

Studi e Ricerche



Scienze e Tecnologie

Prospettive architettoniche

conservazione digitale, divulgazione e studio

VOLUME I

a cura di
Graziano Mario Valenti



SAPIENZA
UNIVERSITÀ EDITRICE

Collana Studi e Ricerche 26

SCIENZE E TECNOLOGIE

Prospettive architettoniche

conservazione digitale, divulgazione e studio

VOLUME I

a cura di
Graziano Mario Valenti



SAPIENZA
UNIVERSITÀ EDITRICE

2014

Copyright © 2014

Sapienza Università Editrice

Piazzale Aldo Moro 5 – 00185 Roma

www.editricesapienza.it

editrice.sapienza@uniroma1.it

Iscrizione Registro Operatori Comunicazione n. 11420

ISBN 978-88-98533-45-9

DOI 10.13133/ 978-88-98533-45-9



Quest'opera è distribuita con licenza Creative Commons 3.0
diffusa in modalità *open access*.

Distribuita su piattaforma digitale da:

digilab

Centro interdipartimentale di ricerca e servizi
Settore Publishing Digitale

In copertina: Matteo Flavio Mancini, Sala dei Cento Giorni, Palazzo della Cancelleria, Roma. Sovrapposizione del disegno di Vincenzo Fasolo con fotografia della sala.

*A Vincenzo Fasolo,
professore di disegno e di storia
dell'architettura, fondatore della
Facoltà di Architettura e della Scuola
di perfezionamento per il restauro dei
monumenti, presidente dell'Accademia
Nazionale di San Luca e architetto della
Fabbrica di San Pietro, che, con il suo
saggio sulla Sala dei Cento giorni, ha
aperto la via a questi nostri studi sulle
prospettive architettoniche.*

Unità di ricerca

Esiti della ricerca triennale condotta in collaborazione tra le Unità operative degli Atenei di Cosenza, Firenze, Genova, Milano, Roma La Sapienza, Salerno, Torino, Udine, Venezia, con la partecipazione di ricercatori degli Atenei di Bari, della Basilicata, di Bologna, Brescia, Ferrara, Napoli 'Federico II' Palermo, della Seconda università di Napoli e di Trieste.

Partner internazionali

Bartlett School of Architecture, London: Mario Carpo

Technischen Universität Kaiserslautern: Cornelia Leopold

Universidade do Porto: João Pedro Xavier

Johannes Gutenberg University Mainz: Sören Fischer

Unità operativa di Cosenza

Coordinatore: Aldo De Sanctis

Ricercatori: Giuseppe Fortunato, Antonio Lio

Università di Palermo: Francesco Di Paola, Laura Inzerillo,

Mario Manganaro

Collaboratori. Cettina Santagati

Unità operativa di Firenze

Coordinatore: Maria Teresa Bartoli

Ricercatori: Giovanni Anzani, Carlo Biagini, Giuseppe Conti,

Fauzia Farneti, Stefano Giannetti, Alessandro Merlo

Università di Bologna: Roberto Mingucci

Università di Ferrara: Manuela Incerti

Collaboratori: Giovanni Bacci, Carlo Battini, Vincenzo Donato, Erika Ganghereti, Simone Garagnani, Gaia Lavoratti, Monica Lusoli, Anna Maria Manfredini, Nevena Radojevic, Nicola Velluzzi

Unità operativa di Genova

Coordinatore: Maura Boffito

Ricercatori: Cristina Candito, Luisa Chiara Cogorno, Maria Linda Falcidieno, Michela Mazzucchelli, Maria Elisabetta Ruggiero

Unità operativa di Milano

Coordinatore: Michela Rossi

Ricercatori: Giuseppe Amoruso, Gabriele Pierluisi, Roberto de Paolis, Pietro Marani, Pompeiana Iarossi, Dario Sigona

Università di Brescia: Ivana Passamani

Università e-Campus: Giampiero Mele

Università di Trieste: Alberto Sdegno

Collaboratori: Erika Alberti, Donatella Bontempi, Giorgio Buratti, Nadia Campadelli, Rita Capurro, Paola Cochelli, Laura Galloni, Silvia Masserano, Matteo Pontoglio Emili

Unità operativa di Roma

Coordinatore: Riccardo Migliari (coordinatore nazionale)

Ricercatori: Leonardo Baglioni, Flavia Cantatore, Laura Carlevaris, Andrea Casale, Anna Rosa Cerutti, Laura De Carlo, Tommaso Empler, Marco Fasolo, Marzia Mirandola, Leonardo Paris, Nicola Santopuoli, Graziano Mario Valenti, Andrea Vitaletti, Paola Zampa

Politecnico di Bari: Valentina Castagnolo, Vincenzo De Simone, Domenico Pastore, Gabriele Rossi

Università di Palermo: Francesco Maggio

Collaboratori: Michele Calvano, Matteo Flavio Mancini, Jessica Romor, Marta Salvatore, Williams Trojano, Wissam Wahbeh

Unità operativa di Salerno

Coordinatore: Vito Cardone

Ricercatori: Salvatore Barba, Barbara Messina, Alessandro Naddeo

Università della Basilicata: Antonio Bixio, Antonio Conte

Università di Napoli 'Federico II': Pierpaolo D'Agostino, Lia Maria Papa, Maria Ines Pascariello

Seconda università di Napoli: Luigi Guerriero, Adriana Rossi

Collaboratori: Davide Barbato, Maria Rosaria Cundari,
Saverio D'Auria, Fausta Fiorillo

Unità operativa di Torino

Coordinatore: Anna Marotta

Ricercatori: Serena Abello, Rita Binaghi, Laura Blotto, Ornella Bucolo,
Chiara Cannavici, Pia Davico, Mauro Luca De Bernardi,
Gaetano De Simone, Daniela Miron, Rossana Netti, Ursula Zich

Collaboratori: Ugo Comollo, Laura Facchin, Federico Manino,
Roberto Mattea

Unità operativa di Udine

Coordinatore: Roberto Ranon

Ricercatori: Marc Christie, William Bares, Christophe Lino, Denis Pitzalis

Unità operativa di Venezia

Coordinatore: Agostino De Rosa

Ricercatori: Malvina Borgherini, Massimiliano Ciammaichella, Giuseppe
D'Acunto, Emanuele Garbin, Fabrizio Gay, Camillo Trevisan

Collaboratori: Matteo Ballarin, Francesco Bergamo, Alessio Bortot,
Cristian Boscaro, Antonio Calandriello, Stefania Catinella,
Umberto Ferro, Alessandro Forlin, Ilaria Forti, Isabella Friso,
Francesca Gasperuzzo, Andrea Gion, Gabriella Liva,
Cosimo Monteleone, Paola Placentino, Maurizio Tarlà, Elena Trevisan,
Stefano Zoerle

Istituzioni nazionali e internazionali che hanno patrocinato il progetto

Ambasciata di Francia presso la Santa Sede, Roma

Archivio di Stato di Torino del Ministero per i Beni e le Attività Culturali

Archivio Generale dei Minimi, Roma

Associazione Trinità dei Monti, Roma

Centre de Recherche et de Restauration des Musées de France con Sede al Louvre a Parigi (Francia)

Curia Arcivescovile di Venezia

Departamento de Historia del Arte y Música della Universidad de Granada (Spagna)

Departamento de Urbanismo y Representación de la Arquitectura de la Universidad de Valladolid (Spagna)

Dipartimento di Architettura dell'Università degli Studi di Ferrara

Dipartimento di Architettura dell'Università degli Studi di Palermo

Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale 'Fausto Sacerdote' dell'Università degli Studi di Firenze

Dipartimento di Ingegneria Civile e Architettura dell'Università degli Studi di Trieste

Dipartimento di Ingegneria Informatica Automatica e Gestionale 'Antonio Ruberti', della Sapienza Università di Roma

Dipartimento di Progettazione Urbana e Urbanistica dell'Università degli Studi di Napoli Federico II'

Doutorado Interinstitucional em Urbanismo (Brasile)

EGRAFIA - Asociación de Profesores de Expresión Gráfica en Ingeniería, Arquitectura y Áreas Afines (Argentina)

Escuela Politécnica Superior della Universidad CEU San Pablo di Madrid (Spagna)

Escuela Tècnica Superior de Arquitectura dell'Univèrsitat Politecnica de València (Spagna)

Facoltà di Lettere dell'Università telematica e-Campus di Novedrate

Faculdade de Arquitectura di Porto (Portogallo)

Facultad de Geografia e Historia della Universitas Complutensis di Madrid (Spagna)

Laboratoire MAP-ARIA UMR CNRS-MCC 3495 Applications et Recherches en Informatique pour l'Architecture presso l'École Nationale Supérieure d'Architecture de Lyon (Francia)

Les Pieux Etablissements de la France à Rome et à Lorette (Francia)

Pontificia Università Gregoriana di Roma

Pontificio Comitato di Scienze Storiche, Città del Vaticano

Scuola internazionale di Dottorato di Ricerca 'Architecture and Urban Phenomenology' dell'Università della Basilicata con Sede a Matera

Technischen Universität Kaiserslautern (Germania)

Ufficio Beni Culturali della Diocesi di Arezzo-Cortona-Sansepolcro

Universidad de Belgrano a Buenos Aires (Argentina)

Universidade Federal De Minas Gerais Faculdade De Filosofia E Ciências Humanas di Belo Horizonte (Brasile)

Universidade Federal da Bahia / Universidade Federal da Paraíba, Programa Dinter -

Università degli Studi di Brescia

Indice

Le prospettive architettoniche: un ponte tra arte e scienza	1
<i>Riccardo Migliari</i>	

PARTE I. LE PROSPETTIVE ARCHITETTONICHE E LA LORO INTERPRETAZIONE EUROPA

Albrecht Dürer's contributions to the European Perspective Research project in the Renaissance	9
<i>Cornelie Leopold</i>	

Vincenzo Bacherelli fra Firenze e Portogallo: la diffusione della quadratura alla corte di Giovanni V. L'uso della prospettiva e la sua diffusione teorica in seno alla cultura matematica dei Gesuiti nella prima metà del Settecento	23
<i>Magno Moraes Mello</i>	

Prospettiva de' pittori e architetti come <i>Liber Veritatis</i> di Andrea Pozzo	35
<i>Sara Fuentes Lázaro</i>	

ITALIA MERIDIONALE

Un approccio innovativo allo studio delle prospettive architettoniche di Campania e Basilicata	49
<i>Vito Cardone</i>	

Il paliotto polimaterico dell'altare maggiore nella chiesa della SS. Annunziata a Ficarra (ME)	61
<i>Mario Manganaro</i>	

Lo spazio architettonico nelle rappresentazioni parietali ipogee del materano e negli affreschi dei luoghi di culto dell'entroterra lucano 69

Antonio Conte, Antonio Bixio

Metodologie di indagine applicate alla prospettiva solida nell'architettura in Sicilia.
Un caso di studio: l'Oratorio di San Lorenzo a Palermo 81

Francesco Di Paola

Dall'immagine al modello: le architetture virtuali del patrimonio archeologico campano 95

Barbara Messina

Lo spazio prospettico dell'Annunciazione di Antonello da Messina 107

Francesco Galletta, Francesco Sondrio

Prospettiva solida: il caso della Cattedrale di Palermo 115

Laura Inzerillo, Cettina Santagati

Capua antica. Pitture parietali del IV e III secolo. a.C. 135

Adriana Rossi

Per un repertorio delle prospettive architettoniche in Calabria tra Quattrocento e Ottocento 163

Antonio Agostino Zappani

ITALIA CENTRALE

Le prospettive dipinte di Vignola nel Palazzo Farnese di Caprarola 183

Dora Catalano, Adele Trani

Brunelleschi e l'invenzione della prospettiva 201

Maria Teresa Bartoli

I luoghi dell'illusione. Le pitture 'proiettive' dei Padri Emmanuel Maignan e Jean François Nicéron a Trinità dei Monti (Roma) 223

