Giornate di studio dell'Insegnante di MATematica

ATTI del convegno

Insegnare Matematica oggi

21-22 OTTOBRE 2016
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA
UNIVERSITÀ DI CATANIA

Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)
Quaderno 26 - Supplemento n. 1, Ottobre 2016

A cura di

Benedetto Di Paola
Daniela Ferrarello
Maria Flavia Mammana
Mario Pennisi

G.R.I.M. - Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento/Apprendimento delle Matematiche

Università degli Studi di Palermo

ISSN 1: 1592-4424
ISSN 2: 1592-5137

L'evento è stato promosso dai seguenti enti:

Dipartimento di Matematica e Informatica di Catania

Dipartimento di Matematica e Informatica di Palermo
G.R.I.M. Gruppo di Ricerca Insegnamento/Apprendimento delle Matematiche

Piano Nazionale Lauree Scientifiche - PNLS

Azienda Agricola Le Pendici

Reinventore

La Tecnica della scuola

DeAgostini Scuola

Indice

Comunicazioni e laboratori - Scuola dell'Infanzia, Scuola Primaria, Scuola Secondaria di Primo grado

Comunicazioni e laboratori - Scuola dell'Infanzia, Scuola Primaria, Scuola Secondaria di Primo e Secondo grado

Premessa

La Sicilia, la ricerca e la didattica della matematica

La Sicilia nel secolo scorso crediamo si possa dire che sia stata uno dei poli più attivi per quanto riguarda la matematica sia dal punto di vista della ricerca scientifica che per quanto riguarda la didattica della matematica.
Si deve all'iniziativa individuale dello studioso Giovanni Battista Guccia, la fondazione a Palermo, il 2 marzo 1884, del Circolo Matematico. Lo statuto del Circolo permise l'associazione anche di membri stranieri e, grazie a ciò, il Circolo raggiunse ben presto il suo scopo, "diventando una società internazionale di altissima qualità con una prestigiosa pubblicazione matematica", i Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Il Circolo divenne così un punto di riferimento della comunità matematica non solo italiana ma anche internazionale.
Anche Catania fondò, il 30 gennaio del 1921, il suo Circolo Matematico con finalità di ricerca. Oltre alla rivista "Note e memorie", diretta da Gaetano Scorza, che raccoglieva contributi di carattere scientifico, nacque, sempre nel 1921, la rivista "Esercitazioni Matematiche", rivolta soprattutto agli studenti universitari e agli insegnanti di scuola secondaria, che si proponeva di stimolare il desiderio di conoscenza della matematica. Nell'ambito di questa rivista numerosi matematici diedero notevoli contributi sia ai fondamenti che alla didattica della matematica e molti di loro scrissero anche dei libri di testo per le scuole. Ci piace ricordare Mario Pieri, Sebastiano Catania, Michele De Franchis, Michele Cipolla, Vincenzo Amato, Giuseppe Marletta. In tal modo veniva ad essere edificato un solido ponte fra il mondo universitario e quello della scuola.

Dopo la fine della seconda guerra mondiale, anche a seguito dell'intensificarsi dei contatti internazionali, la didattica della matematica e la formazione degli insegnanti diventano temi di grande interesse. Nasce a Catania il Nucleo di Ricerca e Sperimentazione Didattica e a Palermo il G.R.I.M. - Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento/apprendimento delle Matematiche - che fra i loro obiettivi si propongono di affrontare i problemi della formazione e dell'aggiornamento degli insegnanti.
In questo ordine di idee si collocano le Giornate di studio dell'Insegnante di Matematica (GIMat) che nascono dalla collaborazione dei Nuclei di Ricerca didattica dei dipartimenti di Matematica e Informatica di Catania e Palermo e hanno lo scopo di stimolare gli insegnanti verso sperimentazioni di attività nuove, presentare nuove metodologie didattiche, iniziare un rapporto di collaborazione tra insegnanti, e tra scuole e università.

La prima edizione di GIMat si è tenuta a Catania nei giorni 21 e 22 Ottobre 2016. Hanno partecipato **più di 300 Docenti** di tutti i gradi scolastici - dalla Scuola dell'Infanzia all'Università - e alcuni studenti frequentanti il Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Catania.
I **31contributi** ripostati di seguito a firma dei relatori intervenuti durante GIMat 2016 fanno riferimento ad altrettante ricerche condotte in ambito didattico ed epistemologico sul panorama nazionale e internazionale; queste hanno rappresentato il cuore delle attività di formazione e aggiornamento, proposte agli insegnanti e agli studenti partecipanti che hanno seguito i lavori di GIMat con passione e interesse.

Con la certezza che il presente volume possa rappresentare per gli insegnanti un valido punto di riferimento e trampolino di lancio per ulteriori approfondimenti sulle tematiche affrontate riguardanti la matematica e la sua didattica in aula, ci auguriamo che GIMAat possa crescere sempre più e raggiungere quanti più insegnanti possibili sul territorio siciliano che in molti casi vengono penalizzati dalla posizione geografica della Sicilia rispetto alle altre regioni italiane.
Con questo obiettivo vi diamo appuntamento alle II edizione delle GIMat che si terrà a Palermo il 20 e 21 Ottobre 2017.

Carmelo Mammana

Biagio Micale

Giornate di studio dell'Insegnante di MATematica

Plenarie

Roberto Tortora
Dipartimento di Matematica e Applicazioni “Renato Caccioppoli”
Università di Napoli “Federico II”
rtortora@unina.it

Titolo: Comunicare in matematica

Abstract
L’importanza della comunicazione nell’educazione matematica è stata evidenziata relativamente di recente, ma in modo sempre più incisivo. Nei Principles and Standards for School Mathematics, la Bibbia dell’NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) del 2000, uno dei cinque ‘standard di processo’ è Communication (insieme a Problem solving, Reasoning and Proof, Connections e Representation). Siamo però ben lontani, nella pratica didattica, da dare allo sviluppo di questa competenza lo spazio e l’importanza che merita. Mentre, nel frattempo, sempre più preoccupante diventa il problema delle difficoltà linguistiche degli studenti, collegate, secondo molti, anche alle nuove e mutevoli forme di scrittura e di trasmissione di dati. In questo intervento si affronta questo argomento, illustrandolo con diversi esempi relativi ai vari livelli scolari, e presentando qualche proposta di intervento per l’insegnamento della matematica.

L’importanza della comunicazione in matematica
Il termine “comunicazione” oggi è molto usato (società della comunicazione, mezzi di comunicazione, scienza della comunicazione, …) ed è evidente che a questa nozione viene data grande importanza. I significati di questa parola sono tanti e tante sono anche le forme e i modi della comunicazione. Ad uno sguardo di superficie potrebbe sembrare che oggi si comunica tantissimo, si direbbe molto più di altri tempi. Basti pensare al tempo che viene dedicato da ciascuno di noi alle telefonate, ai messaggi, alle reti sociali. E tuttavia al tempo stesso si registra una diffusa difficoltà di comunicare forse in senso più profondo, difficoltà che spesso si accompagna all’impoverimento progressivo delle competenze linguistiche.
Tutte queste sono motivazioni di carattere generale che inducono a occuparsi di questo argomento, anche in un contesto molto particolare come è quello dell’educazione matematica. E potrà essere sorprendente per qualcuno scoprire come anche in questo campo la comunicazione abbia un’importanza grandissima e meriti quindi di essere presa in seria considerazione.
Non sono io a dirlo. L’importanza della comunicazione nell’educazione matematica è stata evidenziata in tempi recenti, ma in modo sempre più incisivo: (a) nei lavori di ricerca; (b) nelle guide messe a punto dalle società professionali più importanti; (c) nei documenti ufficiali. Sarebbe lungo e qui anche fuorviante provare a fare una rassegna di questi testi. Mi limito a citarne solo pochissimi, scelti per la loro grande importanza.

(a) Per quanto riguarda i lavori di ricerca è significativa la posizione di Anna Sfard, che addirittura identifica il pensiero, e in particolare il pensiero matematico, come una forma di comunicazione (vedi in proposito il suo libro, Sfard, 2008).

(b) Riferimento principale in questo inizio di secolo per la stesura dei curricoli scolastici di matematica di tutto il mondo può essere considerato il volume *Principles and Standards for School Mathematics* dell’NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*). I volumi italiani *Matematica 2001*, *Matematica 2003*, *Matematica 2004*, messi a punto dall’UMI, sono appunto largamente ispirati a quel volume, così come dopo di essi importanti progetti, come Mat@bel.

Gli Standards dell'NCTM sono dieci. Fra questi cinque sono "di contenuto" (*Numeri e operazioni*, *Algebra*, *Geometria*, *Misura*, *Analisi dei dati e Probabilità*) e cinque sono "di processo" (*Risolvere problemi*, *Argomentare e dimostrare*, *Comunicare*, *Collegare*, *Rappresentare*). Ovviamente viene fatto notare come questi dieci "Standards" non costituiscano una suddivisione netta del curriculum di matematica in parti disgiunte. La matematica è un corpo disciplinare unico, e dunque le aree descritte dagli standard sono strettamente interconnesse e integrate. I Processi si esplicano attraverso i Contenuti, e viceversa i contenuti si apprendono mediante i Processi.
Riporto qui di seguito un ampio passo tratto dai *Principles* e relativo al tema *Comunicare*, che poi, come tutti gli altri, viene articolato classe per classe dalla scuola d'infanzia fino alle superiori. Lo faccio per comodità del lettore, perché le cose dette hanno una grande forza e dovrebbero essere oggetto di attenta riflessione per il loro carattere ancora oggi assolutamente innovativo e avanzato.
"La comunicazione è una parte essenziale della matematica e dell'educazione matematica. Essa è un modo di condividere le idee e di rendere più chiara la comprensione. È attraverso la comunicazione che le idee diventano oggetto di riflessione, di raffinamento, di discussione, e possono essere modificate. Il processo di comunicazione aiuta anche a costruire i significati e a rendere permanenti le idee, nella misura in cui esse vengono rese pubbliche. Quando gli studenti sono sfidati a pensare e a ragionare sulla matematica e a comunicare ad altri, in forma orale o scritta, i risultati del loro pensiero, essi imparano ad essere chiari e persuasivi. Ascoltare le spiegazioni di un altro dà agli studenti l'opportunità di approfondire la loro stessa comprensione. Le discussioni in cui idee matematiche vengono esplorate da varie prospettive servono ai partecipanti ad affinare il loro pensiero e a renderli capaci di trovare connessioni. Gli studenti che sono coinvolti in una discussione in cui devono giustificare le loro soluzioni – specialmente se c'è disaccordo – arriveranno a capire meglio la matematica proprio mentre cercano di convincere i compagni. In aggiunta questa attività serve a sviluppare il linguaggio appropriato per esprimere i contenuti della matematica e a rendersi conto della necessità della precisione tipica di questo linguaggio. Siccome la matematica di solito viene presentata usando un linguaggio simbolico, la comunicazione dei contenuti matematici in forma orale o scritta per lo più non viene riconosciuta come una componente importante dell'insegnamento. E per gli studenti non è spontaneo parlare di matematica. Gli insegnanti devono dunque aiutarli a imparare come si fa. Riflessione e comunicazione sono processi intrecciati nell'apprendimento della matematica. Comunicare al fine di riflettere può diventare un'attività normale, a condizione che gli insegnanti dedichino a ciò la dovuta attenzione e un'esplicita programmazione. I bambini piccoli ad esempio possono imparare a giustificare le loro risposte e a descrivere le loro strategie. I più grandicelli possono essere invitati a "pensare ad alta voce" e a riesaminare i loro ragionamenti di fronte alle domande non banali che gli pone l'insegnante o un compagno. Con l'esperienza, gli studenti diventano bravi ad organizzare e a registrare i loro pensieri. Per sostenere efficacemente la discussione in classe, l'insegnante deve costruire una comunità in cui gli studenti si sentano liberi di esprimere le loro idee. I più piccoli hanno bisogno dell'aiuto dell'insegnante per riuscire a scambiarsi idee di matematica in una forma che sia comprensibile per gli altri. Per gli studenti di questa età, imparare a vedere le cose con gli occhi di un altro è una vera sfida".

(c) Per quanto riguarda i documenti ufficiali, possiamo riferirci alle indicazioni nazionali che sono state prodotte dal nostro Ministero negli ultimi anni. Si rassomigliano un po' tutte. Se prendiamo a titolo di esempio quelle del 2007 del ministro Fioroni (forse le più ampie e articolate di tutte) troviamo alcuni passaggi illuminanti, in cui si parla di comunicazione.

Riporto anche da qui un passaggio significativo: "Le conoscenze matematiche contribuiscono alla formazione culturale delle persone e delle comunità, sviluppando le capacità di mettere in stretto rapporto il "pensare" e il "fare" e offrendo strumenti adatti a percepire, interpretare e collegare tra loro fenomeni naturali, concetti e artefatti costruiti dall'uomo, eventi quotidiani. In particolare, la matematica dà strumenti per la descrizione scientifica del mondo e per affrontare problemi utili nella vita quotidiana; contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri. […] Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi […]. Un'attenzione particolare andrà dedicata allo sviluppo della capacità di esporre e di discutere con i compagni le soluzioni e i procedimenti seguiti".

Vorrei suggerire agli insegnanti più attivi e più desiderosi di prendere iniziative nel loro lavoro, di leggere con molta attenzione questi documenti e farli diventare un'arma nelle proprie mani. Infatti, se si pesano le frasi in essi contenute invece di considerarle come semplici affermazioni retoriche, ci si accorge che le linee che vengono suggerite sono ben più avanzate di quanto sia la pratica didattica usuale, proprio perché esse ereditano, sia pure attraverso successive mediazioni, i principi messi a punto dalla ricerca.

Se quanto fin qui detto ci dà un'idea del quadro dei riferimenti in letteratura, siamo invece ben lontani, nella pratica didattica, da dare allo sviluppo di questa competenza lo spazio e l'importanza che merita. Mentre, nel frattempo, sempre più preoccupante diventa il problema delle difficoltà linguistiche degli studenti, collegate, secondo molti, anche alle nuove e mutevoli forme di scrittura e di trasmissione di dati. Di questo ci occuperemo brevemente nel paragrafo successivo, mentre nell'ultimo vedremo una breve rassegna di alcune ipotesi di lavoro e proposte per l'attività in classe.

Non mi occuperò invece della fondamentale componente della comunicazione legata alle emozioni che intervengono in essa e che, come ormai sappiamo bene, condizionano fortemente i processi di apprendimento. L'unica questione che vorrei richiamare al riguardo è l'importanza che ha l'educazione alla comunicazione al fine della crescita umana e sociale dell'individuo, anche in relazione alla capacità complementare a quella di comunicare che consiste nel saper ascoltare.

Nemmeno verranno prese in considerazione qui le varie articolazioni cha ha la comunicazione in un contesto educativo e le loro specificità, ovvero come un insegnante comunica con gli studenti, gli studenti con l'insegnante e gli studenti fra loro, sia in uno scambio fra due, sia in un contesto in cui molti soggetti sono coinvolti in discussioni. Il focus è invece quello, già evidenziato nei documenti citati sopra, dell'impatto che la capacità di comunicare, essenzialmente da parte di uno studente, ha sul suo apprendimento matematico.

Difficoltà linguistiche

Qui si vogliono richiamare alcune difficoltà che si manifestano in modo sempre più preoccupante in ordine alla competenza linguistica degli italiani. È di pochi giorni fa un intervento del linguista Tullio De Mauro in un convegno a Napoli, ricco di dati sulle percentuali di italiani adulti non in grado di comprendere un semplice testo, di interesse per la vita quotidiana. Così come sono noti gli studi di Rosetta Zan sulle difficoltà connesse con l'interpretazione da parte degli studenti del testo di un problema. A me sembra che ciò dipenda anche dal proliferare di forme di linguaggio che condividono poco con il linguaggio scritto, nella sua forma articolata e corretta. Propongo al riguardo, un po' alla buona, una sorta di classificazione dei linguaggi, in riferimento alle tre componenti che nella logica vengono riconosciute come presenti in un linguaggio "evoluto", la sintassi, la semantica, la pragmatica (Tortora, 2015a). In particolare mi sembra che gli aspetti pragmatici tendono a prevalere in molti dei mezzi attuali di comunicazione (e di apprendimento?), a scapito di quelli semantici. Poiché la matematica si può esprimere e forse, tout court, può esistere, solo se veicolata da un linguaggio in cui sia chiara la componente semantica, ne viene di conseguenza che l'indebolimento delle competenze linguistiche portano con sé una sempre maggiore difficoltà nel far matematica. In questo senso un ruolo speciale è rivestito dalla logica, che è per fatti suoi una delle cenerentole nei programmi scolastici. Naturalmente è anche possibile sostenere che si può "sapere senza saper dire" (si tratterà allora di un sapere pratico, un saper fare –

si pensi alle abilità di un artigiano incolto), ma a ciò si può obiettare che un sapere non esplicitato in linguaggio difficilmente evolve o può costituire la base di elaborazioni e di nuova conoscenza. Senza dire che il livello più alto della conoscenza probabilmente è quello in cui si diventa capaci di far capire una cosa ad un'altra persona.

Alcune proposte didattiche

Rinvio in primo luogo al volume dei *Principles*, perché in esso sono appunto presentate numerose proposte per sviluppare la comunicazione in matematica, distinte per cicli scolastici.
Ritengo che una gran quantità di buon lavoro in questa direzione si può fare utilizzando a vari livelli gli esercizi o giochi di descrizione. Si tratta di quelle situazioni nella quali due persone si trovano una a dover descrivere un disegno o una disposizione di oggetti o altro ancora, e l’altro a riprodurre la stessa configurazione. Ad esempio i due soggetti possono sedere in due banchi contrapposti ed essere separati da uno schermo. Ci sono molte varianti del gioco. Può darsi che colui che deve descrivere sia anche l’artefice del disegno (di solito un disegno geometrico magari su carta quadrettata) o della disposizione degli oggetti, oppure ne è solo un osservatore. Si tratta di attività ampiamente presenti nella prassi didattica. Un esempio di studio su questo genere di attività, con bambini della scuola d’infanzia e primaria è stato condotto di recente qui in Sicilia (Di Paola, Ruisi e Sunseri Trapani, 2015). Nel sentirlo raccontare con il corredo dei video sono stato colpito dalle facce dei bambini e ho capito quanto sia prevalente nella nostra scuola il giudizio su ciò che si esegue piuttosto che su ciò che si è capaci di dire. Ebbene, la mia idea è che invece si debba provare a ribaltare il più spesso possibile questa gerarchia, centrando l’attenzione e il giudizio su chi deve comunicare piuttosto che su chi deve appunto eseguire. Segnalo che questa enfasi può essere estesa anche ad altre modalità del gioco, anche quando ad esempio l’oggetto della descrizione è a sua volta una persona, cioè una terza persona che agisce da modello per l’esecutore, il quale poi ne deve assumere la posa (il cosiddetto gioco della creta).
Altrettanto efficaci ai fini di educare alla comunicazione sono le attività nelle quali si richiede agli studenti di assumere in una qualche situazione il ruolo dell’insegnante, per esempio con il compito di spiegare ad altri (magari compagni più piccoli) qualche contenuto matematico (Mariotti, 2015). Segnalo anche la possibilità di coinvolgere i ragazzi nella presentazione delle cose che hanno appreso ad un pubblico esterno, per esempio ai loro genitori: un esempio di tale attività è in (AA.VV., 2010); cfr. anche (Mellone, 2011).
Possibili attività possono essere anche condotte in cooperazione con l’insegnante di italiano. Penso in particolare a temi di italiano che abbiano come scopo la descrizione precisa di qualcosa piuttosto che discorsi di carattere più libero. Oppure penso alla lettura e commento dei giornali o di altri testi (quelli pubblicitari sono ideali) per capirne la struttura, interpretarli e decodificare il messaggio: qui si tratta in realtà di apprendere le basi della distinzione a cui si è accennato sopra fra sintassi, semantica e pragmatica.
Un discorso altrettanto importante può riguardare l’attenzione da prestare agli errori o alle difficoltà della comunicazione. Anche su questo verranno presentati numerosi esempi, sui cui dettagli è impossibile qui entrare nel merito. Una questione che si pone con forza è l’uso che può essere fatto delle inevitabili ambiguità della lingua comune. Nella linea dell’utilizzo degli errori come risorsa didattica (Borasi, 1996), si può spesso lavorare proficuamente calandosi in situazioni in cui emergono queste ambiguità, per discuterne e ove possibile scioglierle proprio grazie allo scambio tra gli studenti (e l’insegnante). Alla base c’è la convinzione che imparare a correggere errori di comunicazione porta ad elevare la competenza sia matematica che linguistica (Tortora, 2015b).

Mi limito a segnalare tre esempi di lavoro in questa direzione:
1. La favola di *Riccioli d’Oro e i tre Orsi* raccontata a bambini di scuola elementare (Grasso e Tortora, 2013). La storia ruota intorno al concetto di doppio, che però si manifesta come un

concetto ambiguo, che i bambini sono indotti a rendere chiaro, attraverso analisi, lavoro manuale e discussioni.

2. Esercizi esplorativi sui numeri naturali e su altri tipi di numeri, dove la richiesta che si usino numeri consecutivi provoca una rottura cognitiva quando si passa dagli interi ai razionali (Mellone e Tortora, 2015).

3. Problemi usualmente classificati come mal posti, in cui ci sia qualche nozione o qualche frase che possano essere interpretati in modi diversi, tutti legittimi. Un esempio è il seguente **Problema della velocità media**: *Durante la prima metà di un viaggio in auto si procede alla velocità costante di 60 km/h, per l'altra metà alla velocità costante di 100 km/h. Qual è la velocità media?*

Infine propongo come oggetto di riflessione la possibilità di derubricare molti dei più comuni errori matematici degli studenti normalmente concepiti come errori concettuali, identificandoli piuttosto come esempi di comunicazione inefficace o inadeguata. Riprendendo una frase di Bartezzaghi, tratta da un suo libro dal titolo inequivoco *Come dire. Galateo della comunicazione* (2011), conviene piuttosto che chiedersi se qualcosa si può dire, chiedersi invece se "si addice", se è cioè efficace e pertinente al contesto nel quale ci si trova. Sulla distinzione dei vari registri linguistici che possono impiegarsi nell'educazione matematica, cfr. (Ferrari, 2004).

Vediamo anche qui un esempio. Sia da calcolare l'area di un triangolo di cui è data la base e l'altezza, poniamo 5m e 6m. Come si fa? Così:

$$5\times 6 = 30:2 = 15\ \mathrm{m}^2$$

O no? È, come tutti sanno, un comunissimo errore: con la proprietà transitiva dell'uguaglianza, se ne ricava infatti $5\times 6 = 15$, uno strafalcione!

Ma sfido chiunque a negare di aver scritto sequenze di operazioni di questo tipo su un qualche pezzo di carta per uso personale. Lo facciamo infatti, senza batter ciglio, tutte le volte che procediamo mano a mano che acquisiamo i dati. Ma allora, che cosa rappresenta davvero la scrittura corretta, cioè la seguente?

$$\frac{5\times 6}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

Essa contiene il compendio della sequenza di operazioni effettuate, ed è il modo migliore per dare *stabilità* a quanto eseguito e renderlo *comunicabile* senza ambiguità; dunque una sistemazione a posteriori.

Bene: una delle acquisizioni della scrittura matematica e algebrica è proprio la capacità di passare dalla semplice operatività sequenziale alla visione d'insieme. Per gli studenti è un punto di arrivo importante ed è giusto che li si guidi ad esso. Ma imparare ad usare un abbigliamento adeguato quando si è in un ambiente formale non significa che occorre portare sempre la cravatta, anche a casa. Quello che sto dicendo è che scrivere $5\times 6 = 30:2 = 15\mathrm{m}^2$ non deve essere considerato un errore in assoluto, ma casomai un comportamento inopportuno se è adottato in sede non privata e quando l'intento è di comunicare ad altri ciò che si fa. D'altra parte, qui, come si è detto, c'entra la proprietà transitiva dell'uguaglianza. Cioè: Se A = B **e** B = C, allora A = C. Chiarissima, certo. Ma chi gliel'ha mai detto agli studenti che in una sequenza di passaggi con l'"uguale" siamo in presenza di una congiunzione?

Bibliografia

AA.VV.: 2001. *Matematica 2001. La Matematica per il cittadino. Scuola Primaria, Scuola Secondaria di primo Grado.* Liceo Vallisneri, Lucca. http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/primo-ciclo/

AA.VV.: 2003. *Matematica 2003. La Matematica per il cittadino. Ciclo secondario.* Liceo Vallisneri, Lucca. http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/secondo-ciclo/

AA.VV.: 2004. *Matematica 2004. La Matematica per il Cittadino.Ultimo anno.* Liceo Vallisneri, Lucca. http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/secondo-ciclo/

AA.VV. (Rete Galileo), 2010, *Non solo far di conto, percorsi integrati di matematica e scienze nella scuola di base*, Benevento, Il Chiostro.

Bartezzaghi, S. (2011). *Come dire. Galateo della comunicazione*. Milano: Mondadori

Borasi R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: a focus on errors.* Norwood, New Jersey, USA: Ablex Publishing Corporation.

Di Paola B., Ruisi M., Sunseri Trapani A. (2015). E questo dove lo metto? Esperienze geometriche in continuità tra la scuola dell'infanzia e la scuola primaria. In D'Amore B., Sbaragli S. (a cura di), *La didattica della Matematica, disciplina per l'apprendimento*, Bologna: Pitagora, 86-87.

Ferrari, P. L. (2004). *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*. Bologna: Pitagora.

Grasso N., Tortora R. (2013). Riccioli d'oro e i tre orsi, ovvero: la pporzionalità con i bambini, tra narrazione e costruzioni. In D'Amore B., Sbaragli S. (a cura di), *La didattica della matematica come chiave di lettura delle situazioni d'aula*, Bologna: Pitagora,121-122.

Mariotti M. A. (2015). Spiegare, argomentare e dimostrare: un nodo dell'educazione matematica. In D'Amore B., Sbaragli S. (a cura di), *La didattica della Matematica, disciplina per l'apprendimento*, Bologna: Pitagora, 21-26.

