Giornate di studio dell'Insegnante di MATematica

ATTI del convegno

Giocare con la matematica:
dall'apprendimento informale all'apprendimento formale

19-20 OTTOBRE 2018
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA
UNIVERSITÀ DI CATANIA

Quaderni di Ricerca in Didattica
Quaderno 1 – Numero speciale N. 2, Dicembre 2018

A cura di

Benedetto Di Paola
Eugenia Taranto

G.R.I.M. - Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento/Apprendimento delle Matematiche

Università degli Studi di Palermo

ISSN 1: 1592-4424
ISSN 2: 1592-5137

L'evento è stato promosso dai seguenti enti:

G.R.I.M.
Gruppo di Ricerca sull'insegnamento/Apprendimento delle matematiche

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Catania

Piano Lauree Scientifiche - PLS

Con la sponsorizzazione di:

ASSOCIAZIONE SPORTIVA BRIDGE-CATANIA

CASIO

DeAgostini Scuola

Kangourou

La ecnica della Scuola

Reinventore S.R.L.S.

Sapyent

Zanichelli Editore SPA

Indice

Premessa

Benvenuti alla Le Giornate di studio dell'Insegnante di Matematica (GIMat) inaugurano la loro terza edizione all'insegna di una tematica dal carattere ludico: "**Giocare con la matematica: dall'apprendimento informale all'apprendimento formale**".

Il valore del gioco nella crescita e nello sviluppo della persona, soprattutto nel periodo della vita che va fino all'adolescenza, è da tutti riconosciuto e recentemente è stato rivalutato anche in ambito didattico.
Secondo Piaget, il bambino inizia a giocare poco dopo la nascita, rispondendo ad uno stimolo motorio o sensoriale, e il suo modo di giocare evolve gradualmente fino a quando il bambino diviene consapevole della necessità di avere delle regole. Inoltre, attraverso il gioco, il bambino riesce a stabilire relazioni e a comunicare più facilmente con gli altri.
L'uomo adulto continua a giocare, anche se saltuariamente, a scacchi, dama, carte, oppure a calcio, tennis, pallacanestro; gioca, inoltre, in tutti i momenti in cui si permette di "non fare sul serio" o di prendere in giro se stesso o gli altri. L'importanza essenziale del gioco nella vita umana, soprattutto nella fase che precede l'adolescenza, ne suggerisce un possibile uso in ambito didattico, per rendere più naturale ad agevole l'apprendimento.
L'inserimento di attività ludiche nel normale percorso didattico delle discipline ha un positivo effetto sull'apprendimento, in particolare per la matematica, spesso poco amata dai ragazzi ed accompagnata da risultati non sempre soddisfacenti. Attraverso il gioco si può potenziare l'interesse e la partecipazione degli alunni e favorire l'acquisizione di competenze, introducendo o recuperando concetti, proprietà e abilità in maniera più accattivante.
La frase "giocando s'impara" non è, quindi, solo un modo di dire, ma va intesa con un significato più ampio in quanto tiene conto del coinvolgimento di vari aspetti mentali e cognitivi nell'attività ludica. Il gioco è, infatti, uno strumento per raggiungere importanti obiettivi affettivi, psicomotori, sociali, cognitivi …

Attorno a queste tematiche ruotano i **43 contributi** proposti di seguito, a firma dei relatori intervenuti durante le giornate di venerdì 19 e sabato 20 ottobre 2018. Giochi di carte, misture di acqua e zucchero, strumenti "magici", racconti e fiabe, giochi per lo sviluppo delle competenze, gare a squadre, frattali, arte, movimenti con software, indovinelli, forme e colori, scommesse, robot, paradossi, cartoon, codici segreti e ancora tanto altro: tutte attività basate sulla didattica laboratoriale che è ormai entrata a pieno regime nelle metodologie del portfolio degli insegnanti.
Ancora una volta le GIMat allieteranno il week-end dedicato alla formazione e all'aggiornamento degli oltre 300 Docenti di tutti i gradi scolastici - dalla Scuola dell'Infanzia all'Università - e di alcuni studenti universitari frequentanti il Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Catania, il Dipartimento di Matematica e Informatica di Palermo, il Corso di Studi di Scienze della Formazione Primaria dell'università di Palermo e quello dell'Università Kore di Enna.

Le GIMat nascono dalla collaborazione dei Nuclei di Ricerca in didattica dellas Matematica dei dipartimenti di Matematica e Informatica di Catania e Palermo. Sono una "realtà" che piano piano sta diventando sempre più presente sul territorio siciliano e non solo, sostenuta anche dai docenti e dagli studenti che mostrano sempre passione e desiderio di partecipare. Quest'anno, insieme ai docenti siciliani, saranno presenti docenti provenienti da diverse regioni d'Italia: Lazio, Piemonte, Friuli Venezia Giulia, Toscana, Campania e una delegazione del Canton Ticino.

La produzione di questi atti vuole fornire la possibilità di riflettere sui diversi spunti offerti durante queste due giornate e facilitare la messa in comune delle tante esperienze portate avanti sul territorio. Ci auguriamo che le GIMat possano continuare a crescere ed è con questo obiettivo che vi diamo appuntamento alla IV edizione delle Giornate di studio dell'Insegnante di Matematica che si terrà a Palermo il 18 e 19 Ottobre 2019.

Daniela Ferrarello
Maria Flavia Mammana
Mario Pennisi
Eugenia Taranto
Università degli Studi di Catania

Giornate di studio dell'Insegnante di MATematica

Plenarie

Giocare con la matematica: argomentare, modellizzare e costruire significati

Samuele Antonini
Dipartimento di Matematica "F. Casorati", Università di Pavia

E-mail: samuele.antonini@unipv.it

Abstract/Riassunto. *Dopo alcune considerazioni sul gioco e sul giocare, in generale, in matematica e nell'apprendimento della matematica, presento un'attività svolta in una scuola secondaria di primo grado su problemi della teoria dei giochi cooperativi che lasciano aperta la possibilità di proporre diverse soluzioni e di costruire insieme il significato stesso di soluzione. In particolare, sottolineo come la natura stessa del problema e la metodologia laboratoriale abbiano portato gli studenti ad esplorare la situazione problematica, effettuare e argomentare le loro scelte, esporre i loro punti di vista e prendere in considerazione i punti di vista degli altri al fine di formulare una proposta condivisa.*

1. Introduzione

La parola "gioco" evoca numerose immagini e situazioni diverse in ogni campo delle attività umane, legate a tutte le età. Rimanda a oggetti comunemente chiamati "giochi" (per esempio i giochi da tavolo) e a particolari attività, motorie (per esempio i giochi sportivi) e intellettuali (per esempio i giochi di parole).
I dizionari definiscono gioco "*ogni attività compiuta da bambini o adulti per ricreazione, divertimento o sviluppo di qualità fisiche e intellettuali*" e rimanda a termini quali *passatempo, ricreazione, svago, divertimento* (per esempio, si veda Zingarelli 2002).
Spesso la parola "gioco" è associata alla matematica. Può indicare alcuni materiali strutturati che, per essere giocati, richiedono di attivare strategie in qualche modo legate alla logica, oppure problemi, considerati, per richiamare termini utilizzati nei grandi classici, passatempi dilettevoli e curiosi (si vedano, per esempio, Ghersi 1913 e Gardner 1961), ossia che producono piacere nel risolverli o anche solo nel tentare di farlo, nel leggerne o nel capirne la soluzione.
Restando nella metafora del gioco, problemi di matematica sono da tempo utilizzati per organizzare gare matematiche, competizioni a livelli diversi, compreso quello elevatissimo delle olimpiadi della matematica.
Ritornando al gioco in generale, sua caratteristica è certamente il fatto che i giocatori giocano. L'osservazione è tanto banale quanto essenziale. Non diciamo che chi guarda una partita di calcio stia giocando; sarebbe più corretto dire che ne è spettatore. Sul fronte dell'apprendimento questa distinzione è fondamentale. Anche l'espressione "mettersi in gioco" fa riferimento alla partecipazione attiva di una persona.
Su questa linea, le Indicazioni Nazionali per il primo ciclo fanno esplicito riferimento al "gioco" e al "giocare". Nella parte relativa alla scuola d'infanzia, "giocare" è il primo tra i verbi elencati per approfondire l'idea di competenza:

> "Acquisire *competenze* significa giocare, muoversi, manipolare, curiosare, domandare, imparare a riflettere sull'esperienza attraverso l'esplorazione, l'osservazione e il confronto tra proprietà, quantità, caratteristiche, fatti; significa ascoltare, e comprendere, narrazioni e discorsi, raccontare e rievocare azioni ed esperienze e tradurle in tracce personali e condivise; essere in grado di descrivere,

> rappresentare e immaginare, «ripetere», con simulazioni e giochi di ruolo, situazioni ed eventi con linguaggi diversi.”
> (MIUR 2012, p. 21, corsivo originale)

Se il gioco, per essere giocato, richiede giocatori attivi, alcuni giochi possono diventare parte di quel laboratorio matematico di cui si tratta nella letteratura in didattica della matematica (si veda, per una sintesi della storia dell’idea, Reggiani 2008) e nei documenti di società scientifiche (UMI et al. 2003). Nelle Indicazioni Nazionali (MIUR 2012), laboratorio matematico e gioco sono accostati nella parte riguardante in modo specifico la matematica:

> “In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l’alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive.
> Nella scuola primaria si potrà utilizzare il gioco, che ha un ruolo cruciale nella comunicazione, nell’educazione al rispetto di regole condivise, nell’elaborazione di strategie adatte a contesti diversi.”
> (MIUR 2012, p. 60)

Giocare o partecipare attivamente ad un laboratorio matematico potrebbe significare giocare ad un gioco di ruolo in cui lo studente è un matematico ed è auspicabile ad ogni livello scolare. Per andare ad un ciclo di istruzione molto lontano dalla scuola dell’infanzia, l’autore di un manuale di algebra dedicato a studenti universitari scrive che molti dei problemi proposti nel testo “non vengono proposti tanto per essere risolti, quanto per essere affrontati”. Infatti, continua, “il valore di un problema non sta tanto nel trovarne la soluzione, quanto nelle idee che fa sorgere in chi lo affronta e nei tentativi messi in atto” (Herstein 1988, p. XIV). In questo libro, come in molti altri, sono contrassegnati con un asterisco i problemi ritenuti particolarmente difficili e vi è anche un problema con un doppio asterisco, il problema 26 del capitolo sulla teoria dei gruppi. Invece di dare un suggerimento, l’autore scrive:

> “Non vi scoraggiate se non riuscite a risolvere questo problema, usando, della teoria dei gruppi, solo quanto visto fin qui. Non conosco nessuno, me compreso, che abbia risolto il problema usando i limitati mezzi a disposizione a questo punto. Ma è divertente tentare. Ho ricevuto più lettere su questo problema che su qualunque altro punto del libro.”
> (Herstein 1988, p. 51)

Questo problema doppio asteriscato può essere considerato un gioco, in cui l’obiettivo è giocare perché, presumibilmente, la vincita non sarà la soluzione del problema. E’ un gioco perché, come scrive Herstein, è “divertente tentare”. Lo studente è un matematico di fronte ad un problema irrisolto, e come in laboratorio matematico, dovrà esplorare, formulare ipotesi, effettuare tentativi. Il risultato del suo lavoro è dato dalle idee e della conoscenza che emergono dal processo di risoluzione, e non dalla soluzione, quasi certamente irraggiungibile.
Infine (per modo di dire, che siamo ben lontani dall’esser stati esaustivi), il gioco si lega alla matematica anche in modo particolarmente serio e raffinato in quella disciplina nota come *teoria dei giochi*, una parte della matematica “che ha per oggetto di analisi le situazioni in cui più decisori si trovano a fare delle scelte, dal complesso delle quali dipende il risultato finale”

(Patrone 2006, p. 1). In questa teoria, termini come "gioco", "giocatore", "strategie" e numerosi altri hanno una loro definizione teorica specifica che li rende oggetti matematici da studiare.

2. Giocare a negoziare

L'attività che vado a descrivere può essere considerata un gioco matematico in cui gli studenti hanno attivamente giocato esplorando e proponendo soluzioni a problemi di teoria dei giochi (si veda anche Antonini 2017).
I problemi sono riformulazioni di alcuni insegnanti coinvolti nel progetto di giochi cooperativi (si veda Patrone 2006), in cui diverse persone hanno la possibilità di cooperare per arrivare ad un accordo. Riporto di seguito due dei problemi proposti nell'attività:

Problema 1: Tre musicisti, Ada, Bea e Ciro, vengono contattati per suonare ad una festa. Potranno esibirsi da soli, in coppia o in trio. Le ricompense stabilite dall'organizzatore dell'evento sono le seguenti: 100 euro ad Ada (se suona sola), 150 euro a Bea (da sola), 180 euro a Ciro (da solo), 600 euro al trio se suonano insieme. Se suonano in coppia, i ricavi saranno i seguenti: 400 euro alla coppia Ada e Bea, 300 euro a Ada e Ciro, 420 euro a Bea e Ciro.
Mettendovi nei panni dei tre musicisti, provate a discutere l'offerta e spiegate in che modo Ada, Bea e Ciro potrebbero accordarsi. Ricordatevi di motivare in modo adeguato le vostre affermazioni.

Problema 2: Ci sono tre compagnie aeree: Skyair, Bluitalia e VolaconNoi che hanno interesse a costruire una pista di atterraggio in un nuovo aeroporto. La prima compagnia ha degli aerei piccoli che per atterrare hanno bisogno di un piccolo pezzetto di pista, ovvero 1km, la seconda compagnia ha bisogno di 2km di pista e la terza avendo aerei più grandi ha bisogno di 3 km di pista. Il costo di ogni kilometro di pista è di 100 dobloni. Mettendovi nei panni delle tre compagnie aeree provate a ipotizzare se e come possano mettersi d'accordo, spiegando come potrebbero suddividere le spese. Ricordatevi di motivare in modo adeguato le vostre affermazioni!![1]

Questi ed altri problemi sono stati affrontati prima di tutto in una serie di incontri di formazione insegnanti di matematica che li hanno poi proposti in modalità laboratoriale nelle loro classi, in particolare in una seconda e in una terza di una scuola secondaria di I grado (ma con opportune modifiche possono essere proposti nella secondaria di II grado).
Coerentemente con gli obiettivi di apprendimento e i traguardi per lo sviluppo delle competenze (MIUR 2012), gli obiettivi dell'attività didattica erano i seguenti (si veda anche Antonini 2017):

- promuovere processi decisionali da parte degli studenti, la consapevolezza e la ragionevolezza delle proprie scelte;
- promuovere la produzione di argomentazioni a sostegno delle scelte effettuate;
- promuovere la comprensione delle scelte e dei punti di vista degli altri (sul ruolo e l'importanza della gestione dei punti di vista, si vedano Bartolini Bussi e Boni 1995 e Garuti e Boero 2002);
- promuovere la transizione tra punti di vista, la comprensione, l'analisi ed eventualmente l'accettazione delle argomentazioni degli altri;

[1] Prima di procedere nella lettura, potrebbe essere utile che il lettore giochi un po' con i problemi, ovvero si cimenti nel tentativo di dare una risposta ai problemi proposti.

- promuovere una discussione in cui argomentazioni, controargomentazioni e punti di vista diversi si conciliano fino ad arrivare ad una proposta condivisa;
- promuovere la costruzione di un modello matematico, derivare conseguenze, valutare l’adeguatezza delle soluzioni fornite dal modello e validare il modello stesso (sui processi di modellizzazione in didattica della matematica si veda Blum e al. 2007);
- promuovere la costruzione dei significati di punto di vista, argomentazione, modellizzazione.

Caratteristiche essenziali che hanno determinato la scelta dei problemi, sono le seguenti:

- sono vicini a situazioni reali in cui gli alunni possono immedesimarsi: è infatti ben noto (si veda, per esempio, Boero 2007) che la familiarità della situazione gioca un ruolo importante nell’innescare processi argomentativi;
- non c’è un criterio o una procedura per determinare una soluzione: diverse risposte sono possibili ma nessuna può ambire ad essere LA soluzione. Lo stesso significato di “soluzione” è in discussione;
- non sono necessarie conoscenze matematiche particolari per formulare una proposta e per argomentarla, né il problema suggerisce l’uso di particolari strumenti matematici.

L’attività in classe è stata promossa con una metodologia che si può inquadrare in un approccio vygotskiano (Bartolini Bussi & Boni, 1995) e nella nozione di laboratorio, Gli alunni, divisi in gruppi, hanno esplorato il problema, formulato delle proposte ed esposto il proprio lavoro, argomentando le scelte effettuate. Le diverse soluzioni sono state messe a confronto in una discussione collettiva finale. Osserviamo che l’interazione tra alunni (altra caratteristica essenziale del gioco!), all’interno dei gruppi e nel momento della discussione collettiva, è fondamentale per fare emergere le diverse voci, i diversi punti di vista, per stimolare argomentazioni e controargomentazioni, ascoltare e analizzare le argomentazioni degli altri e negoziare.
Analizziamo in particolare il primo problema. Se il gioco è quello di negoziare, osserviamo che si gioca su due livelli, in quanto gli alunni devono negoziare tra di loro una proposta di soluzione in merito alla negoziazione dei personaggi (i tre musicisti). In altri termini possiamo dire che ci troviamo di fronte ad un gioco (quello di cui si occupa la teoria dei giochi e che riguarda il negoziato tra i tre musicisti), e una riflessione sul gioco che riguarda il negoziato tra gli alunni.
Di fatto, l’analisi della trascrizione delle discussioni in classe mette in evidenza un complesso intreccio di proposte, argomentazioni e contro-argomentazioni portate dagli studenti. La tabella 1 riporta alcune delle proposte formulate.

	Ada	**Bea**	**Ciro**
Equamente	200	200	200
Frazioni	140	209	251
Surplus	156	207	237
Surplus a Ciro	150	200	250

Tabella 1. *Proposte formulate dagli studenti per la suddivisione del guadagno dei tre musicisti nel momento in cui decidono di collaborare suonando insieme. Nella prima colonna si possono leggere le etichette assegnate dagli studenti stessi. I valori numerici in qualche caso sono approssimati.*

La proposta “equamente” non ha bisogno di particolari spiegazioni. Con “frazioni” gli studenti intendono una suddivisione del guadagno totale di 600 euro in modo proporzionale a quanto guadagnerebbero se Ada, Bea e Ciro suonassero da soli. La proposta è stata argomentata sulla base del fatto che la proporzionalità, mantenendo i rapporti, sembra garantire una certa equità. Un modo diverso emerso da molti gruppi di studenti è stato quello di considerare per ogni musicista il guadagno che riceverebbe da solo sommato a 1/3 del “surplus” di 170 euro. Questa proposta è stata ritenuta poco equa da alcuni sulla base del fatto che il ricavo di Ciro non sembrava adeguato ed è stata avanzata la possibilità di suddividere il surplus in parti non uguali premiando Ciro che partiva da una retribuzione più generosa (“surplus a Ciro”).
Queste e altre proposte sono messe in crisi nel momento in cui, sollecitati dall’insegnante, gli studenti assumono il punto di vista dei diversi musicisti, simulando il suo comportamento nella negoziazione con gli altri musicisti. Il processo argomentativo ha portato gli studenti a ritenere che una proposta non possa essere accettata se uno dei tre musicisti guadagnasse di più suonando da solo oppure avesse la possibilità di fare una proposta che sia più vantaggiosa per sé e per almeno un altro musicista (lo chiamiamo principio della *stabilità della contrattazione*).
Sulla base di questo principio, gli studenti realizzano che nessuna delle proposte precedenti (quelle in tabella 1 e altre che qui per motivi di spazio non riporto) risultava accettabile. Infatti, la proposta “frazioni” viene messa in crisi se Ada propone a Bea di suonare escludendo Ciro e di dividere i 400 euro della coppia tenendosi 170 euro e offrendone 230 a Bea. A questo punto, però, Ciro (che ne sarebbe penalizzato), potrebbe proporre a Bea di suonare con lui dividendo i 420 euro e offrendone 235 a Bea (e 185 per sé). E così via.

3. Costruzione del modello

Sottolineiamo ancora una volta che non c’è una soluzione al problema dal momento che non c’è un criterio per stabilire se una proposta sia o non sia una soluzione. Accettato, dopo ore di argomentazioni e contro-argomentazioni, il principio di stabilità della contrattazione, inizia ad avere senso parlare di soluzione e si inizia a costruire in classe un modello matematico del problema (per approfondire dal punto di vista didattico si veda Antonini 2017; dal punto di vista della teoria dei giochi si veda Patrone 2006). Il punto chiave è che il principio di stabilità è equivalente al fatto che una contrattazione è stabile solo se il guadagno di ogni musicista è maggiore o uguale a quanto guadagnerebbe suonando da solo, e il guadagno di ogni coppia di musicisti (cioè la somma dei guadagni di due musicisti) è maggiore o uguale a quanto guadagnerebbe se lavorasse in coppia escludendo il terzo musicista. Per esempio, due proposte stabili sono le seguenti:

1) 170 euro ad Ada, 240 a Bea, 190 a Ciro;
2) 115 euro ad Ada, 300 a Bea, 185 a Ciro.

Per concludere queste brevi pagine, possiamo dire che il lavoro svolto in classe ha promosso l’assunzione di diversi punti di vista sui due livelli, quello dei tre musicisti (livello del gioco) e quello dei diversi alunni (livello della riflessione sul gioco), ha favorito la produzione di argomentazioni e l’analisi delle argomentazioni degli altri.
In altri termini, gli studenti hanno attivamente giocato e la partita è vinta.

Bibliografia

Antonini, S. (2017). Argomentare, comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri: attività didattiche con la teoria dei giochi cooperativi. In B.D’Amore & S. Sbaragli (eds.), *Matematica, didattica e scuola: fra ricerca e prassi quotidiana*, pp. 3-8. Pitagora Editrice Bologna.

Bartolini Bussi, M. G., & Boni, M. (1995). Analisi dell’interazione verbale nella discussione matematica: un approccio vygotskiano. In *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *18A*(3), 221-256.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W., & Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study*. New York: Springer.

Boero P. (Ed.) (2007). *Theorems in school. From history, epistemology and cognition to classroom practice*. Rotterdam: Sense publishers.

Herstein, I.N. (1988). *Algebra*. Editori Riuniti.

Gardner, M. (a cura di) (1961). *Mathematical puzzles and diversions*. Simon and Schuster inc., New York. Edizione Italiana: *Enigmi e giochi matematici*, Sansoni Editore, 1968.

Garuti, R., & Boero, P. (2002). Interiorisation of *forms* of argumentation: a case study. *Proc. of 26th PME,* v. 2, 408-415.

Ghersi, I. (1913). *Matematica dilettevole e curiosa*. Milano: Hoepli.

MIUR (2012). Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell’infanzia e del primo ciclo di istruzione. *Annali della Pubblica Istruzione*, Numero Speciale. Firenze: Le Monnier.

Patrone, F. (2006). *Decisori (razionali) interagenti. Una introduzione alla teoria dei giochi*. Pisa: Plus.

Reggiani M. (2008), Il laboratorio come “ambiente” per l’insegnamento-apprendimento della matematica: riflessioni. In *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Vol. 31, pp. 645-665.

UMI, MIUR, SIS, & MATHESIS (2003). *Matematica 2003*. Lucca, Italia: Liceo Scientifico “A. Vallisneri”.

Zingarelli, N.(2002), *Vocabolario della lingua italiana*, ed. Zanichelli.

MovimentiAmo la matematica: tra teoria e pratica

Francesca Ferrara
Università di Torino

Ketty Savioli
Istituto Comprensivo Chieri III (TO)

E-mail: *francesca.ferrara@unito.it*, *ketty.savioli@gmail.com*

Abstract/Riassunto. *In questo contributo discutiamo come sia possibile movimentare la matematica, nel suo insegnamento e apprendimento, tenendo in considerazione anche una sua dimensione estetica, di bellezza (di amore). Questa prospettiva si basa su esperienze nelle quali, in questi anni, abbiamo cercato di coniugare ricerca e didattica, elementi di teoria e la pratica in classe. Presenteremo dunque esempi di attività e di processi di pensiero che illustrano, da un lato, quanto sia importante una visione dinamica della disciplina, dall'altro, modi in cui gli studenti possono essere creativi e avere piacere nel fare matematica.*

1. Movimento, estetica e matematica

Il 27 settembre 2018 è stata riaperta al pubblico la Cappella della Sindone a Torino, dopo un restauro durato 21 anni in seguito a un incendio che nel 1997 ne mise a serio rischio la tenuta. Capolavoro di Guarino Guarini, la Cappella colpisce per la sua maestosa bellezza, espressa da una dinamica armonia delle forme che conferisce un piacevole senso di movimento e fluidità allo sguardo che si erge rapidamente verso l'alto, al centro della cupola, dove una punta a dodici stelle racchiude il simbolo di una colomba (Figura 1). Subito sotto, una serie di profili esagonali concentrici cattura l'emergere del movimento dall'apparente fissità strutturale, con la cupola traforata da luci triangolari. L'osservatore ha così l'impressione di partecipare a un gioco di prospettive, di proporzioni e di relazioni, il quale crea movimento laddove sembra esservi staticità. Le geometrie delle zone esagonali sovrapposte e alternate regalano una visione dinamica, intrecciata, avvolgente. Il marmo sembra librarsi, muoversi.

Figura 1. *La maestosa cupola di Guarino Guarini.*

La visione di questo affascinante capolavoro trasmette la sensazione di ciò che significa anche irradiare bellezza attraverso la matematica, di un'estetica che si origina da, e grazie a, intrecci di forme e proporzioni.
Il mestiere di un insegnante spesso richiede di "mobilizzare" strutture, di cogliere geometrie pedagogiche e didattiche, di tradurre punti di vista. Oltre a essere ideatore paziente di metodi e approcci, deve anche aprire alla varietà di molteplici soluzioni e prospettive. Insegnare la matematica implica infatti un continuo dialogo tra la creazione di schemi e la sapiente offerta di

strumenti per rompere, cambiare, ristrutturare tali schemi. In tal senso, la pratica didattica dovrebbe *farsi* movimento, essere movimento del pensiero e delle intuizioni.
Prendiamo l'esempio di una divisione *non standard*, come quella presentata dal noto item INVALSI per la quinta primaria somministrato nel 2017, che chiede di individuare il divisore di 8 affinché il risultato sia 16 (ossia, 0,5). Se si mantengono rigidamente l'approccio e le regole introdotti per i numeri interi, la concezione che la divisione significhi sempre diminuire renderà difficile intuire come sia possibile ottenere un risultato di senso (il quesito ha comunque ottenuto circa il 27% di successo). Come si può "far stare" 16 dentro 8? Chi è riuscito a rispondere correttamente? Le variabili favorevoli possono essere molteplici.
Vincente è certo l'atteggiamento di chi ha imparato a spaccare lo schema dei numeri interi a favore di quello dei numeri decimali, così da immaginare di "spingere" 16 dentro 8. Magari riempiendo lo spazio fisico del foglio di senso e movimento con tentativi, errori e scarabocchi (Figura 2; Ferrara & Savioli, in stampa). Questo è *movimento* del pensiero, oltre che della mano che scrive, cancella, salta, collega, su carta.

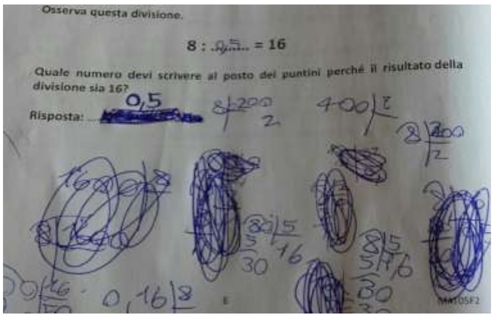


Figura 2. *Esplorazioni che spaccano gli schemi (quesito INVALSI, quinta primaria 2017).*

La ricerca didattica fornisce elementi teorici per comprendere l'importanza del movimento (nella accezione ampia che qui introduciamo) nei processi di insegnamento e apprendimento della matematica. Da un lato, numerosi ricercatori hanno messo in luce il ruolo del corpo e dell'*embodiment* in matematica (Radford et al., 2009; Nemirovsky et al., 2013; Edwards et al., 2014; de Freitas e Sinclair, 2014; Kelton e Ma, 2018), caratterizzando il movimento come quello del corpo, spostamento fisico nello spazio, e indagando il contributo di attività percettivo-motorie alla costruzione di senso. Anche la *natura* mobile e dinamica del pensiero e dei concetti matematici sono (e sono stati) oggetto di studio (Châtelet, 1993/2000; Rotman, 2012; Lagacé, 2015; Roth, 2015). Infine, la cosiddetta teoria della *variazione* considera cambiamento e variazione come aspetti cruciali del fare matematica (Marton e Pang, 2013; Kullberg et al., 2017; Mason, 2017). Coniugando teoria e pratica secondo le tre direzioni, in questi anni, abbiamo ideato un progetto che prende il nome di *Matematica in Movimento*, il quale mira a mettere in movimento la matematica e a introdurre il movimento in matematica come prassi nelle attività di classe (si veda anche Ferrara, Ferrari e Savioli, in stampa).
Altra parte della ricerca in didattica mette l'accento sulla dimensione *estetica* (sulla bellezza) della matematica (Sinclair, 2011; Netz, 2009; Pimm e Sinclair, 2009), che è legata anche alla creatività e all'inventiva nel fare matematica (ad es., Hadamard, 1945; Zhang, 2013; Maheux e Roth, 2015). Solitamente, questa dimensione estetica è associata a perfezione, simmetria, pulizia ed efficienza del ragionamento (prevalentemente tecnico, logico), con il rischio di offuscare l'aspetto più legato al lavoro ("labour") umano, di contingenza e temporalità. Maheux (2016) sottolinea invece la necessità di pensare anche a una matematica *Wabi-Sabi*, con riferimento alla prospettiva giapponese che si focalizza sulla bellezza delle cose modeste e semplici, insolite: una bellezza delle cose imperfette, provvisorie e incomplete. *Wabi* indica l'essere puro, *Sabi* l'essere provvisorio. Imperfezioni, difetti, limiti, incompletezza, temporalità, non permanenza e non convenzionalità, insieme a contraddizione e ambiguità, sono elementi

apprezzabili ed esteticamente ricchi per il modo in cui aiutano ad aprire e a sviluppare le nostre sensibilità verso la natura *imprevedibile* e *incontrollabile* delle esperienze, anche in matematica. Si tratta di una visione che riconosce alla matematica una natura non *disembodied* e astratta, non oggettiva e intrinsecamente strutturata, dimostrabile e, dunque, universale. Dai numeri immaginari all’irrazionalità della radice di 2, dalle geometrie non euclidee all’analisi non standard, al teorema di Gödel e alle dimostrazioni basate sul calcolatore, la matematica mostra la sua incompletezza, continuando a eccedere i suoi propri confini. Châtelet chiama questa la *virtualità* della matematica, la sua capacità di andare oltre ciò che è puramente possibile e aprirsi a nuova matematica. La matematica insomma è sempre in uno stato transitorio. I problemi inversi, non finiti o asseriti in modo incompleto, dalla natura non ortodossa e senza risposta precisa, su cui sono richieste da parte dei solutori assunzioni aggiuntive che generano soluzioni molteplici e creative, punti di vista sui punti di vista, e le strade che non esauriscono se stesse, come la causalità propria del pensiero probabilistico, sono tutti esempi di bellezza *Wabi-Sabi*.
Anche le esplorazioni abbozzate della Figura 2, con le rotture di schema, che permettono di cambiare prospettiva e di accettare o scoprire che dividere talvolta significa aumentare, catturano questa dimensione estetica associata al lavoro matematico (quella stessa per cui il matematico di professione prova piacere nell’affrontare problemi difficili).
In quanto segue, discuteremo possibilità di movimentare il pensiero e i concetti matematici nel concreto della classe, rifacendoci a un’idea di bellezza del fare matematica che valorizzi la pluralità e la costellazione di esperienze intuitive e relative degli studenti. Faremo perciò riferimento a tre filoni concettuali su cui abbiamo focalizzato le nostre sperimentazioni, ossia: senso del grafico, senso del numero e senso del simbolo.

2. Senso del grafico, senso del numero e senso del simbolo

Il primo filone, sul *senso del grafico*, fa parte del progetto della Matematica in Movimento e riguarda essenzialmente approcci grafici al concetto di funzione con sensori di movimento. Nel corso di più di un decennio, tali approcci hanno coinvolto decine di studenti dalla scuola dell’infanzia all’università, utilizzando diversi tipi di sensori, dal *CBR* al *Motion Visualizer* a *Go!Motion* e, infine, *WiiGraph*. Queste tecnologie hanno la potenzialità di avvicinare studenti anche molto giovani a grafici di funzione attraverso la modellizzazione di esperimenti che prevedono il movimento di una o più persone (o oggetti) di fronte a un sensore (origine di riferimento). I grafici con i quali è possibile lavorare sono grafici della posizione in funzione del tempo e, se i sensori più diffusi permettono di avere un solo grafico, altri, *WiiGraph* ad esempio, ne creano almeno due in contemporanea sullo stesso piano cartesiano, addirittura tre quando si sceglie di lavorare con operazioni tra funzioni (la Figura 3 mostra più situazioni).

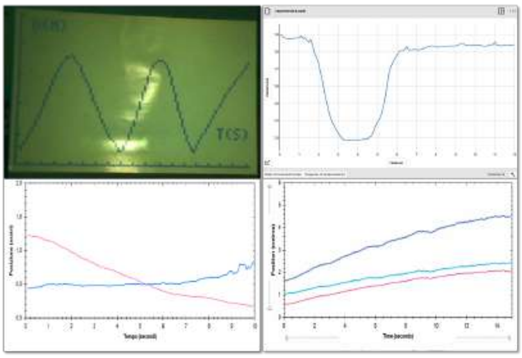


Figura 3. *Grafici forniti da il CBR e Go!Motion (in alto a sinistra e a destra); WiiGraph (in basso).*

Che questo tipo di attività possa essere stimolante per gli studenti è manifestato dalla reazione di stupore ed *emozione* assieme di fronte a un primo movimento dinnanzi a un sensore. Il pensiero si muove e diventa creativo nello sfruttare le potenzialità del corpo, come possiamo osservare nei casi 'limite' delle rette verticali e orizzontali. Ad esempio, Beniamino, alunno di terza primaria che ha utilizzato il *CBR*, per spiegare l'*impossibilità* per la retta verticale di catturare un movimento pensa al grafico come a "una piattaforma, in pratica un posto che ti fa capire che il tempo passa" riuscendo ad associare la retta all'assurda situazione per cui "sarebbe come se tu fermi il tempo, e ti muovi". Così, la possibilità della retta orizzontale è stata legata all'assenza di movimento, per cui "devi stare fermo in un posto per 15 secondi, perché le onde [del sensore] ti colpiscono sempre lì quindi sei distante uguale".
Vediamo come queste attività permettono di costruire senso per il grafico legandolo al corpo. Il concetto di funzione si fa mobile, dinamico, accanto al pensiero, permettendo di toccare nozioni matematiche profonde anche a studenti molto piccoli, che affronteranno formalmente certe tematiche nella scuola secondaria di secondo grado. Un esempio è dato dai significati relazionali che emergono per la velocità: "un fenomeno che può occupare uno spazio e un tempo", "la misura di uno spazio di tempo" (alunni di quarta primaria che usano *Go!Motion*).
Le stesse attività possono essere messe in movimento e sviluppate a livelli scolari diversi: pensiamo al caso emblematico di configurazioni di cinque rette, invece di due, tutte parallele tra loro, o con la stessa origine, situazioni che possono essere considerate come variazioni di rappresentazioni grafiche usuali ottenute con *WiiGraph* e che implicano sforzi *immaginativi* ed *esperimenti di pensiero* da parte degli studenti, inducendoli a ragionare fuori dagli schemi.
Il filone sul *senso del numero* riguarda una sperimentazione che ha coinvolto una classe di studenti nei primi tre anni di scuola primaria in esplorazioni per costruire significati su aspetti relazionali del numero. I bambini hanno utilizzato un'applicazione *multi-touch*, *TouchCounts*, che risponde a più stimoli tattili contemporanei sullo schermo del tablet.

