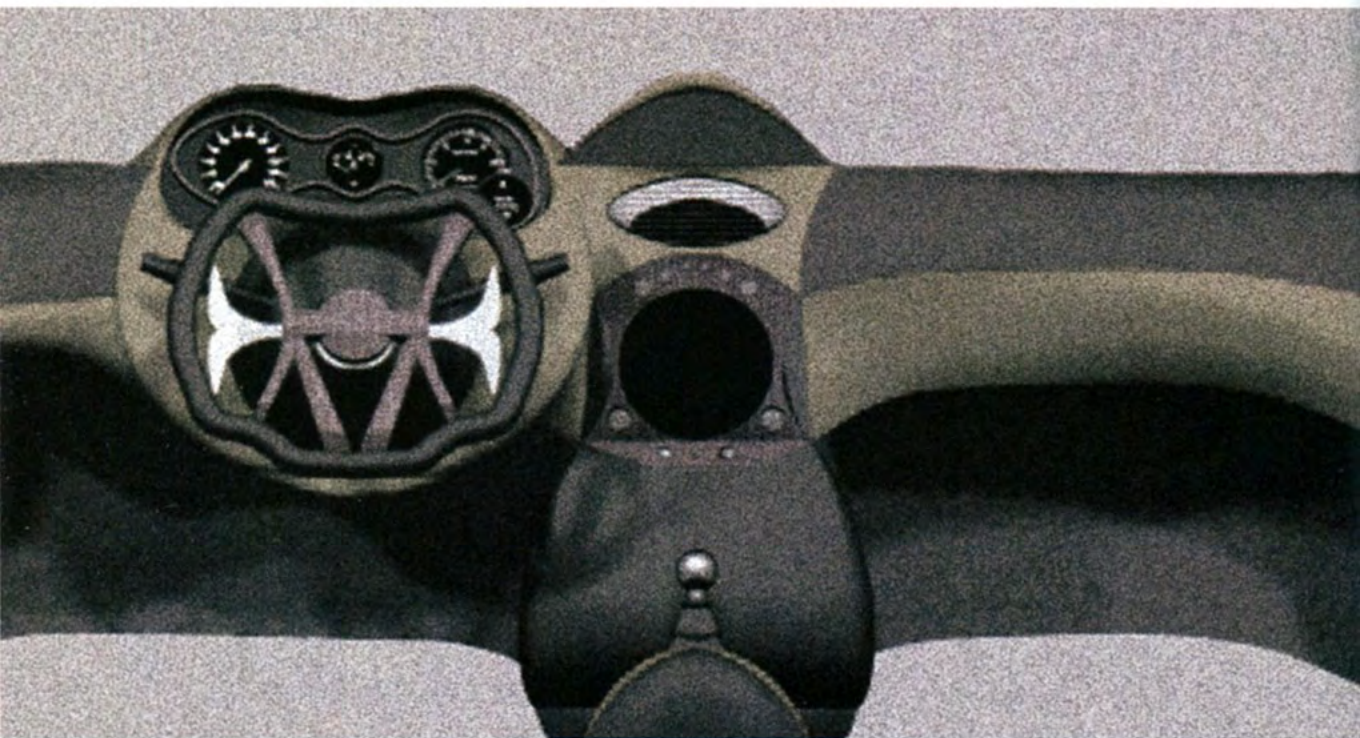


PARTE II: CRITERI DI MODELLAZIONE





CRITERI DI MODELLAZIONE E PROCESSI

MORFOGENETICI

Il nostro cervello ci dà informazioni relative agli oggetti della realtà esistente tramite percezione sensoriale delle sue caratteristiche: con l'esperienza impariamo a classificare oggetti duri o morbidi, lisci o ruvidi, grandi o piccoli, chiari o scuri, vicini o lontani, rotondi o spigolosi, ecc. secondo processi di decodificazione delle informazioni sensoriali che costituiscono il fenomeno della percezione.

Tra le tante operazioni di interpretazione della realtà la nostra mente opera anche una classificazione di carattere morfologico in base alla quale associa ad un'entità esistente una relativa forma geometrica. In effetti questa operazione è frutto di una ideazione di forme astratte non esistenti nella realtà fenomenica rispetto alle quali si cerca di operare una determinazione di similitudine.

Per essere più chiari: la piramide di Cheope nella realtà non ha affatto la forma di una piramide perché le pietre che la costituiscono determinano una forma molto irregolare, ben lontana dalla perfetta e liscia superficie delle facce del solido ideale, ma nessun essere umano di buon senso direbbe di aver visitato la sfera di Cheope; per quanto lontana dalla forma pura, è comunemente accettato che quel monumento abbia la forma della piramide per come abbiamo imparato a conoscerla da piccoli. Analogamente, un pallone di calcio è simile ad una sfera, ma non è una sfera, un dado su un tavolo da gioco è simile ad un cubo, ma non è un cubo.

La riflessione potrebbe portare molto lontano a disquisire su solidi platonici, sul concetto di modello nel disegno, sulla rispondenza del modello alla realtà, ma non è tra gli obiettivi

di questo libro. Basti per ora riflettere semplicemente sul fatto che l'operazione del disegno, tra le varie operazioni di concettualizzazione, opera anche quella di ricondurre la realtà, complessa e continua, ad entità geometriche più o meno elementari rispondenti a categorie di pensiero che consentono la riconoscibilità della forma.

Anche senza aver fatto studi specifici, chiunque può riconoscere la differenza formale tra un pallone da calcio ed uno di rugby o avere percezione della "regolarità" di un uovo, mentre tutti avremmo difficoltà a definire univocamente la forma di una melanzana o quella del becco di un ornitorinco.

Questo accade perché i palloni e l'uovo sono riconducibili a solidi di rotazione, mentre la melanzana ha una forma descrivibile utilizzando concetti quali schiacciamento o deformazione, ma non è simile ad alcun solido "platonico", vale a dire una sfera, un cilindro, un cubo, un ellissoide o un poliedro. In realtà anche la melanzana ed il becco dell'ornitorinco sono perfettamente descrivibili sotto l'aspetto geometrico, ma, semplicemente, non risulta conveniente cercare di descriverne la forma tramite similitudine con solidi elementari.

Per descrivere la realtà e la forma delle cose ci serviamo, dunque, di concetti e categorie mentali che sono frutto di un processo di astrazione di cui spesso non siamo neanche consapevoli.

L'operazione a cui siamo abituati, pur avendo un livello di concettualizzazione altissimo, è relativa alla riconducibilità delle forme a figure piane o tridimensionali elementari. Pur essendo forme non esistenti in natura tutti abbiamo dimestichezza con figure quali il triangolo, il quadrato, il cerchio, la piramide, il cubo, il cilindro, la sfera. Paradossalmente, queste figure non hanno equivalenti simili facilmente rintracciabili in natura: le "sfere celesti" di sferico hanno ben poco e ci stupiremmo di trovare un sasso perfettamente sferico o un tronco perfettamente cilindrico. La stessa terra su cui passeggiamo ogni giorno non è geometricamente una sfera né un ellissoide, e i topografi preferiscono parlare di geoide. Tra l'altro, se anche fosse sferica, montagne, valli, fiumi e quant'altro

ne altererebbero la purezza della forma.

Eppure la familiarità con queste forme ha da tempi antichissimi incoraggiato una riproduzione della realtà che riconduce la complessità delle forme a quelle enunciate.

La struttura del pensiero comune è talmente radicata nel riconoscimento di queste forme che sembrano appartenere ad un patrimonio figurativo di immediata riconoscibilità. Un qualsiasi programma di CAD mette subito a disposizione dell'utente una barra di strumenti con cui si possono costruire figure piane regolari quali poligoni regolari, cerchio, ellisse, per quanto riguarda le figure piane, e tra gli strumenti di costruzione 3D sono immancabili i solidi elementari.

A queste forme elementari si possono affiancare geometrie che riescono a descrivere oggetti dalla forma "strana". Si tratta delle *NURBS*, superfici che consentono di descrivere forme complesse, servendosi di curve generatrici e direttrici non necessariamente descritte da figure piane elementari.

Un altro modo per ottenere forme complesse è quello di applicare a geometrie elementari processi di deformazione (torsione, schiacciamento, etc.). In questo caso la modellazione si serve di solidi elementari che subiscono deformazioni che ne alterano totalmente o parzialmente la forma originaria.

Si possono, pertanto, individuare diversi criteri di modellazione: modellazione di solidi e superfici elementari, modellazione di superfici per interpolazione di curve, deformazioni parametriche o puntuali di solidi e superfici. I capitoli che seguono cercheranno di spiegare ed esemplificare le tipologie geometriche appena enunciate, riportando alcuni esempi di costruzione di modelli costruiti con diverse modalità.

SOLIDI ELEMENTARI

Spesso forme complesse possono essere il risultato di combinazioni, alterazioni o modifiche di solidi elementari. Per solidi elementari definiamo quelle figure geometriche descrivibili come forme "pure": la sfera ed il cubo, per esempio, sono solidi elementari¹.

Queste figure si costruiscono introducendo quei parametri che ne definiscono inequivocabilmente gli aspetti formali e dimensionali (Fig. 79).

La *sfera*, ad esempio, è definibile introducendo le coordinate x , y del suo centro ed il raggio r ; il *cubo* è definibile inserendo le coordinate di uno spigolo e la lunghezza del lato, mentre per definire un *parallelepipedo* è necessario individuare il posizionamento di uno spigolo e la lunghezza dei tre lati.

Il *prisma* a base poligonale ha come figura di base un poligono regolare ad n lati ed un'altezza h , e prende il nome dal poligono di base: prisma a base triangolare, a base quadrata, a base pentagonale, ecc...

Il solido definito dai lati di un poligono regolare di base e dall'estremità dell'altezza si definisce *piramide*, che, come nel caso dei prismi a base poligonale, prende il nome dal poligono di base: piramide a base triangolare, a base quadrata, a base pentagonale, ecc...

Il *cilindro* necessita delle informazioni relative al cerchio di base (coordinate del centro ed estensione del raggio) ed all'altezza.

Per definire un *cono* bisogna posizionare il centro del cerchio di base, il suo raggio, e definire l'altezza.

Alcuni programmi consentono di disegnare anche altri solidi

¹ Afferma G. Guarini, architetto barocco: "Tutti i volti nascono da sei corpi tondi, che tagliati per mezzo fanno sei sorte di volti primi, ed elementari", in R. Bonelli e P. Portoghesi (a cura di), *Guarino Guarini, Architettura Civile*, Milano 1968, p. 454.

di uso meno comune, come, ad esempio, l'*ellissoide*, un solido la cui caratteristica è quella di essere definito da sezioni orizzontali, verticali ed oblique ellittiche.

Un'altra famiglia di solidi elementari è costituita dai *poliedri*, solidi definiti dall'accostamento di facce poligonali piane. Un esempio semplice è dato dal *tetraedro*, descritto da quattro facce triangolari. Tra i solidi poliedrici si ricordano l'*esaedro* (il cubo – 6 facce quadrate), l'*ottaedro* (8 facce triangolari), il *dodecaedro* (12 facce pentagonali), l'*icosaedro* (20 facce triangolari).

L'utilizzo di questi solidi è estremamente limitato e quasi nessun programma di CAD ne consente la costruzione parametrica diretta.

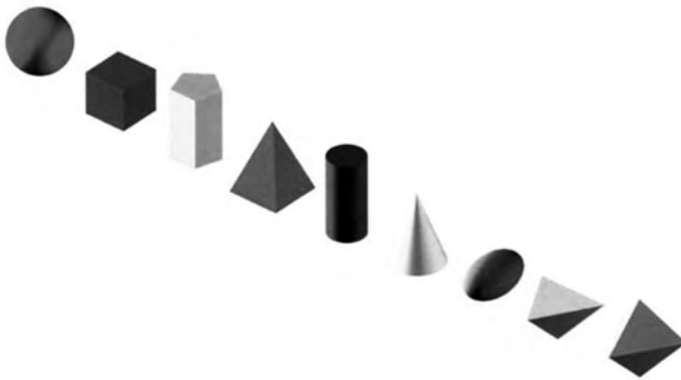
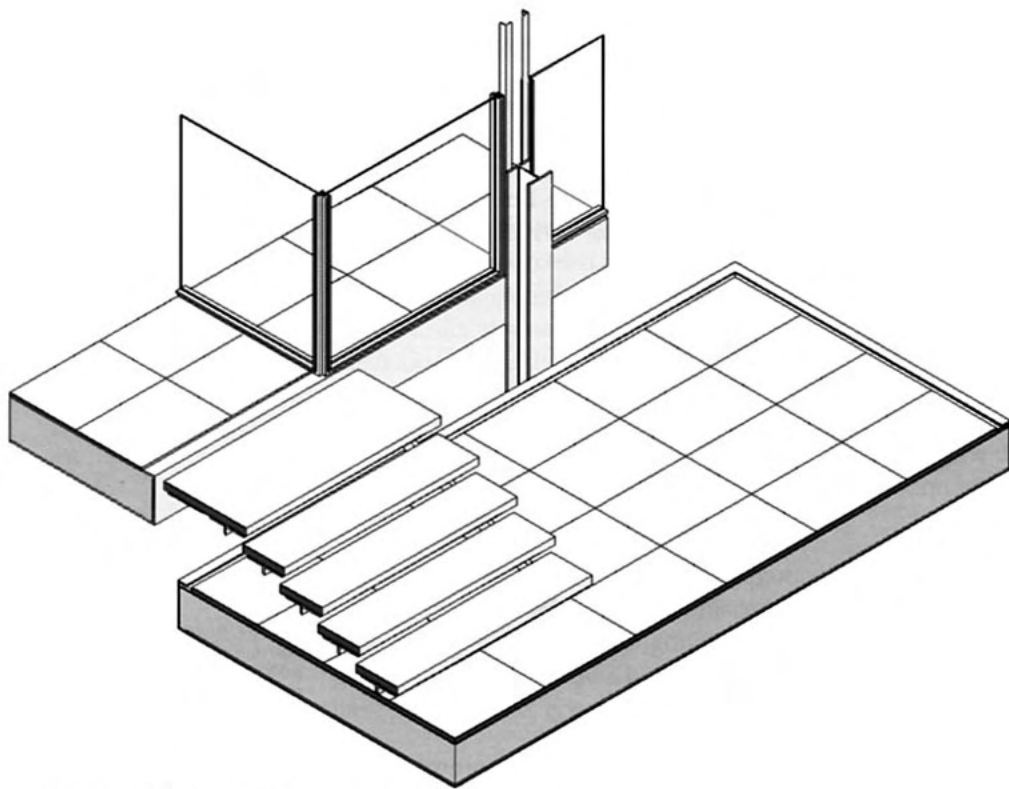


Fig. 91 Alcuni solidi elementari. La sfera, il cubo, il prisma retto a base poligonale, la piramide a base quadrata, il cilindro, il cono, l'ellissoide, il tetraedro appartengono a tale categoria.



Fabrizio Avella: studio di un particolare di Casa Farnsworth di L. Mies Van der Rohe. I solidi sono ottenuti tramite estrusione lineare di figure piane elementari.

Si definiscono superfici e solidi di *traslazione* quelle figure geometriche tridimensionali ottenute tramite scorrimento di una curva aperta (per le superfici) o delimitante una porzione piana chiusa (per i solidi).

La traslazione può avvenire lungo un segmento retto, lungo una curva o verso un punto. A seconda del percorso di traslazione si possono individuare diversi processi di configurazione.

Bisogna precisare che alcuni programmi differenziano l'esito della traslazione a seconda che si operi tramite *estrusione* o tramite *sweep*.

Per *estrusione*, infatti, si intendono quell'operazione di traslazione in cui la curva generatrice rimane su piani sempre paralleli a quelli della giacitura originaria (Fig. 93), mentre per descrivere la traslazione in cui la sezione cambia giacitura e si posiziona su piani sempre ortogonali alla curva di sviluppo usano procedure di *sweep*². Il termine è difficilmente traducibile in italiano e letteralmente vuol dire spazzare: richiama, dunque, il concetto di traiettoria che una scopa lascia sulla polvere mentre si sposta.

Quasi tutti i programmi, comunque, interpretano l'estrusione come l'esito della traslazione di una curva piana lungo un percorso, retto o mistilineo, in cui la curva è sempre su un piano perpendicolare alla traiettoria di estrusione.

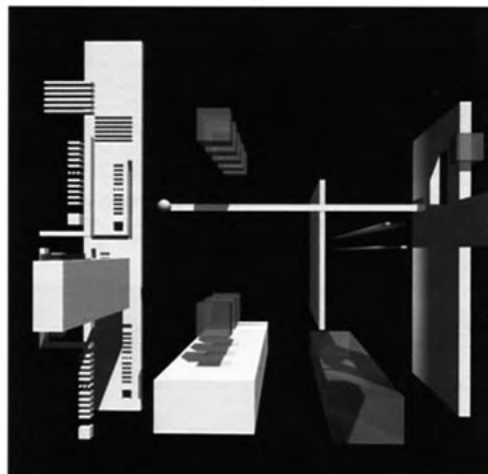
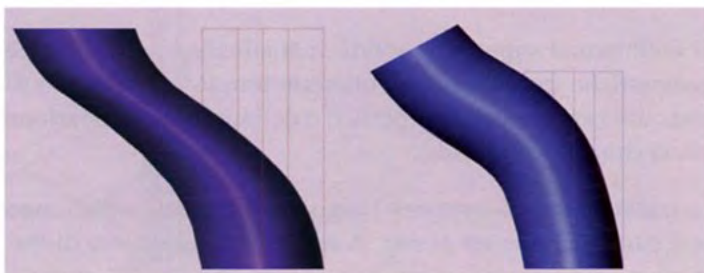


Fig. 93 Fabrizio Avella: composizione ottenuta tramite estrusione lineare di figure piane elementari.

² Lo *sweep* è, in realtà, una figura di rototraslazione, ma si vedrà per quale motivo è stato scelto di trattarlo in questo capitolo.

In sintesi, il risultato della traslazione di una curva piana lungo una curva è definito come estrusione nell'immagine di sinistra e come sweep nell'immagine di destra (Fig. 94). Si tratta, comunque, in entrambi i casi di superfici ottenute tramite scorrimento o traslazione di una curva che si definirà *generatrice*, lungo una traiettoria, che si definirà *direttrice*.

Fig. 94 Superfici di traslazione: a sinistra, estrusione di una curva, a destra, sweep ad un binario. La differenza consiste nella giacitura della sezione generatrice durante la traslazione lungo la traiettoria: nel primo caso rimane invariata, nel secondo è sempre perpendicolare alla tangente della curva.



ESTRUSIONE LINEARE RETTA

Si definisce *estrazione lineare retta* il processo di conformazione secondo cui una superficie o un solido vengono generati tramite la traccia lasciata da una curva *generatrice* (g) che scorre lungo un vettore retto, definito *direttrice* (d) (Fig. 95).

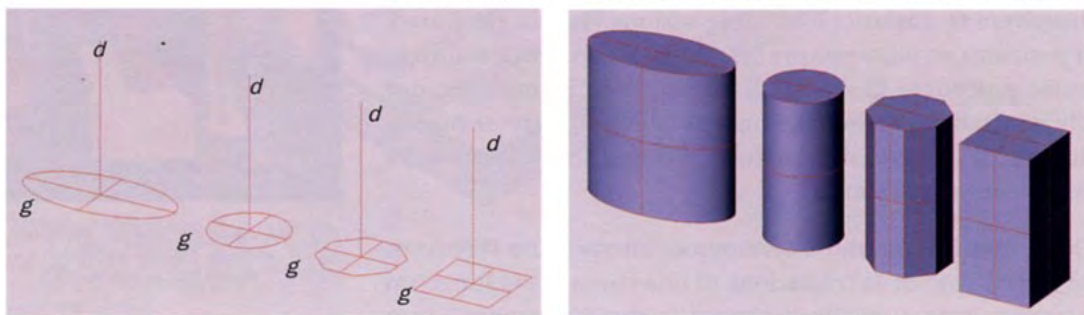


Fig. 95 Solidi di traslazione ottenuti tramite estrusione lineare semplice di figure piane.

L'estrazione può essere *semplice*, *rastremata* o *degenerante* verso un punto.

Nell'*estrazione lineare semplice* la curva generatrice non subisce trasformazioni lungo il percorso di estrusione. L'esito formale dipende soltanto dalla forma della curva generatrice e dalla lunghezza del vettore di estrusione. In questo tipo di traslazione la curva generatrice giace su un piano perpendi-

colare al vettore di estrusione e mantiene inalterata la propria giacitura.