Mellone M. (2011). "Looking for tricks": a natural strategy, early forerunner of algebraic thinking. In Pytlak, M., Swoboda, E. (a cura di) *proc. CERME 7,* Università di Rzezsow, Polonia, 1882-1890.

Mellone M., Tortora R. (2015). Ambiguity as a cognitive and didactic resource. In Krainer K., Vondrová N. (a cura di), *Proc. of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)*, Praga, febbraio 2015, 1434-1439.

NCTM: 2000. *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA,USA.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, development of discourses, and mathematizing*. Cambridge: Cambridge University Press. Trad it. di G. Lo Iacono:*Psicologia del pensiero matematico. Il ruolo della comunicazione nello sviluppo cognitivo*, Erickson, Trento, 2009.

Tortora R. (2015a). Logica e vita quotidiana: qualche modesta proposta per tempi difficili. In F. Ferrara, L. Giacardi e M. Mosca (a cura di), *Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis 2014-2015*, Kim Williams Books, Torino, 93-109.

Tortora R. (2015b). Si fa presto a dire ERRORE. In D'Amore B., Sbaragli S. (a cura di), *La didattica della Matematica, disciplina per l'apprendimento*, Bologna: Pitagora, 39-45.

Maria G. Bartolini Bussi
Dipartimento di Educazione e Scienze Umane, Università di Modena e Reggio Emilia
mariagiuseppina.bartolini@unimore.it

Titolo: Imparare dal mondo: lo studio ICMI 23 sulla scuola primaria

Abstract
In questa presentazione riassumerò il processo in corso dell'ICMI STUDIO 23, il primo studio promosso dall'ICMI sulla scuola primaria sull'aritmetica dei numeri naturali, coordinato da me e da Sun Xuhua (Università di Macau, SAR China). Fin dall'inizio (2012) lo studio ha coinvolto i cinque continenti, già nel comitato di programma. Nella scelta dei conferenzieri in plenaria sono state privilegiate tre voci complementari da diverse culture ed esperienze professionali. Hanno preso parte allo studio insegnanti, formatori di insegnanti, ricercatori da 23 diversi paesi. Come sede della conferenza è stata scelta Macao, punto di incontro tra Oriente e Occidente alcuni secoli fa. Lo studio lancia anche una sfida contro la pretesa universalità della matematica e didattica della matematica che sembra essere condivisa da molti insegnanti e ricercatori in Occidente.

1. Introduzione

Questo lavoro riporta alcuni risultati dello Studio ICMI 23 (*Primary Mathematics Study on Whole Numbers*[1]), il primo studio promosso *dall'International Commission on Mathematical Instruction* sulla scuola primaria. La scelta del tema, i numeri interi (o naturali come preferiamo chiamarli in Italia), dipende dal ruolo fondante che questo argomento ha nei curricoli di tutti i paesi del mondo. Lo studio fu lanciato alla fine del 2012, con la nomina dei due co-direttori (Maria G. Bartolini Bussi e Sun Xuhua, dell'Università di Macao-Cina) e del comitato di programma internazionale, comprendente studiosi di tutti i continenti. Tutte le informazioni sono disponibili sul sito citato, da cui è possibile anche scaricare gratuitamente una copia degli Atti della Conferenza tenuta a Macao nel giugno 2015. In questo momento è in corso la redazione finale del volume dello studio (Bartolini Bussi & Sun, in preparazione) che sarà pubblicato nella collana di Springer dedicata agli studi ICMI[2]. Lo studio è stato presentato in occasione del congresso ICME 13 di Amburgo[3]. Questo breve lavoro è una sintesi del lavoro più ampio pubblicato negli Atti del Copirelem 2015 (Bartolini Bussi & Sun, 2015).

2. Alcuni temi discussi nella Conferenza.

2.1. Linguaggi e numeri

La partecipazione alla Conferenza di studiosi di 23 paesi, con ambienti culturali e linguistici tanto diversi, ha offerto ai partecipanti un'occasione unica di confronto sulle differenze che possono influenzare l'apprendimento del significato dei numeri. Ad esempio, la lettura del numero 184 è sostanzialmente diversa in queste lingue:

Inglese	one hundred eighty four
Francese	cent quatre-vingt quatre
Tedesco	hundred vier und achtzig
Italiano	centottantaquattro

Si nota una traccia di un antico sistema a base venti (Francese), l'inversione di unità e decine (Tedesco), l'elisione di una vocale (Italiano). L'Inglese è il linguaggio più "trasparente", ma non è

[1] http://www.umac.mo/fed/ICMI23/
[2] http://www.springer.com/series/6351
[3] https://lecture2go.uni-hamburg.de/veranstaltungen/-/v/19768

così regolare come il Cinese (fig. 1) nel quale la lettura quotidiana coincide di fatto con la lettura per scomposizione tipica in Italia del linguaggio scolastico:

一百八十四

Fig. 1. *Yī bǎi bā shí sì*: un cento otto dieci quattro uno (un centinaio otto decine quattro unità)

Già questo semplice esempio mostra che le difficoltà degli allievi possono dipendere anche dal linguaggio. Ancora maggiori difficoltà si incontrano quando un paese utilizza a scuola una lingua diversa dalla lingua quotidiana usata in famiglia: è il caso di molti paesi in via di sviluppo con un passato coloniale, che ha lasciato tracce, a volte molto vistose, nel sistema scolastico.

2.2. Artefatti culturali

Anche gli artefatti utilizzati nella scuola come supporto al processo di insegnamento-apprendimento dipendono dalla cultura locale. Un esempio emblematico è stato discusso nella tavola rotonda della Conferenza di Macao, dedicata al tema *Tradizioni nell'aritmetica dei numeri naturali*. In quell'occasione si sono posti a confronto (Bartolini Bussi, 2015; Sun, 2015) due approcci ai numeri naturali che si avvalgono di artefatti diversi con conseguenze diverse sui processi degli allievi:
l'approccio cardinale, con molte attività di composizione e scomposizione (vedi anche il paragrafo 2.3);
l'approccio attraverso la misura, con attività sulla linea dei numeri, dove i numeri sono rappresentati con etichette o con salti avanti (addizione) o indietro (sottrazione).
Tutti gli insegnanti Italiani (ma potremmo dire Occidentali) conoscono la *linea dei numeri.* Lo stesso Freudenthal (1999) ha dedicato varie pagine a questo artefatto, aprendo così le sue considerazioni:

Lo strumento mai abbastanza lodato che visualizza le grandezze e al tempo stesso i numeri naturali è la linea dei numeri dove, inizialmente sono individuati ed etichettati solo i numeri naturali (Freudenthal, 1999, p. 101).

La rappresentazione dei numeri sulla linea sembra risalire a John Wallis (1685), quando tratta dei numeri negativi[4]. Va tuttavia ricordato che già in Euclide i numeri naturali sono rappresentati come segmenti (Heath 1908, vol. 2), anche se la tradizione dice che i numeri figurati (sistemi regolari di punti che rappresentano numeri, come i numeri triangolari, i numeri quadrati, ecc.) risalgono alla scuola Pitagorica. Netz (1999) così giustifica la preferenza per la rappresentazione con linee invece che con insiemi di punti.

I segmenti servono come variabili, poiché nulla si sa sulla grandezza del numero che rappresentano (Netz, 1999, p. 268)

I neuroscienziati (Zorzi, Berteletti & Lucangeli, 2010) sostengono il modello di una linea dei numeri mentale come metafora comune, anche se alcuni autori criticano la supposta universalità del modello, sostenendo invece la sua origine culturale (Nuñez, 2011), Lo stesso Nuñez, così giustifica la presenza quasi universale della linea dei numeri.

La rappresentazione dei numeri su una linea, se pure diffusissimo nel mondo moderno, non è universalmente spontanea, ma sembra piuttosto appresa attraverso – e continuamente rinforzata da – pratiche culturali specifiche (Nuñez, 2011, p. 661).

[4]https://www.researchgate.net/figure/225964990_fig3_Figure-6-John-Wallis-introducing-the-number-line-in-his-Algebra

Fig. 2. Una linea dei numeri da pavimento

Ci sono quindi molti motivi che supportano l'utilizzo della linea dei numeri fin dall'inizio, almeno come percorso parallelo a quello cardinale. Tuttavia questo artefatto non può essere definito uno strumento didattico "universale". Ad esempio, nei libri di scuola Cinesi, la linea dei numeri è, di norma, introdotta molto più tardi, insieme con le frazioni e il processo di misura. In Cina, all'inizio, prevale l'approccio cardinale, che allude all'antico artefatto *suànpán* (算□), che motiva anche le numerose attività di composizione e scomposizione di numeri (complemento a cinque; complemento a dieci), come mostreremo anche nel paragrafo successivo.

Fig. 3. Il *suànpán* (算盘) personalizzato per i partecipanti alla Conferenza

2.3. La visita a una classe cinese (prima primaria)

La scuola primaria Hou Kong di Macao ha ospitato i partecipanti alla Conferenza per una lezione sull'addizione e una lezione sulla sottrazione. Circa 60 partecipanti alla Conferenza si sono riuniti nella palestra della scuola per osservare una lezione sull'addizione di numeri naturali con composizione-scomposizione (il cosiddetto "riporto" delle scuole Italiane). La metodologia adottata è quella delle classi-aperte, simile al Lesson Study giapponese (Ramploud & Munarini Frenesi, 2015). Gli osservatori ricevono in anticipo un dettagliato copione della lezione (il piano didattico) in cui sono descritti minuziosamente i singoli momenti, con l'indicazione precisa anche dei tempi (minuti) programmati. Nel seguito è riassunto l'episodio centrale della lezione, riguardante la somma

$$24 + 9$$

per cui sono stati previsti 15 minuti di attività, durante i quali gli allievi lavoravano in piccolo gruppo.
Il materiale concreto utilizzato era costituto da scatole, ciascuna con 10 spazi, in tutto o in parte riempiti con dolcetti (fig. 4 a sinistra). I dolcetti erano disposti in modo da suggerire strategie diverse per il “completamento a dieci” (fare dieci) che è il metodo suggerito per questo tipo di problemi, detti anche in Inglese OPMS (One Problem Multiple Solutions). Le scatole di dolcetti avevano sul retro una calamita che consentiva di appenderli ad una grande lavagna magnetica per mostrare alla classe le diverse soluzioni. Rappresentazioni schematiche delle scatole di dolcetti apparivano anche sulla LIM, dove l’insegnante pianificava di riassumere l’attività.
Gli allievi dovevano lavorare in gruppetti di quattro, ottenuti semplicemente girando due sedie nei banchi davanti per voltarsi verso i due compagni seduti nei banchi dietro. L’insegnante girava per l’aula per incoraggiare i bambini a “comporre 10” in modi diversi. Alla fine l’insegnante doveva chiamare i rappresentanti di tre gruppi che avevano realizzato le diverse strategie invitandoli a descrivere il loro lavoro, appendendo le scatole dei dolcetti alla lavagna magnetica. L’insegnante aveva già preparato 3 cartoncini con il riassunto scritto delle soluzioni, da appendere sotto le soluzioni concrete proposte dagli allievi.

Problema	a. L’insegnante propone un problema. “Oggi ci sono molti ospiti a scuola. Miss Amanda ha preparato un po’ di cibo per loro. Classe, potete aiutarmi a contare il cibo nel modo più veloce possibile?”
Risoluzione	a. Gli allievi lavorano a gruppi. b. L’insegnante dà alcune scatole di dolcetti e dice di contarli.
Conteggio e condivisione del lavoro dei gruppi	a. L’insegnante invita alcuni gruppi a riferire il loro risultato su come contare i dolcetti tutti insieme. b. L’insegnante commenta il lavoro dei gruppi e usa la LIM per mostrare tre modi diversi per contare i dolcetti. Ci sono 24 dolcetti a sinistra e 9 dolcetti a destra. **Primo modo**: L’insegnante incoraggia gli allievi a interrogarsi e a spostare 4 dolcetti da destra e 6 da sinistra per “comporre 10”. Infine, 30 dolcetti più 3 dolcetti fa 33 dolcetti. **Secondo modo**: L’insegnante incoraggia gli allievi a interrogarsi e a spostare 1 dolcetto da sinistra e 9 dolcetti da destra per “comporre 10”. Infine, 23 dolcetti più 10 dolcetti fa 33 dolcetti. **Terzo modo**: L’insegnante incoraggia gli allievi a interrogarsi e a spostare 4 dolcetti da sinistra e 9 dolcetti da destra e ottenere “13 dolcetti”. Per ottenere 13 si è “composto 10”. Infine, 20 dolcetti più 13 dolcetti fa 33 dolcetti.

Tav. 1. Il piano dell’attività con le scatole di dolcetti (15 minuti)

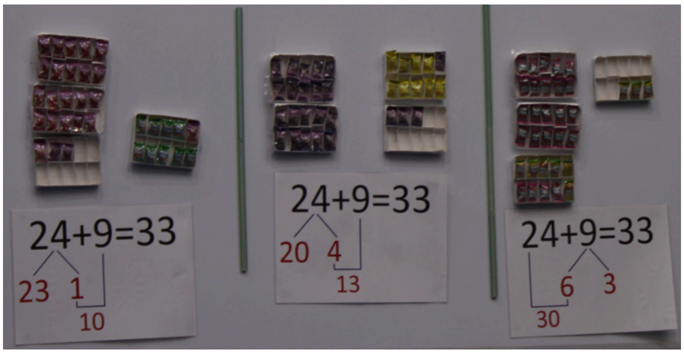


Fig. 4. Le scatole di dolcetti e le soluzioni alla lavagna

È interessante osservare che nessun bambino conta davvero i dolcetti, come probabilmente farebbero i bambini Italiani: i gruppi, diligentemente, cercano invece di scomporre e ricomporre le disposizioni in modo da "comporre 10", secondo quanto appreso nelle lezioni precedenti.
Gli osservatori presenti hanno mostrato grande sorpresa per il ritmo veloce della lezione, nella quale sono stati sufficienti meno di 15 minuti perché i gruppi calcolassero in modi diversi la somma 24 + 9. La strategia del "comporre 10" è ovviamente collegata all'uso classico del *suànpán.*

3. Osservazioni conclusive
Queste brevi note illustrano la ricchezza degli spunti offerti nel corso della Conferenza, che troveranno adeguato spazio, insieme a molti altri, nel volume in preparazione. L'incontro tra diversi contesti culturali realizzato nello studio ha offerto ai partecipanti (e, speriamo, offrirà ai lettori del volume) lo spunto per riflettere sulle scelte spesso implicite (impensate) operate nella propria cultura. Ancora una volta ci piace sottolineare la frase di François Jullien, noto filosofo e sinologo francese:
Non si tratta di filosofia comparata, della messa in parallelo delle diverse concezioni, bensì di un dialogo filosofico dove ogni pensiero, nel farsi incontro all'altro, si interroga sul proprio impensato (Jullien, 2008, p. vi).

Bibliografia
Bartolini Bussi M. G. & Sun X. (2015). Learning from the world: the teaching and learning of whole number arithmetic in the ICMI Study 23. Actes du 42° Colloque International des formateurs de mathématiques charges de la formation des maîtres, 39-51. Besançon: Copirelem.
Bartolini Bussi M. G. & Sun X, (in preparazione) Building the Foundation: Whole Numbers in the Primary Grades : The 23rd ICMI Study. New York: Springer.
Bartolini Bussi M. G. (2015). The number line: A "western" teaching aid, 298-306, in Conference Proceedings of the ICMI Study 23: Primary Mathematics Study on Whole Numbers, Macau: University of Macau.
Freudenthal H. (1999). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel.
Heath T. L. (1908), Euclid. The Thirteen Books of the Elements, Cambridge University Press.
Jullien F. (2008). Parlare senza parole. Logos e Tao. Bari: Laterza.
Netz R. (1999), The Shaping of Deduction in Greek Mathematics: A Study in Cognitive History, Cambridge: Cambridge University Press.
Nuñez R. (2011), No Innate Number Line in the Human Brain, *Journal of Cross-Cultural Psychology,* 42(4) 651-668.
Ramploud A. & Munarini Frenesi R. (2015). [guan mo ke].Trasposizione culturale di una metodologia di formazione. Scuola Italiana Moderna. Anno 122. N. 10. 54-61.

Sun X. (2015) Chinese core tradition to whole number arithmetic, 140-8 in in Conference Proceedings of the ICMI Study 23: Primary Mathematics Study on Whole Numbers, Macau: University of Macau.

Zorzi M., Berteletti I. & Lucangeli D. (2010). Modelli neuropsicologici e basi neurali della cognizione numerica, in D. Lucangeli & I. C. Mammarella (a cura di). Psicologia della cognizione numerica. Approcci teorici, valutazione e intervento. pp. 56-76. Milano: Franco Angeli.

Rosetta Zan
zan@dm.unipi.it

Titolo: Errori e difficoltà in matematica

PROLOGO: *Il dottor Gillupsie ha chiamato molti dei suoi chirurghi interni del Blear General Hospital. Essi stanno per cominciare la loro relazione settimanale sulle varie operazioni compiute negli ultimi quattro giorni…*
GILLUPSIE: E lei, Carstairs, come le vanno le cose?
CARSTAIRS: Temo di essere stato sfortunato, dottor Gillupsie. Niente operazioni questa settimana, ma solo tre pazienti morti.
GILLUPSIE: Bene; dovremmo parlarne un po', non le pare? Di che cosa sono morti?
CARSTAIRS: Non lo so con certezza, dottor Gillupsie, ma comunque ho dato a ciascuno di loro un bel po' di penicillina.
GILLUPSIE: Ah! Il sistema tradizionale della cura "buona di per se stessa", eh, Carstairs?
CARSTAIRS: Beh, non esattamente, capo. Pensavo solo che la penicillina li avrebbe fatti stare meglio.
GILLUPSIE: Per che cosa li stava curando?
CARSTAIRS: Insomma, stavano proprio male, capo, e io so che la penicillina fa star meglio gli ammalati.
GILLUPSIE: Certamente, Carstairs. Penso che lei abbia fatto bene.
CARSTAIRS: E i morti, capo?
GILLUPSIE: Cattivi, figlio mio, cattivi pazienti. E non c'è niente che possa fare un buon dottore quando si trova di fronte dei cattivi pazienti. E nessuna medicina può farci nulla, Carstairs.
CARSTAIRS: Eppure mi è rimasta ancora la seccante impressione che forse non avevano bisogno di penicillina, che servisse qualcos'altro.
GILLUPSIE: Sciocchezze! La penicillina non fa mai cilecca su dei buoni pazienti. Lo sanno tutti.
Al suo posto non mi preoccuperei troppo, Carstairs.[Postman e Weingartner, 1969]

Errori e difficoltà in matematica: l'approccio tradizionale
Il brano riportato sopra utilizza in modo molto provocatorio la metafora della medicina nel sottolineare la necessità del tutto ovvia che la cura si adatti al paziente, e non viceversa. Quel che appare così ovvio nel contesto della medicina non lo è però in contesto didattico, visto che l'intervento tradizionale di recupero in genere non si adegua ai diversi bisogni degli allievi.
La stessa metafora in positivo suggerisce anche che una possibile causa dell'insuccesso di una cura (*intervento*) possa essere la diagnosi errata, a sua volta dovuta a carenze a livello di *interpretazione* dei 'sintomi', o ancora prima a livello di *osservazione* (v. Zan, 2007). Ripercorriamo attraverso alcuni esempi come si caratterizzano questi processi – osservare e interpretare – nella pratica didattica quotidiana.

Esempio 1: Johnnie
Johnnie (2ª primaria) viene chiamato alla lavagna e l'insegnante gli chiede di sottrarre 284 da 437. Johnnie esegue la sottrazione:

437-
284=
253

L’insegnante lo corregge: “Hai dimenticato di sottrarre 1 da 4 nella colonna delle centinaia!” Johnnie guarda l’insegnante ma non risponde. L’insegnante si avvicina alla lavagna, indica il 2 nel risultato e ripete: “Qui ti sei dimenticato che dovevi sottrarre 1 da 4 nella colonna delle centinaia…” Johnnie non reagisce. Dopo aver inutilmente insistito con la richiesta di correzione, l'insegnante chiama al suo posto un altro bambino, che esegue correttamente l'esercizio.

Esempio 2: La gita (Prove INVALSI 2012-2013, 2ª primaria)
Una classe di 9 maschi e 10 femmine, accompagnati dalla maestra Gianna e dalla maestra Luisa, sale sul pulmino per andare in gita.
Restano due posti liberi.
Quanti sono in tutto i posti a sedere per i viaggiatori sul pulmino?

A. ☐ 19
B. ☐ 21
C. ☐ 23

La risposta A è quella che viene scelta dalla maggior parte del campione nazionale (43,2%), mentre il 17,3% sceglie la risposta C, quella corretta, e il 36,2% la risposta B. La risposta B viene interpretata come esito di una lettura che trascura altre informazioni date in forma narrativa (la presenza delle maestre oppure il dato ‘due’ in quanto non scritto in cifre).

Esempio 3: Scenetra
Scenetra è una bambina di seconda primaria. La maestra vuole riconoscere se è in grado di mettere in relazione fatti aritmetici, in particolare se sa utilizzare una somma nota per trovare una somma incognita. Alcuni suoi compagni nell’eseguire addizioni hanno dimostrato di utilizzare tale strategia addirittura in modo spontaneo.
L’insegnante scrive quindi, una sotto l’altra, le due espressioni:
$34 + 9 = 43$
$34 + 11 =$
Alla richiesta di trovare il risultato dell’ultima espressione, Scenetra riscrive in colonna i due numeri, esegue correttamente l’addizione nel modo usuale, e alla fine risponde “45”.

L’insegnante allora le chiede: “Ma non potevi usare il risultato dell’addizione che è scritta sopra?” Scenetra risponde di no. Dopo che la stessa scena si ripete tutte le volte che l'insegnante le propone compiti simili, invitandola esplicitamente a mettere in relazione somme note e incognite, l’insegnante conclude che Scenetra non è in grado di mettere in relazione fatti aritmetici come quelli proposti.

Esempio 4: Azzurra
Azzurra, terza media, deve trovare il perimetro di un rettangolo che ha i lati di 12 cm e 8 cm. La ragazza moltiplica 12 per 8. L’insegnante le dice: “Ma perché moltiplichi? Devi trovare il perimetro…” E Azzurra: “Divido?”

Esempio 5: Nicola
Nicola, terza liceo scientifico, deve risolvere la disequazione:

$$-7x^2 < \sqrt{7}$$

Moltiplica ambo i membri per –1/7, poi ricomincia daccapo e moltiplica per 7 portando tutto al primo membro. A questo punto si ferma, e a nulla valgono gli incoraggiamenti dell’insegnante a *ragionare*.

L'interpretazione degli errori e dei comportamenti fallimentari

Non in tutti gli episodi che abbiamo descritto possiamo riconoscere dei veri e propri errori: in alcuni casi – Scenetra e Nicola - si tratta piuttosto di comportamenti che percepiamo come fallimentari.

Nel caso di errori l'azione didattica è in genere coerente con un'interpretazione semplicista: se uno studente sbaglia è perché non ha sufficienti conoscenze relative al contesto in cui si è verificato l'errore, e quindi l'intervento dovrà assicurarsi di colmare le lacune che ha. Un'ulteriore semplificazione assume che per colmare tali lacune sia sufficiente rispiegare gli argomenti coinvolti.

Per quanto riguarda i comportamenti fallimentari, che sono legati a difficoltà più *diffuse*, che prescindono cioè dai particolari argomenti, le interpretazioni più comuni sono: scarso impegno, lacune di base, studio inadeguato, atteggiamento negativo, o addirittura una scarsa attitudine verso la matematica ("non è portato").

Sono interpretazioni troppo vaghe per dare indicazioni operative al recupero: e in effetti a prescindere dall'interpretazione data dall'insegnante, l'intervento tradizionale di recupero anche per le difficoltà diffuse si riduce a ripercorrere alcuni argomenti (quelli più recenti o quelli ritenuti più importanti) esattamente come nel caso degli errori descritto sopra.

Un intervento di questo tipo non tiene conto della complessità del processo di apprendimento, evidenziata dal modello 'costruttivista'. Secondo questo modello l'allievo *interpreta* l'esperienza: in particolare nel caso della matematica interpreta i messaggi espliciti e intenzionali che l'insegnante continuamente manda, e che hanno come oggetto algoritmi, termini, simboli, proprietà, concetti. L'allievo dà un *senso* a questi messaggi, senso che dipende naturalmente dalle conoscenze che egli ha ma anche da tanti altri elementi meno ovvi. Quell'algoritmo, quel termine, quel simbolo, quella proprietà, quel concetto, verranno recepiti secondo il senso attribuito dall'allievo. Può accadere in particolare che tale senso non coincida con quello che l'insegnante intendeva comunicare, in altre parole che l'interpretazione dell'allievo sia 'distorta', cioè diversa da quella ufficialmente riconosciuta valida: in tal caso si parla di misconcetti. In genere un misconcetto dà luogo a errori sistematici, in particolare nell'esecuzione di procedure, in quanto l'allievo segue in modo corretto una procedura (che non sa essere) scorretta.

Fra i misconcetti più diffusi: l'idea di altezza di un triangolo come segmento verticale, il segno "=" visto come 'comando' e non come relazione, le parentesi usate come stenografia personale e non come strumento per evitare ambiguità.

Nell'interpretazione che l'allievo dà dei messaggi dell'insegnante, e in particolare nella formazione dei misconcetti, ha un ruolo cruciale anche il linguaggio.

A volte le difficoltà nascono dall'inevitabile sovrapposizione del linguaggio matematico con quello quotidiano: alcuni termini matematici specifici vengono utilizzati anche nel linguaggio quotidiano ma con significati diversi (cifra, somma, angolo, spigolo, altezza, limite, …), e soprattutto nei due linguaggi sono diversi gli schemi d'uso dei connettivi e dell'implicazione.