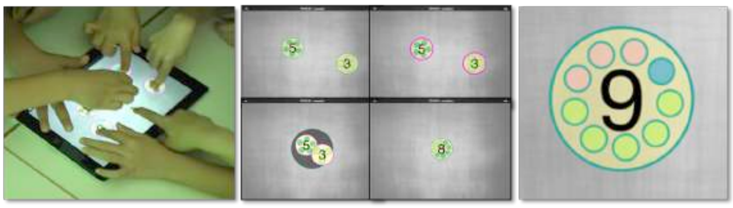


Figura 4. *L'applicazione multi-touch e l'addizione di numeri.*

Focalizziamo l'attenzione sul modo in cui l'applicazione permette di lavorare sulla somma di più numeri alla volta, mediante gesti per addizionare, connettere, unire numeri. La somma è questione di movimento: più dita possono unire più numeri contemporaneamente creando un nuovo numero. Il risultato racchiude in sé i numeri da cui si origina mantenendone il colore dei dischi: il numero 9 in Figura 4, ad esempio, è stato ottenuto a partire da 3, 5 e 1. Questa potenzialità ci ha permesso di lavorare in prima primaria sulla 'storia del numero': così, dato 9, è stato chiesto ai bambini di pensare agli addendi di partenza e di ricostruire la genesi del numero attraverso un disegno. La gestualità utilizzata nei processi esplorativi si è trasformata: il movimento è diventato segno, rappresentazione simbolica, freccia, movimento descritto, persino simbolo di uguale (Figura 5). Il nuovo modo di lavorare con i numeri genera anche nuovi modi di pensare alla somma, *movimenti* che permettono a 9 di essere il risultato dell'unione di 3, 5 e 1, ma nel contempo anche dell'unione di quattro numeri, 3, 4 e "due di sempre uno" (Sofia, alunna di prima primaria, quando il colore di uno dei dischi del numero 5 è cambiato e colorato di rosso, variazione interessante per innescare mobilità di pensiero).

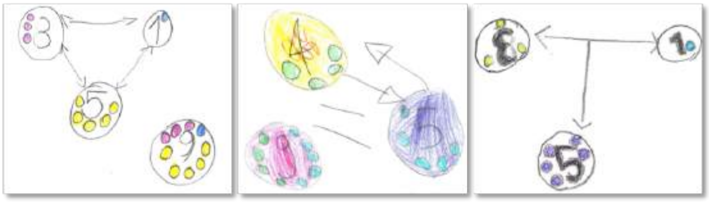
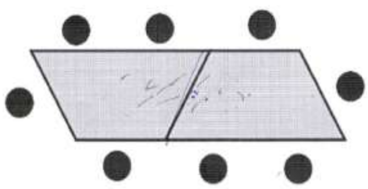


Figura 5. *Disegni che catturano la storia del numero 9.*

Un'attività analoga chiedeva di lavorare sulla somma di quattro numeri dati corrispondente a 18 (i quattro numeri erano 2, 3, 6 e 7). Modi di mettere in movimento l'attività in questo caso, potrebbero essere forniti da richieste del tipo: "Rappresenta almeno un altro modo in cui puoi ottenere 18, con quattro numeri, con tre numeri, …", oppure: Possiamo ottenere 18 a partire da tre numeri uguali tra loro? E a partire da quattro numeri uguali tra loro?", richieste che aprono eventualmente il discorso ai multipli e alla divisione con resto. Noi abbiamo utilizzato *TouchCounts*, ma attività analoghe possono essere costruite senza software, facendo giocare ruoli diversi ai bambini e alle loro dita, *come se* fossero addendi diversi.
L'ultimo filone, sul *senso del simbolo*, riprende riflessioni che provengono da un quinquennio di sperimentazioni (alla scuola primaria) sul nucleo Relazioni e funzioni, focalizzate nello specifico sulla ricerca di regolarità, sulla descrizione funzionale di sequenze di numeri o figure, sulla generalizzazione e sulla modellizzazione di strutture (come avvio al pensiero algebrico). Il 'problema dei tavoli' è un esempio utilizzato in attività di ricerca di regolarità che permette di mettere "figure in movimento". Il problema riguarda la modellizzazione di una situazione in cui tavoli a pianta trapezoidale sono utilizzati per creare una grande tavolata dove far sedere gli ospiti che partecipano a una festa. I tavoli sono uniti tra loro lungo due lati obliqui (come in Figura 6, a sinistra). La situazione fornisce il numero totale degli ospiti (524) e pone come problematico il conteggio dei tavoli necessari, proponendo due diverse strategie risolutive, per bocca di due attori: Renzo ed Edouard (Figura 6, a destra). A bambini di quarta primaria è chiesto di pensare a chi, tra Renzo ed Edouard, ha ragione e perché.



RENZO DICE A EDOUARD: "PER CAPIRE QUANTI TAVOLI CI SERVONO, PRENDIAMO IL NUMERO DEGLI OSPITI, TOGLIAMO DUE E DIVIDIAMO PER TRE".

EDOUARD RISPONDE A RENZO: "NON SONO D'ACCORDO. SECONDO ME, DOBBIAMO PARTIRE DAL NUMERO DEGLI OSPITI MA TOGLIERE CINQUE E DIVIDERE PER TRE. PER SAPERE QUANTI TAVOLI CI SERVONO, AGGIUNGIAMO UNO AL RISULTATO".

Figura 6. *Due tavoli uniti per il "problema dei tavoli" e le strategie di Renzo ed Edouard.*

Il ragionamento di Renzo è più diretto rispetto a quello di Edouard: si basa sulla ripetizione di tre sedute centrali, per ogni tavolo, cui sono da aggiungere le due sedute laterali della grande tavolata. Il modo di pensare di Edouard invece è di unire una seduta laterale con le quattro sedute del tavolo all'estremo opposto, così da ottenere le cinque sedute di un tavolo libero e da ricondurre il discorso alla presenza di un tavolo in meno (da aggiungere nuovamente alla fine). Essenzialmente, Renzo ed Edouard offrono due strade diverse per vedere e affrontare la stessa situazione: l'uno mette il numero dei tavoli T in relazione con il numero di sedute S, secondo la formula $S=3T+2$; l'altro, ragionando su $S-5=3(T-1)$. La struttura emerge pensando di visualizzare la situazione man mano che il numero dei tavoli aumenta, come accade nel protocollo di Lara e Filippo che hanno lavorato in coppia (Figura 7). Che le due strade siano equivalenti si ottiene trasformando con semplici manipolazioni algebriche la seconda formula nella prima. Non sono questi gli unici modi di innescare movimento: si può ad esempio pensare che cosa cambierebbe se si utilizzassero tavoli separati invece che uniti, oppure a che cosa succederebbe nel caso di tavoli più tradizionali, a pianta quadrata o rettangolare. Dalla primaria alla secondaria, insomma, il problema dei tavoli permette di volgere il pensiero verso nuove possibilità per spingersi sino allo studio di famiglie di funzioni lineari (rette).

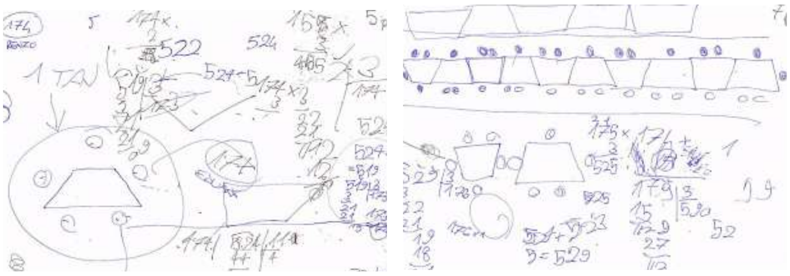


Figura 7. *Protocollo di Lara e Filippo sul problema dei tavoli.*

Quanto abbiamo discusso riguardo al senso del grafico, al senso del simbolo e al senso del numero vuole essere esemplificativo di come sia possibile, nella didattica della matematica, mettere in movimento non solo il corpo, ma anche i concetti e il pensiero, stimolando gli studenti alla creatività e alla bellezza nell’imparare la matematica. In questa prospettiva, è importante (e necessario) dare spazio a modalità espressive e comunicative, a immaginazione ed esperimenti di pensiero, alla variazione, e favorire punti di vista diversi, processi dinamici di cambiamento e cambi di prospettiva. Elementi, il cambiamento e i punti di vista, che hanno un ruolo di primo piano anche nella società moderna, in cui troppo spesso il pensiero critico e l’accettazione della diversità vengono a mancare. Amare la matematica è anche movimentare il pensiero. L’intelligenza infatti “è una forma d’amore, dopo aver separato, collega, unisce, connette” (Valerio, 2016).

Bibliografia

Châtelet, G. (1993/2000). *Les Enjeux du Mobile*. Paris: Seuil (English Transl. by R. Shore & M. Zagha, *Figuring Space: Philosophy, Mathematics and Physics*. Dordrecht: Kluwer, 2000).

de Freitas, E. & Sinclair, N. (2014). *Mathematics and the body: Material entanglements in the classroom.* New York, NY: Cambridge University Press.

Edwards, L., Ferrara, F. & Moore-Russo, D. (Eds.) (2014). *Emerging Perspectives on Gesture and Embodiment in Mathematics*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Ferrara, F. & Savioli, K. (in stampa). Dividere non è sempre ciò che sembra. In *Il dato nella didattica delle discipline. II Seminario “I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca”*. Roma: Franco Angeli Editore.

Ferrara, F., Ferrari, G. & Savioli, K. (in stampa). Matematica in Movimento: radici, sviluppi e implicazioni di un approccio grafico al concetto di funzione tramite i sensori. In *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 2019.

Hadamard, J. (1945) *The psychology of invention in the mathematical field*. New York, NY: Dover.

Kelton, M.L. & Ma, J.Y. (2018). Reconfiguring mathematical settings and activity through multi-party, whole-body collaboration. *Educational Studies in Mathematics, 98*(2), 177-196.

Kullberg, A., Runesson Kempe, U. & Marton, F. (2017). *ZDM Mathematics Education, 49*(4), 559-569.

Lagacé, F. (2015). Mathématiques et physique sous l'angle d'Aristote, Archimède et Châtelet. *For the Learning of Mathematics, 35*(1), 21-27.

Maheux, J.F. (2016). Wabi-Sabi Mathematics. *Journal of Humanistic Mathematics, 6*(1), 174-195.

Maheux, J.F. & Roth, W.M. (2015). Inventing (in) early geometry, or How creativity inheres in the doing of mathematics. *REDIMAT, 4*(1), 6-29.

Marton, F. & Pang, M.F. (2013). Meanings are acquired from experiencing differences against a background of sameness, rather than from experiencing sameness against a background of difference: Putting a conjecture to test by embedding it into a pedagogical tool. *Frontline Learning Research, 1*(1), 24-41.

Mason, J. (2017). Issues in variation theory and how it could inform pedagogical choices. In R. Huang & L. Yeping (Eds.), *Teaching and learning mathematics through variation. Confusian heritage meets western theories*. Boston, MA: Sense.

Nemirovsky, R., Kelton, M.L. & Rhodehamel, B. (2013). Playing mathematical instruments: Emerging perceptuomotor integration with an interactive mathematics exhibit. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*(2), 372-415.

Netz, R. (2009). *Ludic Proof: Greek Mathematics and the Alexandrian Aesthetic*. New York, NY: Cambridge University Press.

Pimm, D. & Sinclair, N. (2009). Audience, style and criticism. *For the Learning of Mathematics, 29*(2), 23-27.

Radford, L., Edwards, L. & Arzarello, F. (2009). Beyond words. *Educational Studies in Mathematics, 70*(3), 91-95.

Roth, W.M. (2015). Excess of graphical thinking: Movement, mathematics and flow. *For the Learning of Mathematics, 35*(1), 2-7.

Rotman, B. (2012). Topology, algebra, diagrams. *Theory, Culture & Society, 29*(4/5), 247-260.

Sinclair, N. (2011). Aesthetic Considerations in Mathematics. *Journal of Humanistic Mathematics, 1*(1), 2-32.

Zhang, X.G. (2013). Thinking analysis to the process of mathematical creativity of mathematicians. *Philosophy of Mathematics Education Journal,* 27. Retrieved from http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome27/

Valerio, C. (2016). *Storia umana della matematica*. Torino: Einaudi.

"Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)", n.1 Numero speciale n.2, 2018
G.R.I.M. (Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo)

Insegnare Matematica tra gioco, divertimento e curiosità

Alfio Ragusa
Università di Catania

E-mail: *ragusa@dmi.unict.it*

Abstract/Riassunto. *Di seguito si espongono alcune riflessioni sull'insegnamento della matematica, attraverso il gioco, mettendo in evidenza come l'aspetto ludico possa valorizzare il ragionamento logico-matematico.*

1. Premessa

Pur avendo oltre 50 anni di insegnamento, non ho mai insegnato nelle scuole (salvo qualche sporadico corso di eccellenza) ma solo all'Università, tuttavia credo di potere affermare che quanto esporrò si applica in egual misura a tutti i livelli scolastici.

2. Insegnare

Vorrei cominciare illustrando il titolo di questa chiacchierata. Ed iniziamo dalla parola: *Insegnare*.
Insegnare non è una professione ma una passione!
Questo è stato sempre il mio pensiero durante tutti gli anni della mia attività lavorativa. Passione che non è diminuita col passare degli anni tant'è che tutt'oggi, seppur pensionato, continuo ad insegnare per dare il mio contributo cercando di trasmettere ai giovani la mia passione per la Matematica.
Ma naturalmente oltre alla passione, per insegnare occorre competenza, rigore, attenzione, precisione tutti sforzi che vengono poi ampiamente ricompensati nel vedere crescere i propri allievi dal punto di vista culturale. Chi insegna, in generale, dovrebbe essere sempre entusiasta della propria materia. In particolare, chi insegna Matematica dovrebbe essere innamorato di questa affascinante materia perché solo così potrà trasmettere con passione e con gioia la bellezza di questo mondo meraviglioso.

3. Matematica

E passiamo alla successiva parola, appunto: *Matematica*
Beh, su questa parola potremmo stare a parlare per giorni e giorni (cosa che ovviamente vi risparmio), ma certo alcune considerazioni vanno fatte.
Sulla bellezza del pensiero matematico si sono già espressi i più importanti pensatori di tutti i secoli da *Aristotele* a *Platone*, da *Cartesio* a *Russell*, da *Paul Erdös* a *Harold Hardy*.
Per cui, coloro che insegnano Matematica non dovrebbero trovare difficile far risaltare questo aspetto esteriore della Matematica, attingendo abbondantemente dalle idee di questi pensatori.
D'altra parte, la Matematica attinge a piene mani dal mondo reale. David Hilbert in merito asseriva che "Tutti i problemi, dai più antichi a quelli attuali, che la Matematica affronta traggono certamente la loro origine dall'esperienza e sono sempre ispirati dal mondo reale".
Questo dovrebbe essere di grande aiuto agli insegnanti di Matematica per avvicinare la teoria alla pratica, le definizioni astratte alla realtà.

4. Tra gioco, divertimento e curiosità

La prima considerazione da fare è che l'insegnamento della Matematica, come ogni insegnamento scientifico, deve essere allegro, vivo, divertente e non pesante, freddo e formale (questo è il mio pensiero espresso con le parole di Eduard Lucas).
Ed ancora, la Matematica è una disciplina creativa e ricreativa per cui deve essere vissuta sempre come un gioco, come un divertimento.
D'altra parte, l'aspetto ricreativo e divertente della Matematica, che si manifesta in svariate forme, oggi è ormai universalmente riconosciuto come un valore pedagogico fondamentale. Come non ricordare, a tal proposito, che dal gioco dei ponti di Konigsberg è nata la topologia e la teoria dei grafi. Dal gioco delle Torri di Hanoi e dalla leggenda degli scacchi ed il faraone è nato il sistema binario e l'uso delle potenze del 2.

Ovviamente, la Matematica è un costrutto culturale e come tale il suo apprendimento richiede uno sforzo da parte del discente, l'insegnante e la sua didattica hanno il compito di rendere piacevole questo sforzo. L'insegnante deve trasmettere il piacere, il divertimento nel fare Matematica. Il *divertirsi ad imparare* è una cosa bellissima e l'insegnante che riesce in questo intento può ben dire di avere avuto successo nella sua missione.
D'altra parte, il gioco è una cosa seria, con le sue regole, le sue strategie, i ragionamenti logici. Insomma il gioco può essere facilmente paragonato agli usuali esercizi che si assegnano su determinate formule o su certi teoremi con il risultato che (soprattutto per merito del linguaggio) il gioco, a differenza degli esercizi, diverte, e ciò perché lo si vede come una sfida o anche perché molto spesso la soluzione risulta sorprendente, altro elemento che serve ad avvicinare l'allievo alla Matematica.
Vi sono moltissime persone che non amano la Matematica (come l'hanno studiata a scuola) tuttavia amano confrontarsi con indovinelli logico-matematici. Il perché può essere spiegato con il fatto che il linguaggio matematico, preciso e rigoroso, che non ammette ambiguità, rende arido e difficile l'apprendimento. Al contrario, l'indovinello, il gioco usando un linguaggio diciamo "extra matematico", pieno di oggetti, figure, animali, persone unitamente ai numeri avvicina l'aspetto teorico formale a quello concreto e reale. Ed appunto sono gli aspetti extra matematici che colpiscono la fantasia e favoriscono un emotivo coinvolgimento dell'alunno e ciò agevola l'apprendimento e accresce la motivazione allo studio della Matematica. Potremmo facilmente dire: "giocando s'impara".
Inoltre, la curiosità e talvolta l'aspetto sorprendente dei risultati sono stimoli fondamentali per far apprezzare ed amare la Matematica.
La ripetitività in Matematica, così come nella vita, annoia, quindi l'apprendimento avviene più facilmente con percorsi diversificati e con risultati sorprendenti.
Ed in effetti, molto spesso è più educativo il processo per giungere ad un risultato piuttosto che l'ottenimento dello stesso.
Naturalmente, sfruttando l'aspetto ludico, gioioso della Matematica c'è forte il pericolo di incorrere in errori ed abbagli, ma com'è noto "sbagliando s'impara" ed anzi son proprio gli errori che permettono di accumulare quell'esperienza che risulta utile per la crescita culturale del ragazzo. Dico sempre ai miei allievi che s'impara molto più da un compito che non siamo riusciti a risolvere che in 10 esercizi che abbiamo saputo risolvere facilmente.

A questo punto, in quest'ottica appare evidente che in una didattica che si proponga di far apprezzare ed amare la matematica i problemi curiosi, i quesiti stimolanti vengano ancor prima dei teoremi e delle loro dimostrazioni.

Ricordiamoci sempre che il divertimento favorisce l'apprendimento, anzi mi sento di enfatizzare questo aspetto dicendo che: *non c'è apprendimento senza divertimento e non c'è divertimento senza l'apprendimento*!

Ma come deve essere un gioco matematico (a qualsiasi livello educativo)?
- ✓ Essere accessibile alla maggior parte delle persone;
- ✓ Deve usare un linguaggio corrente, reale, attuale;
- ✓ L'enunciato deve risultare intrigante, che stimoli alla sfida ed alla riflessione;
- ✓ La soluzione deve essere sorprendente, curiosa, piacevole e semplice.

- Ma vedo che sto contraddicendo di fatto quello che ho finora detto. Sto facendo delle elucubrazioni sulla teorizzazione dell'uso del gioco, del divertimento, della curiosità nell'insegnamento della Matematica, ma non sto giocando, né vi sto facendo divertire né vi sto incuriosendo. Allora cambio completamente tenore, come farei in una classe con i miei allievi, e mi proietto su alcuni giochi (matematici) sperando di farvi divertire e soprattutto di incuriosirvi.
Prendo a questo proposito spunto dal primo gioco che sin da piccolo (penso che avessi 10/11 anni) mi fece capire quanto amassi questo tipo di attività.

<u>Il gioco delle 21 carte</u>
[Un mio vecchio zio era solito fare il gioco delle 21 carte. Egli disponeva 21 carte (siciliane o francesi) in tre gruppi (disponendole ad una ad una) e chiedeva ad uno spettatore di scegliere in mente una delle carte e di indicare solo in quale gruppo essa si trovasse. Ripeteva la disposizione per tre volte chiedendo ogni volta allo spettatore in quale gruppo si trovasse la carta già prescelta. Infine, annusando le carte ad una ad una, riusciva alla fine ad individuare la carta che lo spettatore aveva scelto]. Ricordo che, dopo averlo visto fare due volte cominciai a pensare (spiegazione del gioco):
- ✓ è chiaro che l'olfatto non c'entra nulla,
- ✓ guardando attentamente mi ero accorto che disponeva il mazzo indicato tra gli altri due;
- ✓ così pensai che dopo la prima smazzata la carta scelta si doveva trovare tra la 8a e la 14a
- ✓ mentre dopo la seconda smazzata la carta, non potendo trovarsi nelle prime due e nelle ultime due righe, si sarebbe dovuto trovare tra la 10a e la 12a
- ✓ Infine dopo la terza smazzata la carta si deve trovare tra la 11a e la 11!
- ✓ Eureka, la carta era la 11a!

E' interessante a questo punto far ripetere il gioco ai ragazzi utilizzando 39 carte. Quante volte va ripetuta la disposizione?
Ed ancora su n carte, dove n è un numero dispari multiplo di 3, ovvero $n=3(2q+1)$. Dopo un certo numero di disposizioni delle carte in tre gruppi (quante disposizioni ?) la carta prescelta sarà la numero $3q+2$. Far capire il perché.
Infine si potrebbe ripetere il gioco con 35 carte disponendole in 5 gruppi, ripetendo la disposizione tre volte, la carta si troverà al 18esimo posto. E generalizzare ai multipli dispari di 5.
Sarebbe un bel modo di studiare le divisioni con resto per provare che ad ogni distribuzione l'intervallo entro cui si trova la carta prescelta decresce fino ad essere nullo!

<u>Venerdì 17?</u>
Molto spesso ci sentiamo dire con stupore: oggi è venerdì 17!
Ma è proprio così strano che capiti di venerdì il 17 di un mese? Ovvero possiamo chiederci: vi sono anni senza alcun venerdì 17? Oppure vi sono anni con 4 venerdì 17? Ricordando che in

una settimana vi sono 7 giorni risponderemo facilmente a questo tipo di domande. In effetti, qui sono importanti i resti della divisione per 7 o per meglio dire le “classi di resto” modulo 7.
Infatti i giorni 17 di un anno sono, ordinandoli da gennaio a dicembre i giorni dell’anno numero: 17, 48, 76, 107, 137, 168, 198, 229, 260, 290, 321, 351 (nel caso non bisestile)
oppure 17, 48, 77, 108, 138, 169, 199, 230, 261, 291, 322, 352 (nel caso bisestile).
Allora, prendendo i resti della divisione per 7, ovvero in Z7, si ottengono i numeri
3-6-6-2-4-0-2-5-1-3-6-1 nel primo caso
3-6-0-3-5-1-3-6-2-4-0-2 nel caso bisestile
Poiché in entrambi i casi tutti i possibili resti appaiono ogni anno vi è almeno un venerdì 17; ed ancora poiché ogni resto appare al più tre volte non vi sono anni con 4 venerdì 17.

<u>Il mistero degli occhi azzurri.</u>
Un intrigante quesito sulla fattorizzazione degli interi è il noto “mistero degli occhi azzurri”

> Io ho 72 anni ed un giorno ho incontrato, uscendo da casa, un mio ex allievo che non vedevo da molti anni e gli ho chiesto se si fosse sposato e se avesse avuto dei figli. Egli mi rispose che si era sposato e che aveva avuto tre figli. Allora gli chiesi che età avessero i suoi figli e lui, conoscendo la mia passione da matematico, mi disse che il prodotto degli anni dei sui tre figli era la mia attuale età. Gli chiesi se poteva essere più preciso e mi rispose che la somma delle loro età era proprio il numero civico della mia casa, ma vedendo la mia faccia ancora perplessa aggiunse: “scordavo di dire che il maggiore dei miei figli ha gli occhi azzurri”. Al che sorrisi perché ormai avevo capito quale fosse l'età dei tre figli. Quali sono le età dei tre figli?

E’ chiaro che bisogna trovare tre divisori di 72 il cui prodotto dà 72.
Intanto i divisori di 12 sono {1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72} quindi ci sono queste possibilità:

1,1,72	la cui somma è	74;	2,2,18	la cui somma è	22
1,2,36	la cui somma è	39;	2,3,12	la cui somma è	17
1,3,24	la cui somma è	28;	2,4,9	la cui somma è	15
1,4,18	la cui somma è	23;	2,6,6	la cui somma è	14
1,6,12	la cui somma è	19;	3,3,8	la cui somma è	14
1,8,9	la cui somma è	18;	3,4,6	la cui somma è	13

Se il numero civico di casa mia fosse 74 o 39 o 28 o 23 o 19 o 18 o 22 o 17 o 15 o 13 avrei potuto immediatamente trovare la terna cercata (quella in corrispondenza al numero civico) , ma poiché non resto perplesso alla prime informazioni è chiaro che il numero civico di casa mia è il 14 corrispondente alle due terne 3,3,8 e 2,6,6. Quando infine ricevo l’informazione “scordavo di dire che il maggiore dei miei figli ha gli occhi azzurri” deduco che c’è un maggiore quindi la terna 2,6,6 non è compatibile con questa informazione. In definitiva i tre figli hanno età rispettivamente 3, 3 e 8 anni.

Giornate di studio dell'Insegnante di MATematica

Comunicazioni e laboratori
Scuola dell'Infanzia e Scuola Primaria

"MagicoAbaco: l'arte del calcolo veloce, preciso e consapevole" - Dal passato uno strumento per il futuro: "Il Soroban"

Elisa Passerini
Scuola Primaria IC13 Bologna

E-mail: epasserini@sapyent.com

Gian Marco Malagoli
Scuola Secondaria di Primo Grado I.C. Pacinotti San Cesario (MO)

E-mail: gmalagoli@sapyent.com

Abstract/Riassunto. *Il percorso che ci ha portati a scrivere e realizzare il progetto "MagicoAbaco" è frutto di anni di studi e di ricerche. Esperienze efficaci e significative che ci hanno condotto alla scoperta di nuove modalità d'insegnamento, che promuovono un maggior senso del numero e danno un significativo spazio alla riflessione metacognitiva sulle strategie di calcolo. Dopo un'attenta analisi della situazione generale attuale riguardante le competenze di calcolo in Italia, ci siamo resi conto che i nostri alunni si allenano maggiormente sul calcolo scritto, piuttosto che su quello a mente. Quest'ultimo, il più delle volte, assume la rappresentazione del calcolo scritto in colonna, viene visualizzato nella mente, richiedendo all'alunno uno sforzo maggiore e causando una notevole percentuale di errori. Gli obiettivi principali di questo percorso sono: 1. presentare il Soroban, abaco giapponese usato per calcolare le quattro operazioni, esponenti e radici di numeri naturali e decimali; 2. proporre una metodologia per l'uso dell'abaco che potenzi il calcolo a mente grazie all'incremento della memoria visiva; 3. suggerire una didattica della matematica in cui i percorsi tradizionali si integrino con questo nuovo allenamento.*

1. Obiettivi specifici e trasversali per rendere il "calcolo" preciso e consapevole

Destinato a bambini e insegnanti della scuola d'infanzia e primaria, il percorso di MagicoAbaco propone strategie, attività, giochi ed esercizi finalizzati allo sviluppo e al potenziamento del calcolo a mente attraverso l'uso del Soroban. Questo avviene per diversi motivi:

- si ha un incremento della memoria visiva ed uditiva;
- si promuove l'integrazione dell'uso di questo nuovo strumento con la didattica "tradizionale" promossa nelle progettazioni curricolari;
- favorisce le abilità di visualizzazione del numero, di controllo dei diversi passaggi nel calcolo, e, promuovendo attività di gioco con i numeri, incrementa un clima motivante, divertente e inclusivo.
-

Inoltre, facilita il raggiungimento di obiettivi trasversali importanti nello sviluppo di competenze in ciascun bambino, dal momento in cui si lavora sistematicamente su:

- aumento della concentrazione;
- aumento della capacità di ascolto;
- aumento della memoria a breve e lunga durata;
- sviluppo e miglioramento della psicomotricità fine;
- riflessione costante sul processo compiuto in itinere per raggiungere il prodotto richiesto;

- rispetto delle regole;
- incremento del processo di astrazione.

Può essere iniziato in qualunque momento dell'anno scolastico garantendo un'opportuna integrazione della didattica italiana con le tecniche di provata efficacia della scuola giapponese. L'allenamento prevede durante le quotidiane attività di matematica un momento breve ma specifico per: svolgere addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni con numeri naturali e decimali, fare il dettato di numeri, esercizi di visualizzazione con la tecnica Anzan, potenziare il calcolo a mente e scritto, aumentare la velocità nelle prestazioni di calcolo, ampliare i tempi di concentrazione e sviluppare la percezione di competenza nei bambini.

2. Valutare la competenza chiave europea matematica

Le Raccomandazioni del Parlamento Europeo e del Consiglio del 18 dicembre 2006 relativa alle competenze chiave per l'apprendimento permanente (2006/962ce) e le Indicazioni Nazionali per il curricolo della Scuola dell'Infanzia e del Primo Ciclo di Istruzione suggeriscono una nuova modalità di valutazione attraverso l'uso di Rubriche di valutazione. Il nostro percorso propone tabelle in cui sono già elencate Abilità e Contenuti che definiscono una o più competenze. Grazie a queste l'insegnante può elaborare rubriche di valutazione della competenza o di ogni singola abilità.

Bibliografia

D'Amore B. (2003). Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica. Bologna: Pitagora.

Butterworth B. (1999). Intelligenza Matematica: vincere la paura dei numeri scoprendo le doti innate della mente. Milano: Rizzoli Editore.

Molin, Poli, Lucangeli (2007). Bin 4-6, batteria per la valutazione dell'Intelligenza Numerica in bambini dai 4 a 6 anni. Trento: Erickson.

A.S. Bathia (2014). Japanese Abacus: Soroban Techniques. New Delhi: Regal Publications.

Grafica… mente: i grafici a volte sono bugiardi!

Gaetana Serenella Bartolomei
Liceo scientifico statale "Benedetto Croce" – Palermo
C.I.D.I. – Palermo

E-mail: serenabartolomei@libero.it

Abstract/Riassunto. *Lo scopo del laboratorio proposto è quello di fare riflettere sull'importanza di come costruire, leggere ed interpretare correttamente le rappresentazioni grafiche utilizzate in statistica, la disciplina che studia quantitativamente i fenomeni collettivamente tipici per mettere in luce le leggi e le regolarità nascoste. Dopo aver effettuato qualche cenno sulle immagini mentali e le rappresentazioni grafiche, sui punti di forza e le criticità che si possono riscontrare nei grafici e aver suggerito alcuni accorgimenti per la scelta del grafico più appropriato rispetto al carattere indagato, si mostreranno alcune tipologie di grafico, evidenziandone le differenze per aprire una riflessione sulle metodologie e le strategie che si possono adottare in aula quando si affrontano le rappresentazioni grafiche con gli studenti.*

5. Immagini mentali e rappresentazioni grafiche

Il grafico è una sintesi delle informazioni numeriche espresse mediante forme, relazioni tra dati, colori, toni, intensità, tratti, relative ad uno o più fenomeni oggetto di indagine; è utilizzato sia per scopi di presentazione sia di analisi.
Nella rappresentazione grafica vi è l'intrinseca potenzialità comunicativa di una figura: tende a richiamare i concetti con alta valenza immaginativa, in assenza di accesso lessicale, semantico e sintattico; giunge alla mente più velocemente perché segue vie differenti rispetto all'informazione testuale, verbale, numerica - la stimolazione cerebrale dell'emisfero destro elabora l'informazione visiva più rapidamente.
Anche se il metodo grafico e il metodo numerico risultano complementari tra loro e sebbene sia possibile utilizzare i grafici in modo autonomo rispetto ai dati da cui sono stati costruiti, è preferibile, in virtù del doppio codice verbale o analogico, accompagnarli con tabelle e/o brevi testi.

2. Potenzialità e criticità

I grafici hanno potenzialità investigative: permettono, infatti, un rapido confronto e favoriscono l'analisi e il ragionamento. Consentono di cogliere, con una maggiore evidenza visiva, la struttura, gli aspetti fondamentali di una distribuzione di frequenza come la tendenza, la variabilità, i valori anomali, imputabili a errori nei dati o a effettivi casi anomali da approfondire ulteriormente, la forma, le correlazioni tra caratteri aventi tra loro un legame logico. Inoltre, l'andamento di fondo di uno o più fenomeni (trend) potrebbe essere interpolabile con funzioni matematiche (ad es. retta, curva normale, ecc.).
Non bisogna dimenticare, però, che un grafico è un artefatto in cui "gli abusi" sono sempre possibili. I dati o una distribuzione statistica, sia essa semplice, doppia o multipla, possono essere rappresentati con più tipologie di grafico, pertanto occorre sapere come scegliere la rappresentazione grafica più corretta e appropriata per rappresentarli. Di contro, chi osserva un grafico dovrebbe tener presente che quel grafico è stato costruito secondo le scelte di chi lo ha realizzato e che, quindi, potrebbe evidenziare degli aspetti per fare in modo che siano guardati più di altri, distogliere l'attenzione da alcuni particolari significativi. Un grafico può essere costruito, consapevolmente o inconsapevolmente, in modo "ingannevole".

3. La scelta del grafico

In generale, un grafico deve essere chiaro e preciso e contenere le informazioni in modo semplice, accurato e completo.
Anche se le nuove tecniche informatiche offrono una grande varietà di tipologie di grafico e alcuni di essi possono apparire più accattivanti di altri, nella scelta è indispensabile rispettare i vincoli tra il tipo di rappresentazione grafica e il carattere da rappresentare.
In quest’ottica, si desidera soffermarsi sul concetto di fenomeno, sulla classificazione del carattere, sulle scale di misura: nominale, ordinale, a intervalli, a rapporti.
Inoltre, si vuole focalizzare l’attenzione sugli elementi costituitivi di un grafico: i dati, le componenti di supporto e gli elementi decorativi. I dati possono essere rappresentati con punti, linee, segmenti, figure, aree, solidi, simboli convenzionali. Le componenti di supporto consentono la comprensione dei dati: il titolo del grafico, le etichette degli assi, l’unità di misura dei dati, la griglia, la legenda, le etichette dei dati, le note e la fonte dei dati. Tali componenti sono presenti solo se necessarie. Gli elementi decorativi non sono legati ai dati.

4. I grafici in classe

Si presentano alcune delle rappresentazioni grafiche[2] più diffuse ed altre meno note, come il grafico ramo foglia[3] e il box plot[4], soffermandosi sulle loro caratteristiche e le loro differenze, in relazione al livello di misura del carattere oggetto di studio, con particolare riferimento al diagramma a barre (ortogramma, diagramma a colonne) e all’istogramma.
Successivamente, si farà una riflessione sulle metodologie e strategie che si possono adottare in aula per favorire la costruzione attiva dei concetti e si daranno indicazioni per evitare alcuni degli errori più comuni.

Bibliografia

Bartolomei, G., Giambalvo, O. (2015). *Teaching Statistics - Teaching Maths. An Experimentation Route. Poster from the 9th International Conference on Teaching Statistics*. Pheonix, USA.

Batanero, C., Burril, G., Reading, C. (editors) (2011). *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education.* Dordrecht, Springer, New Icmi Study Series, Volume 14.

Cicchitelli G., D’Urso P., Minozzo M. (2017). *Statistica: principi e metodi*. Ediz. mylab. Con aggiornamento online.

Marucci F. S. (2010). *Le immagini mentali, Teorie e processi*. Carocci editore.

Leti G., Cerbara L. (2009). *Elementi di statistica descrittiva*. Il Mulino.

Paivio A., (2014). *Mind and its Evolution: A Dual Coding Theoretical Approach*. Hoboken: Taylor and Francis.

[2] http://www.scuolavalore.indire.it/nuove_risorse/dai-dati-ai-grafici-e-ritorno/
http://www.scuolavalore.indire.it/nuove_risorse/i-grafici-questi-sconosciuti/

[3] http://www.scuolavalore.indire.it/nuove_risorse/anche-in-statistica-ci-sono-gli-alberi/

[4] http://cirdis.stat.unipg.it/files/Sperimentazione/Box-Plot.html

"Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)", n.1 Numero speciale n.2, 2018
G.R.I.M. (Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo)

Piccoli Makers nella scuola dell'Infanzia

Aurora Provito
Direzione Didattica III Circolo "Luigi Pirandello" Bagheria (PA)

E-mail: auroraprovito@gmail.com

Abstract. *Il paper descrive un'esperienza laboratoriale realizzata nella scuola dell'Infanzia con alunni di 5 anni con l'ausilio della Stampante 3D. Il framework teorico che ha permesso la progettazione dell'azione didattica, la sua attuazione in classe e l'analisi dei comportamenti dei bambini coinvolti fa riferimento al "tinkering" (Martinez & Stager, 2013).*

1. Introduzione

L'innovazione tecnologica e informatica in ambito didattico ha favorito esperienze di apprendimento significative impensabili fino a poco tempo fa per i bambini della scuola dell'Infanzia. Accanto al termine di nativo-digitali è stato da poco introdotto quello di alunni "Maker" ovvero studenti che partecipano a specifici laboratori, definiti FabLab e che si ispirano al Maker Movement (Dougherty, 2012). Il metodo di apprendimento dei FabLab, learning by doing, permette agli alunni di apprendere attraverso l'esperienza diretta, dove si impara facendo e si sperimenta ciò che si studia. In accordo con Guasti & Gori (2016) i Makers sono pertanto "artigiani digitali" o "artigiani 2.0" che progettano, realizzano e modificano gli oggetti da loro ideati, riflettono su aspetti di criticità ed errore e, là dove necessario, rimodulano il progetto di partenza per migliorarlo.