Il cilindro, il cubo, il parallelepipedo, il prisma retto a base poligonale, possono essere considerati solidi di traslazione ottenuti con questo procedimento.

Nell'*estrazione lineare rastremata*, lungo lo scorrimento la curva generatrice mantiene inalterata la propria giacitura e la propria forma ma diminuisce, o aumenta, linearmente, la dimensione (Fig. 96).

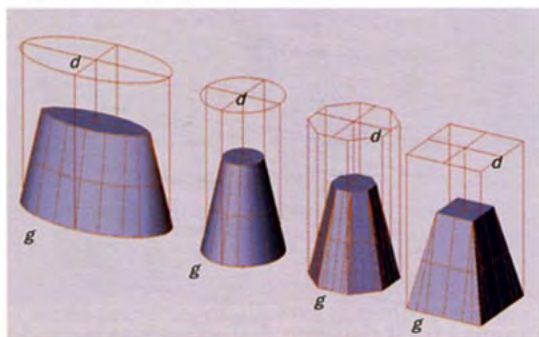


Fig. 96 Solidi di traslazione ottenuti tramite estrusione lineare rastremata di figure piane.

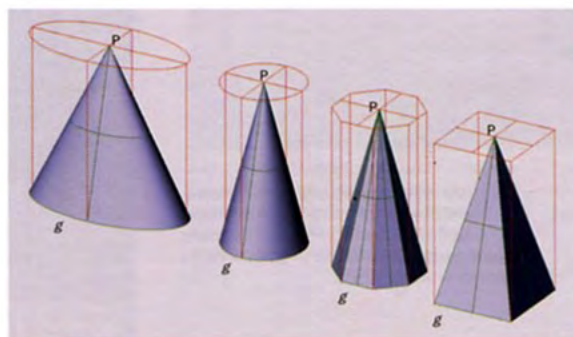


Fig. 97 Solidi di traslazione ottenuti tramite estrusione lineare degenerante verso un punto di figure piane. Con questa funzione si possono generare anche coni e piramidi.

Quando l'angolo di rastremazione supera un certo valore, la traslazione della curva fa sì che questa degeneri in un segmento o in un punto.

Nell'*estrazione lineare verso un punto* la curva generatrice scorre lungo l'asse di traslazione (che non necessariamente dev'essere ortogonale alla giacitura della figura di base), mantenendo inalterata la propria forma, ma la propria dimensione diminuisce fino a degenerare in un punto P (Fig. 97).

L'angolo tra il lato della sezione del solido o della superficie e l'asse di traslazione viene definito *angolo di rastremazione* (Fig. 98).

Un cono ed una piramide, oltre ad essere definibili come forme elementari, si potrebbero considerare anche come figure risultanti da una traslazione di un cerchio o di un poligono secondo una legge di questo tipo.

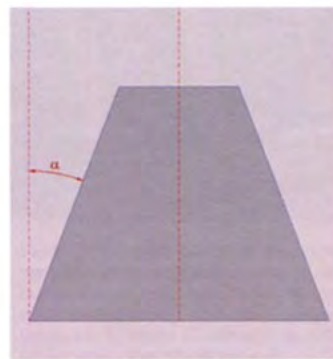
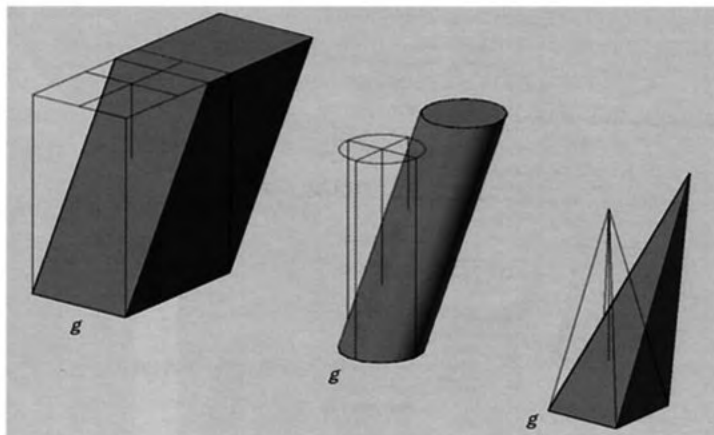


Fig. 98 Sotto, angolo di rastremazione.

I tipi di traslazione lineare appena descritti mantengono la condizione di perpendicolarità tra il piano della curva generatrice ed il vettore di traslazione. Nel caso in cui tale condizione non venga imposta si ottiene una *traslazione lineare obliqua* in cui si mantiene comunque il parallelismo dei piani della sezione generatrice (Fig. 99).

Fig. 99 Solidi di traslazione ottenuti tramite estrusione lineare obliqua. Si noti il parallelismo tra la giacitura della sezione di base e quella della sezione sommitale.



Si osservi la differenza tra il risultato dell'estrusione secondo un asse perpendicolare al piano della curva (*estrusione retta*) ed un asse obliquo (*estrusione obliqua*) rispetto a detto piano³. Talvolta i programmi non considerano la traslazione generica come caso particolare dell'estrusione lineare. Il limite è superabile utilizzando procedure di estrusione lungo una traiettoria.

ESTRUSIONE LUNGO UNA CURVA

L'*estrusione di una curva lungo una traiettoria* genera una figura tridimensionale in cui la forma è determinata dallo scorrimento di una curva generatrice (g) lungo una curva direttrice (d). Sia la generatrice che la direttrice possono essere continue o spezzate, chiuse o aperte.

In questo tipo di forme è importante capire se, e come, cambia la giacitura della sezione piana lungo il percorso di traslazione.

³«Diremo rette le modanature le cui generatrici appartengono a piani perpendicolari alla direttrice, oblique le altre.» In R. Migliari, *Geometria dei modelli*. In R. Migliari, *Geometria dei modelli*, cit. p. 202.

Alcuni programmi interpretano correttamente tale costruzione geometrica per cui lungo il percorso di traslazione la figura mantiene piani di giacitura paralleli a quello originario. In questo caso l'inclinazione del piano di giacitura della sezione piana non varia ed è parallelo, dunque, a quella finale.

Come già accennato, la maggior parte dei programmi di modellazione non interpreta in questo modo il concetto di traslazione lungo una curva (Fig.100).

Spesso, infatti, definiscono estrusione lungo una curva il processo per cui la curva generatrice, lungo il percorso di traslazione, va modificando il piano di giacitura che resta perpendicolare alla tangente della curva direttrice.

In questo caso, in effetti, si dovrebbe parlare di *rototraslazione*, in quanto la curva generatrice ruota man mano che avviene la traslazione, ma si è scelto di trattarli in questo paragrafo perchè molti programmi intendono in questo modo l'estrusione lungo una curva. La funzione che consente il mantenimento dell'ortogonalità tra la sezione piana e la tangente della curva di estrusione può prendere il nome di *sweep lungo una traiettoria* (o *binario*), in cui è definito binario la traiettoria direttrice (Figg. 101-102).

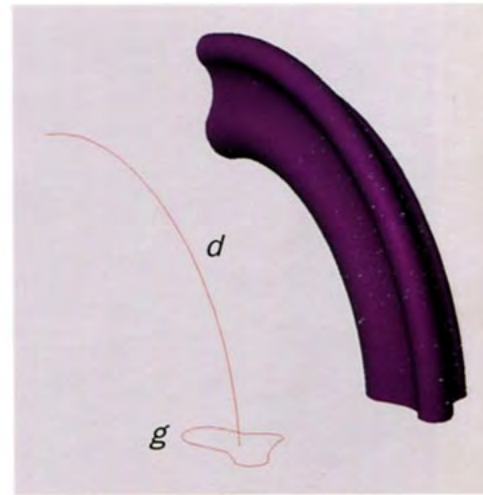
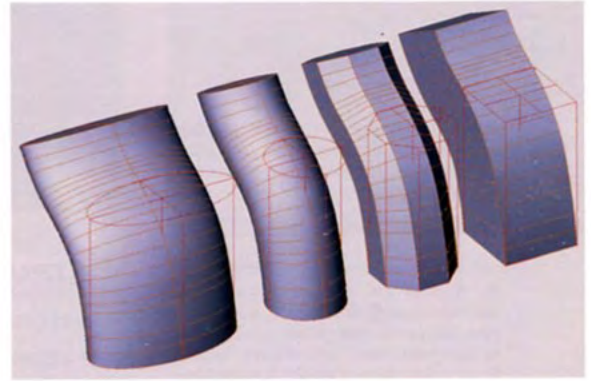
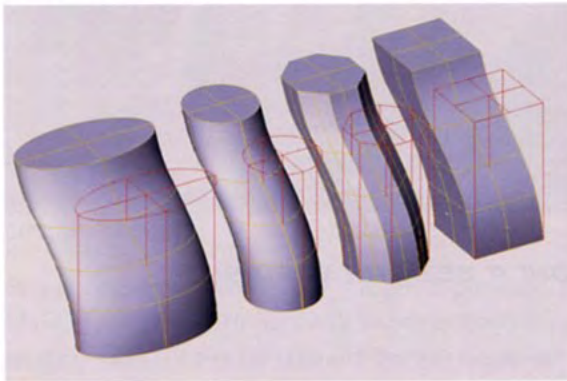


Fig. 100 Solido ottenuto tramite sweep lungo una traiettoria (molti programmi definiscono, impropriamente, questa forma tramite estrusione lungo una traiettoria).



Un altro motivo dell'inserimento della trattazione di questo tipo di superfici in questo paragrafo è dato dal fatto che spesso la funzione di sweep ad un binario è inserita nelle famiglie di comandi comprendente lo sweep lungo due traiettorie (trattato in seguito).

Figg. 101 - 102 Solidi di traslazione ottenuti tramite estrusione di una curva lungo una traiettoria. A sinistra: estrusione, a destra: sweep lungo un binario. Si osservi la differenza tra i due procedimenti.

ESTRUSIONI VERSO UN PUNTO

Analogamente a quanto visto con l'estrusione lineare, anche nel caso della estrusione lungo un percorso si può imporre la condizione che la curva generatrice subisca una progressiva riduzione delle proprie dimensioni fino a degenerare in un punto. Si ottiene, in questo caso, una figura di traslazione generata dall'*estrusione lungo una curva degenerante verso un punto*.

Per la generazione di queste figure tridimensionali la costruzione è analoga a quella del paragrafo precedente, con la differenza che, lungo lo sviluppo della traslazione, la dimensione della curva generatrice va diminuendo fino a degenerare verso il punto P (Fig. 107).

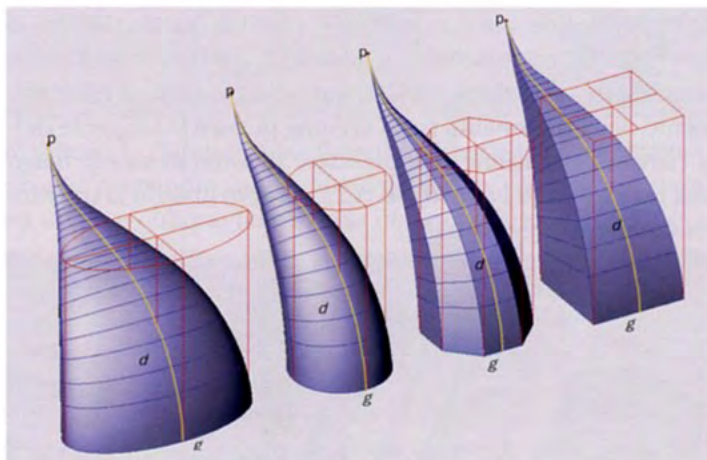


Fig. 107 Solidi di traslazione ottenuti tramite estrusione di una curva lungo una traiettoria, degeneranti verso un punto.

ESTRUSIONI A SEZIONE VARIABILE

Per ottenere le superfici ed i solidi di traslazione tramite *estrusione a sezione variabile* si introduce un ulteriore parametro: si fa in modo che la sezione piana ($g1$) di base subisca una trasformazione durante la traslazione fino ad acquisire la forma delle curve ($g2 - g3$) piane che intercetta lungo il percorso di traslazione.

Il processo può essere iterato più volte fino ad imporre alla curva di base di acquisire la forma di quante si voglia curve piane. Si può avere, pertanto, una successione di sezioni che si susseguono lungo un asse, o lungo una traiettoria.

Il parametro che rimane fisso è l'asse o la traiettoria di traslazione, assunto come vettore di estrusione.

Il risultato è raggiungibile in due modi. Il primo consiste nell'utilizzare processi di *estrazione* e di *sweep lungo un binario*, imponendo la condizione di appartenenza delle curve intermedie ($g_2 - g_3$) alla superficie o al solido generato: lungo la traiettoria di estrusione, definibile come curva direttrice, la sezione di base (g_1) trasla e durante la traslazione modifica la sua forma in modo da imporre l'appartenenza delle sezioni intermedie alla superficie finale.

L'altro è quello di utilizzare il *loft*, che prevede l'interpolazione di una successione di curve, con presenza o meno di una traiettoria di traslazione. Le superfici loft, che hanno la capacità di interpolare curve, ricevono, in questo caso, il vincolo di generarsi secondo uno sviluppo che rispetti l'andamento della curva direttrice. Di solito si impone la condizione di appartenenza di un certo numero di curve piane, le cui caratteristiche morfologiche possono essere anche molto differenti⁴.

Lo sviluppo della superficie o del solido può avvenire lungo un percorso che non necessariamente dev'essere retto.

Le figure mostrano lo scorrimento di curve variabili lungo un asse verticale retto e lungo una curva policentrica (Fig. 108-109).

Si può osservare come tali superfici possono soddisfare le condizioni di appartenenza di curve generatrici ad andamento geometrico anche molto differente: a sinistra il cerchio di base si trasforma, durante lo scorrimento, in un'ellisse e poi, nuovamente, in un cerchio di diametro inferiore; a destra, il quadrato di base si deforma fino a diventare un ottagono e, in sommità, in un cerchio.

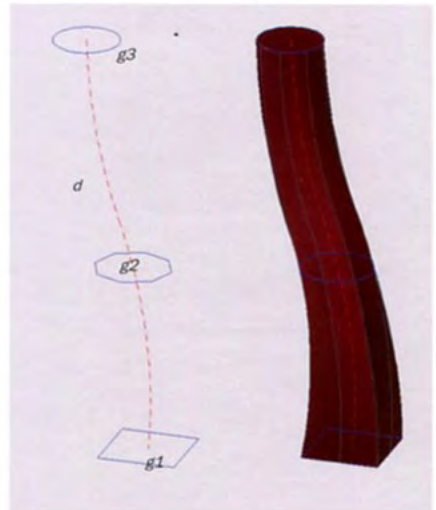
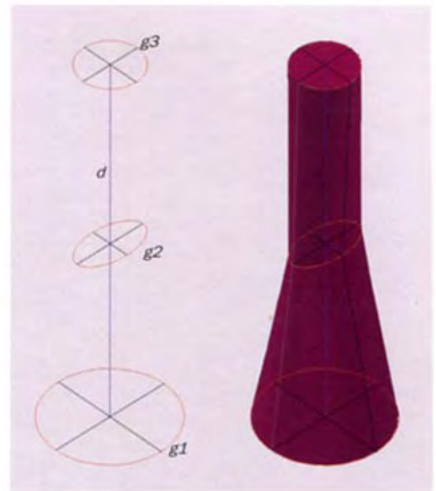


Fig. 108 - 109 Solidi di traslazione ottenuti tramite estrusione di una curva lungo una traiettoria, nel primo caso retta, nel secondo con doppia curvatura, con variazione morfologica della curva durante il processo di traslazione.

⁴ La costruzione del loft sarà approfondita successivamente. In questo paragrafo vi si fa cenno in quanto risulta uno dei metodi utilizzabili per ottenere questa forma.

SWEEP DI CURVE LUNGO DUE TRAIETTORIE

Un caso molto particolare di traslazione si ha quando una curva ($g1$) scorre non lungo una sola traiettoria ma contemporaneamente lungo due traiettorie, definite da curve piane o tridimensionali ($t1$, $t2$).

La forma della superficie risultante è vincolata dalla forma della curva iniziale e da quella della traiettorie.

In questo caso la possibilità di generare superfici o solidi di questo tipo è data univocamente dal processo di generazione di uno *sweep lungo due binari*.

Risulta spesso conveniente imporre l'appartenenza di due punti della curva generatrice alle traiettorie di scorrimento. Tale condizione determina un miglior controllo dell'alterazione della dimensione della sezione che, man mano che procede lungo lo scorrimento, deve adattarsi ai due binari.

Si osservi l'andamento della circonferenza blu man mano che scorre lungo le traiettorie segnate in rosso: la sua dimensione va diminuendo per adattarsi all'andamento dei binari e per far sì che la condizione di appartenenza dei punti del diametro alle curve binario sia rispettata (Fig. 110).

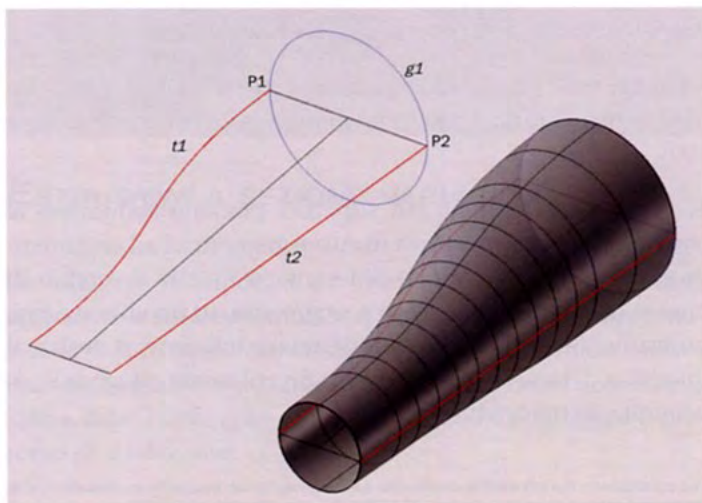


Fig. 110 Superficie di traslazione ottenuta tramite scorrimento (sweep) di una sezione lungo due traiettorie (binari).

Lo sweep precedentemente descritto può presentare un ulteriore livello di complessità: infatti, oltre a definire due traiettorie di scorrimento, si può imporre la condizione di appartenenza di un numero illimitato di sezioni intermedie alla superficie da generare; il risultato è maggiormente controllabile se alcuni punti appartenenti alle sezioni intermedie sono anche giacenti sulle curve di traiettoria.

La sezione iniziale, dunque, subisce durante lo scorrimento varie alterazioni morfologiche o omotetiche per soddisfare le condizioni di appartenenza delle generatrici che possono avere forme anche molto dissimili.

Prendendo in esame il caso precedente, si supponga di mantenere inalterata la sezione circolare iniziale e le curve di scorrimento.

Si imponga, però, la condizione di appartenenza di ulteriori curve-sezione ($g2$, $g3$) alla superficie da ottenere. Se si confronta il risultato con la figura precedente ci si accorge di come la presenza di ulteriori curve alteri in maniera significativa l'esito formale (Fig. 111).

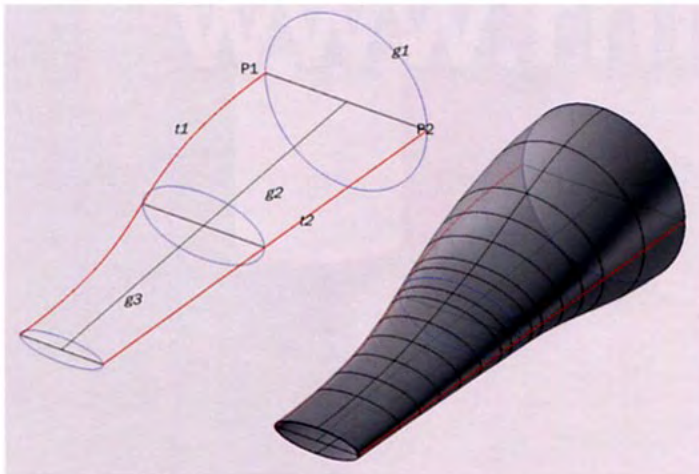


Fig. 111 Superficie di traslazione ottenuta tramite scorrimento (sweep) di una sezione lungo due traiettorie (binari), con interpolazione di sezioni trasversali.