Ma ci sono differenze più globali e profonde, legate alle regole di comunicazione del linguaggio quotidiano, studiate dalla *pragmatica* (v. Ferrari, 2004). La pragmatica sottolinea in particolare il ruolo del contesto nella comunicazione quotidiana: nell'interpretazione di un messaggio infatti intervengono altri linguaggi di accompagnamento, come il tono della voce, l'espressione del viso, la postura, tutti elementi che nell'interpretazione del linguaggio matematico non hanno alcun rilievo.

Un aspetto a mio parere altrettanto importante ma meno studiato riguarda un altro rapporto difficile: quello fra la razionalità che contraddistingue il pensiero matematico e altre forme di razionalità, in particolare quella tipica della vita quotidiana.

Questa differenziazione riporta al tema delle diverse intelligenze, dei diversi stili cognitivi, e alla distinzione fra *pensiero logico* e *pensiero narrativo*.
Secondo Bruner (1986) il pensiero logico si occupa di categorizzare la realtà, di ricercare cause di ordine generale, applicando argomentazioni dimostrative, ma appare inadeguato a mettere in relazione azioni e intenzioni, desideri, convinzioni e sentimenti, a coglierne il significato. L’interpretazione dei fatti umani è invece resa praticabile da un tipo differente di pensiero, che caratterizza una differente modalità di approccio al mondo: il *pensieronarrativo*.

Spesso il fatto che il pensiero logico sia il più adeguato nel contesto della matematica e delle discipline scientifiche, considerate il regno indiscusso e privilegiato della razionalità, porta all'identificazione ‘pensiero logico = razionalità’, mentre il pensiero narrativo viene visto come elemento di disturbo e di ostacolo, in particolare nella risoluzione di problemi (v. Zan, 2016). Invece la centralità del pensiero narrativo nella vita quotidiana fa sì che esso possa costituire una formidabile risorsa per lo sviluppo del pensiero logico, e comunque debba essere preso in considerazione nell'insegnamento della matematica.

Infine nelle difficoltà diffuse hanno un ruolo importante le convinzioni che l’allievo costruisce su di sé e sulla matematica, che sono alla base dell’atteggiamento che costruisce verso la disciplina.
Spesso dietro le difficoltà di un allievo c’è la convinzione di essere inadeguato, di non potercela fare: quello che in genere viene chiamato uno scarso senso di auto-efficacia. Inoltre la visione della matematica condivisa dagli allievi con difficoltà riduce la matematica a un insieme di regole da applicare a situazioni ripetitive: per avere successo bisogna memorizzare tutte queste regole, e quindi *avere tanta memoria*.
Un basso senso di auto-efficacia e una visione distorta della matematica come quella descritta fanno percepire la matematica come incontrollabile, e a questa percezione di incontrollabilità (che possiamo descrivere come un atteggiamento di fatalismo) sono associati comportamenti fallimentari come rispondere a caso o rinunciare a rispondere, ed emozioni negative anche molto intense, come noia, ansia, paura, rabbia, frustrazione.

La responsabilità dell’insegnamento
Un’analisi più fine degli errori e delle difficoltà degli allievi ci permette di riconoscere nella loro origine alcune responsabilità dell’insegnamento.
Molti misconcetti nascono da ‘modelli primitivi’ introdotti dall’insegnante attraverso i primi esempi: tipico è il caso delle altezze di un triangolo.
Le caratteristiche tipiche del linguaggio matematico vengono presentate senza ancorarle a degli scopi condivisi: si chiede un linguaggio preciso e rigoroso senza che l’allievo si possa render conto che tali caratteristiche sono essenziali per affrontare e eventualmente risolvere problemi significativi.
Le ‘altre’ razionalità sono spesso viste come segnali di irrazionalità dall’insegnante di matematica, che quindi tende a ignorare le potenzialità della razionalità quotidiana, col risultato che dall’altra parte gli studenti costruiscono una visione della matematica come disciplina inutile, astratta e lontana dalla loro realtà.
D’altra parte le convinzioni sulla matematica e su di sé che l’allievo costruisce nel suo percorso scolastico sono il frutto della sua interpretazione dell’esperienza con la matematica, e dei messaggi espliciti e impliciti mandati dall’insegnante. La matematica vista come insieme di regole da ricordare e applicare nasce attraverso l’esperienza con un certo tipo di insegnamento, focalizzato più sul *come* fare che sui *perché*.
Ma soprattutto il successo viene identificato col dare risposte corrette in tempi brevi.

L'errore infatti viene visto con una connotazione assolutamente negativa, e non come momento inevitabile nella costruzione della conoscenza, e il tempo viene vissuto come nemico incalzante, e non come compagno in un percorso necessariamente lungo come quello dell'apprendimento.
Infine l'allievo che si sente inadeguato in genere ha accumulato esperienze di fallimenti, spesso sottolineati e drammatizzati da un insegnante poco incoraggiante.

Conclusioni
Le considerazioni fatte fin qui evidenziano alcuni elementi di criticità sulla gestione delle difficoltà in matematica, e a monte le responsabilità dell'insegnamento nella nascita di tali difficoltà. Al tempo stesso però suggeriscono alcune indicazioni per la prevenzione e il recupero.
Per costruire una visione della matematica rispettosa delle caratteristiche di tale disciplina è importante che l'insegnante insista sui *perché*, e non solo sui *come*, che proponga attività di problem solving e non solo esercizi ripetitivi.
Per prevenire la costruzione di un basso senso di auto efficacia è cruciale che l'insegnante impari a incoraggiare, a valutare la prestazione e non la persona, a essere disposto a modificare il proprio giudizio, a riconoscere i piccoli progressi.
Ma soprattutto l'insegnante per primo deve imparare a vedere l'errore e il tempo come risorse e non come nemici: questo implica uno spostamento dell'attenzione dai prodotti (risposte corrette) ai processi (processi di pensiero significativi), e l'instaurarsi in classe di un clima sereno e collaborativo.

EPILOGO …alla maniera di Postman e Weingartner (Zan, 2007).
Intanto, al Blear General Hospital, il dottor Gillupsie si rivolge all'ultimo dottore, il dottor Thinking:

GILLUPSIE: E i suoi pazienti, Thinking, come vanno?
THINKING: Bene, dottore. In via di guarigione.
GILLUPSIE: Fantastico, Thinking. [rivolto a tutti] Come vedete, con i bravi pazienti la penicillina funziona!
THINKING: A dir la verità, dottore, non gli ho dato la penicillina. Si ricorda di quel paziente che aveva da anni quei dolori tremendi alle gambe?
GILLUPSIE: Ah, quello! Avevo consigliato di tagliargli le gambe, mi pare.
THINKING: Beh, invece è guarito. Pensi che tutto il suo problema derivava dalle scarpe correttive che gli avevano detto di portare!
GILLUPSIE: Incredibile, Thinking! E da quali valori delle analisi se ne è accorto?
THINKING: A dir la verità, dottore, non me ne sono accorto dalle analisi. L'ho guardato camminare…
GILLUPSIE: Lei è proprio un originale, Thinking! E l'ha dimesso?
THINKING: Beh, ora deve fare un po' di riabilitazione, ma è contento.
GILLUPSIE: La riabilitazione costa, Thinking. Era meglio se gli tagliava le gambe. Comunque, mi dica dell'altro paziente…
THINKING: Bene. Quello l'abbiamo dimesso. Si ricorda quelle crisi spaventose di allergia?
GILLUPSIE: Già. Secondo me di origine alimentare: avevo suggerito che non mangiasse.
THINKING: Invece ho raccolto un bel po' di informazioni e ho scoperto la causa!
GILLUPSIE: Incredibile, Thinking! Lei non finisce mai di stupirmi! E come ha fatto ad avere tutte queste informazioni? Quale macchinario nuovo ha usato? Ce lo dica, lo compriamo subito. E poi ci serve la tabella delle medie, della deviazione standard, quartili e tutte queste cose qui: mica improvvisiamo, noi. Conosciamo bene il valore dei numeri.
THINKING: A dir la verità, dottor Gillupsie, non ho usato un nuovo macchinario.

GILLUPSIE: Ma benedetto figliolo, non faccia il misterioso! Come ha scoperto tutte quelle cose sul suo paziente? Chi gliele ha dette?
THINKING:*Lui*, dottor Gillupsie.
Quando gliele ho chieste.

Bibliografia

Bruner, J. (1986), *Actual Minds, Possible Worlds*. Cambridge, Harvard University Press (tr. it. *La mente a più dimensioni*, 2003, Bari, Laterza).
Ferrari, P. L. (2004), *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*. Bologna, Pitagora Editrice.
Postman N., Weingartner C. (1969). *Teaching as a Subversive Activity*. New York: Delta (tr. it. *L'insegnamento come attività sovversiva*, Firenze: La Nuova Italia, 1973).
Zan, R. (2007), *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*, Milano, Springer.
Zan, R. (2016), *I problemi di matematica. Difficoltà di comprensione e formulazione del testo*. Roma: Carocci.

Giornate di studio dell'Insegnante di MATematica

Comunicazioni e laboratori - Scuola Primaria e dell’Infanzia

Francesca Ferrara
Dipartimento di Matematica "Giuseppe Peano", Università di Torino
francesca.ferrara@unito.it

Titolo: Esplorare il senso del numero e dintorni con *TouchCounts*

Descrizione

Il seminario intende focalizzarsi su alcune riflessioni legate all'utilizzo e all'integrazione delle tecnologie digitali nella scuola di oggi. In particolare, presterà molta attenzione agli aspetti di metodo e di processo che la tecnologia digitale può aiutare a favorire per chi apprende. Numerosi sono gli studi in didattica della matematica che considerano questi aspetti. Sinclair (2014) ha messo in luce come, nelle ultime decadi, ci siano stati cambiamenti massicci nella natura delle interazioni fisiche con le tecnologie digitali. Si è passati dalla tastiera, che richiede comandi alfanumerici, al mouse, che ha reso possibile il click, poi al trascinamento continuo, che è caratteristico dei software dinamici (come GeoGebra), e infine al tatto, che sembra persino più diretto, con il trascinamento e altri gesti che sostituiscono il mouse e la tastiera. Queste interazioni chiamano in causa il corpo in modi molto diversi, sottolineando la valenza che le azioni e le attività corporee possono avere nell'apprendimento della matematica, accanto al linguaggio (Radford, 2013; de Freitas & Sinclair, 2014; Ferrara, 2014; Ferrara & Seren Rosso, 2015). Anche Rotman (2008) ha sottolineato che il futuro della matematica andrà incontro a una riduzione dell'egemonia alfanumerica e a un conseguente movimento verso espressioni matematiche dinamiche e visive.
In questa prospettiva, si presenteranno spunti per una didattica del numero (nei suoi aspetti cardinali e ordinali) e delle operazioni mediante l'utilizzo di un'applicazione *multitouch* (letteralmente, multi-tocco), *TouchCounts*, ideata da due ricercatori canadesi ma disponibile anche in versione italiana. Alla luce di studi condotti ai primi due anni della scuola primaria e al quinto anno della scuola dell'infanzia (nel 2014/15 e 2015/16), si mostreranno esempi provenienti dalle classi e, mediante essi, si discuterà di come alcune esperienze possano diventare significative per i bambini, sia per il tipo di coinvolgimento implicato, sia rispetto ai significati che si possono costruire in relazione alle potenzialità offerte dalla tecnologia. Vedremo come queste esperienze cambino il modo di lavorare nella classe e pongano questioni importanti sulla scelta delle attività.

Riferimenti bibliografici

de Freitas, E. & Sinclair, N. (2014). *Mathematics and the body: Material entanglements in the classroom*. Cambridge: Cambridge University Press.
Ferrara, F. (2014). How multimodality works in mathematical activity: Young children graphing motion. *International Journal of Science and Mathematics Education, 12*(4),917-939.
Ferrara, F. & Seren Rosso, M. (2015). Embodiment e multimodalità nella classe di matematica: Sviluppi e riflessioni recenti. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 38A-B*(3), 321-342.
Radford, L. (2013). Sensuous cognition. In D. Martinovic, V. Freiman & Z. Karadag (Eds.), *Visual mathematics and cyberlearning* (pp. 141-162). New York, NY: Springer.
Rotman, B. (2008). *Becoming beside ourselves: The alphabet, ghosts, and distributed human beings*. Durham: Duke University Press.
Sinclair, N. (2014). Generations of research on new technologies in mathematics education. *Teaching Mathematics and Its Applications, 33*(3), 166-178.

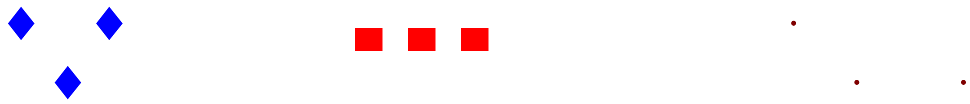
Domenico Lenzi[1] Roberta Lenzi[2]
[1]Dipartimento di matematica e fisica dell'Università del Salento - domenico.lenzi@unisalento.it
[2]Gioia Mathesis, Lecce - lrobi.len@gmail.com

Titolo: Infanzia e acquisizione delle prime abilità aritmetiche

SUNTO
Con l'uso sistematico delle dita – primo laboratorio naturale – per i bambini l'avvio all'aritmetica può iniziare a partire dai tre anni, quando essi incominciano a indica-re la loro età con pollice, indice e medio di una mano. Però già prima sarebbe opportuno intervenire per dare sostegno a una naturale tendenza verso il numero, tipica di ogni bim-bo, che incomincia a prender coscienza di sé e del mondo che lo circonda. Si tratta di attivare potenzialità di cui ogni individuo è dotato grazie alla sua **memoria di specie**. In proposito Brian Butterworth parla di "intelligenza matematica" (cf. [1]).
Ma se le cose stanno così, è naturale chiedersi perché questa capacità non si riveli allo stesso modo in ogni essere umano così come compare, per esempio, quella di parlare. In realtà, il fatto è che esse sono capacità legate a ereditarietà genetiche diverse, che molti studiosi fanno rientrare nel vasto bagaglio degli istinti umani. Per esempio, se pensiamo all'istinto di conservazione, esso compare immediatamente alla nascita. Così il neonato ri-conosce subito il seno materno e con la bocca va alla ricerca del capezzolo, che attiverà la suzione. Poi il latte in bocca provocherà l'istinto di ingoiare, con il quale si completa il primo dei processi che assicurano la sopravvivenza.
Gli istinti sono tanto più efficaci quanto più antico è il percorso filogenetico che li ca-ratterizza, il quale rappresenta il modo di evolversi di una specie. Ebbene, l'***Homo sapiens*** avrebbe imparato a parlare in un arco di tempo che gli studiosi collocano tra i 300 mila e i 50 mila anni fa ([2]). Invece, per le capacità aritmetiche, si fa riferimento alla comparsa dell'***Homo sapiens sapiens*** (circa 40.000 anni fa, con i primi reperti – quali incisioni di tacche su ossi lunghi di animali – che fanno pensare a rudimentali rappresentazioni nu-meriche; insieme alla comparsa del pensiero astratto e a rappresentazioni (*isignificanti*) di tipo non iconico, nelle quali si può riconoscere ciò che viene illustrato (cioè, *il significato*) solo in conseguenza di una convenzione.
Per un bambino l'istinto verso il linguaggio orale incomincia a evidenziarsi intorno ai due anni, grazie al fatto che egli sin dalla nascita è immerso in un mondo di parlanti che sollecitano quell'istinto. Anzi, addirittura quando è nel ventre materno – così pare – le parole raggiungono il feto attraverso la placenta e il liquido amniotico, provocando quegli stimoli che lo porteranno a parlare. Però abbiamo tutti coscienza del fatto che la stessa cosa non avviene per l'istinto matematico ([3]). Eppure il muovere i primi passi in aritmetica non richiede tutto quel laborioso processo che il bambino attiva, per imitazione, al fine di mettere in funzione l'apparato fonatorio. E se questo processo non avviene nei primi mesi di vita, si creeranno notevoli difficoltà. Per esempio, tutti abbiamo avuto modo di renderci conto dell'incapacità di alcune popolazioni di pronunciare la lettera **r**. Un professore cinese, che è in Italia da più di venti anni, non è in grado di pronunciare quella lettera; invece suo figlio, che ha imparato a parlare in Italia, ha una *erre* formidabile.
Come si diceva, nei primi approcci aritmetici è fondamentale l'uso delle dita. Però bisognerà portare il bambino a capire che mostrare insieme pollice indice e medio è molto di più che un contrassegno. Quelle dita esprimono una rappresentazione di carattere analitico, che non cambia di significato se vengono mostrati medio, anulare e mignolo. Onde è essenziale far capire che per rappresentare il *due* o il *tre* (e la stessa cosa varrà poi per numeri più grandi) non importa quali dita si usino; ciò che serve è che esse vengano via via contate fino a raggiungere il numero da rappresentare. Poi, la familiarità con l'*un due tre* consentirà all'alunno – su diretta sollecitazione

dell'insegnante – di rendersi conto del fatto che *tre* dita (cioccolatini, fiammiferi…) corrispondono a *due* dita (cioccolatini, fiam-miferi…) *più uno*; così come *due* dita (cioccolatini, fiammiferi…) corrispondono a *tre* dita (cioccolatini, fiammiferi…) *meno uno*; avendo così i primi rudimentali, ma fondamentali, esempi di addizione e di sottrazione. Inoltre, l'alunno *vedrà* che il contare *due* oggetti è indipendente da come essi siano scelti – *Principio di Indifferenza* – che si trasporterà facilmente al caso di *tre* oggetti). Quindi emergerà la consapevolezza del fatto che tre oggetti che siano visibili contemporaneamente, si percepiscono nella loro *trinitarietà*, senza doverli contare, come nel caso di due oggetti (forse il conteggio avviene inconsciamente!). Onde essi rimarranno in quantità uguale a *tre* anche se li si allontana un po' l'uno dall'altro; facilitando, così, la presa di coscienza della conservazione della quantità *tre*.

Col pieno possesso della nozione del *tre*, il piccolo sarà pronto per i passi successivi.



Però, così come un bambino fa immediatamente le prime esperienze che lo porteranno a parlare, sarebbe opportuno che anche l'attivazione delle abilità aritmetiche venisse sollecitata al più presto; ma purtroppo non ci si rende conto dell'importanza di ciò. Eppure, in attesa dell'ingresso nella scuola materna, nel bimbo si potrebbe attivare la cadenza "uno, due, tanti". Il corpo è ricco di situazioni che si possono sfruttare in proposito nell'ambito dell'"uno, due", già nei primi momenti in cui il neonato giace nella culla, anche se non è ancora in condizione di capire[5]: una testa, una faccia (con le varianti *un faccino*, *un visino*), una nuca, un naso, una bocca… ; un piede, poi uno e due piedi (contandoli, ma due volte e alternando la scelta del primo piede); una mano, poi una e due mani; un occhio, poi uno e due occhi (sempre contando due volte) e così via. Per poi passare, una volta che il bimbo sarà sul seggiolone, al conteggio "uno, due" (con l'eventuale estensione a "tanti") di oggetti che rientrano nella sua esperienza. Qualcuno potrebbe obbiettare che in fondo non c'è tutta questa fretta di tediare i bambini con cose che poi impareranno facilmente. Tuttavia – prescindendo dalla loro ansia di imparare – sappiamo che quel "facilmente" non vale per tutti. Anzi, molti bambini poi si trovano ad avere notevoli difficoltà. In verità, ci sono abilità che se non vengono attivate al più presto, poi è molto difficile recuperarle.

Abbiamo già accennato all'abilità di parlare. Ma non è la sola. Sono ben note le difficoltà che gli analfabeti adulti incontrano nell'imparare a leggere e a scrivere. Inoltre tutti sap-piamo quanto sia difficile imparare una lingua straniera dopo una certa età.

Per l'apprendimento dei primi elementi di aritmetica non è mai troppo presto; anzi, è importante partire quanto prima. Ciò contribuirà a ovviare ai molti casi di discalculia apparente, come quello di una bambina – IV primaria – da noi seguita nell'a.s. 2014/'15 ; consentendo nello stesso tempo di avviare i bambini alla cosiddetta percezione analitica, che permette di tener conto di tutti gli elementi di una rappresentazione – se necessario – senza eliminare nessuno di essi; al contrario di quanto avviene nella percezione globale/gestaltica, in cui certi particolari sono inconsciamente ignorati, lasciando poi al cervello il compito di interpretare automaticamente l'informazione parzialmente acquisita, facendo leva sulle esperienze da lui immagazzinate.

Purtroppo questo tipo di percezione – per certi versi utilissima – se non è bilanciata dalla percezione analitica, finisce con l'ottundere la capacità di ragionare.

[5] Del resto, per lui passerà molto tempo prima che capisca il significato delle frasi di uso più comune.

Bibliografia

[1] Butterworth B. (1999). Intelligenza matematica. Ed. Rizzoli, Milano.
[2] De Mauro T. (1995). L'origine del linguaggio. http://www.emsf.rai.it/articoli/articoli.asp?d=40
[3] Devlin K. (2008). L'istinto matematico. Ed. Mondolibri.
[4] http://www.matematicamente.it/magazine/24aprile2015/222.Lenzi-Francesca-Discalculia.pdf

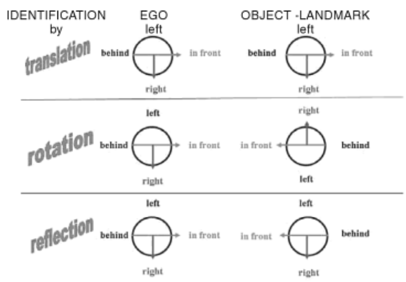
"Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)", n. 26 Supplemento n. 1, 2016
G.R.I.M. (Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo)

Mariangela Ruisi, Iole Barbarino, Aurora Sunseri Trapani
Università degli Studi di Palermo – G.R.I.M.
mariangelaruisi@gmail.com, iole.brb@gmail.com, aurorasunseritrapani@libero.it

Titolo: Tappi, matite, dadi e mattoncini: un'esperienza di gioco geometrico alla Scuola dell'Infanzia e alla Scuola Primaria

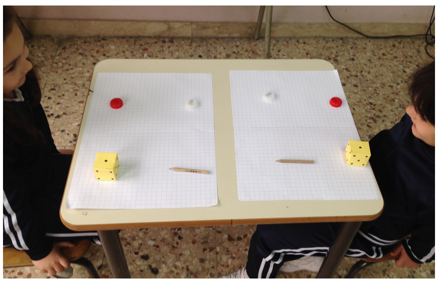
Introduzione

Da diversi anni ormai il mondo della Scuola si interroga su quali siano le competenze matematiche di ingresso alla Scuola Primaria (SP) e sul raccordo, quindi, tra questo grado scolastico e la Scuola dell'Infanzia (SdI). Interessarsi a questa problematica dal punto di vista della Ricerca significa interrogarsi su cosa voglia davvero dire *apprendere la matematica* su gradi scolastici "bassi" come quelli menzionati, dove le competenze acquisite rimangono spesso a livello "ingenuo", "implicito", veicolate dalle attività di gioco che le Maestre e i Maestri propongono durante il primo triennio di formazione; su *quali siano le componenti* di questo apprendimento e su come si possa *verificare se un bambino ha appreso* o meno un *concetto/oggetto* matematico e, infine, su come *interpretare* e *valutare* i suoi errori. Le problematiche espresse risultano molto complesse e hanno bisogno di strumenti di analisi adeguati per poter essere indagate, soprattutto se l'interesse è su gradi scolastici "multiformi" come quello della SdI e i primi anni della SP, visti in stretta continuità tra loro. In letteratura le esperienze didattiche riferite a bambini di 5 e 6 anni su contenuti o proto-contenuti matematici non sono tantissime; particolare menzione in questo senso meritano i lavori di D'Amore et alii (2004), che da anni ornai discutono le problematiche educative relative al transfert di competenze dal gioco a-disciplinare tipico della Scuola dell'infanzia a quello disciplinare che inizia alla Scuola Primaria.
La Scuola, in quest'ottica, deve essere capace allora di *potenziare* quelli che possono identificarsi come processi cognitivi impliciti e di permettere, negli anni, il passaggio dalle conoscenze ingenue a quelle scientifiche, non dimenticando mai il senso della Matematica e la capacità di questa disciplina di attrarre, se insegnata in modo opportuno e adeguato all'età. Questo è ciò che abbiamo voluto proporre anche noi operando nella zona complessa di passaggio dal mondo del gioco (bambini di 5 anni) a quello più "concettuale" della Scuola Primaria (bambini di 6 anni) in un ambito di contenuto complesso come quello geometrico della riflessione, veicolato dagli "schemi" tipici del *gioco dello specchio* di Lurçat (1986) mostrato nella figura accanto.



Competenze linguistico-espressive e visuo-spaziali … in gioco

La scelta di indagare sperimentalmente un contenuto complesso come quello della *riflessione* (proposta seconda un setting di gioco come quello mostrato accanto in figura) sta nel voler ricercare l'evoluzione del pensiero geometrico e delle sue regole a partire dalle prime esperienze spaziali.



Per far questo, in accordo con Fandino Pinilla (2008), abbiamo provato a realizzare una situazione di apprendimento capace di configurarsi come significativa in termini di continuità e verticalità tra la SdI e la SP: un “gioco” utile al potenziamento diretto o indiretto di tutte le tipologie di apprendimento proto-matematico discusse in letteratura: *apprendimento concettuale* (noetica), *apprendimento algoritmico* (calcolare, operare), *apprendimento per strategie* (risolvere, congetturare), *apprendimento comunicativo* (dire, argomentare, validare, dimostrare), *apprendimento e gestione delle trasformazioni semiotiche* (di trattamento e conversione). Il *gioco dello specchio* (mostrato in figura) ci ha permesso di analizzare processi e argomentazioni differenti nei bambini della SdI e della SP: l’analisi video realizzata, che sarà mostrata in fase di presentazione del paper, ha messo in evidenza (anche se in modo diverso per i due gradi scolastici) la necessità di lavorare, in continuità e in accordo con una progettazione curriculare verticale, sullo scollamento, spesso significativo, riscontrato su tutto il campione di indagine, tra i registri semiotici LN e Visuo-Spaziale. In accordo poi con la letteratura sono stati riscontrati errori di lateralizzazione, concettualizzazione di indicatori linguistici di tipo topologico (*davanti, dietro, sotto, sopra* …), di pre-misurazione e misurazione.

