di F. Ardente, V. Lo Brano, A. Marvuglia, M. Mistretta, A. Orioli

Il metodo delle funzioni di trasferimento

applicato ad una singola zona termica

Nel lavoro viene presentato un algoritmo basato sull'utilizzo dell'operatore Z-Trasformata per lo studio della trasmissione del calore all'interno di una singola zona termica costituita da pareti multistrato. L'algoritmo utilizzato è molto versatile e potrebbe venire utilizzato per il calcolo dei coefficienti delle funzioni di trasferimento nella simulazione del comportamento termico di un ambiente in free floating. Noti i coefficienti delle funzioni di trasferimento è possibile simulare in regime dinamico il profilo della temperatura di ciascuna superficie interna e dell'aria interna all'ambiente analizzato. L'algoritmo viene descritto in maniera completa in tutte le sue parti. Per valutare l'affidabilità dell'algoritmo è stato realizzato un confronto fra dati di simulazione ottenuti con esso e quelli ottenuti con il programma di simulazione termica denominato TRNSYS [1,2].

La procedura "ASHRAE" nota come Metodo delle Funzioni di Trasferimento (MFT), ampiamente utilizzata nel campo della progettazione e della simulazione del comportamento dei sistemi accoppiati edificio-impianto, analizza il problema della trasmissione del calore utilizzando il metodo della Z-Trasformata. La Z-Trasformata (ZT) si rivela un operatore matematico appropriato quando si impiegano modelli di simulazione che lavorano con dati di input o di output discreti nel dominio del tempo, come ad esempio i dati climatici. Analogamente ad altri strumenti matematici, come i metodi alle differenze finite ed agli elementi finiti, il MFT costituisce un approccio di tipo numerico al problema, in quanto la soluzione matematicamente esatta richiederebbe un numero infinito di calcoli.
Per eseguire una corretta procedura di troncamento è necessario valutare l'effetto indotto sulla risposta numerica dall'introduzione o dall'eliminazione di un coefficiente. La valutazione può essere ottenuta solo disponendo di un gran numero di coefficienti delle funzioni di trasferimento (FT) nella forma

$$FT = \frac{num(z)}{den(z)} = \frac{num_0 + num_1 z^{-1} + num_2 z^{-2} + \ldots + num_n z^{-n}}{1 + den_1 z^{-1} + den_2 z^{-2} + \ldots + den_n z^{-n}} \qquad (1)$$

In pratica, per valutare questa funzione dovremmo selezionare un gran numero di coefficienti dal momento che il valore assoluto dei coefficienti non decresce rapidamente all'aumentare del loro ordine.
Quando le FT sono nella forma dell'equazione (1), il denominatore è costituito da termini che sono legati esclusivamente al sistema. In altre parole, *den(z)* "contiene" il sistema e limitare il numero dei coefficienti rende più approssimata la descrizione del sistema stesso. Non conoscendo la funzione *den(z)*, Mitalas [3,4] ha proposto di costruire un denominatore utilizzando una procedura fondata sull'ipotesi che la risposta del sistema contenga una serie infinita di termini esponenziali con una costante di tempo negativa. Nella procedura proposta da Mitalas vi è una leggera imprecisione matematica legata al metodo impiegato per la risoluzione del sistema di equazioni. Allo scopo di superare tale approssimazione, in questo lavoro viene presentato un metodo per risolvere in una forma matematicamente corretta un sistema di equazioni differenziali lineari che rappresentano, sotto alcune ipotesi fisiche, il comportamento termico in regime dinamico di una singola zona termica. Le FT del sistema vengono determinate utilizzando la Z-Trasformata, trovando tutti i coefficienti richiesti, indipendentemente dal loro ordine o dall'inerzia termica della zona o delle pareti che la delimitano. Viene di seguito descritto un algoritmo che utilizza l'operatore Z-Trasformata per affrontare il problema della trasmissione del calore in una singola zona termica delimitata da pareti multistrato. Noti i coefficienti delle funzioni di trasferimento è possibile simulare la variazione nel tempo della temperatura di ciascuna delle superfici interne della zona, oltre che dell'aria interna (free floating). L'esplicitazione di tutti i passaggi matematici rende possibile la comprensione dell'importanza assunta da tutti i parametri del sistema (periodo di campionamento, numero di radici, numero di poli, numero dei coefficienti, funzioni interpolatrici) consentendo la realizzazione di un'analisi parametrica del problema in esame. In tal modo è possibile effettuare un'analisi di sensibilità per una completa valutazione dell'influenza esercitata dai vari parametri sull'output del modello. Una tale peculiarità si rivela una caratteristica di fondamentale importanza per il miglioramento delle prestazioni dei software per la simulazione termica degli edifici [5]. Per valutare l'affidabilità dell'algoritmo è stato realizzato un confronto fra dati di simulazione ottenuti con esso e quelli ottenuti con il software TRNSYS.

Fulvio Ardente, Valerio Lo Brano, Antonino Marvuglia, Marina Mistretta, Aldo Orioli, DREAM, Dipartimento di Ricerche Energetiche ed Ambientali, Università di Palermo.