Agostino De Rosa

Per una catalogazione del quadraturismo e della pittura di architettura nel Granducato di Toscana	243
<i>Fauzia Farneti</i>	
Le tarsie prospettiche nella Sacrestia delle Messe del Duomo di Firenze. Prime considerazioni sulle indagini in corso	257
<i>Carlo Biagini, Vincenzo Donato</i>	
Illusione e realtà. Galleria Spada: esperimento di un inganno	279
<i>Andrea Casale, Marco Fasolo</i>	
La Sala del Mappamondo a Palazzo Venezia	283
<i>Laura De Carlo, Matteo Flavio Mancini, Nicola Santopuoli</i>	
Il progetto originario sul quadraturismo: la Sala dei Cento Giorni nel Palazzo della Cancelleria	311
<i>Marco Fasolo, Matteo Flavio Mancini</i>	
Jacopo Chiavistelli e Santa Maria Maddalena dei Pazzi a Firenze	333
<i>Elena Fossi</i>	
Il disegno dell'atrio di Palazzo Spinelli: costruzione prospettica e inganno visivo.	345
<i>Erica Ganghereti</i>	
Modellazione parametrica e semantica BIM Ricostruzione visuale della prospettiva in affresco nella Sala Urbana del Palazzo Comunale a Bologna	357
<i>Simone Garagnani</i>	
La veduta della <i>Città ideale</i> di Urbino La pavimentazione come griglia regolatrice dello spazio	371
<i>Gaia Lavoratti</i>	
Lo sfondato prospettico della Sala Urbana del Palazzo Comunale a Bologna. Appunti per una ipotesi interpretativa	379
<i>Anna Maria Manferdini</i>	
Sperimentazioni di architettura parametrica sulla Galleria Spada	393
<i>Riccardo Migliari, Andrea Casale, Michele Calvano</i>	

La *Trinità* di Masaccio: dai primi studi all'animazione
computerizzata 399

Nicola Velluzzi

ITALIA SETTENTRIONALE

Decorazione prospettica a Genova tra il XVI ed il XVIII secolo 409

Maura Boffito

Il rilievo della chiesa di San Francesco in Rocca a Sassuolo. 417

Giuseppe Fortunato, Antonio Lio

Per una mappatura del quadraturismo in Piemonte.
Una riflessione: luce, colore e materia. 439

Anna Marotta

Due esempi di "architettura picta" nel cuneese:
Palazzo Muratori Cravetta e Villa Maresco.
Studio di due facciate affrescate delle corti interne 457

Laura Blotto, Ornella Bucolo, Daniela Miron

Spazi statici e spazi dinamici
a Palazzo Brignole-Rosso a Genova 467

Cristina Cándito

Prospettive architettoniche tardoseicentesche fra spazio sacro
e luoghi domestici. Chiesa di San Pantalon a Venezia
e ville venete della Riviera del Brenta 491

Massimiliano Ciammaichella, Stefania Catinella, Paola Placentino

Il paesaggio nelle prospettive architettoniche a Genova 503

Luisa Cogorno

Protagonisti, famiglie, 'scuole' tra Sei e Settecento.
Il Piemonte sabauda 511

Laura Facchin

L'approccio teorico-metodologico della lettura critica
dell'esistente attraverso la rappresentazione:
il caso di Genova 529

Maria Linda Falcidieno

- Le storie di Antonio e Cleopatra* di Giovanni Battista Tiepolo
e Girolamo Mengozzi Colonna in Palazzo Labia a Venezia:
il rilievo e l'esplorazione di una scena 'totale' 541
Emanuele Garbin, Malvina Borgherini
- Tra reliquia e teorema: l'oggetto prospettico all'epoca
di Giovanni Bellini 547
Fabrizio Gay
- Per un registro delle prospettive architettoniche a Genova 591
Michela Mazzucchelli
- Prospettive architettoniche ed evoluzione
del costruito storico genovese 605
Maria Elisabetta Ruggiero
- Per un censimento del quadraturismo in Piemonte.
Approccio metodologico ai Sacri Monti 617
Ursula Zich, Federico Manino

PARTE II. TEORIE E TECNICHE PER LO STUDIO, LA DOCUMENTAZIONE
E LA DIVULGAZIONE DELLE PROSPETTIVE ARCHITETTONICHE

- La 'prospettiva' dell'architetto. Nuovi approfondimenti
del rapporto tra arte e scienza 645
Rita Binaghi
- La prospettiva e gli studi sulla rappresentazione
architettonica. XVII e XVIII secolo 657
Aldo De Sanctis
- Riflessioni sull'illuminazione artificiale di superfici
con quadrature 679
Leonardo Baglioni, Marco Fasolo
- Proposta di uno standard di acquisizione per il rilievo
delle quadrature su superfici piane 687
*Leonardo Baglioni, Matteo Flavio Mancini,
Jessica Romor, Marta Salvatore*
- Panoramiche per immagini HD: dall'acquisizione
alla rappresentazione dei dati: il caso della *Trinità* 712
Carlo Battini

Una tecnologia per la rappresentazione interattiva: il <i>Dense Matching</i>	729
<i>Mauro Luca De Bernardi</i>	
La restituzione prospettica: teoria e applicazioni	745
<i>Laura Inzerillo</i>	
Il rilievo delle quadrature su superfici voltate: riflessioni intorno ad uno standard di acquisizione	793
<i>Matteo Flavio Mancini, Marta Salvatore</i>	
Calcolo della risoluzione delle riprese panoramiche delle quadrature piane	809
<i>Leonardo Baglioni, Riccardo Migliari, Marta Salvatore</i>	
Le prospettive architettoniche: paradigmi di un percorso di ricerca in Campania	817
<i>Lia Maria Papa, Maria Ines Pascariello, Pierpaolo D'Agostino</i>	
Prospettive solide. La Galleria di Palazzo Spada	829
<i>Leonardo Paris</i>	
Modelli interattivi per lo studio delle prospettive architettoniche	849
<i>Graziano Mario Valenti, Jessica Romor</i>	
La scheda per la catalogazione della pittura di architettura e del quadraturismo	861
<i>Monica Lusoli</i>	
 TECNOLOGIE DELL'INFORMAZIONE E DELLA COMUNICAZIONE (ICT)	
Tecniche di <i>image editing</i> : un possibile ' <i>work flow</i> ' per le architetture prospettiche	871
<i>Salvatore Barba, Fausta Fiorillo, Alessandro Naddeo, Davide Barbato</i>	
Tecnologie dell'informazione e della comunicazione (TIC) nella divulgazione dei Beni Culturali.	
La Galleria prospettica di Palazzo Spada	887
<i>Tommaso Empler, con la collaborazione di Alessio Appolloni</i>	

La restituzione prospettica: teoria e applicazioni

Laura Inzerillo

Una buona conoscenza, teorica ed operativa, del sistema proiettivo della prospettiva deve consentire, anche se talvolta con difficoltà di scelta e di applicazione, la comunicazione grafica intellegibile di ogni pensiero dello spazio geometrico articolato. Un'oculata gestione personale del bagaglio cognitivo, effettivamente disponibile e consapevolmente rispondente, di costruzioni geometriche codificate, deve fornire al pensiero del tridimensionale ogni supporto per ottenerne, nella proposta immagine bidimensionale la più certa e pronta veridicità.

La preoccupazione di facilitare ed assicurare il pronto riconoscimento del messaggio grafico è la premessa dell'affidabilità nel rapporto del riferire e del capire.

Il disegno deve stimolare la sensibilità al riconoscimento inequivoco, poiché, per dovizia dell'estensore e abilità del lettore, il prodotto contiene adeguati indizi per orientare l'occhio e la mente alle osservazioni e decisioni pertinenti; ma ciò non basta. Serve ed è assolutamente imprescindibile la determinazione di vera forma e grandezza del tutto, fino ad ogni dettaglio componente; deve essere possibile rispondere alle predette indisponibilità ed ovviare alle ermeticità, deducendo, ricostruendo, restituendo ad ogni elemento la descrizione reale e non apparente.

Obiettivo di questo studio è quello di fornire una metodologia di intervento nel delicato processo di restituzione prospettica che consenta di affrontare qualunque difficoltà si presenti in una ricerca complessa come quella che investe le opere realizzate in prospettiva solida. Attraverso un *excursus* di esempi teorici si arriverà alla restituzione di una formella bronzea presente nella Cattedrale di Palermo.

Introduzione

La restituzione prospettica, così come quella assonometrica ortogonale e obliqua, su uno o più quadri e grafo numerica, si giova molto spesso del ribaltamento di piani e dell'omologia di ribaltamento; alla base di ogni possibile via c'è il ragionamento e non si tratta di processo inverso, come qualcuno conclude con leggerezza. Certamente è palese l'inevitabilità del richiamo di concetti e metodologie elementari e avanzati, acquisiti, canonici o innovativi, in uso per costruire l'immagine prospettica; in uno studio, gradualmente approfondito, è prevedibile che il restituendo disegno possa non essere disponibile, bensì previamente costruito.

Lo studio riportato di seguito conduce il lettore dalla restituzione di un punto a quello di un cubo e di altre forme solide attraverso un percorso cognitivo consapevole e guidato. Nelle applicazioni esposte si affronta, soventemente, il problema del 'fuori campo' ovvero quando un elemento o più elementi non entrano nel campo della rappresentazione. Questo problema è considerato da molti studiosi del settore, superato grazie all'uso del mezzo informatico dove non esistono i confini del foglio. Tuttavia, nella scuola di Geometria Descrittiva (di cui la ex-Facoltà di Ingegneria ne ha sempre vantato l'appartenenza), gran parte delle soluzioni geometriche innovative di rappresentazione sono state dedotte proprio da studi che cercavano di risolvere questo problema in tempi in cui l'informatica era solo un sogno avveniristico. Inoltre, mi permetto di affermare che la ricerca di certe soluzioni a certi problemi è un esercizio mentale geometrico che conferisce a chi lo esercita confidenza con la prospettiva nella lettura e nell'applicazione anche a mano libera in cantiere o durante una lezione.

Ma non è tutto: la ricerca della soluzione ai problemi del 'fuori campo' diventa imprescindibile quando si devono riportare, come in questa sede, esiti di ricerca su un foglio cartaceo dove, ad esempio il punto di vista è troppo lontano per essere riportato e si dice che c'è, più giù ad una distanza imprecisata ed immaginaria. Infine, la conoscenza di certe problematiche consente un uso più veloce e consapevole del mezzo informatico.

L'elaborazione finale, applicata ad una formella dell'urna bronzea di santa Cristina posta all'interno della Cattedrale di Palermo, restituisce concretezza operativa alla teoria trattata, motivandone i lineamenti a volte apparentemente tortuosi. La metodologia adottata ha previsto l'uso del modello realizzato in 123D Catch e successivamente analizzato su Rhino, quindi restituito in ambiente Cad.

Restituzione di un punto A, nota la sua prospettiva sul quadro prospettico π .

Innanzitutto è necessario riflettere sulla completezza dei dati; occorrono diverse precisazioni, affinché la domanda proposta risulti proponibile, accolta e soddisfatta.

Sia dato il punto A' sul quadro piano π , prospettiva di A, punto dello spazio, del quale si chiede di determinare, mediante la restituzione prospettica, le coordinate relative ad un riferimento opportunamente scelto, idoneo all'obiettivo.

Se il punto A' è un punto isolato, cioè non appartiene alla prospettiva di una linea, piana o sghemba, o di una retta o di un piano o di una superficie piana o gobba, da solo non può assumersi proiezione prospettica del punto spaziale A, sufficiente a produrne la restituzione spaziale. Deve risultare associato al punto A'_α , dato e assunto come rappresentazione prospettica della proiezione ortogonale A_α di A su un piano α , di cui siano unitamente assegnati gli elementi grafici indispensabili a definirlo e, a sua volta, a restituirlo. Il punto proprio A' sul quadro π può rappresentare la proiezione, incompleta, di un punto dello spazio, A, proprio, ma anche improprio; se il punto A' è improprio, esso può rappresentare la prospettiva di un punto A, improprio, ma anche proprio. Il piano α è definito sul quadro π da una retta traccia t_α e dalla f'_α , retta di fuga, prospettiva della retta impropria di α ; ed ancora, la giacitura del piano α non è ricostruibile in assenza del gruppo $F'_{n\pi}$ ed $F'_{n\pi}(V)$. Con $F'_{n\pi}$ si indica il punto di fuga delle rette ortogonali al quadro π , (altrimenti noto come punto principale); il segmento $F'_{n\pi}(V)$ si intende ribaltato su π ; la sua misura va letta alla scala grafica unitaria adottata su π e sempre da indicare. Il valore risultante è la distanza $d_{V,\pi}$, π , (altrimenti noto come raggio del cerchio di distanza); se $F'_{n\pi}(V)$ è così lungo da portare (V) fuori campo, se ne considera un'aliquota ($F'_{n\pi}(V)$): x.

