, Berlino 1978

Harmsen S., Jungblut D., Kromker S., *Seljuk Muqarnas along the Silk Road*, September 2007 (<https://www.researchgate.net/publication/33429652>)

Hattstein M., Delius P. (a cura di), *Islam. Arte e Architettura*, Ed. italiana 2007

Heinrichs W., *The etymology of muqarnas: some observation*, in AA.VV., *Humanism, culture, and language in the Near East: studies in honor of Georg Krotkoff*, Eisenbrauns 1997, pg. 179-184

Hoag J.D., *Architettura islamica*, Electa 1973

Hoffman E. R., *Between east and west: the wall paintings of Samarra and the construction of abbasid princely culture*, in *Muqarnas* XXV, 2008, pp. 107-132.

Ippoliti E., *Rilevare*, Roma 2000

Kashef M., *Bahri Mamluk muqarnas portals in Egypt: Survey and analysis*, in *Frontiers of Architectural Research* Vol. 6, Issue 4, December 2017, pp 487-503

La Duca R., *Il palazzo dei normanni*, Palermo 1997

Lee A. J., *Islamic star patterns*, in *Muqarnas* n. 5, 1988

Li Castri M., Campisi T., Fatta G., *Timbered Roofs and ceilings of the Palatina Chapel in Palermo*, in *Icomos*, Palermo 2006

Maldonado T., *Reale e virtuale*, Milano 2007

Massaiu, M., (Tesi di Dottorato) *The Representation of Power in the Art and Architecture of the Kingdom of Sicily during the Norman Period (1130-1189 AD)*, Università di Cordoba 2018

Migliari R. (a cura di), *Disegno come modello. Riflessioni sul disegno nell'era informatica, Nuovi quaderni di applicazioni della geometria descrittiva 2*, Roma 2004

Migliari R., *Principi teorici e prime acquisizioni nel rilievo del Colosseo*, in *Disegnare Idee Immagini*, Anno X, n. 18/19, Roma 1999

Monneret de Villard U., *Le pitture musulmane al soffitto della Cappella Palatina di Palermo*, Roma 1950

Naser Eslami A., *Architettura del mondo islamico. Dalla Spagna all'India (VII-XV secolo)*, Milano 2010

- Necipoglu G., *Geometric design in Timurid/Turkmen architectural practice: thoughts on a recently discovered scroll and its late gothic parallels*, in *Timurid Art and Culture: Iran and Central Asia in the Fifteenth Century*, Supplemento di Muqarnas vol. VI, Leiden 1992, pp. 48-66
- Necipoglu G., *The Topkapi Scroll. Geometry and Ornament in Islamic Architecture*, Oxford 1995
- Notarangelo L., Ferrara N. (Tesina di divulgazione e museologia della matematica) *Al-Khwarizmi e il suo trattato: "L'al-Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa al-muqābala"*, Università degli Studi di Ferrara, Dipartimento di Matematica, AA. 2016-2017
- Notkin I. , *Decoding sixteenth-century muqarnas drawings*, in *Muqarnas XII*, 1995, pp. 148-171
- Nuere E., *De las plantillas para los racimos de mocarabes. Lectura dibujada*, in *La carpinteria de lazo. Lectura dibujada del manuscrito de Fray Andrés de San Miguel*, Malaga 1990, pp. 269-283
- Ozdural A., *Analysis of the geometry of stalactites: buruciye medrese in sivas*, METU Journal of the Faculty of Architecture 1991, pp.57-71
- Ozdural A., *Giyaseddin Jemshid el-Kashi and stalactites*, metu Journal of the Faculty of Architecture 1990, pp. 31-49
- Paccard A., *Traditional islamic craft in moroccan architecture*, Saint Joriz, 1980
- Pauty M. E., *Contribution a l'Etude des Stalactites*, in *Le Bulletin de l'Institut français d'archéologie orientale*, 1929, pp. 129-153, <https://www.ifao.egnet.net/bifao/29/>
- Rosintal J., *Pendentifs Trompes et Stalactites dans l'architecture orientale*, Parigi 1928 (ed. or. 1913)
- Saliba G., *Artisans and mathematicians*, in *Medieval Islam Journal of the American Oriental Society*, Vol. 119 No. 4, Oct. - Dec. 1999, pp. 637-645
- Segre A., *Metrologia e circolazione monetaria degli antichi*, Bologna 1928
- Staacke U., *La Zisa: un palazzo normanno a Palermo. La cultura musulmana negli edifici dei Re*, Palermo 1991
- Tabbaa Y. , *The muqarnas dome: its origin and meaning*, in *Muqarnas III*, 1985, pp. 61-74
- Ugo V., *Mimēsis. Sulla critica della rappresentazione dell'architettura*, Milano 2008
- Ugo V., *Fondamenti della rappresentazione architettonica*, Bologna 2002 (ed. or. 1994)
- Yaghan M. A., *The evolution of architectural forms through computer visualisation: muqarnas example*, Proceedings of the 2010 international conference on Electronic Visualisation and the Arts (Convegno), luglio 2010
- The Ernst Herzfeld papers*. Freer Gallery of Art and Arthur M. Sackler Gallery Archives. Smithsonian Institution, Washington (<https://www.si.edu/>)

<http://www.archnet.com>

<https://archive.org>

<https://www.researchgate.net/>

<https://www.si.edu/>

<http://www.tamabi.ac.jp/idd/shiro/muqarnas/default.htm>