Applicazione del MFT ad una singola parete multistrato

Se un sistema viene sollecitato da un segnale di input *i(t)* variabile nel tempo, che produce un segnale di output *o(t),* nel dominio della Z-Trasformata la relazione da determinare è espressa da

$$G(z) = \frac{O(z)}{I(z)}$$

in cui *I(z)* e *O(z)* sono le Z-trasformate di *i(t)* e *o(t)*. Il calcolo può essere realizzato utilizzando la Trasformata di Laplace (LT):

$$I(s) = LT[i(t)], \quad O(s) = LT[o(t)]$$

e la funzione di trasferimento del sistema nel dominio di Laplace *G(s)*. In questo caso la funzione di trasferimento nel dominio di Z è:

$$G(z) = \frac{O(z)}{I(z)} = \frac{ZT[O(s)]}{ZT[I(s)]} = \frac{ZT[I(s)G(s)]}{ZT[I(s)]} = \frac{num(z)}{den(z)} \tag{2}$$

dove *num(z)* è un polinomio che chiamiamo numeratore e *den(z)* è un polinomio che chiamiamo denominatore.
Assumendo come segnale di input una rampa lineare, applicando il teorema di Heaviside, otteniamo:

$$O(s) = \frac{1}{s^2}G(s) = \frac{1}{s^2}\frac{NUM(s)}{DEN(s)} = \frac{C_0}{s^2} + \frac{C_1}{s} + \sum \frac{res_n}{(s - s_n)} \tag{3}$$

in cui: s_n sono i valori di s per i quali è $DEN(s_n) = 0$, detti anche poli del sistema;

$$res_n = \left.\frac{NUM(s)}{s^2 DEN'(s)}\right|_{s=s_n}$$

sono i residui legati ai poli del sistema, dove

$$DEN'(s) = \frac{d}{ds}DEN(s) \text{ e } NUM'(s) = \frac{d}{ds}NUM(s);$$

$$C_0 = \left[\frac{NUM(s)}{DEN(s)}\right]_{s=0} \text{ e } C_1 = \left[\frac{NUM'(s)DEN(s) - NUM(s)DEN'(s)}{DEN(s)^2}\right]_{s=0}$$

sono i residui legati ai poli di molteplicità doppia nell'origine degli assi dovuti all'input a rampa lineare;
Si noti che *num(z) ≠ ZT[NUM(s)], den(z) ≠ ZT[DEN(s)]*.
Nel dominio della Z-Trasformata si ha:

$$G(z) = \frac{O(z)}{I(z)} = \frac{\dfrac{C_0\Delta}{(1-z^{-1})^2} + \dfrac{C_1}{(1-z^{-1})} + \sum \dfrac{res_n}{1 - e^{s_n\Delta}z^{-1}}}{\dfrac{C_0\Delta}{z(1-z^{-1})}} = \frac{num(z)}{den(z)} \tag{4}$$

in cui:
Δ è il periodo di campionamento;

$$den(z) = \prod \left(1 - e^{-s_n\Delta}z^{-1}\right) \tag{5}$$

dove la somma ed il prodotto sono estesi a tutti i poli del sistema.
Ponendosi nel caso di trasmissione del calore monodimensionale in uno strato omogeneo ed isotropo con spessore costante L, essendo *θ(x,t)* la temperatura e *q(x,t)* il flusso termico al tempo *t* lungo la direzione x, il sistema di equazioni che rappresenta il bilancio termico dello strato può essere rappresentato in forma matriciale compatta con l'equazione seguente [6]:

$$\begin{vmatrix} T_e \\ Q_e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} T_i \\ Q_i \end{vmatrix} \tag{6}$$

dove:
T_e è la Trasformata di Laplace della temperatura t_e del lato esterno dello strato;
Q_e è la Trasformata di Laplace del flusso termico q_e sul lato esterno dello strato;
T_i è la Trasformata di Laplace del flusso termico t_i sul lato interno dello strato;
Q_i è la Trasformata di Laplace del flusso termico q_i sul lato *interno* dello strato;
L è lo spessore dello strato;
s è la variabile di Laplace

$$a = \cosh\left(L\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right); \quad b = \frac{\operatorname{senh}\left(L\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)}{\lambda\sqrt{\frac{s}{\alpha}}};$$

$$c = \lambda\sqrt{\frac{s}{\lambda}} \cdot \operatorname{senh}\left(L\sqrt{\frac{s}{\lambda}}\right); \quad d = a \tag{7}$$

dove:
λ è la conducibilità termica $\left[\frac{W}{mK}\right]$;
ρ è la densità $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$;
X_p è il calore specifico $\left[\frac{kJ}{kgK}\right]$;
$\alpha = \frac{\lambda}{\rho C_P}$ è la diffusività termica $\left[\frac{m^2}{s}\right]$.

I problemi di trasmissione del calore in pareti multistrato in regime non stazionario possono essere descritti estendendo la notazione precedente:

$$\begin{vmatrix} T_e \\ Q_e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A(s) & B(s) \\ C(s) & D(s) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} T_i \\ Q_i \end{vmatrix} \tag{8}$$

In cui T e Q rappresentano, in questo caso, le Trasformate di Laplace delle temperature t_i e t_e e dei flussi termici q_i e q_e in corrispondenza delle superfici interna ed esterna della parete multistrato, mentre A, B, C e D sono i coefficienti della matrice di trasmissione della parete ottenuti come prodotto delle matrici di trasmissione di ciascuno degli n_w strati che costituiscono la parete:

$$\begin{vmatrix} A(s) & B(s) \\ C(s) & D(s) \end{vmatrix} = \prod_{m=1}^{n_w} \begin{vmatrix} a_m & b_m \\ c_m & d_m \end{vmatrix} \tag{9}$$

a_m b_m c_m d_m vengono calcolati utilizzando le (7). Utilizzando la relazione (9) è possibile risolvere le equazioni che descrivono il bilancio termico di una parete multistrato nel dominio della ZT:

$$Q_i(z) = \frac{1}{B(z)}T_e(z) - \frac{A(z)}{B(z)}T_i(z) \tag{10}$$

La natura numerica del metodo comporta l'impossibilità di ottenere gli infiniti poli del sistema termico.
I poli del sistema devono trovarsi tutti sul semiasse reale negativo nel dominio complesso, per cui è utile effettuare la sostituzione

$$\sqrt{s} = j\delta$$

che ci consente di cercare i poli soltanto nell'insieme dei numeri reali. Limitando la ricerca ai primi n poli in un intorno dell'origine e con opportuni passaggi è possibile legare questo metodo con le ben note espressioni polinomiali del MFT.
La descrizione del comportamento termico di una zona termica delimitata da n_w pareti comporta una complessità maggiore.