Questo processo morfogenetico consente di dar vita a forme molto complesse, in cui si ha la necessità di un forte controllo sia delle sezioni trasversali, sia delle traiettorie di scorrimento.

Si può ipotizzare, per esempio, una curva iniziale perfettamente circolare ($g1$), due binari non necessariamente uguali tra loro ($t1, t2$) ed una curva finale schiacciata ($g2$), come nel caso della porzione del beccuccio di un asciugacapelli (Fig. 112).

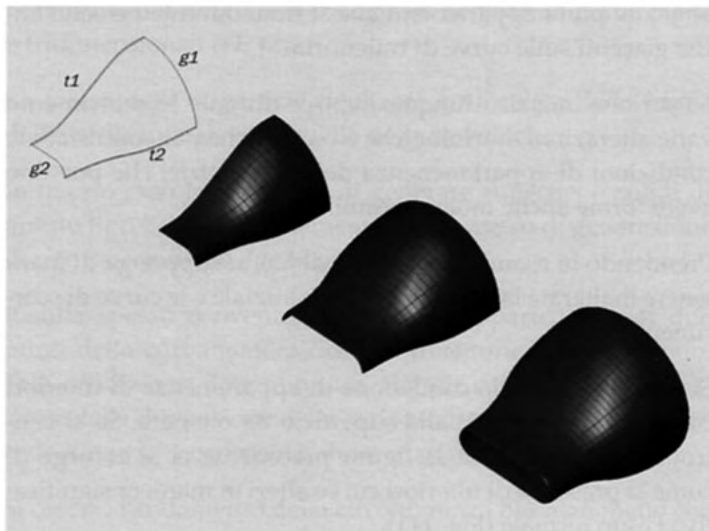
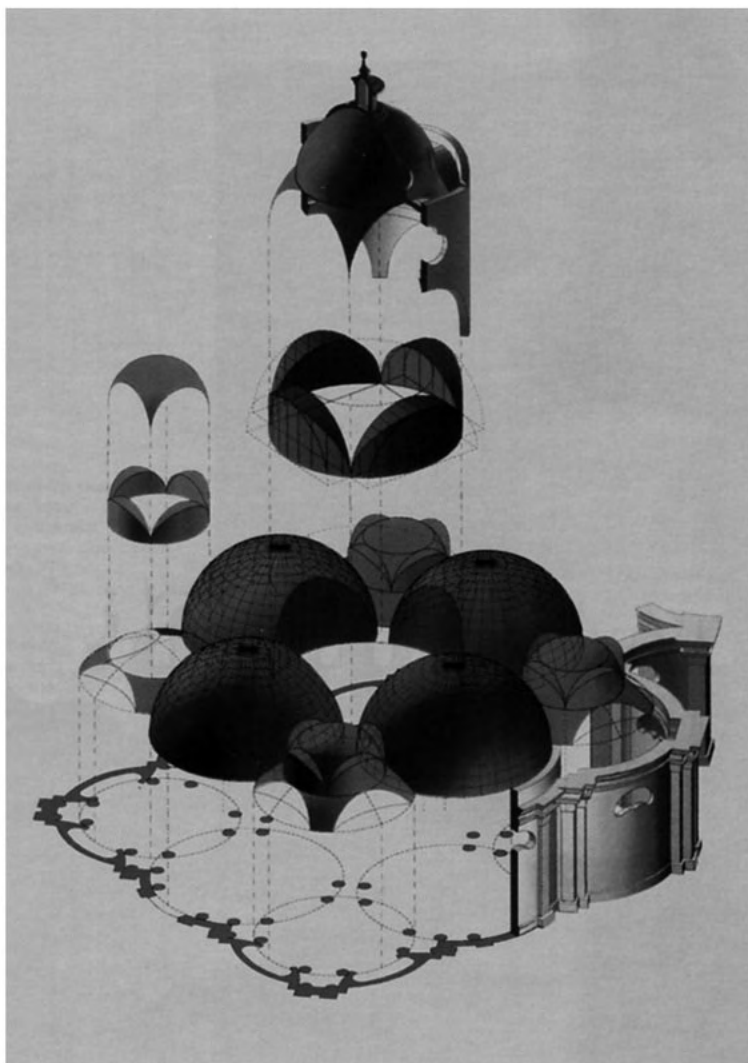


Fig. 112 Beccuccio di un phon ottenuto tramite doppia copia speculare di una superficie generata tramite sweep su due binari di due curve piane.



Fabrizio Avella, ricostruzione della chiesa di S. Filippo Neri di G. Guarini.

ASSE ED ANGOLO DI RIVOLUZIONE

Si definiscono superfici e solidi di rivoluzione quelle figure geometriche generate dalla traccia che una curva (c) lascia nel suo percorso di rotazione intorno ad un asse, detto *asse di rivoluzione* (a).

Il percorso di rivoluzione dei singoli punti appartenenti alla curva è costituito da una circonferenza giacente su un piano perpendicolare all'asse di rivoluzione.

Le relazioni tra l'asse di rivoluzione e la curva determinano esiti formali anche molto differenti.

Molti oggetti di uso comune hanno questa forma: vasi, bottiglie, portalampane, ecc.. Anche molte cupole e volte di architetture, soprattutto di carattere religioso, sono riconducibili a forme di questo genere.

In generale, la forma di una superficie o di un solido di rivoluzione è determinata dai seguenti parametri: la forma e la dimensione della sezione piana; il sistema di relazioni tra il piano della sezione e l'asse di rotazione; la distanza dell'asse di rotazione dai punti della sezione piana. Osservando i punti della curva generatrice del vaso raffigurato, si intuisce che se si cambia la sezione piana generatrice cambia la forma del vaso (Fig. 114).

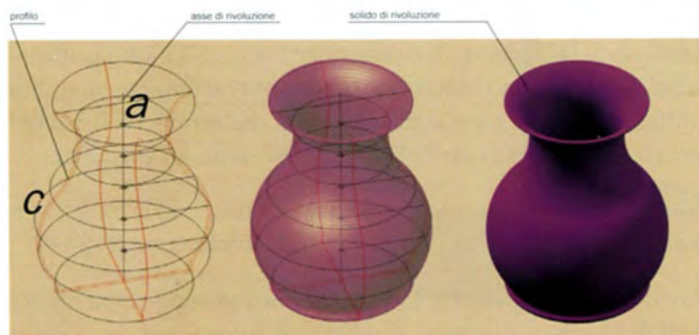


Fig. 114 Solido di rivoluzione.

Oppure, se si cambiasse la direzione dell'asse di rotazione dell'ugello riportato nella pagina successiva, la sua forma subirebbe alterazioni anche molto evidenti.

La sezione, evidenziata in rosso, determina il profilo che definisce univocamente il solido di rivoluzione dell'ugello (Fig. 115).



Fig. 115 Saverio Albano, ugello per soap dispenser. In rosso è evidenziata la sezione dell'oggetto che determina la forma del solido di rotazione.



Figg. 116 - 118 Toro o anello. La forma è ottenuta tramite rivoluzione di una circonferenza il cui piano di giacitura comprende l'asse di rotazione.

Una particolare figura di rivoluzione è definita dal **toro** (o **anello**), ottenibile dalla rotazione di una circonferenza (nel caso della superficie) o di un cerchio (per ottenere un solido) il cui piano di giacitura contiene l'asse di rivoluzione. La definizione della forma è data dal raggio della circonferenza generatrice e dalla distanza del suo centro dall'asse di rivoluzione (Fig. 116-118).

L'angolo di rivoluzione definisce l'estensione angolare della superficie o del solido. Si osservi la differenza della rivoluzione di 270° e di 360° della circonferenza che genera la superficie torica.

Le superfici ed i solidi di rivoluzione sono stati molto utilizzati nella produzione industriale in quanto facilmente ottenibili utilizzando torni meccanici, sia per la realizzazione fisica del pezzo, sia per realizzare gli stampi necessari ad eseguirli.

Nella lampada da tavolo **Tizio** sono riconoscibili la base e i distanziatori dei braccetti come solidi di rivoluzione (Fig.119).

Anche nella lampada da tavolo **Tolomeo** vi sono elementi definibili grazie a forme di rivoluzione intorno ad un asse: si

possono riconoscere il portalampada, la base e la prima porzione dell'attacco per il braccio snodabile (Fig.120).

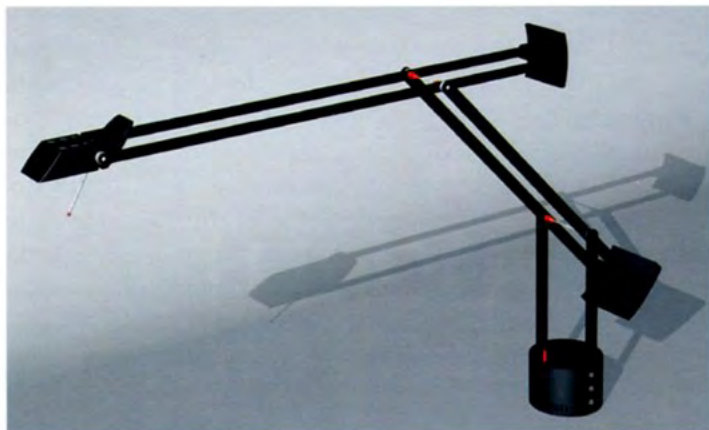


Fig. 119 Monica Meschis, lampada da tavolo Tizio. Si possono riconoscere vari componenti definibili come solidi di rivoluzione



Fig. 120 Monica Curto Pelle, lampada da tavolo Tolomeo. Il portalampada, e la base presentano elementi definiti da solidi di rivoluzione.

I solidi di rotazione sono stati molto utilizzati, per motivi di carattere simbolico, costruttivo, nell'architettura religiosa. Il panorama urbano delle nostre città, ma anche di quelle in cui sono rimaste tracce dell'architettura bizantina o islamica, è segnato spesso da coperture di edifici religiosi riconducibili a solidi di rotazione dalla forma più o meno complessa.

La forma delle coperture voltate della chiesa di San Filippo Neri di Guarini, la cui volumetria è data da una ricercata composizione, è generata da intersezioni, incastri, sovrapposizioni di solidi di rotazione: il primo tamburo su cui sono visibili gli arconi di transizione alle nicchie laterali, i pennacchi di imposta della cupola principale, la cupola centrale e le volte degli spazi perimetrali sono tutte superfici generate da curve piane che ruotano intorno ad assi verticali, oltre, ovviamente, al fusto delle colonne di sostegno (Fig. 121).



Fig. 121 Fabrizio Avella, ricostruzione della chiesa di S. Filippo Neri di G. Guarini. La complessità spaziale di quest'opera è ottenuta da sapienti composizioni di solidi di rotazione: le colonne, il tamburo, la cupola centrale sono elementi architettonici ottenuti tramite rivoluzione di profili.



Rocco Vitrano, modello della Cappella dei Marinai della chiesa dell'Annunziata a Trapani. Si noti la differenza tra le superfici di rivoluzione, quali la cupola ed i pennacchi, e quelle di rototraslazione, nelle nicchie e nel catino absidale.

Nella pagina a fianco è rappresentato il modello di un'architettura religiosa: la *Cappella dei Marinai*, sita all'interno della chiesa dell'Annunziata a Trapani. Si osserva anche in questo caso un largo uso di superfici di rivoluzione: la cupola è infatti una perfetta calotta poggiata su una porzione velica su base ottagonale, generata anch'essa da una superficie di rivoluzione. I catini angolari, inoltre, mostrano ulteriori elaborazioni di questo tipo di superficie: alle nicchie semicilindriche si sovrappongono trombe aggettanti ad andamento semicircolare, ed anche sulle pareti si scorge una teoria di piccole nicchie semicilindriche sormontate da piccoli catini.

In quest'architettura religiosa sono riconoscibili alcune superfici di rivoluzione particolari: l'andamento rigato di queste superfici di rivoluzione è determinato dall'introduzione di un ulteriore parametro, ossia un binario di scorrimento della sezione durante il percorso di rotazione intorno all'asse, che determina *superfici di rivoluzione lungo una traiettoria* (o binario).

TRAIETTORIA DI TRASLAZIONE PIANA

L'introduzione di un binario di scorrimento complica l'esito formale dell'operazione di rivoluzione di una curva intorno ad un asse, in quanto i punti della curva stessa devono rispettare la condizione di appartenenza al binario.

Si osservi la Fig. 123: se l'arco di circonferenza c , evidenziato in blu, compie una rivoluzione di 180° intorno all'asse a , segnato in rosso, il percorso del punto P seguirà una traiettoria perfettamente circolare e il risultato sarà una semicalotta sferica. Se, invece, si impone la condizione di appartenenza del punto P alla traiettoria t , evidenziata in verde, durante il percorso di rivoluzione, tale condizione impone a tutti i

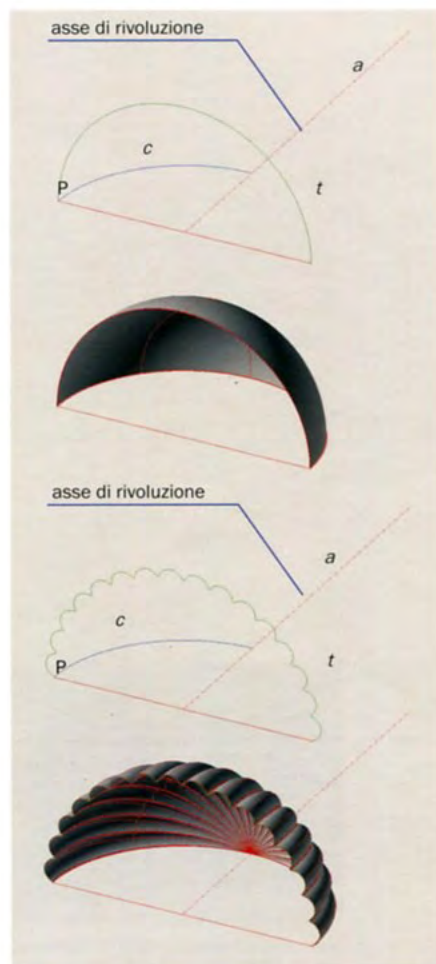


Fig. 123 Schema geometrico delle nicchie della Cappella dei Marinai. Nel percorso di rivoluzione intorno all'asse a il punto P scorre lungo la traiettoria t : se questa non è circolare la rivoluzione genera l'effetto "conchiglia" riportato in basso.

punti dell'arco di deformare il percorso di rivoluzione. Il modello della *Cappella dei Marinai* mostra come questa soluzione formale sia stata adottata nei catini angolari sottostanti la cupola, nella teoria di nicchie sottostanti il tamburo, nelle nicchie perimetrali dalla piccola abside e nella copertura del catino absidale. Tale forma, stilisticamente molto raffinata, è ritrovabile in molte architetture religiose rinascimentali e barocche.

L'immagine seguente mette a confronto processi di rivoluzione di una curva (c) intorno ad uno stesso asse verticale (a), imponendo però diverse traiettorie piane determinate da curve chiuse. Tali traiettorie (t) sono un'ellisse, una circonferenza, un ottagono, un quadrato. Si osservi come, a parità di condizioni determinate dal profilo generatore e dall'asse di rivoluzione, la forma generata subisce profonde mutazioni determinate dall'imposizione della condizione di appartenenza dei punti estremi delle curve-profilo alle traiettorie direttrici (Fig. 124).

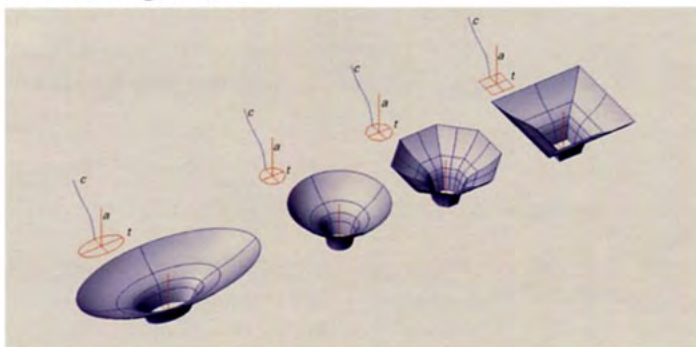


Fig. 124 Rivoluzione di un profilo intorno ad un asse e lungo una traiettoria. Non tutti i programmi consentono la generazione di queste superfici.

Si osservi, inoltre, come la rivoluzione di una curva intorno ad un asse lungo una traiettoria circolare, si configuri, in realtà, come semplice rivoluzione, in quanto, come già accennato, senza imposizione della traiettoria di scorrimento, una semplice rivoluzione intorno ad un asse determina tracce dei punti della curva profilo perfettamente circolari.

Le superfici di rivoluzione lungo un binario fin qui descritte presentano tutte una caratteristica comune: la traiettoria di scorrimento è costituita da una curva i cui punti giacciono tutti su un piano.

TRAIETTORIA DI TRASLAZIONE NON PIANA

Esistono, però, dei casi in cui il processo di rivoluzione lungo una traiettoria contempla la possibilità che quest'ultima non sia una curva piana. È il caso, ad esempio, della superficie ottenuta tramite rivoluzione di un arco di circonferenza (c), che ruota intorno ad un asse (a), e durante il processo di rotazione scorre lungo una traiettoria elicoidale (e).

Se si osserva la pianta di questa superficie si nota come la sua proiezione orizzontale determini la rotazione dell'arco rispetto al centro della circonferenza, mentre la vista frontale dà contezza della traslazione verticale che lo stesso arco subisce. Tale traslazione non avviene lungo un vettore retto ma, appunto, scorrendo lungo i punti dell'elica (Fig. 125).

Una superficie di questo genere si può identificare nella volta di copertura di scale elicoidali o a chiocciola, o, più semplicemente, in una comune molla (Fig. 126).

Per descrivere questa famiglia di superfici, si è usato il termine *rivoluzione* e il termine *scorrimento*. Poiché per rivoluzione possiamo intendere la traccia che un punto lascia durante

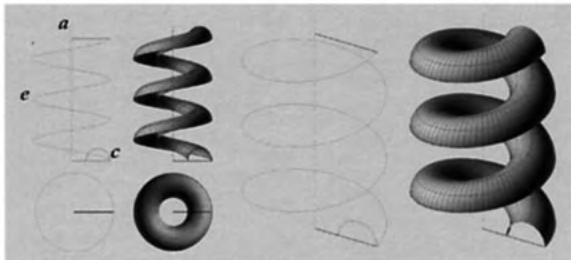


Fig. 125 Rivoluzione di un profilo intorno ad un asse e lungo una traiettoria: volta a botte lungo una traiettoria elicoidale. questa superficie è anche definita serpentino o vite di Saint-Gilles.

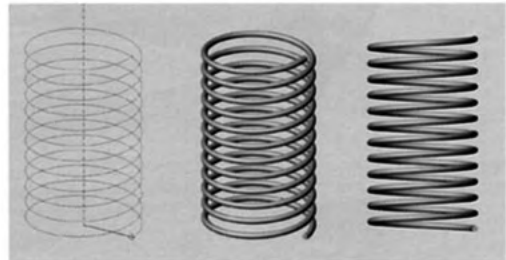
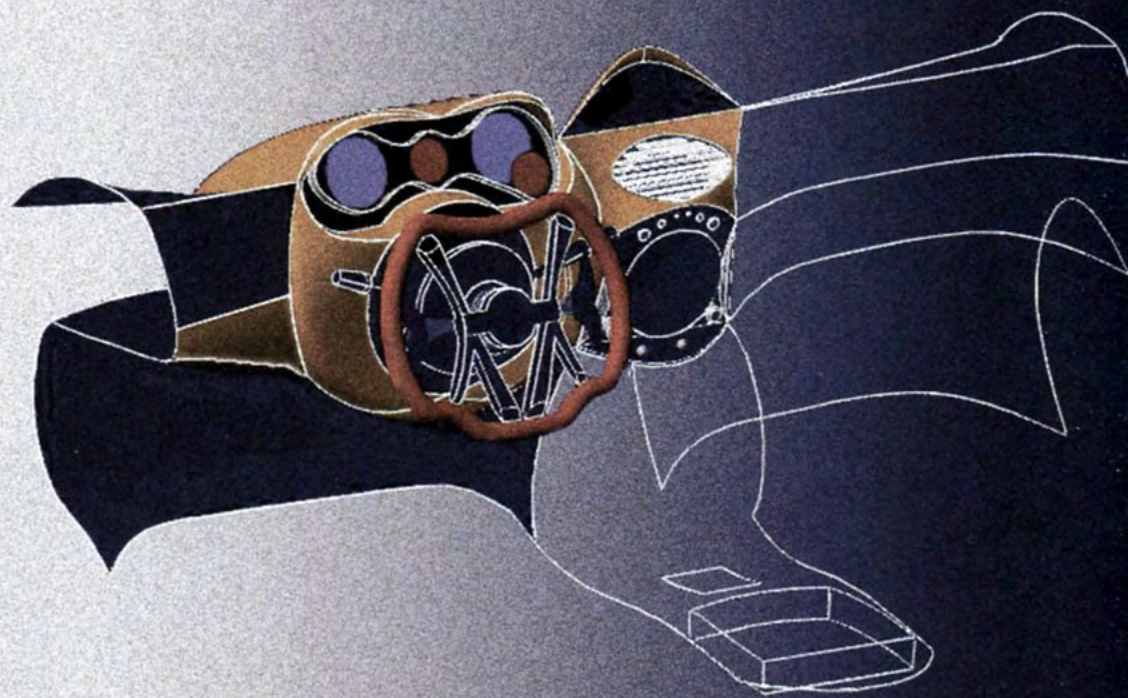


Fig. 126 Rivoluzione di un profilo circolare intorno ad un asse e traslazione lungo un'elica cilindrica: la superficie elicoidale risultante può essere impiegato per il disegno di una molla.

un moto di rotazione intorno ad un asse, e per scorrimento si può intendere un processo di traslazione lungo una traiettoria, per tali superfici si può usare la definizione di superfici di *rototraslazione*, in quanto la forma è generata grazie alla combinazione dei due processi.