Bibliografia

D’Amore B, Fandino Pinilla M.I.. Gabellini G., Mrazzani I., Masi F., Sbaragli S. (2004). *Infanzia e matematica. Didattica della matematica nella scuola dell’infanzia. Bologna: Pitagora.*

Di Paola B., et alli., (2007). *La Geometria, una guida ai suoi contenuti e alla sua didattica.* Palermo: Palumbo Editore.

Fandiño Pinilla M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell’apprendimento della matematica.* Trento: Erickson.

Lurçat L. (1986). *Il bambino e lo spazio. Il ruolo del corpo*, La Nuova Italia, Scandicci (Fi).

Maria Lo Cicero
Direzione Didattica "G. Rodari" 2° Circolo di Villabate, Sc. Primaria
maria.locicero53@gmail.com

Titolo: "Geometrica...mente": cominciamo dal cerchio.

Introduzione

Il progetto "Geometrica…mente", finanziato dalla Regione Sicilia, è stato rivolto ad alunni di classi terze, quarte e quinte, per la durata di due anni in orario curriculare ed extracurriculare ed ha avuto lo scopo di creare e sperimentare buone pratiche didattiche per favorire l'apprendimento dei concetti geometrici al fine di risolvere situazioni problematiche anche in contesti di vita reale: un grande contenitore pieno di proposte stimolanti che percorrono le principali arterie della geometria.
Durante la prima fase, si sono affrontati, per le classi terze, argomenti che prevedevano attività coerenti con la programmazione didattica annuale. Il successivo anno scolastico, per le suddette classi, divenute quarte, si è pensato ad un percorso innovativo, che prevedesse, come primo argomento, lo studio del cerchio, argomento che nella prassi didattica si introduce in classe quinta. La motivazione che ha spinto questa scelta è legata alla valorizzazione ed all'approfondimento di uno dei concetti fondamentale della geometria, con la possibilità di avere tempi didattici più lunghi.
Nel percorso formativo è stato curato particolarmente lo *sviluppo della capacità del fare e l'acquisizione del ragionamento spaziale*. Le attività presentate hanno avuto come fine la costruzione di schemi mentali per lo sviluppo del pensiero astratto, stimolando atteggiamenti positivi verso l'apprendimento della geometria laboratoriale, promuovendo il valore culturale del fare geometria, incrementando l'interesse per la geometria e sua applicazione nelle problematiche della vita reale.

Metodologia

Il percorso didattico è stato condotto dall'insegnante in modo *costruttivista*, porgendo domande-stimolo agli alunni per sollecitare osservazioni e discussioni tra pari e con l'insegnante e, così, permettere la costruzione attiva della conoscenza (Kilpatrick, 1987).
La scelta metodologica per l'apprendimento del concetto in questione è partita da una situazione concreta, in cui il bambino è stato coinvolto personalmente in attività pratiche, ludiche e in cooperazione con altri compagni. In accordo con il pensiero della Castelnuovo (1963), la conoscenza deve cominciare necessariamente attraverso i sensi e l'espressione verbale sarà successiva e spiegherà i vari passaggi delle scoperte fatte, espresse con parole semplici, chiare, legate all'esperienza, che valorizzino le rappresentazioni concrete e le carichino di significato. L'approccio a partire da situazioni concrete è supportato dalla teoria dell'*embodiment della mente*, secondo cui la costruzione dei concetti è intrinsecamente dimensionata dalla natura del nostro corpo e del nostro cervello attraverso il sistema sensomotorio, quindi la conoscenza concettuale assume significato in relazione alla nostra interazione con la realtà. (Lakoff e Nunez, 2005).
È seguita la fase della produzione iconica mediante l'utilizzo di strumenti strutturati e non strutturati, che costituisce un trampolino di lancio verso la concettualizzazione e l'astrazione.
Il percorso metodologico prevedeva anche l'intersezione di attività supportate dagli strumenti multimediali. In particolare, si è previsto l'utilizzo della lavagna interattiva multimediale, che dà molteplici valori aggiunti alla lezione in quanto offre la possibilità di utilizzare diversi software didattici, permette l'interazione con materiale multimediale e vari linguaggi (suoni, colori, immagini, filmati, interazioni e simulazioni), al fine di valorizzare le *intelligenze multiple* (Biondi,2008).

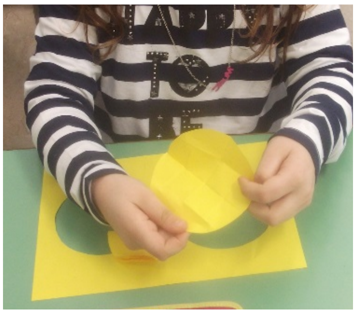
Attività

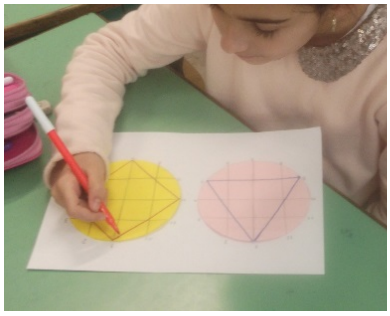
1. Conversazione guidata sul cerchio per accertare i prerequisiti: segmento, angolo, rotazione.
2. Attività ludiche in cui gli alunni hanno costruito col proprio corpo cerchi di diverse dimensioni, servendosi di un laccio trattenuto alle estremità da due bambini, dei quali uno ruotava su se stesso e l'altro si spostava tenendo l'altra estremità tesa.



Durante i movimenti del secondo bambino gli altri alunni hanno assunto, via via, le posizioni da lui lasciate nei vari spostamenti, formando così un cerchio del quale ciascuno di loro ne rappresentava i punti. Alla fine è nata una discussione su quanto avvenuto e si è iniziato a parlare delle parti della figura.

3. Gli alunni, in coppia, hanno disegnato cerchi aiutandosi con una strisciolina di cartoncino sulla quale si sono fatti dei buchi lungo tutta la lunghezza (compasso non strutturato). Un alunno teneva sempre ferma la penna inserita sul primo buco mentre l'altro bambino infilava la penna via via negli altri buchi dando origine a cerchi concentrici. È seguita una discussione su quanto avvenuto.
4. Presentazione del compasso strutturato anche da lavagna ed esercitazioni iconiche.
5. Attività sulle varie parti del cerchio e loro caratteristiche (ricordando che il diametro è anche un asse di simmetria), anche con il software di geometria dinamica GeoGebra e la LIM.
6. Verifica, sia mediante un laccio che con l'utilizzo del software Geogebra, che il rapporto fra la circonferenza e il diametro è costante e pari a 3,14, attraverso la trasformazione di una circonferenza in un segmento (rettificata). Riferimento alla storia della matematica mediante la visione di un filmato e osservazione che già nell'antichità Archimede chiamò tale rapporto π. Considerazioni analoghe per quanto riguarda il rapporto tra circonferenza e raggio.
7. Attività iconiche di cerchi artistici realizzati anche con l'uso di Geogebra.
8. La conoscenza del cerchio è diventata attività propedeutica per la costruzione di poligoni. Sono state realizzate costruzioni di triangoli e quadrati con riga e compasso e con Geogebra; costruzioni di poligoni regolari con riga, compasso e goniometro, seguendo le seguenti istruzioni: *disegnare una circonferenza, dividere l'angolo giro al centro della circonferenza in tanti angoli uguali quanti sono i lati del poligono regolare che si vuole disegnare e segnare i punti corrispondenti sulla circonferenza, unire ciascun punto con il successivo mediante segmenti.* Si è osservato che si ottenevano poligoni regolari inscritti nella circonferenza.





Si è ripetuta l'attività precedente con cerchi di carta piegati lungo 6 diametri, in modo da formare angoli da 30°, individuando così sulla circonferenza 12 punti equidistanti tra loro. Poiché il numero 12 è multiplo di 3, di 4, di 6 e di 12, sono stati disegnati triangoli, quadrati, esagoni e dodecagoni.
Significativa è stata la presenza dei genitori, invitati a condividere il percorso del progetto.

Conclusioni
Tanti sono stati i punti di forza in questo tipo di esperienza: l'essere stati protagonisti di un percorso costruttivo, il confronto collaborativo, la socializzazione delle scoperte, la motivazione, che ha sempre tenuto alto l'interesse e la voglia di fare.
Il clima positivo ha favorito un apprendimento che ha rafforzato i concetti affrontati, acquisendo la consapevolezza che la matematica non discrimina, ma che tutti possono aspirare alla formazione.
Per gli insegnanti coinvolti nel progetto, il percorso è stato vissuto come una crescita professionale: un'autoformazione con ricaduta sugli alunni.

Bibliografia
Biondi G.*, A scuola con la Lavagna Interattiva Multimediale. Nuovi linguaggi per innovare la didattica*. Giunti, 2008.
Castelnuovo E., *Didattica della Matematica*. La Nuova Italia, 1963.
Kilpatrick Y., *What costrutivism might be in mathematics education*. Proceedings of 11th Conference PME, Montreal, 3-23, 1987.
Lakoff G., Nunez R.E., *Da dove viene la matematica*. Bollati Boringhieri, 200

Teresa Garaffo[1], Daniela Ferrarello[2], Maria Flavia Mammana[2]
[1] I. C. Fontanarossa, Catania
[2] Dipartimento di Matematica e Informatica, Univ. di Catania
tgaraffo@gmail.com, ferrarello@dmi.unict.it, fmammana@dmi.unict.it

Titolo: Si possono "mangiare" i numeri? La matematica Maya nella scuola dell'infanzia[6]

Introduzione

L'importanza della formazione logico- matematica non sempre è ben compresa quando si tratta di bambini in età prescolare. Si tende a pensare, a volte anche tra insegnanti di scuola dell'infanzia, che il curricolo vero e proprio debba essere impostato a partire dalla scuola primaria, e che il bambino sia ancora troppo piccolo, alla scuola dell'infanzia, per accostarsi a concetti e conoscenze di vario tipo, inclusi quelli matematici.
Numerose ricerche in diversi ambiti di studio ci dicono invece che il periodo della scuola dell'infanzia rappresenta un nodo cruciale per la strutturazione della dimensione cognitiva logica e linguistica e per i comportamenti sociali ed emotivi, e che anche prima di tale periodo i bambini possiedono alcuna abilità numeriche (Wynn, 1992; Butterworth, 1999; Lucangeli,, 2003; Corsaro, 1999). Facendo tesoro dei risultati di tali ricerche, è possibile predisporre curricoli, ambienti di apprendimento, attività ed esperienze che tengano conto di ciò che i bambini sanno, di come si muovono nello spazio, come interagiscono, di cosa osservano e come ne parlano: tutte situazioni che contribuiscono a costruire strutture mentali su cui poggiare le successive capacità matematiche, sia in ambito geometrico che aritmetico. Due fattori rivestono la condizione di partenza perché questo possa accadere: il primo è che il bambino deve potersi muovere nello spazio, sperimentare, toccare, osservare, provare, chiedere, fare. Il secondo, che deriva da quello precedente, è che nessuna conoscenza potrà mai consolidarsi se il bambino non è messo nella condizione di agire. Non saranno semplici schede che potranno far capire il concetto di numero, o imparare a memoria la conta dei numeri, e quindi "ogni scorciatoia didattica che faccia leva sulla nominalizzazione lascia la struttura cognitiva precedente, non la mette in crisi né la supera" (Rizzi, 2012, p. 11). Le Linee Guida per il diritto allo studio degli alunni e studenti con disturbo specifico di apprendimento ci forniscono alcuni suggerimenti, sia per l'area linguistica che per quella matematica, che occorre tenere presente nella costruzione di un curricolo per la scuola dell'infanzia. Per imparare a calcolare, dicono le Linee Guida, è necessario che il bambino prima sviluppi i processi mentali specifici nella cognizione numerica, nella stima di numerosità e nel conteggio, privilegiando l'uso del conteggio in situazioni concrete in cui il numero viene manipolato e rappresentato attraverso i diversi codici e in maniera che il numero sia anche uno strumento per gestire situazioni legatealla quotidianità. Su questi presupposti è nato il progetto ***Progetto TEMA*** – Tecnologie educative e matematica: sistemi integrati per una didattica inclusiva nella scuola di base~~,~~ in collaborazione tra il Dipartimento di Scienze matematiche e informatiche e il Dipartimento di Scienze della formazione dell'Università di Catania e che ha supportato le ricerche esposte in questo lavoro.

[6]Attività svolta nell'ambito del Progetto TEMA, FIR 2014, Università di Catania

La matematica Maya

Il progetto prevede alcuni incontri con esperti matematici da realizzare con gli alunni in sezioni di scuola dell'infanzia e classi di scuola primaria, durante i quali approfondire concetti base di logica e matematica a partire dalla matematica dei Maya. Si è scelto di introdurre il numero con l’aritmetica Maya, perché essa ha un grande vantaggio dal punto di vista didattico, cioè il carattere ostensivo delle cifre, che mostrano il loro valore nella rappresentazione grafica, in contrasto con la nostra usuale aritmetica in cui il simbolo che rappresenta un numero non sottintende in alcun modo al valore del numero stesso. In particolare, nell’aritmetica Maya, 1 è simboleggiato da un pallino, 2 da due pallini, e così via. Il numero 5 è simboleggiato da una stanghetta, 6 da una stanghetta e un pallino, etc. I vantaggi di una rappresentazione ostensiva dei numeri sono innegabili: l’intelligenza visuale studiata da Vygotskij è presente anche, anzi soprattutto, nei bambini. Tuttavia, nell’età corrispondente al 6° - 7° grado (11 anni – 12 anni) gli alunni devono anche saper operare con i simboli. La proposta didattica verte quindi su una rappresentazione integrata di simbolo e ostensione del valore, da riportare alla lavagna. Secondo questa rappresentazione “ibrida” il numero 1 sarà rappresentato dallo stesso simbolo usato nella nostra aritmetica ma avrà 1 pallino evidenziato, il 2, analogamente, avrà 2 pallini evidenziati, etc. Dal 5 al 9, le cifre riporteranno una stanghetta (valore di 5 pallini) più un certo numero di pallini.

Considerazioni finali

Durante il seminario sarà illustrato, con l'ausilio di immagini, video e materiali prodotti, in che modo abbiamo lavorato con i bambini della scuola dell'infanzia utilizzando delle barrette di cioccolato Kinder, che sono formate da 5 pezzi di cioccolato; quali risultati parziali abbiamo raggiunto e in che modo intendiamo procedere.

Bibliografia

Aglì F., Martini A. 1995, *Esperienze matematiche nella scuola dell'infanzia*, Firenze, La Nuova Italia.
Butterworth B. 1999, *Intelligenza matematica. Vincere la paura dei numeri scoprendo le doti innate della mente*, Milano, Rizzoli.
Corsaro W. A. 1997, *The sociology of Childhood*, trad. it. 2003, Bologna, Il Mulino.
Linee Guida per il diritto allo studio degli alunni e degli studenti con disturbo specifico di apprendimento, Decreto ministeriale 12 luglio 2011.
Lucangeli D. 2003, *L'intelligenza numerica*, Trento, Erikson.
Pontecorvo C. (a cura di), 1989, *Un curricolo per la continuità educativa dai quattro agli 8 anni,* Firenze, La Nuova Italia.
Rizzi R. 2012, *Matematizzare*,, Parma, edizioni Junior.
Vygotskij L. S. 1990, *Pensiero e linguaggio. Ricerche psicologiche*, a cura di L. Mecacci, Roma-Bari, Laterza
Wynn K 1992, Children's acquisition of the numbere words and the counting system, in Cognitive Psycolology, 24 (2), pp. 220-251.

Silvia Medica e Mariangela Ruisi
G.R.I.M. Università degli Studi di Palermo
silvy_msl_90@hotmail.it, mariangelaruisi@gmail.com

Titolo: Processi cognitivi e rappresentazioni semiotiche: un case study di problem solving matematico con studenti di Scuola Primaria e dell'Infanzia

Premessa

La Matematica, come suggeriscono molti autori è un codice che per essere appreso ha bisogno di una continua codifica e decodifica da parte del soggetto apprendente. Nella pratica didattica, tale codice in molti casi viene "mediato" da tantissimi altri fattori che intervengono nella fase di insegnamento/apprendimento della disciplina (D'Amore, 2005). Tutto questo complica parecchio il lavoro dell'insegnante di Matematica che cerca di *devolvere* (Brousseau, 1986) in modo consapevole il pensiero matematico in classe. Se pensiamo poi al fatto che un concetto matematico di per sé non esiste, e per poter essere appreso dal discente ha bisogno di continui rimandi a differenti rappresentazioni dello stesso, la complessità discussa in precedenza aumenta parecchio. Come sottolineato da Duval (1993) infatti, uno dei problemi più evidenti relativi all'insegnamento/apprendimento della Matematica si ritrova nel fatto che, nel momento in cui insegnante e allievo si approcciano ad un oggetto matematico, in realtà entrambi confondono lo stesso oggetto con una sua rappresentazione semiotica (D'Amore, 2005); non acquisiscono l'oggetto, ma un suo surrogato.
Centrando l'attenzione sul soggetto apprendente, ciò che la Ricerca in Didattica ha evidenziato è una sorta di blocco mentale, una sorta di inibizione che costringe l'allievo ad avere un'idea dell'oggetto matematico studiato in modo assolutamente sfumato, confuso, strettamente legato in modo riduttivo soltanto a una delle rappresentazioni possibili. Davanti ad una "nuova" rappresentazione semiotica dell'oggetto (ci riferiamo teoricamente alle funzioni di *trattamento* e *conversione* di Duval) lo studente non riconosce immediatamente lo stesso oggetto, esso appare come nuovo, sganciato da ciò che ha appreso in precedenza.
Per quanto detto e in accordo con la Teoria di Duval (1993) che ha guidato la sperimentazione discussa in questo articolo, la costruzione dei concetti matematici deve essere dunque strettamente dipendente dalla capacità di usare più registri di rappresentazioni semiotica di quei concetti.

L'indagine sperimentale

La ricerca, tenendo in considerazione nel problem solving matematico (proto-matematico per quanto attiene la Scuola dell'Infanzia) il registro LN, quello del disegno e quello puramente aritmetico relativo al calcolo, ha provato a identificare alcune problematiche legate ai processi cognitivi sottesi ai diversi registri semiotici di studenti normodotati e con bisogni educativi speciali.
In un'ottica di verticalità la fase sperimentale del lavoro (opportunamente calibrata in relazione ai differenti gradi scolastici interessati) ha coinvolto bambini frequentanti la scuola dell'Infanzia, studenti di Scuola Primaria di I classe e due studenti di classe III e V Primaria con Bisogni Educativi Speciali.
Le domande di ricerca che hanno guidato il lavoro di indagine facevano riferimento alla possibilità di identificare un processo cognitivo "comune" in tutti gli studenti coinvolti che evidenziasse, a prescindere dal grado scolastico frequentato e da una disabilità specifica (non particolarmente problematica comunque) un riferimento di tipo epistemologico nel problem solving matematico nel passaggio dal LN al disegno e viceversa, registri messi in relazione alla competenza (per la Scuola Primaria) sul calcolo aritmetico formale.

Sono stati definiti quattro case studies realizzati ad hoc per la scuola dell'Infanzia (5 anni), per la Scuola Primaria (I classe), e per i due soggetti di Primaria con bisogni educativi speciali, per confrontare parallelamente i risultati raggiunti e provare ad identificare una possibile Teoria epistemica sottesa. Le prove somministrate hanno fatto riferimento a quattro stimoli differenti che possono essere così schematizzati:

1. Problema in LN > Rappresentazione grafica del testo.
2. Rappresentazione grafica > Individuazione ed elaborazione di un possibile testo in LN, anche a livello orale.

3-4. Calcolo aritmetico in riga (per la classe prima) e in colonna e individuazione delle stesse operazioni aritmetiche all'interno di problemi matematici espressi in LN contenenti dati superflui (solo per la Scuola Primaria).

Risultati e conclusioni

Ritengo che questo lavoro possa essere di interesse per la comunità di Ricerca in Didattica sia in ambito curriculare che di Sostegno. I risultati sperimentali, che verranno mostrati dettagliatamente durante la presentazione, confermano che la conversione operata dal LN alla rappresentazione grafica risulta per gli allievi più immediata e meno problematica rispetto a quella inversa, che richiede maggiori capacità logiche e immaginative, non del tutto sviluppate nei soggetti coinvolti, per l'età o per la presenza di BES. Per quanto attiene al registro semiotico del calcolo per la Scuola Primaria, le difficoltà si sono manifestate principalmente quando questo si ritrova all'interno del testo di un problema. Si evince, quindi, che le competenze relative alle funzioni di rappresentazione, trattamento e conversione andrebbero potenziate, in un'ottica verticale, già a partire dalla Scuola dell'Infanzia, anche in soggetti con BES.

Bibliografia

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques.* 7, 2, p. 33-115.

D'Amore B. (2005). Noetica e semiotica nell'apprendimento della matematica. In: Ancona R.L., Faggiano E., Montone A., Pupillo R (eds.) (2005). *Insegnare la matematica nella scuola di tutti e di ciascuno.* Atti del convegno omonimo, Università di Bari, 16-18 febbraio 2004. Milano: Ghisetti & Corvi. ISBN: 88-538-0270-7.

D'Amore B. (2006). Oggetti matematici e senso. Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica.* 4, 557-583.

Duval R. (1993). Registres de Répresentations sémiotiques et Fonctionnement cognitif de la Pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives.* 5. p. 37-65.

Radford L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La matematica e la sua didattica.* 1, 4-23.

Zan R. (1998). *Problemi e convinzioni.* Bologna: Pitagora.

Manuela Di Natale[1] e Benedetto Di Paola[2]
[1]I Circolo "G. Bagnera" di Palermo - G.R.I.M. Gruppo di Ricerca Insegnamento/Apprendimento delle matematiche
[2]Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo
dinatale.manuela@yahoo.it , benedetto.dipaola@unipa.it

Titolo: Educazione musicale ed educazione matematica: contesti semiotici diversi tra loro interagenti

1. Matematica e Musica: *ratio* e *delectatio*

Il processo che porta alla formazione della conoscenza musicale è tutt'altro che semplice e consta di diversi elementi, apparentemente lontani tra loro. In primo luogo è opportuno evidenziare l'esistenza di una componente primitiva nell'ascolto della musica che lega sensazioni e reazioni emotive a specifiche gamme timbriche e tonali. Tuttavia, la componente innata non fornisce una spiegazione esaustiva delle risposte multidimensionali fornite, né può spiegare le differenze culturali tra le stesse. Pertanto la maggior parte delle nostre risposte alla musica pare sia appreso, ovvero legato, al nostro background inteso in senso fortemente esperienziale, nonché prodotto del contesto socio-culturale in cui l'ascoltatore è inserito e che determina in larga parte la risposta emotiva dello stesso. La musica quindi, in quanto arte e scienza insieme, fa sfoggio di un'anima marcatamente irrazionale, frutto d'intuizione difficilmente classificabile o esprimibile attraverso specifici algoritmi, attuando al contempo processi di analisi e sintesi che caratterizzano la produzione e la comprensione del fatto musicale. In accordo con quanto ribadito da Zotto (1993), è possibile, quindi, affermare che, nella sua articolazione "linguistica", la musica possiede una struttura logica riferibile a elementi di tipo assiomatico, grammaticale e algoritmico, assimilabili (con le dovute eccezioni) a quelle logiche-deduttive del pensiero matematico. *Ratio* e *delectatio*, in questo senso, qualificano l'universo musicale e nel loro incontro dialettico contribuisco a creare nuovi circuiti sinaptici dai risvolti rilevanti. Diverse sono le teorie analitiche che si sono occupate di porre in evidenza l'importanza dell'educazione musicale per la formazione del bambino e non solo, vagliandone i differenti aspetti dall'ambito neurologico a quello più strettamente educativo. Tra queste riteniamo meriti particolare attenzione la teoria delle intelligenze multiple di Gardner, in cui viene messa in evidenza la presenza di un'intelligenza musicale che si esprime come competenza non solo nel comporre ed eseguire, ma anche nell'ascoltare e distinguere brani musicali in relazione all'altezza, al ritmo e al timbro. Secondo l'autore, lo sviluppo di ogni intelligenza prende vita dai processi di simbolizzazione, fortemente determinati dal contesto culturale e, quindi, dalle stimolazioni educative cui il soggetto viene esposto. Si passa dunque da canali di simbolizzazione più semplici a forme gradatamente più complesse. Questa idea di "generalizzazione" sta alla base della teoria dell'*oggettivazione* di Radford (2014) e rappresenta il fulcro centrale dell'iter di sperimentazione, finalizzato alla promozione di una maturazione evidente, che si attualizza nel passaggio tra un livello di generalizzazione e il successivo. In ambito matematico, attraverso questa nuova "lente" si procede all'analisi delle problematiche didattiche dell'apprendimento della disciplina specificatamente riferite alla capacità d'intuizione, di analisi e di sintesi tipiche del pensiero logico-deduttivo (conflitti cognitivi e modelli spontanei e scientifici di apprendimento). In accordo con il quadro teorico proposto dall'autore, gli oggetti matematici da noi proposti ai bambini in ambito musicale sono stati considerati come simboli di unità culturali emergenti da un sistema di usi legati alle attività matematiche, che sono state opportunamente realizzate in classe in contesti semiotici differenti, tra loro in relazione.

2. Il percorso sperimentale

Il disegno sperimentale da noi realizzato viene riproposto di seguito in forma schematica e si pone come sintesi di un percorso che si è sviluppato nell'arco di oltre 6 mesi:

Indagine preliminare	Pre-test. *Valutazione dei prerequisiti attraverso una batteria di tre giochi*
Fase sperimentale: situazioni didattiche	***Primo ciclo di attività didattiche*** ➢ Rumore oppure no?; *La principessa Scacciachiasso; Versi diversi; Suoniamoci su; Tic & Tac …* ***Secondo ciclo di attività didattiche*** ➢ *Occhi all'orecchio; Un'altalena di suoni; Suoniamoci e cantiamoci …* ***Terzo ciclo di attività didattiche*** ➢ *Dettato in musica; Dimmi che forma hai e ti dirò chi sei …*
	➢ Fiaba in musica; Il mondo della *MusiMateMagica*
Fase conclusiva	Post-test. *Riflessione meta cognitiva*

L'intero percorso sperimentale verrà illustrato con maggiore dettaglio durante la presentazione al Convegno.

