

DETERMINAZIONE DELLA DURATA A FATICA DI COMPONENTI SOGGETTI A SOLLECITAZIONI SCHEMATIZZABILI COME PROCESSI ALEATORI A BANDA STRETTA

G. Petrucci

*Università degli Studi di Palermo - Dipartimento di Ingegneria Chimica, Gestionale, Informatica, Meccanica
Viale delle Scienze, 90128 Palermo, e-mail: giovanni.petrucci@unipa.it*

Sommario

In questo lavoro sono state sviluppate le espressioni analitiche per la determinazione della durata a fatica di componenti soggetti a svariate tipologie di sollecitazione aleatorie a banda stretta (con parametro di irregolarità $0.9 < \alpha_x \leq 1$), in particolare: processi non stazionari di tipo separabile, tensione normale monoassiale con tensione media costante, sollecitazione biassiale con tensioni normali agenti in fase, sollecitazione di sforzo normale e tensione tangenziale agenti in fase, propagazione della frattura.

Abstract

In this paper the analytical equations for the determination of the fatigue life of components subjected to various types of narrowband random processes of stress (having irregularity parameter $0.9 < \alpha_x \leq 1$) have been developed, in particular: separable non stationary processes, normal uniaxial stress with constant mean stress, biaxial in-phase normal stresses, in-phase normal and shear stresses, crack propagation.

Parole chiave: fatica, processi aleatori a banda stretta

1. INTRODUZIONE

In molti casi le storie temporali delle tensioni agenti in punti di strutture e componenti meccanici costituiscono i campioni di un processo aleatorio. I processi aleatori di tipo *gaussiano* possono essere caratterizzati mediante la funzione Densità Spettrale di Potenza (PSD), che ne descrive la distribuzione della potenza in funzione della frequenza circolare [1-3].

Se la PSD ha valori significativi in un intervallo di frequenze limitato, il processo viene definito *a Banda Stretta* (BS) [1-5]; in questo caso i campioni del processo sono caratterizzati dal fatto che i massimi e minimi consecutivi risultano pressoché simmetrici rispetto all'asse temporale, per cui ciascun ciclo di fatica ha ampiezza praticamente pari all'ampiezza degli estremi che lo delimitano e valor medio nullo. In questo caso la distribuzione di probabilità delle ampiezze dei cicli può essere approssimata mediante la distribuzione di Rayleigh e, in molti casi, la determinazione della durata a fatica può essere effettuata in forma chiusa.

In questo lavoro sono state sviluppate le espressioni analitiche per la determinazione della durata a fatica di componenti soggetti a svariate tipologie di sollecitazione aleatorie a banda stretta, in particolare: tensione normale monoassiale con tensione media costante, sollecitazione biassiale con tensioni normali agenti in fase, sollecitazione di sforzo normale e tensione tangenziale agenti in fase,

propagazione della frattura. Le formule sono state proposte in una versione valida per processi di tipo stazionario e una versione utile per processi non stazionari di tipo separabile.

Le formule analitiche sono caratterizzate da una estrema semplicità di applicazione, essendo basate sulla determinazione in forma chiusa delle espressioni della *tensione equivalente di Miner* relative a ciascun caso e sono utilizzabili con buona precisione per processi con parametro di irregolarità tendente al valore unitario. Nel lavoro ne viene proposta anche una versione approssimata, applicabile nel campo [0.9-1]. L'efficacia delle formule è stata verificata mediante simulazioni numeriche basate sul cosiddetto metodo diretto [1,6].

2. FATICA AD AMPIEZZA VARIABILE

Nell'analisi di fatica ad alto numero di cicli con sollecitazioni costituite da tensioni normali monoassiali, il danneggiamento prodotto su un componente da n cicli di fatica con ampiezza e valor medio variabili è tipicamente valutato in modo approssimato mediante la nota relazione lineare di Palmgren-Miner [7-9], sebbene, in alcuni casi, essa possa dare luogo a previsioni di durata non conservative. In particolare, i risultati ottenuti mediante questo approccio non tengono conto dell'effetto della sequenza dei cicli sull'accumulo del danneggiamento, tuttavia questo effetto è ridotto nel caso dei processi aleatori per via della grande variabilità dell'ampiezza dei cicli al variare del tempo [7]. Nel caso in cui la tensione agente su un componente al variare del tempo, $x(t)$, dà luogo ad una sequenza di n cicli con valor medio ed ampiezza variabili, l'espressione del danneggiamento di Miner assume la seguente forma

$$D = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n r_{G_k}^b \quad (1)$$

nella quale a e b sono le costanti della curva di Wöhler del materiale ed r_{G_k} sono le ampiezze della tensione equivalente di Goodman dei cicli.

L'equazione della curva di Wöhler può essere espressa nel modo seguente [8]:

$$N = a/r^b = N_1 f_{N_1}^b S_U^b / r^b \quad (2)$$

essendo N il numero di cicli al cedimento per ampiezza di sollecitazione pari ad r . Nel termine a destra della (2) il fattore a è determinato utilizzando un punto della curva di Wöhler di coordinate $[N_1, r_{N_1}]$ ed esprimendo l'ampiezza del ciclo come *frazione della tensione di rottura* del materiale S_U [8], cioè $r_{N_1} = f_{N_1} S_U$, essendo $f_{N_1} < 1$. In molti casi viene utilizzato il numero di cicli $N_1 = 10^3$ per il quale il campo dei valori tipici di f risulta essere $0.5 < f_{10^3} \leq 0.9$ [8].