Nella pratica informatica molte indicazioni non sono graficamente riportate, rendendo l'immagine illeggibile; per esempio, la collocazione spaziale di A attraverso A' , apparentemente librato in aria, è visivamente impedita per assenza del riferimento e può essere resa nota solo come risposta strumentale.

Mi sembra che l'assuefazione a tante leggerezze dell'immagine informatica comporti l'esclusivo voler vedere subito tantissime prospettive e credere di leggere; si è passati dal voler apprendere il perché e

operare in conseguenza, si è passati al come si fa, senza il perché, pur di fare e, con l'avvento informatico, al delegare lo strumento tutto fare, da semplici e generici fruitori, esperti estrattori di figure.

Non è sostenibile un confronto; è troppo diversa ed estranea la portata dell'ausilio strumentale unitamente alla profonda padronanza delle sue inusitate prestazioni grafiche, stupefacenti, incredibili, utilissime.

La pratica informatica apre alle imprevedibili, spettacolari e irrinunciabili sperimentazioni; il tradizionale possesso della preparazione di base in geometria del disegno, a fronte di oneri esecutivi insostenibili e dissuasivi, offre risultati limitati.

Si definisca, dunque, il quadro π , (Figura 1), assegnando $F_{n\pi}'$ e la distanza $F_{n\pi}'-(V)_{1/2}$ pari alla metà della $d_{V-\pi'}$ liberamente grande quanto si vuole.

Il disegno prospettico non è vincolato o costretto al rispetto di valori prefissati, angolari, dimensionali, di posizione; scelgo liberamente per ottimizzare l'immagine che otterrò; (V) ricade fuori campo e dovrò imparare a utilizzarlo il meno possibile.

Scelgo V lontano dal quadro per ottenere una immagine gradevole e serena, priva di angolature aberrate e viste proprie di riprese strumentali, giustificabili solo per indisponibilità di campo.

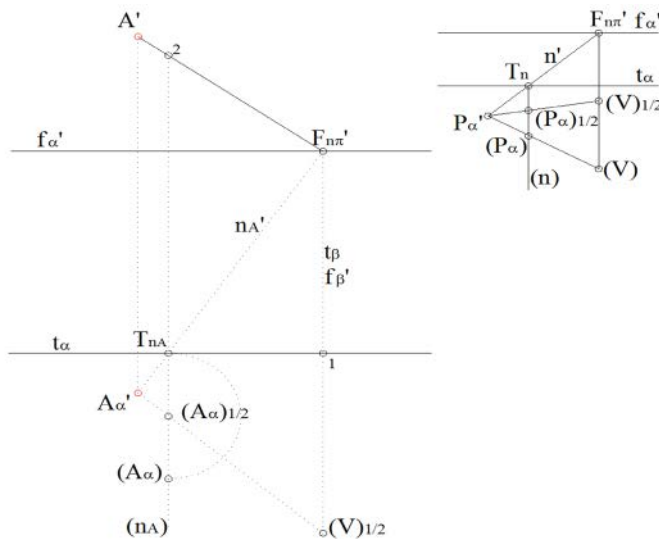


Fig. 1. Restituzione di un punto.

Dall'impostazione dei dati discende una immagine prospettica geometrica bidimensionale di un modello a scala 'visto solo da V', che può suscitare nel fruitore del disegno effetti descrittivi, statici, selettivi, decodificanti una, unicamente quella, versione apparente dell'oggetto.

'L'occhio V', punto adimensionale centro di proiezione esclusivamente geometrica, liberamente e opportunamente posizionato, esente da disturbi e impedimenti, consente adeguate rispondenti a libere e prefissate proposte di trasparenze, esposizioni, articolazioni e connessioni. Invece, la vista diretta, binoculare, stereoscopica, si carica di emotività promosse da una percezione visiva a quadro mobile e non piano, soggetta a innumerevoli parametri ambientali, fisici, etc. Dal confronto non si ravvisano alternative; l'occhio umano e l'oggetto reale non c'entrano alcunché con l'immagine ricavata, costruita e portata all'analisi imprevedibile di un osservatore indeterminabile al fine auspicato di sollecitarne l'attenzione alla individuazione dei particolari messaggi e delle innumerevoli valutazioni che la geometria può e deve esprimere e ispirare.

Ritornando alle considerazioni sugli altri dati evidenziati in figura, il punto A' è la prospettiva da V su π del punto A; non posso restituire la posizione rispetto a π , quadro già definito dai dati discussi; non so se è lontano o vicino, alto o basso, al di qua o al di là di π . Per rendere definitiva e definita la sua collocazione, si scelga liberamente un piano α , per esempio, un piano ortogonale a π ed orizzontale; lo si definisca attraverso la retta di fuga f'_α , contenente $F'_{n\pi}$, e la retta traccia t_α . Ora si può considerare la proiezione A_α di A ortogonalmente ad α e indicarne liberamente sulla verticale per A' la prospettiva A'_α ; più giù è posizionato A'_α e più alto risulta A rispetto ad α . Il piano parallelo a π , condotto per V nello spazio, interseca π secondo una retta parallela alla t_α , denominata retta limite di α ; nel caso in figura, il relativo ribaltamento su π per rotazione intorno alla t_α la porta fuori campo. Se si muove A'_α in giù, aumenta la quota di A, il quale, però, si avvicina al piano per V già considerato; si può ipotizzare di porre il dato anche fuori campo, superando la retta limite, liberamente.

Del punto A, nel sistema di riferimento proiettivo costituito dai dati già dichiarati, si determinare la distanza $d_{A-\pi} = T_{nA}^{-1}(A_\alpha)$ di A da π (in prospettiva $T_{nA}^{-1}(A_\alpha)$), l'eccentricità $e_{A-\beta} = T_{nA}^{-1}$ di A dal piano β proiettante verticale ortogonale a π , definito dalla traccia t_β sovrapposta alla fuga f'_β , entrambe sovrapposte alla $F'_{n\pi} - (V)_{1/2'}$ (in prospettiva distanza di A'_α dalla t_β) e la quota $q_{A-\alpha} = T_{nA}^{-2}$ di A su α , (in prospettiva $A'_\alpha - A'$);

ricavate le predette, la collocazione spaziale del punto A risulta precisamente restituita. In alto a destra, il particolare chiarisce come, per similitudine, disponendo di $F_{n\pi}'-(V)_{1/2}'$ metà di $F_{n\pi}'-(V)$, si possa procedere in sequenza alla determinazione di $A_{\alpha}'-T_{n\alpha}-F_{n\pi}'=n_{\alpha}'$, di (n_{α}) condotta per $T_{n\alpha}'$ di $(V)_{1/2}'-(A_{\alpha})_{1/2}'-A_{\alpha}'$, di $d_{A-\pi}=T_{n\alpha}'-(A_{\alpha})$ doppio di $T_{n\alpha}'-(A_{\alpha})_{1/2}'$ di $e_{A-\beta}=T_{n\alpha}'-1$, di $A'-F_{n\pi}'$ e, infine, di $q_{A-\alpha}=T_{n\alpha}'-2$.

Sul tema della restituzione della collocazione di un punto A, disponendo dei suoi dati prospettici sufficienti, possono proporsi tanti altri casi; per esempio, i dati a corredo possono indicare un punto A molto lontano da V; ovvero riferirsi a due rette incidenti nel punto, ricadente in campo o fuori campo; etc.

Nel caso esaminato, le immagini B' e B_{α}' di B sono in campo, ma la vicinanza di B_{α}' alla f_{α}' segnala la grande distanza di B dal quadro π ; il punto B' indica per B una collocazione sotto α , a quota relativa negativa e di valore notevole; l'eccentricità di B_{α}' a destra della $t_{\beta'}$ lascia prevedere un valore molto alto dell'eccentricità; in conclusione, le tre coordinate della restituzione devono essere rappresentate in aliquote, per esempio, al decimo della effettiva misura.

Si consideri un segmento (Figura 2) che abbia per estremo B_{α}' , per esempio T_r-B_{α}' e si ricavi in T_r-C_{α}' il decimo prospettico; si scelga $B_{\alpha}'-1$ parallelo ad f_{α}' , lo si riporti dieci volte in $B_{\alpha}'-10$; con T_r-10 si ricava F' e con $F'-9$ ottengo C_{α}' . Per il teorema di Talete, applicato sul fascio prospettico di rette parallele di fuga F' , il tratto di retta secante $B_{\alpha}'-10$ parallela a π , divisa in dieci nella realtà e in prospettiva, implica che anche sul corrispondente tratto della secante $B_{\alpha}'-T_r$ si ottiene la predetta suddivisione in dieci segmenti in realtà pure uguali fra loro; T_r-C_{α}' è la prospettiva di un decimo di T_r-B_{α}' .

Per C_{α}' si conduca la $F_{n\pi}'-C_{\alpha}'-T_n=n'$, e per T_n la (n) ; la $(V)_{1/2}'-C_{\alpha}'$ vi definisce il punto 11 e raddoppiando T_n-11 si ottiene in $T_n-(C_{\alpha})$ la distanza di C_{α} da t_{α} , pari al decimo della distanza di B_{α} da t_{α} ; il segmento dieci volte T_r-T_n rappresenta la distanza di B_{α} da $t_{\beta'}$; la verticale condotta per C_{α}' individua C' sulla T_r-B' e la $F_{n\pi}'-C'$ ricava (C) sulla (n) ; infine la $T_n-(C)$ rappresenta il decimo della quota di B rispetto ad α .

Il particolare in basso mostra la divisione del segmento P-Q di α in tre parti uguali; i tre segmenti $P_{\alpha}'-16$, $16-15$, $15-Q_{\alpha}'$ sono prospetticamente uguali.

Il particolare in alto spiega che, date fra t_{α} ed f_{α}' rette parallele a t_{α} e distanti da f_{α}' metà, un quarto, un ottavo, etc. della distanza fra t_{α} ed f_{α}' , sono prospettive di rette di α parallele a t_{α} e la cui distanza reale da

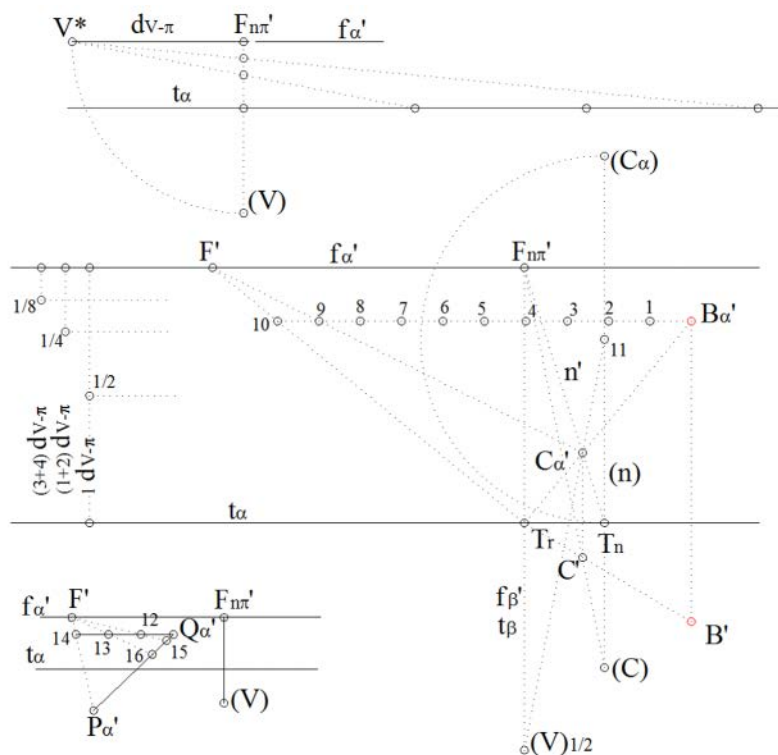


Fig. 2. Restituzione di un punto con (V) fuori campo.

essa è pari a una volta, più due volte, più quattro volte, etc., la distanza $V-\pi$.

Si può disegnare, con tali rette su π , una scala delle profondità su α , a partire da t_α ; il rapporto tra profondità reale e posizione prospettica fra t_α ed f'_α consente, anche ad occhio, una valutazione approssimata per la scelta delle aliquote operative in campo.