Applicazione del MFT ad una singola zona termica

Sulla superficie esterna il bilancio termico è stato semplificato utilizzando il concetto di *temperatura aria-sole*. La superficie interna è interessata da un flusso termico dovuto allo scambio convettivo con l'aria interna ed allo scambio radiativo con altre superfici. Sono computati nel bilancio termico i flussi termici relativi agli impianti di raffrescamento/riscaldamento ed ai dispositivi elettrici.
Lo scambio termico fra le superfici vetrate e l'aria interna è computato attraverso l'utilizzo di un semplice coefficiente; in tal modo il flusso termico dovuto alla conduzione attraverso le superfici vetrate dipende linearmente dalla differenza di temperatura tra aria interna ed aria esterna. La radiazione solare viene distribuita all'interno della zona termica secondo un modello lineare semplificato legato all'estensione delle superfici interne. Il MFT costituisce uno strumento per risoluzione numerica di sistemi di equazioni differenziali a coefficienti costanti, quindi rimanendo nell'ambito di questi limiti, la descrizione dei fenomeni fisici che hanno luogo nella zona termica e le relative equazioni di bilancio possono assumere forma più complessa senza per questo inficiare la validità del metodo e dei risultati con esso ottenuti. Il bilancio termico di una parete confinante con l'ambiente esterno può essere meglio compreso osservando la Figura 1. L'equazione che rappresenta il bilancio termico della generica parete confinante con l'ambiente esterno si scrive:

$$q_{iK}S_K = f_K S_K (T_K - T_a) + S_K \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq K}}^{n_w} r_{K,J}(T_K - T_J) - E_K \qquad (11)$$

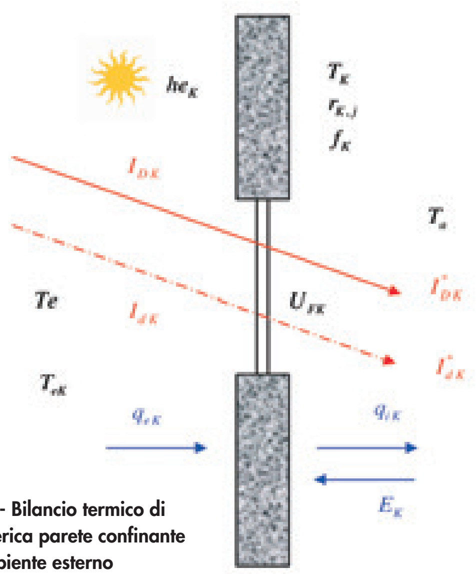

Figura 1 - Bilancio termico di una generica parete confinante con l'ambiente esterno

dove:
I_{DK} è la radiazione solare diretta incidente sulla finestra appartenente alla *K*-esima parete [W/m²];
I_{dK} è la radiazione solare diffusa incidente sulla finestra appartenente alla *K*-esima parete [W/m²];
I^*_{DK} è la radiazione solare diretta che attraversa la finestra appartenente alla *K*-esima parete [W/m²];
I^*_{dK} è la radiazione solare diffusa che attraversa la finestra appartenente alla *K*-esima parete [W/m²];
q_{iK} è il flusso termico che attraversa la *K*-esima parete [W/m²];
S_K è la superficie netta della *K*-esima parete [m²];
f_K è il coefficiente di convezione riferito alla superficie interna della *K*-esima parete [W/m²K];
T_K è la temperatura della superficie interna della *K*-esima parete [K];
T_J è la temperatura della superficie interna della *J*-esima parete [K];
T_a è la temperatura dell'aria interna [K];
$r_{K,J}$ è il coefficiente di scambio termico radiativo fra la *K*-esima e la *J*-esima parete [W/m²K];
E_K è il flusso termico incidente sulla *K*-esima parete proveniente dall'ambiente interno[W].
Allo stesso tempo, il bilancio termico della *K-esima* parete può essere scritto utilizzando la simbologia del MFT:

$$\begin{vmatrix} T_{eK} \\ q_{eK} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{h_{eK}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} T_K \\ q_{iK} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_K + \frac{C_K}{h_{eK}} & B_K + \frac{D_K}{h_{eK}} \\ C_K & D_K \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} T_K \\ q_{iK} \end{vmatrix} \qquad (12)$$

dove:
T_{eK} è la temperature aria-sole esterna della *K*–esima parete, tenendo conto della radiazione solare (I_{DK}, I_{dK}) [K];
q_{eK} è il flusso termico entrante nella *K*-esima parete [W/m²];
h_{eK} è il coefficiente di adduzione (che combina gli effetti dello scambio termico radiativo e di quello convettivo) sulla superficie esterna della *K*-esima parete [W/m²K];
Le ultime due equazioni possono essere legate in un'unica espressione:

$$\left[T_{eK} - \left(A_K + \frac{C_K}{h_{eK}} \right) T_K \right] S_K = \left(B_K + \frac{D_K}{h_{eK}} \right) \left[f_K S_K (T_K - T_a) + S_K \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq K}}^{n_w} r_{K,J}(T_K - T_J) - E_K \right] \qquad (13)$$

La procedura fin qui descritta può essere estesa alla generica parete interna che verrà sollecitata da uno scambio termico radiativi con le altre superfici e dalla radiazione solare proveniente da ciascuna superficie finestrata (I^*_{DK}, I^*_{dK}).
Il bilancio termico dell'aria interna è rappresentato da:

$$\sum_{K=1}^{n_w} f_K S_K (T_K - T_a) + \sum_{K=1}^{\text{all windows}} U_{FK} S_{FK} (T_e - T_a) + C_{Pa} \rho_a n V (T_e - T_a) = W_{Cl} - W_{imp} + C_a \frac{dT_a}{d\tau} \qquad (14)$$

dove:
n è il numero di ricambi l'ora dell'aria interna;
V è il volume dell'aria interna [m³];
U_{FK} è il coefficiente di scambio termico delle finestre [W/m²K];
S_{FK} è la superficie netta della *K*-esima finestra [m²];;
T_e è la temperature dell'aria esterna [K];
C_{Pa} è il calore specifico dell'aria [kJ/kgK];
ρ_a è la densità dell'aria [kg/m³];

C_a è la capacità termica dell'aria [kJ/K];
W_{Cl} è il carico termico globale (guadagno) [W];
W_{imp} è il guadagno termico dovuto alle apparecchiature HVAC [W].
È ora possibile scrivere il bilancio termico complessivo dell'intera zona termica riferito ai tre tipi di "nodi":

- Generica parete confinante con l'ambiente, con o senza finestre;
- Generica parete interna;
- Aria interna.