2. Il Tinkering

L'approccio metodologico *Tinkering,* utilizzato dai Makers, si basa sul trinomio "Think-Make-Improve", ovvero "pensa-crea-migliora" e consta di tre fasi: la prima fase di progettazione, la seconda di costruzione dell'oggetto e la terza di verifica. L'errore, visto fino a questo momento come elemento di fallimento, assume una valenza positiva di riflessione e riprogettazione (Guasti, & Gori, 2016).

2.1 Attività didattica realizzata

In assetto di circle-time è stata introdotta la tematica scelta tramite il racconto di una storia fantastica e coinvolgente. A questa prima fase di lavoro sono seguite le operazioni di:

THINK	MAKE	IMPROVE
• brainstorming • previsioni • organizzazione del lavoro • disegni preparatori • pianificazione	• realizzazione di oggetti per la simulazione • disegno al pc con Doodle3D , SugarCAD o Tinkercad • misurazioni • stampa in 3D	• osservazione • verifica • miglioramento dell'oggetto e del suo funzionamento

2.2 Dal disegno in 2D al disegno in 3D

Dopo aver deciso in gruppo gli elementi della storia da costruire e, guidati dall'insegnante "regista", gli alunni hanno iniziato a disegnare in 2D utilizzando il foglio cartaceo e i programmi di disegno digitali, si sono in seguito cimentati a costruire prototipi con materiale diverso (Lego, plastilina, materiale amorfo) e successivamente sono stati opportunamente guidati a lavorare utilizzando “Doodle3D”, “SugarCAD” o “Tinkercad” (software CAD ideati per bambini). In questo ambiente virtuale i piccoli Makers hanno “giocato” con le figure geometriche solide e hanno disegnato in 3D. In tal modo è stato dato largo spazio alla creatività, alla fantasia, alla motivazione, favorendo anche un apprendimento più consapevole della geometria tridimensionale.

2.3 La stampante 3D

Il disegno appena definito è stato salvato in un formato specifico, pronto per la stampa. La modellazione con la stampante ha permesso agli alunni di osservare, con interesse e grande curiosità come lentamente, uno strato (layer) dopo l’altro, l’oggetto ha preso forma acquistando l’aspetto stabilito.

3. Discussione e analisi dei risultati raggiunti

Alla luce dell’esperienza condotta è importante ribadire come la stampante 3D sia stata per i bambini un fondamentale artefatto tecnologico innovativo di lavoro e di esperienza pratica dell’apprendimento.
E’ inoltre opportuno sottolineare ancora una volta come l’intera attività laboratoriale abbia coinvolto le funzioni metacognitive e cognitive degli alunni: pensiero geometrico, pensiero critico, problem solving, memoria, abilità visuo-spaziali e altre.
Permettendo inoltre ai piccoli “maker” di confrontarsi e lavorare in un contesto scolastico in gruppo, sono coinvolte anche le abilità relazionali e le funzioni socio-cognitive.
In poche battute si può sottolineare ancora come sia stato potenziato lo sviluppo delle Competenze chiave Europee e di Cittadinanza come la “Competenza digitale” e “Imparare ad imparare” ed anche le competenze logico-matematiche, scientifiche, linguistiche e le “soft-skills”.
Si ritiene che la filosofia sottesa “Share-ing” (Guasti & Gori, 2016) favorisca il cooperative learning, la condivisione delle esperienze, il dialogo e la discussione; essa richiede responsabilità nel proprio operare, promuove il coinvolgimento e la partecipazione attiva di tutti facilitando l’inclusione.

Bibliografia

Di Stasio, M., Guasti, L., Niewint-Gori, J., & Nulli, G. (2017). Looking for Good Practices of Teaching and Learning with 3D Print in Primary School. In *Conference Proceedings. The Future of Education* (p. 148). libreriauniversitaria. it Edizioni.

Dougherty, D. (2012). The maker movement. *Innovations: Technology, Governance, Globalization*, *7*(3), 11-14.

Giofrè, D., Mammarella, I. C., Ronconi, L., & Cornoldi, C. (2013). Visuospatial working memory in intuitive geometry, and in academic achievement in geometry. *Learning and Individual Differences*, *23*, 114-122.

Guasti, L., & Gori, J. N. (2016). L’uso di Doodle3D con la Stampante 3D nella Scuola dell’Infanzia. L’esperienza di Indire.

Martinez, S. L., & Stager, G. (2013). *Invent to learn: Making, tinkering, and engineering in the classroom* (p. 237). Torrance, CA: Constructing modern knowledge press.

Sbaragli, S., & Mammarella, I. C. (2010). L’apprendimento della geometria. *Lucangeli D., Mammarella IC (2010). Psicologia della cognizione numerica. Approcci teorici, valutazione e intervento. Milano: Franco Angeli*, 107-135.

Vossoughi, S., & Bevan, B. (2014). Making and tinkering: A review of the literature. *National Research Council Committee on Out of School Time STEM*, 1-55.

Giochi matematici per lo sviluppo di competenze.

Camilla Spagnolo
Università degli studi di Urbino

E-mail: *c.spagnolo1@campus.uniurb.it*

Giorgio Bolondi
Libera Università di Bolzano

E-mail: *giorgio.bolondi@unibz.it*

Abstract/Riassunto. *Il seminario presenta l'impostazione e alcune parti di due corsi a distanza sull'utilizzo dei giochi matematici per lo sviluppo delle competenze, nell'ottica delle Indicazioni nazionali per il primo ciclo. Nelle diverse edizioni del corso sono state coinvolte diverse centinaia di insegnanti e i loro interventi nei forum di discussione collegati ai corsi sono stati fonte di riflessione e approfondimenti sulla didattica effettivamente implementata in classe, sulla percezione delle Indicazioni Nazionali, sulla accettazione delle medesime, sugli obiettivi impliciti ed espliciti su cui si organizzano i percorsi di insegnamento reali.*

1. Il corso di formazione: l'ipotesi di partenza

Il corso di formazione che presentiamo nasce da un progetto didattico sviluppato negli ultimi su una ipotesi forte. In tutte le discipline, l'utilizzo del gioco ha una potente e plurivalente funzione *tattica*: agisce sulla motivazione, facilita l'attenzione, predispone a un atteggiamento positivo, aiuta a superare le difficoltà, incentiva la collaborazione e il confronto. I giochi matematici possono avere anche una decisiva funzione *strategica*, nel senso che permettono di lavorare direttamente verso il nucleo formativo dell'insegnamento della matematica. Quando un allievo è impegnato in un'attività di giochi matematici, mette in campo tutta una serie di operazioni (esplorazione, congettura, verifica, argomentazione, individuazione e definizione di oggetti rilevanti, connessione di informazioni, generalizzazione, astrazione….) che sono, in realtà, quelle che caratterizzano ogni vera attività matematica. In questo senso, i giochi matematici sono una vera attività matematica, vera formazione al *problem solving,* concreto esercizio e sviluppo della capacità argomentativa.

2. Il legame con il curricolo scolastico

Dal punto di vista didattico, l'obiettivo del corso non è tanto quello di fornire agli insegnanti una raccolta di situazioni utilizzabili in classe, un repertorio di giochi. L'obiettivo è costruire la capacità di inserire i giochi all'interno del curricolo scolastico, collegandoli direttamente agli obiettivi e ai Traguardi per lo sviluppo delle competenze delle Indicazioni Nazionali. Nell'altra direzione, gli obiettivi delle Indicazioni Nazionali sono esaminati attraverso la lente delle domande delle prove Invalsi che li affrontano. Sono presentati in parallelo giochi e domande Invalsi, esaminando se e come il gioco permette di lavorare sull'obiettivo di apprendimento.

3. Il corso di formazione: la struttura

Il corso è proposto in due versioni (per la scuola primaria e per la secondaria di primo grado) ed è articolato in sei moduli, ognuno dei quali centrato su un nucleo formativo per l'insegnante (*Il ruolo del gioco nel curricolo matematico; La discussione matematica; La valutazione dei processi attraverso i giochi; I circuiti di giochi matematici e la partecipazione alle gare;*

Allievi diversi e diverse strategie; I giochi in una prospettiva di classe inclusiva) e su un nucleo di esempi di giochi (*Giochi geometrici; Giochi numerici; Giochi classici; Giochi argomentativi; Cambiamenti di registro e prospettiva; Giochi da gara*). Ogni nucleo contiene poi sia materiali teorici di approfondimento, sia materiali operativi.

4. La modalità di lavoro

Il corso è stato proposto in una prima versione, scandita per ogni modulo da seminari in sincrono (che comunque i partecipanti, divisi per grado scolastico, avevano la possibilità di scaricare e seguire in altri momenti) e in una successiva versione in cui i seminari erano registrati e successivamente caricati sulla piattaforma. Mentre la prima versione aveva il vantaggio di stabilire un contatto diretto tra il formatore e i partecipanti (visivo, almeno in una direzione), la seconda ha permesso di focalizzare gli interventi su quanto emergeva (in forma di domande, di proposte, di contraddittori e di discussione) nei forum. Il contatto diretto è comunque garantito dalla interazione continua sulla piattaforma, attraverso i diversi forum di discussione (in generale, almeno una ventina per ogni corso) che vengono attivati mano a mano che si procede lungo i moduli.
Ogni partecipante è poi seguito da due tutor, uno per l'assistenza per i problemi tecnici, l'altro per il vero e proprio affiancamento sui temi trattati. Il tutor ha anche il compito di aiutare lo scambio di esperienze, materiali e protocolli di allievi. Al termine di ogni modulo ogni partecipante deve superare una prova di valutazione per accedere al modulo successivo.

5. Il monitoraggio

I partecipanti vengono richiesti di un feedback continuo lungo il corso, e più strutturato al termine. La loro attività viene monitorata in maniera qualitativa attraverso la partecipazione ai forum (numero di threads proposti, numero di interventi) e l'analisi dei materiali prodotti.

Bibliografia

Pagina web di presentazione del corso: https://www.deaformazione.it/giochi-matematici/

Comprensione, rappresentazione, categorizzazione e pianificazione nel problem solving matematico. Un'esperienza didattica alla Scuola Primaria

Flavia Di Maira
Istituto Comprensivo "E. Balducci" di Fiesole (FI)

E-mail: flaviadimaira@gmail.com

Abstract/Riassunto. *Un congruo numero di bambini della scuola primaria mostra difficoltà rispetto agli apprendimenti dell'area matematica, in modo particolare nella risoluzione dei problemi aritmetici, attività che genera solitamente ansia e preoccupazione perché non esiste una procedura che, una volta acquisita, ne permette la risoluzione meccanica. La promozione di un approccio per problemi e la relativa argomentazione matematica è uno degli obiettivi educativi primari della scuola primaria non solo in Italia ma anche all'estero. Guardando al contesto nazionale, già da diversi anni, su questi ambiti vengono "valutate" le competenze dei bambini attraverso prove standardizzate come quelle INVALSI. Nel presente lavoro, a partire da un'analisi condotta su quest'ultime relative al primo ciclo, discuto gli esiti di una rilevazione fatta e quindi un'analisi degli errori rintracciati sperimentalmente*[5].

1. Presentazione del percorso sperimentale condotto in classe

L'indagine vuole sviluppare, nei bambini, le componenti cognitive implicate nell'attività risolutiva di un problema aritmetico, ovvero:

- la comprensione della situazione problema attraverso l'identificazione e l'integrazione delle informazioni verbali/aritmetiche;
- la rappresentazione dello schema;
- la categorizzazione, cioè la classificazione della struttura del problema;
- la pianificazione delle procedure e delle operazioni;
- il monitoraggio e la valutazione.

Figura 1. *Modello delle componenti delle abilità di soluzione dei problemi aritmetici (Lucangeli, Tressoldi e Cendron, 1998).*

[5] La seguente indagine sperimentala è stata condotta presso Istituto Comprensivo "G. Verga" di Canicattì in relazione al percorso di tesi di laurea (A.A. 2016/2017) per il corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria dell'Univeristà Kore di Enna. Relarore Prof. B. Di Paola.

La successiva strutturazione e la conduzione di un training atto al "superamento" di particolari errori ed ostacoli mi ha permesso di analizzare e valutare l'attività cognitiva dei bambini. Tramite il cooperative-learning e le varie discussioni condotte in classe ho cercato di migliorare l'atteggiamento dei bambini verso la matematica e di favorire in loro un migliore approccio al problem solving. Lo scopo è stato quello di mostrare che il rapporto con la Matematica e di conseguenza i risultati finali degli alunni, si possono migliorare grazie anche ad un ambiente di apprendimento cooperativo. Con queste finalità ho lavorato con due classi prese come campione, una sperimentale ed una di controllo e ho loro sottoposto uno stesso pre-test e uno stesso post-test confrontandoli successivamente tra loro. Nella scelta dei problemi ho fatto riferimento alle prove INVALSI degli anni precedenti, sia per il pre-test che per il post-test. Il progetto sperimentale, tenendo in considerazione il quadro teorico dell'INVALSI, quello di Brousseau (relativo all'analisi a-priori) e le ricerche condotte dalla Donaldson sui processi cognitivi messi in atto dai bambini in Matematica, si è articolato in tre fasi:

1. *Prima fase:* strutturazione di un pre-test, prendendo i problemi dalle Prove INVALSI analizzate in precedenza nell'analisi a-priori, per le classi II e V della Scuola Primaria in modo da valutare le loro competenze logico-matematiche e le strategie messe in atto nella risoluzione dei problemi.
2. *Seconda fase:* strutturazione di un training per potenziare le componenti cognitive relative alla risoluzione di un problema aritmetico guardando alla comprensione, rappresentazione, categorizzazione e pianificazione dello stesso.
3. *Terza fase:* strutturazione di un post-test, utile a verificare il superamento di ostacoli ed errori rilevati nel problem solving matematico.

Tutti i dati raccolti riguardanti il campione sono stati analizzati qualitativamente e quantitativamente. I vari dati raccolti mi hanno permesso di valutare le competenze in uscita nella classi quinte, le quali hanno mostrato di possedere scarse capacità di problem solving, mentre nelle classi seconde, oltre a valutare le competenze, è servito per progettare il training guidato e ragionato per la soluzione di situazioni problematiche. I dati raccolti mi hanno permesso di evidenziare particolari difficoltà degli allievi che in parte sono state "superate" con l'azione didattica realizzata ad hoc nella classe sperimentale.

Bibliografia

D'Amore, B. (2006). La matematica e la sua didattica, vent'anni di impegno. *Atti del Convegno Internazionale omonimo, Castel San Pietro Terme (BO)*, Pitagora, 23 Settembre 2006, 93-96.

D'Amore, B., Frabboni, F. (2005), *Didattica generale e didattica disciplinare: la matematica*. Milano, Mondadori.

Di Paola, B., Manno, G., Scimone, A. & Sortino, C. (2007). *La Geometria, una guida ai suoi contenuti e alla sua didattica*, (vol. 4. Insegnare matematica). Italia, Palumbo Editore.

Donaldson, M. (2012). *Come ragionano i bambini*. Milano, Spinger-verlang.

INVALSI (2017). Il *Quadro di riferimento delle prove di Matematica*. Tratto da http://www.invalsi.it/invalsi/doc_evidenza/2017/QdR2017_190417.pdf

La Ricerca-Azione per l'innalzamento delle competenze di base: esperienze laboratoriali con gli alunni della scuola primaria

Evelina Arcidiacono
Psicologa, Psicopedagogista Progetto Regionale sulla Dispersione Scolastica - U.S.R. per la Sicilia - Osservatorio di area distretto 13 c/o IC "Falcone " Palermo

E-mail: *evelinaarcidiacono@virgilio.it*

Abstract/Riassunto. *L'esperienza che si intende narrare, si riferisce ad un progetto che si è sviluppato nel corso dell'anno scoalastico 2017-2018, all'interno delle attività programmate dall'* Osservatorio di area sui fenomeni di dispersione scolastica e per la promozione del successo formativo" *distretto 13",che insiste su aree a forte rischio di emarginazione sociale ma che vede presenti anche docenti di Istituti scolastici afferenti zone della città con connotazione socio-economica medio-alta. Infatti, all'interno delle attività di Ricerca – Azione relative all'innalzamento delle competenze di base è stato organizzato un percorso* ***specifico di matematica in*** *collaborazione con l'Università agli studi di Palermo.*

1. R-A "Matematica in gioco…tra metafore e analogie"

Già da tempo, all'interno Progetto Regionale contro la dispersione scolastica e degli Osservatori di Area, si sono implementate attività di Ricerca – Azione finalizzate alla prevenzione della dispersione scolastica ed a sostegno del successo scolastico e formativo di tutti gli alunni.

Tali attività hanno visto, in alcuni casi, la condivisione delle esperienze formative dirette ai docenti con le Università (sia Siciliane che di altre realtà nazionale ed internazionali) al fine di rinforzare i percorsi formativi secondo la logica della specificità delle competenze e della corresponsabilità nel raggiungimento degli obiettivi.

L'esperienza che si intende raccontare nel convegno in oggetto, si riferisce ad un progetto che si è sviluppato nel corso dell'anno scoalastico 2017-2018 all'interno delle attività programmate dall' Osservatorio di area *sui fenomeni di dispersione scolastica e per la promozione del successo formativo*" Distretto 13 che insiste su aree a forte rischio di emarginazione sociale ma che vede presenti anche docenti di Istituti scolastici afferenti zone della città con connotazione socio-economica medio-alta.

Infatti, all'interno delle attività di Ricerca – Azione relative all'innalzamento delle competenze di base è stato organizzato un percorso **specifico di matematica in** collaborazione con l'Università agli studi di Palermo.

Il *progetto "Matematica in gioco…tra metafore e analogie"* ha coinvolto: 15 scuole, 74 docenti dell'area scientifico-matematica delle classi 1^ e 2^, in servizio presso le scuole primarie, 367 alunni, 4 operatori psicopedagogici dell'osservatorio, 3 esperti di matematica.

Nello rispetto del dispositivo di R-A, il disegno quasi sperimentale con campione unico ha utilizzato il testing con le modalità test-retest per la validazione dell'efficacia dell'esperienza (**verranno riportati, nel corso del convegno, i dati del suddetto testing (AC MT ed. Erikson) e le riflessioni del gruppo dei docenti rispetto i punti di criticità dell'attuale panorama metodologico- didattico relativo alla matematica**.

Il principio che ha sostenuto tutto il percorso formativo nasce dall'idea che dentro le competenze strumentali come contare, eseguire operazioni aritmetiche, leggere dati, misurare una grandezza, calcolare una probabilità, è sempre presente un aspetto culturale, che collega tali competenze alla storia della nostra civiltà, alla complessità dei contesti di vita delle persone, alla dimensione affettivo relazionale degli alunni nel gruppo-classe. Le suddette condizioni possono facilitare gli apprendimenti e renderli significativi o contrastarli a discapito del successo scolastico e formativo degli alunni.

Da qui la necessità di promuovere le competenze socio-affettive del gruppo-classe al fine di rendere gli apprendimenti significativi e, al contempo, acquisire un metodo condiviso di progettazione e valutazione per competenze utilizzando un approccio metodologico di tipo laboratoriale, che metta al centro dell’attenzione lo studente e che risulti sintonico con gli aspetti neuro-biologici e cognitivi tipici dell’età evolutiva.

Lo sviluppo delle **competenze chiave di cittadinanza quali:** imparare ad imparare, progettare soluzioni**,** collaborare e partecipare nel lavoro di gruppo gestendo eventuali conflitti diviene lo sfondo/obiettivo trasversale che consentirà agli alunni di potere acquisire le **competenze disciplinari** inerenti l’asse matematico-scientifico quali: osservare, descrivere e analizzare fenomeni reali, naturali e artificiali - analizzare dati ed interpretarli anche con l’ausilio di rappresentazioni grafiche etc…

Il lavoro proseguirà anche per l’anno scolastico 2018-2019 e verrà ampliato includendo anche i docenti e i bambini della scuola dell’infanzia, nella convinzione che l’intervento precoce dedicato a tutti i bambini, e in special modo quelli che vivono nelle cosiddette aree a rischio di marginalità sociale, agirà da “fattore protettivo” relativamente alle variegate difficoltà che gli studenti potranno incontrare nel corso della loro esperienza scolastica ma , soprattutto, nel corso della loro vita.

"Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)", n.1 Numero speciale n.2, 2018
G.R.I.M. (Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo)

Giochiamo con acqua e zucchero!

Daniela De Simone
I.C. VIA TRIONFALE di ROMA

E-mail: *daniela.desimone1@istruzione.it*

Abstract/Riassunto. *L'articolo descrive un laboratorio proposto in classe prima di scuola primaria a partire dalla rielaborazione di un quesito a risposta chiusa relativo alle soluzioni chimiche. Il laboratorio, durante il quale i bambini sono stati stimolati a formulare ipotesi a partire dall'esperienza personale e ad argomentarle, ha consentito di guidarli alla comprensione del concetto di proporzionalità inversa attraverso la rielaborazione del quesito iniziale in chiave di geometria piana.*

1. Dall'esperienza-gioco con le soluzioni chimiche ai rapporti di proporzionalità inversa

Negli ultimi anni, spinta dalla lettura dei quasi strabilianti risultati raggiunti in matematica dagli studenti cinesi nelle rilevazioni internazionali, mi sono interessata ai metodi didattici utilizzati in Cina per l'insegnamento nella scuola primaria. Sulla scia di questo interesse ho avuto modo di analizzare i volumi "*The Shanghai Maths Project*", pubblicati recentemente in Gran Bretagna a conclusione di un progetto di ricerca didattica sui metodi cinesi e che rappresenta un adattamento per il curricolo inglese di uno dei libri di testo maggiormente utilizzati nelle scuole primarie di Shanghai.
All'interno di tali volumi hanno particolarmente attirato la mia attenzione alcune fra le proposte definite "Challenge and extension question", che ho deciso di trasformare da semplici quiz a risposta chiusa a veri e propri laboratori didattici atti a permettere ai bambini di fare esperienza diretta di "fatti matematici" e di collegare matematica e realtà, in un apprendimento altamente significativo.
In particolare, il laboratorio "Giochiamo con acqua e zucchero!" è stato proposto a febbraio in una classe prima primaria a partire dal quesito seguente ed ha avuto una durata di circa due ore.

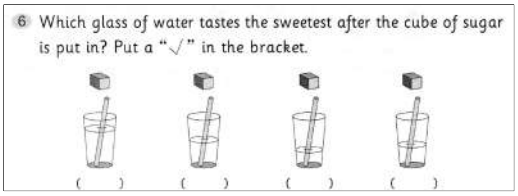


Figura 1. *Esercizio tratto da* **"***The Shanghai Maths Project" Vol. 1, p. 26*

Nel progettare il laboratorio ho innanzi tutto deciso di semplificare il quesito riferendolo a soli tre bicchieri disposti in ordine crescente e di rielaborare il testo, con l'obiettivo di utilizzare una rappresentazione ed un linguaggio facilmente accessibili ai bambini.

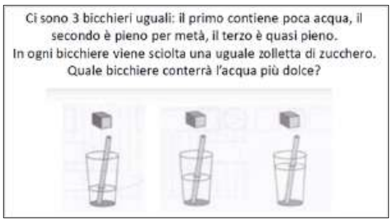


Figura 2. *Rielaborazione del quesito*

Ho proiettato il quesito così rielaborato alla LIM, invitando i bambini a formulare ipotesi e ad argomentare il proprio pensiero facendo ricorso all'esperienza pregressa. I bambini, entusiasti e motivati, hanno elaborato ipotesi diverse: inizialmente quasi tutti i bambini avevano ipotizzato che il bicchiere contenente l'acqua più dolce fosse "Il bicchiere pieno, perché c'è più acqua", secondo M. "Il bicchiere con poca acqua, perché se c'è tanta acqua lo zucchero si scioglie, invece se c'è poca acqua lo zucchero non si scioglie", secondo V. "Il bicchiere con poca acqua, perché se metti la stessa zolletta in un bicchiere pieno lo zucchero si espande e non si sente tanto", dopo tale argomentazione tanti compagni hanno cambiato idea, allineandosi a questa risposta.

Considerando l'età dei miei piccoli alunni e il fatto che si trattava di una delle nostre prime "avventure matematiche", ho accolto con la stessa attenzione e serietà tutte le ipotesi, anche quelle non chiaramente argomentate (es. "Il bicchiere al centro, perché lo zucchero galleggia un po' e non si scioglie") o quelle evidentemente lontane dall'approccio matematico che intendevo sollecitare (es. "Se l'acqua è poco dolce però è meglio perché non ti vengono le carie"…e dopo tale affermazione i compagni manifestano piena approvazione!). La ragione di tale scelta sta nella volontà di valorizzare la partecipazione piuttosto che la correttezza dei contenuti, per tenere accesa nei bambini la fiamma della motivazione che sta alla base di qualunque apprendimento: mi sono detta "Avremo tempo per dirigerci insieme sulla via della pertinenza, per ora è importante sostenere la vostra voglia di mettervi in gioco!".

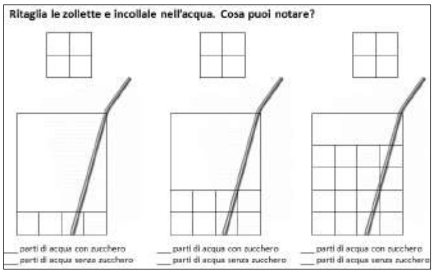


Figura 3. *Rappresentazione geometrica del quesito*

Per sollecitare l'analisi degli aspetti matematici del quesito, ne ho proposto una rappresentazione geometrica piana in termini di rapporto fra aree, atta a favorire l'intuizione del rapporto tra quantità di acqua e di zucchero espressa in termini di "parti": diversi bambini durante l'attività chiedevano più zucchero perché volevano coprire tutta l'acqua contenuta in ciascun bicchiere; dopo aver incollato le tre zollette nei bicchieri tutti i bambini non hanno avuto più dubbi su quale fosse il bicchiere contenente l'acqua più dolce! E' seguita una fase di confronto collettivo per puntualizzare il concetto di proporzionalità inversa, naturalmente con un linguaggio adatto all'età dei bambini.

Non poteva mancare la verifica pratica con assaggio… la parte che ai bambini è piaciuta di più!

Avendo realizzato il laboratorio in prima, non ci siamo avventurati sul sentiero della rappresentazione dei rapporti in termini di frazioni, ma di sicuro quando saremo in terza riprenderò la nostra avventura matematica per proseguirla in questa direzione.

Bibliografia

AA.VV. (2015).*The Shanghai Maths Project for the English National Curriculum Vol. 1*. Londra: Collins.

"Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)", n.1 Numero speciale n.2, 2018
G.R.I.M. (Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo)

In arte… matematica!

Luca Crivelli
SUPSI – Dipartimento Formazione e Apprendimento di Locarno (Svizzera).

E-mail*:* *lcrivelli@supsi.ch*

Silvia Fioravanti
SUPSI – Dipartimento Formazione e Apprendimento di Locarno (Svizzera).

Vanessa Henauer
SUPSI – Dipartimento Formazione e Apprendimento di Locarno (Svizzera).

Abstract/Riassunto. *Matematica e arte: due mondi apparentemente distanti, ma in realtà con tanti punti in comune che possono essere sfruttati per proporre attività e percorsi interdisciplinari particolarmente motivanti e coinvolgenti. Nel laboratorio verranno presentate alcune proposte didattiche relative ad alcuni fra i più grandi artisti e movimenti artistici: le linee di Kandinsky, la simmetria di Haring, i numeri nascosti nei quadri, le geometrie di Max Bill, le tassellazioni di Escher. … Ogni proposta didattica è introdotta da una spiegazione sulla vita dell'artista a cui fa riferimento. Durante il laboratorio sarà possibile sperimentare in prima persona le attività, confrontandosi con gli insegnanti che le hanno già proposte in classe.*

1. Matematica e arte: un incontro necessario

Se le si confronta senza pensarci troppo, la matematica e l'arte sembrano due mondi decisamente distanti. L'artista, nell'immaginario comune, è colui che fa della propria creatività una missione, e si esprime in maniera personale e appassionata. Una persona con la testa fra le nuvole, a volte persino un po' bizzarra, che risponde all'urgenza di creare e di esprimersi attraverso le proprie opere. Il matematico, al contrario, è ritenuto essere più logico, freddo, razionale. Applica tecniche, piuttosto che sperimentarne di nuove. Lavora fra numeri, figure, e grandezze, in un mondo asettico e privo di colori.
Se ci si riflette con più attenzione, invece, ci si può rendere facilmente conto che questi non sono altro che pregiudizi. L'arte e la matematica hanno sempre dialogato a fondo, e in maniere differenti. Odifreddi (2011) ha evidenziato come questi incontri possano avvenire su tre diversi livelli: la matematica come oggetto dell'arte (l'artista dipinge o realizza opere d'arte il cui soggetto è un numero, una figura, un qualsiasi oggetto legato alla disciplina), la matematica come linguaggio dell'arte (per comporre le opere l'artista utilizza enti o figure geometriche, oppure numeri) e la matematica come struttura dell'arte (alcuni concetti propri della matematica, come per esempio la proporzione o la resa prospettica, aiutano l'artista a realizzare l'opera).
Partendo da questi presupposti, e considerata la passione che gli autori hanno sempre nutrito nei confronti di pittura e scultura, negli scorsi anni è stata avviata una sperimentazione di attività interdisciplinari progettate per ogni livello di scuola primaria. Il risultato è un libro di prossima pubblicazione a uso degli insegnanti del Canton Ticino, in Svizzera, e una raccolta di spunti didattici in cui i concetti matematici vengono affrontati con creatività, in un contesto giocoso e motivante.

2. Breve panoramica delle attività proposte

Nel laboratorio sono presentate otto attività legate ad altrettanti artisti o movimenti pittorici.

Numero aureo e proporzioni divine. Il numero aureo, legato alla successione di Fibonacci, da secoli affascina scienziati e artisti per le sue caratteristiche uniche. I pittori si ispirano a esso per realizzare opere ritenute esteticamente perfette, perché costruite secondo proporzioni ben precise. In questa postazione sono presentate attività didattiche sulla successione di Fibonacci, sul numero aureo e sulle sue magiche proprietà.

A caccia di numeri. In alcune opere d'arte, i numeri sono i veri protagonisti. In altre, i numeri sono nascosti e vanno cercati. In questa postazione, pensata per gli allievi più giovani, si propone la ricerca e l'identificazione di cifre e numeri all'interno di opere d'arte più o meno famose.

Le linee di Mirò e Kandinskij. Le opere astratte dei due celebri artisti sono costruite accostando macchie, figure e linee di vario genere. In questa postazione si propone un'attività in cui i bambini sono chiamati a utilizzare dei dadi per stabilire casualmente quali tipi di linea utilizzare per realizzare opere d'arte di ogni genere. Un'occasione per riprendere (o per scoprire) la classificazione delle linee.

Ritratti di Picasso. I ritratti del celeberrimo artista spagnolo affascinano perché i soggetti si scompongono e si ricompongono, come se fossero osservati da diversi punti di vista. Utilizzando i dadi e delle semplici istruzioni, in questa postazione si realizzano dei ritratti ispirati a quelli dell'artista, accostando figure geometriche di ogni tipo.

Le tassellazioni di Escher. Il grafico e incisore olandese si sentiva più vicino a un matematico che a un artista. Molte delle sue opere sono tassellazioni, frutto di studi approfonditi di carattere prettamente scientifico. In questa postazione viene spiegato come è possibile modificare un poligono che tassella, al fine di trasformarlo in una figura più o meno astratta, che è possibile utilizzare un numero infinito di volte per ricoprire il piano.

Le simmetrie di Haring. Il pittore statunitense è celebre per i suoi personaggi stilizzati e colorati, ritratti in posizione buffe e non convenzionali. In questa postazione, i suoi soggetti vengono riprodotti secondo le regole della simmetria assiale, utilizzando piccoli stratagemmi come specchi e strumenti più inusuali, come le scatole di CD.

Le geometrie di Max Bill. Il grafico e pittore svizzero era un vero e proprio maestro nel realizzare opere accostando poligoni e segmenti. Nella postazione, viene proposta un'attività legata all'osservazione di alcune sue opere, che devono in un secondo tempo essere riprodotte in scala, in modo da mantenerne quindi invariate le proporzioni.

Gli origami di Yoshizawa. È grazie al maestro giapponese Yoshizawa se oggi tutti noi possiamo utilizzare un linguaggio simbolico comune per realizzare gli origami a partire da un modello. Piegando la carta, si allenano le capacità di visualizzazione e di orientamento spaziale, ed è possibile incontrare numerose figure proprie della geometria del piano o dello spazio. In questa postazione, vengono proposti alcuni origami creati da Yoshizawa, particolarmente geometrici.

Bibliografia

D'amore, B. (2015). *Arte e matematica.* Roma: Dedalo.

Dussutour, O., Guéry, A. (2012). *123 d'arte. Numeri nascosti nei quadri*. Modena: Franco Cosimo Panini.

Yoshizawa, A. (2015). *L'arte dell'origami*. Vercelli: Nuinui.

Youtube. (2011, giugno 27). Piergiorgio Odifreddi: Matematica e arte. [File video]. Tratto da https://www.youtube.com/watch?v=lo68B9kGw8s .

Che cosa mangi a merenda?

Stefania Macaluso, Chiara Maria Sara Milano, Teresa Ciancimino, Eleonora Di Vitale, Maria Anna Pascali, Rosalia Gebbia, Orsola Traina, Rosa Lo Bello, Emila Graziano, Teodora Licata
Istituto Comprensivo Statale "Giovanni Falcone" Palermo

E-mail: *macaluso_stefania@libero.it*

Abstract/Riassunto. *Il contributo discute l'esperienza di ricerca/azione condotta nell'anno scolastico 2017/2018 nelle classi prime, seconde e quarte di scuola primaria dell'I.C.S. "G. Falcone" di Palermo, una delle due istituzioni scolastiche operanti nel quartiere Zen. Dopo una breve descrizione del compito di realtà proposto, legato alle abitudini alimentari degli alunni, e una sintesi degli esiti raggiunti, si presenta un'attività laboratoriale finalizzata ad incoraggiare l'adozione di efficaci strategie metodologiche nell'ambito teorico della statistica, spesso trascurata e/o sottovalutata nei libri di testo della scuola primaria. Come si mostrerà, invece, la statistica deve rappresentare un contesto di competenze "importante" al fine di sviluppare una lettura critica della realtà.*

1. Un percorso educativo-didattico per educare ad una corretta alimentazione

Il progetto è stato realizzato allo scopo di educare ad una corretta alimentazione attraverso un percorso di indagine statistica condotto con gli alunni. Si è partiti dalla rilevazione e la registrazione attraverso una tabella a doppia entrata dei dati relativi alle merende consumate durante la ricreazione scolastica, per giungere alla costruzione di un grafico a barre la cui lettura ha condotto gli alunni a una consapevolezza delle proprie abitudini alimentari. Le attività laboratoriali, che nella prima fase si sono svolte nelle singole classi, sono culminate in due momenti di condivisione collettiva in cui gli alunni hanno potuto sperimentare scelte nutrizionali adeguate. L'intervento ha adottato l'approccio matematico caratterizzato dalla problematizzazione della realtà proponendo un compito autentico, che da una parte ha motivato gli alunni, dall'altra li ha stimolati al ragionamento e allo sviluppo di competenze spendibili nei diversi contesti di vita. Inoltre il percorso è stato pensato nell'ottica della verticalità, in quanto il punto di arrivo può diventare il punto di partenza di nuovi interventi sempre più significativi dal punto di vista dei traguardi raggiungibili.

1.1 Uso dei dati Istat per la realizzazione di differenti tipi di grafici

Si proporrà di costruire, partendo dalla lettura di dati dedotti dalla banca dati dell'Istat, di realizzare e interpretare grafici differenti in relazione alla tipologia dei dati raccolti e analizzati. Tra i grafici proposti, particolare attenzione sarà posta al tipo di *grafico ramo foglia* che per quanto detto in precedenza si presta ad un utilizzo in un'ottica verticale in più classi di scuola primaria e non è quasi del tutto affrontato nei libri di testo dello stesso ciclo scolastico. In quest'ottica il contesto teorico al quale si farà riferimento è quello del M@tabel.

