

Studi sull'accuratezza numerica di un solutore meshfree per l'approssimazione di campi

Guido Ala¹, Elisa Francomano², Marta Paliaga²

DEIM¹, DICGIM²

Università degli Studi di Palermo

Palermo (Italia)

L'attività di ricerca è stata finalizzata allo studio di metodologie numeriche avanzate senza reticolazioni per l'approssimazione di funzioni e sue derivate. In particolare si sono condotti studi sull'accuratezza e convergenza del metodo Smoothed Particle Hydrodynamics riferendosi a campionamenti regolari e non. Il metodo introdotto da Lucy e Monaghan [1,2] utilizza :

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}; h) d\Omega$$

e procede approssimando l' integrale sostituendo alla delta di Dirac una funzione kernel:

$$f^{(h)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') K(\mathbf{x}' - \mathbf{x}; h) d\Omega$$

La discretizzazione spaziale si ottiene utilizzando le informazioni note appartenenti al supporto della funzione kernel centrata nel punto di valutazione:

$$f^{(h)}(\mathbf{x}) \cong \sum_{j=1}^N f(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}; h) K(\mathbf{x}' - \mathbf{x}; h) \Delta\Omega_j$$

Se la funzione kernel soddisfa opportune condizioni, i.e. il kernel è partizione dell'unità, simmetrico, a supporto compatto, l'approssimazione integrale è accurata del secondo ordine in punti interni al dominio di integrazione e meno accurata ai bordi, o in presenza di dati molto irregolari. L'accuratezza del può essere aumentata imponendo le condizioni di riproducibilità polinomiale, o *consistenza*.

Tali condizioni anche se soddisfatte nel continuo non è detto che lo siano nel discreto: può accadere ad esempio che la stessa condizione $\int_{\Omega} K(\mathbf{x}' - \mathbf{x}; h) d\Omega = 1$ non sia verificata procedendo alla discretizzazione spaziale. Per ovviare alla perdita di accuratezza nell'approssimazione, si possono adottare opportune metodologie correttive.

Nel lavoro recentemente condotto si è proceduto con la messa a punto di una metodologia che permette di imporre la consistenza di ordine k nel discreto senza operare trasformazioni sulla funzione kernel e consentendo di ottenere simultaneamente correzioni sulla funzione e derivate di ordine k . A partire dallo sviluppo in serie di Taylor di una funzione, proiettando con la funzione kernel e le sue derivate ed integrando si perviene alla valutazione della funzione e delle sue derivate risolvendo un sistema lineare. Precisamente:

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}') D^r K(\mathbf{x}' - \mathbf{x}; h) d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{\alpha \geq 0} D^{\alpha} f(\mathbf{x}) \frac{(\mathbf{x}' - \mathbf{x})^{\alpha}}{\alpha!} D^r K(\mathbf{x}' - \mathbf{x}; h) d\Omega \quad r \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^N f(\mathbf{x}_j) D^r K(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}; h) \Delta\Omega_j = \sum_{j=1}^N \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x})^{\alpha}}{\alpha!} D^r K(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}; h) \Delta\Omega_j \quad r \geq 0$$

Arrestando lo sviluppo all'ordine k si ottiene il sistema $\mathbf{A}\mathbf{b}=\mathbf{f}$ i cui elementi sono di seguito riportati:

$$(A)_{r\alpha} = \sum_{j=1}^N \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x})^{\alpha}}{\alpha!} D^r K(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}; h) \Delta\Omega_j \quad r = 0, 1, \dots, k$$

e del termine noto e incognito:

$$(b)_r = \sum_{j=1}^N f(\mathbf{x}_j) D^r K(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}; h) \Delta\Omega_j \quad (f)_{\alpha} = D^{\alpha} f(\mathbf{x}) \quad r, \alpha = 0, 1, \dots, k$$

e la colonna α - th può essere scritta come segue:

$$\begin{pmatrix} K(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}; h) & K(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}; h) & \dots & K(\mathbf{x}_N - \mathbf{x}; h) \\ DK(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}; h) & DK(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}; h) & \dots & DK(\mathbf{x}_N - \mathbf{x}; h) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D^k K(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}; h) & D^k K(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}; h) & \dots & D^k K(\mathbf{x}_N - \mathbf{x}; h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\Omega_1 & & & \\ & \Delta\Omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Delta\Omega_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x})^{\alpha}}{\alpha!} \\ \frac{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x})^{\alpha}}{\alpha!} \\ \vdots \\ \frac{(\mathbf{x}_N - \mathbf{x})^{\alpha}}{\alpha!} \end{pmatrix}$$

Simulazioni numeriche su alcuni casi test hanno mostrato la validità dell'approccio fornendo indicazioni significative riguardo la convergenza riferita sia a distribuzioni regolare che irregolari delle informazioni, operando con funzioni kernel con ampiezza di supporto fisso o variabile in funzione della distribuzione spaziale in uso.

Reference

1. L.B. Lucy, A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, *J. As&on.* 82, 1013-1024, (1977). ^[1]_{SEP}
2. J.J. Monaghan, An introduction to SPH, *Comput. Phys. Commun.* 48, 89-96, (1988). ^[1]_{SEP}
3. T. Belytschko, K. Krongauz, D. Organ, M. Fleming and P. Krysl, Meshless methods: An overview and recent developments, *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* 139, 3-47, (1996). ^[1]_{SEP}
4. R.A. Gingold and J.J. Monaghan, Kernel estimates as a basis for general particle methods in hydrodynamics, *J. Comput. Phys.* 46(1982) 429-453.
5. J.J. Monaghan, Why particle methods work, *SIAM J. Scient. Stat. Comput.* 3 (1982) 422-433.
6. B. Nayroles, Cl. Touzot and P. Villon, Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements, *Comput. Mech.* 10 (1992) 307-318.
7. T. Belytschko, Y.Y. Lu and L. Gu, Element free Galerkin methods, *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 37 (1994) 229-256.
8. T. Belytschko, L. Gu and Y.Y. Lu, Fracture and crack growth by element free Galerkin methods, *Modelling Simul. Mater. Sci. Engrg.* 2(1994b) 519-534.
9. W.K. Liu, S. Jun and Y. Zhang, Reproducing kernel particle methods, *Int. J. Numer. Methods Fluids* 20 (1995) 1081-1 106.