L'ampiezza della tensione equivalente di Goodman r_G nella (1) è definita come

$$r_{G_k} = \begin{cases} \frac{r_k}{1 - m_k/S_U} & m_k > 0 \\ r_k & m_k \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$

essendo r_k ed m_k l'ampiezza e valor medio del k -esimo ciclo di fatica definiti rispettivamente come

$$r_k = (x_{M_k} - x_{m_k})/2 \quad m_k = (x_{M_k} + x_{m_k})/2 \quad k=1,2,\dots,n \quad (4,5)$$

con x_{M_k} e x_{m_k} le tensioni massima (picco) e minima (valle) del ciclo.

Generalmente, nel caso di sollecitazioni ad ampiezza variabile, le ampiezze e i valori medi dei cicli r_k ed m_k devono essere ottenute applicando alla sequenza di estremi estratti dalla storia temporale della tensione un opportuno metodo di conteggio, tipicamente il metodo *rainflow* [1-3,7-9]. L'Eq. (1) è valida se si ipotizza che i cicli di ampiezza inferiore al limite di fatica, $r_f = \sigma_f$, contribuiscano al

danneggiamento allo stesso modo di quelli di ampiezza maggiore. Il danneggiamento (1) può anche essere espresso nel modo seguente

$$D = nR^b/a \quad (6)$$

essendo R la Tensione Equivalente di Miner (TEM) [1] definita come

$$R = \left(E[r^b] \right)^{1/b} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n r_{G_k}^b \right)^{1/b} \quad (7)$$

La TEM è la tensione di ampiezza costante, n cicli della quale danno luogo allo stesso danneggiamento degli n cicli ad ampiezza variabile della sequenza considerata, se applicati ad un materiale con esponente della curva di Wöhler pari a b . È facile osservare che, in base alle (5) e (9), la TEM non dipende solo dalle ampiezze e dai valori medi dei cicli di sollecitazione, ma anche dalle caratteristiche del materiale b ed S_U . Poiché nell'analisi di fatica viene generalmente utilizzata la TEM elevata all'esponente b , cioè $R^b = E[r^b]$, nel seguito si farà riferimento a tale grandezza definita come TEMEB, cioè Tensione Equivalente di Miner Elevata a b .

Se la distribuzione dei valori medi e delle ampiezze dei cicli di fatica della sollecitazione è nota mediante una funzione densità di probabilità congiunta delle medie e delle ampiezze dei cicli, $p_{m,r}(m,r)$, la TEMEB può essere ottenuta con la seguente espressione [1-2]:

$$R^b = E[r^b] = \int_0^\infty \int_0^\infty r_G^b p_{m,r}(m,r) dm dr \quad (8)$$

Nel classico caso in cui si assume che il cedimento a fatica avviene per un valore del danneggiamento pari ad 1 ($D_U=1$), il numero di cicli al cedimento di un componente soggetto a cicli di fatica ad ampiezza variabile può essere espresso in una forma simile all'equazione di Wöhler (2) nella quale la TEM (9, 12) è introdotta al posto dell'ampiezza del ciclo r

$$N_U = a/R^b = N_1 f_{N_1}^b S_U^b / R^b \quad (9)$$

3. SOLLECITAZIONI SCHEMATIZZABILI COME PROCESSI ALEATORI

In molti casi l'insieme delle sollecitazioni di fatica agenti su un componente meccanico può essere schematizzato come un processo aleatorio $X(t)$ [1-3] del quale *le storie temporali della tensione agente* $x_i(t)$ costituiscono i *campioni*, quale, ad esempio, quello mostrato in Fig. 1. Nel caso in cui il processo sia di tipo stazionario e gaussiano, le sue caratteristiche ai fini del danneggiamento di fatica possono essere analizzate nel dominio della frequenza mediante la funzione *Densità Spettrale di Potenza* (*Power Spectral Density* - PSD) definita come

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E\left[|X(\omega, T)|^2\right]}{2\pi T} \quad (10)$$

essendo ω la frequenza circolare, $X(\omega, T)$ la trasformata di Fourier dei campioni del processo effettuata su un intervallo temporale di estensione T ed $E[\]$ l'operatore di media stocastica. In Fig.2 sono mostrati tre esempi di PSD di processi aventi campioni simili a quello mostrato Fig. 1.

La PSD descrive la potenza espressa mediamente dal processo al variare della frequenza e dalla sua *forma* dipendono le *caratteristiche dinamiche* del processo stesso, ovvero la modalità con la quale picchi e valli si succedono all'interno dei campioni.

Nel seguito si farà riferimento a sollecitazioni aleatorie con *valor medio nullo*, per le quali $S_x(0)=0$, in quanto l'effetto di una tensione media costante può essere valutato in modo indipendente.