Bibliografia

Radford, L. (2014). *De la teoría de la objetivación [on the theory of objectification]*. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7(2), 132-150.

Piazza G. (1979). *Orff Schulwerk*. Manuale. Milano: Edizioni Suvini Zerboni.

Spaccazocchi M., Perini L. (2011). *Noi e la Musica*. Mercatello sul Metauro: Progetti Sonori.

Zotto G. (1993). *Lo stereotipo in Musica*. In: Parini P. (1993). *Dallo stereotipo alla creatività*. Trento: Publiprint. 163-167.

Beniamino Danese
Reinventore srl
beniamino.danese@reinventore.it

Titolo: Esperimenti, Ragionamenti e Storytelling nella Scuola Primaria

Descrizione del laborararatorio:
Il laboratorio porta in primo piano l'esecuzione di esperimenti con materiali di uso quotidiano nella scuola primaria. Vengono eseguiti alcuni esperimenti di facile ripetibilità:
- La costruzione di una camera oscura con uno scatolone,
- Esperimenti con la CO_2 e l'ossigeno con sostanze casalinghe (aceto, bicarbonato, acqua ossigenata, bacinelle, candele, stecchini)
- I diavoletti di Cartesio con bottiglie, bicchieri e flaconcini di vetro

A questo tipo di esperimenti si accompagnano in modo particolarmente efficace
- gli stimoli al ragionamento logico, alla costruzione di oggetti matematici, alla spiegazione con parole proprie
- lo storytelling ovvero il racconto dalla storia della scienza, con l'inquadramento delle scoperte e il loro impatto, le vicende personali degli scopritori nel loro tempo
- l'avvicinamento all'esecuzione in prima persona di esperimenti, l'esercizio della manualità.

Giornate di studio dell'Insegnante di MATematica

Comunicazioni e laboratori - Scuola Secondaria di Primo grado

Fiorenza Turiano e Franco Favilli
CAFRE, Università degli Studi di Pisa
fiorenza.turiano@gmail.com, favilli@dm.unipi.it

Titolo: Su quale dito cadrà il numero?

Competenze target: Rappresentare in diversi registri; Risolvere problemi; Modellizzare; Argomentare; Comunicare: dare forma al pensiero interiore (dimensione *intra*) ed imparare un lessico e un registro adeguati ad esprimerlo all’esterno (dimensione *inter*); Imparare dal confronto tra pari (dimensione sociale dell’apprendimento - Vygotskij).
Processi cognitivi: Osservare; Esplorare; Cogliere relazioni, individuare invarianti; Farsi domande e porsi problemi; Congetturare; Controllare e validare la propria produzione.
Ambito: Numeri; Relazioni & Funzioni
Organizzazione del lavoro in aula: Fase individuale: discorso con se stesso. **Fase di gruppo**: collaborazione all’interno del gruppo di 3-4 studenti, per confrontare opinioni e produzioni personali, per negoziare significati, per eventualmente decostruire e ricostruire i significati personali e riorientare i processi cognitivi coinvolti. **Fase tra i gruppi e l’insegnante**: mediazione dell’insegnante per valorizzare i saperi e i processi degli studenti e farli evolvere e convergere verso il *Sapere* della disciplina. È questa la fase dell’istituzionalizzazione delle conoscenze (Brousseau). **Fase tra gli studenti e l’insegnante**: attività metacognitiva, orchestrata dall’insegnante, che induca il singolo studente alla riflessione sul processo personale di costruzione del proprio sapere, verso forme di consapevolezza della relazione di sé con la matematica, verso forme di autovalutazione e verso la costruzione della competenza dell’imparare ad imparare.

Questa proposta vuole essere una testimonianza dell’applicazione della metodologia didattica socio-costruttiva, che intende le attività didattiche in aula come *laboratorio,* in cui tutta la classe parla di matematica e costruisce significati matematici, a partire da esplorazioni promosse e guidate dall’insegnante. Seppur abbozzate e incerte, le idee dei singoli evolvono nell’interazione dialogica di tutti, insegnante incluso. Nella nostra proposta questa metodologia si intreccia con quella della *early algebra*. Il significato dei simboli dell’algebra viene costruito in continuità con quelli dell’aritmetica. Cura e attenzione viene posta sulla simmetria del segno “=” e sulla pluralità di rappresentazioni di un numero. Lo studente viene educato a cogliere relazioni tra fatti numerici attraverso la loro osservazione ed esplorazione per individuare il ruolo che hanno i numeri al di là del loro valore. Ciò gli permetterà di leggere la struttura che soggiace al problema, che così può rappresentare con consapevolezza tramite la scrittura algebrica. Crediamo che questo approccio possa favorire l’acquisizione dell’algebra come linguaggio per generalizzare e modellizzare, favorire il pensiero funzionale e anticipatorio, stimolare al problem posing e al problem solving. Gli studenti possono diventare abili, e soprattutto consapevoli, nel *traitement* (Duval) e nella conversione da un registro all’altro, ed evitare il mero trattamento trasformativo di cui rischiano di smarrire il significato e l’obiettivo. Qui riportiamo il testo-indovinello del problema da cui nasce la nostra attività didattica e ne indichiamo sinteticamente **le sue fasi evolutive**: *Conta con le dita di una mano, dal pollice al mignolo e, sempre continuando a contare, ritorna indietro al pollice e poi prosegui verso il mignolo. E così via… Su quale dito cadrà il numero 10? E su quale il 27, il 526, il…?*
Prima fase: schematizzazione del fenomeno numerico (può essere usata una tabella). **Seconda fase**: osservazione per cercare invarianti, legami tra i numeri e la loro posizione sulle dita. **Terza fase**: riscrittura aritmetica dei numeri per evidenziare le caratteristiche scoperte. **Quarta fase**:

rappresentazione in scrittura algebrica delle popolazioni di numeri trovate. **Quinta fase**: comunicazione in linguaggio colloquiali del criterio individuato per rispondere all'indovinello.

Questa semplice esperienza porta alla scoperta delle caratteristiche di un numero attraverso alcune sue diverse riscritture, alla scoperta di una **aritmetica modulare**. L'insegnante può invitare la classe alla ricerca di altre modularità in situazioni concrete tratte dalla vita reale; può richiedere la produzione originale da parte degli studenti di testi di indovinelli, che nascondono un problema matematico. Variando i parametri del problema (il numero di dita o il dito dal quale cominciare a contare) l'insegnante può stimolare lo studente al gioco del "*E che cosa succederebbe se fosse…*" che poco alla volta viene educato al problem posing. Inoltre questa attività offre l'occasione di consolidare alcune proprietà che sottostanno alle operazioni. L'esperienza d'aula ci conferma che essa può far emergere alcune errate e diffuse abitudini acquisite dagli studenti sulla espressione aritmetica usata per esprimere **la divisione con resto tra due numeri naturali**. Per rappresentare la frase *la divisione di 32 per 3 dà resto 2*, non è raro, infatti, vedere al posto di 32=3*10+2, la seguente espressione: *32:3=10 e resto 2*.

Bibliografia e sitografia

Accomazzo, P., Ajello, M., Paola, D., Turiano, F. (2010). *A piccoli o grandi passi verso l'algebra*. [http://www.scuolavalore.indire.it/nuove_risorse/a-piccoli-o-grandi-passi-verso-lalgebra/]

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14 (3), 24-35.

Arzarello, F., Bazzini, L. & Chiappini, G. (1994). *L'algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche*. Quaderno n.6 , Nucleo di Ricerca Didattica, Dip. di Matematica, Univ. di Pavia.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, *SI ESM,* 103-131.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades*, 5–17. New York: Routledge.

Kieran, C., Pang J., Schifter D. & Fong Ng S. (2013). *Early Algebra. Research into its Nature, its Learning, its Teaching*. ICME 13 Topical Surveys. Hamburg: Springer Open.

Malara, N. A. & Navarra, G. (2003). *Progetto ArAl. Percorsi in aritmetica per favorire il pensiero pre-algebrico*. Bologna: Pitagora.

Malara, N.A. (2012). Il caso dell'algebra. Consolidamenti nella ricerca e mutamenti di prospettiva nell'insegnamento. In Arzarello, F. (a cura di), *Insegnare matematica, oggi. Ricerca didattica, rilevamento degli apprendimenti, pratiche di classe. Dossier Insegnare*, 52-61.

Malara, N.A. (2014). La didattica dell'algebra tra ricerca formazione e pratica di classe. In Ferrara, F., Giacardi, L., Mosca et al. (a cura di), *Conferenze e Seminari. Mathesis Subalpina 2013-2014*, 35-55. Torino: KWB.

MPI – Liceo Scientifico "Vallisneri" Lucca (1994). *Algebra tra tradizione e rinnovamento*. [http://www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2013/10/algebra.pdf]

Nolli, N., Rossetto, S., Zoccante S., (2006). L'aritmetica aiuta l'algebra e l'algebra aiuta l'aritmetica. [http://www.scuolavalore.indire.it/nuove_risorse/laritmetica-aiuta-lalgebra-e-lalgebra-aiuta-laritmetica/]

Prodi, G. & Villani. V., (1982). Anche il calcolo letterale può essere intelligente, *Archimede* 34, n. 4.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In Alatorre, S., Cirtina, J., Sáiz, M. & Méndez, A. (eds.), *Proceedings. PME 28-NA* Chapter (vol.1, 2-21). Mexico: UPN.

Radford, L. (2009). Signs, gestures, meanings: algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In Durand-Guerrier, V., Soury-Lavergne, S. &Arzarello, F. (eds.), *Proceedings CERME 6*, XXXIII – LIII.

Zan, R. (2001). I danni del "bravo" insegnante. In Livorni, L., Meloni, G. & Pesci, A. (a cura di), *Le difficoltà in matematica: da problemi di pochi a risorse per tutti*, 135-141. Bologna: Pitagora Editrice.

Aaron Gaio
Università degli Studi di Palermo
aaron.gaio@dmi.unict.it – aaron.gaio.tn@gmail.com

Titolo: Ri-scoprire gli algoritmi tra mappe, percorsi e grafi

1. Introduzione e motivazione

Ispirate in parte ai progetti *This is Mega Mathematics!* (Casey, Fellows, 1992) e *Computer Science Unplugged* (Bell et al., 1998-2015), le attività didattiche del nostro progetto hanno un approccio basato su *storie da raccontare, giochi e problemi matematici ambientati nel mondo reale* (con riferimento alla RME, Realistic Mathematics Education, Freudenthal, 1991); gli algoritmi e la matematica discreta sono dappertutto in matematica (ed informatica) e, se presentati in modo accattivante, possono essere un approccio vincente per dare un'idea diversa ai bambini/studenti di queste ostiche materie. Molte delle attività proposte sono correlate ad argomenti di matematica, per esempio l'esplorazione dei numeri binari, mappe e grafi, problemi di riconoscimento e di ordinamento, crittografia. Altre attività riguardano argomenti di solito trattati in corsi di tecnologia, come per esempio l'apprendimento di come effettivamente funzioni un computer. Alcuni motivi per la divulgazione di queste attività didattiche possono essere:

- gli studenti sono coinvolti in *attività che sviluppano le capacità di risoluzione di problemi*;
- aiutare ad accrescere le *capacità di comunicazione e la creatività*;
- migliorare il *pensiero computazionale* ed aiuta a imparare a ragionare;
- insegnare competenze matematiche ed informatiche utili a livelli successivi;
- possibilità di essere partecipi in attività di matematica “complessa” senza particolari conoscenze come prerequisiti;
- all’insegnante stesso non sono richieste grosse conoscenze di base per poterle realizzare;
- nelle *Indicazioni Nazionali*, alcuni degli obiettivi sono, ad esempio, leggere e comprendere testi che coinvolgono aspetti logici, costruire ragionamenti, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista degli altri e sviluppare un atteggiamento positivo rispetto alla matematica, capendo come gli strumenti matematici siano utili per operare nella realtà.

2. Contesto ed attività svolta

La proposta di seminario mira ad esporre ed illustrare parte di un percorso svolto nel corso dell’anno scolastico 2015/2016 con 4 classi di scuola secondaria di primo grado dell’Istituto Comprensivo di Primiero (TN), in un laboratorio di matematica quadrimestrale, per una durata complessiva di 24 ore per ogni classe. Molte attività sono state quindi provate più volte, nell’ottica di un percorso di ricerca che segue la metodologia della design research (Cobb et al. 2003, Plomp et al. 2006), ed è stato raccolto materiale (registrazioni video, registrazioni audio, materiale cartaceo prodotto dagli studenti, interviste) che sarà utilizzato per un’approfondita analisi dei punti di forza e debolezza dei task studiati e presentati agli studenti e le loro reazioni a queste nuove proposte didattiche. La sperimentazione si inserisce in un più ampio percorso nell’ottica di una costruzione verticale di competenze sui temi di matematica discreta sopracitati, con un percorso più ampio che va a coinvolgere le classi della scuola primaria fino alla scuola secondaria, con l’idea di essere poi propedeutico a corsi di matematica ed informatica nelle diverse scuole secondarie di secondo grado. L’interesse degli insegnanti è sempre stato notevole riguardo alle tematiche prescelte, pur se le conoscenze presenti spesso non sono sufficienti per poterlo insegnare (sono stati raccolti anche dei dati in un questionario mirato al tema, con partecipazione di più di 100 insegnanti, con risultati sull'interesse per la materia o sulle conoscenze pregresse).

3. Problemi con percorsi e grafi

Le proposte didattiche su cui vogliamo concentrare l'attenzione riguardano una sequenza di task con l'obiettivo di risolvere problemi su ottimizzazione di percorsi, reti, grafi. La teoria dei grafi presenta numerosi esempi di problemi del mondo reale e si adatta, come detto in precendenza, a rendere in questo senso "reale" il setting dei problemi. Sarà presentato un'idea di un possibile percorso di insegnamento con varie attività, di cui portiamo alcuni esempi:

- Map coloring;
- Minimal Spanning Trees (Ottimizzazione di percorsi in un grafo);
- Circuiti e percorsi di Euler e problema dei ponti di Konigsberg;
- Minimum dominating sets (insieme dominante minimo di un grafo);
- Problemi di ordinamento e reti con grafi, relativi algoritmi, giochi cooperativi;
- Crittografia a chiave pubblica senza l'utilizzo di conoscenze avanzate di algebra, un esempio con i grafi.

Il punto principale di queste attività è, in conclusione, quello di far provare agli studenti il tipo di problem solving che i matematici affrontano quando analizzano problemi con i grafi. Pensare alcuni passi nella loro strategia futura è di fondamentale importanza e la possibilità di ri-scoprire (Brusseau) gli algoritmi risolutivi può dare un nuovo "gusto" all'attività matematica.

Bibliografia

Bell, Timothy C., Ian H. Witten, and Mike Fellows. Computer Science Unplugged: Off-line activities and games for all ages. *Computer Science Unplugged*, 1998, 2015 review.

Brousseau G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques.* 7, 2, p. 33-115, 1986.

Casey, Nancy and Mike Fellows, *This is mega-mathematics! stories and activities for mathematical thinking problem-solving and communication: The Los Alamos Workbook*, 1992.

Cobb, Paul, et al., Design experiments in educational research. Educational researcher 32.1 (2003): 9-13.

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an educational task. The Netherlands, Dordrecht: Reidel.

Hart, E., Maltas, J., and Rich, B., Teaching Discrete Mathematics in Grades 7-12, *Mathematics Teacher* 83 (ed. H.L. Schoen), 1990, pp. 362-367.

Plomp, Tjeerd, and N. Nieveen. An introduction to educational design research. *Proceedings of the seminar conducted at the East China Normal University*, Shanghai (PR China), November 23–26. 2007.

Carla Ciarcià
Istituto Comprensivo "Parco della Vittoria" Roma
ciarciacarla@gmail.com

Titolo del laboratorio: Il problema dei sacchi di Galileo

Abstract
Spesso la geometria risulta di difficile assimilazione per gli alunni perché considerata lontana dalla realtà e da applicazioni pratiche. Ciò è dovuto ad un approccio alla geometria solo da un punto di vista teorico e poco empirico. In particolare l'attività proposta servirà a far riflettere sul concetto di volume e sulla relazione tra superficie e volume. L'attività prende spunto da testi di storia della scienza tramite la lettura di estratti originali in modo da far conoscere ai ragazzi la figura di Galileo Galilei e di far capire loro come dietro un problema pratico della vita quotidiana si celano regole legata alla matematica. Grazie alla manipolazione e agli esempi esplicativi si cercherà di stimolare inoltre il ragionamento sui casi limite, concetti complicati ed un po' astratti per un alunno delle scuola secondaria di primo grado. Ciò avverrà attraverso l'utilizzo di materiali costruiti in classe, di calcoli e formule. Si ragionerà sullo sviluppo dell'intuizione in geometria attraverso materiali ed azioni che producono variazioni e trasformazioni. L'attività può essere riproposta in una terza classe della scuola secondaria di primo grado e può avere un carattere interdisciplinare coinvolgendo gli insegnanti di italiano, storia e tecnologia.

Descrizione del laboratorio in dettaglio
L'attività inizia con la lettura del testo di Galilei (1638) ul problema della capienza dei sacchi di grano, e con la decodifica in termini matematici del problema. Durante questa parte dell'attività i ragazzi rimangano affascinati dal fatto che un matematico parli di matematica senza l'utilizzo di formule e partendo da un problema della vita reale, inoltre rimangono colpiti dalla lettura di un testo in italiano arcaico. L'attività va svolta in gruppi in modo che gli alunni si confrontino tra loro sul testo di Galileo e diano una loro prima interpretazione che va successivamente confrontata tra i gruppi (dal confronto i ragazzi hanno costruito un piccolo dizionario per la decodifica del testo). Successivamente si passa a realizzare i cilindri con il cartoncino o un pezzo di stoffa riempiendoli con del riso o dei legumi. Si constaterà facilmente che i due "sacchi" avranno capienza diversa. Si farà notare i possibili errori a cui si ci può facilmente imbattere e le approssimazione opportune da fare per la misura del volume fatta in questo modo empirico. Dopo aver intuito da che cosa può dipendere la variazione del volume si può fare vedere la dipendenza quadratica e lineare rispetto al raggio e all'altezza attraverso l'utilizzo di un foglio di calcolo, che sarà da spunto per riprendere il concetto di proporzionalità diretta, inversa e quadratica. Il punto di forza dell'attività è quello di far leggere ed interpretare il testo originale di Galileo agli stessi ragazzi rendendoli protagonisti. Inoltre la figura del grande scienziato può essere approfondita in varie discipline arrivando pure alla realizzazione di una poesia, grazie alla collaborazione con l'insegnante di italiano e storia. Inoltre si può svolgere un compito autentico alla fine dell'attività con la collaborazione dell'insegnante di tecnologia dove si chiede ai ragazzi di scrivere un progetto per la realizzazione di un contenitore ottimale per le bevande ed infine la realizzazione del prodotto stesso.

Bibliografia
Galileo Galilei, 1638. *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Leida-Olanda: Appresso gli Elsevirii

Eugenia Taranto[1], Virginia Alberti[2], Sara Labasin[3], Ferdinando Arzarello[1]
[1] Dipartimento di Matematica “G. Peano”, Università di Torino, Torino (TO)
[2] I.I.S. “B. Castelli”, Brescia (BS), [3] L.S. “P. Gobetti”, Torino, (TO)
eugenia.taranto@unito.it, ferdinando.arzarello@unito.it , alberti.virginia@gmail.com, saralabasin@yahoo.it

Titolo: MOOC tra Geometria e Numeri: un modo dinamico, interattivo e coinvolgente per la formazione insegnanti

Per tenersi aggiornati, affrontare nuovi temi o riprendere in mano quelli studiati molti anni fa, gli insegnanti stanno scoprendo i MOOC (Massive Online Open Courses), corsi universitari online, a libero accesso (open) e rivolti a una platea sconfinata di utenti (massive).
Oltre al materiale didattico come video e prove di verifica, i MOOC forniscono forum interattivi che aiutano a costruire una comunità di studenti e professori ed un ecosistema per un apprendimento più ampio. I corsi sono per lo più gratis; il pagamento è a volte necessario per ottenere certificazioni o valutazioni supplementari.
Nato nel 2008, il fenomeno si è diffuso fino a raggiungere il suo picco nel 2012, anno di nascita di alcune delle principali piattaforme (come Coursera e edX) e delle partnership con istituzioni prestigiose come Boston (MIT), Harvard, Stanford e Duke University. Tra i milioni di utenti (dodici al mese solo quelli di Coursera), sempre più numerosi i docenti. Soprattutto da quando le nuove tecnologie si sono insediate tra i banchi, lasciando allo zelo dei singoli la capacità di utilizzarle opportunamente per l’insegnamento.
In questo panorama si inserisce Math MOOC UniTo, una proposta nata dal Master di secondo livello "Formatori in Didattica della Matematica" dell'Università di Torino: consiste nella progettazione, produzione ed erogazione di MOOC di Matematica destinati alla formazione di docenti di scuola secondaria. Quindi si tratta di “MOOC creati da insegnanti per insegnanti”! La piattaforma con cui i MOOC vengono erogati utilizza MOODLE (http://difima.i-learn.unito.it/) ed è usata dal team di Torino sin dal 2008 per programmi di formazione sia regionali sia nazionali. Si perseguono principalmente due obiettivi: il primo consiste nell’aggiornamento di quanti frequentano il MOOC; il secondo è quello di sensibilizzare sull'uso delle tecnologie nelle scuole, per conformarsi di più alla natura degli studenti nativi digitali, progettando lezioni che li coinvolgano in forma più attiva.
In questo seminario si intende raccontare l’esperienza del “MOOC Geometria” (ottobre 2015-gennaio 2016), nato come primo dei 4 MOOC in cantiere, collegati ai temi del Nuovo Curriculum Nazionale in Matematica (Numeri, Geometria, Funzioni, Dati e Previsioni). Si farà una panoramica del MOOC in termini di progettazione, scelta di metodologie adottate e risorse tecnologiche. In particolare ci si concentrerà sulla scelta dello strumento che ha permesso la veicolazione di tutti i contenuti didattici e matematici: Sway (https://sway.com/).
Si riporteranno anche dei dati per dare testimonianze quantitative e qualitative di questa prima esperienza di formazione online tutta italiana. Un primo cenno: sono stati 424 i docenti da tutta Italia che si sono iscritti al “MOOC Geometria” e di questi il 36% ha portato a termine tutte le fasi di formazione, con un netto superamento del tasso di completamento riportato in letteratura, che si attesta al 5% (Bayane S., Ross J. (2013). *The pedagogy of the Massive Open Online Course: the UK view*, The Higher Education Academy).
Si concluderà dando delle anticipazioni sul prossimo MOOC che verrà erogato a fine ottobre 2016: il “MOOC Numeri”, che ripercorre i collegamenti dall’aritmetica all’algebra. Si mostreranno due esempi di attività sul senso del numero, una per la scuola secondaria di primo e una per la secondaria di secondo grado, proposti nelle prime settimane del MOOC.

Ultimo, ma non meno importante, in conformità con la Legge 107 e l’introduzione della figura dell’Animatore Digitale (AD), si farà osservare che, essendo il compito dell’AD quello di implementare le competenze digitali all’interno della scuola, i MOOC per la formazione docente possono essere intesi come una risorsa. Infatti possono fornire spunti per migliorare le competenze digitali degli allievi, accrescere l’interscambio e l’interdisciplinarietà tra colleghi, invogliare alla condivisione mediante opportune bacheche di comunicazione (che superino quelle tipiche del web 1.0) e infine far conoscere nuovi strumenti da tener presenti nelle fasi di progettazione didattica.
Ci sentiamo di dire che i MOOC da noi progettati sono l’ambiente giusto per vivere esperienze di socializzazione e condivisione, in cui la qualità professionale dei docenti può fare la differenza, perché indirizzata verso appropriati usi didattici della tecnologia, alla conquista di quella che Prensky chiama saggezza digitale (http://www.tdjournal.itd.cnr.it/article/view/277/210).