Un punto P' , prospettiva di P (Figura 3), fuori campo, sia definito dalla retta che lo contiene, r (r' , P') di fuga F'_r , e, su α , dalla r_α (F'_r , r'_α , $T_{r\alpha}$, P'_α), con $P'-P'_\alpha$ verticale. Le coordinate di P'_α sono ricavate secondo la nota sequenza: $n_{ap}' = F_{n\pi}' - P'_\alpha$; T_{nap}' ; (n_{ap}) ; $(V)_{1/2} - P'_\alpha$; $(P'_\alpha)_{1/2}$; $2 T_{nap} - (P'_\alpha)_{1/2} = T_{nap} - (P_\alpha)$, distanza di P da π ; $0 - T_{nap}$ eccentricità di P ; per la quota si unisce $F_{n\pi}'$ con P' fuori campo, intersezione fra r' ed s' , mediante i triangoli omotetici 1- $F_{n\pi}' - 2$ e 3-4-5; $F_{n\pi}' - 5 - P' = n_p'$; la verticale per il 6, punto medio di $F_{n\pi}' - T_{nap}$ ricava il 7; $6-7 = h_{p-\alpha}/2$ è la metà della quota di P su α .

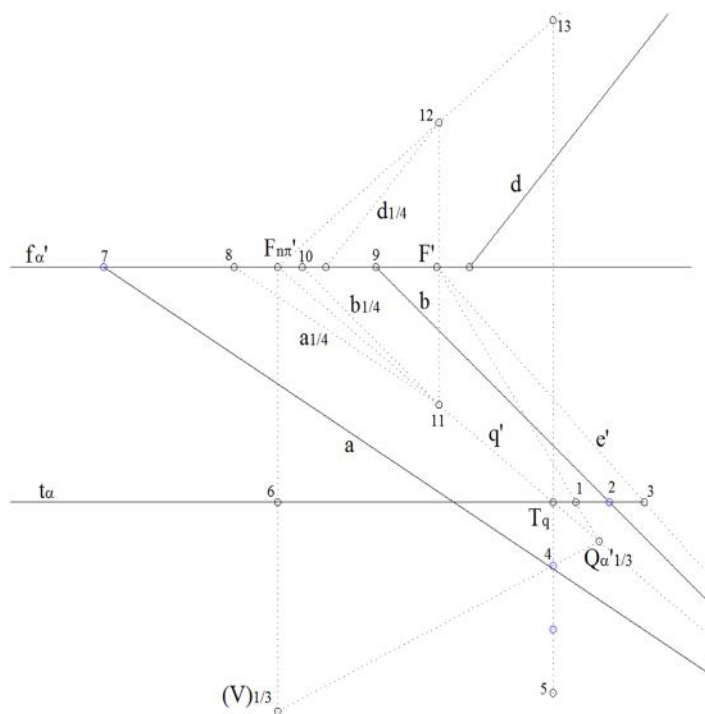


Fig. 4. Proiezioni prospettiche di Q, Q' e Qα fuori campo.

quota di Q su α è T_q-13 ; se il 13 è fuori campo, si ricava la metà della quota per similitudine; osservo che la $b_{1/4}$ è superflua.

Un altro caso molto interessante è quello in cui le due prospettive di un punto sono improprie. Dati $F_{n\pi}'$, (V) , f'_α , t_α si assegnano le due prospettive di un punto R entrambe punti impropri, indicate su π con le direzioni R_{impr}' , $R_{\alpha impr}'$; il punto $R'_{\alpha impr}'$ è il punto improprio della retta r'_α parallela alla direzione $R_{\alpha impr}'$ di fuga $F_{n\pi}'$ e di traccia $T_{r\alpha}$. Con il ribaltamento intorno a t_α la r'_α si porta in (r_α) ortogonale a t_α in $T_{r\alpha}$ e interseca in (R_α) la ribaltata della retta limite $r_{lim,\alpha}$ di α , parallela a t_α a distanza $1-(V_\alpha)=F_{n\pi}'-(V)$; la $(V)-(R_\alpha)$ è parallela a r'_α . (Figura 5)

$T_{r\alpha}-(R_\alpha)$ rappresenta la distanza di R_α da π e anche di R; $1-T_{r\alpha}$ ne è l'eccentricità; la r'_β , parallela alla direzione R_{impr} condotta per $F_{n\pi}'$, individua la traccia $T_{r\beta}$ sulla verticale $(r)=(r_\alpha)$; $T_{r\alpha}-T_{r\beta}$ è la quota di R su α ; si può verificare che β , parallelo ad α , contiene R; ribalto intorno a t_β la distanza $2-(V_\beta)=1-(V_\alpha)=F_{n\pi}'-(V)$; sulla retta limite $r_{lim,\beta}$ di β , parallela a t_β ricavo (R_β) , la cui distanza da (R_α) è pari a $T_{r\alpha}-T_{r\beta}=t_\alpha-t_\beta$.

2) i punti di fuga F_r' ed F_s' sono coniugati, poiché rappresentano due direzioni ortogonali, cioè, possiamo dire che, pur essendo (V) ancora incognito, deve risultare che $F_r'-(V)-F_s'$ angolo retto inscritto nella circonferenza "e" di diametro $F_r'-E-F_s'$;

3) su $F_r'-E-F_s'$ la diagonale A-C, di prospettiva A'-C', ha per fuga F_d' , che rappresenta la direzione a 45° con la retta r, come dire, detto φ il predetto angolo in A, e in prospettiva φ' di vertice A', dal vertice (V) le due direzioni (V)- F_r' e (V)- F_d' devono formare un angolo di 45° in (V); si tratta di un angolo alla circonferenza;

4) poiché l'angolo al centro di vertice E è il doppio dell'angolo alla circonferenza, a partire da F_r' si riporta sulla circonferenza "e" l'angolo 2φ , ricavo G e, finalmente, con la G- F_d' individuo sulla "e" la posizione di (V) e in conseguenza la distanza (V)- F_{nr}' ; occorre un ragionamento selettivo profondo ed una presenza attiva del sapere;

5) considero per la retta r il piano β avente la fuga f_β' ortogonale alla f_α' in F_r' e la traccia, ancora incognita, t_β ortogonale alla t_α in T_r , ancora incognita; ribalto β su π ; il centro di proiezione V si porta sulla f_α' in (V) _{F_r'} , essendo $F_r'-(V)=F_r'-(V)_{F_r'}$, mentre la r ruota intorno alla t_β e, ferma restando la T_r , si sovrappone alla t_α ;

6) occorre posizionare la t_α ; proietto da (V) _{F_r'} i vertici A' e D' e predispongo parallela alla f_α' la misura $m_{A-D'}$, per esempio in 1-2, avendo posto 1 sulla (V) _{F_r'} -A'; per il 2 traccio la parallela alla (V) _{F_r'} -A' e ricavo il D* sulla (V) _{F_r'} -D'; per il D* conduco la t_α e individuo A*; risulta A*-D*= m_{A-D} . In letteratura il punto (V) _{F_r'} è definito con enfasi come punto di misura M_r ; la misura al vero è sempre e solo l'esito di un ribaltamento e le vie per determinarla sono infinite; può verificarsi anche che tale punto ricada fuori campo.

Assegnata la prospettiva P'-Q' del segmento P-Q complanare ad A-B-C-D, proietto da F_{nr}' su t_α gli estremi P' e Q' in 3 e 4; sulle ortogonali alla t_α in 3 e 4 proietto da (V) gli estremi P' e Q' in (P) e (Q); il segmento (P)-(Q) è la misura di P-Q; molte altre vie, avendo ricavato t_α , risolvono quest'ultimo e tanti altri problemi di α o ad esso collegati.

Si consideri, altresì, (Figura 7) la restituzione di una figura piana più complessa costituita da un pentagono, quattro vertici del quale sono vertici di un rettangolo; la figura in prospettiva è data in A'-B'-C'-D'-E' e la sua parte, A'-B'-C'-D', rappresenta un rettangolo simile a quello segnato a destra in basso M-N-P-Q.

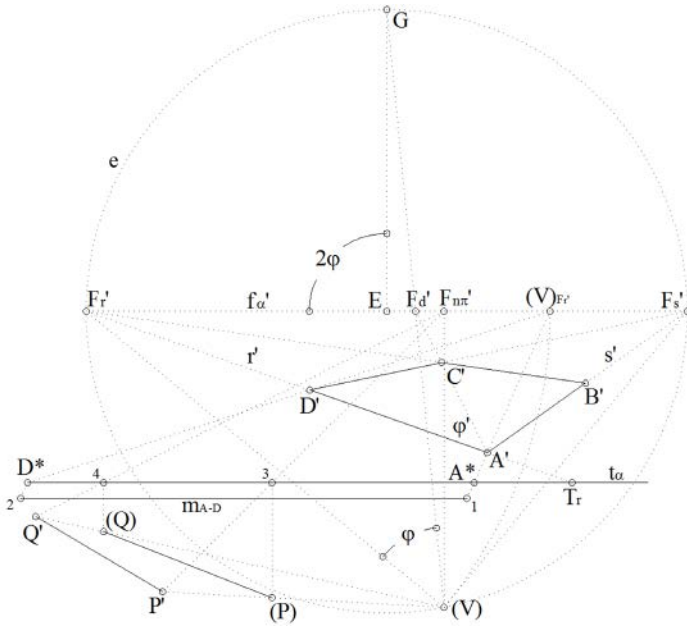


Fig. 6. Restituzione prospettica di un quadrato.

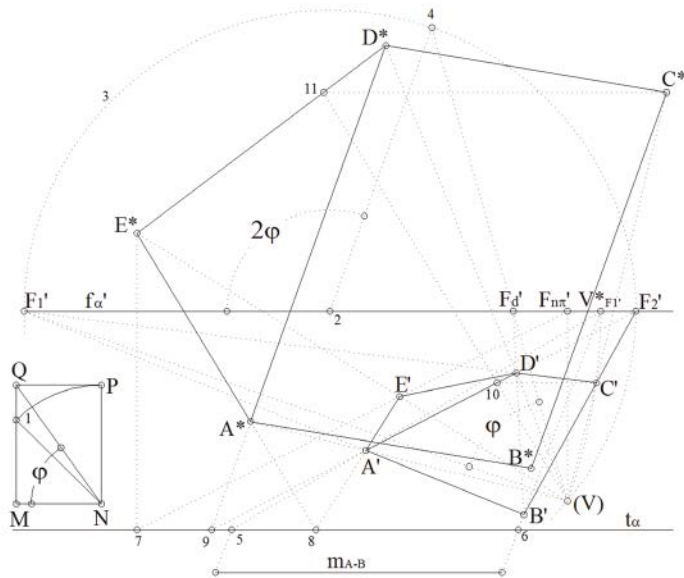


Fig. 7. Restituzione prospettica di un pentagono: applicazione omologica su più lati.

In tale rettangolo il lato più lungo N-P è pari alla diagonale N-1 del quadrato su quello corto M-N; l'angolo grafico fra M-N ed N-Q è φ ; le parallele prospettiche B'-A', C'-D', fuggano in F₁' ed F₂', e sulla F₁'-F₂' = f_α' la diagonale B'-D' fuga in F_d'. E' nota la sequenza: sulla circonferenza 3 di diametro F₁'-F₂' e di centro 2 stacciamo l'arco F₁'-4 dell'angolo al centro pari a 2φ e la 4-F_d' ricava (V) sulla 3 ed F_{nrπ}' su f_α'; riporto la F₁'-(V) in F₁'-V*_{F1}' e da V*_{F1}' si proietta A' e B'; fra tali proiettanti si posizionano in 5 e 6 gli estremi di m_{A-B'} e si ricavano la t_α; m_{A-B} è un dato; se manca si procede ad un libero posizionamento di t_α e si ottiene un esito in similitudine.

Si restituisce il pentagono ribaltando α su π, ruotando intorno a t_α; per ciascun vertice si adottano vie diverse, omologiche; per ottenere E* considero F_{nrπ}'-E'-7, la verticale e la (V)-E'-E*; per A* si considera E'-A'-8, 8-E* e (V)-A'-A*; per D* ci si appoggia su D'-A'-9, 9-A*, (V)-D'-D*; per C* si conduce l'orizzontale, ci si riferisce alla D'-A' in 10, si traccia (V)-10-11 e (V)-C', si interseca l'orizzontale per 11 in C*; per B*, si trasla D*-A* in C*-B*.