Gianluca Cataldo, superfici d'interpolazione utilizzate per l'interno di un'auto sportiva. Grazie alle superfici d'interpolazione si possono generare forme complesse.

Per *superfici di interpolazione* si definiscono quelle superfici che sono generate a partire da punti e da curve piane o tridimensionali. La caratteristica di queste superfici è data dalla condizione di appartenenza dei punti e delle curve date alla superficie generata.

Dato, cioè, un insieme di punti e di curve, piane o tridimensionali, è possibile ottenere una superficie a cui appartengano sia i punti sia le curve dati.

In base alle condizioni di partenza, si possono identificare varie famiglie di superfici di interpolazione.

PATCHES

Nel caso in cui il dato di partenza sia costituito da soli punti, o da punti e curve le superfici di interpolazione sono definite *patches*.

La figura mostra la superficie ottenuta tramite interpolazione dei punti, che, solo ai fini di una più chiara comprensione, sono stati disposti su un tracciato a maglia planimetrica regolare (Fig. 128).

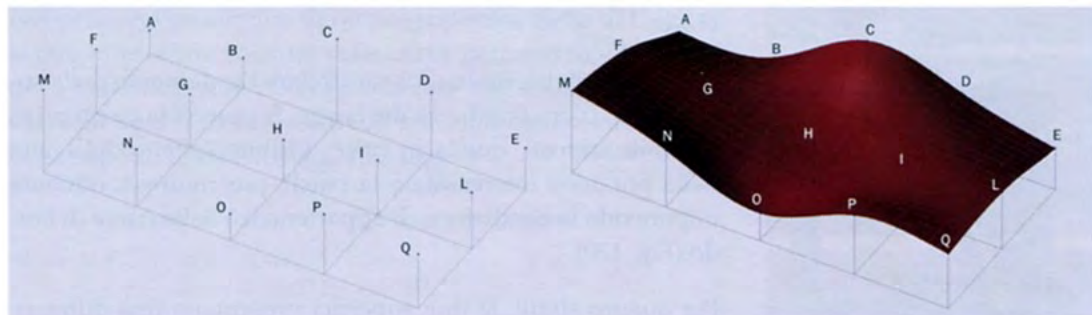


Fig. 128 Patch ottenuta tramite interpolazione di punti.

Può succedere che la superficie patch superi i confini delimitati dai punti stessi, al fine di garantire le condizioni di tangenza lungo tutte le direzioni. Nel caso in esame la superficie è stata ritagliata definendo solamente la porzione delimitata dai punti stessi. In questo caso, dunque, i punti appartengono alle *curve di bordo* della superficie di interpolazione.

Si supponga, ora, di mantenere inalterati i punti dell'esempio precedente e di introdurre delle curve (*a, b, c, d*), segnate in figura con il colore rosso. Si osserva chiaramente come la condizione di appartenenza di queste curve alla superficie patch determini una notevole alterazione morfologica rispetto a quella ottenuta tramite interpolazione di soli punti.

Anche in questo caso è stato operato un taglio della superficie limitandone l'estensione alla porzione interessata (Fig. 129).

Fig. 129 Patch ottenuta tramite interpolazione di punti e di curve.

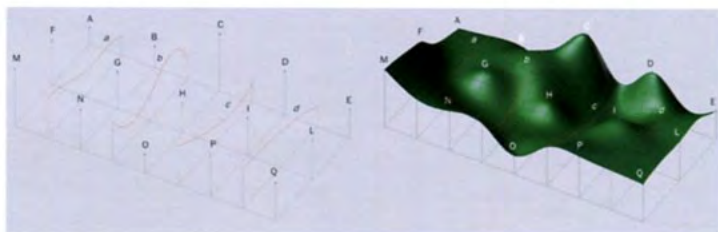
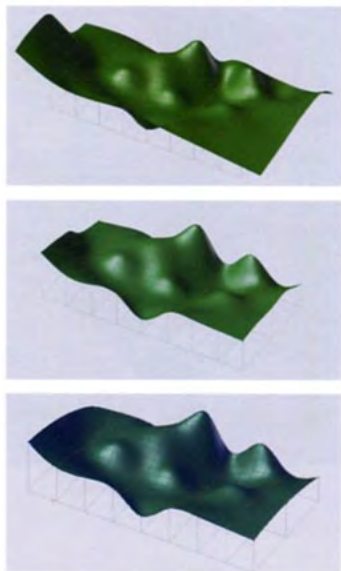


Fig. 130 Patch ottenuta tramite interpolazione di punti e di curve: non delimitata, delimitata, con imposizione di curve di bordo.



Per evitare di operare il taglio nell'eventualità che la superficie patch sbordi oltre l'area interessata, si può delimitare la superficie imponendo la condizione di appartenenza di curve di bordo. In questo modo la superficie di interpolazione è costretta a delinearci entro i limiti imposti dalle curve di bordo.

Questo permette, inoltre, di controllare l'andamento della superficie in corrispondenza del bordo. Si osservi la patch priva di limiti imposti, quella in cui è visibile l'effetto del taglio della porzione interessata e la patch, più rigorosa, ottenuta imponendo la condizione di appartenenza delle curve di bordo (Fig. 130).

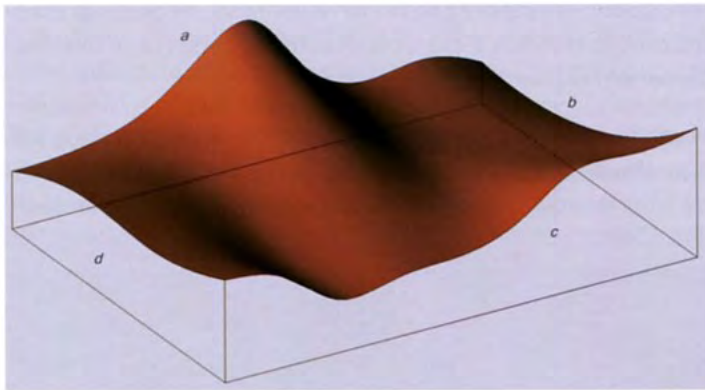
Per quanto simili, le due superfici presentano una differenza assolutamente non trascurabile proprio in corrispondenza dei bordi.

SUPERFICI DI COONS

Si è potuto osservare come, nell'operazione di interpolazione, siano stati determinati, ai fini della genesi della forma, sia le curve intermedie, sia i punti, sia le curva di bordo.

Si ipotizzi, adesso, di non utilizzare punti nel processo di interpolazione. Ai fini della determinazione della forma sarà importante stabilire la presenza o meno di curve intermedie oltre quelle di bordo. L'osservazione è utile al fine di introdurre altre due categorie di superfici di interpolazione.

Alla prima appartengono le superfici ottenute tramite interpolazione di sole curve di bordo, senza imporre condizioni di appartenenza di sezioni intermedie (Fig. 131).



Nel processo generativo di queste superfici, dette di *Coons*⁵, si può intervenire soltanto sulle curve perimetrali e la forma della superficie sarà determinata solo dall'andamento delle curve di bordo, senza controllo sull'andamento intermedio della superficie stessa⁶ (Figg. 132-133).

⁵ Queste superfici prendono il nome da Steven Anson Coons, professore al MIT di Cambridge (USA) nel dipartimento di Ingegneria Meccanica, che, durante la Seconda guerra mondiale, si occupò di progettazione aeronautica.

⁶ Per questo motivo sono definite, talvolta, superfici da *curve di bordo*.

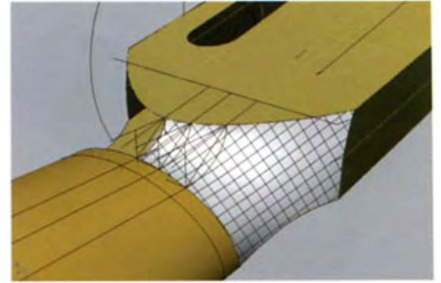


Fig. 131 Salvatore Buda, superficie di un manico di chitarra classica ottenuta tramite interpolazione di curve di bordo.

Fig. 132 A destra: superficie di Coons o da curve di bordo.



Fig. 133 Vincenzo Gaglio, soap dispenser. Le singole superfici sono superfici di Coons.

RETI DI CURVE

Spesso capita che, oltre a controllare con precisione l'andamento dei bordi della superficie, si abbia la necessità di imporre la condizione di appartenenza di sezioni intermedie, posizionate non soltanto trasversalmente a traiettorie di scorrimento, come si è visto per alcune superfici di traslazione, ma anche su giaciture ad esse perpendicolari o, comunque su giaciture libere. Oltre ad utilizzare le patches, di cui si è già parlato, in assenza di punti da inserire nel processo di interpolazione, si può ricorrere alla cosiddetta *rete di curve* (o *network*)⁷.

Queste superfici si ottengono interpolando un insieme di curve poste liberamente nello spazio che però rispettano due condizioni: la prima è che le curve abbiano dei punti di intersezione, la seconda è che i punti estremi delle curve intermedie appartengano a curve di bordo.

Mantenendo inalterate le curve di bordo della superficie raffigurata, si osservi come cambia l'andamento della superficie imponendo l'interpolazione anche di sezioni intermedie (Fig.134).

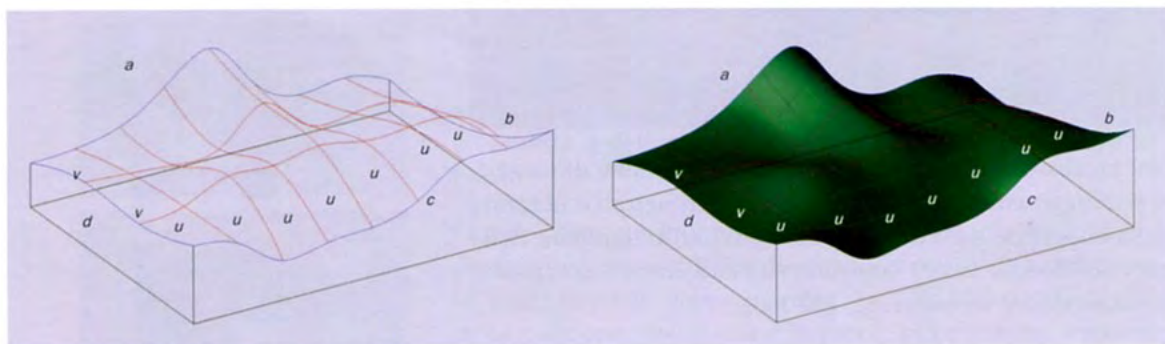


Fig. 134 Superficie di interpolazione di una rete di curve. Si possono distinguere le curve di bordo (a, b, c, d,) le generatrici u e le direttrici v. Il ruolo di generatrici e direttrici è interscambiabile.

Questo genere di superfici è utilizzato per descrivere forme libere o forme complesse come, ad esempio una porzione di

⁷ Tali superfici possono essere definite, con maggiore rigore, superfici di interpolazione bidirezionale: "Le superfici di interpolazione bidirezionale o S (u, v) vengono generate interpolando due schiere di generatrici u e direttrici v, che possono scambiare i propri ruoli." In R. Migliari, Geometria dei modelli, cit. p. 223.

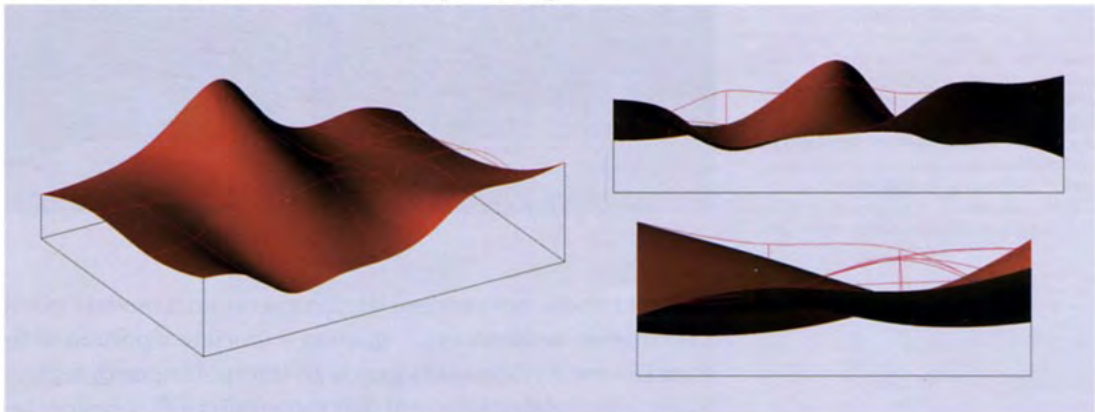
territorio ricostruibile grazie alle curve di livello ed alle sezioni di interpolazione dei punti estremi di dette curve (Fig. 135).



Fig. 135 Ricostruzione di una porzione di territorio tramite interpolazione di curve di livello delimitate da curve di bordo.

Il vantaggio nell'utilizzo di questo tipo di superfici è dato dalla possibilità di un alto livello di controllo; infatti la superficie interpolata impone la condizione di appartenenza delle curve di bordo, delle sezioni intermedie lungo l'asse longitudinale e delle sezioni intermedie lungo l'asse trasversale.

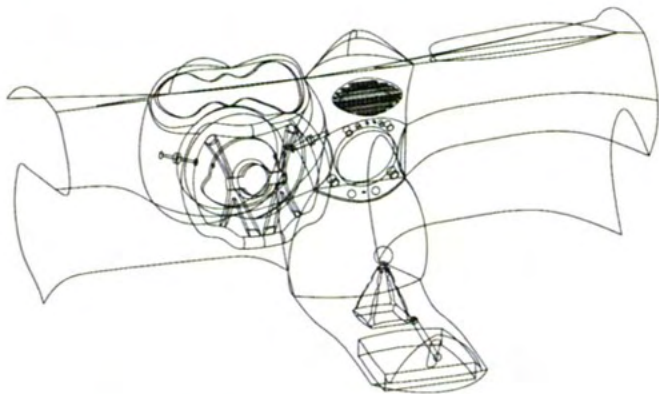
Per comprendere meglio il concetto si è sovrapposta la superficie ottenuta tramite interpolazione di sole curve di bordo alle curve utilizzate per ottenere la superficie di interpolazione di rete di curve. Si può osservare chiaramente come la superficie di Coons non rispetti la condizione di appartenenza di dette sezioni intermedie. La non appartenenza delle sezioni è particolarmente evidente nelle due viste piane (Fig. 136).



Nella generazione di superfici tramite rete di curve, per ottenere un risultato molto controllato e preciso è necessario impostare le curve in modo che i punti estremi delle sezioni appartengano alle curve di bordo e che le sezioni abbiano punti di intersezione.

Fig. 136 Confronto tra le sezioni generatrici della rete di curve e la superficie di Coons. Le curve intermedie non entrano a far parte del processo di interpolazione.

L'interpolazione di una rete di curve si presta laddove sia richiesto un alto livello di precisione nel controllo della superficie, come nel caso del disegno di componenti per la produzione nautica, aeronautica o automobilistica (Figg. 137-138).

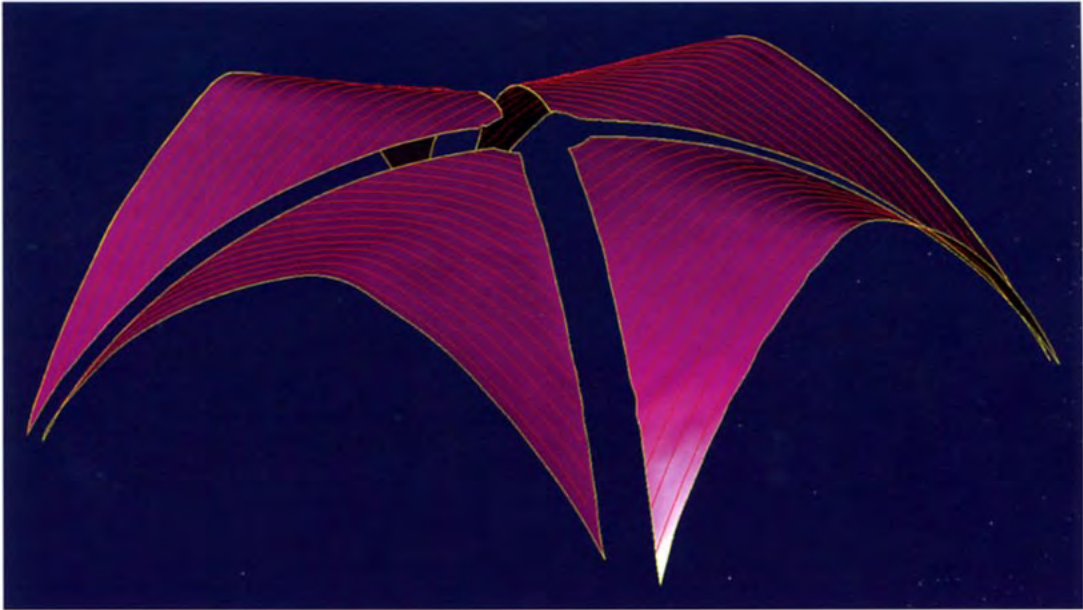


Figg. 137, 138 Gianluca Cataldo: cruscotto di auto sportiva. il disegno a filo di ferro mostra la struttura geometrica di curve che sottende le superfici di interpolazione.



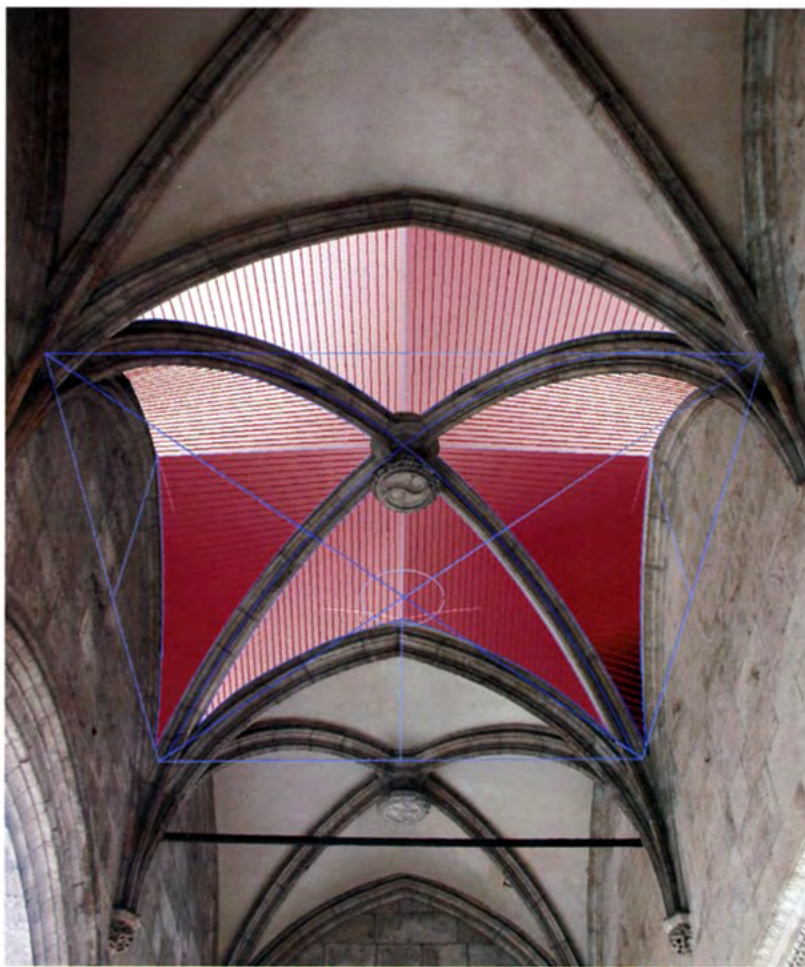
Si presta anche nei processi di ricostruzione di modelli per il rilevamento architettonico: la volta a crociera riportata in figura 139 è stata ricostruita grazie all'interpolazione di sezioni ricavate dall'elaborazione di dati topografici e di scansioni laser. Le operazioni di rilevamento hanno, infatti, consentito la ricostruzione delle curve di bordo delle unghie, evidenziate

in giallo, e la ricostruzione delle sezioni intermedie, evidenziate in rosso.