L'ampiezza e la forma della PSD possono essere caratterizzate mediante gli strumenti della geometria delle aree, cioè mediante opportune combinazioni dei momenti rispetto all'asse delle ascisse, che, nel

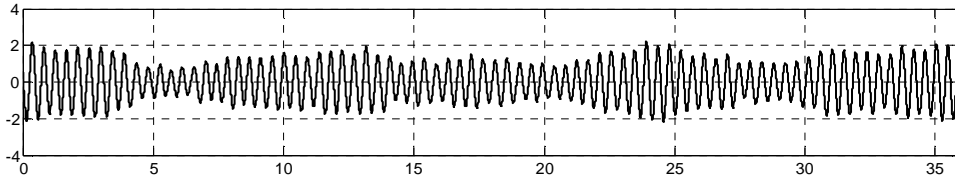


Figura 1. Campione di un processo aleatorio a banda stretta con varianza unitaria ($\lambda_0=1$).

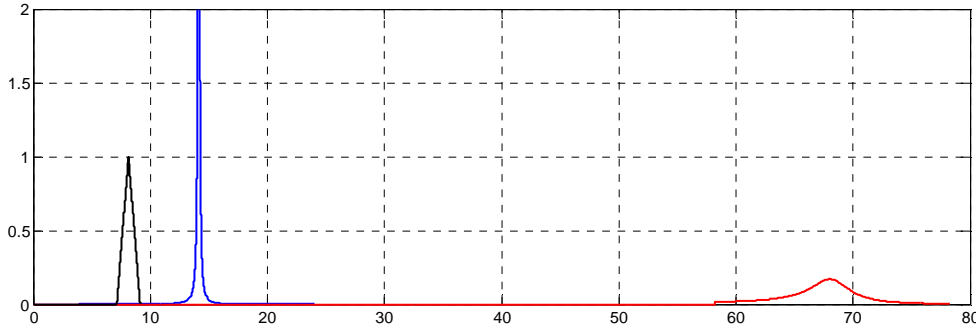


Figura 2. Tre esempi di PSD di processi BS aventi parametri $\alpha_x=0.995$ e $\lambda_0=1$.

caso in questione, sono definiti *momenti spettrali* [3]:

$$\lambda_i = 2 \int_0^\infty \omega^i S_X(\omega) d\omega \quad (11)$$

Il *momento spettrale* di ordine 0, pari all'area sottesa dalla curva PSD, coincide con la *varianza* del processo [3] essendo cioè $\lambda_0 = \sigma_X^2$. Nel caso di processi a media nulla, questo parametro è sufficiente a quantificare le caratteristiche di ampiezza del processo, in quanto l'ampiezza e i valori medi dei cicli di fatica (4,5), risultano linearmente proporzionali alla deviazione standard del processo $\sigma_X = \lambda_0^{1/2}$. Mediante i momenti spettrali è possibile valutare parametri utili a descrivere la forma della PSD, come il giratore di inerzia [3] $\rho_X = (\lambda_2/\lambda_0)^{0.5}$, dal quale è possibile ricavare il *numero medio di coppie di attraversamenti dello 0 nell'unità di tempo*, n_z , come [1-3]:

$$n_z = \frac{\sqrt{\lambda_2/\lambda_0}}{2\pi} = \frac{\rho_X}{2\pi} \quad (12)$$

Ricordando che, per le note proprietà della trasformata di Fourier, la PSD della *derivata* del processo $X(t)$ può essere ottenuta moltiplicando la PSD del processo per la funzione ω^2 [3], aumentando di 2 l'ordine dei momenti spettrali presenti nella (12) si ottiene l'analoga grandezza relativa alla derivata del processo [3], cioè $\rho_X^* = (\lambda_4/\lambda_2)^{0.5}$. È importante notare che ρ_X^* risulta proporzionale al numero medio delle coppie di attraversamenti dello 0 nell'unità di tempo della *derivata* del segnale, che, per elementari considerazioni di analisi matematica, coincide con il *numero medio dei massimi* (o dei *minimi*) nell'unità di tempo del segnale. In particolare, tale numero è espresso come [1-3]:

$$n_M = \frac{\sqrt{\lambda_4/\lambda_2}}{2\pi} = \frac{\rho_X^*}{2\pi} \quad (13)$$

Poiché il numero dei massimi coincide con il numero cicli di fatica indipendentemente dal metodo di conteggio utilizzato, la (13) permette di ottenere il numero di cicli di fatica prodotti mediamente dal processo nell'unità di tempo. Utilizzando la (13), è possibile porre in relazione il numero di cicli al cedimento N_U con la durata *temporale* a fatica T_U :

$$T_U = \frac{N_U}{n_M} = \frac{2\pi}{\rho_{\dot{x}}} \frac{a}{R^b} \quad (14)$$

Mediante i momenti spettrali viene definito un parametro molto importante nell'analisi dei processi stocastici: il *fattore di irregolarità* α_x . Esso è dato dal rapporto tra il numero dei picchi e il numero degli attraversamenti dello 0 che si verificano mediamente nell'unità di tempo. Il fattore α_x è compreso nell'intervallo $0 \leq \alpha_x \leq 1$ ed è legato ai momenti spettrali dalla relazione [1-3]:

$$\alpha_x = n_Z/n_M = \lambda_2/\sqrt{\lambda_0\lambda_4} = \rho_x/\rho_{\dot{x}} \quad (15)$$

In pratica un processo si definisce regolare se il numero dei massimi ed il numero degli attraversamenti dello 0 sono prossimi, con il parametro α_x che tende al valore unitario, irregolare nel caso opposto. Tipicamente le PSD dei processi regolari presentano valori significativi in un ristretto intervallo di frequenze e viceversa. Per questo motivo i processi regolari ed irregolari sono anche definiti rispettivamente a Banda Stretta (processi BS) e a banda larga.