La restituzione di un esagono dato in prospettiva richiede a priori l'analisi della sua prospettiva assegnata per confermare che sia prospettiva di un esagono regolare (Figura 8).

Nell'esagono piano e regolare 1-2-3-4-5-6 di centro 7, è bene evidenziare che 1-5-4-2 è un rettangolo e che 1-7-4 è parallela a 6-5 e 2-3; in corrispondenza con il predetto esagono regolare, nella prospettiva assegnata A'-B'-C'-D'-E'-G' si verifica che A'-B'-D'-E' rappresenta il rettangolo 1-2-4-5, A'-D' e B'-E' corrispondono alle diagonali 1-4 e 2-5, la loro intersezione H' si riconosce in 7 e la G'-H'-C' in 6-7-3. F₁' è la fuga di A'-B', di E'-D' e G'-C'; F₂' è la fuga di B'-D' e di A'-E'; se B'-C' e G'-E' si incontrano sulla F₁'-F₂' = f_α', in F_d'; allora si può asserire che la figura prospettica data rappresenta un esagono regolare. In caso diverso si tratta di un esagono irregolare che può essere restituito solo se regge la specifica ipotesi che A'-B'-D'-E' rappresenti un rettangolo; grazie alla validità di questa ipotesi, si procede alla restituzione.

Segue la sequenza: la circonferenza 9 di centro 8, medio di F₁'-F₂'; il riporto in F₁'-10 relativo all'angolo al centro, pari a 120°, doppio dell'angolo alla circonferenza di 60° di vertice (V) sulla 10-F_d'; (V)-F_{nrπ}'; il riporto di F₁'-(V) in F₁'-(V)_{F1}'; inserimento parallelo a f_α' della misura del lato dell'esagono m_{A-B} tra le proiettanti (V)_{F1}'-A' e (V)_{F1}'-B' e posizionamento della traccia t_α'; si procede al ribaltamento dell'esagono. Si restituisce H in (H) tramite F_{nrπ}'-H'-11 e (V)-H'-(H), nonché E in (E)

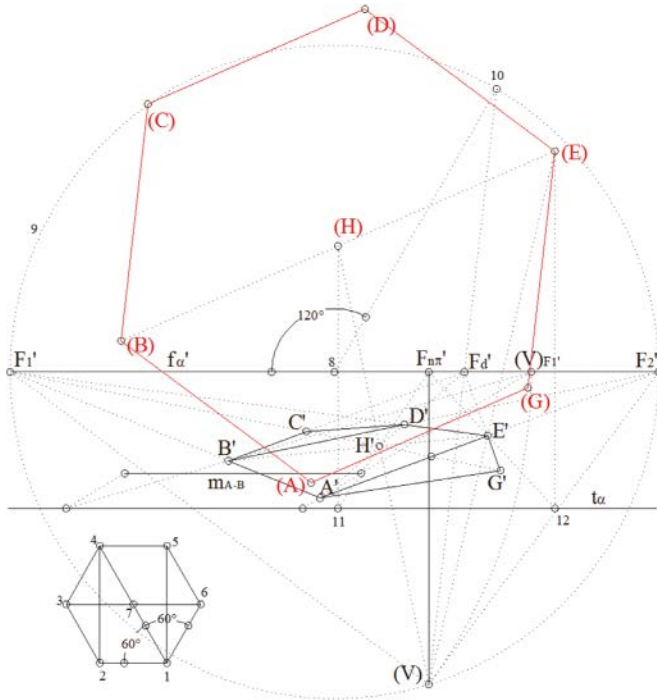


Fig. 8. Restituzione prospettica di un esagono regolare o irregolare.

tramite $F_{n\pi}'-E'-12$ e $(V)-E'-(E)$; si verifica $(H)-(E)=m_{A-B'}$; si ricava (B) per simmetria di (E) rispetto ad (H) ; grazie alla circonferenza circoscritta all'esagono regolare di centro (H) e diametro $(E)-(B)$ si ottengono i vertici (C) , (D) , (G) , (A) ; si verificano gli allineamenti $(V)-G'-(G)$, le simmetrie centrali, le simmetrie ortogonali rispetto alla mediane e alla diagonali, etc.

Un altro caso che si può presentare è quello in cui le fughe dei lati di un quadrato in prospettiva vadano fuori campo (Figura 9). La prospettiva assegnata $A'-B'-C'-D'$ rappresenti, per ipotesi un quadrato di lato $m_{A-B'}$; noto che le fughe $F_1'=AB' \times DC'$ ed $F_2'=AD' \times BC'$ risultano fuori campo; il processo di restituzione è meno difficoltoso se dimezzo il sistema per omotetia di centro C' .

Nel nuovo riferimento, si ha $F_{o1}'=A_0B_0' \times D_0C_0'$ ed $F_{o2}'=A_0D_0' \times B_0C_0'$; $f_{ao}'=F_{o1}'-F_{o2}'$ contiene F_{od}' ; sulla circonferenza 2 di centro 1 e diametro $F_{o1}'-F_{o2}'$ si ricava il 3, essendo $F_{o1}'-1-3=90^\circ$; la $3-F_{od}'$ individua (V_0) sulla 2; si raddoppia $C'-(V_0)$ e si ricava (V) ; si riporta $F_{o1}'-(V_0)$ in $F_{o1}'-(V_0)_{F_{o1}'}$;

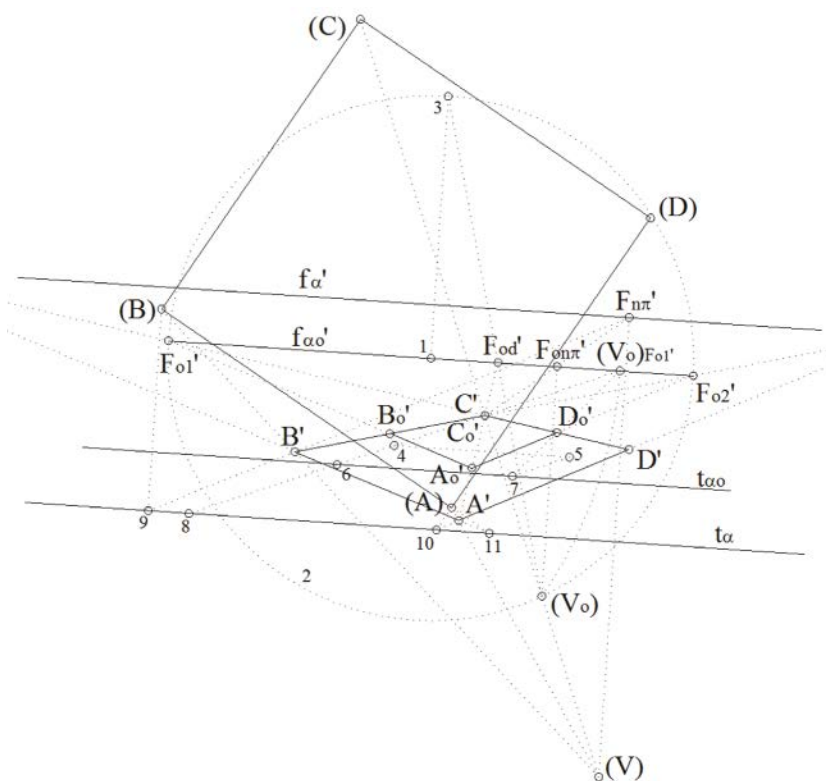


Fig. 9. Restituzione prospettica di un quadrato le cui fughe dei lati sono fuori campo.

si posiziona il $4-5 = m_{A-B}/2$ fra le proiettanti $(V_o)_{F_{o1}'}-C'$, $(V_o)_{F_{o1}'}-D'$ in 6-7, definendo la $t_{\alpha o}$; si raddoppia $C'-6$ in $C'-8$ e per 8 si conduce la t_{α} .

Con l'ortogonale alla f_{α}' per (V) si ricava $F_{n\pi}'$; tramite la $F_{n\pi}'-B'-9$ e la sua ribaltata si ottiene (B) ; tramite la $(V)-A'$, la $B'-A'-11$ e la $11-(B)$ si individua (A) ; si costruisce il quadrato $(A)-(B)-(C)-(D)$ avendone il lato $(A)-(B)$; si osservi l'allineamento con (V) dei vertici in proiezione e dei rispettivi ribaltamenti. Se il dimezzamento non porta le fughe in campo, si considera un terzo, un quarto, etc.; il procedimento non cambia; in ogni caso si possono usare i punti fuori campo, applicando la similitudine, l'omotetia, l'omologia, la simmetria, etc.; possono mancare le conoscenze ma raramente le vie risolutive.

Un altro caso, peraltro molto frequente è quello in cui due lati prospettici sono paralleli. Si consideri la prospettiva $A'-B'-C'-D'$ di un quadrato $A-B-C-D$ dove $A'-B'$ è parallelo a $C'-D'$; sulla scorta delle recenti acquisizioni il punto di fuga F_1' è improprio; la f_{α}' va condotta per F_2'

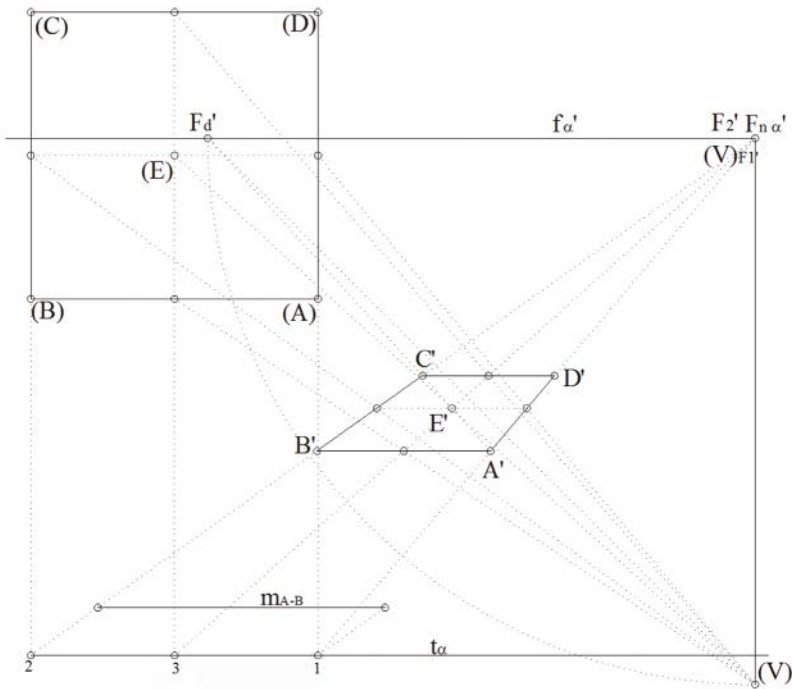


Fig. 10. Restituzione prospettica di un quadrato di cui due lati sono su rette orizzontali del piano.

parallela ad $A'-B'$ e la diagonale $A'-C'$ interseca la f'_α in F_d' (Figura 10). La circonferenza di diametro $F_1'-F_2'$ è la retta verticale condotta per F_2' , il diametro verticale, che delimita l'angolo retto, è improprio, l'estremo che va congiunto con F_d' è pure improprio, la predetta congiungente interseca la circonferenza rettificata, che contiene F_2' , in (V) formandovi con l'orizzontale, che lo congiunge con F_1' improprio, l'angolo di 45° . Dunque, si conduce per F_d' la retta a 45° con la f'_α e si ricava (V) sulla verticale; noto che $F_{n\pi}'$ è sovrapposto con F_2' ; ma anche $(V)_{F_1'}$ risulta sovrapposto a $F_{n\pi}'$; fra le proiettanti $(V)_{F_1'}-A'$, $(V)_{F_1'}-B'$ si rappresenta la parallela alla f'_α la misura del lato del quadrato m_{A-B} individuandone la posizione che definisce la t_α .

Le predette proiettanti si sovrappongono alle prospettive $F_{n\pi}'-C'-B'-2$ e $F_{n\pi}'-D'-A'-1$ dei lati C-B e D-A, le cui ribaltate sono ortogonali in 2 e 1 alla t_α ; per proiezione da (V) dei vertici A' , B' , C' , D' si ottiene la restituzione del quadrato in (A)-(B)-(C)-(D).