Ringraziamenti

Si ringrazia il Comune di Palermo per aver devoluto il 5x1000 all'osservatorio del tredicesimo distretto per la formazione docente e la dirigente Prof.ssa Daniela Lo Verde per averci offerto la possibilità di sperimentare quanto appreso all'interno delle nostre classi.

Bibliografia

Arzarello, F., & d'Alba, V. (2009). La Matematica per il Cittadino. In *GRIMED 16* (pp. 11-22): Pitagora Editrice.

D’Amore, B. (2005). Pratiche e metapratiche nell’attività matematica della classe intesa come società. *La matematica e la sua didattica*, *3*, 325-336.

D’Amore, B., Di Paola, B., Pinilla, M. I. F., Monaco, A., Bolondi, G., e Zan, R. (2013). *La didattica della matematica: strumenti per capire e per intervenire*. Bologna: Pitagora Editrice.

Arrigo, G., Maurizi, L., Minazzi, T., & Ramone, V. (2008). Combinatoria Statistica Probabilità: Pitagora Editrice.

Giochiamo con il mostro a quattro mani

Pia Barbanera
Istituto Comprensivo Tommaseo Torino – Scuola primaria "Francesco d'Assisi"

E-mail: barbanera.pia@gmail.com

Paola Foradini
Istituto Comprensivo Tommaseo Torino – Scuola primaria "Francesco d'Assisi"

Abstract/Riassunto.

In questo seminario si racconterà la sperimentazione del progetto "Per contare" proposto dalla Fondazione Asphi e dall'Università di Modena e Reggio Emilia, con la guida alle attività della ricercatrice Baccaglini Frank, e attuata da noi nella nostra scuola. Durante la sperimentazione siamo rimaste molto colpite dai risultati positivi avuti con l'attività per il calcolo mentale "composizione e scomposizione 5", che ha aiutato i bambini ad apprendere strategie di calcolo mentale usando il 5, propedeutiche a calcoli più complessi presenti in altre attività del progetto. Usando le cannucce, punto cardine del progetto, e immaginando un essere fantastico dotato di 4 mani, abbiamo spinto i bambini a formare fascetti da 5 cannucce, invitandoli a contare come se loro stessi avessero 4 mani.

1. Introduzione

Cinque anni fa, noi insegnanti con le nostre due classi prime, abbiamo aderito al progetto "Per contare" (http://percontare.asphi.it/) e sperimentato con i bambini le proposte ricevute. Tra i lavori proposti dal progetto vorremmo descrivere "composizione e scomposizione 5", (attività consultabile sul sito, nella sezione "guida alle attività per la matematica - classe prima", da un utente registrato). Tale attività è molto utile per il calcolo mentale e per le ripercussioni che abbiamo riscontrato nei ragionamenti dei bambini negli anni successivi alla prima. L'attività ci riporta all'uso delle mani prima e all'uso delle cannucce dopo. L'idea è di abituare i bambini ad immaginarsi i numeri come una scomposizione formata sempre dal 5. Le nostre mani hanno 5 dita ed è semplice scomporre i numeri dal 6 al 10; il difficile inizia quando si cominciano ad usare i numeri oltre il dieci: qui il progetto prevede l'uso di un artefatto detto "contamani". Noi invece abbiamo pensato di intervenire con un gioco fantastico in cui un mostro a 4 mani aiuta i bambini a fare i calcoli.

2. Il mostro a 4 mani, perché

Quando ci hanno proposto l'attività noi avevamo già formalizzato la decina come fascetto formato da 10 cannucce legate e ci siamo poste il problema di non creare confusione con il nuovo artefatto "fascetto da 5". Ci è venuta quindi l'idea di creare una nuova situazione per spingere i bambini ad immaginarsi di usare le dita di 4 mani anziché di 2. In questo modo abbiamo proposto un approccio ludico al problema, che portasse i bambini al sapere matematico partendo da un apprendimento di tipo informale e contemporaneamente abbiamo offerto ai bambini l'opportunità di lavorare con il proprio corpo e successivamente con una sua estensione (i fascetti da 5). Il lavoro è stato strutturato così:

Prima fase:

Abbiamo proposto alla classe il calcolo 5 + 7 e subito i bambini hanno cercato di fare i calcoli aiutandosi l’un l’altro con le mani o memorizzando la decina. Da qui siamo passati ad un racconto di un mondo fantastico dove esisteva un mostro matematico con 4 mani che riusciva a fare questo calcolo usando tutte le sue dita. L’insegnante ha poi interpretato il mostro con l’aiuto di un bambino, infilando le sue braccia sotto le ascelle del bambino e coprendosi il volto, ed ha eseguito vari calcoli del tipo proposto.

Figura 1. *Il mostro a 4 mani*

Il gioco ha divertito molto i bambini che erano più interessati al mostro, ai versi dell’insegnante, al bambino partecipante al gioco, che al calcolo vero e proprio. Le risate sono esplose quando il mostro ha cominciato ad usare le sue mani in un modo non pertinente alla matematica, toccandosi le orecchie, grattandosi la testa e facendo gesti inusuali per un mostro matematico educato.

Seconda fase:

I bambini in coppia, usando le mani di entrambi, hanno risolto una serie di calcoli, entro il 20, come per esempio le seguenti somme e differenze: 7+4 = …, 7+6 = …, 12+ 4 =…, 12 - 5 =…, 20 – 6= … Ad esempio per la somma 7 + 6, inizialmente è stato rappresentato ogni addendo usando le 4 mani, (fig. 2a), poi, unendo due mani intere, si è formata una decina (fig. 2b) e si è letto il risultato.

Figura 2a. *Il mostro si prepara a calcolare 7+6*

Figura 2b. *Il mostro ha completato il calcolo*

Terza fase :

Dalle mani si è passati all’artefatto “fascetti da 5 cannucce” pensandoli proprio come le 4 mani già sperimentate. Da questo momento tutti gli esercizi di calcolo sono stati fatti usando le cannucce. In seguito il fascetto decina è stato pensato non come 10 ma come 5 + 5.

3. Brevi Conclusioni

Le attività svolte sono state riprese con una videocamera e verranno presentate al seminario commentando i risultati realmente raggiunti. Saranno mostrati bambini che, anche con difficoltà di apprendimento, risolvono calcoli con i fascetti da 5, sottolineando come l’attività sia risultata fortemente inclusiva.

Bibliografia

Baccaglini-Frank, A., & Bartolini Bussi, M.G. (2012). *The PerContare Project: Proposed Teaching Strategies and Some Developed Materials.* 36th Annual IARLD Conference, Padova (Italy), June 7-9.

Baccaglini-Frank Università di Modena e Reggio Emilia *,” Usare le mani e le cannucce in aritmetica”*

Baccaglini-Frank, A., & Scorza, M. (2013) *“Gestire gli studenti con DSA in classe uso delle mani e della linea dei numeri nel progetto PerContare*”. In C. Cateni, C. Fattori, R. Imperiale, B. Piochi, e P. Vighi, Quaderni GRIMeD n. 1, 183-190. ISBN 8837118813.

Baccaglini-Frank, A., Bartolini Bussi M.G. , Ramploud, A. (2013). *Aritmetica in pratica. Strumenti e strategie dalla tradizione cinese per l'inizio della scuola primaria.* Erickson ISBN: 9788859003281.

Conosco il mio tempo: giochiamo con la statistica

Ilaria Bongiovanni
Istituto Comprensivo Ignazio Florio San Lorenzo, Palermo

E-mail: *bongiovanni.ilaria@jahoo.it*

Rosalia Enea
Istituto Comprensivo Ignazio Florio San Lorenzo, Palermo

E-mail: *rossellaenea@gmail.com*

Abstract/Riassunto. *La ricerca-azione(R/A) qui discussa, è nata grazie ad una serie di riflessioni sorte durante il corso organizzato dall'USR dal titolo "Matematica in gioco", finalizzato ad inquadrare la matematica secondo una dimensione di tipo ludico-sociale. Durante il corso, una delle criticità rilevate, ha fatto riferimento nello specifico alla situazione molto lacunosa della statistica nella scuola primaria. Si è notato infatti che i libri di testo non sempre affrontano questo ambito disciplinare in maniera adeguata, di contro, le prove Invalsi, propongono una serie di input di tipo statistico che i bambini non sempre riescono ad affrontare e risolvere. Alla luce di tutto ciò la R/A si è inserita in un percorso didattico già messo in atto dall'inizio dell'anno che trasversalmente ha coinvolto più discipline e più insegnanti, uscendo così dagli schemi rigidi, spesso tipici della scuola ed in modo particolare dell'insegnamento della matematica.*

1. "Ludica…mente"

Sappiamo bene che l'apprendimento consiste nell'acquisizione o nella modifica di conoscenze relazionali, sociali e valoriali riguardanti diversi ambiti. Ed è più che risaputo come esso possa essere profondamente differente a seconda del contesto in cui si verifica. Molti studi hanno evidenziato come il bambino sia in grado di apprendere più facilmente se si trova in una condizione di benessere psicofisico e in un ambiente che risponda ai suoi bisogni di gioco e di attenzioni positive. Ciò detto, durante l'anno scolastico sono state privilegiate attività volte a valorizzare la centralità del corpo nello spazio giocando con la matematica in contesti significativi e reali, favorendo l'assetto ludico-pratico. Abbiamo, altresì, cambiato approccio e invece di porre problemi e chiedere soluzioni, abbiamo noi stesse fornito agli alunni risultati e risposte, chiedendo agli stessi di risalire alle procedure risolutive. Questa modalità di intervento, fuori da schemi rigidi, ha permesso di rendere la matematica concreta e piacevole e di incrementare legami collaborativi e scambi empatici, migliorando le relazioni e consentendo l'inclusione di tutti i componenti del gruppo classe. In questo scenario si è inserita la statistica anche attraverso l'osservazione e lo studio del tempo ciclico e meteorologico.

2. La casa del tempo

In assetto laboratoriale è stato realizzato dai bambini un grande cartellone a forma di casa che gli stessi hanno chiamato "*La casa del tempo*". Questa ha permesso di monitorare il trascorrere del tempo ciclico (giorni della settimana, mesi dell'anno e stagioni) e la registrazione del tempo meteorologico osservato quotidianamente. Grazie all'utilizzo di questo artefatto, partendo dalla curiosità innata dei bambini stessi, in classe sono stati realizzati con la guida delle insegnanti grafici per comparare il tempo meteorologico di due stagioni a confronto e le differenze climatiche riscontrabili in altri paesi del mondo. In particolare di Zurigo, città "fisicamente" molto diversa dalla nostra. L'esperienza vissuta ha permesso una riflessione sulla variabilità del tempo e delle condizioni metereologiche sganciate dal *qui ed ora*. Ogni mattina, a turno, gli alunni si sono dedicati all'osservazione del tempo meteorologico, alla modifica dei dati (grazie a freccette e pedine mobili) e alla registrazione di questi sulle pagine del calendario. I bambini, in assetto circolare, hanno avuto modo di esprimere liberamente opinioni e fare considerazioni, usufruendo dell'impalcatura di sostegno (Vygotskij, 1973) fornita dai compagni che di volta in volta si sono posti come "esperti". Si è favorite così la partecipazione di tutti in un'ottica inclusiva all'interno di uno spazio per la riflessione e il confronto. Tale spazio è stato luogo privilegiato per lo sviluppo del *Pensiero Narrativo,* soggettivo e interpretativo che è alla base della formazione dell'identità del Sé (Bruner, 1991). Dare l'opportunità ai bambini di raccontarsi, esprimere se stessi anche grazie all'indagine statistica condotta in classe è risultato molto produttivo e stimolante e ha permesso loro di acquisire sicurezza, affinare le modalità comunicative, arricchire il lessico e ancor di più imbastire relazioni di interscambio positivo in un clima empatico e rispettoso del pensiero altrui, caratteristiche funzionali alla crescita armoniosa di ogni bambino. *"Le interazioni sociali calorose, empatiche e amorevoli sono in effetti una delle leve più importanti per il pieno sviluppo dell'intelligenza umana[…] Esse dovrebbero diventare il denominatore comune universale di ogni proposta educativa che voglia far sviluppare e rispettare le piene potenzialità umane".* (Alvarez, 2018).

Bibliografia

Alvarez, C. (2017). *Le leggi naturali del bambino*. Edizioni Mondadori.

Bruner, J. (1991). *La costruzione narrativa della realtà. Rappresentazioni e narrazioni*, 17-42.

Vygotskij, L.S., Costa, A.M, Veggetti, M.S., Costa, A.F., & Gatti, M.P. (1973). *Pensiero e linguaggio*. Giunti-Barbèra.

Ludomatica

Maria Antonella Gugino
Scuola Primaria "Ragusa Moleti" di Palermo.
Facoltà di Scienze della Formazione Primaria - UNiPa.

E-mail: antonellagugino@yahoo.it

Abstract/Riassunto. *Progetto extracurriculare dedicato ai bambini della seconda classe di scuola primaria avente l'obiettivo di stimolare la formulazione del pensiero degli alunni, attraverso l'espressione artistica e l'indagine filosofica. La successiva organizzazione dei concetti espressi è stata ottenuta, applicando il metodo logico-matematico precedentemente sperimentato nel laboratorio di Didattica della Matematica, ove l'autore dell'articolo ha svolto l'attività di tutoraggio.*

1. Obiettivi e razionale

L'obiettivo principale del progetto consisteva nel far leva sulla motivazione, ottenuta attraverso il gioco al fine di potenziare il coinvolgimento e l'apprendimento in situazione.
Le tematiche trattate sono state l'insegnamento della matematica , il potenziamento del ragionamento, il rispetto e la collaborazione con l'altro.
Il progetto è stato condotto sia indoor che outdoor , utilizzando aula multimediale, laboratorio e giardino della Scuola .

2. Organizzazione delle attività

Ogni incontro è stato composto da tre fasi:
-Nella prima fase, gli alunni, suddivisi in gruppi, hanno realizzato dei poster su contenuti matematici con diverse tecniche grafiche (simmetrie,calcolo,forme geometriche).
-Nella seconda fase, gli alunni sono stati coinvolti in attività motorie a sfondo prettamente matematico, utilizzando il corpo e gli operatori logici (classificare,confrontare , mettere in relazione)
-Nella terza fase è stato dedicato ampio spazio all'incremento delle abilità del pensiero critico facendo ricorso al metodo circle-time e i bambini si sono posti domande, hanno formulato problemi , addotto ragioni e proposto soluzioni.
-Nell'incontro conclusivo , gli stessi bambini hanno svolto il ruolo di insegnanti aventi come alunni i propri genitori, coinvolgendoli nei giochi matematici ed esprimendo così una maggiore socializzazione.

3. Conclusioni

La sperimentazione di un approccio multidisciplinare, finalizzato al potenziamento del pensiero logico, condotto attraverso l'arte e il gioco, è stata apprezzata dai piccoli alunni e dai loro familiari.
L'impatto del progetto sulle capacità di apprendimento dei partecipanti, sarà oggetto di verifica nel corso del successivo anno scolastico in cui verrà valutato se e come le attività svolte avranno inciso sull'ingegno, l'interesse, la motivazione ed il profitto degli alunni relativi alla materia matematica.
Si conferma la centralità della figura del docente, che deve aggiornarsi, rendersi disponibile a nuove sfide e alla sperimentazione di innovative metodiche didattiche e pedagogiche, al fine di aumentare il valore e la qualità dell'offerta formativa, nonché di sviluppare l'autonomia di pensiero dell'alunno e facilitare l'apertura al dialogo con gli altri.

Bibliografia

Lipman, M. (2004). *Il prisma dei perché.* Napoli: Liguori.
Gardner, H. (1993) , *Educare al comprendere.* Milano: Feltrinelli.
Striano, M. (2007) , *Quando il pensiero si racconta.* Napoli: Liguori,
Striano, M. (2007 , *la P4C, in Filosofia e formazione.* Napoli: Liguori.

Giornate di studio dell'Insegnante di MATematica

Comunicazioni e laboratori
Scuola Secondaria di I grado

"Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)", n.1 Numero speciale n.2, 2018
G.R.I.M. (Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo)

13 carte per aiutare la fortuna: scommettere col bridge sulla probabilità di vincere

Giuseppe Borzì
L.S. "G. Lombardo Radice" Catania

E-mail: pippo8555@gmail.com

Paola Caruso
S.M.S. "Pluchinotta" Sant'Agata Li Battiati (CT)

E-mail: paolacaruso@inwind.it

Abstract/Riassunto. *Il gioco del bridge è entrato da anni nelle scuole (BaS) e continua a confermare la valenza della sua pratica, con ricadute positive nella didattica e nella crescita degli allievi che vi si dedicano. Il segreto consiste nel mettere in situazione il giocatore che deve comunicare, ipotizzare, dedurre ed agire per sé e per il compagno.*

1. Introduzione

Il bridge è un gioco "con" le carte, che prevede la presenza al tavolo di quattro giocatori che concorrono in **coppia** alla realizzazione del maggior numero possibile di **prese.**
Le strategie per ottimizzare il numero di prese richiedono la messa in atto di diversi processi, tutti estremamente interessanti. In questo lavoro verrà posta l'attenzione sull'applicazione del calcolo delle probabilità nella "divisione dei resti" e nella riuscita degli "affrancamenti di posizione".
Il meccanismo del gioco premia l'abilità a gestire le carte che si hanno in mano, non la fortuna che queste siano particolarmente "belle". Infatti la vittoria scaturisce dal confronto fra tutte le coppie che hanno giocato con le stesse carte. Un aspetto dal grande valore formativo: non è importante che la sorte attribuisca belle carte, ma sviluppa la capacità di gestire al meglio anche le combinazioni meno favorevoli ("La vita ti ha dato limoni? Fanne limonate!").

2. A caccia della presa mancante

Il bridge è un gioco in cui una coppia (Nord Sud) compete con un'altra (Est Ovest) per realizzare il maggior numero di prese. La partita è preceduta da un'asta in cui una delle due coppie si aggiudica il contratto, ovvero scommette su un numero minimo di prese da realizzare. La coppia "giocante" deve mantenere il contratto, la coppia avversaria (i "contro giocanti") deve impedirglielo.
Nella coppia che si è aggiudicata in contratto esistono due ruoli: quello passivo del "morto" che mette a terra le sue carte e quello attivo del "giocante" che gestisce le proprie carte e quelle del morto. Nella maggior parte dei casi accade che il giocante, quando vede le carte del morto, si rende conto di non avere immediatamente a disposizione tutte le prese cha ha scommesso di realizzare: deve quindi elaborare delle strategie per recuperarle da una o più "manovre di affrancamento".
Nel presente lavoro analizzeremo due manovre basilari di affrancamento che presuppongono la conoscenza e l'applicazione del calcolo delle probabilità.

3. Che i resti ce la mandino buona…

Il meccanismo della risposta obbligatoria fa sì che si creino le condizioni affinché anche la più piccola delle carte di un seme possa far presa. Quando in un colore sono state già giocate 12

carte, il giocatore che metterà a terra per primo la tredicesima carta, fosse anche un due, vincerà la presa. In questi casi si parla di "affrancamento di lunga" e la sua riuscita è strettamente collegata alla "divisione dei resti", ovvero a come sono distribuite le carte in mano agli avversari.
Se tra mano e morto ho sei (tre e tre) delle 13 carte di un seme, ed ho le tre carte più alte utili a fare presa (Asso, K Re, Q dama), in quel colore farò sicuramente tre prese: non una di più, non una di meno. Aggiungendo una carta di poco conto come il due, ho il 36% di probabilità di realizzare una quarta presa nel colore (ovvero la probabilità che le rimanenti carte in mano agli avversari sono divise 3 – 3)

4. Dove lo mettiamo l'onore?

Un altro meccanismo interessante è la "cattura degli onori mancanti", meglio conosciuto come ***impasse*** o affrancamento di posizione. Consiste nello scommettere che un onore mancante sia in mano
ad uno dei due avversari e giocare di conseguenza. Vediamo un esempio:

	A Q 5	
	N	
O		E
	S	
	8 6 3	

L'onore mancante è il K, se questo è in ovest io posso fare due prese nel colore: mi posiziono in sud e gioco una carta piccola (il gioco procede in senso orario). Se ovest mette il K, io supero con l'A e poi faccio presa con la Q; se ovest gioca una carta piccola, metto la Q che fa presa. L'affrancamento di posizione dipende da due condizioni:

1. Che la manovra di affrancamento parta dalla parte opposta a quella dove sono situati gli onori (e questo dipende solo dalla volontà del giocante)
2. Che l'onore mancante sia "prima" della "forchetta" degli onori posseduti dal giocante (50% di probabilità)

5. Quando manca la Dama

Mettendo insieme quanto visto finora, ci permette di scegliere rapidamente anche in situazioni complicate. Così, se ho otto carte tra mano e morto faccio l'impasse (50% di riuscita), se ne ho nove gioco A e K perché ho il 52% di probabilità che "cada" la dama seconda in mano agli avversari. La scelta tra una strategia e l'altra a questo punto è affidata un po' meno alla fortuna e un po' più alla matematica.

6. Conclusioni

Il presente contributo si propone da stimolo per incentivare la pratica del BaS come importante supporto didattico per diverse discipline con particolare riferimento alla matematica.
Quello del calcolo delle probabilità è solo uno degli aspetti da tenere in considerazione nello svolgimento del gioco, ma è utile per scegliere la strategia giusta per ottenere "la presa mancante". Al tavolo da gioco i ragazzi impareranno presto come la conoscenza possa dare un grande aiuto alla fortuna.

Bibliografia

Regole base del bridge**:** http://www.federbridge.it/ilbridge/regole.asp
Leprai Q "I giochi di strategia nell'educazione matematica. Il caso del bridge" Alma Mater Studiorum Università di Bologna a.a. 2014-15

Muoversi è pensare: grafici, studenti e funzioni in movimento

Giulia Ferrari
Dipartimento di Matematica “G. Peano”, Università di Torino

E-mail: giulia.ferrari@unito.it

Abstract/Riassunto. *Nel laboratorio verranno proposte alcune attività sperimentate scuola secondaria di primo e secondo grado, che coinvolgono l’utilizzo di un software per la modellizzazione del movimento. WiiGraph, questo il nome del software, permette di catturare la posizioni nel tempo di due telecomandi quando questi sono mossi di fronte ad un sensore. Inoltre, con lo stesso software è possibile comporre le due posizioni in modo tale da ottenere grafici solo spaziali. I partecipanti saranno coinvolti in attività di movimento con il software, sperimentando in prima persona alcune attività; inoltre, si proporranno degli spunti di riflessione a partire da esempi delle classi, con attenzione al ruolo giocato dal movimento nel pensiero e nell’attività matematica, inserendole nel panorama di ricerca in didattica della matematica.*

2. Muoversi è pensare

A partire dal lavoro seminale di Lakoff e Nunez (2000) sull’*embodied cognition*, che ha fondato i concetti matematici cosiddetti astratti su meccanismi cognitivi radicati nel nostro corpo, parte dell’attenzione della ricerca in didattica della matematica si è concentrata sulla teorizzazione del legame tra il movimento del corpo e le modalità di concepire i concetti matematici. Su questa scia, alcuni studi hanno messo in luce l’importanza dell’attività gestuale in relazione al discorso matematico, sottolineando una sinergia tra gesto e concettualizzazione (e.g. Alibali & Nathan, 2012). Nuove teorie hanno recentemente ri-concettualizzato il corpo alla luce di una divisione non netta tra mente e corpo (ad esempio, Nemirovsky *et al.*, 2013; de Freitas & Sinclair, 2014). Da un lato, evitando di riferirsi a metafore concettuali, che suggeriscono che sia la mente a guidare il corpo nelle sue azioni, o analogamente scardinando l’idea che il gesto non sia altro che la rappresentazione di un pensiero. Dall’altro, teorizzando le relazioni tra i corpi in modo tale da non attribuire tutta la volontà di agire al soggetto, ma ripensandola distribuita in un gioco di forze che agiscono nella socialità, considerando anche gli aspetti affettivi come una di queste forze, dispersa tra i vari corpi e le varie relazioni e i concetti matematici stessi. Pur sembrando un modo solo formalmente diverso di parlare (del corpo, del pensiero matematico), queste prospettive ci spingono a rivedere le assunzioni consolidate nel tempo a proposito del ruolo giocato dal corpo e, soprattutto, nella visione della matematica che ne deriva. Anche dal punto di vista metodologico, rivalutare l’importanza che gli aspetti percettivo-motori e cinestetici giocano nell’apprendimento e pensiero matematico significa scardinare l’idea che il pensiero astratto sia la sola fonte di “vera matematica” (Ferrara *et al.*, in stampa). Nel laboratorio questi e altri aspetti teorici faranno da sfondo, e ci si focalizzerà in particolare su lavori di ricerca che hanno studiato attività di modellizzazione del movimento in relazione al modo in cui l’attività percettivo-motoria, propriocettiva e cinestetica entra nella pratica disciplina, e allo stesso tempo teorizzando l’integrazione di percezione, azione e concettualizzazione (Nemirovsky *et al.* 1998; Yerushalmy & Shternberg, 2005; Radford, 2009).

3. Grafici, studenti e funzioni in movimento

In particolare, il nostro interesse risiede nell'attività di scoperta e di indagine dei concetti di grafico e di funzione con un particolare software che permette di modellizzare il movimento di due persone quando queste si muovono nello spazio con due telecomandi appositamente connessi agli altri dispositivi. Il software, WiiGraph, è stato realizzato da R. Nemirovsky e dal suo team nel centro di ricerca CRMSE di San Diego. WiiGraph cattura la distanza nel tempo dei telecomandi e restituisce a schermo grafici di posizione di diverso tipo, che si originano in tempo reale assieme al movimento degli studenti (Figura 1). Dare significato ai grafici è dunque un'esperienza fondata nel movimento e il corpo degli studenti è protagonista a tutto tondo di questa esperienza. Inoltre, le relazioni tra i grafici sono ulteriore elemento di indagine se li pensiamo legati tra loro da trasformazioni nel piano. Anche i movimenti saranno in relazione, ma questa volta la relazione è stabilita nell'interazione tra i due studenti, cui è richiesto di trovare modi di muoversi opportuni. Nel caso di grafici solo spaziali, un'ulteriore sfida è data dalla necessità di coordinare i movimenti per ottenere specifiche forme chiuse come rettangoli, rombi, cerchi (de Freitas *et al*., 2017). Gli episodi provenienti dalle classi coinvolte in sperimentazioni didattiche nella scuola secondaria di primo e secondo grado mettono in luce diverse tipologie di interazione per la creazione di grafici. Inoltre, permettono di illustrare un percorso in verticale che è stato implementato utilizzando il software.

Figura 1. *Grafici e studenti in movimento con WiiGraph*

Bibliografia

Alibali, M. W., & Nathan, M. J. (2012). Embodiment in mathematics teaching and learning: Evidence from learners and teachers' gestures. *Journal of the Learning Sciences, 21*(2), 247-286.

de Freitas, E., Ferrara, F. & Ferrari, G. (2017). The coordinated movement of a learning assemblage: Secondary school students exploring Wii graphing technology. In E. Faggiano, F. Ferrara & A. Montone (Eds.), *Innovation and Technology Enhancing Mathematics Education: Perspective in the Digital Era* (pp. 59-75). Basil: Springer.

Ferrara, F., Ferrari, G. & Savioli, K. (in stampa). Matematica in Movimento: radici, sviluppi e implicazioni di un approccio grafico al concetto di funzione tramite i sensori. In *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 2019.

Nemirovsky, R., Tierney, C. & Wright, T. (1998). Body motion and graphing. *Cognition and Instruction*, 16(2), 119- 172.

Nemirovsky, R., Kelton, M.L. & Rhodehamel, B. (2013). Playing mathematical instruments: Emerging perceptuomotor integration with an interactive mathematics exhibit. *Journal for Research in Mathematics Education*, *44*(2), 372–415. doi: 10.5951/jresematheduc.44.2.0372

Radford, L. (2009). Signifying relative motion: Time, space and the semiotics of Cartesian graphs. In W.M. Roth (Ed.), *Mathematical Representations at the Interface of the Body and Culture* (pp. 45-69). Charlotte, NC: Information Age Publishers.

Yerushalmy, M. & Shternberg, B. (2005). Chapter 3: Epistemological and cognitive aspects of time: A tool perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, Monograph, 13*. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/30037731

L'affascinante mondo dei frattali

Carla Ciarcià
Istituto Comprensivo "Parco della Vittoria" Roma

E-mail: ciarciacarla@gmail.com

Abstract/Riassunto. *La geometria frattale è una recente branca della matematica; essa parte dall'osservazione che alcune forme presenti in natura (coste, rami di un albero, fiocchi di neve, ecc…) sono ben lontane dalle figure regolari della geometria euclidea. Si propone quindi di usare enti geometrici non convenzionali per "leggere" e "descrivere" proprio le forme irregolari presenti in natura: i frattali.*

1. Introduzione

I frattali sono un nuovo potente linguaggio matematico, grazie al quale è possibile descrivere fenomeni naturali e risolvere problemi della realtà che erano stati un tempo accantonati. Si tratta di una matematica moderna che si avvale in modo determinante dell'Informatica, anche se la sua genesi è antica.
Grazie all'accattivante rappresentazione grafica che si può ottenere con l'ausilio di un PC, i frattali hanno acquisito anche uno spazio nel mondo dell'arte, basti pensare che sono nate la pittura frattale e la musica frattale. Quello che invece molti ancora ignorano è che queste figure apparentemente molto complesse e articolate nascondono un segreto di estrema semplicità!
E' questo forse l'aspetto più sorprendente di tutta la teoria frattale.
I frattali presentano aspetti estetici che coinvolgono anche l'intelligenza emotiva e le loro applicazioni possono essere il veicolo per una visione della matematica più dinamica ed aperta verso il mondo reale.

2. Descrizione del seminario in dettaglio

Il seminario vuole essere un momento di riflessione sull'argomento ed una occasione per proporre attività, percorsi didattici e idee da poter riproporre in classe sia in una classe seconda, sia in una terza della scuola secondaria di primo grado.
Si inizierà con una breve introduzione storica al mondo dei frattali in quanto è importante far capire ai ragazzi come nasce il pensiero matematico e come si passa poi alla formalizzazione di una teoria partendo dalla osservazione di situazioni della vita reale per poi passare all'aspetto disciplinare.
I frattali non sono esplicitamente citati nelle attuali Indicazioni ministeriali per la stesura dei curricula, ma molti argomenti matematici citati proprio in tali documenti permettono la descrizione delle caratteristiche degli oggetti frattali. Questi, veri e propri oggetti matematici, consentono un approccio interdisciplinare e si prestano ad essere studiati a differenti livelli di complessità e di astrazione, a partire dalla scuola dell'infanzia, al fine di approfondire numerosi concetti e strumenti matematici. Per approcciarsi a questi argomenti però, non sono necessari requisiti matematici sofisticati, anzi sin dalla scuola primaria si possono fare laboratori sui frattali, sviluppando la capacità di osservazione e di modellizzazione. Essi possono contribuire a dar un significato ai numeri, ad approfondire concetti come il triangolo di Tartaglia, similitudine, proporzioni e molti altri concetti che sin dalla scuola secondaria di primo grado si incontrano.

E' importante tener conto della complessità e delle difficoltà logiche legate a questo argomento, per questo si privilegerà la presentazione di percorsi didattici e attività legate il più possibile all'esperienza concreta e alla modellizzazione (costruzioni, origami, presentazioni al PC, ecc..)
L'utilizzo per esempio degli origami, che può essere considerato una strategia didattica di tipo ludico riesce a veicolare competenze disciplinari e metadisciplinari che favoriscono un ambiente di apprendimento accessibile e sempre più inclusivo.
L'argomento consente, inoltre, un approccio interdisciplinare che dall'arte, alla tecnologia, dalle scienze alla musica; si proporranno percorsi multidisciplinari già condotti in classe che favoriscono lo sviluppo di diverse competenze
Si proporranno inoltre anche attività che faranno uso di software informatici per la costruzione e la visualizzazione di oggetti frattali, in quanto l'aiuto dei computer e della grafica dà la possibilità ai ragazzi di maneggiare curve e concetti una volta riservati a matematici esperti.

Bibliografia

E. Castelnuovo, (1986) *Fractals: an interdisciplinary subject*, Cieaem 38 proceedings, Southampton.

B. D'Amore, (2015) *Arte e matematica,Metafore, analogie, rappresentazioni, identità tra due mondi possibili*, Edizioni Dedalo.

R. Eastaway, J. Wyndham, (2005) *Coppie, numeri e frattali*, Edizioni Dedalo.

B. B. Mandelbrot, (1987) *Gli oggetti frattali*, Einaudi, Torino. (Les object fractales)

B. B. Mandelbrot, (2002) *Fractals, Graphics & Mathematical Education,* The Mathematical Association of America.

H.O. Peitgen, P.H. Richter, (1987) *La bellezza dei frattali*, ed. Bollati Boringhieri.

"Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)", n.1 Numero speciale n.2, 2018
G.R.I.M. (Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo)

Lava e Sbianca o Bianco Pulito? Per un uso didattico dei quesiti INVALSI

Fabio Brunelli
Istituto Comprensivo Masaccio - Firenze

E-mail: brunelli1950@libero.it

Abstract/Riassunto. *Il laboratorio prende in considerazione alcuni testi recentemente proposti nelle prove INVALSI di classe quinta per la scuola primaria e li ripropone come materiali per l'attività didattica in classe, con la metodologia del problem solving e del lavoro di gruppo. In questo modo l'autore vorrebbe porre sotto una lente d'ingrandimento difficoltà, errori e misconcezioni degli allievi riguardo alla matematica e fornire lavoro utile per la formazione dei docenti e materiali e spunti di lavoro ai Dipartimenti di Matematica degli Istituti Comprensivi.*

Figura 1. *Esempio quesito prove INVALSI*

1. Motivazione: dalla valutazione alla didattica

La nostra idea è quella di trasformare l'incubo della valutazione esterna in una risorsa didattica. I testi dei quesiti INVALSI possono infatti costituire un ricco materiale per la nostra quotidiana attività nella classi.
La nostra esperienza di utilizzo dei testi delle gare di matematiche e dei quesiti INVALSI indica che una didattica fondata sul problem solving e sulla valorizzazione di procedimenti e argomentazione porti anche frutti positivi anche nelle prove esterne oggettive.
Si tratta di organizzare il lavoro di gruppo in classe, concedere tutto il tempo necessario, sollecitare gli allievi a fornire, oltre le risposte, anche un dettagliato resoconto dei loro procedimenti e, infine, possibilmente intervistare gli autori dei protocolli a nostro parere dubbi oppure significativi.
La ricchezza degli spunti didattici che appare con queste modalità di lavoro ci conferma l'utilità di questa modalità didattica. La lettura dei protocolli ampi degli allievi, comprensivi dei loro procedimenti e unita alle interviste individuali, svela un mondo di brillanti intuizioni e inizi di pensiero argomentativo, accanto a difficoltà e conoscenze ancora da consolidare.

A nostro parere solo prendendo in mano gli elaborati e intervistando gli allievi si ha realmente chiaro l’effettivo stadio dei loro processi di apprendimento; in altre parole una risposta corretta di per sé non è sinonimo di competenza, e non sempre una risposta errata implica necessariamente una lacuna dell’allievo.
Un aspetto problematico di questa metodologia è sicuramente il fattore tempo. Supponiamo di dedicare una intervista di quattro minuti a ciascuno di dieci quesiti Se la classe ha venticinque alunni avremo oltre 16 ore di registrazione: prima da realizzare e poi da visionare e valutare.

1.1 Il laboratorio

Gli insegnanti vengono divisi in gruppi (da due a quattro componenti), possibilmente di scuole diverse e di livelli scolastici differenti. Ai gruppi sono consegnati alcuni testi di prove INVALSI. I quesiti di quinta primaria si prestano bene allo scopo perché riescono a suscitare l’interesse sia dei docenti della scuola primaria che di quelli della secondaria di primo grado.
Agli insegnanti sono date le seguenti consegne:

a. Risolvere il quesito, possibilmente in più modi.
b. Discutere brevemente con i colleghi aspetti positivi e negativi del testo ed le eventuali difficoltà.
c. Riformulare il quesito, avendo davanti una classe-tipo di propri alunni.

Successivamente, a seconda del tempo disponibile, i gruppi sono chiamati a riferire brevemente ai colleghi il lavoro fatto. In questa fase si apre un dibattito sui quesiti stessi.
Il laboratorio si conclude con una breve relazione del conduttore, il quale mostra alcuni dati statistici e alcuni protocolli di alunni ritenuti significativi.