Un'altra importante funzione che può essere determinata a partire dalla semplice conoscenza della PSD è la distribuzione statistica dei massimi (e/o dei minimi) dei campioni del processo, che è data nella seguente forma:

$$p_M(M) = \sqrt{\frac{1-\alpha^2}{\pi 2\lambda_0}} e^{-\frac{M^2/2\lambda_0}{1-\alpha^2}} + \alpha \frac{M}{2\lambda_0} e^{-M^2/2\lambda_0} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{M}{\sqrt{2\lambda_0}} \right) \right] \quad (16)$$

e che dipende esclusivamente dai parametri λ_0 (11) e α_x (15). In Fig.3 sono mostrate le 3 funzioni $p_m(M)$ di processi aleatori aventi i seguenti valori del parametro di irregolarità: $\alpha_x=1$, $\alpha_x=0.995$, $\alpha_x=0.95$. Purtroppo la conoscenza di tale funzione non è in generale sufficiente per determinare la distribuzione statistica dei cicli di fatica per media ed ampiezza, $p_{m,r}(m,r)$ che, a sua volta, dipende in modo complesso dalla forma della PSD e non soltanto dai due parametri citati [1-3].

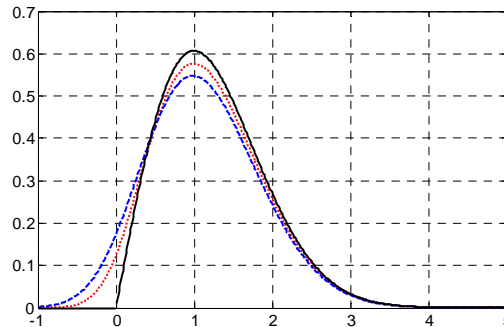


Figura 3. Funzioni $p_m(M)$ per processi aventi i seguenti valori del parametro di irregolarità: $\alpha_x=1$ (linea nera continua), $\alpha_x=0.995$ (linea rossa punteggiata) e $\alpha_x=.95$ (linea blu a tratti).

4. ANALISI DI FATICA PER PROCESSI BS

I campioni dei processi BS (Fig.1) sono caratterizzati dal fatto che i massimi e i minimi risultano quasi simmetrici rispetto all'asse temporale e si susseguono ad intervalli temporali quasi costanti. Tali estremi danno luogo a cicli di fatica alternati simmetrici di ampiezza variabile in modo aleatorio, con componenti medie (5) di entità trascurabile. In questo caso la distribuzione statistica dell'ampiezza dei cicli di fatica (Fig.3) tende alla distribuzione statistica dei massimi del processo, che, nel caso limite nel quale il parametro α_x assume il valore unitario, coincide con la *distribuzione di Rayleigh* [1-3] che dipende dal solo parametro spettrale λ_0 . In particolare, ponendo $\alpha_x=1$ nella (16) ed utilizzando l'ampiezza dei cicli di fatica r (4) al posto di M , si ottiene:

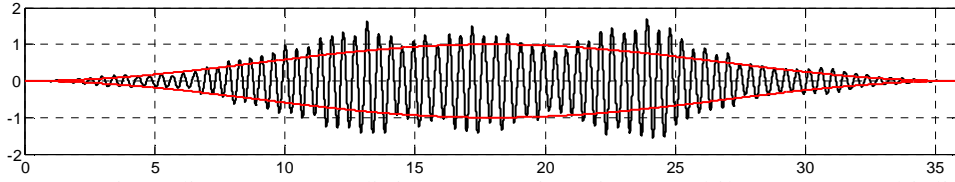


Figura 4. Campione di processo BS di tipo non stazionario separabile ottenuto moltiplicando il campione di fig.1 per la funzione $f(t)$ rappresentata in rosso, insieme alla funzione $-f(t)$.