Prima di trattare la restituzione di una circonferenza, ritengo utile richiamare (Figura 11) la via risolutiva omologica per costruire la prospettiva di una circonferenza appartenente al piano α , ortogonale o generico rispetto al quadro π . Rispetto a π la circonferenza c appartenente al piano α può trovarsi in posizione generica ma anche particolare, con conseguenze anche rilevanti, sia nelle proprietà che nell'apparenza; è opportuno esaminare i vari casi singolarmente, seguendone gli spostamenti per α ribaltato sul quadro π .

È bene ricordare che (V) è il ribaltamento su π di V intorno alla fuga f'_α del piano proiettante di giacitura α , in letteratura indicato come piano dell'orizzonte, mentre (c_α) è il risultato di trascinamento su π della c_α appartenente ad α , il quale è ribaltato su π per la sua rotazione intorno a t_α , nello stesso verso della precedente. Il centro (E) può appartenere a t_α ; la sua prospettiva è una ellisse; il diametro sulla t_α divide a metà la circonferenza ribaltata (c_α) e risulta unito alla sua prospettiva, la quale però non divide l'ellisse prospettiva a metà. Infatti, il diametro come B-E-A ribaltato in (B)-(E)-(A) è costituito dai raggi B-E ed E-A, ossia (B)-(E) ed (E)-(A); quest'ultimo è più lontano da V; in prospettiva, E'-A' risulta più corta di B'-E'; il punto E' non è il punto medio di B'-E'-A' e non è, il centro dell'ellisse. Tale centro è, invece, il medio di B'-A', come G'; il punto G' è prospettiva di (G) sul diametro (B)-(E)-(A) e non è il centro della circonferenza; in conclusione la prospettiva del centro della circonferenza non è il centro dell'ellisse, prospettiva della circonferenza. Solo il diametro (B)-(E)-(A) ortogonale alla t_α nell'ellisse prospettiva resta diametro; tutti gli altri diametri della circonferenza, in prospettiva, non risultano diametri dell'ellisse prospettiva, bensì, corde; i diametri di questa sono prospettive di corde della circonferenza, passanti per (G). Per una prefissata posizione di (E), in campo o fuori campo, in funzione della dimensione del raggio, la circonferenza ribaltata può ricadere, in parte o del tutto fuori campo. Quando il raggio (E)-(B) è tale che (B) appartiene alla retta limite di α , un punto della conica prospettiva risulta improprio; la prospettiva di tale circonferenza è una parabola. Quando (E)-(B) interseca la retta limite, i due punti della circonferenza, ad essa comuni, hanno prospettiva impropria; la prospettiva di tale circonferenza è una iperbole.

Facciamo attenzione: (E), proiezione ribaltata di E, sovrapposta alla f'_α , prospettiva della retta impropria di α , non appartiene alla f'_α ; se si allontana (E) sulla 6-(E), la circonferenza ribaltata va fuori campo; una

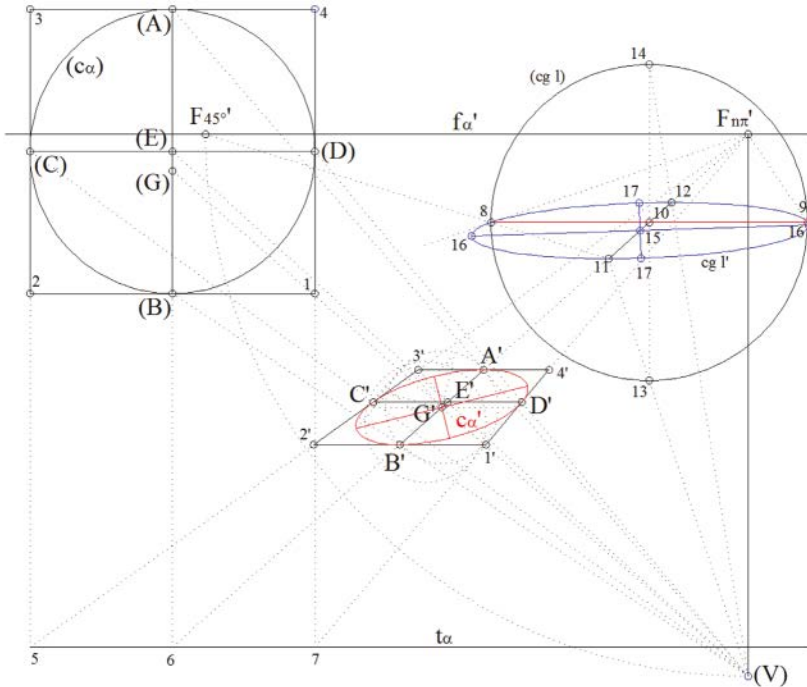


Fig. 11. Richiami di prospettiva per la costruzione di una circonferenza su un piano α .

via risolutiva, che utilizzi la presenza in campo della circonferenza, non è più utilizzabile.

La conica prospettiva può ricavarsi per punti, col metodo proiettivo dalla prospettiva del quadrato circoscritto, può ricavarsi per punti utilizzando l'omologia avente il centro in (V), l'asse in t_α ed elementi corrispondenti (A)-6, 6-A'. si potrebbe anche ottenere applicando l'omologia affine obliqua fra la costruenda conica e la circonferenza avente come asse il diametro B'-A'; a C'-E' corrisponde il raggio per E' ortogonale a B'-A'; il centro improprio dell'omologia unisce C' con l'estremo del predetto raggio. Per G' si ricava il diametro della conica parallelo a C'-D'; disponendo di due diametri coniugati, si ricava omologicamente, per punti, la conica; dalla coppia derivano gli assi e si procede per omologia, o anche con autocad, impiegando gli assi.

Quando si vuole rappresentare la prospettiva di una circonferenza grande e lontana, come ad esempio la (cgl), si può riportare il diametro fugante su $F_{n\pi}'$ di f_α' , 11-10-12, e ricavare la corda coniugata 8-10-9, sapendo la sua direzione e usando l'allineamento 11-8- F_{45°' ; si procede

come illustrato in figura, ottenendo la cgl'. La proiezione da $F_{n\pi}'$ della semicorda 8-10 su t_α ci fornisce il raggio della circonferenza; sulla retta a metà fra t_α ed f_α' ricavo la metà del raggio; la distanza reale ribaltata 6-(K), restituzione prospettica del 6-10 è definita dalla (V)-10-(K). Essendo (K) fuori campo, opero per similitudine; la (V)-10-(K) interseca la t_α in 18 (non segnato); considero 6-19=(6-18): n e considero per 19 la parallela alla (V)-10-(K) fino ad incontrare la 6-(K) nel punto $(K)_{1n}$ in campo; la lunghezza relativa alla 6-10 è data da n volte $6-(K)_{1n}$. Nel sistema prospettico definito da (V)- $F_{n\pi}'$ e dal piano $\alpha(t_\alpha, f_\alpha')$ si inserisce l'ellisse cgl' come prospettiva di una circonferenza di α ; si verifica senza ribaltare; le tangenti parallele a f_α' individuano due punti sull'ellisse. La loro congiungente deve fugare in $F_{n\pi}'$; la loro distanza è il diametro dell'ellisse; si divide prospetticamente e si ottiene la prospettiva del centro; se ne verifica l'allineamento con F_{45°' degli estremi del diametro e degli estremi della corda condotta per la prospettiva del centro, parallela a f_α' ; si verifica, altresì, che le tangenti condotte per $F_{n\pi}'$ abbiano per contatto i predetti estremi della corda.

Se si raggiunge la conferma di tutte le condizioni richieste, allora l'ellisse è prospettiva della circonferenza; se E' si sposta lungo la 6- $F_{n\pi}'$ si osserva la variabilità delle direzioni assiali; una verifica, anche ad occhio, della inammissibile direzione degli assi, può fare escludere la precedente conclusione, prima di iniziare le operazioni descritte.

L'ellisse può trovarsi a sinistra della (V)- $F_{n\pi}'$ o a destra modificandosi per simmetria; può trovarsi tangente la f_α' e il punto di contatto è la prospettiva di un punto improprio di α ; l'ellisse, allora, non può essere prospettiva di una circonferenza, bensì di una parabola di α . L'ellisse può presentarsi incidente la f_α' in due punti, prospettive di due punti impropri; dunque, non si tratta di prospettiva di una circonferenza ma di una iperbole. L'ellisse può apparire al di sopra di f_α' ; fatte salve le verifiche positive di tutte le condizioni già illustrate, essa è prospettiva di una circonferenza di α posta alle spalle di V e quindi distante dalla t_α più della retta limite di α .

Un richiamo: alla circonferenza di α che sia tangente la retta limite corrisponde in prospettiva una parabola tangente la f_α' ; viceversa, data una parabola tangente la f_α' , non è certo che sia prospettiva di una circonferenza; occorre verificarne il possesso di tutte le qualità geometriche. Analogamente, alla circonferenza di α intersecante la retta limite corrisponde in prospettiva una iperbole secante la f_α' ; viceversa, data una iperbole intersecante la f_α' , non è certo che sia prospettiva di una

circonferenza; occorre verificarne il possesso di tutte le qualità geometriche indispensabili perché lo sia.

Se il punto (E) appare sovrapposto alla (V)- F_{nr}' , il diametro dell'ellisse prospettiva, ortogonale alla t_α è uno dei due assi; viceversa, una ellisse che presenti questa proprietà è prospettiva di una circonferenza solo dopo l'accertamento di tutte le qualità geometriche indispensabili perché lo sia.

Se la prospettiva di una circonferenza di α è una ellisse, quella della semicirconferenza non è mezza ellisse, se il diametro che dimezza la circonferenza non è quello ortogonale a t_α , la cui prospettiva contiene il centro dell'ellisse. Si può ricavare l'intera ellisse se si dispone della sua metà, ottenendo l'intera per simmetria secondo la direzione coniugata; per esempio, dalla $B'-C'-A'$ ricavo l'altra metà per simmetria obliqua nella direzione $C'-E'$. Se si assume come nota la $C'-A'-D'$ non si potrà ottenere l'intera ellisse per simmetria di direzione $A'-E'$, poiché l'arco noto è minore della mezza ellisse; viceversa, ciò sarà possibile se è noto l'arco $C'-B'-D'$, maggiore della mezza ellisse.

Più avanti riprenderò l'approccio e l'approfondimento delle relazioni fra la circonferenza e la retta limite o fra la conica prospettiva e

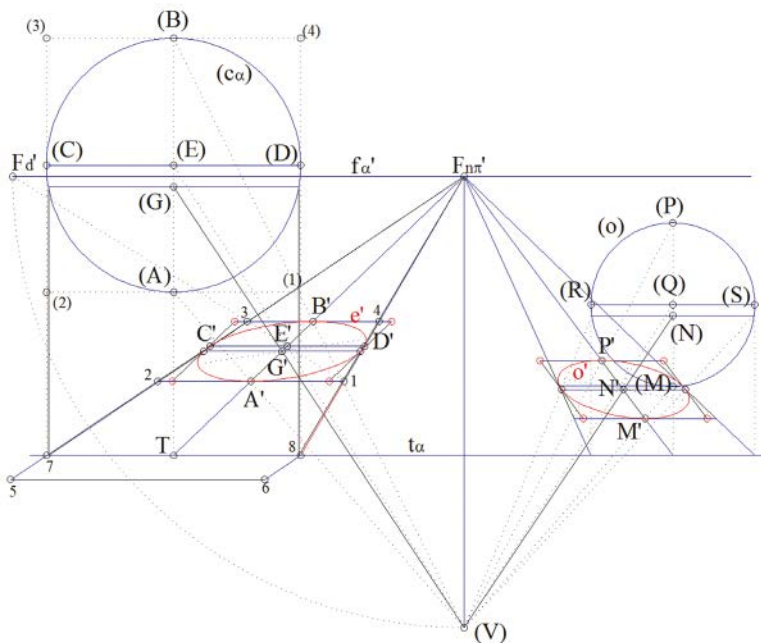


Fig. 12. Restituzione prospettiva di una circonferenza su un piano.

la fuga f'_α ; sposto, adesso l'attenzione e l'impegno sul se e sul come possa procedere alla restituzione di una circonferenza, di cui sia data la prospettiva ellittica.