2. Conclusioni

Ci auguriamo che in futuro questo tipo di attività possa essere preso in considerazione dai dipartimenti di matematica degli istituti comprensivi ed entri a far parte dei loro progetti di formazione e di costruzione del loro curricolo verticale.

Laboratorio-Gara di Giochi Matematici

Beniamino Danese
Reinventore srl e Liceo Don Mazza, Verona

E-mail: *beniamino.danese@reinventore.it*

Abstract/Riassunto. *Dopo una breve introduzione sui giochi matematici nella storia, sulle gare o disfide tra matematici, sulle olimpiadi di logica o matematica e il loro aspetto formativo, si propone un simpatico "laboratorio-gara" di enigmi e giochi matematici, per i principali livelli di scuola. La prima parte del "laboratorio-gara" sarà con giochi scritti su un foglio, e chi risponde meglio si qualificherà per la "finale". Nella seconda parte del "laboratorio-gara" i finalisti dovranno risolvere giochi matematici "alla lavagna" e tutti gli altri si godranno lo spettacolo.*

A Regola d'Arte: percorsi intrecciati di Matematica e Arte

Carmen Bisignani
Scuola secondaria di primo grado, I.C. "Foscolo" Barcellona P.G. (Me)

E-mail: *carmen.bisignani@gmail.com*

Janita Maria Conti
Scuola secondaria di primo grado, I.C. "Foscolo" Barcellona P.G. (Me)

E-mail: *janitaconti@gmail.com*

Grazia Mazzeo
Scuola secondaria di primo grado, I.C. "Foscolo" Barcellona P.G. (Me)

E-mail: *graziamazzeo44@gmail.com*

Abstract/Riassunto. *L'attività è rivolta alle classi quinte di scuola primaria e alle classi prime e seconde di scuola secondaria di primo grado, creando così un ponte di continuità tra i due ordini di scuola. L'obiettivo di questo percorso è quello di suscitare interesse, fornire stimoli e strumenti diversi allo scopo di valorizzare i vari stili di apprendimento dei ragazzi, attraverso il canale ludico e la didattica laboratoriale. L'osservazione, la manipolazione e la scoperta rappresentano il nodo cruciale di ogni attività. La curiosità viene accesa dall'utilizzo di camere a specchi: i ragazzi costruiscono i vari poligoni, ne "vedono" gli assi di simmetria, stabiliscono relazioni tra numero di lati e angoli, evidenziandone anche i legami di proporzionalità. La scoperta continua con le tassellazioni del piano, la realizzazione di una tovaglietta e lo studio delle simmetrie osservando le opere di Escher, con la produzione del tassello personale che diventa una vera e propria opera d'arte. Il percorso si conclude con la mostra delle opere realizzate.*

1. Premessa

Il percorso è stato realizzato durante i Mat.Ita Workshop organizzati nel nostro istituto in orario extracurricolare nei mesi di gennaio-febbraio. Il laboratorio è diviso in quattro step, ogni attività è debitamente argomentata e alla fine di ogni step viene redatto un diario di bordo anche con l'aiuto di apposite schede.

2. Giochiamo con gli specchi e scopriamo i poligoni

Viene fornita una scheda con triangoli isosceli con angolo al vertice noto, si chiede di inserire ciascun triangolo nella camera a specchi e di descrivere cosa si vede. Si scopre così che ciascuno dei triangoli, nella camera a specchi, forma un poligono regolare e che, quindi, ogni poligono regolare è divisibile in tanti triangoli isosceli quanti sono i lati. Si raccolgono le osservazioni in una apposita tabella.
Si registrano i dati della tabella in un sistema di assi cartesiano arrivando così alle relazioni di proporzionalità. Attraverso l'osservazione e l'analisi dei dati si può trovare anche il legame tra il numero dei lati e la somma degli angoli interni del poligono.

3. Gli assi di simmetria

Attraverso le camere a specchi è possibile far "vedere" gli assi di simmetria dei poligoni, e far scoprire con l'osservazione che tali assi corrispondono alle diagonali e/o alle mediane scoprendo anche delle regolarità. Ricorrendo poi a dei fili di lana è possibile "costruire" la formula per calcolare il numero di diagonali di un poligono.

4. La tassellazione

Con i poligoni trovati con le camere a specchio e ricostruiti in cartoncino, si chiede di tassellare il piano. Si scopre così che alcuni poligoni tassellano e altri no. Attraverso l'osservazione si arriva a capirne il motivo, costruendone così la regola. Si chiede poi di tassellare il piano utilizzando anche i poligoni che prima non tassellavano aggiungendo uno o più poligoni diversi. Si scoprono così le tassellazioni semiregolari. Con la propria tassellazione si realizzano così delle tovagliette da colazione, incollando i pezzi su un cartoncino formato A3, poi plastificato.

5. Le opere di Esher e le trasformazioni

Si scoprono le regolarità e le simmetrie nelle opere di Esher. Si individua) la "mattonella base", cioè il modulo, e con l'aiuto della camera a specchi e/o di modellini dinamici, realizzati con acetato e bottoncini da sarta, si "vede" il tipo di simmetria che genera l'intera tassellazione . Si definiscono così i vari tipi di simmetria (nell'attività abbiamo preso in considerazione la simmetria assiale, la traslazione, la rotazione e la glissosimmetria). Si va alla ricerca della forma geometrica di base e delle trasformazioni che si sono fatte su di essa per ottenere il modulo. Si ricostruisce l'intera opera a partire dalla figura geometrica base: quadrato, triangolo ed esagono regolari (i poligoni che si è scoperto tassellavano). Si chiede così di costruire, con le stesse modalità, il proprio tassello e di creare un'opera personale che verrà poi esposta alla mostra.

Ringraziamenti

Si ringraziano Antonella Castellini e Alfia Lucia Fazzino, il cui apporto è stato fondamentale per la nostra crescita professionale e per il nostro modo di insegnare matematica, Enzo Napoli per la preziosa consulenza artistica.

Bibliografia

A.M.Arpinati, M.Musiani *Idee per insegnare la matematica* Zanichelli 2011.
E. Castelnuovo *la Matematica* la Nuova Italia 2000
L. Catastini, F. Ghione *Matematica e arte – forme del pensiero artistico* Spinger 2010
M. Du Sautoy *Il disordine perfetto* Rizzoli 2011
A. Sartore *Dan I disegni periodici in geometria* Erikson 2011,
B. Treffers, F. Pirani *Nell'occhio di Escher* Electa 2004

Gli hashtag della Matemagica

Annalisa Paratore
Istituto Comprensivo Giovanni Verga - Gela

E-mail: *annalisa.paratore@gmail.com*

Abstract/Riassunto. *In questo lavoro si propone un'attività mirata a un approccio ludico con la matematica, all'abbattimento di pregiudizi che vogliono la matematica una disciplina arida e alla valorizzazione della funzione culturale della matematica, oltre che della sua funzione strumentale di risoluzione dei problemi L'attività è stata sperimentata in una classe prima di scuola secondaria di primo grado, e prende spunto dal cartoon Disney "Paperino nel mondo della matemagica".*

1. Descrizione del contesto

L'attività oggetto del seminario, è stata proposta ad alunni di una classe prima della scuola secondaria di primo grado, durante le attività di accoglienza delle classi prime.
Non si prevedeva alcun requisito relativamente alle competenze logico-matematiche.
Si è sviluppata in due momenti: inizialmente gli alunni hanno preso visione del cartoon Disney "Paperino nel mondo della matemagica" (https://www.youtube.com/watch?v=MkqguYTxIh4), durante questa fase prendevano appunti sulle parole chiave (hashtag) individuate. Successivamente gli alunni, guidati dall'insegnante, hanno confrontato i risultati di ciascuno e riscritto alla lavagna gli hashtag ricorrenti, raggruppandoli per argomento. Infine sono stati invitati a trarre delle conclusioni autonome.
Oltre a stimolare la curiosità verso la disciplina ed abbattere eventuali pregiudizi che predispongono in genere un cattivo atteggiamento verso la matematica (Di Martino, 2007), l'attività si è rivelata un ottimo momento di aggregazione e conoscenza sia per gli alunni che per l'insegnante.

2. Paperino e la matemagica

All'inizio della lezione è stato annunciato che le attività del giorno riguardavano la visione di un cartone animato. Questa informazione ha fatto sì che i bambini fossero ben disposti verso i contenuti che sarebbero stati rivolti; l'uso di cartoni come mediatori didattici avvicina la matematica al mondo fantastico degli studenti di questa fascia d'età, rendendo piacevole l'approccio ad una disciplina a volte ritenuta ostica. Il "far lezione con i cartoni" ha rappresentato una stimolante novità.
La disposizione degli alunni durante la proiezione del filmato è stata resa libera, i bambini "sganciati" dal banco di scuola hanno posizionato le loro sedie di fronte la LIM.
È stato chiesto loro di guardare il cartone e di annotare tutti i concetti fondamentali, ovvero gli hashtag della matemagica. Davanti ad un'utenza 2.0 spesso il docente si trova indietro nell'uso dei social, i ragazzi lo sanno già per esperienza. La possibilità di utilizzare il loro linguaggio social durante una lezione ha rotto le ultime barriere verso un apprendimento attivo.
Successivamente si è passati alla proiezione del cartone "Paperino nel mondo della matemagica" (Disney 1959, durata 26 min). L'attenzione è risultata costantemente alta, sia per il linguaggio specifico del filmato (Paperino fa continuamente gesti buffi e pronuncia le sue tipiche parole quasi incomprensibili che lo rendono divertente), sia per l'obiettivo di recuperare quanti più hashtag possibili, che ha generato una sorta di competizione positiva tra loro.
In prospettiva Vygotskijana, è fondamentale che l'insegnante instauri nel gruppo-classe un clima positivo (Vygotskij, 1934) di collaborazione e cooperazione, perché le interazioni

tra le persone sono funzionali all'apprendimento. Lo sviluppo cognitivo, infatti, va dall'esterno verso l'interno (Vygotskij, 1934), le funzioni cognitive nascono in una dimensione sociale per poi essere interiorizzate dal bambino.

3. L'analisi dell'attività

Al termine del filmato è stato chiesto loro di confrontare i dati raccolti e di riassumere alla lavagna con gli hashtag che risultavano più ricorrenti. Durante questa fase di brainstorming si è discusso a lungo su quali termini fossero più o meno significativi e descrittivi del cartone appena visto. I bambini hanno avuto modo di confrontarsi e sono dovuti giungere a conclusioni condivise in gruppo.
Ripassando insieme le parti del filmato hanno inoltre individuato ulteriori hashtag che inizialmente non erano emersi. Al termine della ricerca i bambini hanno evidenziato che erano stati trovati molti termini che riguardano tipicamente la matematica: #Pitagora, #geometria, #frazioni, #numeri, #cerchio, ecc, altri che in maniera trasversale sono legati alla matematica: #grandezza, #precisione, #ordine, ecc, ma anche tanti hashtag che non pensavano fossero collegati con la materia: #musica, #sculture, #arte, #baseball #quadro, #scacchi, #biliardo, #culturagreca, ecc.
Riprendendo il concetto dell'ordine mentale (richiamato nel cartone) i bambini sono stati invitati a riflettere su come mettere ordine tra tutte le parole trovate, così, spontaneamente hanno categorizzato per similitudine, trovando insiemi di parole molto diversi tra di loro: arte, sport, gioco, storia, ecc
Gli ultimi minuti di lezione sono stati dedicati a mettere ordine nei quaderni, inserendo legende colorate per ogni categoria. Durante questa fase di lavoro personale i bambini hanno interiorizzato quanto verbalizzato in gruppo, ovvero quanto la matematica incida in tanti aspetti della vita, e quanto sia importante l'apprendimento di questa disciplina.
Infine è stato chiesto di riflettere sull'attività fatta rispondendo in maniera personale alla domanda "come mai la professoressa ci ha fatto fare questo lavoro?".
Le risposte dei ragazzi sono state soddisfacenti, se ne riporta qualcuna a titolo di esempio "La matematica è in tutto il mondo", "La matematica è la materia che unisce tutti gli argomenti", "Fare matematica è importante per il nostro futuro".

4. Conclusioni

Tutta la classe ha lavorato attivamente portando a compimento l'attività, che si è, inoltre, rivelata inclusiva.
Questa lezione ha rappresentato un momento di input iniziale che è proseguito durante tutto l'anno scolastico, gli alunni hanno iniziato a pensare ad una matematica non fatta solo di regole, problemi ed espressioni, ma anche di discussioni, ragionamenti, comprensione ed argomentazione. La condivisione delle scoperte di ciascuno e delle strategie personali ha accompagnato la classe durante tutto l'anno.

Bibliografia

Di Martino P. (2007). L'atteggiamento verso la matematica - alcune riflessioni sul tema - *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* , vol.30A-B, n.6, p.651-666
Vygotskij L. (1934) Pensiero e linguaggio

"I PRIMI DELLA CLASSE": attività di laboratorio sulla divisibilità

Chiara Barraco
I.C. "Dusmet-Doria", Catania

E-mail: barraco.chiara@gmail.com

Antonella Console
S.M.S. "Maiorana", Catania

E-mail: antonellacns@gmail.com

Maria Randazzo
S.M.S. "Sturzo", Biancavilla (CT)

E-mail: insmaria@live.it

Annalisa Santagati
S.M.S. "Sturzo" Biancavilla (CT)

E-mail: ansantagati@yahoo.it

Abstract/Riassunto. L'attività proposta si colloca all'interno del nucleo tematico "Numeri" e tratta della divisibilità. E' un percorso che guida gli alunni alla scoperta dei numeri primi e composti e dei concetti di multipli e divisori di un numero, per approdare infine alla comprensione e ricerca del M.C.D e del m.c.m.
L'attività è stata pensata per una classe prima di scuola secondaria di primo grado e vuole contribuire in maniera fondamentale all'acquisizione dei prerequisiti relativi alla successiva unità didattica sulle frazioni.
Il punto di forza di tale progetto è quello di promuovere il successo formativo e l'inclusione, in quanto attraverso l'uso delle diverse strategie didattiche messe in campo, si favorisce il percorso formativo di ciascun alunno e ciascuna alunna, rispettandone gli stili di apprendimento. Utilizzando infatti i diversi approcci, ogni ragazzo riesce a trovare la "propria dimensione", per un percorso di apprendimento personalizzato.

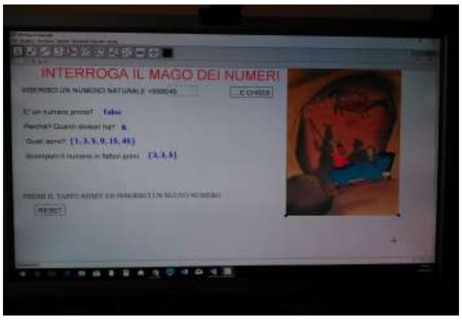
Descrizione del laboratorio

Il filo conduttore delle diverse attività realizzate è **l'approccio laboratoriale**.
La matematica del fare, del costruire modelli materiali dei numeri e dei procedimenti, per comprendere pienamente i concetti ed approdare alla formalizzazione consapevole di regole e procedure.

Per stimolare la curiosità degli alunni e per catturarne l'attenzione l'argomento è stato introdotto tramite la lettura e la drammatizzazione della "Terza notte" del libro *"Il Mago dei numeri*" di Hans Magnus Enzensberger. In questa fase gli alunni, come *Roberto,* il protagonista del libro, hanno sperimentato e costruito il Crivello di Eratostene e hanno giocato con il gioco proposto nella versione digitale del libro. La visione di alcuni stralci tratti dalla serie TV "*Numbers*" sui numeri primi e RSA (algoritmo di crittografia asimmetrica) ha, ancor di più, immerso gli alunni e le alunne in un'atmosfera di magia e mistero che ha sollecitato la loro curiosità ad apprendere. Si è dato spazio ad alcune curiosità sui numeri primi ed a un'attività sulla crittografia. Acquisito il concetto di numero primo e composto e di divisibilità si è proseguito con la scomposizione dei numeri in fattori primi. I numeri primi, rappresentati da mattoncini colorati sono stati nascosti all'interno di contenitori, tutti uguali, rappresentanti i numeri naturali. Gli alunni si sono divertiti a scoprire i mattoncini/fattori che costituivano il numero composto e con essi *smontando, rimontando* come un puzzle (una sorta di gioco simbolico che ricorda il metodo Montessori), sono riusciti a trovare facilmente tutti i divisori del numero dato, e a operare con essi distaccandosi dal valore numerico, ma sfruttando la scomposizione in fattori primi e le proprietà delle potenze (primo approccio al calcolo letterale).

La costruzione della "Ritabella", in cui ad ogni numero primo viene associato un determinato colore, ha ulteriormente sollecitato l'apprendimento visivo ed intuitivo di alcuni alunni, senza tralasciare gli altri stili di apprendimento.

Per rafforzare ulteriormente il concetto di divisore di un numero sono stati effettuati dei giochi, quali il gioco delle carte "L'intruso", suggerito nel percorso PQM e un altro gioco di enigmi-problemi che gli alunni dovevano risolvere per superare i diversi livelli e vincere la sfida.



Un'ulteriore attività è stata svolta con GeoGebra. Gli alunni, dapprima, hanno potuto controllare, tramite un file predisposto, se avevano operato correttamente nella ricerca del massimo comune divisore e minimo comune multiplo, perché il file restituiva la scomposizione in fattori primi dei numeri dati, l'elenco dei loro divisori ed il M.C.D. e il m.c.m.; successivamente, guidati da una scheda operativa hanno imparato a conoscere i comandi di ***GeoGebra*** che permettevano di conoscere i dati richiesti. Anche loro sono diventati, così, *"maghi dei numeri"*. Tutte le attività: ***manipolative, grafiche, di drammatizzazione, gioco e problem solving***, sono state uno strumento dell'insegnante che ha privilegiato ora l'una ora l'altra in base alla risposta degli alunni e del gruppo classe.

Conclusioni

In conclusione possiamo affermare che il percorso didattico, sperimentato in alcune classi di tre scuole di Catania e provincia, ha dato dei buoni frutti in termini sia di coinvolgimento degli alunni che nel raggiungimento degli obiettivi che ci eravamo prefissati. Interessante verificare l'efficacia di quanto appreso dai discenti quando si troveranno ad operare con le frazioni, in particolare nella ricerca del minimo comune denominatore e ancor di più nella semplificazione delle frazioni, ove spesso alcuni denotano poca padronanza.

Bibliografia

Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L., et al., editors. (2004) *Matematica 2003*. Lucca: Matteoni stampatore

Enzensberger, H.M., (2005) *Il Mago dei numeri*, Einaudi

Aleo M.A., Margarone D., Panebianco V., Ragusa A., Zinna C., (2006) *Le classi di resto e*

l'aritmetica modulare Esempi,formalizzazione, applicazioni. Catania. La Tecnica della Scuola
Sitografia
Sabatti, S. *Se l'aritmetica fosse una costruzione LEGO:*
http://www.sofiasabatti.it/wordpress/2016/01/05/se-laritmetica-fosse-una-costruzione-lego/
D'Aglio Paolo "Fattorizzazioni col… Lego!"
https://sites.google.com/site/pdallaglio/home/fattorizzazionicollego
Bartolone, R. I numeri si trasformano in colori e l'aritmetica diventa più facile http://www.laritabella.com/
Mayer G. Primi, Scomposizione e Divisibilità: http://retesophia.altervista.org/wp-content/uploads/2017/08/Numeri-Primi-Scomposizione-e-Divisibilit%C3%A0-MAYER.pdf
Cotoneschi S., Ghelardini S., Piccinini P. Numeri primi conosciuti e sconosciuti: http://www.scuolavalore.indire.it/nuove_risorse/numeri-primi-conosciuti-e-sconosciuti/

Il ruolo dell'attività laboratoriale nello sviluppo e nell'acquisizione di competenze nella scuola secondaria di I grado.

Antonietta Esposito
Università degli Studi di Salerno.

E-mail: *antesposito@unisa.it*

Germana Buccheri
Scuola Media "Nicola Monterisi" (SA).

E-mail: *gbuccheri@unisa.it*

Angela Magliano
I.C. "Gen. Gonzaga" – Eboli (SA).

E-mail: *maglianoangela@alice.it*

Abstract. *Viene qui presentata un'attività svolta da docenti di matematica che hanno partecipato al progetto sperimentale "Scuola Media Matematica" dell'Università degli Studi di Salerno. L'attività, sull'acquisizione del concetto di "misura", è finalizzata alla realizzazione di una didattica per competenze attraverso la metodologia della ricerca-azione. L'argomento è ben consolidato nel curriculo di Matematica della scuola secondaria di I grado, ma la metodologia laboratoriale ha consentito agli allievi una riflessione metacognitiva per una costruzione attiva del proprio sapere finalizzato ad un apprendimento efficace per l'acquisizione di una competenza specifica.*

1. La Scuola Media Matematica

La "*Scuola Media Matematica*" è una sperimentazione didattica che nasce all'interno del Dipartimento di Matematica dell'Università di Salerno ed ha come principio fondante l'idea secondo cui l'importanza della cultura e dell'educazione non è l'accumulare saperi, ma il determinare un'attitudine a proporre e risolvere problemi e a saperli collegare ed organizzare attraverso l'intervento e l'integrazione con le risorse e le capacità personali di ciascuno (Morin, 2000). Tutto ciò, che ben si collega alle Indicazioni Nazionali del 2012 e alle Linee Guida del 2010, propone l'attuazione di una didattica per competenze; una didattica che va al di là della mera trasmissione di saperi, ma che incide sui comportamenti concreti della persona affinché ne diventino patrimonio permanente (Cerini, 2012). In un'ottica in cui la comprensione della realtà nasce dove la cultura umanistica e la cultura scientifica si abbracciano, la SMM prevede tra le diverse metodologie didattiche da attuare per il raggiungimento dei traguardi prefissati, quella della ricerca-azione attraverso attività laboratoriali. La ricerca-azione (Lewin,1946) è una metodologia che individuata una situazione problematica, attraverso il coinvolgimento di ogni singolo allievo coinvolto nel processo, ne cerca la soluzione. L'attività laboratoriale, inoltre con il suo fare "in azione" (Dewey, 1913) interrompe la routine scolastica e diventa una novità: «interessante», «coinvolgente», «divertente». Il laboratorio è una sfida, bisogna essere uniti e confrontarsi per superare gli imprevisti e scegliere gli accorgimenti più opportuni per terminare il compito assegnato. Fondamentale è dunque il lavoro di gruppo, che ha tra le caratteristiche principali l’interdipendenza tra i suoi membri, tutti sono impegnati in una relazione indispensabile per conseguire il risultato.

2. La sperimentazione in aula

L’attività sperimentale laboratoriale che viene descritta qui di seguito è intitolata «*Impariamo a Misurare*». In essa, partendo da un contesto problematico reale, si è passati, attraverso il fare della ricerca, alla co-costruzione e formalizzazione del sapere per concludere con le attività di valutazione del processo, del prodotto e delle competenze. L’attività è partita con la consegna di un compito ben preciso da parte del docente: “*misurare le dimensioni di alcuni oggetti presenti nella classe (banchi, cattedra……)*”. Il gruppo classe, composto da 24 allievi, di cui tre con bisogni educativi speciali, dopo essere stato suddiviso in gruppi eterogenei di 4-5 persone, munito degli opportuni attrezzi ha immediatamente iniziato le attività carichi di entusiasmo. Gli alunni con BES sono stati inseriti ciascuno in un gruppo e supportati dai compagni in un’ottica di Peer Education. Nella fase esperienziale gli allievi hanno sviluppato interazioni costruttive per la giusta risoluzione del compito assegnato ed hanno fatto emergere significative riflessioni provenienti da dissonanze cognitive su quanto stava accadendo. La domanda più frequente è stata: “perché il risultato ottenuto non è lo stesso di quello relativo alle precedenti misurazioni. Dove ho sbagliato?” Successivamente si è passati all’osservazione e alla discussione dei risultati ottenuti. Il docente partendo dagli spunti di riflessione emersi, attraverso brainstorming ha invitato gli studenti ad ipotizzare soluzioni e/o a discuterle **(comunicazione nella madrelingua)**. Gradualmente, si è passati alla formalizzazione degli argomenti, pervenendo al concetto di media come stima della migliore misurazione. In maniera spontanea è emerso il concetto di moda perchè qualche allievo la proponeva come migliore stima della misurazione essendo il valore più frequente. Attraverso compiti e problemi assegnati gli studenti hanno conquistato non solo un sapere specifico ma tutte le altre competenze chiave sono intervenute: la condivisione dell’esperienza con gli altri **(competenze sociali e civiche)**, il lavorare insieme per raggiungere obiettivi comuni, l’imparare insieme **(imparare ad imparare)**, la raccolta di dati, il prendere decisioni, la condivisione di procedure **(spirito di iniziativa e imprenditorialità, competenza matematica e competenze di base in scienza e tecnologia, consapevolezza ed espressione culturale).**

3. Conclusioni

La sperimentazione svolta ha fatto emergere quanto il ruolo del laboratorio sia motivazionale nel processo di insegnamento-apprendimento. Ha creato interazione costruttiva: gli alunni si sono rapportati in maniera positiva, rispettando gli interventi dei compagni e valorizzandone gli elementi significativi. Ha creato interdipendenza positiva: gli studenti si sono riconosciuti nel gruppo e sono stati consapevoli che la buona riuscita dell’attività dipendeva dal lavoro di squadra. Le attività laboratoriali sono risultate efficaci anche per l’inclusione; gli alunni più deboli hanno mostrato soddisfazione nella partecipazione del lavoro di gruppo e sempre hanno fornito il proprio contributo.

Nell’attività laboratoriale si sviluppano le competenze attraverso l’agire, che consente di sviluppare le proprie capacità e/o migliorare le proprie prestazioni affinché si possa conseguire un obiettivo.

Bibliografia

Capone, R. (2015). *Valutare per competenze in Matematica e in Fisica. Iniziative di formazione docenti nella Scuola Secondaria di Secondo Grado nel Piano Lauree Scientifiche in collaborazione con il MIUR–Regione Campania*-ISBN, 88-8160.

Cerini, G. (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*.

Dewey, J. (1913). *Interest and effort in education*. Houghton Mifflin.
Lewin, K. (1946). Action research and minority problems. *Journal of social issues*, 2(4), 34-46.
Morin, E. (2000). *La testa ben fatta. Riforma dell'insegnamento e riforma del pensiero*, 132.

Giornate di studio dell'Insegnante di MATematica

Comunicazioni e laboratori verticali Scuola Secondaria di I e II grado

"Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)", n.1 Numero speciale n.2, 2018
G.R.I.M. (Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo)

Una piattaforma digitale per il raggiungimento dei traguardi di sviluppo delle competenze in matematica.

Camilla Spagnolo
Università degli studi di Urbino

E-mail: *c.spagnolo1@campus.uniurb.it*

Abstract/Riassunto. *Nel laboratorio gli insegnanti sperimenteranno l'uso di una piattaforma digitale per il raggiungimento dei traguardi per lo sviluppo delle competenze previsti dalle Indicazioni nazionali. La piattaforma include strumenti per il lavoro in classe e per il lavoro individuale degli studenti, e cerca di integrare le funzionalità didattiche di strumenti di calcolo e rappresentazione.*

4. La logica del percorso

Il percorso di formazione che presentiamo cerca di mettere in pratica quanto suggerito fortemente nei documenti che inquadrano l'insegnamento della Matematica nella scuola italiana: le Indicazioni Nazionali per il primo ciclo di istruzione, le Indicazioni Nazionali per il sistema dei Licei e le Linee Guida per l'istruzione tecnica e professionale. Si vuole ribaltare l'approccio tradizionale, di un percorso basato sull'accumulo dei singoli contenuti, organizzati in base a rapporti di relazione funzionale (*questo argomento* servirà per *quest'altro argomento*), per passare a un percorso di apprendimento organizzato pensando alle competenze del ragazzo in uscita.

L'idea chiave è di guardare ai Traguardi per lo sviluppo delle competenze che, nel primo ciclo, descrivono (in maniera inevitabilmente molto generale, ma non generica) il punto di arrivo del percorso, e a partire da questi individuare i singoli contenuti oggetto di apprendimento, necessari per fondare queste competenze. Per il secondo ciclo, si è preso come insieme di traguardi quello contenuto nel Quadro di Riferimento dell'Invalsi, che è stato compilato esplicitamente in continuità (anche linguistica) con i traguardi della scuola primaria e della scuola secondaria di primo grado. I due percorsi- secondaria di primo grado e biennio della secondaria di secondo grado- hanno la stessa struttura.

2. La struttura del percorso

Il percorso è articolato in moduli: ogni modulo di questo percorso fa quindi riferimento a uno o più di questi traguardi per lo sviluppo delle competenze. Questo traguardo è esemplificato attraverso una domanda chiave: una domanda tratta dalle prove Invalsi che, per le sue caratteristiche, permette di analizzare la rete di apprendimenti necessari per il raggiungimento del traguardo, e che con i suoi risultati aiuta a individuare le principali difficoltà incontrate dagli studenti nell'affrontala. I risultati della domanda chiave sono analizzati in una scheda didattica per l'insegnante. Per la secondaria di secondo grado, l'analisi viene portata avanti anche tenendo conto dei diversi risultati a seconda della tipologia di scuola (licei, tecnici, professionali). Il suggerimento è di utilizzare la domanda come nucleo di una attività con gli studenti, anche a scopo diagnostico.

Il modulo vero e proprio inizia poi con una attività diagnostica per la classe (da realizzare in classe o, in certi casi, anche in piattaforma), a cui si affianca una scheda di valutazione diagnostica individuale, in piattaforma, costruita su domande Invalsi. Questi momenti di valutazione diagnostica permettono all'insegnante di focalizzare i principali nuclei fondanti della competenza e le difficoltà dei propri studenti.

Ogni nucleo diventa poi oggetto di un percorso specifico presentato attraverso una scheda didattica, e inizia con una attività in classe. All'attività seguono poi una valutazione in classe e una valutazione individuale in piattaforma, basata su domande Invalsi.
Questo schema si ripete per ogni nucleo, e il percorso si conclude con una valutazione sommativa in classe e una valutazione sommativa individuale. Le valutazioni in classe si prestano anche, in generale, ad essere svolte a piccoli gruppi, pur mantenendo anche la loro funzione di valutazione individuale.

3. Gli strumenti

Nelle attività dei diversi nuclei sono utilizzate risorse informatiche come fogli di calcolo, software di rappresentazione, accesso a fonti Internet. La scelta linguistica è centrata sulla ricerca della chiarezza e della semplicità di espressione, evitando il ricorso a espressioni tipiche della "lingua matematica di classe" che, spesso, rischiano di nascondere i significati, anziché aiutare a comprenderli.

4. La sperimentazione

Il percorso è attualmente in fase di validazione all'interno del progetto "Riconnessioni" della Fondazione per la scuola. Questa sperimentazione coinvolge diverse decine di insegnanti di scuola secondaria di primo grado, che utilizzano la piattaforma e i suoi materiali come strumento di lavoro in un corso biennale di formazione e ricerca. Gli incontri (in presenza) con gli insegnanti hanno scadenze mensili, mentre il contatto in piattaforma è continuo e si sviluppa attraverso seminari in sincrono, blog, condivisione di materiali, forum di discussione su casi proposti dai formatori o dai partecipanti, e sui materiali prodotti durante il corso.

5. Conclusioni

I precorsi proposti integrano poli che solitamente restano distinti, nella progettazione didattica: le attività su piattaforma digitale e quelle in classe; la valutazione formativa e la valutazione realizzata dalle prove Invalsi; la progettazione per competenze e l'apprendimento dei contenuti.

Bibliografia

Sito ufficiale del progetto Riconnessioni: https://www.riconnessioni.it/
Pagina di web di presentazione dei percorsi digitali: https://deascuola.it/promo/riconnessioni/

Dalle strategie ai teoremi

Daniela Aquino[1], Concetta Brunetto[1], Giuseppa Rita Cirmi[2], Salvatore D'Asero[2], Francesca Faraci[2], Maria Flavia Mammana[2], Agnese Rita Zuccarello[3], Piera Angela Zuccarello[4]

[1] *I.I.S.Michele Amari di Giarre (CT)*
[2] *Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Catania*
[3] *Liceo Scientifico Galileo Galilei di Catania (CT)*
[4] *I.I.S. "Majorana – Cascino" – Liceo Scientifico "Vito Romano" di Piazza Armerina (EN)*

E-mail: daniela_aquino69@yahoo.it, prof.cetty@gmail.com, cirmi@dmi.unict.it, dasero@dmi.unict.it, ffaraci@dmi.unict.it, pierazu@gmail.com, agnese_rita@hotmail.com

Abstract/Riassunto. *Si presenta una attività del Liceo Matematico, sezione di Catania, indirizzata a studenti del primo anno di scuola secondaria di secondo grado. L'attività, denominata La Lingua Matematica, mira da un lato ad approfondire il concetto di teorema in matematica, dall'altro a migliorare la capacità di lettura e di comprensione di un testo cosi come ad avviare processi di argomentazione matematica.*

1. Introduzione

Il percorso didattico che qui presentiamo, denominato "La lingua matematica", rientra tra le attività del Liceo Matematico (Capone et al, 2017), sezione di Catania, proposte nell'anno scolastico 2017-2018 per studenti delle classi prime delle scuole secondarie di secondo grado. L'elaborazione di tale percorso didattico nasce dalla constatazione, sostenuta dall'esperienza maturata in classe, della difficoltà che gli studenti incontrano nella comprensione e interpretazione di testi di natura scientifica. Prendendo spunto da un'attività ludica, il percorso è stato sviluppato con l'obiettivo di introdurre e approfondire il concetto di teorema in matematica promuovendo la capacità di dimostrazione e di argomentazione.
L'attività è stata proposta da docenti del Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Catania ed è stata elaborata, nel corso di tre incontri pomeridiani, insieme ai docenti delle scuole che hanno scelto di volerla poi sperimentare nelle classi.

2. Proposta didattica

Il percorso si articola in diverse fasi:

Fase 1: *Gioco del 20*;
Fase 2: *Strategie o Teoremi?*
Fase 3: *Varianti*.

La Fase 1 prende spunto da un gioco, la *Corsa a 20* che viene presentato agli studenti come un gioco da tavolo, con regolamento e tabellone. Brevemente, il primo dei due giocatori posiziona la pedina sul numero 1 o sul numero 2. Ogni giocatore sposta, l'unica pedina presente sul tabellone, di una o due caselle. Vince chi arriva alla casella 20.

Corsa a 20
(o anche detto Gioco del 20)

Contenuto:
1 tabellone, 1 pedina, 2 matite, 2 blocchetti per appunti.

Preparativi:
I giocatori si dividono in due squadre (anche un giocatore per squadra va bene).
Scegliere la squadra che inizia a giocare per prima con il gioco del pari e dispari o estrazione a sorte.

Scopo del Gioco:
Vince la squadra che arriva per prima sulla casella 20.

Svolgimento del gioco:
La squadra che inizia a giocare posiziona la pedina sul numero 1 o sul numero 2.
Ogni squadra, a turno, sposta la pedina di una o due caselle.

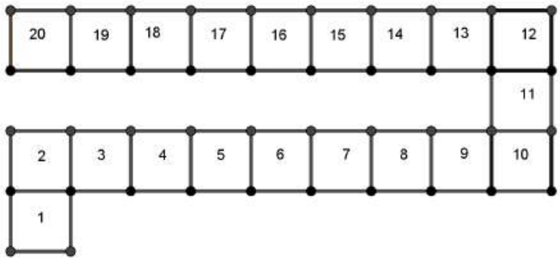


Figura 1. *Corsa a 20: regole e tabellone*

Gli studenti sono invitati a trovare una strategia per vincere, se esiste, e a spiegare perché è vincente. Il gioco infatti si presta a diverse riflessioni. In particolare, si nota che *se si inizia per primi esiste una strategia per vincere*.
Durante le attività della Fase 2 gli studenti vengono guidati nel passaggio dal linguaggio naturale al linguaggio matematico e seguiti nel formalizzare la strategia vincente sotto forma di teorema con relativa dimostrazione.
Nella Fase 3 i ragazzi vengono impegnati nel pensare a possibili varianti del gioco del 20. Gli studenti, divisi in gruppi, formulano varianti e le propongono agli altri gruppi. Anche questa volta sono invitati a trovare una strategia vincente, se esiste, e, in caso positivo, ad elaborare l'enunciato del teorema con la relativa dimostrazione.
Per gli scopi del percorso, vengono anche introdotte le classi di resto e si fa notare come si può giungere allo stesso risultato percorrendo diverse strade che hanno alla base contenuti matematici apparentemente lontani.