$$p_r(r) = \frac{r}{\lambda_0} e^{-r^2/2\lambda_0} \quad (17)$$

In questo caso i valori della TEMEB R^b possono essere ottenuti risolvendo numericamente o teoricamente il seguente integrale ottenuto introducendo la (17) nella (8) al posto di $p_{m,r}(m,r)$ ed r al posto di r_G (essendo trascurabili le componenti medie di tensione) ottenendo

$$R_{BS}^b = \int_0^\infty r^b p_r(r) dr = \frac{1}{\lambda_0} \int_0^\infty r^{b+1} e^{-r^2/2\lambda_0} dr = (2\lambda_0)^{\mu/2} \Gamma(1+\mu/2) \quad (18)$$

essendo Γ la *funzione gamma*. Nel caso in cui si voglia calcolare l'integrale presente nella (18) in forma numerica, l'integrazione deve essere estesa al valore massimo prevedibile per i campioni del processo, x_{MAX} , tipicamente compreso tra 3 e 6 volte la deviazione standard del processo pari a $\lambda_0^{0.5}$. Introducendo il valore ottenuto con la (18) al posto di R^b nella (9) o nella (14) è possibile determinare il numero medio di cicli al cedimento N_U . Il valore assunto da R_{BS}^b (18) dipende dal solo parametro λ_0 (11) e dall'esponente b della curva di Wöhler, mentre la durata a fatica (9,14) dipende anche dalla costante a della curva di Wöhler.

Come detto, l'espressione (18) può essere utilizzata per la previsione della vita a fatica nel caso sollecitazioni costituite da Processi BS di tipo Stazionario, Monoassiale con tensione Media Nulla (PBS-S-M-MN); nel seguito di questo paragrafo l'analisi viene estesa ai casi sollecitazioni costituite da processi BS non stazionari di tipo *separabile*, al caso di tensione media positiva costante, ai casi di sollecitazioni biassiali agenti in fase e di tensione normale e tangenziale, agenti in fase. In particolare, per i vari casi verranno determinate delle espressioni della TEMEB che possono essere introdotte nelle equazioni (9) e (14) al posto di R^b per determinare il numero dei cicli di vita o la durata temporale del componente analizzato. Inoltre viene proposta un'espressione di tensione equivalente simile alla TEMEB per il caso di analisi della propagazione della frattura utilizzando la legge di Paris [7,9].

I processi non stazionari di tipo separabile sono costituiti da campioni ottenibili dal prodotto tra i campioni di un processo stazionario BS e una funzione del tempo di tipo deterministico $f(t)$:

$$\bar{x}_j(t) = f(t) x_j(t) \quad (19)$$

come nel caso mostrato in Fig.4.

Ad esempio molte sollecitazioni aventi un transitorio iniziale e/o finale possono essere rappresentate da processi di questo tipo. In questo caso, al variare del tempo, la PSD del processo mantiene costante la sua forma e, conseguentemente, i valori dei parametri spettrali, mentre la sua ampiezza varia nel tempo in modo proporzionale alla funzione $f(t)^2$. L'espressione della TEMEB *al variare del tempo* è la seguente

$$R^b(t) = E[f(t)^b r^b] = f(t)^b E[r^b] = f(t)^b R_{BS}^b \quad (20)$$

essendo il calcolo della media esteso ai campioni del processo, mentre la TEMEB valutata in un intervallo temporale T può essere ottenuta come:

$$R_T^b = E_{0 \leq t \leq T} [R_{BS}^b(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^b R_{BS}^b(t) dt = \frac{R_{BS}^b}{T} \int_0^T f(t)^b dt \quad (21)$$

Definendo

$$f_T^b = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^b dt \quad (22)$$

la (21) può essere riscritta semplicemente come

$$R_T^b = f_T^b R_{BS}^b \quad (23)$$

Se alla sollecitazione dovuta al processo BS si somma una tensione media (4) costante, m_0 , l'eq.(18) può essere riscritta come

$$R_{m_0}^b = \int_0^{r_{\max}} \left(\frac{r}{1-m_0/S_U} \right)^b \frac{r}{\lambda_0} e^{-r^2/2\lambda_0} dr = \frac{1}{(1-m_0/S_U)^b} \frac{1}{\lambda_0} \int_0^{r_{\max}} r^{b+1} e^{-r^2/2\lambda_0} dr \quad (24)$$

La TEMEB per questo caso può essere posta in relazione con la R_{BS}^b (18) come

$$R_{m_0}^b = \frac{1}{(1-m_0/S_U)^b} R_{BS}^b \quad (25)$$

Nel caso in cui la sollecitazione nel punto della struttura analizzato è di tipo biassiale, con le due componenti di tensione σ_1 e σ_2 che agiscono in fase mantenendo un rapporto costante $k=\sigma_2/\sigma_1$, l'analisi di fatica a durata illimitata può essere effettuata utilizzando il criterio di Sines, basato sull'analisi delle tensioni ottaedriche. Nel caso in cui le componenti medie delle tensioni possono essere trascurate, definendo le componenti alternate delle tensioni come σ_{1a} e $\sigma_{2a}=k\sigma_{1a}$, la tensione equivalente ottenuta dal criterio di Sines (che deve essere confrontata con il limite di fatica σ_f) assume la seguente forma

$$\sigma_{a,e} = \sqrt{\sigma_{1a}^2 + \sigma_{2a}^2 - \sigma_{1a}\sigma_{2a}} = \sqrt{1+k^2-k} \sigma_{1a} \quad (26)$$