Per una stanza generica delimitata da sei pareti, di cui le pareti 1, 2 e 3 confinanti con l'ambiente esterno e dotate di finestre, mentre le pareti 4, 5 e 6 come generiche pareti, è possibile riscrivere le equazioni in un unico sistema ordinato:

Prima equazione del sistema:

$$\left[A_1+\frac{C_1}{he_1}+\left(f_1+\sum_{\substack{j=1\\j\neq 1}}^{6} r_{1,j}\right)\cdot\left(B_1+\frac{D_1}{he_1}\right)\right]S_1T_1-r_{1,2}\left(B_1+\frac{D_1}{he_1}\right)S_1T_2-r_{1,3}\left(B_1+\frac{D_1}{he_1}\right)S_1T_3-r_{1,4}\left(B_1+\frac{D_1}{he_1}\right)S_1T_4-r_{1,5}\left(B_1+\frac{D_1}{he_1}\right)S_1T_5+$$
$$-r_{1,6}\left(B_1+\frac{D_1}{he_1}\right)S_1T_6-f_1\left(B_1+\frac{D_1}{he_1}\right)S_1T_a=T_{e1}S_1+\left(B_1+\frac{D_1}{he_1}\right)E_1 \qquad (15)$$

Seconda equazione del sistema:

$$-r_{2,1}\left(B_2+\frac{D_2}{he_2}\right)S_2T_1+\left[A_2+\frac{C_2}{he_2}+\left(f_2+\sum_{\substack{j=1\\j\neq 2}}^{6} r_{2,j}\right)\cdot\left(B_2+\frac{D_2}{he_2}\right)\right]S_2T_2-r_{2,3}\left(B_2+\frac{D_2}{he_2}\right)S_2T_3-r_{2,4}\left(B_2+\frac{D_2}{he_2}\right)S_2T_4-r_{2,5}\left(B_2+\frac{D_2}{he_2}\right)S_2T_5+$$
$$-r_{2,6}\left(B_2+\frac{D_2}{he_2}\right)S_2T_6-f_2\left(B_2+\frac{D_2}{he_1}\right)S_2T_a=T_{e2}S_2+\left(B_2+\frac{D_2}{he_2}\right)E_2 \qquad (16)$$

Terza equazione del sistema:

$$-r_{3,1}\left(B_3+\frac{D_3}{he_3}\right)S_3T_1-r_{3,2}\left(B_3+\frac{D_3}{he_3}\right)S_3T_2+\left[A_3+\frac{C_3}{he_3}+\left(f_3+\sum_{\substack{j=1\\j\neq 3}}^{6} r_{3,j}\right)\cdot\left(B_3+\frac{D_3}{he_3}\right)\right]S_3T_3-r_{3,4}\left(B_3+\frac{D_3}{he_3}\right)S_3T_4-r_{3,5}\left(B_3+\frac{D_3}{he_3}\right)S_3T_5+$$
$$-r_{3,6}\left(B_3+\frac{D_3}{he_3}\right)S_3T_6-f_3\left(B_3+\frac{D_3}{he_3}\right)S_3T_a=T_{e3}S_3+\left(B_3+\frac{D_3}{he_3}\right)E_3 \qquad (17)$$

Quarta equazione del sistema:

$$r_{4,1}D_4S_4T_1-r_{4,2}D_4S_4T_2-r_{4,3}D_4S_4T_3+\left[C_4+D_4\left(f_4+\sum_{\substack{j=1\\j\neq 4}}^{6} r_{4,j}\right)\right]S_4T_4-r_{4,5}D_4S_4T_5-r_{4,6}D_4S_4T_6-f_4D_4S_4T_a=D_4E_4 \qquad (18)$$

Quinta equazione del sistema:

$$-r_{5,1}D_5S_5T_1-r_{5,2}D_5S_5T_2-r_{5,3}D_5S_5T_3-r_{5,4}D_5S_5T_4+\left[C_5+D_5\left(f_5+\sum_{\substack{j=1\\j\neq 5}}^{6} r_{3,j}\right)\right]S_5T_5-r_{5,6}D_5S_5T_6-f_5D_5S_5T_a=D_5E_5 \qquad (19)$$

Sesta equazione del sistema:

$$r_{6,1}D_6S_6T_1-r_{6,2}D_6S_6T_2-r_{6,3}D_6S_6T_3-r_{6,4}D_6S_6T_4-r_{6,5}D_6S_6T_5+\left[C_6+D_6\left(f_6+\sum_{\substack{j=1\\j\neq 6}}^{6} r_{6,j}\right)\right]S_6T_6-f_6D_6S_6T_a=D_6E_6 \qquad (20)$$

Settima equazione del sistema:

$$f_1S_1T_1+f_2S_2T_2+f_3S_3T_3+f_4S_4T_4+f_5S_5T_5+f_6S_6T_6+\left[-sC_a-\sum_{j=1}^{6}S_jF_j-\sum_{j=1}^{3}S_{Fj}U_j-c_p\gamma nV\right]T_a=-\left[\sum_{j=1}^{3}S_{Fj}U_j+c_p\gamma nV\right]T_e-W_{Cl}+W_{imp} \qquad (21)$$