3. Risultati e conclusioni

L'attività è stata proposta in classe sotto forma di laboratorio di matematica (Anichini *et al.*, 2004; Chiappini, 2007) in cui gli studenti collaborano alla ricerca di strategie vincenti e alla formulazione di nuovi giochi e di nuovi teoremi.
Il percorso proposto non si delinea come appendice o approfondimento della programmazione tradizionale ma come un approccio laboratoriale insolito a temi fondamentali della disciplina, in cui si passa da una modalità trasmissiva del sapere a una modalità in cui gli studenti sono protagonisti attivi della costruzione del proprio sapere.
L'intero percorso e i risultati dell'attività condotta verranno illustrati in occasione del Convegno.

Bibliografia

Anichini G., Arzarello F., Ciarrapico L., et al., editors. (2004). *Matematica 2003*. Lucca: Matteoni stampatore.
Capone, R., Rogora E., Tortoriello F. S. (2017). La matematica come collante culturale nell'insegnamento. *Matematica, Cultura e Società*, 2, 293-304.
Chiappini, G (2007), Il laboratorio didattico di matematica: riferimenti teorici per la costruzione. *Innovazione educativa*, 3(8), 9-12.

Forme e Colori della Matematica nella Palermo Felicissima

Maria Concetta Di Prima
Liceo Scientifico Benedetto Croce, Palermo

E-mail: mdiprima@libero.it

Roberta Ducato
Liceo Scientifico Benedetto Croce, Palermo

E-mail: roberta.ducato@libero.it

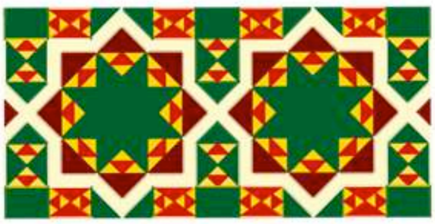
Abstract. *Questo laboratorio è una delle attività proposte agli studenti del Liceo Scientifico Benedetto Croce di Palermo nell’ambito del progetto di Alternanza Scuola Lavoro a cui hanno partecipato, realizzando il sito web www.artmatpalermo18.altervista.org dal titolo “Forme e Colori della Matematica nella Palermo Felicissima e non solo”, che ha vinto il Premio Archimede 2018 “Matematica è Cultura”.*
Scopo di questo laboratorio è scoprire la matematica nascosta negli artefatti di Palermo Felicissima e venire a contatto col pensiero dei geni del passato, come Keplero e gli artisti Arabo-Normanni, senza i quali la civiltà occidentale sarebbe molto diversa.

1. Matematica nascosta

In geometria piana, si dicono tassellature o tassellazioni i modi di ricoprire il piano con una o più figure geometriche ripetute all'infinito senza sovrapposizioni. Tali figure geometriche, (dette "tasselli"), possono essere poligoni, regolari o no, possono anche avere lati curvilinei, o non avere alcun vertice. L'unica condizione che solitamente si pone è che siano semplicemente connessi, ovvero che siano un pezzo unico e ricoprano l'intero piano, senza lacune. Nel 1891 E. S. Fedorov, cristallografo russo, elaborò per primo una classificazione di tutte le 17 possibili simmetrie delle tassellazioni, già presenti nell’Alhambra, capolavoro dell’arte araba i cui primi edifici risalgono all’XI secolo.
Ma non serve andare così lontano: anche a Palermo, capitale italiana della Cultura 2018, nella Cappella Palatina, sono presenti bellissimi mosaici arabo-normanni intrisi della sapienza geometrica degli sconosciuti artisti che li hanno creati. E questi piccoli mosaici ci hanno dato l’occasione di utilizzare le nostre conoscenze matematiche per trovare la soluzione del rompicapo della loro costruzione, idee vecchie un millennio.





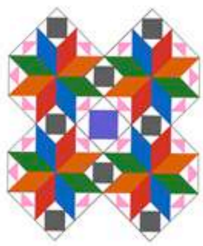


Figura 1. *Foto di mosaici della Cappella Palatina e loro riproduzione in Geogebra*

Anche camminando per Palermo, per la centralissima e ottocentesca via Libertà, per le vecchie stradine o nelle antiche case del Centro Storico, o per la trafficata e ultramoderna viale Strasburgo, basta guardare distrattamente per terra e vedere tassellazioni regolari ovunque, che i nostri allievi hanno riprodotto sia in Geogebra, che manualmente con l'inchiostro di china.

Figura 2. *Pavimentazione di Vicolo Castelnuovo, traversa del Cassaro, e sua riproduzione in Geogebra*

2. Organizzazione del Laboratorio

A partire dallo studio delle tassellazioni costituite da poligoni regolari, dello stesso tipo ovvero di tipo diverso (tassellazioni regolari ed archimedee, classificate per la prima volta nella storia da Keplero nel II Libro dell'*Harmonices Mundi*, pubblicato nel 1619), la nostra attenzione si è concentrata sulla matematica nascosta nei mosaici della Cappella Palatina.
Il laboratorio, proposto ad allievi del triennio del Liceo Scientifico, è stato realizzato in sinergia con i docenti di Disegno e Storia dell'Arte e di Latino. Tutti gli studenti che hanno partecipato al progetto hanno seguito una lezione preliminare sulle tassellazioni regolari e archimedee con cenni storici sul loro studio sistematico da parte di Keplero nell'Harmonices Mundi. Gli stessi, poi, divisi in gruppi, hanno svolto le seguenti attività:

- visita, guidata dai docenti di Storia dell'Arte e Matematica, in città, per fotografare e individuare gli artefatti che richiamano i concetti matematici studiati;
- riproduzione, in Geogebra o manuale, degli artefatti individuati;
- traduzione dal Latino di parte del secondo libro dell'Harmonices Mundi sotto la supervisione degli insegnanti di Latino e Matematica.

3. Proposta per ulteriori approfondimenti

Un possibile approfondimento, da trattare assieme al docente di Scienze, è lo studio delle tassellazioni aperiodiche di Penrose la cui geometria ricalca quella dei quasi-cristalli, materiali scoperti dal fisico israeliano Dan Shechtman, premio Nobel per la Chimica 2011, che promettono applicazioni tecnologiche che cambieranno il nostro futuro.

4. Conclusioni

Questo approccio interdisciplinare, applicato da noi docenti per il Premio Archimede 2018, ci ha consentito di scoprire potenzialità enormi, anche e soprattutto in studenti che non brillano nel normale curricolo e con i metodi tradizionali d'insegnamento, facendoci rendere conto dell'efficacia della didattica laboratoriale e del fatto che i nostri studenti sono come degli scrigni che hanno bisogno della chiave giusta per dischiudere tutti i loro tesori.

Ringraziamenti

Si ringraziano: il Prof. Aldo Brigaglia, docente del "Laboratorio di Geometria" del P.N.L.S. collegato alla nostra partecipazione al Premio Archimede, per i preziosi suggerimenti durante la realizzazione del sito; i Professori Antonio Basile e Paola Campanella, docenti di Disegno e Storia dell'Arte, e la Professoressa Isabella Tondo, docente di Latino, del Liceo Benedetto Croce, per la paziente e inestimabile collaborazione; gli studenti che si sono prodigati con passione e impegno nella realizzazione del progetto, in particolare gli alunni Riccardo Conciauro, Samuele Mangiapane e Dimitri Tsolakis che si sono distinti per il loro costruttivo contributo, dimostrando di aver colto pienamente lo spirito del percorso proposto.

Bibliografia

Brigaglia, A. (2018). *Comunicazione orale.*
Caiati, G., Castellano, A. (2012). *Ruota*, *trasla e . . . rifletti*. Quaderni a quadretti. Mimesis
Catastini L., Ghione F. (2011). *Matematica e Arte*: *Forme del pensiero artistico*. Springer.
www.artmatpalermo18.altervista.org (2018) *Forme e Colori della Matematica nella Palermo Felicissima e non solo.*

Problemi "reali" di matematica. Un'indagine sperimentale sugli approcci adottati dagli studenti della Scuola Secondaria di I e di II grado

Donatella Maria Collura, Gabriele De Biase, Chiara Lucchesi, Serena Morabito
Università degli Studi di Palermo

E-mail: *chiaralucchesi@hotmail.com*, *serenamorabito@hotmail.it* ,
dony.collura@gmail.com, *gabriele.debiase989@libero.it* .

Abstract. *Gli autori hanno ideato e realizzato un progetto che ha messo a confronto due gruppi di studenti appartenenti a due cicli d'istruzione diversi, con lo scopo di indagare le loro capacità intuitive e di problem solving matematico. L'analisi dei dati ottenuti dalla somministrazione di un test, appositamente elaborato, non ha evidenziato, nonostante il diverso livello di maturazione intellettuale tra le due classi campione, sostanziali differenze sia per quanto riguarda le strategie utilizzate dagli studenti che per gli errori da loro commessi, confermando le aspettative.*

1. Introduzione e motivazione

Il lavoro che si vuole presentare in questa sede arriva a conclusione di un progetto nato dalla sensazione che nelle ore scolastiche di matematica manchi la vera essenza della *matematica*, come già espresso da Lockhart nel suo "A Mathematician's Lament" (2009).
Lo studio della matematica, infatti, oltre che educare al rigore scientifico, dovrebbe favorire lo sviluppo delle capacità logiche e il ragionamento deduttivo, stimolando l'immaginazione ed il pensiero divergente. Fermandosi unicamente all'aspetto rigoroso della matematica il rischio è che venga percepita dagli studenti come un mero dispiegamento di regole e formule da ricordare a memoria, suscitando in loro sentimenti di sconforto e noia. L'insegnamento della Matematica dovrebbe prevedere una didattica che per ciascun livello d'istruzione fissi degli obiettivi che comprendano anche quelli del livello precedente (D'Amore,1999), naturalmente intesi con un maggior grado di complessità e consapevolezza da parte dell'alunno. Nonostante le *Nuove Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione* (2012) mettano l'accento su obiettivi di apprendimento e traguardi per lo sviluppo delle competenze, sembra che la strada da percorrere sia ancora lunga, a giudicare dall'astio, ancora diffuso tra gli studenti, nei confronti di questa materia. Dati questi presupposti, si è voluto indagare in che misura gli strumenti forniti dalla *matematica* per investigare la realtà vengano effettivamente acquisiti ed interiorizzati dagli studenti e quanto l'eventuale acquisizione di tali strumenti rappresenti, invece, un freno alla loro creatività.
Il lavoro svolto, dato il ridotto campione coinvolto, non pretende di dare dei risultati generali, ma di fornire un metodo e degli strumenti con i quali poter replicare il laboratorio esperienziale proposto, al fine di estendere il campione e rendere più significativi i dati raccolti.

2. Descrizione del laboratorio svolto e metodologia

Il progetto ha visto coinvolte due classi appartenenti a cicli d'istruzione diversi: una classe terza della Scuola Secondaria di I grado ed una frequentante il terzo anno di Liceo Classico, scelte all'interno di uno stesso Istituto della città di Palermo. Il laboratorio esperienziale è consistito nel mettere indirettamente a confronto le due classi tramite la somministrazione di un *test* e di un *questionario* conoscitivo, appositamente realizzati e strutturati in modo tale che le situazioni problematiche proposte nel test fossero assimilabili ad esperienze di vita quotidiana e che il questionario facesse emergere il rapporto degli studenti con la Matematica. Il *test*, a risposta aperta, propone quattro situazioni problematiche, ognuna delle quali fa riferimento ad un ambito specifico della Matematica: Aritmetica, Geometria, Algebra e Calcolo delle Probabilità. Si è scelto di lavorare su più registri semiotici, quali il linguaggio naturale, il linguaggio aritmetico formalizzato e quello tabulare, allo scopo di analizzare le competenze degli studenti nei processi di traduzione nei vari item tra differenti linguaggi. In questo senso il riferimento teorico utilizzato è stato quello di Duval (2006) per le funzioni di trattamento e conversione. I singoli quesiti sono stati studiati accuratamente per garantire molteplici strategie risolutive ed in modo tale che la *matematica* al loro interno sia quanto più possibile mimetizzata, così da mettere lo studente in una condizione di "creatività risolutiva". L'intento originario era, infatti, quello di valutare la capacità degli studenti di avvalersi degli strumenti matematici acquisiti ed in mancanza di questi di ricorrere a strategie risolutive derivanti dall'intuito o dal senso pratico. Un fondamentale strumento di lavoro per la fase finale di analisi dei dati, è stata l'*analisi a priori* (Brousseau, 1986) delle strategie risolutive adottabili per ciascun quesito e dei relativi errori attesi dalla sperimentazione. Successivamente alla fase laboratoriale svolta in aula, si è appunto sviluppata un'analisi di tipo quantitativo incentrata sulla rilevazione e catalogazione delle strategie utilizzate e degli errori commessi dagli studenti nell'affrontare le situazioni problematiche proposte. I dati ricavati sono stati riportati in tabelle riepilogative ed i risultati complessivi messi in relazione con quelli emersi dalle risposte fornite dagli studenti al questionario conoscitivo.

3. **Risultati**

I risultati ottenuti dalla sperimentazione, come mostreremo durante il convegno, hanno delineato un quadro molto preoccupante: i tre anni di differenza che intercorrono tra le due classi non si sono rivelati un fattore discriminante nel fornire agli studenti strumenti matematici diversificati con i quali approcciarsi alle situazioni problematiche proposte. Entrambe le classi si sono mostrate carenti nelle conoscenze di base oltre che poco inclini al pensiero divergente e, in generale, non in grado di affrontare situazioni problematiche "nuove", prive di una procedura matematica prontamente accessibile per risolverle. La sensazione è che negli studenti che hanno preso parte alla sperimentazione lo studio della Matematica non abbia favorito in maniera determinante lo sviluppo delle capacità di problem solving matematico.

Bibliografia

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 7*(2), 33-115.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics, 61*(1-2), 103-131.

D'Amore B. (1999). Elementi di didattica della matematica. Bologna: Pitagora.

Lockhart P. (2010). Contro l'ora di Matematica. Milano: Rizzoli.

MIUR (2012). Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione. *Annali della Pubblica istruzione.*

"Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)", n.1 Numero speciale n.2, 2018
G.R.I.M. (Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo)

Geometra amanuense o Geometra digitale?

Adele Rosalba Ruggeri
I.C. 1 "Foscolo" di Taormina (ME)

e-mail: adelerosalba@gmail.com, adelerosalba.ruggeri@istruzione.it

Abstract: *L'intervento prende il via dal tema scelto per un dibattito (topic) svolto in 1A nel maggio 2018. L'idea del topic si è fatta avanti come parte della proposta didattica sviluppata in seno al corso "Insegnamento/ apprendimento della Matematica con Geogebra: aspetti didattici (B)" frequentato presso il polo didattico dell'università di Catania. Insegnando Matematica nella scuola secondaria di primo grado ritengo fondamentale in questa fascia d'età sia lo sviluppo di competenze tecniche relative al disegno geometrico sia l'avvio ad un uso consapevole di un software di geometria dinamica; da qui l'idea di porre a confronto le diverse modalità operative e le preferenze dei miei studenti. Il topic ha appassionato gli studenti e ha convinto le famiglie, informate della sperimentazione. Esso è stato oggetto di interesse da parte di tre ricercatrici dell'INDIRE in visita per l'osservazione in classe dell'IDEA Debate presso il mio Istituto, scuola aderente al Movimento delle Avanguardie Educative.*

1. Didattica innovativa presso l'I.C. 1 "Foscolo" di Taormina

Dall'a.s. 2015/'16 l'I.C. 1 "Foscolo" di Taormina ha aderito al Movimento delle Avanguardie Educative promosso da INDIRE adottando le Idee Debate e Flipped Classroom. La sottoscritta ha proposto l'adesione a queste due Idee, ciascuna delle quali contamina, si poggia e aiuta a sviluppare l'altra, come ulteriore stimolo per gli alunni al fine di recuperare una delle competenze trasversali in cui le classi dell'Istituto nelle prove standardizzate esterne risultavano deficitarie: saper argomentare! La formazione mi ha consentito di avviare la sperimentazione nelle mie classi con attività condotte sia su tematiche strettamente disciplinari sia su altre trasversali e di attualità (es. debate "Pro o contro G7 a Taormina?"); sia singolarmente (es. "Pro o contro gli algoritmi insoliti?") sia con un team di docenti aderenti allo stesso topic (es."Pro o contro l'immigrazione?"); sia all'interno della singola classe sia con più classi in contemporanea (es. debate "Argimusco tra storia e leggenda"). Lo sviluppo dei Debate nelle classi ha subito adeguamenti e personalizzazioni rispetto ai modelli proposti dalle scuole capofila a seconda delle caratteristiche delle classi e, in particolare, dei "debater" stessi.

1.1 Perché il dibattito in Matematica

Troppo spesso gli alunni alla richiesta di argomentare una scelta o una procedura nelle prove standardizzate, meno frequentemente di fronte ai classici "*perché?*" dell'insegnante di Matematica, restano privi di risposte o formulano frasi "deboli" e/o poco rigorose – da interpretare – se non addirittura sconnesse. Eppure "l'intuizione" non manca e, volendo essere obiettivi, in tanti casi non è neanche una questione di limitate capacità razionali! Ciò che di solito si perdono… sono le "*parole giuste al posto giusto!*". Tali difficoltà hanno rappresentato la motivazione principale che, dal punto di vista didattico, mi ha condotto a maturare l'idea di sviluppare veri e propri Debate anche in ambito matematico suscitando l'interesse delle ricercatrici INDIRE poiché risulta una scelta didattica per nulla diffusa tra le scuole adottanti. Mettere in atto una didattica innovativa e sicuramente coinvolgente, visto anche il necessario lavoro di gruppo per il Debate a squadre, poco diffusa in ambito nazionale per questa disciplina, ha ulteriormente spinto sull'orgoglio, sulla curiosità e sulla voglia di ben riuscire da parte degli alunni coinvolti: la classe 1A di scuola sec. di primo grado.

1.2 La sperimentazione nella classe 1^A, un contesto ben preciso

L'organizzazione dei Debate non segue uno schema rigido e standard, ma viene plasticamente adeguato a seconda della classe e del topic selezionato. Il Debate per la classe 1^A ha previsto la formazione delle squadre in modo spontaneo e legata alla propensione del singolo, ma in altri casi (e/o altre classi) l'organizzazione delle squadre è stata fatta a sorteggio o dalla sottoscritta. Le motivazioni sono riconducibili alle dinamiche interne: una classe a forte prevalenza maschile -15M, 8F- con una scarsa propensione al rispetto del turno di parola sia nelle interrogazioni sia negli interventi nelle discussioni di classe, un livello di socializzazione per nulla soddisfacente con un'alta propensione agli insulti personali, rispettosi delle regole solo con alcuni docenti. Tale contesto chiarisce la motivazione secondo la quale i debater hann atteso "rigidamente" il proprio turno di parola per rispondere agli avversari e non essere coadiuvati, nello stesso intervallo di tempo, da altri compagni di squadra.
Il presente evento ha avuto la seguente struttura:
- due squadre, ciascuna con 10 alunni (adesione volontaria), nessuno escluso (n.3 alunni assenti)
- un componente per l'arringa finale all'interno di ciascuna squadra
- un cronometrista (il docente)
- un cine – operatore (il docente di sostegno)
- giuria di qualità (le ricercatrici INDIRE, coordinatrici dell'IDEA Debate a livello nazionale: dott.sse Cinganotto, Mosa, Panzavolta)
- tempo a disposizione per ciascun intervento: 1 minuto (attività formale)
- tempo a disposizione per l'arringa finale: 2 minuti (attività formale)
- discussione tra i debater e la giuria di qualità (momento non formale).

Regolamento: 1. due manche di 10 alunni l'una (5per squadra) e interventi alternati tra le due squadre, a seguire l'arringa finale; 2. scelta di squadra del portavoce per l'arringa finale e l'ordine di intervento dei debater; 3. nessuna interruzione all'avversario; 4. argomentazioni della squadra in risposta agli avversari; 5. nessuna "aggressione verbale"; 6. tempi: per ciascun debater 1 minuto, pausa di 5 minuti a conclusione di ciascuna manche per fare il punto della situazione tra tutti i componenti della squadra e prosecuzione secondo strategia interna; 7. avvio della prima manche e conclusione con arringa finale da parte della squadra che vince il sorteggio T/C.

2. Verso quali competenze?

La pratica del Debate, nel corso del triennio, contribuisce a sviluppare competenze trasversali e disciplinari tra cui sottolineo: capacità di produrre argomentazioni, sviluppare il pensiero razionale, sostenere le proprie opinioni in pubblico, ricercare e selezionare informazioni, sviluppare atteggiamenti inclusivi, sviluppare autocritica attraverso processi di autovalutazione.

Ringraziamenti:
agli studenti della classe 1^A di scuola secondaria di primo grado del plesso di Taormina Centro (a.s. 2017/'18) protagonisti in questa la sfida, ai genitori della stessa classe che hanno creduto nella validità dell'azione didattica, al Dirigente Scolastico che ha sostenuto, da sempre, la formazione / sperimentazione, alle ricercatrici INDIRE (Mosa, Cinganotto, Panzavolta) responsabili dell'IDEA DEBATE

Appendici: https://ic1taormina.wordpress.com/2018/05/15/idea-debate/

Sitografia: http://www.indire.it/progetto/avanguardie-educative/ account personale di Avanguardie Educative.

SIRENE, framework per l'insegnamento della matematica

Prof. Guido Averna
Dipartimento di Matematica ed Informatica, Palermo.
Istituto Superiore "IS ISA CONTI ELLER VAINICHER", Lipari.

E-mail: guido.averna@unipa.it, guido.averna@pec.it

Abstract.
Dal secolo scorso, si sono sviluppati molti linguaggi di programmazione per l'informatica. Svariati ambienti di sviluppo sono stati implementati per ogni linguaggio di programmazione, ognuno con una sua propria filosofia e proprie caratteristiche. La matematica dispone di pochi strumenti per il suo insegnamento ed apprendimento. Tuttavia l'informatica e la matematica sono discipline molto affini. In questo articolo si propone un frame work di sviluppo iconico, denominato SIRENE, per la programmazione, utile anche all'insegnamento e all'apprendimento della matematica. SIRENE sfrutta le proprietà dei diagrammi di flusso e delle mappe concettuali, è supportato da qualunque browser, crea un ambiente di lavoro in aula e in ambito e-learning, realizza un approccio distributivo e collaborativo in tempo reale, fornisce un vero codice sorgente in linguaggio C e crea un vero programma eseguito nel browser.

1. Introduzione

In letteratura è possibile trovare molti strumenti di sviluppo per implementare programmi in diversi linguaggi di programmazione. Alcuni di questi possono essere utilizzati per l'insegnamento dell'informatica. Tra i framework più conosciuti è possibile trovare Scratch [1], App Inventor [2], LabView [3]. Diversamente dall'informatica, pochi strumenti sono stati sviluppati per la matematica, ancor meno per il suo insegnamento ed apprendimento. Geogebra [4] risulta essere uno dei più utilizzati. Tuttavia, l'informatica e la matematica sono materie molto affini, ed è possibile sfruttare le potenzialità dell'informatica, e degli strumenti ad essa dedicati, per avviare percorsi multidisciplinari, usando strumenti idonei, che insegnino la matematica. Inoltre, entrambe le discipline adoperano e potenziano il pensiero computazionale [5] per risolvere i problemi concreti da un punto di vista astratto. In questo articolo si propone l'uso di un framework, SIRENE, che, utilizzando un comune browser, permette di sviluppare programmi usando un linguaggio visuale, misto tra i diagrammi di flusso e le mappe concettuali, e permette la collaborazione tra gli studenti, in un ambiente distribuito e in tempo reale. Inoltre, SIRENE permette di visualizzare il risultato dell'applicativo sviluppato e promuove lo sviluppo del pensiero computazionale.

2. Uso di SIRENE come strumento multidisciplinare per la matematica.

SIRENE, Shared InteRactive ENvironment for Encoding, è un framework iconico utilizzabile in un comune browser e in qualunque dispositivo, che sia un computer o uno smartphone. La sua interfaccia grafica è ibrida tra i diagrammi di flusso e le mappe concettuali. Con SIRENE è possibile modellare dei grafici utilizzando costrutti iconici, tipici della programmazione, al fine di realizzare algoritmi e programmi. L'interfaccia grafica comprende 5 sezioni, vedi Fig.1: a) sezione dei Costrutti, b) sezione dell'Area Visuale, c) sezione del Codice Sorgente, d) sezione dei Tab di navigazione nel programma, ed e) sezione del Menù. L'interfaccia grafica consente di costruire i grafici mediante la concatenazione dei costrutti inseriti in SIRENE. I costrutti vengono connessi tra loro per mezzo di archi, o frecce. La concatenazione delle icone, partendo dall'icona "Start", realizza un percorso e, quindi, il grafico, il quale definisce un algoritmo e il suo comportamento. L'utente deve inserire in ogni icona un particolare concetto da visualizzare. Ad ogni icona è associato una porzione di un codice sorgente del programma. E' così possibile definire visualmente, ad esempio, un algoritmo per la risoluzione di un'equazione di primo grado, di secondo grado, e così via. Ogni azione di modifica nel grafico da parte di un utente è istantaneamente visibile nel browser di tutti gli altri utenti. Alla fine del processo di realizzazione del programma, SIRENE permette di eseguire realmente l'applicativo sviluppato visualmente, fornendo un feedback immediato e concreato a tutti gli utenti. L'approccio diagrammatico del linguaggio visuale consente di focalizzare l'attenzione dello studente nel processo di risoluzione di un problema concreto in maniera astratta, formando e potenziando il pensiero computazionale. Gli insegnanti di matematica possono così ottenere un valido aiuto da SIRENE per schematizzare concetti matematici, anche complessi, e renderli più appetibili, e meno ostici, agli occhi degli studenti. Inoltre, poiché SIRENE permette di eseguire il programma direttamente nel browser, gli studenti possono verificare i concetti acquisiti concretamente.

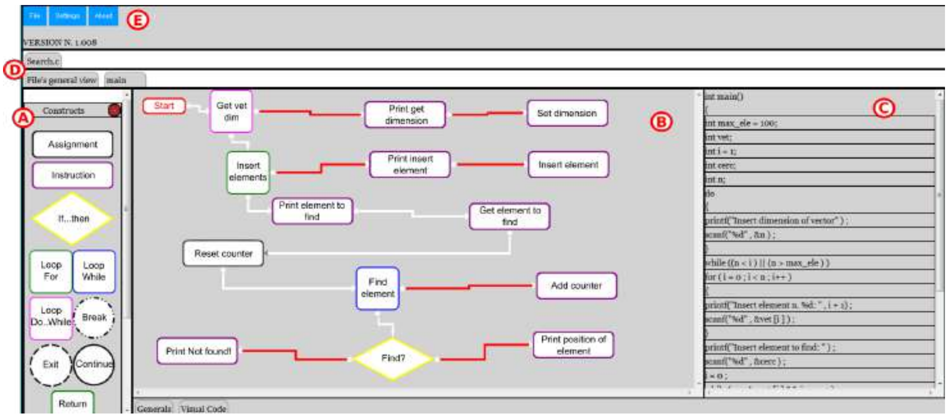


Figura 1. *Esempio di algoritmo: ricerca di un elemento in un vettore con SIRENE.*

3. Conclusioni

SIRENE è uno strumento didattico utile all'apprendimento dell'arte della programmazione. Tale framework può essere utilizzato anche per l'insegnamento della matematica. SIRENE permette l'insegnamento in un ambiente distributivo e collaborativo, sia in aula e sia in ambito e-learning, tra gli insegnanti e gli alunni, utilizzando un linguaggio visuale e potenzia il pensiero computazionale. Inoltre, può essere utilizzato da qualunque dispositivo e computer.

Bibliografia

[1] Maloney, J., Resnick, M., Rusk, N., Silverman, B., & Eastmond, E. (2010). The scratch programming language and environment. ACM Transactions on Computing Education (TOCE), 10(4), 16.
[2] Pokress, S. C., & Veiga, J. J. D. (2013). MIT App Inventor: Enabling personal mobile computing. arXiv preprint arXiv:1310.2830.
[3] Travis, J., & Kring, J. (2007). LabVIEW for everyone: graphical programming made easy and fun. Prentice-Hall.
[4] Ferrarello, D., Mammana, M. F., Pennisi, M., & Taranto, E. (2017). Teaching intriguing geometric loci with DGS. In Mathematics and Technology (pp. 579-605). Springer, Cham.
[5] Wing, J. M. (2006). Computational thinking. Communications of the ACM, 49(3), 33-35.

Lezioni Americane

Beniamino Danese
Reinventore srl e Liceo Don Mazza, Verona

E-mail: beniamino.danese@reinventore.it

Abstract/Riassunto. *La scuola di matematica in America si può suddividere in tre parti: la matematica popolare, la matematica scolastica e l'eccellenza in matematica. In tutt'e tre riveste un ruolo importante il "gioco matematico". Si illustra questo fatto attraverso tre figure rappresentative, Martin Gardner per la matematica popolare, Howard Eves per la matematica scolastica, John von Neumann per l'eccellenza in matematica. La tesi o lezione principale che ne risulta è l'importanza del gioco matematico ad ogni livello scolastico.*

1. La scuola di matematica in America

È sicuramente interessante riflettere sulla formazione della scuola di matematica in America, che è stata costruita in un tempo relativamente breve.
Ogni scuola ha bisogno di manutenzione continua, ristrutturazione, innovazione. La scuola di matematica in Italia (anche se più antica) non fa eccezione, e per questo è interessante riflettere su cosa fanno gli altri, quando fanno le cose bene. Ci sono naturalmente degli aspetti irripetibili nella formazione della scuola di matematica in America, come l'immigrazione di matematici dovuta alla seconda guerra mondiale, e il particolare "tempo" o "secolo". Ma ci sono anche almeno tre aspetti ripetibili che hanno per noi lezioni interessanti.
C'è una matematica popolare, una matematica scolastica, un'eccellenza scientifica in matematica.
In tutti questi tre aspetti incontriamo in modo molto chiaro il gioco e l'aneddoto matematico, che hanno grande importanza nel passaggio dall'apprendimento informale all'apprendimento formale, e nell'approccio alla matematica in generale.

2. Matematica popolare: I giochi matematici di Martin Gardner

Martin Gardner (1914-2010) scrisse ogni mese una rubrica di matematica ricreativa su Scientific American. Cominciò con un articolo sugli esaflexagoni nel numero di Dicembre 1956. L'editore suggerì una rubrica regolare, e il numero di gennaio 1957 ospitava la prima rubrica, chiamata "Giochi Matematici". Gardner continuò a scrivere i "Giochi Matematici" mensili fin negli anni 80. Il numero di maggio 1986 fu l'ultimo della rubrica.
Tutti gli articoli sono stati raccolti in libri, dove oltre al testo originale ci sono informazioni aggiornate e occasionalmente capitoli extra. Molte domande senza risposta nell'articolo ricevono risposta negli addenda, dopo che i lettori erano stati ispirati ad affrontare i problemi.
Molti di questi libri sono tradotti in italiano, mentre nell'originale inglese sono più facilmente reperibili su internet. Si tratta di un corpus di enigmi e giochi matematici imponente, al quale si può attingere per ogni livello di scolarità.

3. Matematica scolastica: Le storie e gli aneddoti di Howard Eves

Il matematico e insegnante Howard Eves (1911-2004) scrisse molti lavori di storia della matematica, che contribuirono in modo speciale all'insegnamento della matematica negli Stati Uniti. Il suo lavoro costituisce un corpus di enigmi e giochi matematici, da un lato, tratti dalla

storia della matematica. D'altro lato, il suo lavoro costituisce anche un corpus di storie e aneddoti sulla matematica e i matematici.
Scrive Eves:
In un modo o in un altro, col passare degli anni e senza particolare sforzo da parte mia, un gran numero di storie e aneddoti sulla matematica hanno incrociato la mia strada e sono rimasti nella mia mente. Queste storie e aneddoti si sono rivelati molto utili in classe, come piccoli atomi genera-interesse, per aggiungere un po' di pepe e un tocco di intrattenimento, per introdurre un elemento umano, per ispirare lo studente, per istillare rispetto e ammirazione per i grandi creatori, per ricacciare indietro i cali di interesse, per forgiare alcuni collegamenti di storia culturale, o per sottolineare un concetto o un'idea. Molti studenti e insegnanti mi hanno chiesto di mettere per iscritto queste storie e aneddoti. Alla fine ho ceduto.

Queste riflessioni per "storie e aneddoti" sono naturalmente valide anche per "il gioco matematico". È pertanto molto ragionevole accorparli insieme come strumenti che aiutano a collegare l'apprendimento informale e l'apprendimento formale.

4. Eccellenza in matematica: Il mondo come gioco matematico di John Von Neumann

Gli Stati Uniti furono il paese dove si dispiegò il genio matematico dell'ungherese John Von Neumann (1903-1957), una delle principali figure del pensiero matematico del novecento.
In un importante lavoro, Giorgio Israel e Ana Millán Gasca hanno raccontato la vita e le idee di Von Neumann sottolineando una delle sue idee più radicate, e radicali: Il mondo come gioco matematico. Una simile weltanschaaung ci dice non solo che, per il matematico, dimostrazioni e problemi sono come giochi, enigmi da risolvere, con passione e divertimento ma anche rispettando certe regole. E che quindi la matematica vera e la matematica che si fa a scuola diventa un gioco.
"Il mondo come gioco matematico" ci dice anche che il mondo, lo studio della natura, ma anche delle relazioni umane, è un gioco da affrontare con passione e divertimento ma anche rispettando certe regole (un punto di vista che dopotutto è anche sapienziale). La vita è un gioco matematico.

5. Conclusioni

In Italia la scuola di matematica è molto più antica, composita e stratificata di quella americana. Ma le "lezioni americane" ci aiutano a individuare queste tre parti anche nella nostra scuola. E ci suggeriscono il gioco matematico e la storia matematica come strumenti per continuare la manutenzione, ristrutturazione e innovazione nella nostra scuola.

Bibliografia

Eves, A. (1969-2003). *Mathematical Circles.* The Mathematical Association of America.
Israel, G, Millán Gasca, A. (1992). *Il mondo come gioco matematico: la vita e le idee di John Von Neumann*. Torino: Bollati Boringhieri.

L'E.A.S. come metodologia didattica per l'insegnamento della matematica nella Scuola Secondaria di Primo Grado

Gianluigi Votino
I.C. Archimede-La Fata Partinico (Palermo)

E-mail: gianluigivotino1@gmail.com

Abstract/Riassunto: *Nel 2007 due insegnanti di chimica della scuola secondaria, J. Bergmaan e A. Sams si sono accorti che entrambi percepivano la propria attività come troppo meccanica e arida. Nasce la Flipped classroom, un metodo di insegnamento dove gli alunni sono i protagonisti e il docente diventa una guida che accompagna nella scoperta dei saperi e le sue applicazioni. Nel 2012-13 il Prof. Pier Cesare Rivoltella introduce l'E.A.S., dove non è solo la classe ad essere "capovolta", ma tutto lo schema di lavoro. Il metodo EAS (Episodi di Apprendimento Situato) risponde in maniera quasi naturale alla richiesta di "competenze", perché coniuga sapere formale a sapere informale e mette insieme conoscenze e abilità senza un ordine cronologico ma con la scoperta, l'autonomia e la responsabilità. Questo lavoro si pone anche l'obiettivo di dare un esempio pratico di applicazione dell'EAS con un argomento della matematica per la scuola secondaria di primo grado.*

1. L'approccio E.A.S.

L'E.A.S. prevede tre fasi: Preparatoria, Operativa, Ristrutturativa. Ogni fase include ruoli diversi al docente e al discente. Nella realtà il "discente" è costituito da un gruppo di alunni che collaborano (cooperative learning); la classe viene suddivisa in gruppi piccoli di massimo quattro/cinque elementi. La fase preparatoria prevede: esposizione di un framework, stimolo e consegna. La fase operatoria prevede: definizione dei tempi, lavoro dei/nei gruppi. La fase ristrutturativa prevede: esposizione elaborato, analisi critica dell'elaborato. Tutto il lavoro si chiude con un processo di valutazione formativa/sommativa e autovalutazione.

2. Descrizione dell'intervento didattico: un E.A.S con Pitagora

Un' applicazione dell'E.A.S svolta in una seconda classe della Scuola secondaria di Primo Grado. Fase Preparatoria: video stimolo, brainstorming, suddivisione in tre gruppi da cinque alunni. Fase operatoria: consegna dei compiti per gruppo (Gruppo "Egizi": origini e terne pitagoriche; Gruppo "Al Quadrato" Teorema di Pitagora; Gruppo "Figurine" applicazione sulle figure geometriche). Fase ristrutturativa: presentazione elaborato e condivisione con il gruppo classe. La scelta di far lavorare gli alunni con l'E.A.S. e nello specifico sul Teorema di Pitagora nasce dall'esigenza di capire quanto fosse realmente utile e spendibile questo strumento nell'ambito della matematica. I risultati ottenuti sono andati ben oltre le mie aspettative, non solo in termini di valutazione sommativa ma ancor di più in termini di valutazione formativa. Ho avuto modo di comprendere alcuni aspetti dei ragazzi che difficilmente è possibile cogliere se non si esce da alcuni schemi classici di fare scuola.