Si è determinata, dunque, una struttura geometrica di curve che ha costituito la base per il processo di interpolazione, sicuramente molto più preciso di quello che si sarebbe ottenuto tramite la sola interpolazione delle curve di bordo.

Fig. 139 Fabrizio Avella, Fabrizio Agnello, Valentina Favalaro, Germana Lo Meo: rilevamento architettonico della chiesa di S. Maria della Catena a Palermo. Le superfici di interpolazione hanno consentito, in questo caso, la costruzione di un modello della volta, in seguito ad elaborazione di dati topografici e scansioni laser, non ricondotto a forme semplici. Si possono riconoscere le curve di bordo, in giallo, e le sezioni intermedie, in rosso.



Fabrizio Avella, Fabrizio Agnello, Valentina Favalaro, Germana Lo Meo: rilevamento architettonico della chiesa di S. Maria della Catena a Palermo. Il modello teorico della volta è ottenuto tramite loft lineari delle curve d'ambito.

LOFT RIGOROSO E LINEARE

Le *superfici loft* sono superfici d'interpolazione che congiungono curve, indipendentemente dalla loro giacitura, in presenza o meno di curve di binario⁸.

La successione di curve riportata in figura 141 mostra una circonferenza (a), un'ellisse (b) ed un'altra circonferenza (c). La superficie loft, in blu, interpola le tre sezioni piane i cui punti saranno appartenenti al loft.

Nel caso in cui la superficie esegua l'interpolazione tramite un andamento continuo, il *loft* è definito *rigoroso*, mentre, nel caso in cui i raccordi tra le curve di sezione siano retti, è definito *lineare*, o a *sezioni lineari*.

In quest'ultimo caso tutti i punti di una sezione sono congiunti con quelli di un'altra sezione tramite segmenti rettilinei, mentre nel primo caso le curve congiungenti si adattano al posizionamento ed alla forma delle sezioni.

Un'altra differenza è determinabile tra *loft aperto* e *loft chiuso*: nel caso del loft aperto il risultato è quello già osservato. Nel caso del loft chiuso il ciclo di interpolazione non si chiude in corrispondenza dell'ultima sezione della sequenza ma si conclude riconsiderando la sezione iniziale (Fig. 142).

Si mantengano inalterate forma, dimensioni e posizione delle curve utilizzate per i loft appena descritti: la differenza tra il loft aperto e quello chiuso è evidente. Analogamente a quanto osservato nel loft aperto, anche in quello chiuso il tipo di loft determina la forma a seconda del processo d'interpolazione: il loft chiuso rigoroso è caratterizzato da sezioni verticali smussate e continue, mentre il loft chiuso lineare è caratterizzato da sezioni verticali rette e discontinue (Fig. 143).

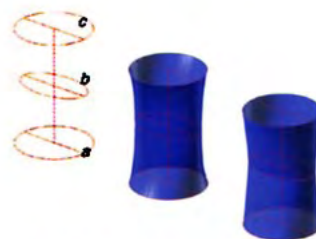


Fig. 141 Loft di curve piane. A parità di forma, dimensione e giacitura delle curve da interpolare, la differenza morfologica tra il loft rigoroso, a sinistra, e quello lineare, a destra, è molto accentuata.

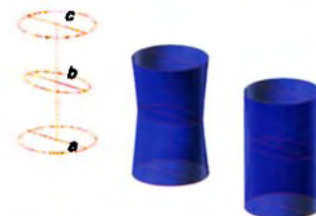


Fig. 142 Loft di curve piane. Si osservi la differenza tra un loft lineare aperto ed un loft lineare chiuso.

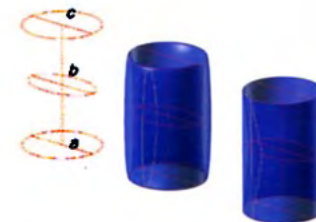


Fig. 143 Loft di curve piane. Si osservi la differenza tra un loft rigoroso chiuso ed un loft lineare chiuso.

⁸ In questo capitolo si tratteranno le superfici loft in assenza di binario in quanto l'esito formale del loft su binario è analogo a quello dello sweep, trattato in precedenza.

LE SUPERFICI RIGATE E LOFT LINEARE

A prescindere dal fatto che possa essere aperto o chiuso, ci si sofferma ora sul loft a sezioni lineari. Questa superficie, infatti, è utilizzata per ottenere una superficie appartenente ad una famiglia geometrica molto nota: le *superfici rigate*⁹. Tale superficie ha la caratteristica particolare di interpolare due curve attraverso segmenti retti, e dunque si può ipotizzare di far scorrere una riga lungo il suo sviluppo¹⁰.

Osservando la costruzione del cono, definito anche *conoide*, si nota come i punti del segmento r sono congiunti a quelli della semicirconferenza c tramite segmenti retti. Si può immaginare, pertanto, di far scorrere una riga (deformabile in lunghezza) lungo la superficie senza staccarla mai e rispettando le condizioni di appartenenza delle curve di costruzione (Fig.144).

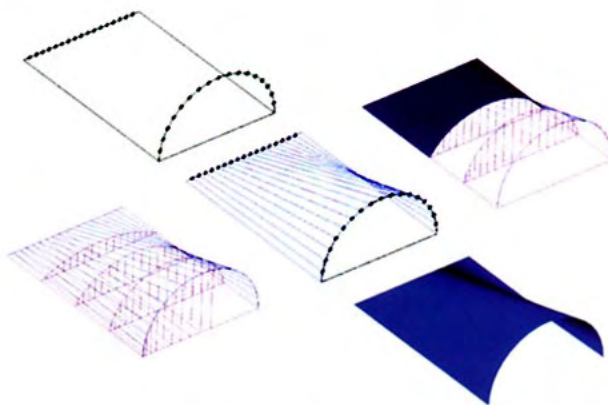


Fig. 144 Loft lineare d'interpolazione tra un segmento retto e una semicirconferenza a giacitura verticale: il risultato è un cono a cuneo o conoide.

Questa caratteristica ha fatto sì che le superfici rigate siano molto utilizzate in architettura: alle giaciture rette si possono associare, infatti, elementi costruttivi di facile realizzazione, che possono essere centine lignee di appoggio per elementi

⁹ Non tutte le superfici rigate possono essere costruite tramite loft: il paraboloido rotondo, per esempio, può essere costruito come superficie di rotazione o come rete di curve, ma non come loft lineare.

¹⁰ "Le superfici che oggi chiamiamo rigate (il termine, *reglees*, è di Hachette; HACHETTE 1828) debbono il loro nome alla notevole caratteristica di ammettere sempre la possibilità di appoggiare su di esse, in tutta la sua lunghezza, una riga". In R. Migliari, *Geometria dei modelli*, cit. p. 205.

lapidei o elementi di carpenteria che possono essere accostati ed utilizzati per superfici in calcestruzzo gettato in opera. Il vantaggio è chiaro: si possono tracciare curve a piacimento e raccordarne i punti con elementi costruttivi retti di semplice realizzazione, avendo, dunque, la possibilità di realizzare superfici complesse tramite discretizzazione in elementi particolarmente semplici (Fig. 145).

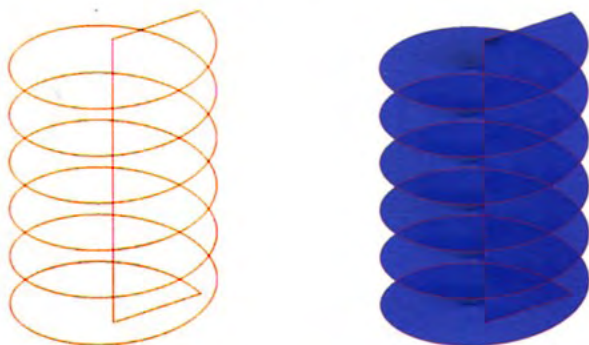
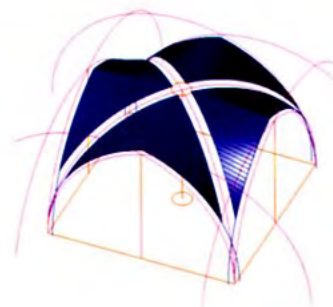


Fig. 145 Loft lineare d'interpolazione tra un segmento retto (r) ed un'elica (e) ad asse verticale: il risultato è un elicoide retto. In architettura è riscontrabile negli intradossi delle scale elicoidali o in rampe carrabili di accesso a garages.

È il caso, ad esempio, della volta a crociera realizzata nella chiesa cinquecentesca di Palermo di *Santa Maria della Catena*. La volta è a sesto rialzato ed impostata su archi acuti perimetrali: impossibile, dunque, realizzarla tramite la nota intersezione di superfici emicilindriche.

La sua realizzazione è avvenuta tramite la costruzione delle centine ad arco acuto perimetrali e quelle ad arco acuto diagonali. Dette centine sono in seguito state utilizzate per realizzare le unghie di raccordo, che, utilizzando elementi retti, probabilmente centine lignee, sono riconducibili a superfici rigate e, pertanto, realizzabili geometricamente tramite loft lineare (Figg. 146-147-148).



Figg. 146, 147, 148 Fabrizio Avella, Fabrizio Agnello, Valentina Favalaro, Germana Lo Meo: rilevamento architettonico della chiesa di *S. Maria della Catena* a Palermo. Il modello teorico della volta è ottenuto tramite loft lineare delle curve d'ambito.

Le superfici rigate hanno avuto un certo numero di applicazioni anche in tempi più recenti, grazie al diffondersi del sistema costruttivo in cemento armato: i paraboloidi iperbolici di Felix Candela¹¹, la chiesa di Firminy di Le Corbusier¹², la chiesa sull'autostrada di Giovanni Michelucci¹³ sono soltanto alcuni esempi dell'uso di superfici rigate realizzate in cemento armato gettato in opera. La forza delle superfici rigate consiste proprio nella possibilità di realizzare, in modo relativamente semplice, forme complesse, utilizzando curve generatrici dalla geometria anche elementare (Fig. 149).

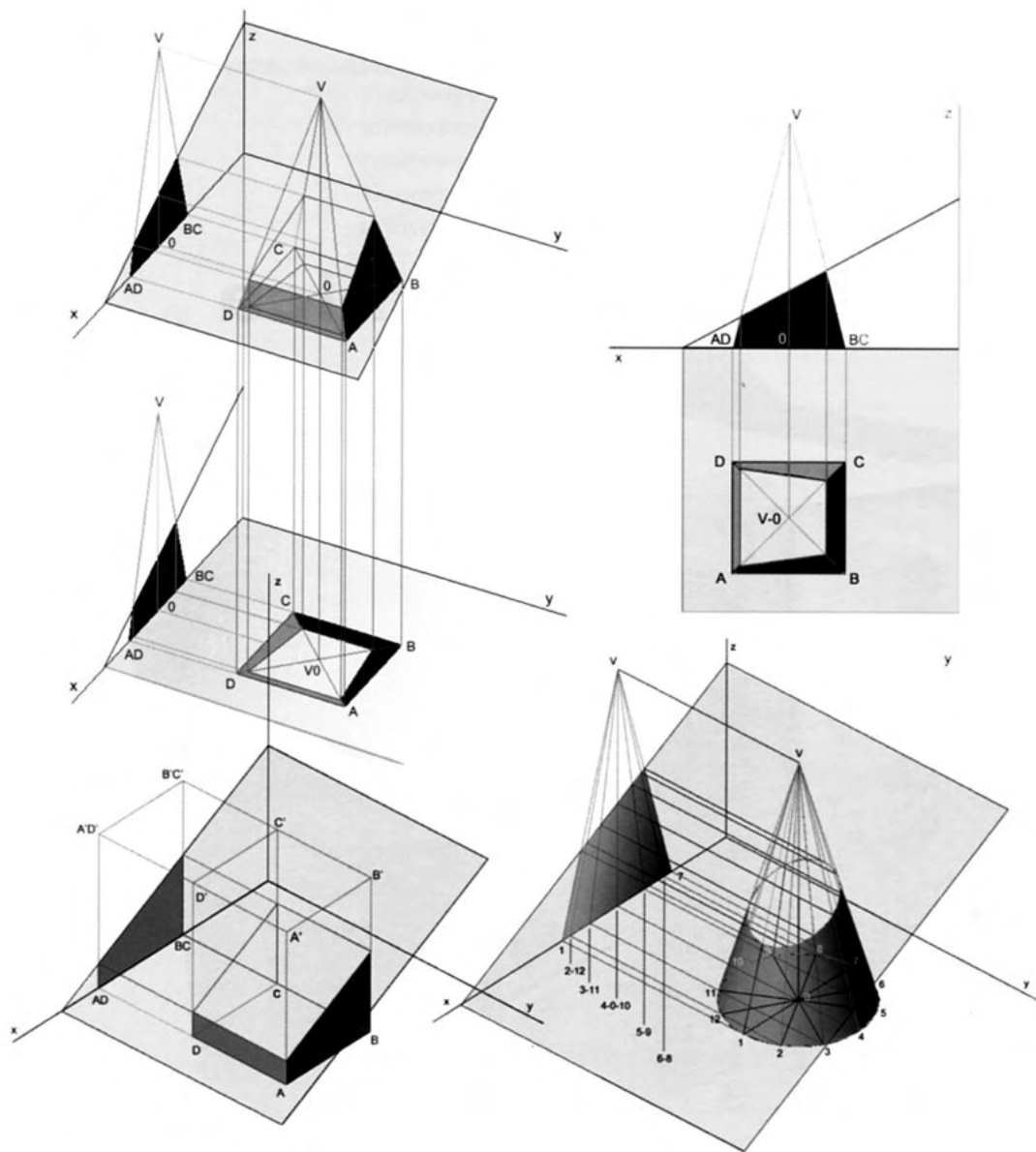
Fig. 149 Superficie loft ottenuta da interpolazione di un segmento retto ed una curva policentrica.



¹¹ Felix Candela (1910 - 1997), architetto spagnolo operante in messico, ha fatto largo uso di paraboloidi iperbolici, realizzati in cemento armato, nelle sue architetture.

¹² Il progetto è completato nel 1960, ma la costruzione inizia nel 1970, interrotta nel 1975, riprende nel 2003 per essere completata nel 2006. Il grande corpo a sviluppo verticale è descrivibile come superficie rigata.

¹³ Progettata nel 1961, la sua costruzione si completa nel 1964. Una superficie rigata, riproducibile tramite loft lineare, è visibile nella copertura.



Sezioni piane di solidi elementari.

Un modo abbastanza semplice di alterare la morfologia di una superficie o di un solido è quello di operare una sezione con un piano o con una superficie secante, avente cioè una giacitura tale da intersecare la superficie o il solido.

Anche in questo caso la differenza della natura geometrica condiziona l'esito dell'operazione: la sezione di una superficie genera una superficie, mentre la sezione di un solido, a seconda degli algoritmi di riconoscimento formale, può generare un solido (*poli-superficie chiusa*) o una *poli-superficie aperta*.

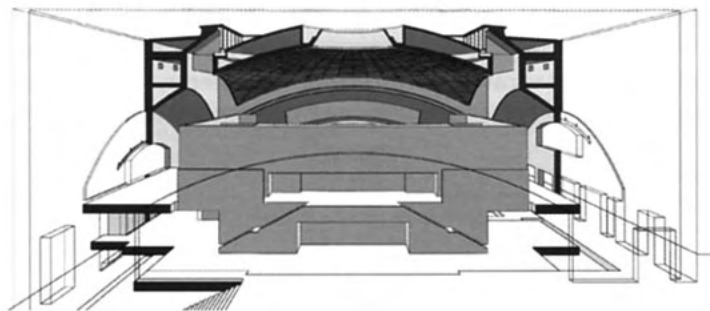


Fig. 154 Fabrizio Avella, spaccato prospettico del Palazzo dei Congressi a Salamanca di J. Navarro Baldeweg.

SEZIONE TRAMITE PIANO SECANTE

L'esito formale dell'operazione di sezione con un piano secante è determinato dalla sua giacitura: può essere parallelo ad uno dei piani xy , xz , yz , obliquo (perpendicolare ad uno dei piani e ruotato rispetto agli altri due) o generico (ruotato rispetto a tutti i piani definiti dagli assi cartesiani).

Grazie ai piani di sezione si possono ottenere volumetrie complesse a partire da solidi elementari. È il caso, per esempio di molte superfici voltate presenti nell'architettura bizantina, rinascimentale e barocca: si può facilmente dimostrare



Figg 155 - 161. Genesi geometrica della volta a vela e dei pennacchi sferici.

che una superficie velica o i pennacchi sferici, ampiamente presenti nelle architetture a cupola del rinascimento, sono generati dal sezionamento con piani verticali (per la volta a vela) ed un piano orizzontale (per i pennacchi), di una calotta perfettamente emisferica.

Se, infatti, ipotizziamo di far passare un piano verticale esattamente in corrispondenza di uno dei lati del quadrato inscritto alla circonferenza di imposta, possiamo asportare la porzione della sfera di partenza.

Data la perfetta simmetria radiale della sfera, è ipotizzabile che l'operazione appena descritta possa essere ripetuta su quattro lati del quadrato suddetto. In questo modo si asportano quattro porzioni sferiche perfettamente uguali tra loro e posizionate lungo gli assi di simmetria ortogonali. La porzione rimanente è definita volta a vela su base quadrata. La proiezione ortogonale planimetrica di questa superficie è data da un quadrato inscritto nella circonferenza su cui poggiava la calotta originaria. Si consideri ora un piano secante orizzontale, tangente alla chiave dei quattro archi verticali, e si immagini di asportare la porzione di sfera che si trova sopra il piano. La porzione della calotta che rimane si riduce alle quattro superfici angolari comunemente denominate pennacchi sferici (Figg. 155-161).

La proiezione orizzontale dei pennacchi sferici evidenzia come la loro composizione geometrica sia perfettamente derivata dal quadrato e dalla circonferenza, figure care al linguaggio ed alla simbologia dell'architettura rinascimentale, che ne ha determinato un utilizzo particolarmente diffuso.

Il criterio appena descritto è comunemente utilizzato anche per descrivere altre volte, quali la crociera o il padiglione, ma in effetti può essere impiegato per definire superfici dalla forma anche molto complessa.