Se le storie temporali della tensione $\sigma_1(t)$ costituiscono i campioni di un PBS-S-M-MN, definendo r le ampiezze dei cicli corrispondenti, aventi distribuzione di probabilità data dalla (17), la corrispondente TEMEB può essere espressa nella seguente forma, derivata opportunamente dalla (18):

$$R_{SI}^b = \int_0^{r_{\max}} \left(\sqrt{1+k^2-k} r \right)^b \frac{r}{\lambda_0} e^{-r^2/2\lambda_0} dr = (1+k^2-k)^{b/2} R_{BS}^b \quad (27)$$

Il valore di R_{SI} può senz'altro essere utilizzato nella verifica a vita infinita, confrontando il valore ottenuto con σ_f , mentre l'utilizzazione mediante l'eq.(9,14) deve essere considerata come approssimata. Nel caso in cui la sollecitazione è costituita da componenti di tensione normale σ e tangenziale τ agenti in fase, con rapporto $k=\tau/\sigma$ costante, l'analisi di fatica a durata illimitata può essere effettuata utilizzando il criterio empirico di Gough e Pollard. Introducendo il rapporto tra i limiti di fatica a torsione e sforzo normale, $r_{\tau\sigma}=\tau_f/\sigma_f$, operando come nel caso precedente, cioè definendo le componenti di tensione alternata come σ_a e $\tau_a=k\sigma_a$, la tensione alternata equivalente può essere espressa come

$$\sigma_{a,e} = \sqrt{\sigma_a^2 + r_{\tau\sigma}^{-2}\tau_a^2} = \sqrt{1+k^2r_{\tau\sigma}^{-2}} \sigma_a \quad (28)$$

Operando come nel caso precedente, la TEMEB può essere espressa nella seguente forma:

$$R_{GP}^b = \int_0^{r_{\max}} \left(\sqrt{1+k^2 r_{\tau/\sigma}^{-2}} r \right)^b \frac{r}{\lambda_0} e^{-r^2/2\lambda_0} dr = \left(1+k^2 r_{\tau/\sigma}^{-2} \right)^{b/2} R_{BS}^b \quad (29)$$

Anche in questo caso il valore di R_{GP} può essere utilizzato nella verifica a vita infinita, mentre l'utilizzazione mediante le eq.(9,14) deve essere considerata come approssimata.

In molti casi pratici la propagazione della frattura in un componente strutturale è governata dall'equazione di Paris espressa come

$$\frac{dl}{dN} = C \Delta K^n = C \left(\Delta \sigma \beta \sqrt{\pi l} \right)^n \quad (30)$$

nella quale l è la dimensione del difetto, N il numero di cicli, C ed n sono costanti dipendenti dal materiale, K è il fattore di intensificazione delle tensioni, $\Delta \sigma$ è l'ampiezza dei cicli di tensione, β è un fattore adimensionale che dipende dalla geometria elemento-difetto.

Come detto, nel caso dei PBS-S-M-MN, i cicli di tensione risultano praticamente alternati simmetrici e si ha sempre $\sigma_{\min} \leq 0$. In tal caso, il valore di $\Delta \sigma$ di ciascun ciclo di tensione coincide con il valore massimo del ciclo σ_{\max} , la cui distribuzione statistica coincide con quella di Rayleigh (17).

Integrando la (30) e scrivendo l'espressione ottenuta in modo da separare i termini relativi alla geometria elemento-difetto da quelli relativi all'applicazione del carico si ottiene:

$$\frac{1}{C} \int_{l_i}^{l_N} \left(\beta \sqrt{\pi l} \right)^{-n} dl = \int_0^N \Delta \sigma^n dN = \sum_{k=1}^n \Delta \sigma_k^n = N R^n \quad (31)$$

essendo R^n il valor medio delle ampiezze dei cicli di tensione $\Delta \sigma \equiv r$ elevati ad n , che può essere ottenuto mediante l'eq.(18) introducendo l'esponente n della legge di Paris al posto di b :

$$R^n = \frac{1}{\lambda_0} \int_0^{x_{\max}} r^{n+1} e^{-r^2/2\lambda_0} dr \quad (32)$$

Ponendo $\alpha = \beta l^{0.5}$, il termine di sinistra della (30), definito A_N , può essere riscritto come

$$A_N = \frac{1}{C \pi^{n/2}} \int_{l_i}^{l_N} \alpha^{-n} dl \quad (33)$$

La funzione A_N può essere valutata per diversi valori della lunghezza della frattura l_N , dalla semplice conoscenza della funzione $\beta(l)$ in forma analitica o numerica, utilizzando un insieme discreto di valori della lunghezza di frattura definiti come $l_k = l_i + k\Delta l$, con $k=1, \dots, N$, essendo l_i la lunghezza iniziale e avendo scelto un valore di Δl sufficientemente piccolo.

Una volta determinato il valore di R^n per il processo aleatorio analizzato, è possibile determinare la lunghezza media di frattura l_N provocata da un numero di cicli N assegnato (o relativa ad un periodo T) o, viceversa, il numero di cicli N (o la durata temporale T) necessari a raggiungere una lunghezza di frattura l_N assegnata, utilizzando rispettivamente le seguenti relazioni:

$$A_N = N R^n = T \frac{\sqrt{\lambda_4/\lambda_2}}{2\pi} R^n \quad N = T \frac{\sqrt{\lambda_4/\lambda_2}}{2\pi} = \frac{A_N}{R^n} \quad (34,35)$$

Nel primo caso, una volta determinato il valore di A_N mediante la (34) si risale al corrispondente valore di l_N utilizzando la (33) in modo inverso; nel secondo caso si determina il valore di A_N da inserire nella (35) mediante la (33), utilizzando il valore di l_N assegnato.