Bibliografia

Bergman J., Sams A., (2016). *Flip your classroom. La didattica capovolta*, trad. Sergio Pascarella, Giunti Scuola Milano.

Cecchinato G., Papa R., (2016). *Flipped Classroom. Un nuovo modo di insegnare e apprendere*, Utet, Torino.

Maglioni M., Biscaro F. (2014). *La classe capovolta. Innovare la didattica con la Flipped Classroom*, Erickson, Trento.

Rivoltella P.C., *Fare didattica con gli EAS (2013). Episodi di Apprendimento Situato*, La Scuola, Brescia.

Rivoltella P.C. (2016). *Che cos'è un EAS. L'idea, il metodo, la didattica*, La Scuola, Brescia.

Gare a squadre: gioco, divertimento o passione?

Salvatore Messina
Liceo Scientifico Galilei di Catania

E-mail: *svt.messina@libero.it*

Mario Pennisi
Dipartimento di Matematica e Informatica

E-mail: *pennisi@dmi.unict.it*

Abstract: *L'evoluzione dei giochi matematici. La gara più spettacolare di matematica: la gara a squadre. Regolamento, strategie, compiti dei componenti. Analisi dello svolgimento di una gara. Ricadute nell'apprendimento/insegnamento della matematica.*

Imparare è un processo faticoso perché costringe il soggetto a modificare il proprio modo di pensare in funzione delle peculiarità della disciplina che sta studiando. Già Platone (428-348 a.C.) ricordava *In questo paese [l'Egitto] sono stati inventati giochi aritmetici per i bambini, che così imparano divertendosi con piacere. Si danno loro mele e ghirlande da distribuire ad un numero di persone a volte uguale e a volte maggiore o minore del numero degli oggetti a disposizione [...]. Così facendo, con questi passatempi, i bambini prendono confidenza con i numeri, il che consente loro di capire i movimenti e le spedizioni degli eserciti e li prepara a seguire bene i propri affari, rendendo più vivace il loro modo di ragionare*. Se il gioco viene inserito in un contesto agonistico sicuramente questo indurrà un maggior impegno da parte dei concorrenti. Tra le prime sfide matematiche ricordiamo quella riportata nel papiro di Ahmes (1650 a.C.), il problema dei buoi proposto ai matematici alessandrini da Archimede, le sfide matematiche alla corte di Carlo Magno *per rendere acuta la mente dei giovani*, i cartelli di matematici a disfida nel Rinascimento. Nel secolo scorso si sono diffuse le gare matematiche far cui ricordiamo le Olimpiadi di Matematica. È in tale ambito che vengono organizzate le prime gare a squadre. La gara a squadra propone un'altra visione della competizione, in cui si sperimenta il reciproco aiuto, il lavoro di gruppo e la valorizzazione di ogni componente della squadra.

In una gara a squadre, oltre alla capacità di risolvere quesiti, entrano in gioco la strategia da adottare e la gestione del gruppo per ottimizzare i risultati. In questa comunicazione verranno illustrati il regolamento delle gare a squadre, le strategie da adottare, la gestione di un gruppo, i compiti dei componenti la squadra, le modalità di organizzazione di una gara a squadre. In particolare si parlerà delle gare locali (Middle Etniade Team Cup, Etniade Team Cup), di quanto si sta facendo localmente, dalla scuola primaria alla secondaria di secondo grado, per migliorare le prestazioni dei nostri studenti alle semifinali di Cesenatico e delle ricadute dei risultati ottenuti nelle nostre realtà scolastiche al fine di migliorare l'apprendimento/insegnamento della matematica.

Bibliografia:

Aleo, M.A. – Fasciano, M.C. – Ferrarello, D. – Inturri, A. – Micale, B. – Pappalardo, V. – Pennisi, M. (2011). *20 anni di etniade 1992-2011.* La Tecnica della scuola

Delahaye, J.P., *Giochi matematici.* Ghisetti e Corvi

Giornate di studio dell'Insegnante di MATematica

Comunicazioni e laboratori
Scuola Secondaria di II grado

Robot e Matematica

Ercole Castagnola
Formatore T3

E-mail: ercole.castagnola@alice.it

Abstract/Riassunto. *Il seminario è rivolto essenzialmente ai docenti di Scuola Secondaria di II grado, anche se alcuni concetti elementari di programmazione potrebbero essere proposti a studenti del ciclo scolare precedente. Questo seminario si propone di mostrare come sia possibile collegare un piccolo robot a una calcolatrice grafica in modo da far costruire dal robot, azionato dalla calcolatrice mediante un programma precedentemente elaborato, alcune figure geometriche elementari. In tal modo vengono coinvolti gli studenti in due aspetti significativi: 1) la codifica dell'algoritmo che aziona il piccolo robot che costringe lo studente ad analizzare quali movimenti imprimere al robot; 2) individuare le caratteristiche geometriche essenziali della figura che dovrà poi essere costruita dal robot.*

1. TI-Innovator: Un modo nuovo per l'apprendimento della Matematica e delle Scienze

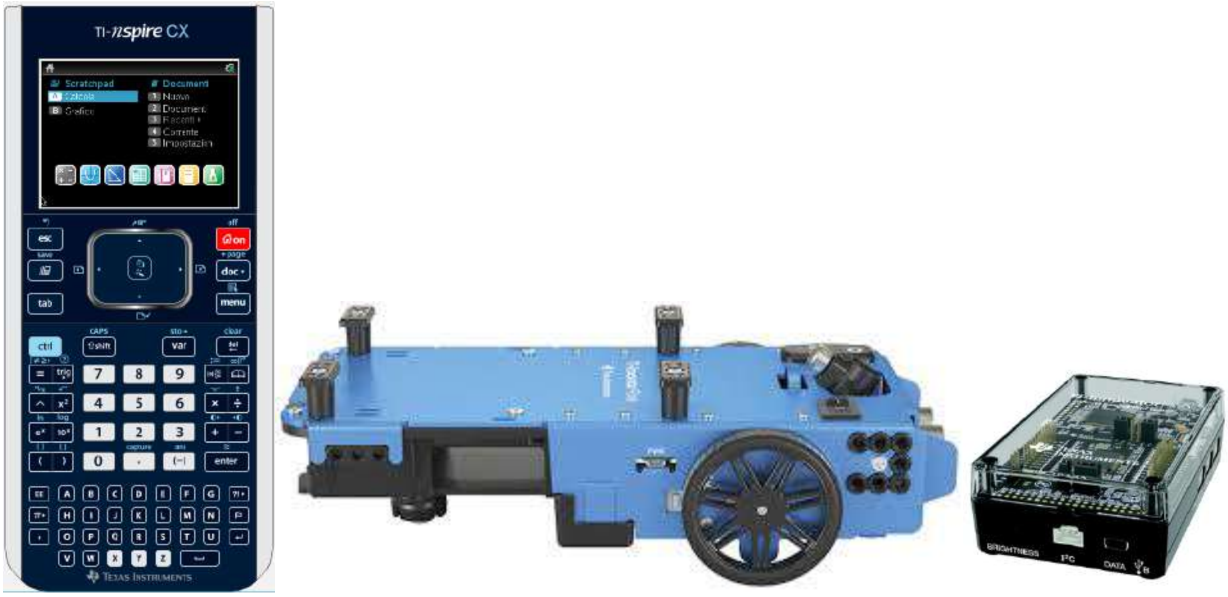
Lo strumento di cui vogliamo illustrare le potenzialità è il seguente

Figura 1. *Il nostro “Robot”*

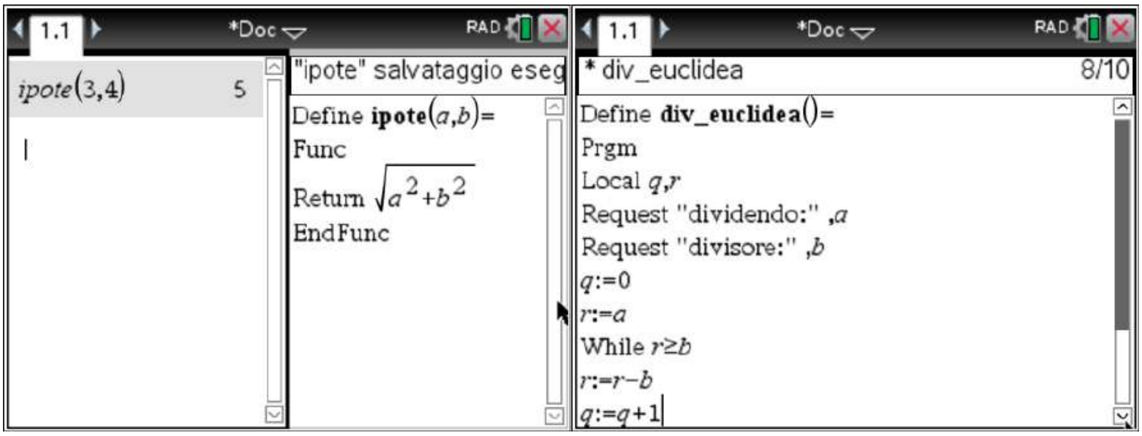
La figura mostra, in forma assemblata i tre componenti fondamentali del nostro strumento:

a) La Calcolatrice grafica programmabile TI-Nspire CX in cui inserire i programmi che governano il movimento.
b) TI-Innovator Rover costituito da un veicolo robotico a due ruote
c) TI-Innovator Hub che traduce in movimenti i comandi che riceve dalla Calcolatrice grafica.

I tre componenti visti separatamente sono i seguenti:



Gli studenti, oltre a utilizzare il linguaggio di codifica TI-Basic (una versione del Basic implementata sulle Calcolatrici grafiche TI) per programmare le componenti del TI-Innovator (cioè il nostro Robot), imparano anche a creare una biblioteca di funzioni e di programmi che possono essere di contenuto strettamente matematico, come mostrano i seguenti esempi.



Il primo, molto semplice, è la codifica di una funzione che calcola la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo, note le lunghezze dei due cateti. Il secondo esempio è un programma per la divisione euclidea tra due interi positivi.
Gli studenti, mentre programmano il Rover per trasformare nozioni di matematica e scienze nel concetto di movimento, aggiungono una dimensione reale alle rappresentazioni verbali, simboliche e grafiche. Questo offre agli studenti la possibilità di comprendere e sperimentare in modo inedito la matematica: la rappresentazione reale consente un nuovo approccio al problem solving in cui matematica, programmazione e movimento sono collegati.
Vogliamo infine sottolineare che la dotazione del veicolo comprende anche un sensore di colore, un sensore di distanza, un display a led, un portapenna per tracciare linee sulla carta e un giroscopio per misurare la rotta.

Sitografia
https://education.ti.com/it/products/micro-controller/ti-innovator-rover
Video (in inglese): https://www.youtube.com/watch?v=gq9m-gvqrQ4

La danza serpentina dei pendoli

Giovanni Bramanti
I.I.S. “G. Marconi” Vittoria (Rg)

E-Mail: g_bramanti@yahoo.it

Abstract: *Si propone un'attività laboratoriale, orientata ad una classe prima o successiva, di modellizzazione di un fenomeno elementare di risonanza cinematica fra i periodi di un gruppo di pendoli. L'apparente semplicità del sistema porta alla scoperta di difficoltà inattese nella sua ricostruzione, che possono essere superate approfondendo i concetti di divisore, massimo comun divisore, minimo comune multiplo, proporzioni ed equazioni, rappresentazioni grafiche di una relazione quadratica. L'attività si appresta ad ulteriori livelli di approfondimento: ad esempio se realizzata fisicamente consente una osservazione “visiva” dello scostamento dalla legge di isocronismo del pendolo.*

1. Attività principale.

1.1 posizione pratica del problema [tempo 10 min; strumenti Geogebra o Desmos, o altro]

Si mostra un video[6] di un sistema di pendoli, che, inquadrati di profilo, si muovono disegnando inizialmente una figura sinuosa che, in un momento intermedio si scompone mostrando i pendoli in moti apparentemente scorrelati, ma dopo un tempo ulteriore l'allineamento viene completamente ripristinato. Come è possibile questo? Gli studenti sono invitati ad analizzare il fenomeno osservato ed a cercare di ricreare la configurazione che lo ha prodotto. A questo proposito si propone l'utilizzo di un'applicazione Geogebra, in cui pendoli sono stati modellizzati come oscillatori armonici con frequenze inversamente proporzionali alla radice quadra della lunghezza, i ragazzi, che non sono tenuti inizialmente a conoscere il modello retrostante, sono invitati a giocare con l'applicazione, possono scegliere le lunghezze di otto pendoli (l'applicazione determina automaticamente il periodo del pendolo) oppure i loro periodi (l'applicazione disegna automaticamente la lunghezza) e possono osservare cosa succede.

1.2. l'inquadramento concettuale [tempo 10+10 min]

A seguito della fase iniziale si raccolgono e si analizzano criticamente i risultati ottenuti partendo dalla descrizione.

1. Le diverse situazioni prodotte somigliavano a quanto abbiamo osservato nel video? In cosa erano simili, ed in cosa differivano?
2. Come avete trovato preferibile lavorare: con le lunghezze o con i tempi?

Quindi per tutti viene posta la domanda guida:

3. se il sistema deve riprendere la posizione iniziale dopo un tempo T in che modo possono essere scelti i periodi dei singoli pendoli? In altre parole se dopo un certo numero di oscillazioni il pendolo i ritorna, al tempo T nella posizione iniziale che relazione sussiste fra il suo periodo τ_i ed il periodo globale T del sistema? Annotata su un foglio le vostre riflessioni.

Esaurita la fase di dibattito si lascia spazio a nuovi tentativi autonomi.

[6] https://www.youtube.com/watch?v=yVkdfJ9PkRQ&feature=youtu.be

Quindi si propone di confrontare alcune possibili scelte. In particolare gli allievi sono invitati a considerare la corrispondenza fra le scelte effettuate e la situazione fisica mostrata dal video iniziale per ciascuna delle tabelle allegate alla pagina 2 ripetendo il confronto iniziale. Discutendo nuovamente secondo le modalità del punto 1 e 2. Si sceglie quindi una tabella su cui lavorare sull'attività successiva. In particolare si porta l'attenzione alla relazione che si può osservare fra i tempi scelti e le lunghezze osservate.

1.3. L'aritmetica del problema, divisore comune massimo, multiplo comune minimo, e proprietà invariantiva [tempo 10 min]

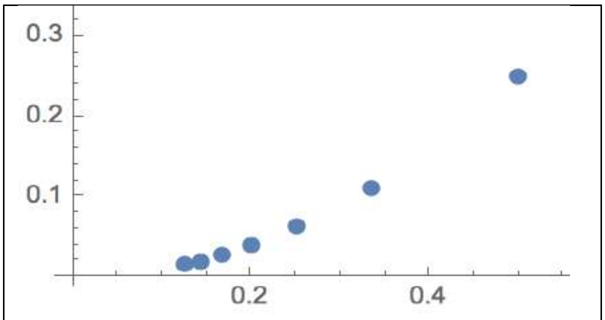
Gli allievi sono adesso invitati a riflettere sulle seguenti "grandi domande": esiste un tempo che è sottomultiplo comune per tutti i tempi? Ovvero un tempo contenuto un numero intero di volte in tutti i tempi della tabella? I ragazzi sono invitati a notare che la proprietà invariantiva suggerisce una risposta al problema. I divisori a quoziente intero di uno dei tempi della tabella, per esempio: $\frac{T}{12}=\frac{2T}{24}=\frac{3T}{36}=\frac{4T}{48}=\frac{5T}{60}=\cdots$ sono quei numeri il cui numeratore è T ed il cui denominatore è un multiplo di 12. Al tempo più grande, cioè al più grande divisore corrisponde il multiplo più piccolo.

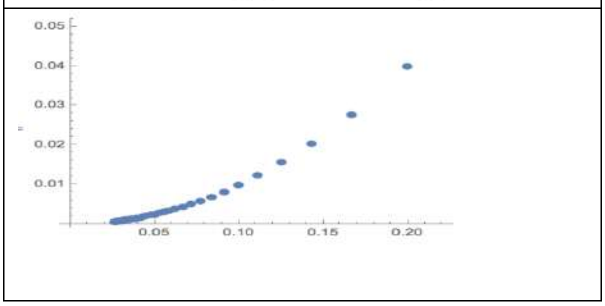
τ_1	$\frac{T}{1}$
τ_2	$\frac{T}{2}$
τ_3	$\frac{T}{3}$
τ_4	$\frac{T}{4}$
τ_5	$\frac{T}{5}$
τ_6	$\frac{T}{6}$
τ_7	$\frac{T}{7}$
τ_8	$\frac{T}{8}$

τ_1	$\frac{T}{21}$
τ_2	$\frac{T}{22}$
τ_3	$\frac{T}{23}$
τ_4	$\frac{T}{24}$
τ_5	$\frac{T}{25}$
τ_6	$\frac{T}{26}$
τ_7	$\frac{T}{27}$
τ_8	$\frac{T}{28}$

τ_1	$\frac{T}{11}$
τ_2	$\frac{T}{12}$
τ_3	$\frac{T}{13}$
τ_4	$\frac{T}{14}$
τ_5	$\frac{T}{15}$
τ_6	$\frac{T}{16}$
τ_7	$\frac{T}{17}$
τ_8	$\frac{T}{18}$

τ_1	$\frac{T}{12}$
τ_2	$\frac{T}{18}$
τ_3	$\frac{T}{23}$
τ_4	$\frac{T}{19}$
τ_5	$\frac{T}{16}$
τ_6	$\frac{T}{15}$
τ_7	$\frac{T}{13}$
τ_8	$\frac{T}{14}$





1.4. Le lunghezze ed i tempi [tempo 10 min]

A questo punto dell'attività bisogna svelare la relazione fra i tempi e le lunghezze. I ragazzi sono invitati a considerare il rapporto fra il quadrato dei tempi e le rispettive lunghezze. Cosa possiamo osservare se riportiamo in un grafico i quadrati ed i tempi? (qualcuno potrebbe notare che questo spiega perché la prima opzione non era fra le migliori, ai tempi più piccoli corrispondevano lunghezze troppo piccole).

1.5. Il momento storico [tempo 5 min]

La relazione fra i periodi e le lunghezze fu notata da Galileo Galilei nel suo laboratorio e riportata fedelmente da questa frase: "… bisogna che la lunghezza della corda di quello sia quadrupla della lunghezza della corda di questo; ed allora, nel tempo d'una vibrazione di quello, un altro ne farà tre, quando la corda di quello sarà nove volte più lunga dell'altra: dal che ne seguita che le lunghezze delle corde hanno fra di loro la proporzione che hanno i quadrati de' numeri delle vibrazioni che si hanno del medesimo tempo"[7].

Conclusioni e sviluppi.

L'attività può essere sviluppata in diverse direzioni. Il modello può essere fatto costruire in laboratorio dal collega di fisica, che può mettere in evidenza l'ipotesi implicita che i periodi non dipendono dall'ampliezza dell'oscillazione, e mettere in evidenza come essa non sia poi vera al cento per cento i ragazzi di quarta possono essere invitati a costruire da se stessi il file Geogebra con l'uso delle funzioni goniometriche.

[7] "Discorsi e dimostrazioni Matematiche sopra a due nuove scienze attinenti la meccanica e i movimenti locali" edizioni Cierre, Simeoni Arti Grafiche, Verona 2011, ISBN 978-88-95351-04-9.

"Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)", n.1 Numero speciale n.2, 2018
G.R.I.M. (Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo)

La rappresentazione prospettica dell'ipercubo

Alberto Occhipinti
Docente del Liceo Scientifico Statale "G. Galilei" - Palermo

E-mail: prof@occhipin.it

Abstract
Con la sua opera del 1852, "Theorie der vielfachen Kontinuität" (Teoria del continuo a più dimensioni)", l'autore L. Schläfli si interroga sul significato di un integrale multiplo e termina con il parlare di nuovi oggetti geometrici che "chiama" per la prima volta "Poliskemon", i politopi. Nel corso del secolo V. Schlegel in un suo articolo descrive e rappresenta per la prima volta un ipercubo con la tecnica della prospettiva e A. Boole-Stott congiuntamente a P. H. Schoute invece rappresentano le proiezioni tridimensionali dei politopi sia con rappresentazioni bidimensionali, sia con modelli tridimensionali.
Oggi, grazie ai contributi dei personaggi citati e ai semplici strumenti informatici che sono messi a disposizione sulla grande rete, è possibile illustrare in rappresentazioni bidimensionali i politopi quadridimensionali, dando così un volto a figure geometriche difficilmente immaginabili.

1. Aspetto storico

Sebbene Schläfli fosse piuttosto ben noto ai suoi colleghi nella seconda metà del secolo, specialmente per i suoi contributi all'analisi complessa, in un primo momento il suo lavoro di geometria non ottenne la giusta attenzione. Sul finire del secolo una delle figure preminenti nel campo dello studio dei politopi fu Pieter Hendrik Schoute, un matematico olandese esperto di geometria algebrica, professore all'università di Groningen dal 1881.
Nel 1894 Schoute pubblicò un articolo in cui calcolava analiticamente le sezioni centrali dei sei politopi regolari in quattro dimensioni, Alicia Boole Stott venne a sapere della pubblicazione e vide che i suoi risultati coincidevano con quelli del geometra olandese, pertanto Alicia inviò le foto dei suoi modelli che illustravano la sezione centrale di ogni politopo che era stata calcolata da Schoute. Sorpreso dai risultati di Boole Stott, Schoute la contattò immediatamente proponendole una collaborazione che durò per quasi vent'anni, sino alla morte dello stesso Schoute nel 1913. Per dirla con Coxeter, *Mrs. Stott power of geometrical visualization supplemented Schoute's more orthodox methods, so they were an ideal team*.
I sei politopi regolari sono, l'ipercubo (o iperesaedro), l'ipertetraedro, l'iperottaedro, il 24-celle, il 120-celle ed il 600-celle. Boole-Stott dimostrò che questi sono gli unici politopi regolari quadridimensionali, e di essi ne ricostruì sia graficamente le sezioni tridimensionali sia modelli in cartone.
Nel 1900 Alicia, in *On certainseries of sections of the regular four-dimensional hypersolids* descrive geometricamente le sezioni degli ipersolidi quadridimensionali, le classifica e le descrive enumerandole proponendone un'analisi grafica. Boole Stott afferma che così come un poliedro tridimensionale può essere sviluppato in un piano bidimensionale, anche un politopo quadridimensionale può essere sviluppato in uno spazio tridimensionale e una volta effettuato tale sviluppo il politopo può essere analizzato più semplicemente e in un certo modo anche visualizzato. Alicia Boole Stott costruì alcuni modelli di cartone di diverse sezioni dei politopi regolari che adesso sono esposti in mostra al museo dell'università di Groningen.
Un posto importante riveste, anche ai fini della divulgazione e della visualizzazione dello spazio a quattro dimensioni, l'articolo di Victor Schlegel del 1884. Il matematico tedesco di fatto rilegge alla luce della geometria proiettiva e dell'algebra lineare (che lui denota come la *méthode de M. Grassmann*) un recente articolo di Stringham e, nel corso dell'articolo,

introduce magnifiche illustrazioni dei politopi che resteranno come le rappresentazioni più valide dei politopi.

2. Applicazione didattica

Per poter parlare in un’aula di allievi di scuola secondaria di spazi quadridimensionali, ritengo sia necessario dare uno spunto visivo a ciò che può essere trattato analiticamente. Le figure tetradimensionali non è possibile vederle nella realtà. Tanti sono stati gli sforzi per mostrare cosa può accadere in uno spazio tetradimensionale. Oggi la *computer graphics* permette di vedere immagini in movimento che rappresentano politopi di diverso tipo. Per effettuare tale rappresentazione, però, è necessario possedere le conoscenze di programmazione che non sempre sono alla portata di tutti gli allievi di scuola secondaria.
Il mio obbiettivo è quello di mostrare a ragazzi del secondo biennio e quinto anno di liceo scientifico un ipercubo, utilizzando il software di geometria dinamica geogebra e la nota tecnica pittorica della prospettiva. Il progetto prevede una introduzione storica con la lettura dei passi essenziali del classico *Flatland* di Abbott: questo permetterebbe di “allargare gli orizzonti geometrici” degli allievi, facendo capire loro che non è matematicamente escluso che il nostro spazio tridimensionale possa essere parte di un universo pluridimensionale.
In un secondo tempo si costruirà in due step successivi un cubo e un ipercubo con geobebra, seguendo lo stesso procedimento che Abbott seguì per spiegare ad un personaggio bidimensionale il mondo tridimensionale.

Ringraziamenti

Il lavoro da me effettuato non esisterebbe se non fosse stato sollecitato dal **prof. A. Brigaglia** che ringrazio in modo particolare. Un ringraziamento sentito va anche alla **prof. G. Indovina** che mi ha persuaso a cominciare il percorso che mi ha visto approfondire la tematica proposta.

Bibliografia

Banchoff T. F., Oltre la terza dimensione, Geometria, computer graphics e spazi multidimensionali.
(prima edizione 1993), Zanichelli editore. Bologna, 1997
Dedò M., Visualizzare la quarta dimensione, Xla tangente, 2015
Ibañez Torres R., La quarta dimensione, RBA, Milano, 2010
Polo-BlancoI. , Alicia Boole Stott, a geometer in higherdimension, Historia Mathematica,35, pp. 123-139, 2008
Rucker R., La quarta dimensione. Prima ed. It. 1994. Trad. Di G. Longo. Titolo orig.: “The Fourth Dimension, A Guided Tour of the Higher Universe” -,Gli Adelphi,2011
Schläfli L.,On the multiple integral $\int^n dx\, dy \ldots dz$, whose limits are $p_1 = a_1x + b_1y + \cdots + h_1z > 0, p_2 > 0, \ldots, p_n > 0$; and $x^2 + y^2 + \cdots + z^2 < 1$, Trans. by A. Cayley (1860),Q. J. Math., London, 2, 269-301; 3 (1860), 54-68, 97-108,1858
Schlegel V.,Sur une méthode pour représenter dans le plan les solides homogènes à *n* dimensions,Rend. Circ. Mat., 5, 1-8, 1 pl. Palermo,1891
Stringham W. I.,Geometrical figures in space of four dimensions. (Twopapers.),Johns Hopkins Univ. Circ., 3. Baltimore. Md., Amer.,1880
Stringham W. I.,On the rotation of a rigid system in space of four dimensions.,Proc. Amer. Assoc. Adv. Sci., 33, 55-56,1884
Veronese G.,Sulla geometria descrittiva a quattro dimensioni,Atti Ist. Ven. (5), 8, 981-1025. Venezia,1882.

Titolo del contributo: utilizzare kahoot per migliorare gli esiti in matematica

Concetta Chiovetta, Concetta Drago
IPSSAT "R. Chinnici" Nicolosi (CT)

E-mail: *pinachiovetta@gmail.com*
concetta.drago@gmail.com

Abstract
L'approccio all'attività didattica basato sui principi della pedagogia del gioco (game based pedagogy) e del feedback formativo proprio del social media *kahoot* può rappresentare una leva strategica per il miglioramento degli esiti nell'apprendimento della matematica. L'apporto che la piattaforma digitale fornisce al lavoro del docente, attraverso la produzione automatica di report strutturati in file esportabili, offre uno strumento di analisi e la possibilità di interventi individuali tarati sulle difficoltà degli allievi in apprendimento.

1. Game based blended learning con Kahoot.

Una metodologia didattica molto efficace per coinvolgere e quindi motivare gli alunni nell'apprendimento della matematica risulta essere il ***Game based blended learning.***
Il Game based blended learning è una metodologia didattica basata sui principi della pedagogia del gioco e su un approccio all'apprendimento di tipo blended learning centrato su chi apprende (learner centered); in particolare Kahoot è una piattaforma di blended learning, di tipo collaborativo, per la creazione e fruizione da parte della classe di test. Esso rappresenta uno strumento efficacissimo per costruire test oggettivi a risposta multipla e introdurre elementi di gamification nella didattica che contribuiscono a mantenere alta l'attenzione degli studenti e a favorire elementi di competizione positiva tra gli studenti.
Per utilizzare Kahoot bastano una Lim o un semplice videoproiettore e dei dispositivi collegati ad Internet, come smartphones, computers o tablet usati come risponditori attraverso i quali gli alunni inviano le risposte al sito. Gli studenti utilizzando i loro personal devices si collegano alla piattaforma, inserendo un codice pin, che compare sulla proiezione a parete o sulla Lim e scelgono un loro nickname; dopo aver letto il testo della domanda e le varie alternative di risposta proposte, ciascuna delle quali è individuata da un colore e da una figura geometrica, rispondono dal loro smartphone alla domanda cliccando sul colore corrispondente alla risposta da loro scelta. Nel loro device infatti compare solo il colore e la figura geometrica associata ad ogni proposta di risposta. Al termine del tempo
previsto per la domanda compaiono, visibili a tutti, le risposte esatte, quelle sbagliate e il punteggio di ciascuno dei partecipanti e così via fino alla fine. Alla conclusione apparirà sullo schermo il risultato complessivo finale dell'intera classe con il punteggio di ognuno dei partecipanti.

Motivazione
Il tempo è scandito da musichette diverse che cambiano in base ai secondi messi a disposizione (dai 5 ai 120 minuti). La presenza di una "colonna sonora" dal ritmo incalzante serve a dare la carica ai concorrenti perché quella che si realizza è una vera e propria gara nella quale il coinvolgimento degli alunni è assicurato.

Il gioco, la gara, il desiderio di fare sempre meglio, stimolano gli alunni ad impegnarsi al meglio delle proprie potenzialità oltre a generare divertimento che è la molla ideale per coinvolgere piacevolmente gli alunni.

Imparare dagli errori
Si passa alla domanda successiva quando l'ultimo giocatore ha risposto, ma non prima di aver visualizzato la risposta corretta; quindi gli alunni hanno subito un riscontro della correttezza della propria risposta. Inoltre dopo ogni quesito, prima di passare al successivo, si commentano insieme, alunni e docente, le eventuali risposte sbagliate.
Lo stesso test si può proporre due volte consecutive per verificare se il commento e quindi la correzione delle risposte errate durante la prima somministrazione viene assimilata dagli studenti.

Come test di comprensione nella didattica capovolta
Nell'utilizzo della didattica capovolta si può proporre agli alunni l'utilizzo del Kahoot come test di comprensione della video lezione o della presentazione che avrebbero dovuto visionare a casa.

Inclusione degli alunni con difficoltà d'apprendimento
Un altro aspetto da evidenziare è che l'utilizzo di Kahoot coinvolge facilmente e piacevolmente anche gli alunni con difficoltà d'apprendimento.

Valutazione
Nel processo di insegnamento/apprendimento occupa un posto di rilevante importanza la valutazione formativa degli apprendimenti il cui strumento fondamentale è il feedback. Utilizzando Kahoot, lo studente riceve per ogni domanda un feedback immediato sulla correttezza della propria risposta e questo, in sintonia con quanto detto da Popham, lo aiuta a regolare le proprie strategie di apprendimento e a migliorare il senso di autoefficacia e autocontrollo dell'apprendimento stesso.
Alla conclusione del gioco, apparirà sullo schermo il risultato complessivo finale dell'intera classe con il punteggio di ogni partecipante; inoltre la stessa piattaforma genera un file in formato Excel, scaricabile sul pc o salvabile direttamente su cloud (google drive) nel quale, oltre al punteggio totalizzato da ciascun alunno, vengono riportate per ciascuno di essi le risposte esatte e quelle sbagliate. Il docente può avere così un riscontro preciso di quali argomenti sono stati assimilati, quali ancora devono essere approfonditi e anche la possibilità di valutare le conoscenze e le abilità acquisite dagli alunni.
Il monitoraggio dei progressi ha un ruolo cruciale nella valutazione: esso può determinare le decisioni su cosa insegnare fornendo delle indicazioni per la programmazione di un curriculum personalizzato ed inoltre offre evidenze dei processi che hanno portato ai risultati dell'apprendimento.
Nel laboratorio sarà data una dimostrazione sulla creazione e somministrazione di quiz con l'utilizzo di Kahoot e saranno messi in evidenza alcuni risultati di miglioramento negli esiti degli apprendimenti in matematica degli studenti.

Conclusioni
Gli strumenti digitali costituiscono un alleato potente per l'attività del docente; forniscono un supporto per la personalizzazione e la documentazione didattica. Ai docenti spetta la capacità di utilizzare la tecnologia non come mero strumento tecnico ma come innovazione autentica dell'azione didattica.

Bibliografia

D'Amore (2008). *La didattica e le difficoltà in matematica*. Erickson, Trento.

Popham, W. J. (2008). *Transformative Assessment*. Alexandria, Va.: Association for Supervision and Curriculum Development.

Tegon R., (2018). *Tecnologie digitali e feedback formativo per il miglioramento dei sistemi scolastici*, DIDAMATICA 2018 – ISBN 978-88-98091-47-8

"Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)", n.1 Numero speciale n.2, 2018
G.R.I.M. (Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo)

Scommettiamo sulla matematica

Nino Cerruto
I.I.S. "Galilei – Campailla" Modica

E-mail: *ninocerruto@gmail.com*

Abstract/Riassunto. *L'Italia è nel pieno di "un'overdose da gioco d'azzardo" che causa profondi ed evidenti danni sociali, sanitari ed economici al nostro Paese. Mediamente ciascun residente nel territorio italiano nel 2017 ha giocato circa 1700 euro, pari a complessivi 102 miliardi di euro. Ogni campagna di informazione, tesa a contrastare questo deleterio fenomeno, parte dalla conoscenza di elementi del calcolo delle probabilità e di teoria dei giochi che stanno alla base del gioco organizzato, in quanto ciò consente di avere un approccio critico e, come dimostrano le statistiche, di sottrarre "clienti" all'industria del gioco d'azzardo, sia a quella che opera "legalmente", sia a quella che si muove nei circuiti dell'illegalità. La scuola nel campo della prevenzione può svolgere un autorevole ed incisivo ruolo. Nel corso dell'attività laboratoriale viene proposta lo sviluppo di un'unità didattica attraverso il FE Excel e delle simulazioni di giochi con la calcolatrice grafica, al fine di mostrare come la matematica possa fornire strumenti di prevenzione utili alla collettività e come i risultati teorici siano predittivi dei dati empirici.*

1. La matematica: una forma di prevenzione del GAP (gioco d'azzardo patologico)

La forte crescita del gioco d'azzardo, dovuta principalmente all'attrattiva che esso esercita in tutti gli strati della popolazione, alla bassa soglia d'accesso ed alla pluralità di occasioni di gioco (additività), e che nell'ultimo anno ha visto coinvolti, tra giocatori occasionali, abituali e patologici, ben 25 milioni di persone, pone senza dubbio degli interrogativi alle istituzioni ed in particolare, tra queste, alle agenzie educative, in quanto il volume di gioco comporta un grande costo per i servizi, la comunità locale, la sanità, l'economia e le famiglie coinvolte. Sono sorte, oltre ad una ricca sitografia e filmografia, diverse campagne di informazione che si articolano in conferenze spettacolo, percorsi didattici, dossier,…: "Fate il nostro gioco", "L'azzardo del giocoliere", "BetOnMath", "Mettiamoci in gioco", "Lose for life".
Si fa gioco d'azzardo quando il risultato dipende esclusivamente o prevalentemente dal caso rispetto all'abilità del giocatore e si scommette denaro per vincere denaro. In particolare il GAP è classificato come "un comportamento persistente, ricorrente, e mal adattativo di gioco d'azzardo, che compromette le attività personali, familiari o lavorative e si configura come una vera e propria malattia quando l'impulso a giocare, ripetitivo e non più controllato, diventa l'interesse primario della propria
Si consideri la seguente tabella sulla popolazione coinvolta negli anni 2014 e 2017:

	2014	2017
Giocatori	27,9%	42,8%
Studenti (14-19 anni)	47,1%	36,9%

Tabella 1. *Popolazione coinvolta negli anni 2014 e 2017*

Nonostante il trend di crescita del numero di giocatori coinvolti, la diminuzione nella popolazione studentesca può essere interpretata come una conseguenza della corretta informazione che è passata in quelle scuole che si sono attivate nella predisposizione di

percorsi efficaci di sensibilizzazione su questa tematica. Il vo-lume d'affari nel settore dell'azzardo è più che raddoppiato dal 2008 al 2016 e nel 2017 ha sfiorato il 5% del nostro PIL (lo Stato investe nell'istruzione poco più del 4%).
vita e può essere affiancato da azioni illegali per procurarsi crescenti quantità di denaro".
Le macrocategorie dei giochi d'azzardo sono: i giochi on line, i giochi a base sportiva, il bingo, il lotto e le lotterie (ad es. il gratta e vinci), i giochi numerici a totalizzatore (ad es. il superenalotto) ed i giochi che fanno ricorso a degli apparecchi, quali le slot machine e le videolottery (VLT).
L'industria del gioco d'azzardo, grazie alle ingenti e crescenti risorse finanziarie di cui dispone, si mostra in grado di poter condizionare la politica, la comunicazione e persino la ricerca dove investe per dimostrare che le patologie derivanti dal gioco d'azzardo dipendano da fattori neurologici, piuttosto che da elementi situazionali legati all'offerta del gioco, trascurando il fatto che il ricorso al gioco d'azzardo, e le patologie ad esso connesse, è aumentato lì dove è stato legalizzato con il conseguente aumento dell'offerta. Alcuni studi economici dimostrano invece che il gioco responsabile porterebbe alla "chiusura per mancanza di introiti", dato che la maggior parte delle entrate proviene dai giocatori patologici.