La volta del *Palazzo dei Congressi* di Salamanca, ad esempio, ha un andamento formale particolarmente raffinato che genera una complessità spaziale di particolare interesse. Come spesso accade in architettura, la forma non è comprensibile dalla fruizione diretta, ma da un'analisi accurata che porta a

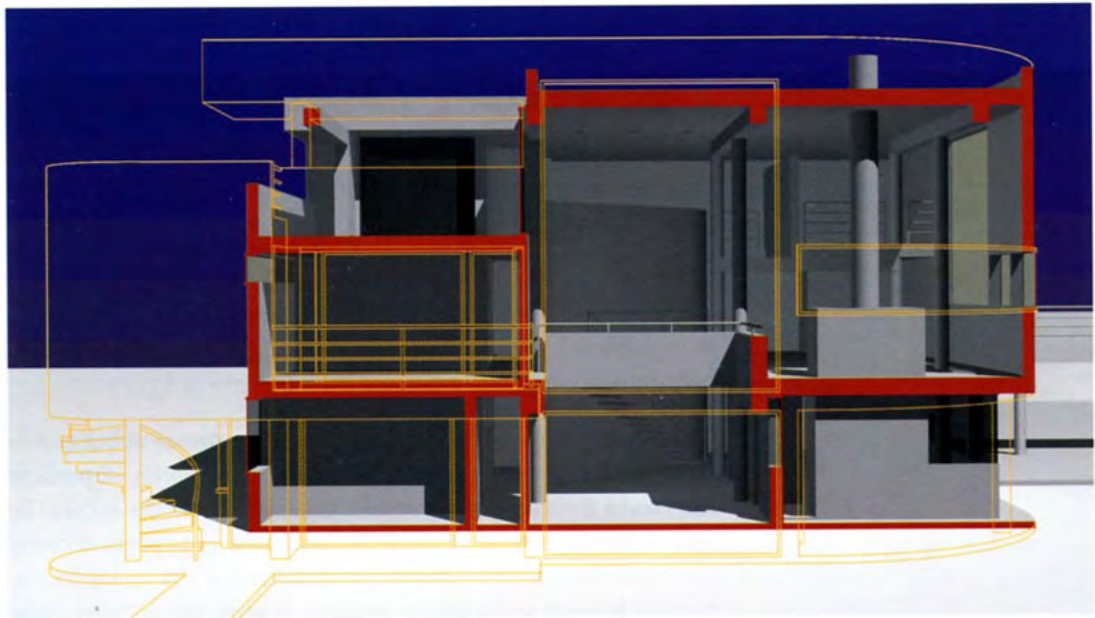
definire il sistema adottato in questa architettura come derivante da sapienti operazioni di sezione di una calotta perfettamente sferica con piani verticali posizionati in base ad esigenze funzionali e distributive in punti planimetrici molto precisi. Lo schema è quello riportato in figura 162.

Oltre a descrivere il processo di alterazione di una superficie o di un solido, l'utilizzo di un piano secante può servire, come già visto, anche per sezionare modelli completi di un oggetto o di un'architettura al fine di vederne l'interno.

Il procedimento è chiaramente visibile nello spaccato prospettico di *Casa Saltzman* di Richard Meier: il modello è stato tagliato da un piano secante verticale ed è stata asportata la porzione visibile in trasparenza. Le porzioni di solidi segnate in rosso evidenziano le parti del modello intersecate dal piano di sezione, nel rispetto di una convenzione grafica che vuole che si distingua chiaramente la porzione sezionata (Fig. 163).



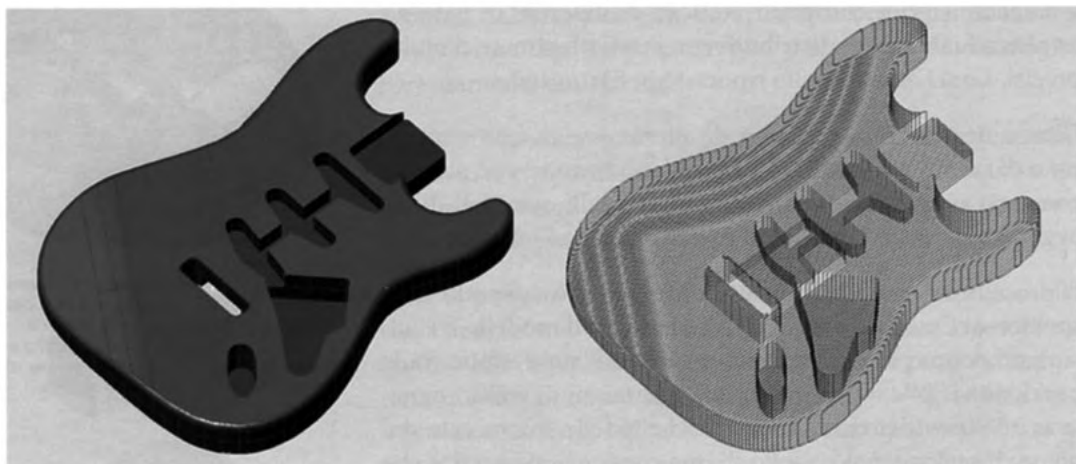
Fig. 162 Fabrizio Avella, schema geometrico del sistema di volte del Palazzo dei Congressi a Salamanca di Juan Navarro Baldeweg. Le volte sono ottenute dalla sezione di porzioni di una superficie sferica.



L'operazione può essere condotta anche per estrarre una successione di sezioni parallele per discretizzare una forma complessa. In questo caso bisogna individuare la giacitura dei

Fig. 163 Bernardo Augello, Casa Saltzman di Richard Meier. Un piano verticale interseca il modello e consente la rappresentazione dello spaccato prospettico.

piani secanti e il loro numero o , in alternativa, la giacitura e la distanza tra i piani (Figg. 164-165).



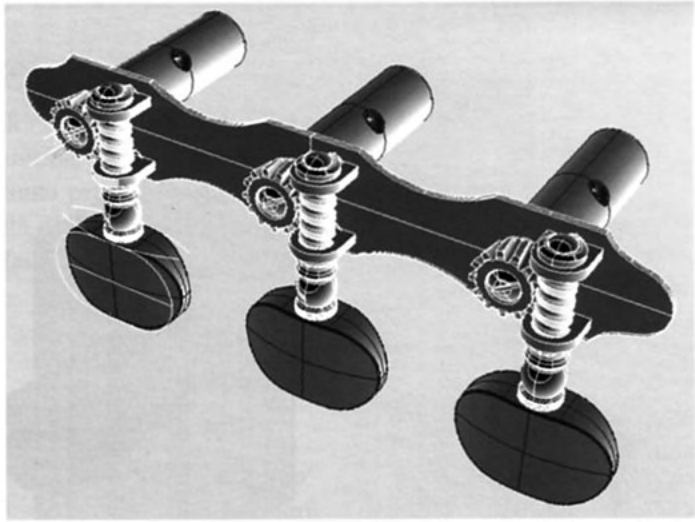
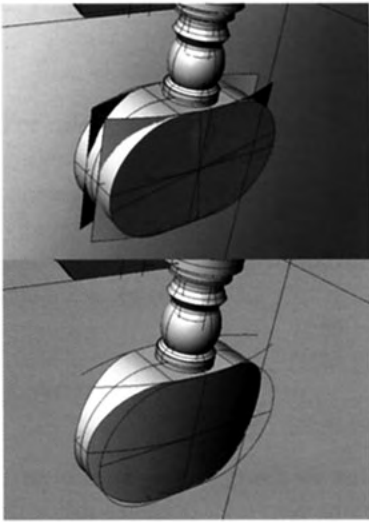
Figg. 164 - 165 Salvatore Buda, modello di una chitarra Fender. Dal modello di superfici di è ricavata una successione di sezioni parallele.

SEZIONE TRAMITE SUPERFICIE SECANTE

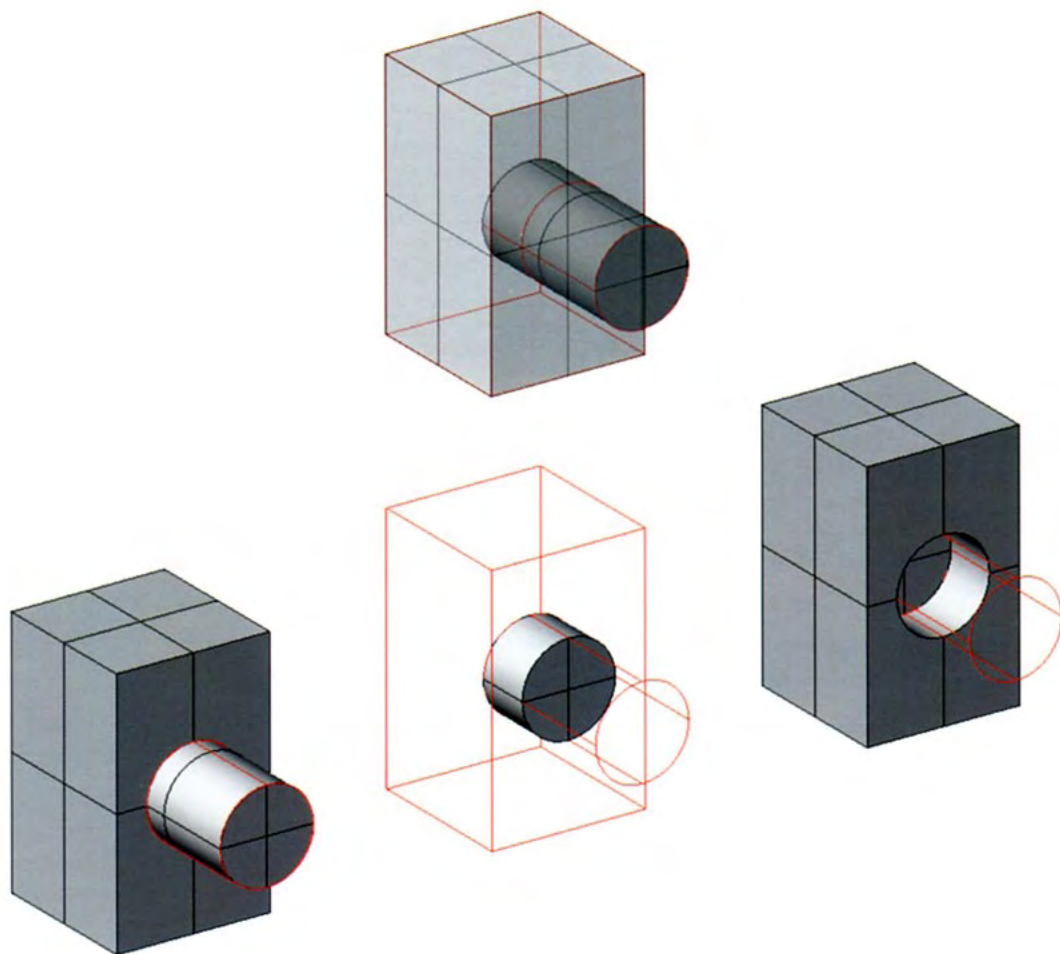
La procedura sin qui descritta prevede l'uso di una superficie perfettamente piana, ma il concetto di sezione si può estendere anche ad una superficie curva.

C'è, però, da fare una distinzione: nel caso della sezione piana la superficie ha un'estensione infinita e quindi, se il posizionamento lo consente, interseca interamente la figura.

Nel caso della superficie, non è detto che questa abbia estensione infinita, per cui deve verificarsi che detta superficie intersechi interamente il solido o la superficie da secare. Se questa condizione si verifica, si considera la superficie come elemento secante e si decide se mantenere nel modello entrambe le parti della figura tagliata, o se eliminare una delle due porzioni individuate dal taglio (Figg. 166-168).



Figg. 166 - 168 Salvatore Buda, modello di una chitarra classica Eko. La forma dei rebí è il risultato del taglio di un solido di estrusione con superfici curve.



Operazioni booleane. Da sinistra: unione, intersezione, sottrazione di solidi.

Per *operazioni booleane* si intendono quelle procedure che generano un solido derivante da unione, intersezione, sottrazione di solidi esistenti¹⁴. L'esito della procedura dà sempre vita ad un solido, la cui complessità dipende esclusivamente dalla forma dei solidi primari e dalla quantità di modifiche che subiscono.

UNIONE

L'*unione* di solidi genera un solido risultante dalla "somma" di solidi esistenti. Nel caso in cui i solidi delimitino porzioni di spazio in comune, la parte solida in comune è inglobata nel solido risultante.

Nel caso di solidi tangenti o non parzialmente sovrapposti molti programmi consentono ugualmente l'unione di detti solidi che saranno computati come unica entità geometrica, rendendo possibili operazioni successive quali ulteriori operazioni booleane o altre modifiche al solido risultante.

Dopo aver effettuato l'unione, non tutti i programmi sono in grado di continuare a riconoscere i solidi originari, perdendo, dunque, le informazioni relative alla parte comune dei volumi.

L'unione può essere effettuata su un numero anche elevato di solidi di qualsiasi forma e dimensione.

¹⁴Tali operazioni prendono nome dagli studi di algebra e di logica di George Boole (1815 – 1864) matematico britannico, considerato il fondatore della logica matematica.

INTERSEZIONE

L'*intersezione* di solidi consente di calcolare la parte comune di due o più solidi parzialmente sovrapposti.

Affinché esista e sia calcolabile tale intersezione è, ovviamente, necessario che i solidi siano posizionati in modo tale che una porzione dei rispettivi volumi sia comune ad entrambi.

Il senso comune ci suggerisce che tale eventualità, ovviamente, non è possibile nella realtà fenomenica (Fig. 173).

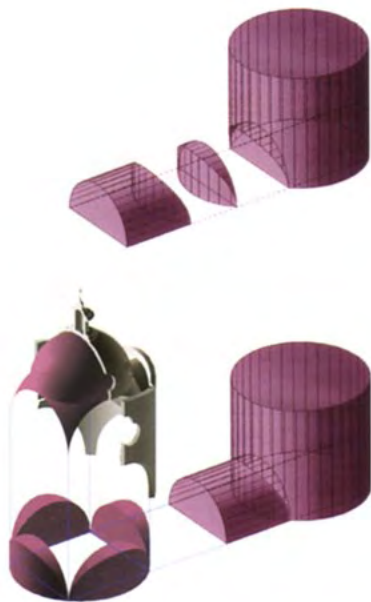
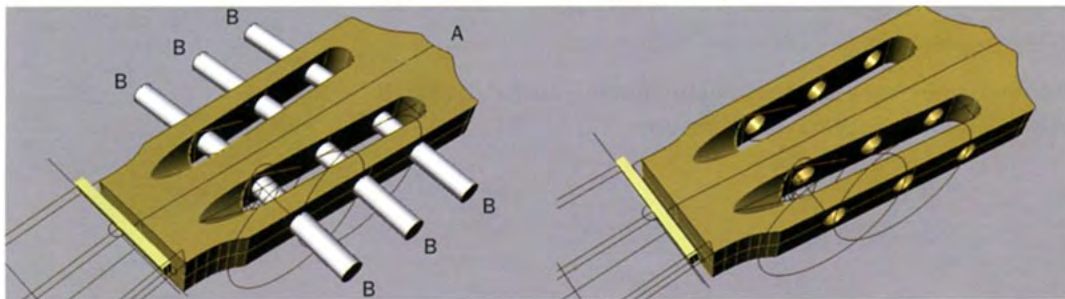


Fig. 173 Fabrizio Avella, chiesa di San Filippo Neri a Casale Monferrato di Guarino Guarini, unghie cilindriche di raccordo tra il tamburo ed i pennacchi sferici, ottenute da intersezione di solidi.

SOTTRAZIONE

La *sottrazione* di solidi genera un solido risultante dall'asportazione della porzione comune di due solidi parzialmente sovrapposti. Anche in questo caso è necessario che i solidi siano posizionati in modo tale che una porzione dei rispettivi volumi sia comune ad entrambi, ed è inoltre fondamentale definire il solido a cui sottrarre (A) ed un solido, o un gruppo di solidi, da sottrarre (B).

È intuitivo che l'inversione nell'ordine della selezione, nella determinazione del processo di sottrazione, inverte l'esito dell'operazione (Figg. 174-715).



Figg. 174 - 175 Salvatore Buda, chitarra classica Eko. La sottrazione booleana è servita a ricavare i fori nel manico.

Dette operazioni, per semplicità descritte solo per due solidi primari, sono eseguibili con un numero indefinito di solidi ed ogni solido risultante può nuovamente essere sottoposto ad ulteriori operazioni booleane.

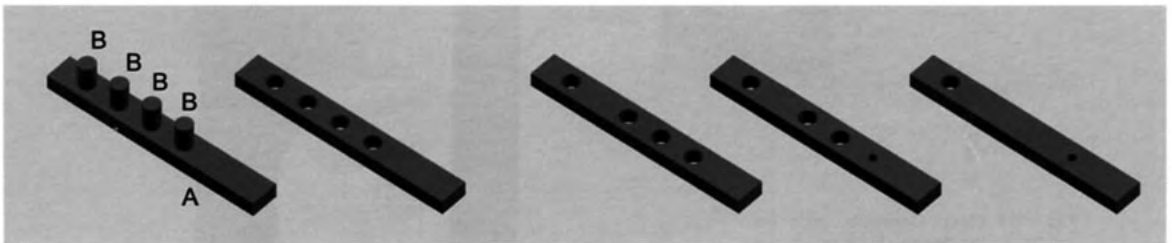
Per tutte le operazioni descritte è importante differenziare i programmi che memorizzano le geometrie primarie (e le rendono parametricamente modificabili) e quelli che memorizzano soltanto il risultato finale. Nel primo caso infatti è possibile in un qualsiasi momento modificare uno o più solidi utilizzati per ottenere la forma finale.

Nel caso in cui questo non sia possibile, bisognerà invece rimodellare interamente il solido, anche se le modifiche da apportare sono relative ad un solo solido interessato al processo di operazioni booleane.

In effetti quasi tutti i modellatori tendono ormai a mantenere la riconoscibilità degli operatori, cosa che rende particolarmente facile la possibilità di apportare modifiche complessive o locali.

In questo modo un *sub-operatore booleano* può essere spostato, scalato, cancellato senza che questo abbia alcuna influenza sugli altri operatori.

Si osservi la sequenza riportata. Denominando il parallelepipedo come operatore A e i cilindri come sub-operatori B si può osservare come sia possibile modificare il risultato formale intervenendo su questi ultimi: una prima modifica consente di spostare tre cilindri e di conseguenza spostare i relativi fori; nel secondo caso, uno dei sub-operatori cilindrici è stato scalato, ottenendo, così, un foro dal diametro minore; nel terzo caso, infine, due sub-operatori cilindrici sono stati cancellati, eliminando così i fori dal modello finale (Figg. 176-179).



Figg. 176 - 179 Modifica parametrica dei sub-operatori: forma e dimensione del parallelepipedo (sub-operatore A) rimangono invariate, mentre i fori cilindrici (sub-operatori B) sono spostati, scalati o parzialmente cancellati.

Gli esempi di applicazione dell'operazione di sottrazione booleana sono innumerevoli e basta cominciare ad addentrarsi un po' nel campo della modellazione geometrica per accorgersi che è una delle operazioni più utilizzate per modificare solidi esistenti.

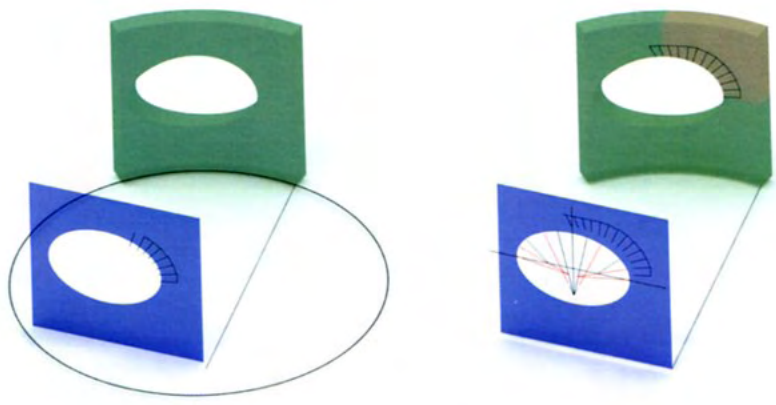
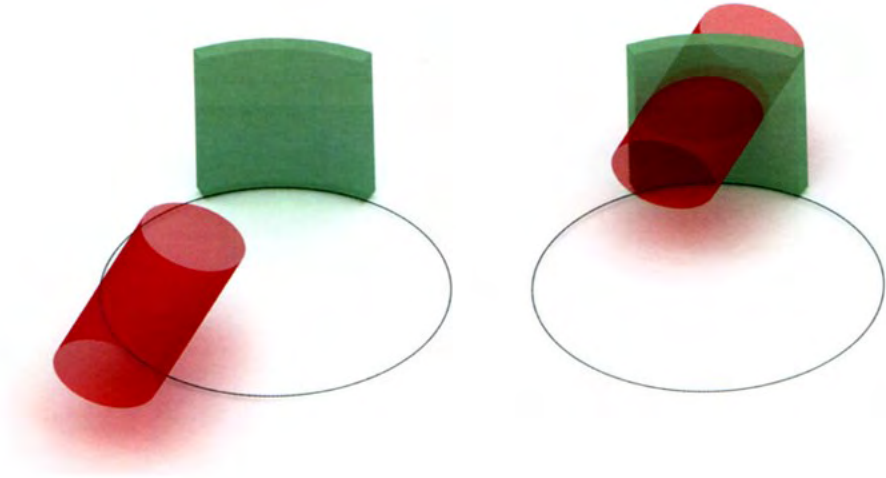
Nelle figure riportate si può osservare come tale processo sia stato utilizzato per ottenere i fori di alloggiamento per i rebi di una chitarra classica, i fori del diffusore di una lampada da tavolo, e l'intradosso dell'arco barocco (Fig.180-181).