È interessante notare che le espressioni delle TEMEB (25,27,29,32), ottenute per sollecitazioni di tipo stazionario, possono essere modificate per il caso dei processi non stazionari di tipo separabile, moltiplicando semplicemente le espressioni stesse per il fattore (22) (nel caso dell'Eq.(32), deve essere utilizzato l'esponente n in luogo di b):

$$R_{m_0,T}^b = \frac{f_T^b}{(1-m_0/S_U)^b} R_{BS}^b \quad R_{SI,T}^b = f_T^b (1+k^2-k)^{b/2} R_{BS}^b \quad (36,37)$$

$$R_{GP,T}^b = f_T^b (1+k^2 r_{\tau/\sigma}^{-2})^{b/2} R_{BS}^b \quad R_T^n = \frac{f_T^n}{\lambda_0} \int_0^{x_{max}} r^{n+1} e^{-r^2/2\lambda_0} dr \quad (38,39)$$

5. SIMULAZIONE NUMERICA, DISCUSSIONE DEI RISULTATI

La simulazione numerica è stata effettuata utilizzando svariate PSD aventi parametro di irregolarità nel campo $0.9 < \alpha_x < 1$ e momento spettrale $\lambda_0=1$, quindi varianza unitaria. Nel lavoro sono mostrati i risultati relativi a due terne di PSD (la prima terna è mostrata in fig.2), aventi rispettivamente parametri $\alpha_x=0.995$ e $\alpha_x=0.95$, come riportato nelle prime 2 colonne della Tabella 1.

Per ciascuna PSD, applicando il metodo diretto nel dominio del tempo [1,6], sono stati generati numerosi campioni $x_i(t)$, $i=1,...,2000$, di durata temporale opportuna ($T=3600$ sec). Dai singoli campioni sono stati estratti gli estremi x_{Mk} ed x_{mk} e su di essi è stato applicato il metodo di conteggio rainflow in modo da determinare le ampiezze e valori medi dei cicli di fatica r_k ed m_k (4,5). Per analizzare i casi di processo non stazionario separabile, i campioni sono stati successivamente moltiplicati per un esempio di funzione $f(t)$, in particolare quella riportata in Fig.4 ed espressa come $f(t)=0.5\sin(2\pi t/T-\pi/2)$, ed è stata effettuata nuovamente la determinazione dei cicli di fatica.

Utilizzando i valori ottenuti per entrambi i casi sono stati determinati i valori delle TEMEB per processi stazionari e non stazionari relative ai vari casi utilizzando le espressioni che tengono conto dell'effetto delle tensioni medie, trascurato nelle formule proposte. In particolare per quanto concerne R_T^b è stata utilizzata l'espressione (7) introducendo la tensione equivalente di Goodman (3), mentre per i casi di $R_{SI,T}^b$ ed $R_{GP,T}^b$, sono state utilizzate le espressioni delle tensioni equivalenti complete [9] invece di quelle semplificate (26) e (28), considerando il caso di $k=0.5$. Per il caso della propagazione della frattura, per tenere conto di casi in cui $x_{mk}>0$ utilizzando un valore dell'esponente γ relativo al materiale svantaggioso per il metodo proposto ($\gamma=0.46$) è stata utilizzata l'espressione della tensione equivalente di Walker [9]:

$$\Delta\sigma_e = \frac{x_M - x_m}{(1-x_m/x_M)^{1-\gamma}} = \frac{x_M}{(1-x_m/x_M)^{-\gamma}} \quad (40)$$

Per semplicità, del caso stazionario sono stati riportati risultati relativi al solo valore R_{BS}^b (Tab.1, colonna 3), mentre per i processi non stazionari quelli relativi ad R_T^b , $R_{SI,T}^b$, $R_{GP,T}^b$ ed R_T^n (Tab.1, colonne 4-7).

Tabella 1 – Risultati della simulazione numerica

	PSD	α_x	R_{BS}^b	R_T^b	$R_{SI,T}^b$	$R_{GP,T}^b$	R_T^n
	1	2	3	4	5	6	7
1	BS	1.000	3.7599	1.1750	0.7632	2.7222	1.0131
2	1	0.995	3.8127	1.1859	0.7533	2.7229	1.0074
3	2	0.995	3.8245	1.1889	0.7529	2.7402	1.0091
4	3	0.995	3.8227	1.1899	0.7534	2.7327	1.0119
5	Err. max		1.7%	1.3%	1.4%	0.6%	0.6%
6		0.950	3.5684	1.1151	0.7243	2.5835	0.9615
7	1	0.950	3.6831	1.1361	0.6930	2.5913	0.9867
8	2	0.950	3.6850	1.1368	0.6896	2.5891	0.9857
9	3	0.950	3.6837	1.1373	0.6878	2.5884	0.9880
10	Err. max		3.2%	1.9%	5.2%	0.3%	2.76%