Le equazioni sono espresse in forma standard in quanto tutte le incognite sono disposte al primo membro, i termini costanti al secondo membro e le incognite in ciascuna equazione sono allineate nella stessa colonna. In tal modo il sistema di equazioni lineari precedentemente scritto può essere sinteticamente espresso come:

$$(M)x(T)=(N) \qquad (22)$$

Dove la matrice dei soli coefficienti delle incognite è (M), (T) è il vettore delle incognite ed (N) è la matrice dei termini noti. Per trovare la funzione di trasferimento G(s) è utile sollecitare il sistema con un

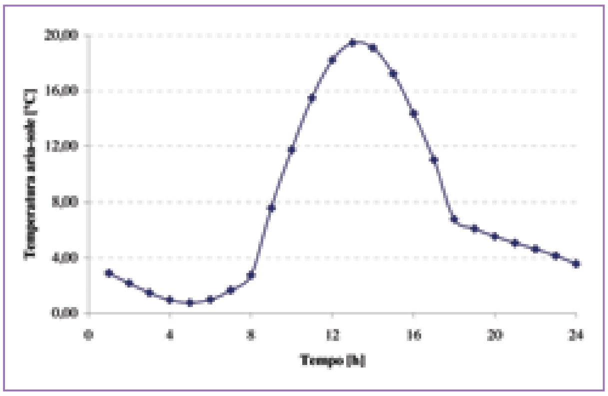

Figura 2 - Temperatura aria-sole invernale

impulso unitario. In questa situazione l'output del sistema coincide con la funzione di trasferimento. Grazie alla linearità del sistema il generico output può essere ottenuto utilizzando la sovrapposizione degli effetti come somma degli output parziali prodotti dai singoli segnali di input. In tal modo, per ciascun output possono essere definite tante funzioni di trasferimento parziali quanti sono gli input del sistema. Queste funzioni di trasferimento parziali possono essere identificate determinando il generico output del sistema imponendo che tutti i termini che compongono i coefficienti della matrice (N) devono essere nulli ad eccezione del termine relativo al segnale di input al quale la funzione di trasferimento parziale si riferisce. Inoltre, il segnale di input ($T_{e,k}$, I^*_{Dk},…, W_{imp}) al quale è riferita la funzione di trasferimento parziale, deve essere unitario. Riferendosi al sistema di equazioni precedente, la funzione di trasferimento che lega la generica temperatura T_x al generico segnale di input può essere ottenuta risolvendo il sistema di equazioni con il metodo di Cramer:

$$G_{T_x,I_i}(s)=\frac{\det\left[M(T_x)\right]}{\det\left[M\right]} \tag{23}$$

dove det[M(T_x)] è il determinante della matrice (M) in cui la colonna relative all'incognita T_x è stata sostituita con i coefficienti della matrice (N) in cui sono stati cancellati tutti i termini che non si riferiscono all'input *x*. Allo stesso tempo, tutti i termini della matrice (N) legati all'input *x* sono unitari. Assumendo che anche in questo caso, per ottenere i coefficienti della ZT si stia utilizzando un input a rampa lineare, allora il generico output parziale causato da un input unitario sarà:

$$T_{x,i}(s)=\frac{1}{s^2}\frac{\det\left[M(T_x)\right]}{\det\left[M\right]}=\frac{1}{s^2}\frac{NUM(s)}{DEN(s)}=\frac{C_0}{s^2}+\frac{C_1}{s}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{res_n}{s-s_n} \tag{24}$$

In cui i poli s_n sono determinati trovando i valori di s che rendono nullo il determinante det[M]. Una volta trovato il valore del generico s_n, è possibile determinare attraverso un calcolo automatico:

$$res_n=\left[\frac{NUM(s)}{s^2 DEN'(s)}\right]\Bigg|_{s=s_n}=\frac{\det\left[M(T_x)\right]\Big|_{s=s_n}}{s_n^2\frac{d}{ds}\left\{\det\left[M\right]\right\}\Big|_{s=s_n}} \tag{25}$$

Analogamente, è possibile calcolare C_0 e C_1. Una volta ottenuti questi coefficienti è possibile passare al calcolo della Z-Trasformata del generico output parziale:

$$T_{x,i}(z)=\frac{num(z)}{den(z)}I(z)=\frac{num_0+num_1z^{-1}+num_2z^{-2}+\ldots+num_nz^{-n}}{1+den_1z^{-1}+den_2z^{-2}+\ldots+den_nz^{-n}}I(z) \tag{26}$$

in cui:

$$\frac{num(z)}{den(z)}=\frac{\frac{C_0\Delta}{\left(1-z^{-1}\right)^2}+\frac{C_1}{\left(1-z^{-1}\right)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{res_n}{1-e^{s_n\Delta}z^{-1}}}{\frac{C_0\Delta}{z\left(1-z^{-1}\right)}} \tag{27}$$

Applicando la definizione di MFT ed espandendo i termini, è possibile scrivere che:

$$T_{x,i}(0)+T_{x,i}(\Delta)z^{-1}+T_{x,i}(2\Delta)z^{-2}+\ldots+T_{x,i}(n\Delta)z^{-n}+\ldots=$$
$$=\frac{num_0+num_1z^{-1}+num_2z^{-2}+\ldots+num_nz^{-n}}{1+den_1z^{-1}+den_2z^{-2}+\ldots+den_nz^{-n}}\cdot$$
$$\cdot\left[I_i(0)+I_i(\Delta)z^{-1}+I_i(2\Delta)z^{-2}+\ldots+I_i(n\Delta)z^{-n}+\ldots\right]$$

Dopo una serie di passaggi effettuati sull'equazione precedente si ottiene la formula ricorsiva:

$$T_{x,i}(n\Delta)=\sum_{j=0}^{n}num_jI_i\left[(n-j)\Delta\right]-\sum_{j=1}^{n}den_jT_{x,i}\left[(n-j)\Delta\right] \tag{28}$$

valida per il generico istante *n*_. La variazione nel tempo del generico output T_x può essere calcolata sovrapponendo tutti gli output parziali:

$$T_x(n\Delta)=\sum_{i=1}^{\text{tutti gli inputs}}T_{x,i}(n\Delta) \tag{29}$$

I coefficienti della funzione di trasferimento devono essere calcolati per ciascuna coppia input-output, ad esempio la temperatura aria-sole e la temperatura dell'aria interna, i carichi termici interni e la temperatura della superficie interna 5, e così via. Tutti gli outputs riferiti allo stesso nodo fisico vengono alla fine sommati per ottenere la risposta complessiva.