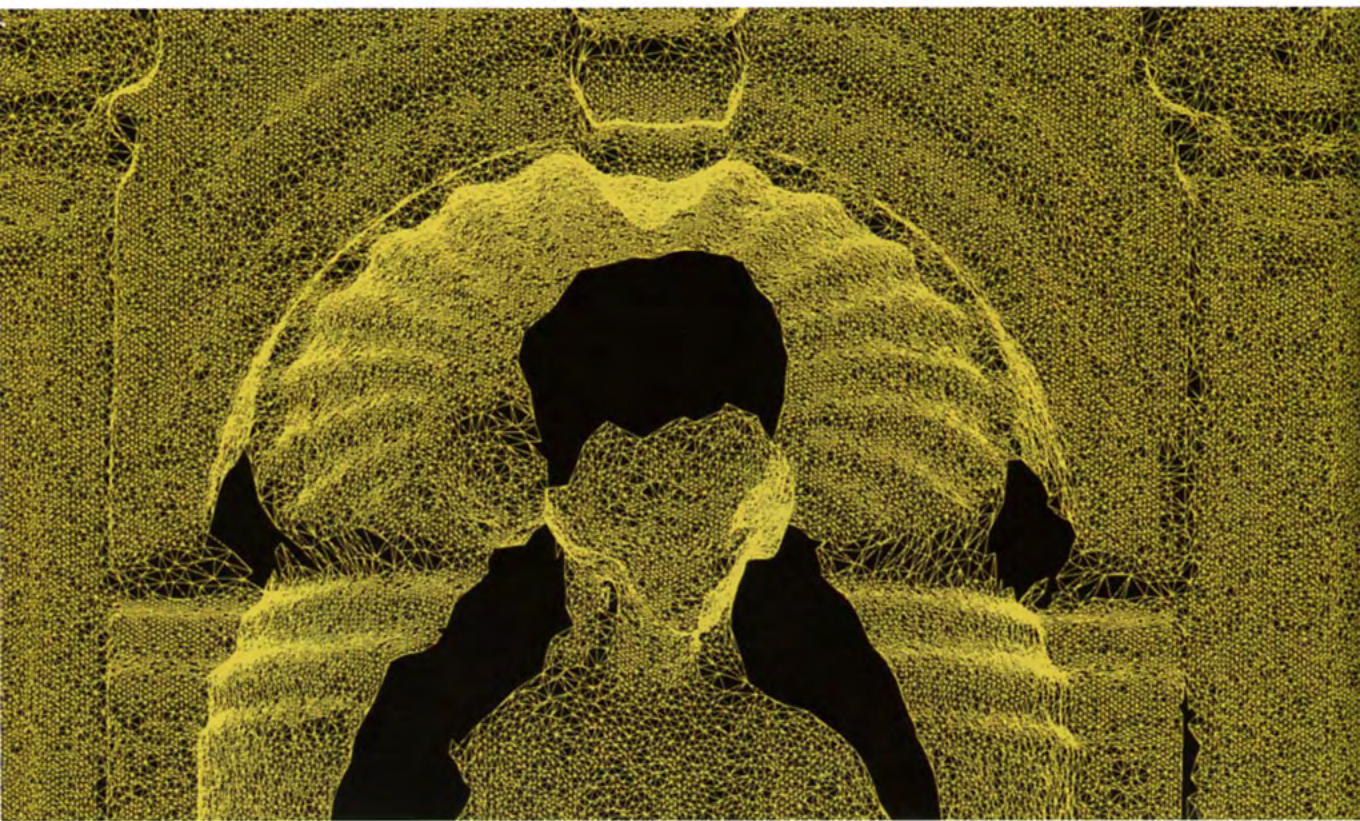
Fig. 180 Monica Meschis, lampada da tavolo Tizio. Le operazioni booleane di sottrazione sono state utilizzate per ricavare i fori per le prese d'aria circolari del portalampana.



Fig. 181 Mirco Cannella, arco barocco. L'intradosso dell'arco in pietra è ricavato tramite sottrazione del cilindro segnato in rosso dalla superficie curva segnata in verde (a fronte pagina).







Fabrizio Agnello, elaborazione di una mesh poligonale a partire dalla scansione laser di uno dei Quattro Canti a Palermo.

Le forme sin qui analizzate sono frutto di operazioni relative ad entità geometriche di varia natura. Tali forme sono definite come luoghi geometrici i cui punti rispettano la condizione di appartenenza a determinate funzioni matematiche. Per fare un esempio, una sfera è il luogo geometrico di tutti quei punti che rispettano la condizione di equidistanza da un punto che definisce il centro della sfera stessa.

Anche superfici o solidi molto complessi rispettano condizioni analoghe, anche se le funzioni che le definiscono sono decisamente più complesse di quelle che determinano la struttura geometrica di una forma semplice.

Si è visto, inoltre, che alcune superfici si ottengono tramite operazioni applicate a curve piane o tramite interazione tra oggetti tridimensionali.

A prescindere dalla maggiore o minore complessità della forma ottenuta, comunque, queste geometrie sono descritte, da un punto di vista analitico, da funzioni che descrivono l'intera superficie o da algoritmi applicati a curve piane di cui si conosce la funzione.

Esiste una modalità di definizione di superfici complesse che non si cura della descrizione analitica delle forme, ma riconduce qualsiasi superficie, indipendentemente dalla propria forma e dalla propria complessità, all'insieme di un numero, più o meno elevato di poligoni piani¹⁵.

Si tratta di una procedura di modellazione che genera un tipo di superficie definita *mesh poligonale*. La caratteristica principale della mesh è, dunque, quella di discretizzare qualsiasi forma in un insieme di poligoni piani, senza curarsi affat-

¹⁵ "Per questo motivo, le mesh poligonali possono essere viste come un caso estremo di rappresentazione formata da elementi semplici a forma libera nello spazio [...]. È pertanto possibile affermare che, per loro stessa natura, le mesh sono idonee a rappresentare ogni tipo d'oggetto, dal solido delimitato da superfici piane fino alla più complessa geometria a forma libera.", in M. Gaiani, *Della riunificazione di due mondi separati in casa: modellazione e rendering*, «DDD, Disegno e Design Digitale», anno 1, n. 2, aprile 2002, p. 10.

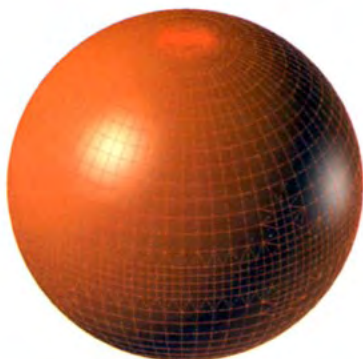


Fig. 183 Superficie sferica discretizzata in mesh poligonale: sono visibili le facce, gli spigoli ed i vertici delle singole figure piane.

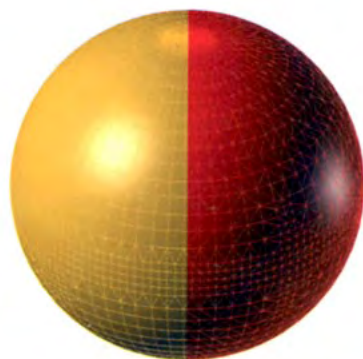


Fig. 184 Ricursione di una superficie poligonale: a sinistra, in giallo, la superficie poligonale iniziale, a destra, in rosso, la stessa superficie dopo il processo di di collassamento dei poligoni in triangoli.

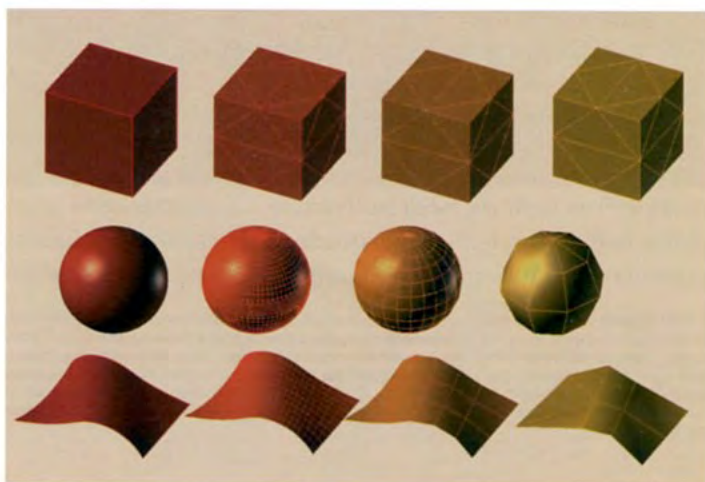
Fig. 185 Discretizzazione di solidi e superfici in superfici poligonali: per il cubo la minore accuratezza della mesh non comporta perdita di informazioni; per la sfera e la superficie a doppia curvatura è necessario, invece, avere un alto livello di levigatura per simulare la continuità superficiale.

to della definibilità o meno della forma complessiva tramite funzioni matematiche: da un punto di vista analitico, una mesh ottenuta da una sfera e quella ottenuta da un cubo sono identiche, nel senso che sono insiemi di facce piane accostate tra loro senza soluzione di continuità.

Le entità geometriche necessarie a definire una mesh sono, dunque, facce, in genere triangolari e quadrangolari, spigoli, vertici. Dette facce, però, non sono da considerarsi separatamente, ma fanno parte della geometria complessiva: selezionare un vertice o uno spigolo della mesh significa intervenire sui poligoni contigui che hanno il vertice o lo spigolo in comune (Fig. 183).

Il vantaggio della mesh consiste nel ricondurre le funzioni matematiche di definizione al semplice posizionamento dei vertici, in coordinate x, y, z , al calcolo del vettore retto congiungente due vertici, che definisce lo spigolo, e alla determinazione della faccia poligonale piana delimitata dagli spigoli.

Normalmente la generazione di una mesh avviene tramite scomposizione in quadrilateri e triangoli, ma è sempre possibile trasformarle in meshes triangolari tramite suddivisione dei poligoni in triangoli, grazie ad un *processo di ricursione* (Figg. 184-185).



Il problema principale che si presenta nell'utilizzo di una mesh è dato dalla trasformazione di un solido o una superficie complessa in superficie poligonale.

Se la forma primigenia è una superficie piana o un solido costituito da giustapposizione di piani, la sua trasformazione in mesh non comporta grossi problemi: le facce del solido sono scomposte facilmente in quadrangoli o triangoli.

Se, invece, la superficie da discretizzare presenta molte parti a semplice o doppia curvatura, la sua "riduzione" in facce piane comporta delle difficoltà: è intuitivo, infatti, che un basso numero di poligoni riesce a descrivere una superficie curva con difficoltà, mentre un alto numero di poligoni si avvicina maggiormente alla curvatura ma necessita di un alto livello computazionale.

Si può osservare in figura come la diminuzione del numero di poligoni non abbia alcun effetto sulla discretizzazione del cubo, mentre risulta determinante ai fini della discretizzazione della sfera e della superficie curva.

Un alto numero di poligoni consente di ottenere una superficie poligonale prossima a quella data, grazie ad un livello maggiore di *levigatura*¹⁶ (Fig. 186). La vista frontale della trasformazione in mesh della superficie raffigurata nell'immagine precedente consente di comprendere come, diminuendo il numero di poligoni, l'angolo tra le singole facce aumenta fino a generare cuspidi molto visibili.

Maggior levigatura significa una maggiore "morbidezza" della superficie, ma anche maggiore *complessità*¹⁷, parametro determinato non solo dalla quantità di poligoni ma anche dalla morfologia della superficie.

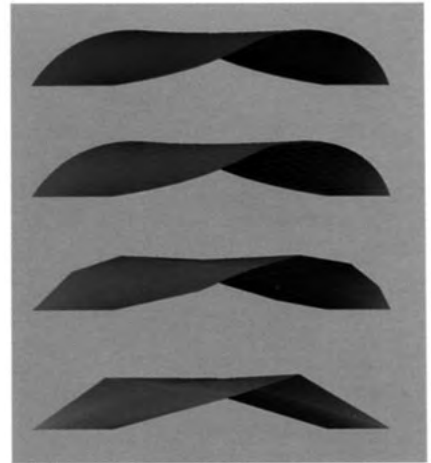


Fig. 186 Levigatura della superficie poligonale: ad una minor levigatura corrisponde un angolo maggiore tra le facce, con presenza di cuspidi e bruschi cambiamenti di direzione delle facce.

¹⁶ "La levigatura di una mesh di triangoli è data, servendosi di una riformulazione di concetti propri della geometria differenziale, della continuità della curvatura ed è da leggersi come la minima variazione dell'orientamento di due facce tra loro.", in R. Migliari, *Geometria dei modelli*, cit. p. 241-242.

¹⁷ "Quanto alla complessità di una mesh, essa è misurata dal numero dei vertici o dal numero delle facce e dalla topologia del poligono che la descrive.", in R. Migliari, *Geometria dei modelli*, Roma 2003, p. 242.

In alcuni casi la complessità è data dalla compresenza di parti piane e parti curve: nella successione di nicchie la superficie in primo piano è quella originaria; man mano che il grado di levigatura diminuisce ci si accorge come ne risenta la definizione dello spigolo d'intersezione tra la parte piana del muro e quella semicilindrica e semisferica delle nicchie (Fig. 187).

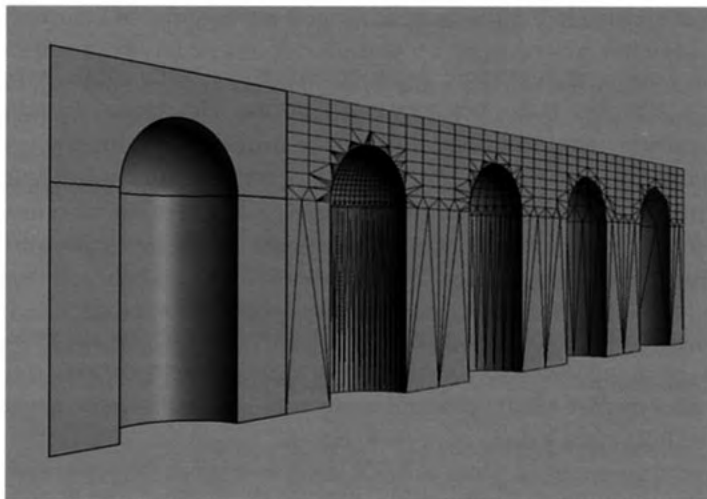


Fig. 187 Complessità della mesh poligonale: in presenza di differenti giaciture e forme l'elevato numero di poligoni garantisce il rispetto dell'intersezione tra il catino e la superficie piana..

Bisogna, dunque riuscire a trovare un compromesso tra la necessità di descrivere compiutamente la forma e la difficoltà che si possono riscontrare nel gestire un alto numero di superfici poligonali con un alto numero di facce.

Si consideri che, pur avendo descritto la mesh come insieme geometrico di forme piane elementari, in alcuni casi, per descrivere forme molto complesse, bisogna avere un alto numero di poligoni per definire compiutamente la forma, e, nel momento in cui si debba ricorrere a centinaia di migliaia o, addirittura, milioni di poligoni, possono esserci difficoltà computazionali, a meno di avere la disponibilità di elaboratori con altissime capacità di calcolo.

L'esigenza di ottimizzare i processi di generazione delle meshes è fortissima nei processi di restituzione di *nuvole di punti* derivanti da scansione laser. In questo caso la mesh deriva da un processo di interpolazione di un gran numero di punti, acquisiti tramite scansione laser, posizionati nello spazio in

coordinate x , y , z . I principali programmi di elaborazione delle scansioni laser utilizzano procedure automatiche o semi-automatiche di estrazione di meshes dalle nuvole di punti, con possibilità di controllo e di correzione delle lacune presenti tra porzioni limitrofe (Figg. 188-189).

La trasformazione di una geometria in mesh poligonale è anche indispensabile per gli algoritmi di texturing e rendering, in quanto è più facile computare gli angoli di incidenza della luce su una faccia piana che su una porzione curva.

Da quanto scritto, si può desumere la versatilità delle superfici poligonali nel riuscire a descrivere forme di qualsiasi genere, da quelle elementari da quelle più complesse. È proprio tale versatilità che ne ha consentito il largo utilizzo in diversi campi di applicazione: dalla modellazione di solidi e di superfici per il disegno di architettura e per il disegno industriale, dalla restituzione di nuvole di punti per l'elaborazione di dati laser per il rilevamento, alla modellazione territoriale, a quella free-form. Negli ultimi anni la modellazione poligonale ha trovato vastissima applicazione anche nella modellazione di personaggi in lungometraggi per l'animazione cinematografica, nonché per la modellazione di scenari e personaggi per i videogiochi.

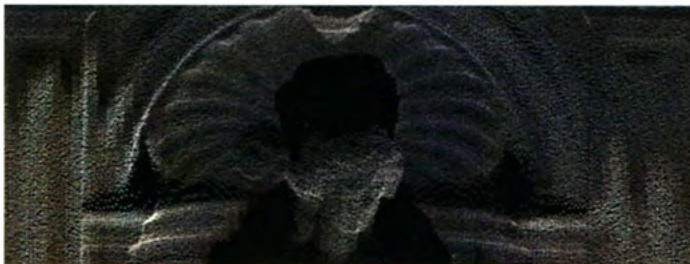


Fig. 188 Fabrizio Agnello, scansione laser di uno dei Quattro Canti a Palermo. Si possono osservare i punti acquisiti tramite la scansione.

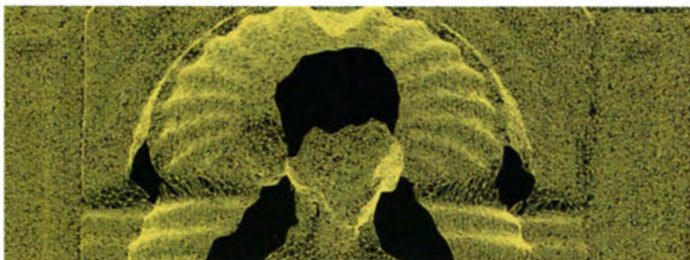
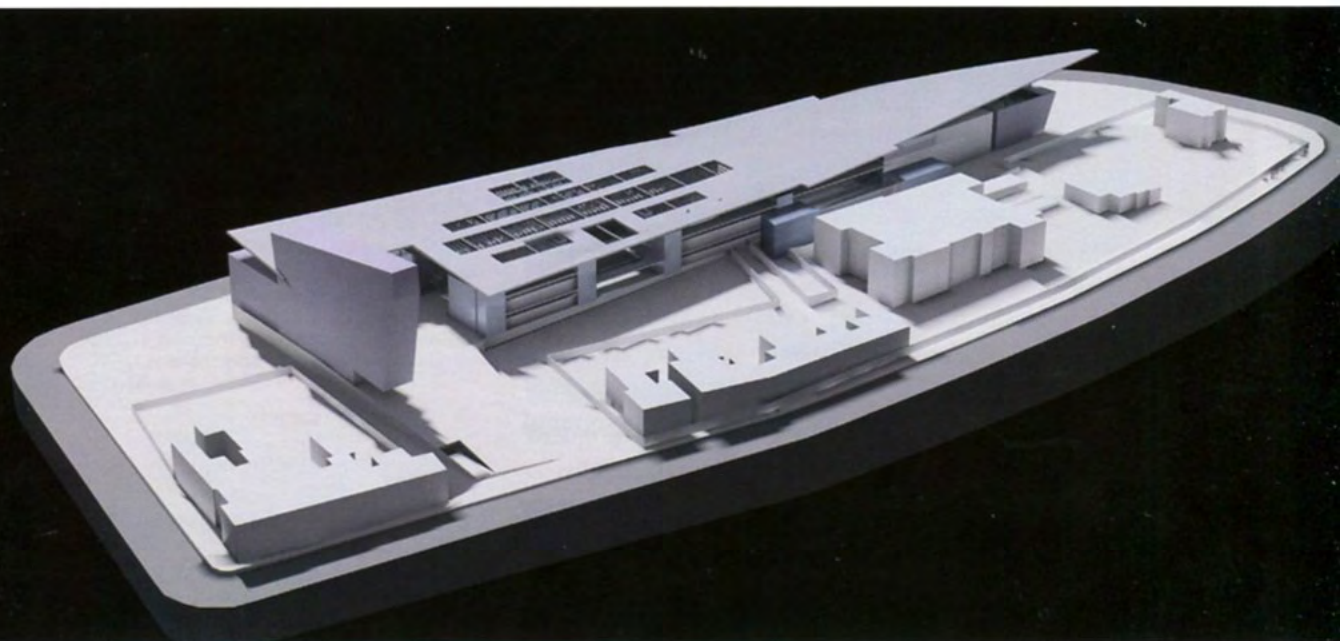


Fig. 189 Fabrizio Agnello, elaborazione di una mesh poligonale a partire dalla scansione laser di uno dei Quattro Canti a Palermo.