Sia assegnata l'ellisse e' , figura piana, prospettiva di una circonferenza c_α ; questo è già un primo dato; l'appartenenza ad un piano α ortogonale al quadro π e orizzontale, è un secondo dato (Figura 12).

Si prendano due corde orizzontali sulla e' ; il segmento, che contiene i loro punti medi, ha sulla e' gli estremi, A', B' ; le tangenti in A' e B' sono orizzontali; $A'-B'$ è un diametro della e' e il suo medio G' è il centro della e' ma non è prospettiva del centro E della c_α . Per posizionare E' su $A'-B'$ si deve disporre di un terzo dato, la scelta su $A'-B'$ di $F'_{n\pi}$; per esso si conducano l'orizzontale f'_α ; con le tangenti inviate da $F'_{n\pi}$ si individuano su e' la corda orizzontale $C'-E'-D'$. Le predette tangenti intersecano quelle orizzontali, relative agli estremi A', B' , formando un trapezio 1-2-3-4, prospettiva del quadrato circoscritto alla c_α , avente i lati paralleli e ortogonali alla t'_α ; in figura si legge in posizione ribaltata, (1)-(2)-(3)-(4) circoscritto alla (c_α). La diagonale 1-3 interseca il diametro $A'-G'-B'$ in E' e la sua retta interseca la f'_α in F'_d , fuga della direzione a 45° ; si riporta la $F'_{n\pi}-F'_d$ sulla verticale per $F'_{n\pi}$ e si ottiene la $F'_{n\pi}-(V)$, ribaltamento della distanza di V da π .

Fra le rette proiettanti $F'_{n\pi}-C'$ ed $F'_{n\pi}-D'$, e parallela a f'_α , in 7-8, si rappresenta la misura 5-6 del diametro della circonferenza; questa è un quarto dato; si determina, così, la t'_α ; alla $F'_{n\pi}-E'-T$ corrisponde la retta per T , ortogonale alla t'_α ; la $(V)-E'$ vi definisce (E), centro della (c_α). Tutto dipende dalla scelta di $F'_{n\pi}$ su $A'-G'-B'$; nota la prospettiva trapezia 1-2-3-4 del quadrato circoscritto ad e' , alternativa del terzo dato, il punto di convergenza di 1-4 con 2-3 definisce $F'_{n\pi}$ su $A'-G'-B'$.

In genere, la e' fa parte di un complesso di elementi geometrici, che permettono risoluzione della restituzione, fornendo dati meno aleatori; per esempio, è data, complanare alla e' , l'ellisse o' di centro N' come prospettiva della circonferenza o di centro Q .

In tal caso il diametro $M'-N'-P'$ corrisponde ad $A'-G'-B'$ e interseca quest'ultimo, individuandovi $F'_{n\pi}$; si elimina un'arbitrarietà invalidante; si procede, dunque, come per la e' , fino a ricavare, avendo già ottenuta la t'_α , il diametro (R)-(Q)-(S) relativo alla (o).

Risultano eliminate le precedenti scelte; i dati sono le due ellissi prospettive di due circonferenze complanari e il diametro di una di esse; ricostruito il sistema proiettivo del piano sul quadro, mediante ribaltamento si possono restituire punti e figure di esso.

Restituzione di un volume poliedrico, nota la sua prospettiva

La prospettiva di un cubo (Figura 13) ha la base superiore a vista di vertici 1-2-3-4 e quella inferiore di vertici 5-6-7 a vista e 8 nascosto; gli spigoli 2-7, 1-6, 4-5, fra le basi, appaiono paralleli; ciò indica che sono paralleli a π ; allora, le basi appartengono alla giacitura ortogonale a π , cioè la fuga f'_α deve contenere $F_{n\pi}$; inoltre, gli spigoli appaiono verticali, per cui la fuga f'_α deve essere orizzontale. Le rette per 4-3, 1-2, 6-7, fuggano in F'_1 e quelle per 2-3, 1-4, 6-5, fuggano in F'_2 ; la $f'_\alpha = F'_1 - F'_2$ è orizzontale e contiene la fuga F'_d della diagonale 1-3; la F'_d intercetta in 8 la verticale per il 3.

Sulla circonferenza di diametro $F'_1 - 9 - F'_2$ si consideri l'angolo al centro $F'_1 - 9 - 10 = 90^\circ$; la $10 - F'_d$ individua (V), da cui segue $F_{n\pi}$ sulla f'_α , nonché F_{45° ; si ribalta $F'_1 - (V)$ in $F_{(F1)'} - (V)$ ed $F'_2 - (V)$ in $F_{(F2)'} - (V)$.

Siano considerate le proiettanti $F_{(F1)'} - 6$ e $F_{(F1)'} - 7$; fra loro, parallela a f'_α , si inserisce la dimensione data del lato del cubo e la ricavo in 11-12; la t_α contiene la 11-12; se si vuole, si può verificare il corretto posizionamento di t_α , proiettando il 6-5 da $F_{(F2)}'$ sulla t_α e ottenendovi 13-14=11-12.

Oppure, si inserisce la dimensione data del lato del cubo fra le proiettanti da un qualsiasi punto di fuga della f'_α , per esempio, anche da $F_{(F1)}'$ dei vertici 2 e 7, ricavandola in 15-11; per 11 si conduce la t_α parallela alla f'_α ; risulta, ancora, 11-15=11-12.

Si osserva che, assegnata la prospettiva di un parallelepipedo di base quadrata 1-2-3-4 e di dato lato, dopo avere posizionato t_α , la 11-15 ne individuerebbe l'altezza; ed ancora, assegnata la prospettiva di un parallelepipedo di base rettangolare, di cui siano noti la dimensione di un lato e il rapporto fra i lati, e, risolta l'ubicazione della t_α , la 11-15 darebbe l'altezza del volume.

A questo punto, il ribaltamento di α su π consente la restituzione della base, ovvero delle relazioni geometriche con α , di qualsiasi volume, identificato dai dati metrici e angolari indispensabili; lo spazio è nostro.

Attenzione: asserire la natura di un volume o di una figura deve essere puntualmente vagliata nella sua preventiva attendibilità, che non può essere smentita da direzioni e dimensioni improbabili o indubbiamente inaccettabili.

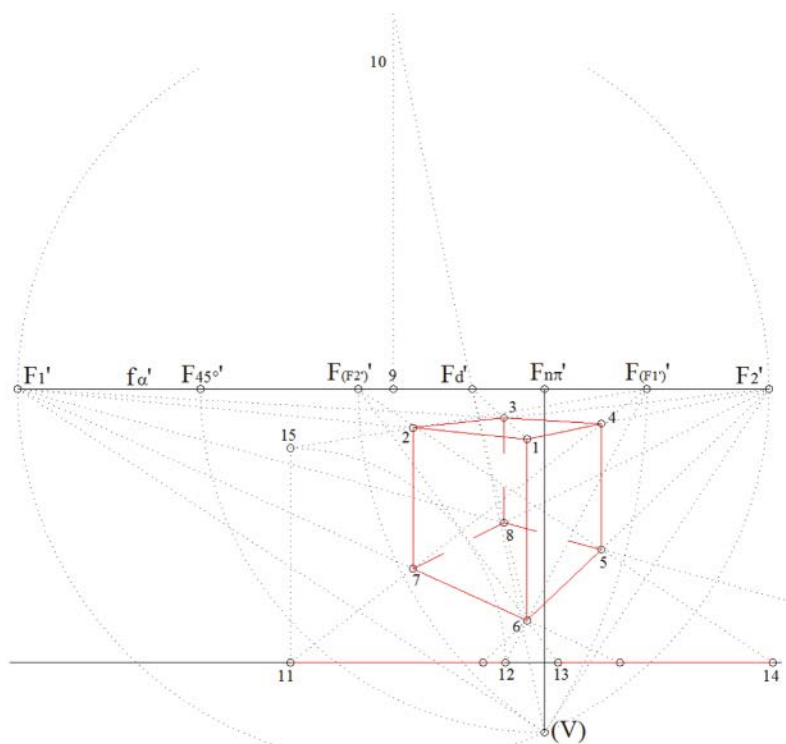


Fig. 13. Prospettiva di un cubo poggiato su un piano α ortogonale a π .

Per esempio, la disattesa convergenza fra 2-3, 1-4, 6-5, non è appropriata alla prospettiva di un cubo; se ne esclude, perciò, ogni attività di restituzione; la mancata perpendicolarità fra f'_α e la direzione comune agli spigoli come 1-6, nega la pretesa natura cubica del volume rappresentato; occorre tanta riflessione critica precauzionale.

Ci occuperemo, adesso (Figura 14), della restituzione di una piramide dalla sua prospettiva, che supponiamo costruita correttamente ed efficacemente corredata di dati sufficienti a risolvere il problema.

Vediamo che si tratta di una cavità piramidale con il vertice in giù; sappiamo che la piramide è retta, l'altezza è verticale; la base è orizzontale ed a stella dodecagonale; è un dato che la base è regolare e perciò inscritibile in un esagono regolare, di cui è nota la misura del lato.

Si osserva che, nel rettangolo 1-2-3-4, in prospettiva, i lati 1-2 e 3-4 sono paralleli, per cui 2-3 e 1-4 fuggano in $F_{n\pi}'$; la fuga f'_α è parallela a 1-2 e contiene $F_{n\pi}'$; la diagonale 1-3 interseca in (V) l'ortogonale ad f'_α condotta per $F_{n\pi}'$.

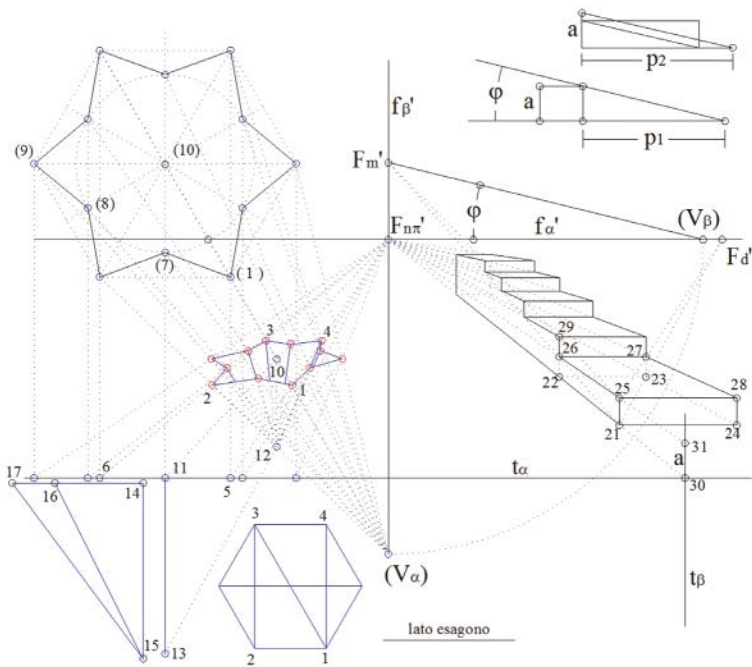


Fig. 14. Restituzione prospettica di una cavità piramidale e di una scalinata.

Fra le proiettanti $F_{n\pi}'-1$ ed $F_{n\pi}'-2$ si inserisce, parallela a 1-2, la misura del lato in 5-6 e si posiziona la t_α ; da 5 si considera l'ortogonale a t_α , intersecando la (V)-1 in (1); si ripete per tutti i vertici e si ottiene la restituzione della base. Per verificare la regolarità dell'esagono è necessario fare delle considerazioni; nella stella si osserva che (1)-(7) è la restituzione del lato della base, di misura costante per tutti i 12 lati; si osserva, altresì, che (1)-(7)-(8)-(9) non sono allineati; la stella non nasce da due triangoli equilateri; è davvero sorprendente ottenere tante informazioni semplicemente da un'analisi geometrica della prospettiva.

Per il 10, prospettiva del centro della stella, si consideri la $F_{n\pi}'-10-11$ e sulla verticale la $F_{n\pi}'-12$ si individui 11-13 restituzione dell'altezza della piramide; si riporti questa in 14-15, la (10)-(8) in 14-16, la (10)-(9) in 14-17; gli spigoli della piramide risultano restituiti in 15-16 e 15-17.