Caso studio

È stato simulato il comportamento termico di tre differenti zone termiche allo scopo di testare l'affidabilità del metodo. Come segnale di input sono state utilizzate alcune variabili climatiche come la temperatura aria-sole e la radiazione solare incidente (diretta e diffusa). Vengono di seguito riportati i risultati delle simulazioni effettuate per due differenti segnali di input:

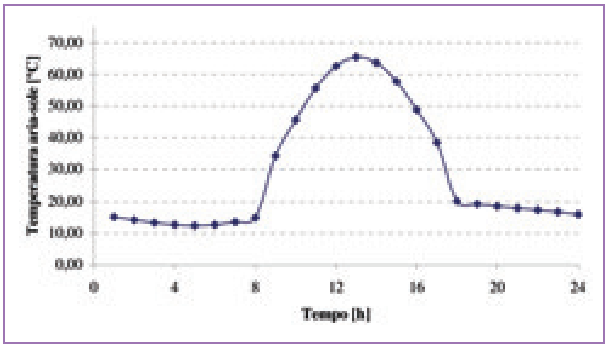

Figura 3 - Temperatura aria-sole estiva

- temperatura aria-sole invernale relativa al mese di Gennaio nella città di Palermo (sud Italia);
- temperatura aria-sole estiva relativa a Luglio nella città di Palermo

Nelle Figure 2 e 3 sono rappresentati i profili orari della temperatura aria-sole. La definizione di temperatura aria-sole è:

$$t_{aria-sole} = t_a + \frac{\alpha I}{h} \qquad (30)$$

dove:
t_a = temperatura dell'aria [°C];
α = coefficiente d'assorbimento della superficie;
I = radiazione solare incidente sulla superficie [W/m²];
h = coefficiente di scambio termico (convettivo e radiativo) [W/m²°C];

Descrizione delle simulazioni effettuate sulla zona termica

La zona termica A utilizzata per l'analisi è costituita da un involucro delimitato da sei pareti, una confinante con l'ambiente esterno (21,673 m²) e rivolta a sud, tre pareti interne (34,690 m², 21,673 m² and 34,69 m²), il soffitto ed il pavimento (72,065 m²). Il suo volume è di 129 m³ e ciascuna parete è composta da uno strato di arenaria rivestito sia all'interno che all'esterno con uno strato di intonaco dello spessore di 0,02 m. Il soffitto ed il pavimento sono realizzati in calcestruzzo e per semplificare la simulazione non è stata presa in considerazione nessuna finestra e nessuna fonte di calore interna. Nelle tabelle seguenti ci riferiremo al nostro metodo con il nome THELDA (THermal ELements Dynamic Analysis) che è il nome del software sviluppato allo scopo di testare il metodo [7-12]. Inoltre sono state effettuate le simulazioni anche con TRNSYS, un software commerciale ampiamente utilizzato per la simulazione del comportamento termico degli edifici.

TABELLA 1 - Descrizione degli strati che compongono la parete 1 rivolta a sud

Strato	Descrizione	Spessore [m]	Densità [kg/m³]	Calore specifico [kJ/kg K°]	Conducibilità [W/m K°]	Resistenza termica [m²K/W]
1	Intonaco	0,02	1.602	0,84	0,727	0,026
2	Arenaria	0,2	2.300	0,7	1,7	0,117
3	Intonaco	0,02	1.602	0,84	0,727	0,026

TABELLA 2 - Descrizione degli strati che compongono la parete interna 2

Strato	Descrizione	Spessore [m]	Densità [kg/m³]	Calore specifico [kJ/kg K°]	Conducibilità [W/m K°]	Resistenza termica [m²K/W]
1	Intonaco	0,02	1602	0,84	0,727	0,026
2	Arenaria	0,4	2300	0,7	1,7	0,235
3	Intonaco	0,02	1602	0,84	0,727	0,026

TABELLA 3 - Descrizione degli strati che compongono le pareti interne 3 e 4

Strato	Descrizione	Spessore [m]	Densità [kg/m³]	Calore specifico [kJ/kg K°]	Conducibilità [W/m K°]	Resistenza termica [m²K/W]
1	Intonaco	0,02	1602	0,84	0,727	0,026
2	Arenaria	0,42	2300	0,7	1,7	0,246
3	Intonaco	0,02	1602	0,84	0,727	0,026

TABELLA 4 - Descrizione degli strati che compongono il pavimento e il soffitto

Strato	Descrizione	Spessore [m]	Densità [kg/m³]	Calore specifico [kJ/kg K°]	Conducibilità [W/m K°]	Resistenza termica [m²K/W]
1	Calcestruzzo	0,05	2200	0,92	1,48	0,034
2	Calcestruzzo	0,3	1500	0,88	0,66	0,454
3	Calcestruzzo	0,05	2200	0,92	1,48	0,034