Di fronte a questo disarmante scenario, diventa fondamentale il contributo che può dare la scuola e, più in generale, ogni forma di agenzia educativa, nel lavoro di prevenzione. Gli interventi si possono svilup-pare lungo tre direttrici: 1) fornire strumenti per il reale calcolo delle probabilità di vincita e della vincita (perdita) media al fine anche di correggere alcuni errori (misconcetti: "quasi vincita", "restituzione forzata", rappresentatività, recenza, euristica della disponibilità) e meccanismi psicologici che vengono sfruttati dagli organizzatori per aumentare la predisposizione al gioco; 2) sensibilizzare rispetto alle conseguenze ed ai rischi associati alla pratica del gioco d'azzardo; 3) lavorare in rete con i diversi attori territoriali ed i soggetti istituzionali. È importante indurre consapevolezza; ad es. una visualizzazione della rarità di vincita (0,0000169%) nel "Gratta e Vinci" può essere molto efficace: ogni 30 milioni di biglietti stampati vi sono 5 jackpot di 500.000 €; ogni biglietto è lungo 15,3 cm e se li disponiamo uno di seguito all'altro, in modo da coprire il tragitto Modica – Roma (poco più di 900 km), uno solo di questi biglietti risulta avere quel jackpot.

2. Attività laboratoriale

Attraverso l'attivazione dell'ambiente di sviluppo di Excel, viene proposta un'unità didattica sul calcolo delle probabilità che viene sviluppata mediante esemplificazioni tratte dal gioco d'azzardo. Partendo dall'approccio classico, con delle schede dinamiche, aventi anzitutto la funzione di guidare il singolo studente alla scoperta graduale e personalizzata dell'argomento, si illustrano i principali teoremi ed alcuni elementari concetti di teoria dei giochi che consentono di dimostrare, matematicamente, la rovina finanziaria del giocatore assiduo. Ai partecipanti all'attività laboratoriale verrà consegnata una calcolatrice grafica Casio FX-CG50 per simulare delle giocate con lanci di dadi, monete, estrazioni di carte e numeri; saranno quindi elaborati i dati in modalità statistica, calcolate le vincite (perdite) ed analizzati graficamente i risultati in modalità grafica. Ciò consentirà di osservare come le previsioni matematiche siano poi confermate dai dati empirici e quindi lo stretto legame che c'è tra l'approccio classico e frequentista del calcolo delle probabilità.

Bibliografia

Paolo Canova, Diego Rizzuto (2016). *Fate il nostro gioco. Gratta e vinci, azzardo e matematica.* ADD Editore

Federico Benuzzi (2018). *La legge del perdente. La matematica come vaccino contro l'azzardopatia.* Dedalo

Casio Italia (2017). *Esploratori in matematica.* Spring edizioni
Andrà, C., Parolini, N., Verani, M. (2016) BetOnMath. Azzardo e matematica a scuola. Springer.
CNCA (2016). *Year Book*. Comunità Edizioni
L. Baldi, M.C. Ferrarello, A. Inturri, M.F. Mammana, D. Maragone, M. Pennisi & U. Rinaldi (2017). *Scheda didattica personalizzabile*. In Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics) Quaderno 27-Supplemento N. 1

Dai paradossi di Zenone ai punti di accumulazione

Giuseppa Chiaramonte
L.S.S Principe Umberto di Savoia Catania

E-mail: *pina.chiaramonte@virgilio.it*

Riassunto*: Questo lavoro non ha la pretesa né di avere i tratti della completezza né tantomeno del rigore matematico e, per quanto non esaustivo, nasce dal desiderio di dare agli studenti liceali del quinto anno un’idea della rete di concetti strettamente legati dalla complessità, che riguardano il problema dell’infinito e dell’infinito nel finito.*

Dai Greci a Cantor

La Matematica, fiorisce come scienza in senso moderno tra il V e il IV secolo a.C, quando, a seguito delle spedizioni di Alessandro, i greci vennero a contatto con le scoperte dei Babilonesi nel campo della matematica e dell’astronomia. Le menti filosofico-speculative, argute e brillanti dei pensatori greci, si resero subito conto delle lacune epistemologiche inerenti i concetti matematici di continuità e di infinito oltre che del problema della misura. Secondo la testimonianza di Proclo (nel commento al primo libro di Euclide) fu Pitagora di Samo (580-504 a.C) che diede un assetto razionale, astratto e logico alle conoscenze matematiche. Secondo il pensiero pitagorico l’origine del mondo fenomenico e metafisico è il numero naturale. Come sintetizza più tardi Aristotele nella *Fisica*: <<i numeri sono gli elementi di tutte le cose>>. E’, comunque, in un brano del *Filebo* che si può individuare con una certa sicurezza una testimonianza relativa al pitagorismo antico. Qui Platone delinea un metodo per procedere in tutte le questioni, che è definito il più sicuro e viene descritto in termini mitici come un *dono degli dei*: << un dono degli dei agli uomini, così almeno mi pare, fu gettato un giorno sulla terra da un punto del cielo divino, per mezzo di un Prometeo, insieme a un fuoco d’una chiarezza abbagliante, e gli antichi, che erano più valenti di noi e vivevano più vicini agli dei, ci hanno tramandato questa rivelazione (*pheme*), e cioè che risultando dall’unità e dalla molteplicità le cose che sono, le cose che furono e saranno dette ‘cose che sono’, esse portano in se connaturato finito e infinito>>.
I pitagorici concepirono l’esistenza dei soli numeri interi e di loro rapporti, ma come è noto ben presto, questa teoria si scontrò con la geometria che inevitabilmente mostra la natura continua dei suoi enti. Così l’illusione di potere esprimere tutto l’universo solo attraverso i numeri naturali e i loro rapporti perisce miseramente con la scoperta dell’incommensurabilità tra lato e diagonale di un quadrato. Probabilmente fu proprio questa scoperta che fece ripiegare il pensiero greco verso la geometria assiomatica abbandonando il fronte del calcolo numerico. Forse, e chi può dirlo, la tradizione geometrica della Grecia ritardò di circa 2000 anni l’evoluzione del concetto di numero e di calcolo algebrico.
Rimane così una profonda ferita del pensiero greco: l’infinito matematico.
Zenone d’Elea, vissuto nel V secolo a.C, forse, il più prolifico inventore di paradossi da venir chiamato “lingua biforcuta”: lingua che perse quando se la mozzo da solo con i denti e la sputò in faccia al tiranno, per incitare i concittadini alla rivolta, come viene narrato nelle *Vite e opinioni dei filosofi illustri* di Diogene Laerzio. La sua più antica versione pervenutaci del suo paradosso più famoso si trova nella Fisica di Aristotele: <<il più lento corridore non sarà mai raggiunto nella sua corsa dal più veloce. Infatti sarà necessario che l’inseguitore proceda fin là donde si è mosso il fuggitivo, cosicchè è necessario che il corridore più lento si trovi sempre un po’ più avanti>>. Una versione moderna è quella di Jorge Luis Borges, nel saggio *La perpetua corsa di Achille e la tartaruga*: <<Achille, simbolo di rapidità, deve raggiungere la tartaruga,

simbolo di lentezza. Achille corre dieci volte più svelto della tartaruga e le concede dieci metri di vantaggio. Achille corre dieci metri e la tartaruga percorre un metro; Achille percorre quel metro, la tartaruga percorre un decimetro: Achille percorre quel decimetro, la tartaruga percorre un centimetro; Achille percorre quel centimetro, la tartaruga percorre un millimetro; Achille il millimetro, la tartaruga un decimo di millimetro, così all'infinito; di modo che Achille può correre sempre senza raggiungerla>>. Questa versione del paradosso mette in evidenza l'infinita divisibilità geometrica dello spazio e del tempo mettendo in crisi l'atomismo numerico dei pitagorici. Di fatto i greci rifiutarono l'infinito attuale e operarono per una rigida separazione tra la geometria e l'aritmetica. Le grandezze geometriche infatti venivano manipolate verbalmente e non tramite simboli. E' evidente, comunque, che nel paradosso di Achille e la tartaruga è presente il concetto di tendere e quindi in nuce il concetto di limite oltre che l'esistenza di infiniti punti contenuti in un segmento finito: nei dieci metri di vantaggio che Achille concede alla tartaruga si può affermare ci siano una infinità di punti e per questo impossibile per Achille raggiungere la tartaruga.

Dovevano passare molti secoli e numerosi tentativi per arrivare alla definizione di limite che discende dalla teoria degli insiemi di Cantor e le sue feconde applicazioni alla generalizzazione della topologia di $\mathbb{R}$ in spazi topologici astratti che permettono di definire il limite attraverso la nozione di aperto e di punto di accumulazione.

Cantor, nuovo Prometeo, affronta i problemi della continuità e dei numeri infiniti, in particolare dimostra che l'insieme dei numeri reali o continuum, è una infinità maggiore di quella dell'insieme dei numeri naturali. Il punto di partenza è il concetto di classe, con questa parola si intende un insieme di enti definito da una legge che specifichi esattamente quali enti appartengono all'insieme dato. Due classi finite hanno lo stesso numero di elementi se possono essere messe in corrispondenza biunivoca. Cantor così trovò il primo risultato paradossale che un insieme infinito può essere messo in corrispondenza biunivoca con una sua parte come ad esempio l'insieme dei numeri naturali e un suo sottoinsieme, ad esempio quello dei numeri pari. Allo stesso modo, trascurando la relazione di grandezza tra gli elementi successivi, Cantor, con il *metodo della diagonale*, riuscì a mettere in corrispondenza l'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali. Posto che l'insieme dei numeri naturali è numerabile, si può affermare che anche l'insieme dei numeri razionali è numerabile e quindi equipotente ad $\mathbb{N}$. Passando ai numeri reali Cantor provò che la loro totalità costituisse un infinito, per così dire, più elevato di quello dei numeri interi. Da questa proprietà ne diede una dimostrazione per assurdo con il seguente ragionamento: se l'insieme dei numeri reali è numerabile i numeri reali possono essere messi in una successione $\alpha_1=N_1,a_1a_2a_3\dots$; $\alpha_2=N_2,b_1b_2b_3\dots$; $\alpha_3=N_3,c_1c_2c_3\dots$;………che contenga tutti i numeri reali. Ora 'con un procedimento diagonale' si può costruire un numero reale che non è compreso nella successione. Per far ciò si sceglie una cifra $a\neq a_1$ e che non sia 0 e 9, poi una cifra $b\neq b_2$ e che non sia 0 e 9, poi una cifra $c\neq c_3$ e che non sia 0 e 9, e così via. Il numero $\alpha=0,abc\dots$ è sicuramente diverso da tutti quelli considerati, quindi la classe dei numeri reali non è numerabile, ma si dice che ha la potenza del continuo.

C'è di più, Cantor dimostrò, con un procedimento analogo, che anche l'intervallo (0,1) non è numerabile. Infatti, se per assurdo fosse numerabile si potrebbero elencare i suoi elementi scrivendoli in forma decimale anche questi in una successione: $\alpha_1=0,a_1a_2a_3\dots$; $\alpha_2=0,b_1b_2b_3\dots$; $\alpha_3=0,c_1c_2c_3\dots$;…….e come prima si può costruire un numero reale compreso tra 0 e 1 diverso da tutti quelli della successione , quindi anche l'intervallo (0,1) ha la potenza del continuo ovvero è un infinito dello stesso ordine di $\mathbb{R}$ e che, ahimè, condanna a maggior ragione Achille a tendere verso la tartaruga senza riuscire mai a raggiungerla malgrado il suo "piè veloce".

A questo punto Cantor ampliò le sue ricerche sugli insiemi di punti e le cardinalità infinite. Fondamentale per lo studio degli insiemi infiniti e in particolar modo per l'insieme dei numeri reali è il Postulato di Cantor: fissato un segmento **u** (unità di misura) e dati su una retta r, sulla quale sia stato fissato un verso positivo, i due insiemi A e B tali che:

1) Ogni punto del primo insieme precede (nel verso positivo) tutti i punti del secondo insieme;
2) $\forall\ \varepsilon \in \mathbb{Q}^{+}$ esiste un punto P del primo insieme e un punto Q del secondo insieme tali che $\frac{PQ}{\boldsymbol{u}} < \varepsilon$. Allora esiste uno e un sol punto P_0 sulla retta r che separa i due insiemi di punti, cioè tale che ogni punto del primo insieme precede P_0 o coincide con P_0 e ogni punto del secondo insieme segue P_0 o coincide con P_0.

Questo postulato permette di introdurre la nozione di misura e di stabilire una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti di una retta e l'insieme $\mathbb{R}$.
Si può osservare che prendendo su una retta r un segmento AB (unità di misura) e, su di esso, si costruisce un quadrato ABCD: se sulla retta r ci sono solo punti di P tali AP abbia misura razionale rispetto ad AB, la circonferenza di centro A e passante per D non interseca la retta r in nessun punto. Ciò mette in evidenza la mancata completezza di $\mathbb{Q}$, in altre parole sistemando su una retta solo i punti che hanno ascissa razionale rispetto ad una prefissata unità di misura, rimangono moltissime lacune che vengono colmate da numeri irrazionali di $\mathbb{R}$ pensato come unione di razionali e irrazionali. Allora i numeri reali coprono con continuità la retta.
A questo punto, sorvolando non poche e importanti questioni, si definisce intorno circolare di $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\partial \in \mathbb{R}^{+}$ l'intervallo aperto $]\, x_0 - \partial, x_0 + \partial\, [$ e si indica con $U\partial(x_0)$.
Si definisce $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione per $X \subset \mathbb{R}$, se in ogni intorno U di x_0 vi è un punto x $\in$ X distinto da x_0 tale che $X \cap U - \{x_0\} \neq \emptyset$.
Concludendo i numeri reali coprono con continuità la retta, mentre i numeri razionali lasciano moltissime lacune, dove Achille e la tartaruga potrebbero inciampare. Queste lacune vengono colmate con i numeri irrazionali che possono essere considerati punti di accumulazione per $\mathbb{Q}$, così anche una formichina può passeggiare lungo una retta senza correre il rischio di cadere.

Bibliografia

Bell Eric T.Bell I Grandi Matematici.
Boyer Carl B. Storia della Matematica.
Courant R. Robbins H. Che cos'è la matematica?
Fiorito G. Analisi Matematica 1
Odifreddi P. Il Diavolo in cattedra. La logica da Aristotele a Gödel
Russel B. La saggezza dell'occidente.

“Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)”, n.1 Numero speciale n.2, 2018
G.R.I.M. (Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo)

Le sorprese del triangolo di Tartaglia

Angela Inturri
Nucleo di Ricerca e Sperimentazione Didattica - Università di Catania

E-mail: inturriangela@yahoo.it

Domenica Margarone
Nucleo di Ricerca e Sperimentazione Didattica - Università di Catania

E-mail: mimargarone@gmail.com

Abstract: *Potenze di binomi, coefficienti binomiali, simmetrie assiali, identità della mazza da hockey, numeri di Fibonacci, numeri di Catalan, numeri figurati di Pitagora, potenze di 2, potenze di 11, multipli di n, tutto questo e anche di più possiamo trovare dentro il triangolo di Tartaglia: un bell'esempio del fascino sorprendente della matematica che ci lascia increduli e incantati.*

Molti di noi hanno avuto modo di conoscere il *Triangolo di Tartaglia* nel corso degli studi scolastici di algebra. La sua introduzione è finalizzata al calcolo dei coefficienti dello sviluppo delle potenze di un binomio.

Il triangolo presentato da Niccolò Tartaglia nel suo libro, *General trattato de' numeri et misure* (1556), era già noto agli indiani e ai cinesi. Nel 1654 Blaise Pascal scrisse un intero libro, *Le Triangle Aritmétique*, dedicato a questo triangolo e alle sue proprietà, con particolare riferimento al campo del calcolo combinatorio. Per questo motivo il triangolo è ormai conosciuto in tutto il mondo con il nome di *"Triangolo di Pascal"*.

Comunque lo si voglia chiamare, il triangolo offre innumerevoli spunti di approfondimento perché con le sue proprietà si presta ad interessanti applicazioni che riguardano non solo l'algebra: dalla successione di Fibonacci ai numeri triangolari, tetraedrici e ipertetraedrici, dal calcolo combinatorio ai frattali, …. A ben guardarci dentro, si rimane increduli e al contempo incantati dalle sorprese che nasconde e anche il gusto del bello ne rimane appagato.

Dal punto di vista didattico c'è, inoltre~~,~~ la possibilità di individuare collegamenti fra alcune di queste proprietà e di scoprire relazioni fra elementi apparentemente distanti fra loro.

Un percorso didattico innovativo, legato all'utilizzo di strategie di tipo ludico e all'uso versatile di strumenti informatici, rende la presentazione pienamente in linea con il tema del Convegno in quanto permette un'analisi del rapporto tra l'evoluzione storico-epistemologica della Matematica e il contesto didattico in cui oggi essa viene proposta in classe.

Insomma, il *Triangolo di Tartaglia* è un bell'esempio del fascino sorprendente della matematica e una scoperta del senso artistico che alcuni oggetti matematici ci fanno percepire.

Bibliografia

Enzensberger, H. M. (2003). *Il mago dei numeri*. Einaudi tascabili.

“Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)”, n.1 Numero speciale n.2, 2018
G.R.I.M. (Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo)

Dai quadrilateri ortici alla fisica del tavolo da biliardo

Maria Giuseppina Adesso, Roberto Capone, Francesco Saverio Tortoriello
Università degli studi di Salerno

E-mail: mapinadesso@gmail.com, rcapone@unisa.it, fstortoriello@unisa.it

Fiore Oriana
Liceo Scientifico “P.E. Imbriani”- Avellino

E-mail: orianafio@gmail.com

Abstract/Riassunto *In questo articolo, descriviamo una proposta didattica interdisciplinare, partendo da teoremi di geometria sui triangoli e quadrilateri ortici, non presenti nei testi scolatici in uso, ma diffusi largamente sul web e in alcuni articoli scientifici. Le proprietà geometriche di tali poligoni convessi sono state rivisitate e sperimentate nel mondo reale, applicandole alla fisica del biliardo. E' stata progettata un'unità di apprendimento, della durata di 10 ore, sperimentata in tre classi seconde della scuola secondaria di secondo grado. In fase di sperimentazione, gli studenti, oltre all'uso di riga e compasso, hanno sfruttato le potenzialità dei software di geometria dinamica.*

1. Introduzione

Nel 1775, Giovanni Fagnano propose il seguente problema: “*In un dato triangolo acutangolo, inscrivi un triangolo il cui perimetro sia il minimo possibile*”. Nel tempo, numerosi sono stati gli approcci risolutivi a questo problema, utilizzando metodologie legate sia all'analisi matematica che alla geometria sintetica, in particolare sfruttando le proprietà delle simmetrie assiali. La soluzione al problema di Fagnano è il “triangolo ortico”, ossia la figura che si ottiene tracciando i tre segmenti che congiungono a due a due i piedi delle tre altezze del triangolo dato. Recentemente, sono stati introdotti i quadrilateri ortici di un quadrilatero convesso (Mammana et al., 2010) e si è cercato di estendere il problema di Fagnano: qual è il quadrilatero di perimetro minimo inscritto in un quadrilatero convesso Q? E' stato dimostrato che, se Q è un quadrilatero ciclico ed ortodiagonale, i quadrilateri ortici inscritti in Q hanno lo stesso perimetro e tale perimetro è minimo rispetto ad ogni quadrilatero inscritto in Q.

2. Attività didattica in classe

Agli studenti di tre classi seconde di un Liceo Scientifico è stato proposto lo studio di alcuni teoremi sui triangoli e quadrilateri ortici. Con l'uso della LIM e del software di geometria dinamica Geogebra, anche in modalità BYOD (Bring Your Own Device), è stato creato un ambiente di apprendimento in cui gli allievi, a gruppi di 2-3, hanno riscoperto le principali proprietà dei triangoli e di alcuni quadrilateri ortici.

2.1 Dalla Geometria alla Fisica

Il problema di Fagnano riveste un ruolo fondamentale anche nello studio della fisica del biliardo.

Definiamo “biliardo poligonale” un biliardo il cui contorno è un poligono convesso R.

Le traiettorie di una palla da biliardo sono diverse a seconda della forma del biliardo: in alcuni casi esse sono periodiche, in altri addirittura caotiche. In generale, esistono condizioni sull'esistenza di un'orbita periodica sia per i biliardi poligonali che non poligonali.

Consideriamo un biliardo il cui contorno è un triangolo acuto T. E' stato dimostrato che il

triangolo ortico T_1, inscritto in T, è l'orbita periodica minima ed è l'unica orbita periodica chiusa. Per tale motivo, T_1 viene definita "orbita di Fagnano" (Gutkin, 1997).
Ricordiamo che in un biliardo vale il principio di minimo: il percorso su cui si muove la palla da biliardo ha lunghezza minima tra tutti i possibili percorsi che partono da un punto generico A, toccano la sponda e raggiungono un punto B. Tale principio, è equivalente al principio di minimo di Fermat dei raggi luminosi, nell'ottica geometrica; per il biliardo, dunque, valgono le "leggi di Snell".

Si può affermare, utilizzando i suddetti risultati di geometria, che, in un biliardo poligonale di contorno R ciclico ed ortodiagonale, nel rispetto delle ipotesi dell'esistenza di orbite periodiche, i quadrilateri ortici rappresentino le orbite periodiche minime?
Per verificare tale ipotesi, è stata svolta un'attività didattica utilizzando come artefatto un biliardo reale a contorno rettangolare. Con dei nastri colorati di diverso colore, sul tavolo da biliardo, sono stati realizzati: il parallelogramma di Varignon (P. Oliver, 2001) con i nastri gialli , le V-altezze (Mammana et al. 2010) coi nastri azzurri e, infine, coi nastri rossi, il "quadrilatero ortico", che in questo caso particolare è unico (Fig.1).

Figura.1 *Costruzione dell'artefatto: nastri colorati sul tavolo da biliardo*

È stato verificato che, lanciando la palla da un vertice del quadrilatero ortico, la traiettoria coincide con il quadrilatero ortico stesso. Sperimentalmente, dunque, il quadrilatero ortico rappresenta l'orbita periodica minima di un biliardo rettangolare reale.

3. Conclusioni

Gli studenti, al termine del percorso, sono stati in grado di costruire e analizzare semplici modelli matematici di classi di fenomeni anche utilizzando strumenti informatici. Essi hanno, inoltre, potenziato le competenze relative alle tre categorie di processo "Formulare, Utilizzare, Interpretare", così come si evince dalla verifica e valutazione del percorso didattico.

Bibliografia

Mammana, M. F., Micale B., Pennisi M. (2010). Ortic Quadrilaterals of a Convex Quadrilateral*, Forum Geometricorum,* 10*,* 79-91 and refs within.

Oliver, P. (2001). Pierre Varignon and the parallelogram theorem. *The Mathematics Teacher*, *94*(4), 316.

Galperin, G. A., & Zemlyakov, A. N. (1990). Mathematical billiards. *Billiard problems and related problems in mathematics and mechanics. Library "Kvant*, *77.*

Gutkin E. (1997). Two applications of calculus to triangular billiards. *The American Mathematical Monthly*, 618-622

"Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)", n.1 Numero speciale n.2, 2018
G.R.I.M. (Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo)

Codici e segreti: percorso di crittografia tra storia e interdisciplinarietà

Cinzia Cerroni
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Palermo

E-mail: cinzia.cerroni@unipa.it

Abstract/Riassunto. *Nel seguito viene illustrato un percorso di Crittografia, che partendo dai primi codici della storia (codice di Cesare, Vigenere, etc.), passando attraverso la crittoanalisi statistica e la macchina Enigma e Alan Touring (seconda guerra mondiale), arriva alla Crittografia a Chiave Pubblica, ovvero l'algoritmo dell'RSA.*

1. Introduzione

La storia della matematica nell'insegnamento ha una lunga tradizione, citiamo ad esempio Joseph Louis Lagrange (1736-1813) che nelle "*Le Lezioni elementari sulle matematiche*" all'École Normale, ha inserito la storia della matematica o Felix Klein (1849-1925), che nel suo programma di riforma dell'insegnamento della matematica, che confluì nel Meraner Lehrplan (1905), inseriva tra gli assunti metodologici quello di considerare nell'insegnamento il percorso storico della matematica adottando il "metodo genetico", ovvero presentare una teoria seguendo il modo in cui si è sviluppata nella storia e non nella sua formulazione finale (Giacardi, 2013). Tra gli italiani, non si può non citare Federigo Enriques (1871-1946). Egli fondò nel 1923 l'Istituto *Nazionale per la Storia delle scienze* e la *Scuola Universitaria per la Storia delle scienze*, quest'ultima era anche rivolta alla formazione degli insegnanti e fu curatore della collana *Per la storia e la filosofia delle matematiche* (1925). Enriques riteneva che l'insegnante dovrebbe presentare ai propri alunni "[…] *le origini, le connessioni, il divenire, non un qualsiasi assetto statico* [...]" di una teoria (Enriques, 1921).

1.1 Il Percorso laboratoriale di Crittografia

La crittografia si presta a un percorso che segue l'evoluzione storica degli argomenti. Inoltre, la sua valenza interdisciplinare, stimola la motivazione allo studio di argomenti di matematica (quali la matematica dell'orologio, la statistica, la combinatoria etc.) e a temi storici collegati (seconda guerra mondiale etc.).
Il percorso è stato più volte sperimentato nei laboratori PLS dell'Università di Palermo e ha una durata che va dalle 15 alle 20 ore. Le metodologie usate sono quella laboratoriale, del cooperative learning e del problem solving. Si presentano agli studenti gli argomenti e si distribuiscono loro delle schede di lavoro con le quali confrontarsi.
Il primo incontro si articola con un excursus storico degli argomenti dai primi codici del passato fino alla crittografia a chiave pubblica, ognuno di essi viene poi sviluppato nei successivi incontri. Uno dei primi codici che si affronta è il *Codice di Cesare*, così chiamato perché riportato nell'opera di Svetonio, del II secolo d.C., dal titolo "*Vita dei Cesari*", da cui si evince che ciascuna lettera del messaggio viene sostituita con quella tre posti più avanti nell'alfabeto. Dopo una breve presentazione del codice, si distribuiscono agli studenti delle schede di lavoro sia di cifratura che di decifratura, con le quali confrontarsi.

	Testo in Chiaro	**Testo Cifrato con Codice di Cesare**
	Oggi è una bella giornata	RLLN H AQD EHOOD LNRUQDZD
Consegna	Cifrare la frase con il codice di Cesare con k = 3	

Scheda 1. *Esempio di scheda di lavoro con soluzione.*

Un possibile approfondimento interdisciplinare può andare sia nella direzione di leggere e tradurre l'opera di Svetonio, sia in quella di approfondire la storia romana.
Il laboratorio prosegue con lo studio e l'applicazione dei codici a sostituzione polialfabetica, quali il disco cifrante di Leon Battista Alberti (1404-1472), che si può usare sia come cifrario a sostituzione monoalfabetica che polialfabetica e il cifrario di Vigenère, scoperto da Blaise de Vigenère (1523-1596) nel 1586 e rimasto inviolato per secoli. Ci si dedica successivamente all'analisi delle frequenze delle lettere nelle lingue (ad esempio Italiano e Inglese) e alla loro applicazione alla crittoanalisi statistica. Un testo cifrato con cifrari a sostituzione monoalfabetica (codice di Cesare) può essere decifrato calcolando la frequenza delle lettere cifrate e confrontandola con quella delle lettere dell'alfabeto.

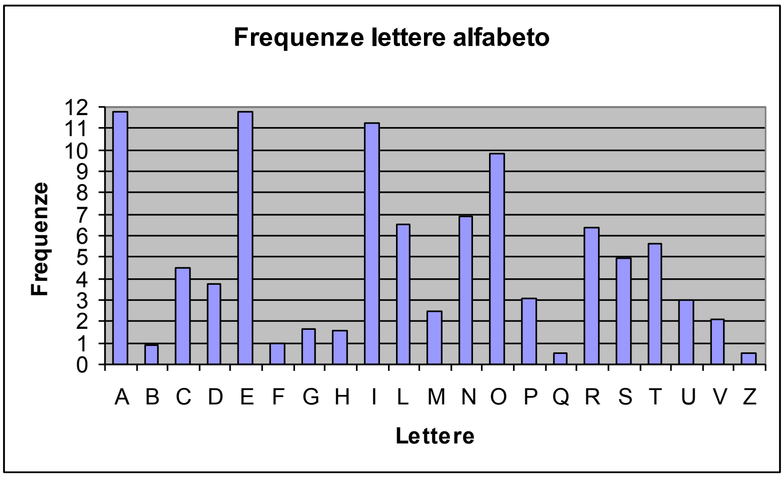


Figura 1. *Tabella delle frequenze dell'alfabeto italiano.*

Il percorso si conclude con la storia di Enigma, di Alan Touring (1912-1954) e con lo studio dell'algebra modulare e della crittografia a chiave pubblica, in particolare l'RSA. Per approfondimenti si veda Singh (1999).

Bibliografia

Enriques, F. (1921). *Insegnamento Dinamico*. Bologna, Università.
Giacardi, L. (2013). *La Storia della Matematica nell'insegnamento*. Roma. http://crf.uniroma2.it/wp-content/uploads/2013/07/GIACARDI-StoriaInsegnamento.pdf
Singh, S. (1999), *Codici e Segreti*, Rizzoli.

Matematica & Cartoon: un binomio vincente in contesti atipici

Annaletizia La Fortuna in collaborazione con Schooltoon
IIS Paolo Frisi - sezione carceraria di Milano Bollate

E-mail: annaletizia.lafortuna@gmail.com, info@schooltoon.com

Abstract/Riassunto.: *Le diffuse e ben note difficoltà legate allo studio della matematica nella scuola secondaria di secondo grado si acuiscono in particolare in contesti 'atipici' come quello di una sezione carceraria, in cui gli studenti sono adulti e ristretti, accomunati spesso da caratteristiche quali: ritorno in formazione dopo molti anni di lontananza dai contesti di apprendimento formale, background di studi frammentario, difficoltà irrisolte nell'approccio alla materia, scarsa comprensione del linguaggio matematico, poca abitudine alla concentrazione e all'astrazione. In tale contesto è stato dunque scelto il cartoon come via d'accesso allo studio della matematica, facendo leva sulla curiosità e su una metodologia didattica attiva. Il cartoon si è rivelato uno strumento 'giocoso' in grado di creare un'immagine più 'amichevole' della matematica e di aprire nuove piste di riflessione in ambito matematico e non solo.*

1. Introduzione: insegnare matematica in un 'contesto atipico'

Il seminario intende illustrare un percorso didattico realizzato con alcune classi dell'istituto professionale per l'enogastronomia e l'ospitalità alberghiera "Paolo Frisi", nella sezione carceraria di Milano Bollate in collaborazione con Schooltoon. I beneficiari dell'intervento sono stati adulti detenuti con caratteristiche molto eterogenee in termini di età, cultura, etnia, esperienza scolastica.

2. Obiettivi del progetto

Obiettivo principale del progetto è stato avvicinare allo studio della matematica studenti appartenenti ad un contesto 'atipico' come quello appena descritto. L'intenzione è stata accompagnarli verso un nuovo modo di concepire la matematica, presentandola come strumento fondamentale per la vita dell'umanità, presente in ogni ambito della quotidianità, indispensabile per la soluzione di problemi e per lo sviluppo scientifico. La matematica è stata presentata inoltre in una veste nuova e più ‚giocosa', facendo coesistere allegria ed entusiasmo con il rigore che la caratterizza.
A tale obiettivo generale si sono accompagnati una serie di obiettivi specifici, rilevanti dal punto di vista pedagogico soprattutto nel contesto sopracitato:

- Sviluppo della capacità di lavorare in team ed in particolare delle attitudini al confronto e alla negoziazione finalizzati all'elaborazione di un progetto condiviso.
- Consolidamento dei gruppi classe, caratterizzati da una prepotente eterogeneità che spesso rende difficile una vera integrazione tra gli studenti.
- Valorizzazione delle competenze di ciascuno studente attraverso una partecipazione attiva al progetto che ha visto coinvolte attitudini e abilità di vario tipo.
- Elaborazione di un'idea di scuola intesa come luogo di cultura in cui si superi la tradizionale visione a comparti stagni di ogni singola materia e si arrivi a percepire il

pensiero umano come un terreno unico, su cui lavorare per crescere come cittadini e persone.

La metodologia utilizzata è stata quella del *coinvolgimento attivo* degli studenti, i quali sono stati letteralmente "registi" del loro progetto, ideando la sceneggiatura completa di due puntate di un cartoon dal contenuto matematico. Ciò ha permesso loro di sperimentare le gioie e le difficoltà che stanno dietro ad ogni lavoro di creazione e di comprendere il senso dell'*imparare facendo*.

3. Modello di intervento

Il progetto si è articolato in diverse fasi, alcune svolte in presenza del team di Schooltoon e altre sviluppate in aula durante le lezioni di matematica.

Il punto di partenza è stato un workshop in presenza con il team di Schooltoon durante il quale, a partire da un dibattito sull'utilità della matematica e sulle difficoltà legate allo studio della stessa, si è arrivati ad elaborare i dettagli del progetto condiviso: la costruzione di un cartoon dal contenuto matematico. Agli studenti è stato affidato il compito di elaborarne l'intera sceneggiatura, mentre a Schooltoon di occuparsi della realizzazione dello stesso.

L'attività in aula è cominciata dunque con la scelta dell'argomento da trattare, tra alcuni proposti dall'insegnante. Successivamente si è attivato un lavoro di ricerca di materiale inerente l'argomento selezionato, utilizzando varie fonti e impegnandosi per sopperire all'assenza della rete e alla carenza di sussidi tecnologici che caratterizza la scuola in carcere. Dallo studio dei materiali raccolti e attraverso un lavoro di brainstorming e riflessione condivisa, sono state estrapolate alcune parole chiave che hanno permesso di estendere l'argomento squisitamente matematico a tematiche multidisciplinari nonché a riflessioni di natura più introspettiva. La stesura della sceneggiatura è quindi avvenuta seguendo le indicazioni di Schooltoon e allo stesso tempo dando spazio alle proposte degli studenti, assecondando le loro attitudini e i loro talenti.

I lavori così prodotti sono stati trasformati da Schooltoon in due cartoon intitolati: 'La nascita dell'algebra' e 'Pitagora: teorema, musica, giustizia e libertà' in cui la matematica si è mescolata in maniera naturale e armonica con le tematiche della multiculturalità, della libertà e della giustizia.

I cartoon sono visibili sul sito di Schooltoon:

http://www.schooltoon.com/la-nascita-dellalgebra-schooltoon-e-bollate

http://www.schooltoon.com/pitagora-teorema-musica-giustizia-e-liberta-schooltoon-bollate

Bibliografia

Benelli, C. (2012). *Coltivare percorsi formativi. La sfida dell'emancipazione in carcere*. Napoli: Liguori Editore.
Guedj, D. (2003). *Il teorema del pappagallo*. Milano: Tea.
Mortari, L. (a cura di, 2010). *Dire la pratica. La cultura del fare scuola*. Milano: Mondadori.
Novelli, L. (2012). *Pitagora e il numero maledetto*. Firenze : Giunti Editore.
Odifreddi P. (2015). *I numeri e il calcolo.* Roma: Gruppo Editoriale L'espresso. DVD
Odifreddi P. (2015). *Pitagora ed Euclide.* Roma: Gruppo Editoriale L'espresso. DVD