Ritengo importante sottolineare, a posteriori, che la risoluzione del problema non ha offerto le temute difficoltà; si poteva assegnare la misura dell'altezza in alternativa di quella del lato dell'esagono. Oppure si poteva disporre della valida misura della diagonale del rettangolo,

nonché diametro della circonferenza circoscritta all'esagono regolare; il rapporto fra lato minore del rettangolo 1-2 e la doppia apotema 2-3 è costante; l'angolo in 1 è di 60° ; ancora in alternativa può assegnarsi la dimensione di uno degli spigoli.

Ritengo fondamentale per lo studioso spaziare nelle diverse ipotesi possibili e verificare di saperne venire a capo come costruttiva prova del crescente dominio della conoscenza geometrica relativa alla problematica della restituzione prospettica.

Nella stessa figura a destra, è assegnata la prospettiva di una scala; le alzate, come 21-25-28-24, sono parallele al quadro π , sono rettangolari, ortogonali al piano α della base 21-22-23-24 della pedata 25-26-27-28; in larghezza, le alzate sono comprese fra due piani verticali.

Si osservi che le montanti 21-26 e 25-29 fugano in F_m' ; sulla verticale f_β' per F_m' la 21-22 e la 25-26 fugano in $F_{n\pi}'$; la 21-22 e la 24-23 fugano pure in $F_{n\pi}'$; le 21-23 e 25-27 fugano in F_d' sull'orizzontale condotta per $F_{n\pi}'$; le due fughe definiscono la f_α' . Della scala è indispensabile conoscere una delle dimensioni reali corrispondenti all'alzata $a=21-25$, o alla profondità $p_1=21-22$, o alla larghezza $p_2=21-24$, nonché il rapporto angolare fra alzata e pedata, ovvero l'angolo φ . Se è nota la "a", se ne inserisce il valore fra le proiettanti $F_{n\pi}'-21$ ed $F_{n\pi}'-25$ e si determina il 30-31, che è la t_β ; la $F_{n\pi}'-30$ appartiene a β e ad α e 30 è la traccia; per il 30 si traccia la t_α ; con la retta, che formi con f_α' l'angolo φ , condotta per F_m' , si individua (V_β) sulla f_α' ; si riporta $F_{n\pi}'-(V_\beta)$ in $F_{n\pi}'-(V_\alpha)$. Se è nota la p_1 , tramite l'angolo φ si ricava il valore della 21-25 e si procede come prima; se è nota la p_2 , per similitudine si ricava 21-25 e si procede come prima; dunque, si può operare la restituzione.

Con il ribaltamento su π di α si ottiene la pianta e di β il profilo dei gradini; può procedere non solo per la restituzione della scala, ma per tutto ciò che sta su α , su β , e nello spazio, essendone derivabili, senza dubbi od ombre, i rapporti geometrici con gli elementi noti e disponibili.

Sapendo, per esempio, che la base stellare della piramide adiacente alla scala, nella stessa immagine, è appartenente ad α , senza chiedere alcun dato che la riguardi, procedo alla sua restituzione, ricavandone gli stessi risultati. Viceversa, avendo ricavato il sistema di restituzione per la piramide, grazie ai dati ad essa relativi, posso ottenere la completa restituzione della scala, senza dare alcunchè di essa, con risultati identici.

Per la restituzione prospettica di uno spazio comunque popolato, disponendo della sua prospettiva, occorrono i dati validi e sufficienti per la restituzione di un solo elemento del complesso, ben individuato.

Occorre essere attendibili nell'asserire vera forma e vera dimensione; all'analisi esperta, esse devono risultare prive di incongruenze geometriche, chiaramente invalidanti il successivo processo di restituzione.

Può verificarsi, per esempio, l'indicazione di una forma piana quadrata o circolare e la disponibilità di elementi noti di entrambe; se i risultati, procedendo dall'uno o dall'altro, non portano allo stesso sistema di restituzione, una delle due è errata. L'immagine è stata costruita sbagliata oppure, non potendo imputare a ciò le ambiguità invalidanti, sono non verificate, e perciò inaccettabili, le ipotesi che affermano la natura della forma o forniscono dati dimensionali inesatti.

La sovrabbondanza di dati non esclude che ne risulti l'insufficienza di quelli appropriati; se sono soddisfatte le condizioni di validità del minimo numero di dati, quelli in più possono rivelarsi esatti o inaccettabili; è preferibile attenersi al minimo, purchè esatto.

Dovunque e comunque si estendano le operazioni risolutive ai componenti del gruppo di elementi indipendenti nell'immagine su cui lavoriamo, i risultati della restituzione non possono e non devono cambiare, confermando che gli esuberi non sono nocivi, se sono corretti, reali, coerenti, veri. È aprioristicamente impossibile procedere con assoluta certezza allo scarto di quelli sicuramente fuorvianti; occorre una notevole esperienza, un'imprescindibile capacità di attenta e consapevole osservazione, rispondente e collimante, condizionata e consequenziale.

Restituzione di un cubo

Prima di impostare un procedimento di restituzione prospettica, ritengo opportuno richiamare negli aspetti teorici risolutivi la costruzione geometrica dell'immagine, per esempio, quando un cubo non poggia la base su un piano ortogonale al quadro, bensì su α , formante con π un angolo compreso fra 0° e 90° (Figura 15).

Cambia qualcosa; per esempio, i quattro spigoli di collegamento fra le due basi sono paralleli fra loro e ortogonali alla giacitura delle basi; se questa è ortogonale a π , i predetti spigoli risultano paralleli a π e in

prospettiva appaiono paralleli fra loro, poiché il comune punto di fuga è improprio.

Se la giacitura non è ortogonale a π , le rette dei quattro spigoli hanno il comune punto di fuga in un punto proprio $F_{n\alpha}'$; le relative prospettive appaiono convergenti in esso; la sua posizione va determinata e, in genere, capita fuori campo.

Si posizioni su π il punto di fuga $F_{n\pi}'$ delle ortogonali a π e la distanza ribaltata in $F_{n\pi}'$ -(V) fra V e π ; sia assegnata la retta di fuga f_{α}' a una certa distanza da $F_{n\pi}'$, dal quale si conduce l'ortogonale, incidendo la f_{α}' in $F_{p\alpha}'$.

L'angolo $\varphi = (V) - F_{p\alpha}' - F_{n\pi}'$ indica l'inclinazione di α rispetto a π , ed $F_{p\alpha}'$ è la fuga delle rette di α , aventi la direzione di massima pendenza di α su π ; quanto più $F_{p\alpha}'$ si avvicina a $F_{n\pi}'$, tanto più la giacitura scelta per α si avvicina all'ortogonalità di α rispetto a π ; quanto più se ne allontana, tanto più α tende al parallelismo con π . L'ortogonale alla $F_{p\alpha}'$ -(V) in (V) interseca la $F_{p\alpha}' - F_{n\pi}'$ in $F_{n\alpha}'$ fuga delle rette dello spazio ortogonali ad α e punto di convergenza dei spigoli sopra considerati; quanto più piccolo è $F_{p\alpha}' - F_{n\pi}'$, tanto più grande è $F_{n\pi}' - F_{n\alpha}'$. Secondo la scelta dimensionale di $F_{n\pi}'$ -(V) e di $F_{p\alpha}' - F_{n\pi}'$, a parità di φ , i punti (V), $F_{p\alpha}'$, $F_{n\alpha}'$, possono uscire dal campo; a tutto c'è rimedio: si può fare a meno della loro posizione fuori campo, prestigiosamente.

Questo è il motivo per il richiamo, che qui si svolge; tutti vogliono i punti di fuga in campo e se questo è poco esteso, le scelte dei dati sono fatte in vista della forzatura, ottenendo immagini brutte, aberrate, sgradevoli, indicative di atteggiamenti succubi di limitatezze e condizionamenti inammissibili.

A sinistra è stato rappresentato un cubo con un lato della base inferiore 1-2 sulla t_{α} ; il quadrato di base ribaltato è 1-2-3-4; il lato 1-4 si proietta da (V_{α}) su 1- $F_{p\alpha}'$ in 1-5; il 2-3 si trova sul 2- $F_{p\alpha}'$ in 2-6, conducendo per il 5 la parallela alla t_{α} . Si considerino per 1, 2, 6, 5, le proiettanti da $F_{n\alpha}'$; ribaltata $F_{n\alpha}'$ -(V) in $F_{n\alpha}'$ -(V) $_{F_{n\alpha}'}$ in 1-4 resta individuata l'altezza del cubo parallela alla $F_{n\alpha}'$ -(V) $_{F_{n\alpha}'}$; con la $(V)_{F_{n\alpha}'}$ -4 si ricava sulla $F_{n\alpha}'$ -1 il 7; si procede e si ottengono i vertici 8, 9, 10; la prospettiva del cubo si apprezza per la sua inaccettabile aberrazione formale, assolutamente evitabile.

Per ottenere una visione serena del cubo, si può allontanare il volume, come si vede in campo; sono stati traslati gli spigoli della base superiore e di quella inferiore, utilizzando $F_{p\alpha}'$, $F_{n\alpha}'$, $F_{45^{\circ}}$; l'immagine si rimpicciolisce prospetticamente e non per omotetia, la quale conserverebbe le molto pronunziate deformazioni.

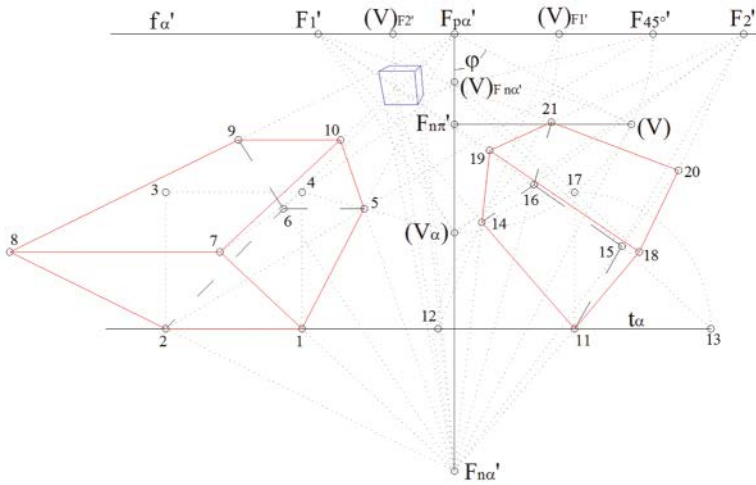


Fig. 15. Restituzione di un punto con (V) fuori campo.

Il risultato, tuttavia, non sembra soddisfare l'attesa di una dimensione di facile lettura; bisogna impiegare una distanza molto più grande, che a parità di φ implica il fuori campo delle fughe $F_{p\alpha}'$, F_{na}' , F_{45°' .

Impariamo a costruire con punti sostitutivi degli indisponibili, con vie alternative per risultati validi e soddisfacenti; l'esperienza renderà minimo l'apparentemente maggiore impegno iniziale, restituendo la gratificazione unitamente alla consapevolezza delle proprie capacità e libertà di proposte da approfondire.

Ancora un altro rimando è necessario fare per potere risolvere i problemi che seguono nelle pagine successive: congiungere un punto che si trova in campo con uno fuori campo (Figura 16). In figura, a sinistra in basso, si mostra come risolvere il problema di unire un punto 5 in campo con il punto 2 fuori campo, individuabile sulla retta 0-1 a distanza da 0 pari a 10 volte 0-1; occorre una seconda retta, che contenga con certezza il punto 2.

A destra è stato considerato lo stesso volume cubico diversamente disposto; il vertice 11 è sulla t_{α} ; scelta la $11-F_1'$, riporto $F_{p\alpha}'-(V)$ in $F_{p\alpha}'-(V_{\alpha})$; l'ortogonale alla $F_1'-(V_{\alpha})$ per (V_{α}) interseca la f_{α}' in F_2' , coniugato ad F_1' ; occorre ricavare le prospettive dei due lati del quadrato di base, aventi in comune il vertice 11. Si ribalta $F_1'-(V_{\alpha})$ in $F_1'-(V)_{F_1'}$ ed $F_2'-(V_{\alpha})$ in $F_2'-(V)_{F_2'}$; si stabilisce che $11-12=11-13=1-2$; le $(V)_{F_1'}-12$ e $(V)_{F_2'}-13$ individuano su $11-F_1'$ e $11-F_2'$ i vertici 14 e 15; le $14-F_2'$ e $15-F_1'$ definiscono il vertice 16, completando la prospettiva della base inferiore.