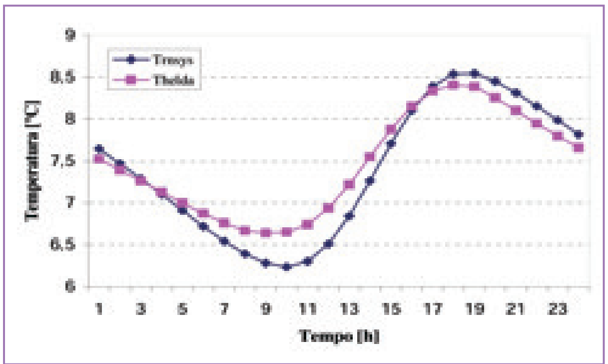

Figura 4 - Temperatura della superficie interna della parete 1; Gennaio

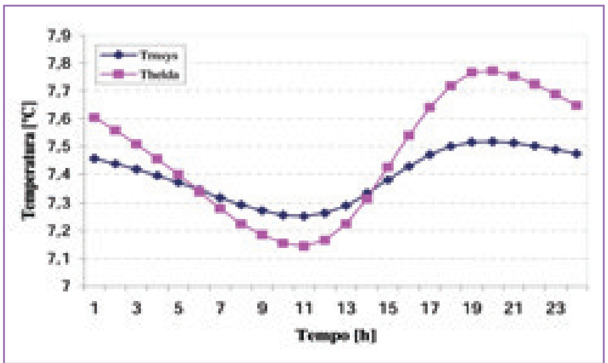

Figura 5 - Temperatura dell'aria interna; Gennaio

Conclusioni

È stato descritto un algoritmo che utilizza l'operatore matematico Z-Trasformata per risolvere un sistema di equazioni differenziali lineari che rappresenta il comportamento termico in regime dinamico di una singola zona termica delimitata da pareti multistrato. Il metodo originale, proposto da Mitalas utilizza una procedura fondata sull'ipotesi che la risposta del sistema contiene una serie infinita di termini esponenziali con una costante di tempo negativa. In [20, 21] Mitalas sostiene che le FT sono caratterizzate da un elevato numero di coefficienti e richiedono molte operazioni numeriche. D'altra parte, esprimendo la funzione di trasferimento come rapporto tra due polinomi, nel caso di una zona termica con un basso valore di inerzia termica, il decadimento della risposta nel tempo è talmente veloce da impedire il calcolo dei coefficienti del terzo e del quarto ordine. Per ovviare all'imprecisione matematica da cui è affetto il metodo di Mitalas, gli autori hanno sviluppato un a procedura per determinare le FT di una singola zona termica utilizzando la Z-Trasformata. Essa consente di

TABELLA 5 - Risultati delle simulazioni effettuate sulla stanza A; Gennaio

Ora	TRNSYS Temperat. sup. interna parete 1 [°C]	TRNSYS Temperat. dell'aria interna [°C]	THELDA Temperat. sup. interna parete 1 [°C]	THELDA Temperat. dell'aria interna [°C]
1	7,644	7,456	7,522	7,603
2	7,469	7,437	7,391	7,557
3	7,288	7,417	7,261	7,507
4	7,100	7,394	7,129	7,454
5	6,908	7,369	6,998	7,398
6	6,719	7,344	6,871	7,339
7	6,542	7,318	6,758	7,280
8	6,391	7,293	6,665	7,224
9	6,280	7,272	6,640	7,186
10	6,234	7,256	6,650	7,154
11	6,301	7,252	6,741	7,144
12	6,508	7,263	6,935	7,166
13	6,842	7,290	7,217	7,224
14	7,262	7,331	7,547	7,315
15	7,705	7,379	7,876	7,425
16	8,101	7,428	8,151	7,539
17	8,390	7,470	8,333	7,641
18	8,536	7,500	8,407	7,718
19	8,542	7,515	8,386	7,767
20	8,451	7,517	8,256	7,772
21	8,312	7,512	8,100	7,755
22	8,153	7,501	7,945	7,725
23	7,986	7,488	7,796	7,688
24	7,816	7,473	7,656	7,647

TABELLA 6 - Risultati delle simulazioni effettuate sulla zona A; Luglio

Ora	TRNSYS Temperat. sup. interna parete 1 [°C]	TRNSYS Temperat. dell'aria interna [°C]	THELDA Temperat. sup. interna parete 1 [°C]	THELDA Temperat. dell'aria interna [°C]
1	27,007	26,827	26,686	27,063
2	26,542	26,774	26,364	26,936
3	26,094	26,720	26,066	26,809
4	25,662	26,663	25,786	26,682
5	25,245	26,606	25,521	26,554
6	24,852	26,549	25,281	26,427
7	24,497	26,492	25,104	26,314
8	24,228	26,442	24,980	26,210
9	24,104	26,405	24,972	26,132
10	24,183	26,388	25,124	26,098
11	24,508	26,399	25,458	26,122
12	25,074	26,439	25,959	26,214
13	25,841	26,508	26,586	26,370
14	26,733	26,599	27,266	26,576
15	27,650	26,703	27,916	26,811
16	28,474	26,808	28,454	27,047
17	29,091	26,899	28,817	27,257
18	29,434	26,966	28,969	27,418
19	29,499	27,005	28,909	27,514
20	29,322	27,015	28,668	27,543
21	28,964	27,002	28,311	27,512
22	28,499	26,970	27,869	27,426
23	27,996	26,927	27,435	27,313
24	27,493	26,879	27,041	27,190

ricavare tutti i coefficienti voluti indipendentemente dal loro ordine o dall'inerzia termica delle pareti che delimitano la zona termica. Conoscendo i coefficienti delle funzioni di trasferimento è possibile simulare l'andamento nel tempo della temperatura superficiale interna di ciascuna parete oltre che dell'aria interna (free floating).
Per valutare l'affidabilità dell'algoritmo è stato realizzato un confronto fra i dati ottenuti con le simulazioni effettuate utilizzando il nostro metodo e quelli ottenuti con il software TRNSYS. Le comunque piccole differenze riscontrate tra le simulazioni sono molto probabilmente da imputare ad un differente approccio matematico utilizzato per computare gli scambi termici radiativi interni. TRNSYS utilizza il concetto della "star network temperature" per semplificare la scrittura delle equazioni di bilancio termico radiativo che in THELDA sono invece direttamente esplicitate. Essenzialmente l'introduzione della "star network temperature" consiste nel descrivere gli scambi termici radiativi e convettivi all'interno dell'ambiente attraverso l'uso di un corpo nero fittizio di dimensioni uguali a quelle della zona termica. Questa differente approccio consente al software TRNSYS di utilizzare un set di equazioni di bilancio termico molto ridotto e semplificato. La maggiore inerzia termica delle pareti interne e di contro la maggiore dinamicità del comportamento termico dell'aria dimostrata dalle simulazioni effettuate con THELDA sono da attribuire all'utilizzo di un bilancio termico più dettagliato. L'analisi parametrica dei dati ottenuti dalle diverse simulazioni ha consentito inoltre di sviluppare alcune tecniche di ottimizzazione del calcolo. Tali tecniche hanno portato a drastici miglioramenti dei risultati delle simulazioni [13-16].