È importante notare che gli errori ottenuti relativamente ai valori delle TEMEB R_T^b , $R_{SI,T}^b$ ed $R_{GP,T}^b$ sono molto prossimi a quelli dei numeri di cicli N_U determinati mediante la (9) e che i casi più significativi da analizzare sono quelli per i quali i numeri di cicli ottenibili sono bassi, cioè quelli in cui la curva di Wöhler ha un'elevata pendenza e quindi piccolo valore di b , essendo, in generale, $3 < b < 25$. I risultati mostrati in tabella sono relativi al caso di $b=3$. Nel confronto tra i risultati ottenuti con le formule proposte e quelli ottenuti con il metodo diretto, è necessario utilizzare valori opportuni della tensione di rottura del materiale S_U . In generale è importante il rapporto tra la tensione di rottura del materiale e la deviazione standard del processo, cioè $s=S_U/\lambda_0^{1/2}$, dovendo essere almeno $s>3$ per evitare che il componente giunga a rottura statica. Nell'analisi effettuata si è considerato il valore $s=4$. Anche gli errori sui numeri di cicli determinati mediante l'equazione di Paris utilizzando R_T^n sono confrontabili con quelli relativi a R_T^n . Nell'analisi è stato considerato il caso di esponente $n=2.75$.

In Tab.1, le righe da 1 a 5 si riferiscono al caso di $\alpha_x=0.995$; nella riga 1 sono riportati i valori ottenuti con le equazioni proposte, utilizzando il valore di R_{BS}^b ottenuto con l'eq.(18), mentre nelle righe 2-4 sono riportati i valori ottenuti con il metodo diretto. Nella riga 5 sono riportati gli errori corrispondenti, tutti molto contenuti. Nell'analisi effettuata è stato osservato che le formule sono utilizzabili con buona precisione nel campo $0.995 \leq \alpha_x \leq 1$.

Le righe da 6 a 10 si riferiscono al caso di $\alpha_x=0.95$. Naturalmente i risultati ottenuti utilizzando l'eq.(18) sono sempre quelli della riga 1. Nel lavoro è stato osservato che, nella determinazione di R_T^b , $R_{SI,T}^b$, $R_{GP,T}^b$, se nell'integrale nel secondo termine della (18) si inserisce come funzione di densità di probabilità dei cicli $p_r(r)$ l'espressione (16), valida per i casi di $\alpha_x \neq 1$, al posto della (17), avendo sostituito il simbolo M con r , si ottengono risultati nettamente più precisi. Nella riga 6 sono mostrati i risultati ottenuti calcolando il valore di R_{BS}^b utilizzando l'eq.(16). Gli errori ottenuti in tal modo, mostrati nella riga 10, sono più alti del caso di $\alpha_x=0.995$, ma ancora contenuti.

Nell'analisi complessiva è stato verificato che il metodo proposto, in generale, consente di ottenere buoni risultati nel campo $0.9 \leq \alpha_x \leq 1$.

6. CONCLUSIONI

In questo lavoro sono state sviluppate le espressioni analitiche per la determinazione della durata a fatica di componenti soggetti a svariate tipologie di sollecitazione aleatorie a banda stretta, in particolare: tensione normale monoassiale con tensione media costante, sollecitazione biassiale con tensioni normali agenti in fase, sollecitazione di sforzo normale e tensione tangenziale agenti in fase, propagazione della frattura. Le espressioni sono state generalizzate per il caso in cui la sollecitazione è di tipo non stazionario separabile. Le formule di base sono state ricavate analiticamente per il caso di $\alpha_x \equiv 1$ e forniscono risultati molto precisi nel campo $0.995 \leq \alpha_x \leq 1$; nel lavoro è stata proposta una versione approssimata applicabile con buona precisione nel campo $0.9 \leq \alpha_x \leq 0.995$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Sobczyk, K., and Spencer, B.F., Random Fatigue: From Data to Theory, Academic Press, San Diego, USA (1992).
- [2] Lin, Y. K., Probabilistic Theory of Structural Dynamics, Book Co. Inc., New York, USA (1964).
- [3] Wirsching, P. H., Paez, T. L., and Ortiz, K. Random Vibrations, John Wiley and Sons, Inc., New York, USA (1995).
- [4] Crandall, S. H., and Mark, W. D., *Random Vibration in Mechanical System*, Academic Press, New York (1963).
- [5] Miles J.: On the structural fatigue under random loading, Journal of Aeronautical Science, Vol. 21, No. 11, pp. 753–762, (1954).
- [6] Bendat, J.S., Piersol AG, Random data analysis and measurement procedure, A Wiley Interscience publication (2000)
- [7] Schijve J, Fatigue of Structures and Materials, Kluwer Academic Publisher, New York, (2004)
- [8] Lee, Y., Pan J., Hathaway, R., Barkey, M. E., *Fatigue Testing and Analysis (Theory and Practice)*, Elsevier, Oxford (2005)
- [9] *Fatigue and Fracture*, ASM Handbook Volume 19, USA, (1997).