Domenica Margarone
Nucleo di Ricerca Didattica – Univ. di Catania
mimargarone@gmail.com

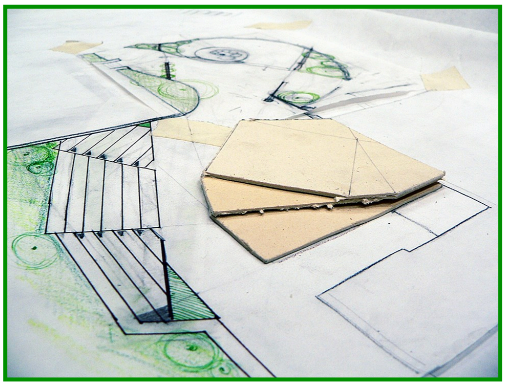
Titolo: Giochi logici

La matematica non è un gioco ma il gioco aiuta ad apprendere meglio la matematica. Non sarà certo un caso che gare matematiche vengano organizzate per tutti gli ordini di scuola.
Tutte le attività che hanno una componente emozionale o ludica, attirano e mantengono l’attenzione dello studente. Un’attività didattica che coinvolge quesiti di logica potrebbe quindi essere una buona occasione per sperimentare come attraverso il gioco anche la matematica si può imparare esplorando, manipolando oggetti, inventando, progettando e, perché no, divertendosi.
Cimentarsi con i giochi logici rappresenta per gli studenti una sfida stimolante e un’opportunità per mettere alla prova abilità disciplinari e trasversali alla ricerca dell’indizio giusto per risolvere di volta in volta la questione proposta.
L’attività ha l’obiettivo di potenziare la competenza dei ragazzi ad orientarsi nella complessità del mondo reale, perché permette loro, muovendosi in contesti di realtà, di spaziare in svariati campi della matematica passando dai numeri alle figure geometriche, dalla logica alla probabilità, dalla statistica alla crittografia. Un concetto di competenza come insieme di conoscenze, abilità, padronanza di linguaggi e di metodi, cioè di “saperi situati" che scaturiscono da contesti e situazioni formative stimolanti per un apprendimento attivo.
I giochi logici si inseriscono perfettamente in questa visione di competenza. Essi favoriscono la comprensione dei concetti matematici collegati e, attraverso una esperienza coinvolgente, consentono di sperimentare un collegamento fra strumenti del pensiero e della fantasia che mostra come anche intuizione, creatività e manualità hanno il loro posto in questa disciplina tanto bistrattata.
Le attività sono tratte da fonti diverse: le prove internazionali; le prove nazionali dell’Invalsi; le gare matematiche; riviste; materiali reperibili in rete.
I materiali su cui lavorare vertono su molteplici argomenti che coinvolgono la logica: gli enigmi classici; la crittografia e i codici; il completamento di sequenze di numeri o di figure; le illusioni ottiche; … Non bisogna poi dimenticare che la matematica non è fatta solo di numeri. Si può creare un gioco matematico con un bastoncino, un pezzo di carta, una matita, ma anche con le parole. Hanno una simmetria parole come ingegni, anilina o osso, mentre l’acetone se letto al contrario diventa un’enoteca.
Affrontare i giochi logici significa cimentarsi con situazioni non standard. In generale i problemi per loro natura non sono esercizi a carattere ripetitivo ma questioni significative, legate a situazioni di vita quotidiana o ad ambiti scientifici di altre discipline, che presentano situazioni per affrontare le quali non si possono utilizzare schemi appresi una volta per tutte, ma per trovare la chiave giusta è l'intelligenza che deve mettersi in moto o, meglio, le varie tipologie d’intelligenza.
D’altro canto uno spiccato spirito di osservazione e una buona dose di curiosità sono sempre stati il motore della ricerca scientifica. Spesso è infatti l'intuizione la fonte delle conquiste scientifiche, che si rivelano per lampi improvvisi e che la logica successivamente conferma. Logica e intuizione evidenziano il ruolo che il ragionamento e la creatività hanno in matematica, mostrando come il gioco possa aiutare a comprendere meglio le dinamiche che riguardano questa disciplina.
La ricerca della strategia risolutiva può prevedere all’occorrenza la collaborazione fra più ragazzi con i vantaggi che derivano dall’attività in gruppo. Per i quesiti più impegnativi è opportuno infatti attivare quell’intelligenza collettiva del gruppo, che spesso riesce col contributo di tutti a conquistare la tanto agognata soluzione del quesito.

È possibile così realizzare un vero *laboratorio di matematica*, inteso non come luogo fisico ma come luogo della mente, ambiente di apprendimento in cui i ragazzi imparano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con l'insegnante, utilizzando gli errori e il loro superamento in chiave costruttiva. In poche parole un laboratorio che sia la palestra delle idee.
Compito principale di ciascun docente sarà quello di reperire per ogni incontro materiale interessante, diversificato e adeguato, di curare la definizione di un ambiente di apprendimento funzionale, di organizzare di volta in volta il setting della classe, di rendere esplicite le regole del gioco. Egli dovrà occuparsi anche di avviare e coordinare a conclusione di ciascuna fase dell'attività una discussione collettiva che rappresenta un significativo momento di riflessione sui processi attivati e sugli esiti del percorso di apprendimento realizzato. Sperimentare quel collegamento fra le conoscenze già acquisite e l'intuizione del momento, formulare una congettura e argomentare il proprio pensiero per sostenere le proprie idee davanti agli altri è senza dubbio un'esperienza coinvolgente che fornisce l'occasione per un approfondimento di molti aspetti della disciplina e favorisce una più profonda comprensione dei concetti matematici collegati ai quesiti.
Particolare attenzione il docente dovrà dedicare alla scelta dei percorsi da proporre perché i ragazzi devono affrontare quesiti non banali, ma neanche fuori dalla loro portata. Situazioni troppo facili non catturerebbero la loro attenzione ma quesiti troppo difficili finirebbero per dissuaderli dal continuare perché l'insuccesso potrebbe scoraggiarli. È pertanto essenziale calibrare la prova con gradualità sulla base delle reali potenzialità della classe e mantenere sempre vivo lo spirito del "gioco".
Questa attività potrà inoltre tornare utile ai ragazzi che vorranno provare l'esperienza di partecipare a giochi con la matematica e servirà inoltre per familiarizzare con uno strumento che potrebbe rivelarsi prezioso anche in futuro, per esempio per affrontare i test di ammissione alle facoltà universitarie dove i quesiti di logica trovano uno spazio sempre più consistente.

Daniela Tinelli, Franco Sondrio, Loredana Ardizzone
Istituto Omnicomprensivo San Marcello Pistoiese (PISTOIA)
daniela.tinelli@libero.it, s.sondrio@tin.it, loredanaardizzone@msn.com

Titolo: LA GEOMETRIA NELL'ARTE: proposte progettuali per la riqualificazione di un'area verde della scuola



PERCHÈ LA GEOMETRIA NELL'ARTE?

Il Giardino dell'Armonia

Fin dall'antichità la proporzione aurea viene considerata così strettamente legata all'armonia nell'arte e nella natura da concordare su come la bellezza si esprima in termini matematici.

L'Istituto Omnicomprensivo di San Marcello Pistoiese presentano il **"Giardino dell'Armonia"**, progetto di riqualificazione architettonica e ambientale di un'area verde al servizio della Scuola, nato dalla fusione di due idee distinte, una riguardante lo studio della Geometria e le sue applicazioni, l'altra legata alla volontà di sviluppare negli studenti alcune competenze tecnico-progettuali legate ad una esperienza concreta e tangibile.
I lavori hanno avuto una durata triennale e hanno coinvolto inizialmente la Scuola Secondaria di Secondo grado e successivamente quella di Primo grado dello stesso Istituto.
Peculiarità del Progetto è stata quella di aver accomunato professionalità diverse intorno a tematiche nuove con lo scopo di realizzare dei laboratori finalizzati allo sviluppo dell'apprendimento per competenze.
Infatti, è importante sottolineare che il lavoro condotto si è sviluppato partendo da un concetto comune affrontato poi da discipline quali la Matematica, la Storia dell'Arte, la Filosofia, la Musica, la Tecnologia il tutto poi coadiuvato dalle competenze sviluppate dagli studenti nell'ambito della progettazione architettonica e quindi della Geometria Descrittiva.
Gli alunni della Scuola Secondaria di Primo grado, affiancati da un artigiano locale rappresentante della CNA pensionati della Montagna P.se, hanno realizzato successivamente, un modello in scala dell'area d'intervento del progetto finale, recuperando così quei saperi e quelle capacità tecnico-manuali che solo una persona con qualificata esperienza può trasmettere in maniera diretta.
Tale coinvolgimento ha permesso sia di mettere in luce l'unitarietà del sapere sia di valorizzare la continuità didattica tra i due ordini di Scuola (Superiore di Primo e Secondo Grado) divenendo così un progetto d'Istituto.
L'esperienza ha avuto molto successo sia tra gli studenti che hanno partecipato direttamente all'attività laboratoriale sia tra i docenti che hanno trovato in questo lavoro nuove occasioni di crescita professionale.

Il progetto del giardino

Lo spazio interessato dal progetto di riqualificazione architettonica e naturalistica è situato tra il plesso occupato dalle aule della Scuola Secondaria di Secondo Grado e il plesso della Presidenza. Attualmente l'area è poco utilizzata ed occupata da una serra.

L'idea è stata quella di valorizzare tale spazio attraverso la suddivisione dello stesso in due parti: uno adibito a spettacolo e l'altro alla sosta e alla lettura organizzato con diverse sedute. Al giardino si accede attraverso un corridoio che già attualmente delinea lo stato del luogo e che nella fase progettuale sarà caratterizzato da una pavimentazione che richiamerà gli studi matematici di Fibonacci e della sua famosa serie numerica. Gli interventi previsti riguardano lo sbancamento dell'area e quindi la rimozione della parte di terreno in eccedenza, la costruzione di gradinate adibite a sedute, la realizzazione di una zona rialzata da pochi gradini da adibire eventualmente a palco e di una zona più ampia pavimentata e articolata secondo lo schema geometrico della spirale aurea. La scelta di pavimentare gran parte della superficie è motivata dalla volontà di poter sfruttare lo spazio sia d'inverno sia d'estate.

I disegni del progetto hanno tenuto conto del rispetto delle regole geometriche e matematiche alla base del concetto di "armonia" e del rapporto aureo.

L'obiettivo didattico è stato quello di far si che gli studenti facciano della matematica uno strumento di interpretazione della realtà, in ambito quotidiano ora e professionale poi.

Beniamino Danese
Reinventore - srl
beniamino.danese@reinventore.it

Titolo: Matematica ed Esperimenti di Scienze

Descrizione del laboraratorio:
Il laboratorio porta in primo piano il valore di attività ed esperimenti con materiali di uso quotidiano nell'insegnamento di scienze e matematica.
Questo tipo di attività sono in modo naturale la via che il docente può percorrere per riuscire ad affrontare con esperimenti il vastissimo panorama di argomenti delle Scienze, che comprendono infatti fisica chimica biologia scienze naturali geologia astronomia...
Verranno proposti esperimenti sulle cariche positive e negative con palloncini, la costruzione della pila di Volta con monetine e alluminio da cucina, la matematica dei vettori con fogli a quadretti, i modellini di atomi e molecole.

Fabio Brunelli
Istituto Comprensivo Masaccio – Firenze
brunelli1950@libero.it

Titolo: Insegnare matematica per competenze

Descrizione del laborararatorio:
Nel laboratorio saranno proposte ai docenti attività di problem solving riproducibili con i loro allievi a partire da testi di gare di matematica o da quesiti INVALSI.
Le gare di matematica in Italia hanno visto negli ultimi anni aumentare il numero delle scuole partecipanti, sia a livello di scuola primaria, che di scuola secondaria di primo e di secondo grado. Alcuni insegnanti di matematica le considerano un semplice diversivo alla routine quotidiana, o un'attività di potenziamento per gli allievi migliori. Altri insegnanti, invece, utilizzano i testi delle gare come vera e propria risorsa didattica. Il laboratorio è un contributo in questo senso.
I quesiti INVALSI spesso sono accolti dagli insegnanti con sopportazione e non valutati come materiali utilizzabili in classe. Il calendario serrato degli esami di terza media non dà tempo di riflettere sui testi dei fascicoli, che vengono spesso frettolosamente chiusi insieme agli altri atti d'esame e sigillati in archivio.
Anche questa seconda fonte fornirà spunti utili per il laboratorio.

Alcuni riferimenti bibliografici
Fabio Brunelli, "La prova nazionale di matematica nella scuola secondaria di primo grado", Rivista "Archimede", Le Monnier, Anno LXII gennaio-marzo 2010, pag. 6 - 15.
Fabio Brunelli, "Un quadrato metà di un altro", Rivista "ALICE", 2010 – III vol. XI n° 33 pag. 407 – 425.
Fabio Brunelli, "Considerazioni in margine alle prove Invalsi di matematica per l'esame di licenza media del giugno 2012", Rivista "L'Insegnamento della Matematica e delle scienze Integrate", Vol.36° N.2 marzo 2013, pag. 169 – 184.

Giornate di studio dell'Insegnante di MATematica

Comunicazioni e laboratori - Scuola Secondaria Superiore

Maria Lucia Lo Cicero
GRIM, Dipartimento di Matematica dell'Università di Palermo, Liceo Scientifico D'Alessandro di Bagheria (PA)
marilu.locicero@gmail.com

Titolo: Apprendimento del concetto di funzione in interdisciplinarietà con il concetto di moto di un corpo

L'analisi storico-epistemologica, epistemologica e semiotica del concetto di funzione ha costituito il punto di partenza di questo lavoro, svolto nell'ambito della stesura della mia tesi di dottorato (Lo Cicero, 2010), che consiste nella progettazione ed analisi di un percorso didattico efficace sull'insegnamento/ apprendimento del concetto di funzione con studenti di 16-17 anni. Sono state individuate le competenze chiave all'apprendimento del concetto in esame: alcune di esse riguardano le proprietà strutturali di tale concetto inerenti alla definizione di Bourbaki (riconosciuta come fondamento epistemologico dalla Comunità scientifica) e i relativi processi di creazione di significati (D'Amore, Godino, 2006); altre, sulla base della *Teoria dei Registri di Rappresentazione Semiotica* di Duval (2006), si riferiscono alle abilità di comprensione, produzione, trattamento e conversione di rappresentazioni semiotiche; ancora, in una prospettiva di educazione matematica per la formazione culturale del cittadino, ci si è occupati dei processi di modellizzazione di fenomeni reali.
Durante il triennio 2007-09 sono state svolte ed analizzate sei sperimentazioni consistenti nello svolgimento di lezioni in assetto laboratorial e, con discussioni matematiche orchestrate dall'insegnante, che ha mediato l'acquisizione delle competenze proponendo situazioni problematiche, anche di tipo previsionale. L'approccio didattico iniziale è grafico-cinematico, supportato dalla mediazione semiotica (Bartolini Bussi, Mariotti, 2008) di un sensore di posizione. Esso, interfacciato con un computer, mediante un opportuno software (*Data Logger*) permette di visualizzare in tempo reale rappresentazioni tabulari e cartesiane di moti rettilinei e di analizzare i dati, ricavandone il modello analitico. In questo modo si ha un'introduzione storica delle rappresentazioni semiotiche delle funzioni (Piaget, Garsia, 1985), che si conclude con l'istituzionalizzazione del sapere.
Il percorso proposto inizia con lo studio di rappresentazioni di moti rettilinei prodotti dal corpo di studenti presenti in aula. Questa scelta didattica trova un forte supporto nel paradigma dell*'embodiment cognition* (Lakoff, Núñez, 2005). In letteratura si trovano diverse ricerche riguardanti lo studio del concetto di funzione mediante l'uso di un sensore di posizione (ad esempio, Arzarello, Robutti, 2004). Tuttavia, nel presente lavoro è stata compiuta un'analisi delle potenzialità di questo strumento in relazione all'analisi del concetto in esame, delle competenze che si volevano sviluppare e degli ostacoli all'apprendimento. Riferendosi alla definizione formale sono state proposte attività di previsione ed interpretazione di grafici in merito agli aspetti cardine di tale concetto. Esse riguardavano: la corrispondenza di valori ed intervalli della variabile dipendente ed indipendente; l'esistenza di un elemento immagine per ogni elemento del dominio; l'unicità dell'elemento immagine. L'introduzione allo studio della rappresentazione analitica è avvenuto mediante il fit di grafici lineari e quadratici, ottenuti dal moto di un carrello su una guida. Questo ha permesso di compiere conversioni tra le rappresentazioni della funzione, che sono state rinforzate mediante l'utilizzo del foglio di calcolo *Excel*, del software *GeoGebra*, e di carta e penna.
Per generalizzare il concetto di funzione sono state proposte altre attività di modellizzazione, riguardanti la differenza tra dipendenza lineare e quadratica con il problema dei *Sacchi di Galileo* e l'introduzione di altre tipologie di funzioni: funzione inversa, mediante lo studio della legge di

Boyle con il sensore di pressione; funzioni sinusoidali, che modellizzano la componente oscillatoria del moto di un corpo umano dinanzi al sensore di posizione; funzioni esponenziali, ricavate mediante un sensore di temperatura.

I risultati ottenuti mostrano che l’uso di sensori on-line può indurre alcuni processi di acquisizione e creazione di significati del concetto di funzione e delle sue rappresentazioni. Questi processi sono stati rafforzati mediante la risoluzione di problemi, diversamente contestualizzati, in cui si richiedeva l’applicazione di competenze legate a tale concetto. Lo studio e la conversione delle rappresentazioni di funzioni mediante diversi artefatti ha portato gli allievi ad un apprendimento completo di tale concetto, i quali hanno raggiunto vari livelli di formalizzazione e capacità di applicazione.

Bibliografia

Arzarello F., Robutti O. (2004). Approaching functions through motion experiments. *Educational Studies in Mathematics*. 57 (3).

Bartolini Bussi M.G., Mariotti M.A. (2008). Semiotic Mediation in the Mathematics classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective. In L. English et al. (eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education.* LEA, USA.

Duval R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. 61, 103-131.

D’Amore, B., Godino D. J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 7-36.

Lakoff G., Núñez R.E., (2005). *Da dove viene la matematica*. Torino: Bollati Boringhieri.

Lo Cicero M.L. (2010). *Insegnamento/Apprendimento del concetto di funzione e delle sue rappresentazioni epistemologiche e semiotiche.* Tesi di Dottorato: Università degli studi di Palermo.

Piaget J., Garcia R.. (1985). Psicogenesi *e storia delle scienze*, Garzanti.

Claudio Desiderio
I.I.S. “Concetto Marchesi” di Mascalucia (CT)
claudiodesiderio@aol.it

Titolo: FLIPPED MATH (Matematica a colori per tutti)

Premessa

Dall’a.s. 2015/16 sto sperimentando un modo diverso di insegnare la matematica; questo metodo, da me denominato **FLIPPED MATH (Matematica a colori per tutti)**, trova la sua iniziale fonte di ispirazione nella metodologia “Flipped Classroom” (classe capovolta), utilizzata con successo in molti paesi del mondo, soprattutto nella scuola primaria e secondaria di primo grado. Nel mio metodo ho provato ad adattare la “Flipped Classroom” alle esigenze specifiche sia di un triennio di liceo scientifico, sia dell’insegnamento della matematica in modo rigoroso ma accessibile a tutti.

Il metodo **FLIPPED MATH,** da me ideato, nasce da alcune riflessioni personali maturate in 16 anni di insegnamento nella scuola secondaria di secondo grado.

Il mondo in cui viviamo cambia sempre più velocemente allargando ogni giorno di più il GAP tra i nostri studenti e il modo in cui noi insegnanti viviamo e/o abbiamo vissuto la scuola. Questi cambiamenti non sono necessariamente negativi, possono invece aprirci a nuove possibilità. Gli studenti di ogginon sono necessariamente peggiori di quelli di dieci o vent’anni fa, al contrario, io sono convinto che sono aumentate notevolmente le loro opportunità: infatti gli studenti di oggi hanno molti più stimoli, sono più vivaci intellettualmente e più “diretti” nel linguaggio.

Pertanto, io sono persuaso del fatto che sia necessario, per noi insegnanti, trovare e utilizzare sia un linguaggio più dinamico, differente da quello tradizionale, sia strumenti didattici più adatti e più vicini al mondo in cui vivono i nostri studenti (che è anche il mondo in cui viviamo noi!)

Non si tratta di abbandonare il rigore matematico e/o arrendersi all’approssimazione e alla superficialità (che sono comunque elementi sempre più diffusi nel nostro mondo); piuttosto si tratta di comprendere che la tecnologia oggi può offrirci nuove opportunità: nuovi strumenti di lavoro e di comunicazione che possono rendere più attraente lo studio della nostra disciplina.

Non si tratta quindi né di stravolgere i programmi semplificandoli e banalizzandoli, né di non assegnare più lavori e compiti per casa: il rigore matematico resta e deve restare formativo, lo studio autonomo a casa (ma più qualitativo che quantitativo) resta e deve restare un’importante momento di formazione per i nostri studenti.

Contenuti

Durante il seminario, posso mostrare in breve gli strumenti e i metodi utilizzati nel mio metodo “FLIPPED MATH” attraverso l’esempio concreto di un modulo (“*modulo zero: funzioni, definizioni e proprietà*”) articolato in quattro unità didattiche e strutturato in lezioni e video didattici.

Oggi è possibile (ed è sempre più semplice farlo!) usare il “tablet” come una vera e propria lavagna digitale, molto più versatile e dinamica sia della tradizionale lavagna, sia della (ormai superata) LIM.

Collegando il tablet, attraverso un sistema wi-fi o wireless o bluetooth, ad un proiettore (o anche alla stessa LIM), con semplici applicazioni, è possibile realizzare, progettare e sviluppare lezioni più dinamiche. Non si tratta solo di utilizzare i libri digitali (che comunque, se usati bene, offrono una grandissima risorsa per il nostro lavoro in classe); noi insegnanti siamo e dobbiamo restare i registi e gli scrittori delle nostre lezioni! Su internet possiamo fare ricerche e trovare tanto materiale da condividere, MA è più importante creare il nostro materiale utilizzando il nostro stile, perché gli studenti vogliono vedere il nostro impegno per rispondere con un impegno direttamente proporzionale. Quindi che fare? Utilizzando una semplice applicazione per tablet (io ad esempio uso "*Notability*" per i-pad, ma ne esistono altre come "Onenote" per tablet Samsug) è possibile scrivere (come sulla lavagna o su un foglio di carta, ma in modo piò ordinato e colorato) su pagine elettroniche che poi è ragionevole archiviare e condividere in formato PDF. In questo modo è possibile ordinare, organizzare e predisporre tutte le nostre lezioni, articolandole preventivamente in moduli ed unità didattiche, potendole aggiornare ed arricchire continuamente; infatti, durante la lezione in aula, non solo è possibile completare la lezione (scrivendo direttamente sul tablet) aggiungendo esempi ed esercizi all'occorrenza per migliorare la comprensione degli studenti, ma è possibile anche passare velocemente da una lezione all'altra per collegare e richiamare gli argomenti. Inoltre gli argomentivengono presentati agli studenti con un linguaggio semplice ma rigoroso, e soprattutto incisivo e immediato (grazie all'utilizzo dei colori!) senza mai dare nulla per scontato. Ma la cosa più importante è che queste lezioni si possono e si devono condividere con i nostri studenti sia preventivamente (come insegna la "Flipped classroom") sia al termine della stessa lezione (con tutti gli aggiornamenti del caso); e la condivisione si può fare in tanti modi, utilizzando piattaforme e-learning (*Moodle, Fidenia, Edmodo*) e persino tramite il tanto amato dai nostri studenti "what's up". In questo modo, durante la lezione in aula, gli studenti devono concentrarsi esclusivamente sulla comprensione immediata degli argomenti trattati.

La forza di questo metodo è che questo duro lavoro preventivo resta per sempre: si potrà infatti utilizzare negli anni successivi aggiungendo in modo semplice eventuali arricchimenti.

Infine oggi è diventato più semplice realizzare video didattici anche utilizzando le stesse lezioni digitalizzate che poi si approfondiscono in classe; in questo modo i nostri studenti hanno tutto il materiale digitale (PDF e *video su You Tube*) per imparare nel rispetto dei loro tempi!

Ricaduta sugli studenti

Ho utilizzato questo metodo nel corso di tutto l'a.s. 2015/16 ed ho potuto riscontrare risultati decisamente positivi sia rispetto all'apprezzamentodegli studenti, sia rispetto al successo degli stessi.Questo metodo può rendere più appetibile e accattivante lo studio della nostra disciplina… i nostri studenti studiano e imparano la matematica utilizzando gli stessi strumenti che utilizzano nella loro quotidianità. Gli studentiinfatti, si sentono fortemente coinvolti e maggiormente motivati rispetto allo studio della matematica, sia grazie all'utilizzo di strumenti, linguaggi, applicazioni e siti a loro familiari (tablet, you tube, piattaforme on line, what's up, lavagne elettroniche, etc…), sia grazie ad un percorso metodico (suddivisione chiara in moduli ed unità) e guidato (tutte le lezioni sono digitalizzate). Tutto viene pianificato e controllato! In questo modo "crollano" tanti luoghi comuni: non ci sono più né appunti presi male né risposte del tipo: "quel giorno ero assente, quindi non l'ho capito", "questo argomento non lo ha spiegato", "non sapevo che dovevo fare anche questo..".

In breve, ho notato maggior consapevolezza e maggiore entusiasmo nello studio della matematica, voglia di superare un vero e proprio blocco nei confronti della stessa, ed un notevole miglioramento negli esiti finali.

Sitografia

- Canale You Tube: claudio Desiderio – YouTube
- Playlist su You Tube "funzioni":
  https://www.youtube.com/playlist?list=PLJyVI8fTnW3jSTm_SZNUoHoUR4It2arA_
- Cartella condivisa contenente il "modulo zero" sulle funzioni: il syllabus e le unità didattiche:
  "https://www.dropbox.com/sh/vqk6mumc8ptwpjg/AACz8g3Oq0AF6SAgH7FzG-7fa?dl=0

Alfio Grasso
grassoalfino@yahoo.it

Titolo: geometria I anno scuola superiore con l’uso strutturale delle isometrie

Per delineare l’aspetto metodologico-didattico che sta alla base di questo progetto, prendo l’avvio dal resoconto del professore Villani relativo al *Congresso internazionale di Cagliari sull’insegnamento della geometria del* 1982.

- Nella fase intermedia fra l’insegnamento “sperimentale” della scuola elementare e media e l’insegnamento “razionale” degli ultimi anni di scuola secondaria superiore, occorre prevedere uno *stadio di avvio al metodo di deduzione* (Piaget: Il pensiero astratto si sviluppa dai dodici anni, per gradi, fino alla maggiore età, con un processo di costruzione continua).
  Poiché l’assiomatica di Euclide-Hilbert *è troppo complessa –ventuno assiomi - e quella vettoriale troppo astratta,* l’insegnante deve possedere un’assiomatica sottostante intuitiva, semplice, dagli assiomi forti – tali cioè da consentire sin dall’inizio un rapido accesso a teoremi interessanti e non immediati – ma evidenti in quanto traducono proprietà dello spazio che ci circonda, facili a verificarsi (*l’Assiomatica a base metrica* proposta da Choquet nel 1959 e usata nei testi di Prodi e Lombardo Radice-Mancini Proia).
- La strutturazione delle conoscenze in teorie organiche deve essere l’obiettivo finale di tutta l’attività didattica, ma non ne può costituire in alcun modo il punto di partenza.

Osservazioni personali sull’utilità dell’uso *strutturale* delle isometrie all’inizio del biennio.
La geometria nei libri di testo è spesso relegata nelle ultime pagine, come se fosse figlia di un Dio minore, e le isometrie sono trattate “en passant” e diventano così un’inutile sovrastruttura.