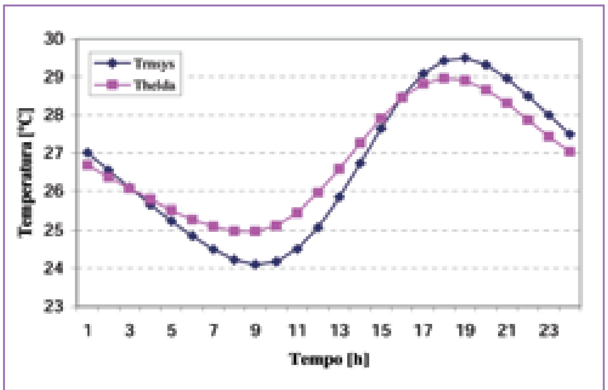

Figura 6 - Temperatura della superficie interna; Luglio

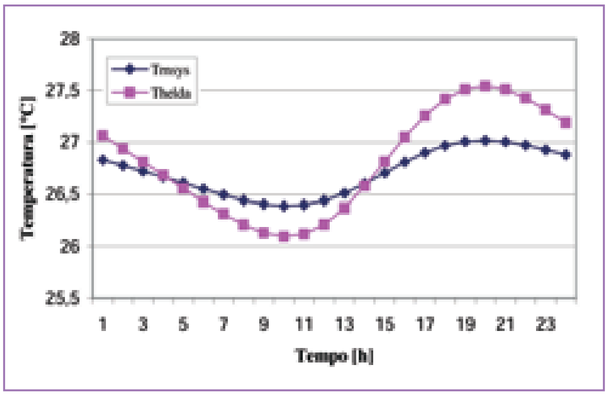

Figura 7 - Temperatura dell'aria interna; Luglio

Bibliografia

[1] Klein S. A., Beckmann W. A., Duffie J. A. 1976, *TRNSYS - a transient simulation program,* ASHRAE Trans.

[2] Gough M. 1999, *A Review of New Techniques in Building Energy and Environmental Modelling,* Report for Contract BREA-42, Building Research Establishment.

[3] McKinley A. D, Mitalas G. P. *Room thermal transfer functions - Computer programs to calculate Z–Transfer function coefficients for rooms,* Computer program N. 52, Version A01, Division of Building Research, Ottawa, Canada, 1983.

[4] Mitalas G. P. *Room dynamic Thermal Response,* Proceedings of The Use of Computers for Environmental Engineering Related to Buildings Conference, Tokyo, Japan, 1983.

[5] Haltrecht D, Zmeureanu R, Beausoleil-Morrison.,1999, *Defining the Methodology for the Next-Generation HOT2000 Simulator,* Proceedings of Building Simulation, Kyoto.

[6] Carslaw H. S., Jager J.C. *Conduction of heat in solid,* Oxford University Press, 1959.

[7] C. Giaconia, A. Orioli, *Transfer Function Method - Analisi delle basi teoriche;* La Termotecnica - Anno LI, n. 4, Editrice BIAS, 1997.

[8] C. Giaconia, A. Orioli, *Transfer Function Method - Analisi dei metodi di calcolo dei coefficienti;* La Termotecnica - Anno LIII n. 2, Editrice BIAS, 1999.

[9] C. Giaconia, A. Orioli, *On the reliability of conduction transfer function coefficients of walls;* Applied Thermal Engineering 20, 2000 Pergamon Press, Cambridge, UK

[10] M. Beccali, M. Cellura, C. Giaconia, V. Lo Brano, A. Orioli, *La trasmissione del calore in regime vario nelle pareti multistrato: il software THELDA;* Condizionamento dell'Aria 5/2000-Sezione Ricerche.

[11] Beccali G., Cellura M., Lo Brano V., 2001, *A database of Z-transform coefficient for mediterranean building typologies,* Proceedings of BS2001. Rio de Janeiro, Brazil.

[12] Cellura M., Lo Brano V., Orioli A., 2001, *Thermal Dynamic Analysis of Buildings: Software THELDA 2000,* Proceedings of Clima 2000. Naples, Italy.

[13] G. Beccali, M. Cellura, V. Lo Brano, A. Orioli, 2003, *An improved algorithm for thermal dynamic simulation of walls using Z-transform coefficients.* Proceedings of Eleventh International Conference on Computatio-nal Methods and Experimental Measurements, Halkidiki, Greece.

[14] M. Cellura, L. Giarrè, V. Lo Brano, A. Orioli, 2003, *Thermal dynamic models using Z-transform coefficients: an algorithm to improve the reliability of simulations.* Proceedings of Building Simulation 2003, IBPSA International Conference and Exhibition on Building Simulation. Eindhoven, the Netherlands.

[15] Beccali G., Cellura M., Giarrè L., Lo Brano V., Orioli A., 2002, *The influence of the sampling period in the transfer functions method.* A case study in a very massive building in the south Italy, Proceedings of Plea 2002, Toulouse–France.

[16] Beccali G., Cellura M., Lo Brano V., Orioli A., *Is the transfer function method reliable in a European building context? A theoretical analysis and a case study in the south of Italy,* Applied Thermal Engineering Volume: 25, Issue: 2-3, February, 2005, pag. 341-357.