- L’impostazione tradizionale pone l’accento su singole figure delle quali studia alcune proprietà, con metodi ingegnosi ma legati a casi specifici, quindi non estensibili allo studio di altre figure di tipo più generale. Con le trasformazioni invece è coinvolto tutto l’ambiente in cui si opera (piano o spazio), e l’attenzione si sposta dalle “figure” alle loro “proprietà”. Ciò permette una maggiore generalità, sistematicità e unitarietà di metodi per lo studio.
- L’assiomatica di Choquet propone un numero ridotto di assiomi, **sette**, all’inizio sottintesi.
- Altro punto indicativo della nuova impostazione metodologico-didattica risiede nella possibilità di utilizzare sin dal primo anno i suggestivi e importanti metodi della geometria analitica, il cui rilievo è evidente e indiscutibile e trova immediata applicazione allo studio della Fisica che in certi istituti inizia già al primo anno.
- L’uso delle trasformazioni è poi conforme al *Programma di Erlangen* di Klein del 1872: “Una geometria consiste nello studio delle proprietà che rimangono invariate quando si sottopone il piano (lo spazio) a un gruppo di trasformazioni”.
  Infatti, *la ricerca degliinvarianti* è uno degli strumenti basilari dell’indagine scientifica, poiché stimola i procedimenti euristici che sono essenziali per l’apprendimento. In Fisica a esempio leggi fondamentali sono quelle di conservazione.
- Infine, ma non per ultimo, altro elemento a favore dell’uso delle trasformazioni risiede nel fatto che nell’impostazione di Euclide-Hibert *non vi è alcun accenno a strategie risolutive*. Con le trasformazioni invece, a esempio al primo anno, ci si può orientare chiedendosi se c’è qualche isometria, in particolare qualche simmetria assiale o centrale che ci può aiutare.

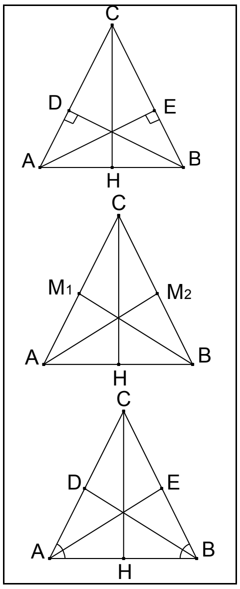
Presento, per grandi linee, la strutturazione del programma di primo anno di Scuola superiore.

Il progetto didattico si compone di due sezioni che però si utilizzano simultaneamente, almeno all'inizio. Il "rinfresco", in cui si ripropongono e precisano, anche con l'uso di un software dinamico già programmato, alcuni concetti fondamentali che i giovani conoscono già dalla Scuola media. Si evidenziano la nozione di distanza fra due punti come la lunghezza del percorso più breve che li congiunge e la proprietà triangolare che è "naturale" (All'inizio utilizzo impropriamente i termini *lunghezza* e *ampiezza* come sinonimi di misura per segmenti e angoli perché intuitivi, rimandando a un momento successivo la presentazione della nozione di classe di equivalenza).
In parallelo al "rinfresco" s'introduce il concetto di corrispondenza biunivoca fra insiemi, chiarito mediante esempi tratti dalla vita quotidiana e altri, come *L'albergo di Hilbert*, presentati in modo accattivante. Di seguito, per introdurre le isometrie che derivano da "movimenti rigidi piani", si propongono attività di laboratorio (foglio di carta, rettangolino di plastica rigida trasparente, spillo e matita), e visione discussa di progetti con software dinamico prodotti allo scopo. In entrambi i casi si sottolineerà che diversi movimenti, generano una corrispondenza biunivoca tra i punti di uno stesso piano o, come si dice anche, di due piani sovrapposti: allora è importante la corrispondenza biunivoca ottenuta non il movimento che l'ha prodotta.
Si fanno ricavare ai giovani, usando le modalità indicate, alcune proprietà fondamentali delle isometrie, in particolare di traslazione e rotazione introdotte a partire da esperienze abituali, visione di immagini tratte dalla natura e dall'arte e commentando progetti dinamici ideati allo scopo.
A questo punto del percorso didattico si possono presentare brevissimi cenni di logica prendendo le mosse dal linguaggio comune e da situazioni consuete.
Si riprendono le proprietà delle isometrie e, provato com'è facile che in esse rette incidenti hanno immagini incidenti, si pone la domanda: se le rette fossero parallele?
Si propongono a questo punto un esempio "familiare" e uno "sociale" che consentono d'introdurre in modo spontaneo lo schema dimostrativo "per assurdo".
Presentazione della simmetria *bilaterale* o *speculare*, che è presente in natura nel campo *microscopico* nella struttura delle molecole delle sostanze cristalline, e in quello *macroscopico* e nei mondi minerale, vegetale e animale. In questo, circa 600 milioni di anni fa, per "costruire" i diversi organismi viventi escogitò la simmetria bilaterale che si rivelò una strategia vincente perché "economica": due al prezzo di uno.
Immagini di simmetria bilaterale in natura e nell'arte di tutti i luoghi e di ogni tempo.
Dal piegamento del foglio alla simmetria assiale.
Progetti con software dinamico per la simmetria assiale come rotazione nello spazio del piano π' sovrapposto al piano π attorno a una loro retta.
Definita la simmetria assiale, si affrontano i teoremi più indicativi, spesso come problemi, e si coinvolgono i giovani per abituarli a trovare *sistematicamente* strategie risolutive.
Gli argomenti affrontati al primo anno sono quelli consueti, ma gli strumenti sono soprattutto simmetrie assiali e centrali e loro proprietà e applicazioni. Viene introdotto il gruppo delle isometrie e loro sottogruppi.

Comparazione delle dimostrazioni nei due sistemi di un semplice teorema.

In ogni triangolo isoscele le altezze e le mediane relative ai lati congruenti (isometrici) sono congruenti (isometriche); inoltre le bisettrici degli angoli alla base dono congruenti (isometriche).

Nella trattazione tradizionale si devono fare tre dimostrazioni che utilizzano vari criteri di congruenza (tra cui quello dei triangoli rettangoli poco "frequentato") e che sono complesse perché i triangoli sono "incastrati" uno nell'altro (figure).



Nello sviluppo alternativo, un triangolo si definisce isoscele se ha un asse di simmetria, sia CH per noi, con C unito. Tale simmetria consente di ottenere in un solo colpo i risultati poiché in un'isometria si conservano lunghezze e ampiezze.

Altezze: nella simmetria considerata CA e CB sono corrispondenti e il punto E, che è quello di CB a distanza minima da A, si trasforma nel punto di CA a distanza minima da B, cioè D; allora $\overline{AE} = \overline{BD}$.

Mediane: nella stessa simmetria CA e CB sono associati ed M_1, punto medio di AC, ha per immagine il punto medio di BC, ossia M_2; dunque: $\overline{AM_2} = \overline{BM_1}$.

Bisettrici: nella medesima simmetria CA e CB sono corrispondenti e la semiretta AE si tramuta nella semiretta di origine B e che forma con la semiretta BA un angolo di ampiezza pari a $B\hat{A}E$, ma questa è la semiretta BD; allora nella simmetria E ha per immagine D, quindi $\overline{AE} = \overline{BD}$.

Bibliografia

Choquet (1969). *L'insegnamento della geometria*, Feltrinelli
Prodi (1981). *Matematica come scoperta. Per il biennio delle scuole medie superiori*, Messina-Firenze, D'Anna, 1975-1978, 4 voll. 2ª ed. ampliata: 1981 e 1986-1988.
Radice, L.P.L. (1980). *Il metodo matematico*, vol. 3. Principato ed., Milano.

"Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)", n. 26 Supplemento n. 1, 2016
G.R.I.M. (Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo)

Arianna Coviello, Luigia Genoni, Fiorenza Turiano
Liceo Scientifico "G.Galilei" di Alessandria, ITIS "Fauser" di Novara, IIS "Arimondi-Eula" di Savigliano (CN)
coviello.arianna@gmail.com ; l.genoni63@gmail.com ; fiorenza.turiano@gmail.com

Titolo: Rappresentiamo, discutiamo e costruiamo significati

Competenze target: Rappresentare in diversi registri e coordinarne i passaggi; Motivare le proprie scelte; Argomentare; Comunicare; Imparare dal confronto tra pari.
Processi cognitivi: Osservare; Esplorare; Cogliere relazioni; Riconoscere concetti nelle diverse rappresentazioni semiotiche.
Ambito: Numeri, Relazioni & Funzioni, Geometria, Dati & Previsioni

Il focus della nostra proposta è l'uso consapevole di diverse rappresentazioni semiotiche associate ad un concetto matematico quale condizione ineludibile per la costruzione di significati matematici. Gli studi di R. Duval, condotti tra gli anni '80 e '90, hanno mostrato che in matematica l'acquisizione concettuale passa necessariamente attraverso l'acquisizione di una o più rappresentazioni semiotiche. Non abbiamo oggetti matematici concreti. L'unica cosa che possiamo fare è dare di essi alcune rappresentazioni semiotiche, ovvero *produrre qualcosa che rappresenta qualcos'altro*. Un oggetto matematico è la connessione di tanti suoi elementi. Ciascuna rappresentazione può farne emergere uno o alcuni, ma ne nasconde altri. Nel processo di apprendimento lo studente ne vede uno alla volta e spesso fa fatica a vedere in alcuni elementi la connessione con gli altri. È la molteplicità di rappresentazioni semiotiche che progressivamente offre la visione e la connessione tra i tanti elementi dell'oggetto matematico, e ciò contribuisce alla costruzione cognitiva dell'oggetto matematico. Se nella pratica d'aula il numero e i tipi di rappresentazioni semiotiche usate sono molto ridotti o se, peggio ancora, alcune rappresentazioni diventano gli unici rappresentanti di un dato concetto, allora può accadere che lo studente faccia coincidere la semiotica con la noetica, confondendo le caratteristiche peculiari di una o poche rappresentazioni del concetto con il concetto stesso. È nel confronto e nel dibattito sociale tra gli studenti e con l'insegnante che si accende il sano conflitto tra le convinzioni personali e i concetti scientifici. Questo è proprio ciò che viene favorito dalla metodologia d'aula cha fa uso del materiale didattico del progetto MERLO (vedi proposta Laboratorio), soprattutto durante la fase sociale di discussione. Quest'ultima è la fase che contribuisce a *costruire significato matematico*, in quanto offre occasioni di confronto e di dibattito, durante i quali i significati personali possono essere rinegoziati. È quindi compito dell'insegnante offrire allo studente esperienze su tante e diverse rappresentazioni, in modo tale che lo studente progressivamente possa pulire dalle informazioni parassite il suo personale sapere sul dato concetto e arricchirlo e ampliarlo. La pratica didattica d'aula ci dice che le difficoltà maggiori degli studenti si manifestano proprio nel riconoscere un oggetto matematico in sue diverse rappresentazioni semiotiche. Riteniamo opportuno, allora, che l'attenzione dell'insegnante sia posta sul passaggio da una rappresentazione all'altra. Ogni attività matematica consiste nella trasformazione di rappresentazioni. Duval chiama*trattamento*una trasformazione della rappresentazione che avviene nello stesso registro (linguaggio verbale: scritto, orale; notazione simbolica: aritmetica, algebra; figurale: figure geometriche, grafici, immagini). Per. es. $34 = 4*7+2$ oppure $2k+1+2k+3 = 4k+4 = 4(k+1)$. E chiama *conversione* una trasformazione della rappresentazione da un registro all'altro. D'Amore (2005) ribadisce che la costruzione della conoscenza in matematica è la capacità di rappresentare i concetti, di trattare le rappresentazioni in un registro stabilito e di saperle convertire in un altro registro. Di solito nella pratica didattica si privilegia la pratica del trattamento (per es. all'interno del registro numerico, soprattutto nel primo ciclo, e nel registro algebrico, soprattutto nel secondo ciclo) e si marginalizza la conversione. La conversione risulta essere per gli studenti la trasformazione di maggiore difficoltà. Essa è più complessa del trattamento, perché qualsiasi passaggio di registro richiede sia un riconoscimento dell'oggetto rappresentato all'interno di ciascun registro, che una discriminazione. Di fronte a due rappresentazioni prodotte in due registri diversi è necessario discriminare ciò che è matematicamente rilevante da ciò che non lo è. Nella pratica d'aula anche la direzione della conversione influisce nella riuscita di una attività. Per esempio, la richiesta di passare da una rappresentazione in registro algebrico ($y = x + 5$) alla sua rappresentazione in registro grafico, di solito, non presenta ostacoli. La richiesta nella direzione opposta, invece, risulta spesso difficile. La conversione grafico-algebrico richiede sia il riconoscimento dell'oggetto matematico (es. la funzione lineare) nella sua rappresentazione grafica ed anche la discriminazione e la interpretazione degli elementi qualitativi matematicamente rilevanti inglobati nel grafico (es. per distinguere una funzione lineare da un'altra). L'attività didattica con le schede MERLO richiede il riconoscimento di un significato comune a diverse rappresentazioni di una stessa situazione concettuale e di discriminare quelle rappresentazioni che non sono associabili a tale significato comune. Ogni scheda viene progettata in modo tale che esista un solo significato comune associabile alle rappresentazioni in essa contenuta. Al fine di attivare la discussione in aula la consegna richiede anche di motivare gli abbinamenti tra le diverse rappresentazioni. Questa fase dell'attività, dedicata alla motivazione delle proprie scelte, educa all'argomentazione. Gli allievi imparano ad utilizzare consapevolmente registri linguistici matematici con e in sostituzione di quelli colloquiali fortemente dipendenti dal contesto. Rimandiamo all'attività di laboratorio (paper lab) le considerazioni in merito alle SM come strumento di verifica formativa.

Bibliografia

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. For the Learning of Mathematics, 14 (3), 24-35.

Arzarello, F., Bazzini, L., Chiappini, G. (1994). L'algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche. Quaderno n.6 , Nucleo R. D., Dip. di Matematica, Univ. Di Pavia.

D'Amore, B., (2001). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. In La matematica e la sua Didattica. 2, 150-173.

D'Amore, B., (2005). Noetica e semiotica nell'apprendimento della matematica. In Insegnare la matematica nella scuola di tutti e di ciascuno. Atti del convegno omonimo, 2004. Univ. di Bari. Milano: Ghisetti & Corvi.

D'Amore, B., Pinilla M., (et al) (2013). Alcune riflessioni storico-critche sul cosidetto "paradosso di Duval" . In L'insegnamento della matematica e delle scienze intergrate Vol.36 B n.3 Giugno 2013.

Duval, R., (1988c). Graphiques et équations. In Annales de Didactique et de Sciences cognitives. 1, 235-253.

Duval, R., (1993). Registres de representations sémiotique et fonctionnement cognitive de la pensée. In Annales de Didactique et de Sciences cognitives, ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, *SI ESM,* 103-131.

Ferrari, P.L. (2004), Matematica ed Educazione: il ruolo fondamentale dei linguaggi- Sem.Naz. di Ricerca in Didattica della Matematica, sessione XXI, http://www.dm.unito.it/semdidattica/

Ferrari, P.L. (2004), Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica, Bologna: Pitagora

Malara, N.A. (2014). La didattica dell'algebra tra ricerca formazione e pratica di classe. In Ferrara, F., Giacardi, L., Mosca et al. (a cura di), Conferenze e Seminari. Mathesis Subalpina 2013-2014, 35-55. Torino: KWB.

MPI – Liceo Scientifico “Vallisneri” Lucca (1994). *Algebra tra tradizione e rinnovamento*. [http://www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2013/10/algebra.pdf]

Prodi, G. & Villani. V., (1982). Anche il calcolo letterale può essere intelligente, *Archimede* 34, n. 4.

Antonino Cerruto
I.I.S. "GALILEI – CAMPAILLA" SEZIONE SCIENTIFICO – MODICA
ninocerruto@gmail.com

Titolo: La matematica nel sistema elettorale

Introduzione

In questo breve articolo si cercherà di esporre, per sommi capi, lo stretto legame tra matematica ed educazione civica che si concretizza particolarmente nell'utilizzo del metodo matematico come base di un qualsiasi sistema elettorale. Un buon sistema elettorale, che dovrebbe garantire rappresentatività e governabilità, aspetti questi spesso in conflitto tra loro in quanto per favorire uno si può penalizzare l'altro, è alla base di un corretto funzionamento della democrazia: con le alchimie aritmetiche si potrebbero infatti far rovesciare gli esiti di un voto, facendo diventare maggioranza di governo ciò che nel Paese, sulla base degli esiti elettorali, risulta essere una minoranza; paradossalmente in una ipotetica competizione tra due soli partiti, vincerebbe, sulla base di un sistema elettorale adottato, chi prende meno voti. È importante capire i meccanismi di assegnazione dei seggi, e quindi del metodo matematico che la determina, in quanto ciò consente a ciascun cittadino di potersi esprimersi con maggiore consapevolezza quando si viene chiamati a scegliere o meno un modello elettorale.

Metodi, paradossi, principi e teoremi dei sistemi elettorali

Diversi sono i sistemi elettorali vigenti nei paesi dove si possono svolgere libere elezioni. In Italia quelli più comunemente noti sono il sistema maggioritario ed il sistema proporzionale.

La ripartizione dei seggi tra le circoscrizioni, recita il dettato costituzionale all'art. 56, si effettua dividendo il numero degli abitanti della Repubblica, quale risulta essere dall'ultimo censimento generale della popolazione, per 618 e distribuendo i seggi di ogni circoscrizione, sulla base dei quozienti interi e dei più alti resti.

Il metodo dei quozienti interi e dei più alti resti fu elaborato dall'americano A. Hamilton nel 1791 e sembra sufficientemente ragionevole in quanto, dopo aver assegnato, ad una Regione o una lista o una coalizione, *un numero di seggi uguale alla parte intera della quota,* assegna i seggi residui sulla base dei *resti più alti*. Tale metodo, però, non è esente da contraddizioni poiché può incorrere nel cd *"paradosso della popolazione"*, secondo il quale i seggi possono spostarsi in direzione opposta alla crescita di una popolazione o di un numero di preferenze. Altro paradosso a cui è esposto il metodo di Hamilton è quello dell'*Alabama*, secondo il quale un aumento del numero totale dei seggi può ridurre quello attribuito ad una data Regione. Infine un terzo paradosso è quello cd dei *"nuovi stati"*, per cui introducendo ad es. una nuova Regione ed aumentando il numero dei seggi di tante unità quanti sono i seggi spettanti alla nuova regione, possono venire modificate le vecchie attribuzioni.

Per ovviare a questi inconvenienti venne elaborato il "*metodo con divisore"* che si articola nelle tre varianti proposte da Jefferson, Adams, Webster. Sostanzialmente consiste nella scelta di un divisore d che rappresenta il numero ideale di abitanti (preferenze) che dovrebbe corrispondere ad ogni seggio e calcolare per ogni Regione, lista o coalizione k, il quoziente $q_k = p_k/d$, dove $p_k$rappresenta la popolazione (preferenze). Ad ogni Regione (partito) verrà attribuito un numero di seggi pari alla parte intera del quoziente (Jefferson), o al quoziente arrotondato per eccesso (Adams), o al quoziente approssimato (Webster). Ovviamente il divisore va scelto in modo tale da generare l'esatto numero complessivo di seggi.

Il motivo per cui il metodo di Hamilton è suscettibile dei 3 paradossi, risiede nel fatto che si seguono due logiche diverse nell'attribuzione dei seggi al 1° stadio (parte intera) ed al 2° stadio (resti più alti). Occorre pertanto utilizzare un solo criterio di priorità, quale ad es. potrebbe essere quello di assegnare i seggi uno per volta sulla base del rapporto p_k/s_k, essendo s_k il numero dei seggi assegnati alla regione k-esima. Si può matematicamente dimostrare che questo metodo corrisponde a quello di Adams.

Alla luce delle incongruenze cui può andar incontro la distribuzione dei seggi, si possono individuare i requisiti che dovrebbe avere un buon metodo di ripartizione. Esso dovrebbe essere:

1. *Coerente*: cioè la suddivisione di un numero prestabilito di seggi tra due regioni non deve dipendere dalla presenza della altre regioni;
2. *Bilanciato:* quando i seggi assegnati a due regioni con ugual numero di abitanti differiscono al più di una unità;
3. *Imparziale:* se l’assegnazione dipende solo dal numero totale dei seggi e dalla popolazione;
4. *Omogeneo*: se l’assegnazione dipende solo dal numero totale dei seggi e dalle frequenze relative delle popolazioni;
5. *Esatto:* quando ad ogni regione compete un numero di seggi uguale alla sua quota se questa viene espressa da un numero intero per ciascuna regione;
6. *Monotono:* quando il numero dei seggi attribuiti ad una regione è funzione non decrescente della quota di quella regione

A proposito del penultimo requisito, poiché di norma la quota q di una regione sarà espressa da un numero non intero, è logico che il corrispondente numero n di seggi assegnati sia tale che $q \leq n \leq [q] + 1$. Quando questa proprietà non viene rispettata si parla di violazione della quota.

La domanda che a questo punto sorge spontanea è quale sia il miglior metodo di distribuzione dei seggi, che goda del maggior numero possibile delle proprietà esposte, che garantisca rappresentabilità e, nel contempo, consenta governabilità, senza ricorrere, per quest’ultima, ad eccessivi *premi di maggioranza* che andrebbero a penalizzare la democraticità. Vi sono, a tal proposito, alcuni teoremi “limitativi”, che cioè stabiliscono dei “limiti alla perfezione”:

1. **Teorema 1**: un metodo è coerente, bilanciato ed imparziale se e solo se si basa su un solo criterio di priorità. La coerenza rende un criterio di assegnazione dei seggi immune dal paradosso *dell’Alabama* e dei *nuovi stati*.
2. **Teorema 2**: se un metodo è coerente, imparziale, omogeneo ed esatto allora sarà esente dal *paradosso della popolazione*solo se si tratta di un metodo con divisore. Pertanto solo questi ultimi metodi sarebbero esenti dai tre paradossi.
3. **Teorema 3**: se un metodo di ripartizione è monotono e non viola la quota, allora è soggetto al paradosso della popolazione. Ad es. il metodo di Hamilton non viola quota, ma, come abbiamo detto, è soggetto al paradosso della popolazione, mentre i metodi con divisore violano la quota.

Dai tre teoremi si deduce che non esiste un metodo perfetto e che la sua scelta può dipendere da diversi fattori culturali, sociali e, perché no, di semplicità di calcolo.

Conclusioni

Questo tema potrebbe essere proposto come attività laboratoriale ad un classe quarta di una scuola secondaria superiore di secondo grado, dove la presenza di studenti maggiorenni e la sussistenza di sufficienti conoscenze matematiche, potrebbero costituire gli elementi per un’adesione convinta e consapevole all’iniziativa.

La classe potrebbe essere divisa in gruppi di lavoro ciascuno dei quali affronti uno dei seguenti aspetti:

1. Studio dei vari metodi di ripartizione dei seggi con insite proprietà e contraddizioni;

2. Studio delle proprietà (*anonimia, neutralità, concordanza, coerenza, sincerità, Condorcet)* cui dovrebbe soddisfare una procedura elettorale che si possa definire realmente "democratica"ed i relativi teoremi (*May, Young, Gibbard-Satterthwaite*) che in questo articolo, per brevità di spazio, non è stato possibile trattare;
3. Studio del sistema elettorale italiano sia su scala nazionale, che regionale e comunale;
4. Studio dei sistemi elettorali di alcune grandi democrazie (Stati Uniti d'America, Francia, Spagna, Regno Unito, Germania, Paesi Scandinavi).

Una commissione formata da studenti dei vari gruppi dovrebbe svolgere una sintesi assemblando i vari lavori, proponendo e simulando un sistema elettorale che, a suo modo di vedere, sia il più "democratico" possibile. Il tutto dovrebbe poi confluire in un prodotto finale cartaceo e/o multimediale da poter presentare all'intera comunità scolastica.

Una simile attività si può tra l'altro prefiggere il perseguimento di un obiettivo educativo che consiste nel recuperare il diritto-dovere di cittadinanza e di partecipare attivamente alla vita sociale della propria città; è la partecipazione democratica dei cittadini il fondamento per contrastare il malaffare, i poteri forti, la prevaricazione mafiosa, strutture queste che più che di complici hanno bisogno di assenti.

Bibliografia

Li Calzi, M., Matematica ed esercizio della democrazia: L'urna di Pandora, in: M. Emmer (a cura di), *Matematica e Cultura 2002,* Springer
Li Calzi, M., Aritmetica per la Costituzione: la ripartizione dei seggi al Senato, in: M. Emmer (a cura di), *Matematica e Cultura 2008,* Springer
Li Calzi, M., Recenti sviluppi nella teoria dei giochi: l'ingegneria strategica, in: *Lettera Matematica 2010,* Pristem
Filocaro G., *Il matematico curioso,* Kowalski, 2010
Travaglio M., Truzzi S., *Perché NO,* PaperFirst, 2016
Morgestern O., *Teoria dei giochi*, Boringhieri 1969
Gibbons R., *Teoria dei giochi*, Mulino 2009

Ercole Castagnola
ercole.castagnola@alice.it

Titolo: Alcuni nodi concettuali messi in evidenza dalle prove Invalsi

Il laboratorio è rivolto principalmente ai docenti di scuola secondaria di secondo grado, anche se non mancheranno durante il suo svolgimento opportuni riferimenti al ciclo scolare precedente.
Questo laboratorio si propone di illustrare alcune criticità emerse da un’analisi dei quesiti assegnati negli ultimi cinque anni scolastici. In particolare verranno presi in esame gli ambiti: Numeri e Spazio e figure e accanto a questi la dimensione dell’argomentazione, fondamentale non solo per la matematica ma per tutte le altre discipline.
Nell’ambito Numeri si esamineranno problemi legati alle proprietà delle potenze, alla valutazione dell’ordine di grandezza del risultato di un’operazione e al calcolo approssimato.
Nell’ambito Spazio e figure si esamineranno problemi legati alla determinazione dell’area di un triangolo e, più in generale, di un poligono, alla equiscomponibilità e alla presenza di simmetrie.
Per quanto riguarda la dimensione dell’argomentazione si esamineranno, in alcuni quesiti a scelta multipla, le scelte errate da parte degli studenti che evidenziano la mancanza di riflessione, probabilmente legata anche all’uso degli attuali mezzi di comunicazione che portano alla ricerca del “tutto e subito”. Inoltre si prenderanno in esame criticità legate alla richiesta di giustificazione fino ad arrivare a una dimostrazione vera e propria.
Accanto ai risultati forniti dal campione di studenti utilizzato ogni anno dall’Invalsi, verranno analizzati alcuni “protocolli” degli studenti che forniranno utili indicazioni sul processo seguito. L’analisi dei protocolli è una parte essenziale del lavoro di ogni docente per valutare l’efficacia della propria azione didattica.
Ognuna delle analisi precedentemente sottolineate sarà accompagnata da una breve discussione su possibili percorsi didattici che gli insegnanti potranno inserire all’interno della loro programmazione.
Infine, come strumento per gli insegnati, verrà illustrata brevemente la piattaforma GESTINV su cui l’Invalsi ha predisposto un Database contenente tutte le prove Invalsi somministrate dal 2008 ad oggi e consultabili mediante diverse chiavi di ricerca.

"Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)", n. 26 Supplemento n. 1, 2016
G.R.I.M. (Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo)

S. Abbati, A. Cena, A. Coviello, S. Fratti, L. Genoni, G. Trinchero, F. Turiano
Università degli Studi di Torino – Progetto MERLO (Meaning Equivalence Reusable Learning Object)
gruppomerlo@gmail.com

Titolo: Esplorando e dialogando sulle rappresentazioni semiotiche costruiamo significati matematici

Competenze target: Rappresentare in diversi registri; Argomentare; Comunicare: dare forma al pensiero interiore (dimensione *intra*) ed imparare un lessico opportuno per esprimerlo all'esterno (dimensione *inter*); Imparare dal confronto tra pari (dimensione sociale dell'apprendimento Vygotskij).
Processi cognitivi: Osservare; Esplorare; Cogliere relazioni, individuare invarianti; Farsi domande e porsi problemi; Congetturare Controllare e validare la propria produzione
Ambito: Numeri, Relazioni & funzioni, Geometria, Dati & Previsioni

Descrizione del laboratorio

Lo scopo del laboratorio proposto è mostrare agli insegnanti come può essere condotta una attività in aula con la metodologia MERLO tramite l'uso di alcune schede MERLO (SM). Nei nostri corsi di formazione di solito ci proponiamo due obiettivi: formare gli insegnanti affinché diventino sperimentatori della metodologia MERLO e affinché diventino produttori di SM. La durata di questo laboratorio ci fa escludere certamente il secondo obiettivo. Se non riusciremo a raggiungere pienamente il primo, desideriamo almeno coinvolgere i partecipanti e ricevere le loro osservazioni e opinioni sulle potenzialità del materiale didattico, sui punti di forza e di criticità individuati. Illustreremo la struttura di una SM, le relazioni tra le parti, la consegna di lavoro che accomuna tutte le SM e ne sveleremo le risposte. Ogni SM contiene cinque rappresentazioni**,** di cui almeno due sono rappresentazioni associate a uno stesso oggetto matematico (Meaning Equivalence, ME). Durante il laboratorio distribuiremo ai partecipanti 2-3 SM e chiederemo loro di soddisfare la consegna individualmente. In aula allo studente viene chiesto di trovare le rappresentazioni che secondo lui indicano lo stesso oggetto matematico (ME) e di motivare la scelta. Portiamo qui di seguito un esempio di SM:

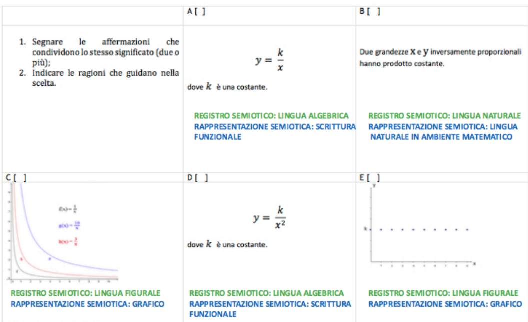
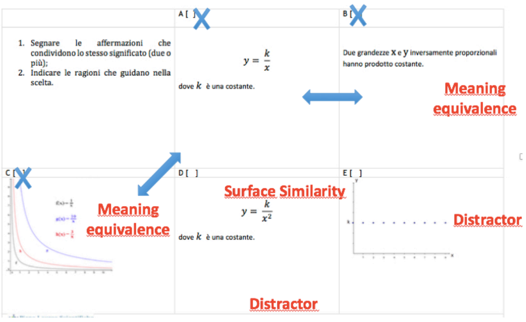


Figura 1

Scheda MERLO sul concetto di inversa proporzionalità. Essa contiene rappresentazioni in diversi registri: algebrico, figurale, verbale~~.~~ Tra le rappresentazioni in A, B e C vi è una *conversionedi registro semiotico*.



L'allievo consapevole delle conversioni di registro semiotico o di trattamento della rappresentazione all'interno di uno stesso individua gli item che condividono significato (segnati con croce azzurra)

Figura 2

Il protocollo di somministrazione agli studenti si compone delle seguenti quattro fasi: *Fase individuale*: ogni studente lavora da solo sulle schede ricevute. *Fase di gruppo*: gli studenti (3-4) di ogni gruppo collaborano allo scopo di confrontare l'opinione e la produzione personale, negoziare significati, eventualmente decostruire e ricostruire i significati personali e riorientare i processi cognitivi coinvolti. *Fase tra i gruppi e l'insegnante*: l'insegnante assume il ruolo di mediatore culturale per valorizzare i saperi e i processi degli studenti e farli evolvere e convergere verso il Sapere della disciplina. È questa la fase dell'istituzionalizzazione delle conoscenze in cui è determinante il ruolo dell'insegnante che non si limita a dare voce ad ogni gruppo o ai singoli per uno scopo meramente di confronto. La valorizzazione delle diverse voci della classe e la voce del sapere matematico permette all'insegnante di intessere un discorso che nel lungo periodo costituisce il tessuto (il testo, appunto) della classe, ovvero il patrimonio di conoscenza matematica costruito dalla classe. *Fase tra gli studenti e l'insegnante*: fase metacognitiva, orchestrata dall'insegnante, che induca il singolo studente alla riflessione sul processo personale di costruzione del proprio sapere, verso forme di consapevolezza della relazione di sé con la matematica, verso forme di autovalutazione e verso la costruzione della competenza dell'imparare ad imparare.
Le risposte e i dialoghi degli studenti che lavorano con le SM si rivelano, nel loro complesso, un buon indicatore del livello di padroneggiamento delle conoscenze acquisite dagli studenti e aiutano a svelare misconcetti e processi di pensiero su cui è possibile agire e modulare l'azione didattica. Per gli insegnanti costituiscono un efficace strumento di valutazione *formativa-informativa*, per gli studenti una fertile occasione di autovalutazione che, nel medio-lungo periodo, genera consapevolezza, assunzione di responsabilità e autonomia nella costruzione del proprio sapere. Gli esiti della sperimentazione condotta ci fanno credere che nel medio periodo la metodologia MERLO contribuisce a sviluppare negli studenti la capacità di individuazione dei nodi concettuali, le capacità argomentative e l'acquisizione del linguaggio appropriato nei vari registri semiotici. Integrata sistematicamente nella pratica didattica, tale metodologia ci ha permesso di osservare negli studenti cambiamenti positivi almeno in ciò che concerne i seguenti aspetti: il superamento delle difficoltà degli studenti a risalire da una rappresentazione al contenuto rappresentato; il riconoscimento di una particolare situazione concettuale attraverso molteplici rappresentazioni tra sistemi di segni ad essa associati; la consapevolezza dell'obiettivo di una manipolazione simbolica (trattamento), che, a nostro avviso, favorisce la capacità di costruire una dimostrazione; il riconoscimento e la produzione di una conversione; l'arricchimento del linguaggio usato per comunicare; l'uso corretto del linguaggio logico-matematico; il riconoscimento di un modello e la sua consapevole creazione, nonché la sua validazione. L'arricchimento del linguaggio usato dagli studenti ci sembra un risultato molto importante; la povertà linguistica al contrario può essere ostacolo sia alla comunicazione dei concetti che al loro sviluppo.

Bibliografia

Arzarello, F.(2015), Per un apprendimento sensato della Matematica. UMI CIIM AIRDM.

Arzarello, F., Kenett, R. S., Robutti, O., & Shafrir, U. (to be submitted). The application of concept science to the training of teachers of quantitative literacy and statistical concepts.

Etkind, M., Kenett, R., & Shafrir , U. (2010) The evidence based management of learning. Diagnosis and development of conceptual thinking with meaning equivalence reusable learning objects. Invited paper. Proceeding of the 8th International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8). Ljubljana – Slovenia

Etkind, M., & Shafrir, U. (2013). Teaching and Learning in the Digital Age with Pedagogy for Conceptual Thinking and Peer Cooperation. In: Proc. 7th International Technology, Education and Development Conference (INTED) (pp. 5342-5352). Valencia, Spain.

Shafrir, U., & Etkind, M. (2010). Concept Science: Content and Structure of Labeled Patterns in Human Experience. Version 31.0

Antonella Consolo
antonella_consolo@virgilio.it

Titolo: Trasformazioni del piano generate da composizione di trasformazioni dello spazio

Descrizione del laboratorio

Utilizzando G*eogebra* 3d e delle schede predisposte si conduce il docente a generare nello spazio le trasformazioni del piano.
L'attività proposta ha come obiettivo l'acquisizione della capacità di "leggere", mediante la rappresentazione su un piano, le diverse reciproche posizioni di enti dello spazio e contemporaneamente di studiare le trasformazioni geometriche come corrispondenze tra punti. L'utilizzo di *Geogebra* permette una partecipazione creativa. Il passare, a volte anche con continuità, da una trasformazione all'altra, dà di questo argomento una visione unitaria. L'uso dei comandi forniti dal programma è un utile spunto di riflessione sulle condizioni che implicitamente imponiamo quando costruiamo delle figure.
I materiali usati sono:
- test a risposta aperta, su relazioni tra le trasformazioni dello spazio e quelle del piano. Le domande poste non mirano alla verifica di conoscenze teoriche, ma all'arricchimento delle competenze possedute sulle relazioni tra i due ambienti: piano e spazio.
-alcuni file di *Geogebra* predisposti per illustrare gli argomenti oggetto delle domande del test proposto.
-scheda contenente le definizioni di alcune trasformazioni.

CONTENUTI

Simmetria planare, simmetria assiale, rotazione assiale, simmetria centrale, traslazione, omotetia, similitudine, affinità, proiettività, omologia, omologia affine, omologia affine equivalente.

PERCORSO DIDATTICO

I docenti realizzano mediante disegni, sfruttando le indicazioni che vengono fornite loro, l'omologia affine e l'omologia affine equivalente. Si fa osservare che i comandi di *Geogebra* <u>scorri</u> e <u>dilata</u> eseguono le trasformazioni di cui sopra e, tramite l'utilizzo di apposito file, che le dette trasformazioni del piano possono essere generate nello spazio. Si introducono altri casi di composizione di trasformazioni geometriche nello spazio, in particolare quelle che danno origine a una traslazione o ad una omotetia.

Ulteriori attività, proposte nelle schede di lavoro sono: lo studio della composizione di due simmetrie planari e la generazione di trasformazioni geometriche su particolari piani mediante trasformazioni geometriche dello spazio.

Beniamino Danese
Reinventore srl
beniamino.danese@reinventore.it

Titolo: Esperimenti di Laboratorio intesi come “Costruzione di Dispositivi”

Descrizione del laboraratorio:
Un limite del Laboratorio di Fisica a livello di scuola secondaria di 2° grado è che può ridursi alla “verifica di leggi sperimentali” e alla “misura di costanti e grandezze”. L'indice di rifrazione, g, la resistività di un conduttore, eccetera.
Si può rendere più vivo il Laboratorio di Fisica se si aggiungono gli esperimenti di “costruzione di strumenti e dispositivi”. Si possono costruire condensatori e motorini elettrici, spettroscopi e piani inclinati. Si possono costruire in gruppo o da soli, si possono caratterizzare, misurare e spiegare ai propri compagni.
Sono esperimenti appropriati per studenti, e c'è una ricca tradizione che testimonia il valore formativo di queste esperienze.

Giornate di studio dell'Insegnante di MATematica

Comunicazioni e laboratori - Scuola dell'Infanzia, Scuola Primaria, Scuola Secondaria di Primo grado

Silvia Benvenuti, Ilaria Giancamilli, Alessandra Renieri
Università di Camerino
silvia.benvenuti@unicam.it, ilaria.giancamilli@studenti.unicam.it, alessandra.renieri@unicam.it,

Titolo: Geometrie in movimento: l'uso del corpo in un percorso verticale di didattica della matematica.

Da diversi anni è ormai appurato il ruolo rivestito dal corpo e dal movimento nei processi cognitivi. Questa consapevolezza si evince anche dai programmi ministeriali per la scuola primaria, che già dal 1985 sostituiscono il vecchio termine "attività" fisica col nuovo "educazione" fisica, enfatizzando in questo modo il potenziale educativo del corpo in movimento. L'idea soggiacente, esplicitata menzionando gli «stretti rapporti che esistono tra attività motorie e attività mentale», è che gli schemi appresi attraverso la motricità vengano poi interiorizzati a formare quello che chiamiamo "pensiero". Questo ha orientato la ricerca didattica verso modalità di apprendimento-insegnamento in cui il corpo in movimento avesse un ruolo centrale nei processi formativi, in quanto «mediatore dei saperi e protagonista della comunicazione» (Sibilio, 2008).
Il fondamento teorico di questa concezione si può fissare nei lavori di Aleksej N. Leontjev e negli studi di psicomotricità risalenti agli anni '50, '60, '70 del secolo scorso, tra cui sottolineiamo l'attività pioneristica di Jean Le Boulch, Andre Lapierre e Pierre Vayer. Quest'ultimo, in particolare, teorizza un atteggiamento educativo che consista «non nel trasmettere un sapere e norme di condotta, ma nell'ideare una situazione psico-sociale che rappresenti un incitamento per l'allievo a scoprirle da sé e a integrarle in una costruzione veramente originale». Visione questa perfettamente in linea, oltre che col montessoriano «aiutami a fare da solo», con le basi teoriche di quella che al giorno d'oggi denominiamo *didattica laboratoriale* (Dedò & Di Sieno, 2012). Sulla stessa lunghezza d'onda si sintonizza l'*Embodied Cognitive Science*, un campo di ricerca interdisciplinare relativamente recente il cui scopo principale è spiegare i meccanismi soggiacenti il comportamento intelligente: secondo tale corrente di pensiero, i processi mentali sono inscindibili dalle capacità sensoriali e motorie, e di conseguenza il ruolo attivo del soggetto agente ha un'importanza cruciale in tutti i processi formativi ed educativi. Per concludere, ricordiamo i lavori di Daniel Goleman (2005) sull'intelligenza emozionale e lo studio sulle intelligenze multiple di Howard Gardner (2013).
In questo workshop proponiamo di analizzare le basi per un percorso verticale di didattica della matematica, basato sull'idea della centralità del corpo come strumento di comunicazione e apprendimento. Tale percorso prende le mosse da una prima sperimentazione da noi realizzata in una scuola dell'infanzia e descritta in dettaglio in (Benvenuti et al., in press), e declina i principi esplorati in questo contesto in quelli dei successivi ordini e gradi, fino ad arrivare alla scuola superiore di primo grado.
Prima di descrivere il contenuto del workshop, riteniamo opportuno spendere due parole a proposito della genesi del nostro gruppo di ricerca: tutte e tre abbiamo una formazione "geometrica", con diverse esperienze di ricerca, tutte nell'ambito della topologia di dimensione bassa. Tutte, inoltre, lavoriamo ormai da anni in molti ambiti della comunicazione scientifica (editoria scolastica, narrativa, televisione, …), siamo membri del progetto *Unicam Science Outreach* (un progetto interdisciplinare di ricerca sulla comunicazione scientifica, finanziato dall'Università di Camerino) e di *matematita* (Centro Interuniversitario di Ricerca per la Comunicazione e l'Apprendimento Informale della Matematica, www.matematita.it). Ci siamo quindi accostate alle sperimentazioni oggetto di questo workshop da una prospettiva particolare: nella consapevolezza che si insegna (e comunica) meglio ciò che si conosce meglio, abbiamo scelto di puntare la nostra attenzione su concetti di geometria; nel rispetto della nostra formazione di comunicatrici più che esperte di didattica, abbiamo scelto di iniziare la nostra esperienza di ricerca in didattica dalla scuola

dell'infanzia, con bambini "piccoli" per i quali le finalità e le modalità della didattica più si accostano a quelle della comunicazione.

Nel caso di bambini in età prescolare, infatti, l'apprendimento passa decisamente per il canale emotivo, sfruttando appieno il ponte creato dall'approccio ludico e dalla comunicazione non verbale. In realtà, però, il piano emotivo e quello cognitivo sono strettamente legati a tutte le età: il benessere del sistema cognitivo permette alle emozioni di avere una dimensione più giusta, mentre il benessere del sistema emotivo permette a quello cognitivo di "volare" (Giacovelli, 2015). I principi e le strategie adottate coi bimbi della scuola dell'infanzia possono quindi rivelarsi utili, se opportunamente declinati, anche per discenti più grandi.

In particolare, se il nostro scopo è instaurare un contatto anche emotivo col nostro interlocutore, il ruolo del corpo diventa centrale: il modo di muoverlo e atteggiarlo è un veicolo fondamentale nella comunicazione del contenuto che vogliamo trasmettere. Allo stesso tempo, il corpo dei nostri interlocutori servirà loro come strumento di apprendimento, a molti e diversi livelli, nella consapevolezza che, come insegnava Emma Castelnuovo, «capiamo la matematica anche con le mani».
Osserviamo inoltre che, in qualunque fascia di età, al giorno d'oggi possiamo far conto solo con un'attenzione debole e volatile. Questo provoca un modo nuovo di appoggiarsi alle conoscenze e, di conseguenza, alla comprensione. A livello di scuola dell'infanzia, forse, questa criticità è meno evidente: accostandosi infatti alla conoscenza in modo ludico e partecipativo, i bambini sono più coinvolti e quindi attenti più a lungo, almeno fino a che "si divertono" e "si stupiscono". Il nostro scopo nei laboratori, anche per bimbi più grandi, è quindi quello di farli divertire e stupire più a lungo possibile, sfruttando anche il fatto di non costringerli a una posizione seduta, ma stimolarne il movimento e, in questo modo, la partecipazione attiva. Ancora una volta, in questo contesto il movimento del corpo è fondamentale per canalizzare l'attenzione e mantenerla nel tempo, catalizzando in questo modo l'apprendimento.

In pratica, il workshop consisterà nello sperimentare con i partecipanti i laboratori che proponiamo per la scuola (Teoria dei nodi: il nodo umano e il gioco delle manette; ecc.), delineando insieme un percorso verticale che si arricchisce e modifica ad ogni tappa, mantenendo però come ingrediente fondamentale la centralità del corpo come veicolo di comunicazione e strumento di apprendimento.

Bibliografia

Benvenuti S., Giancamilli I., Renieri A., *Il corpo come strumento di comunicazione e apprendimento: didattica della matematica nella scuola dell'infanzia*, accettato per la pubblicazione in L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, organo del Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin.
Dedò M., Di Sieno S., *Laboratorio di matematica: una sintesi di contenuti e metodologie*, https://arxiv.org/pdf/1211.2159 Milano 2012
Gardner H., *Educare al comprendere*, Feltrinelli, 2011
Giacovelli S., *Recupero emotivo in matematica, per insegnanti di area scientifica*, intervento tenuto in occasione del convegno Incontri con la matematica n. 29, 2015
Goleman D., *Intelligenza emotiva*, Bur , 2004
Sibilio M. (et alt.), *The Value of Sport in the Processes of Social Integration*. AIESEP World Congress “Sport Pedagogy Research, policy and practice”,2008

Giornate di studio dell'Insegnante di MATematica

Comunicazioni e laboratori - Scuola dell'Infanzia, Scuola Primaria, Scuola Secondaria di Primo e Secondo grado

Dario Catalano
Dipartimento di Matematica e Informatica – Università di Catania
catalano@dmi.unict.it

Titolo: Code.org e il progetto Programma il Futuro

Il MIUR, in collaborazione con il CINI – Consorzio Interuniversitario Nazionale per l'Informatica, ha recentemente avviato il progetto Programma Il Futuro (come parte del programma #labuonascuola). Tale iniziativa ha lo scopo di fornire alle scuole una serie di strumenti semplici, divertenti e di facile accesso che possano essere utilizzati per introdurre gli studenti ai concetti fondamentali dell'informatica.

Programma il Futuro, nasce da un'esperienza avviata con successo negli Stati Uniti nel 2013 e che ha visto, fino ad ora, la partecipazione di circa 200 milioni di studenti ed insegnanti in tutto mondo. L'Italia è stata uno dei primi paesi a sperimentare l'introduzione strutturale nelle scuole dei concetti fondamentali dell'informatica attraverso la programmazione e utilizzando strumenti di facile utilizzo, come quelli forniti dalla piattaforma code.org.
L'iniziativa, nel corso dell'a.s. 2015-2016 ha coinvolto oltre 1.000.000 di studenti, 15.000 insegnanti e 5.000 scuole in tutta Italia. Ciò colloca il nostro paese all'avanguardia in Europa e nel mondo.

Leonardo Tortorelli
Liceo "L. Da Vinci" di Maglie (LECCE)
leonardo.tortorelli@istruzione.it

Titolo: Geometriko: il modello inclusivo per imparare la Geometria

Geometriko, non solo Geometria

Come afferma il prof. Elio Damiano, quando si fa lezione frontale, l'unico che è certo che impari qualcosa è il docente. Geometriko è una sperimentazione pionieristica, in quanto è ideato su misura per le nuove generazioni in piena crisi motivazionale e per le quali, dunque, occorrono nuovi strumenti innovativi.

Geometriko è un modello didattico verticale adatto a tutti gli studenti: dalla scuola primaria a quella secondaria di secondo grado.

Nel corso dei laboratori in aula - organizzati come veri e propri tornei sportivi - vengono proposte attività strutturate per difficoltà crescente proporzionale al livello di preparazione dei singoli giocatori.

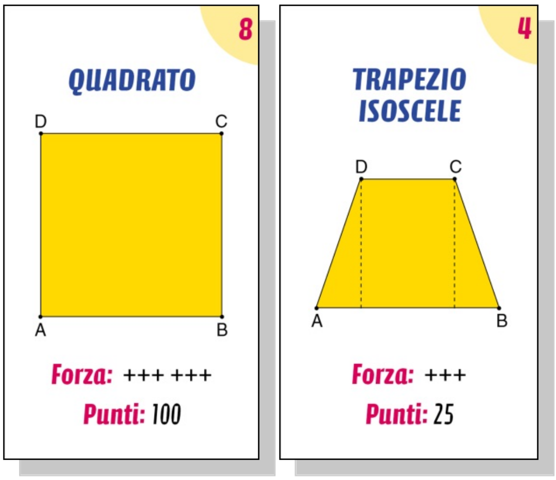
Secondo recenti studi nel campo delle neuroscienze (M.M. Merzenich), nel corso della vita il cervello si affina e apprende un grande repertorio di abilità. Esso si modifica focalizzandosi su competenza dopo competenza, grazie alla collaborazione attentiva del soggetto che apprende; ciò spiega la necessità della motivazione, senza la quale l'intervento esterno risulta meno efficace e duraturo. Ispirato da questi principi, Geometriko, modello ludo-didattico basato sulla *Teoria gerarchica dei quadrilateri*, è pensato con l'obiettivo di veicolare l'entusiasmo e l'energia che caratterizzano i momenti ludici verso attività metacognitive e l'inconscia acquisizione di competenze. Nei suoi primi due anni di vita, si è avuta una profonda evoluzione del modello anche grazie ai tornei pilota che sono stati organizzati dalla Rete Nazionale di Didattica della Matematica "*Emma Castelnuovo*". Il successo è nei numeri: Torneo di classe pilota (maggio 2014, 19 studenti iscritti); Torneo provinciale di Treviso (a.s. 2014/2015, circa 400 studenti iscritti); 1° Torneo nazionale (a.s. 2015/2016, 3.600 studenti iscritti provenienti da tutte le 20 regioni italiane). Dalla seconda edizione, il Torneo Nazionale è entrato a far parte del paniere dei giochi dell'Università Bocconi di Milano.

Il docente, partendo da lezioni frontali e tornei di classe destinati a tutti gli allievi, sarà coinvolto, alla fine del percorso, in attività formative destinate al potenziamento sia delle proprie competenze che di quelle delle eccellenze della classe.

Struttura del gioco didattico in sintesi

A ogni giocatore vengono assegnate in modo casuale 4 *Carte Quadrilatero*, 8 *Carte d'Attacco* (suddivise in *Carte Definizione*, *Carte Proprietà*, *Carte Teorema*) e 1 *Flash Card.* Gli studenti della classe che meglio svolgono la verifica scritta di Geometria vengono premiati con l'assegnazione di tre carte aggiuntive (una per tipo).

Esempi di Carte Quadrilatero



Esempi di Carte d'Attacco

Obiettivo del gioco didattico

A turno ogni giocatore sfruttando le *Carte d'Attacco* deve obbligare gli avversari a scartare il maggior numero possibile di *Carte Quadrilatero*. Vince chi allo scadere del tempo ha il maggior numero di punti-quadrilatero (riportati sulle omonime carte).

Da segnalare…

- Durante alcune fasi di gioco (tipo *Sorteggio della Speranza*), i giocatori saranno chiamati a risolvere in pochi minuti alcuni problemi di geometria piana in stile test Invalsi, *Olimpiadi di Matematica* o dimostrazioni delle proprietà e teoremi.
- Sono previste dinamiche che penalizzano i giocatori che operano "senza cognizione di causa" (cfr. la *Fucilata Geometrika*).

Bibliografia

Tortorelli, L. (ediz. novembre 2015), *Geometriko*, Trento, Erickson Editore.