F. Avella, G. Acciario, F. Anello, M. Federico, A. Orlando, E. Reina, P. Vasquez, Centro commerciale a Sligo (Irlanda). La forma della copertura è ottenuta tramite torsione e traslazione di punti di controllo di un solido.

I criteri di costruzione di solidi e superfici precedentemente descritti presuppongono la pre-esistenza di curve generatrici e direttrici da utilizzare nella genesi di forme tridimensionali: la forma tridimensionale è generata da elaborazione di curve bidimensionali.

Se l'oggetto è parametrico è possibile inserire e modificare dati relativi alla genesi geometrica, quali, ad esempio, lunghezza, larghezza, altezza, nel caso di un parallelepipedo, o raggio, nel caso di una sfera. Modificando opportunamente detti parametri si interviene sugli aspetti dimensionali e geometrici dell'oggetto.

È possibile, inoltre, intervenire tramite alterazioni morfologiche, puntuali od estese, su oggetti già esistenti.

TRASLAZIONE DI VERTICI, SPIGOLI, FACCE

Si osservino, ad esempio, le alterazioni morfologiche introdotte in un cubo: traslare un vertice, uno spigolo o una faccia comporta la definizione di un solido totalmente differente dal primigenio.

Normalmente tali modifiche possono essere controllate, nel senso che è possibile intervenire numericamente sul vettore di alterazione. Nel caso specifico, è possibile imporre alla traslazione del vertice, dello spigolo o della faccia, un vettore di spostamento definito dimensionalmente e controllato con precisione.

Le modalità di tali trasformazioni variano a seconda dei programmi, ma si possono ricondurre a modifiche locali attribuite a vertici, spigoli, facce del prisma (Fig. 191).



Fig. 191 Modifiche locali: traslazione di un vertice, di uno spigolo, di una faccia in un prisma retto.



Fig. 192 Raccordo di spigoli e raccordo di superfici. Smusso di uno spigolo isolato, di due spigoli contigui, di tre spigoli contigui.

Fig. 193 Raccordo di spigoli e di superfici. Si osservi la differenza formale a seconda di quali spigoli sono compresi nell'operazione.



RACCORDO

Un tipo di modifica molto utilizzato è il *raccordo*. Consiste nel raccordare due o più facce di un solido (o due o più superfici) secondo un raggio. Come evidenziato in figura, in base alla selezione degli spigoli cambia l'esito dell'operazione. Si osservi la differenza nel caso di applicazione ad uno spigolo isolato, a due spigoli contigui, o a tre spigoli contigui (Fig. 192). In quest'ultimo caso risulta interessato un vertice del cubo su cui convergono tre spigoli: si avrà, dunque, la convergenza di superfici cilindriche e di una porzione di sfera con uguale raggio della circonferenza di raccordo.

Si osservi l'esito del raccordo qualora l'operazione interessi quattro spigoli contigui delimitanti una faccia del cubo, oppure gli spigoli delimitanti due facce contigue: nel secondo caso, in corrispondenza dei vertici superiore ed inferiore, si verranno a determinare i raccordi sferici precedentemente descritti.

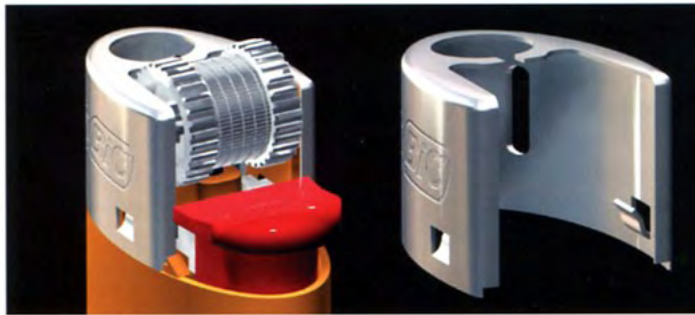
Si può ipotizzare di estendere il processo a tutti gli spigoli del cubo, determinando, in questo caso, la perdita di tutte le intersezioni di facce perpendicolari, che saranno raccordate da porzioni cilindriche negli spigoli e da porzioni sferiche nei vertici. Si noti che le facce del solido così ottenuto mantengono inalterata la loro posizione e rimangono perfettamente sovrapposte a quelle del solido originario (Fig. 193).

Il *raccordo di spigoli* può essere applicato, ovviamente, anche a solidi o superfici non appartenenti a poliedri. Nel modello del joystick si osserva come lo smusso interessi solidi cilindrici e superfici non appartenenti a poliedri regolari (Figg. 194-196).

Anche nel modello dell'accendino sono riconoscibili raccordi nella parte esterna della scocca metallica e del pulsante in plastica adibito all'erogazione del gas. Osservando il modello della sola scocca metallica si osservi la differenza tra le porzioni smussate e quelle in cui gli spigoli rimangono perfettamente integri (Figg. 197-198).



Figg. 194 - 196 Emilio Anastasi, joypad per Playstation. Si notano molti spigoli raccordati.



Figg. 197 - 198 Emanuele Cascone, accendino Bic. Il raccordo di spigoli è visibile nella testa metallica e nella levetta rossa per la fuoriuscita del gas.



Un altro elemento in cui è perfettamente riconoscibile il raccordo di spigoli di un solido è dato dalla scocca del telefono. Le porzioni interessate ad operazioni di raccordo di superfici sono diverse; a titolo esemplificativo si è riportato il procedimento che ha consentito di generare la superficie smussata della scocca della cornetta (Figg. 199-201).

Fig. 199 Paolo Zaami, telefono Sirio. Parti della scocca e della cornetta sono ottenute tramite raccordo di spigoli.

Fig. 200-201 Roberta Librizzi, telefono Sirio. Sulla cornetta è evidenziato in grigio l'effetto del raccordo dello spigolo del volume estruso.

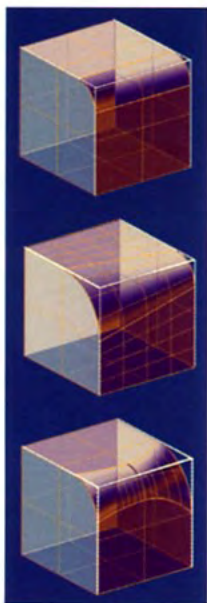


Fig. 202 Raccordo a sezione circolare a raggio costante, a raggio decrescente secondo una legge lineare e a raggio variabile.

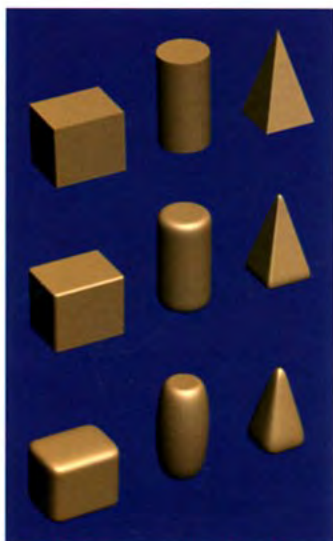


Fig. 203 Smusso di solidi. Aumentando il parametro di smusso si possono ottenere figure abbastanza difformi dalle originarie.

Il raccordo di cui si è parlato finora prevede una sezione perfettamente circolare e costante. Alcuni programmi consentono ulteriori variazioni, poichè danno la possibilità di eseguire raccordi a raggio variabile.

Il *raccordo a raggio variabile* consente di smussare uno spigolo con andamento non costante. Si possono attribuire valori diversi al raggio di raccordo iniziale e finale, oppure si possono attribuire diversi valori anche a raggi intermedi della superficie di raccordo. La differenza tra raccordo a raggio costante, a raggio iniziale differente da quello finale e a raggio variabile è visibile nella sequenza sottostante (Fig. 202).

Il processo appena descritto si riferisce, come visto, a spigoli, vertici, facce ed ha come peculiarità la circolarità del vettore di raccordo.

SMUSSATURA

Un concetto molto simile è quello relativo al processo di *smussatura*. In questo caso non si interviene solo su alcune parti del solido ma si applica all'intera figura tridimensionale. Lo smusso consente di eliminare le "asperità" di una figura tridimensionale, per cui, dopo l'operazione, le figure saranno prive di spigoli.

A differenza del raccordo, nella smussatura la giunzione tra le superfici non necessariamente avviene tramite archi di circonferenza e, a seconda del programma, l'aumento del parametro di smusso può dar vita a figure che si discostano sensibilmente da quelle originarie.

La figura a fianco mostra come, aumentando il parametro di smusso, le figure tendono a perdere la configurazione originaria.

Anche in questo caso, comunque, gli spigoli cedono il posto a superfici di raccordo a sezione comunque curva (Fig. 203).

CIMATURA

Lo smusso può seguire anche un andamento retto, dando vita a processi di *cimatura*. Il concetto è analogo a quello del raccordo e della smussatura, con la differenza che lo spigolo risulta cimato da un segmento retto.

Anche in questo caso, come per il raccordo, si può avere una cimatura ad andamento costante ed una cimatura ad andamento variabile.

Nella cimatura ad andamento costante l'eliminazione dello spigolo avviene mantenendo invariato il valore della lunghezza di cimatura, segnata in figura con la lettera *c*. Gli spigoli, evidenziati in arancione, interessati dalla cimatura, lasciano posto alle facce derivanti dalla cimatura. Il valore *c* rimane costante sia lungo l'andamento circolare dello spigolo del cilindro, sia lungo il perimetro della faccia superiore del parallelepipedo. In questo modo l'angolo delle superfici derivanti dal processo di cimatura con le facce verticali presistenti, rimane inalterato lungo tutto lo svolgimento del processo.

Nel caso in cui la lunghezza di cimatura vari l'andamento della superficie di raccordo non può rimanere costante, ma dovrà adeguarsi a tale variazione.

La figura mostra la differenza tra una cimatura a lunghezza costante ed una cimatura a lunghezza variabile (Fig. 204).

CURVATURA

La *curvatura* è un processo secondo cui un oggetto subisce una forza deformante che mantiene inalterata la posizione di alcuni punti e impone a tutti gli altri una curvatura secondo un asse.

Il parametro principale da individuare è l'*angolo di curvatura* (α): la determinazione di quest'ultimo, infatti, indica quale sarà l'angolo compreso tra le giaciture delle superfici piane (s_0, s_1) che identificano i limiti della curvatura. La determina-

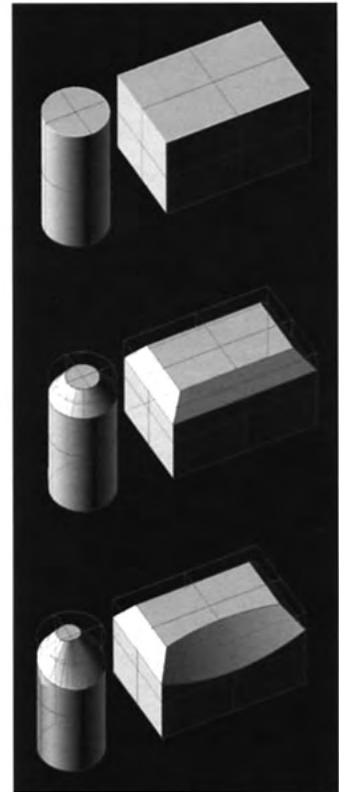


Fig. 204 Cimatura di spigoli a lunghezza costante e a lunghezza variabile.

zione dell'angolo di curvatura influisce, ovviamente, sul posizionamento dell'asse di curvatura, giacente su un piano perpendicolare a quello su cui si misura l'angolo di curvatura. La giacitura della sezione s rimane, dunque, invariata, mentre quella della sezione s' varia in base all'angolo di curvatura.

I programmi che consentono tale operazione non consentono, di solito, di individuare il posizionamento dell'asse di curvatura, ma permettono, solamente, di determinare l'ampiezza dell'angolo di curvatura, basandosi sul concetto che se si definisce l'angolo si posiziona in maniera univoca l'asse (Fig. 205).

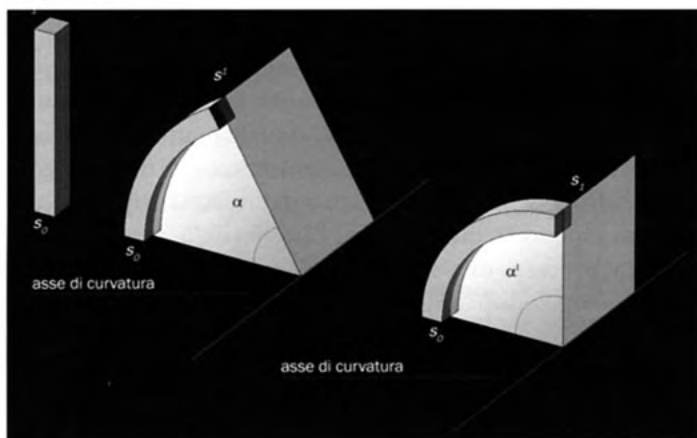


Fig. 205 Curvatura di un solido: l'angolo di curvatura è determinato dalle giaciture delle facce estreme del solido.

TORSIONE

Un'operazione simile è costituita dalla *torsione*. Anche in questo caso si suppone di mantenere inalterata la giacitura ed il posizionamento di una sezione dell'oggetto e di imporre a tutti i restanti i punti una rotazione intorno ad un asse.

Si stabilisce un angolo di torsione, e, a differenza di quanto avviene nella curvatura, si impone anche il posizionamento dell'asse di torsione.

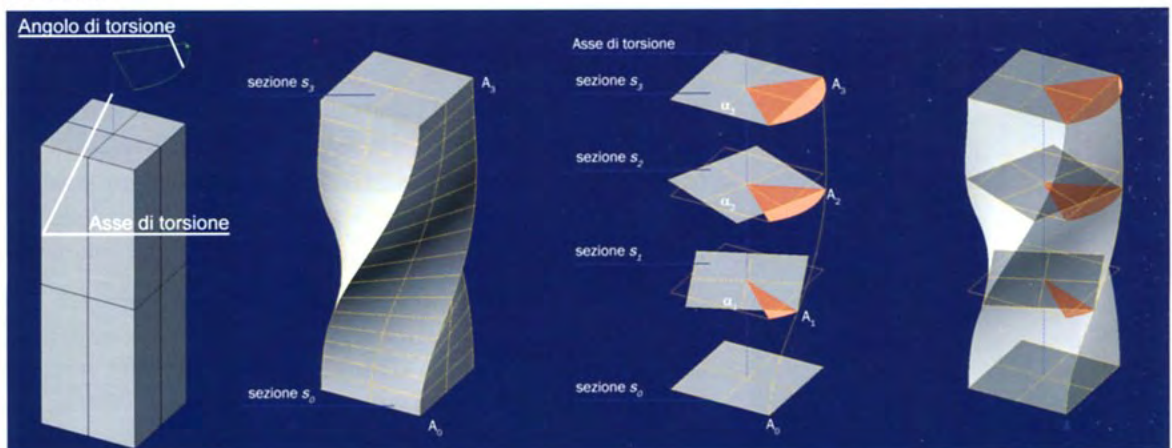
L'angolo di torsione indica la rotazione massima, quella cioè dei punti appartenenti al piano di giacitura che costituisce il

limite della torsione.

Imponendo alla sezione s_3 del parallelepipedo un angolo di torsione pari ad α_3 , il punto A_3 , vertice del quadrato in sommità, non si troverà più in corrispondenza del punto A_0 , appartenente alla sezione s_0 , ma subisce una rotazione, intorno all'asse, esattamente pari all'angolo di torsione.

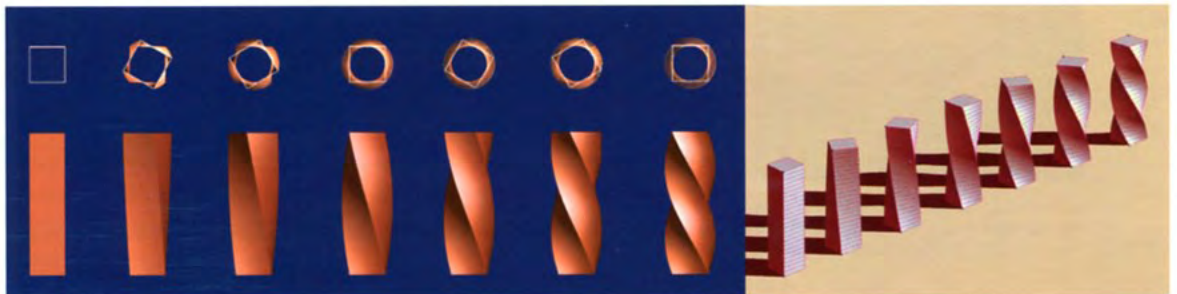
Considerando le sezioni intermedie, l'angolo di rotazione del corrispondente del punto A_0 varia da un valore pari α_0 della sezione iniziale fino al valore massimo determinato dall'angolo di torsione α_3 . Il fatto che questa variazione avvenga gradualmente fa sì che lo spigolo del parallelepipedo abbia un andamento sinuoso e privo di punti di discontinuità (Figg. 206-207).

Figg. 206 - 207 Torsione di un solido: l'angolo di torsione è determinato dalle rotazioni delle facce estreme del solido.

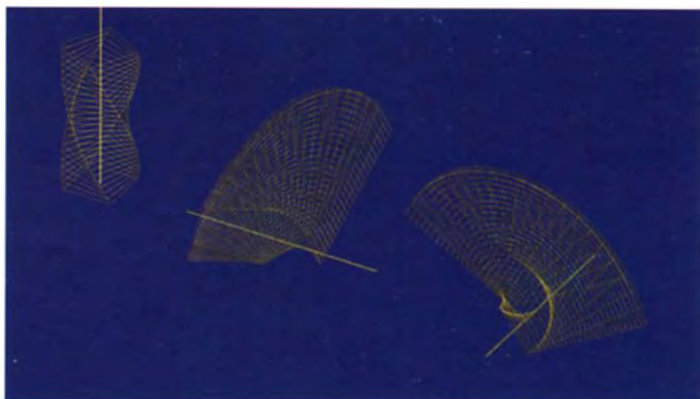


Figg. 208 - 209 Torsione di un parallelepipedo. Si osservi la rotazione di uno spigolo man mano che aumenta l'angolo di torsione.

La torsione può essere applicata, ovviamente, ad un qualsiasi solido o ad una qualsiasi superficie. La forma che si ottiene sarà influenzata, oltre che dalla forma delle sezioni del solido,



Figg. 210 Torsione di un parallelepipedo. L'esito della torsione cambia a seconda della giacitura dell'asse di torsione.



dall'altezza della porzione interessata dall'angolo di torsione, dalla giacitura e dal posizionamento dell'asse rispetto quella del solido stesso.

Nella determinazione della torsione è fondamentale il posizionamento dell'asse di torsione, che non deve essere necessariamente appartenente al solido o alla superficie. La modifica della posizione o della giacitura determinano una variazione nella forma derivata.

Si osservi come, mantenendo inalterate le dimensioni di un parallelepipedo ed imponendo un medesimo angolo di torsione, la forma cambia in conseguenza della rotazione dell'asse di torsione (segnato in giallo): ruotando sul piano verticale l'asse di torsione la forma generata diventa, come visibile, del tutto differente rispetto a quella generata da torsione ad asse verticale (Fig. 210).

Tra gli oggetti che possono essere decritti come solidi o superfici sottoposti a torsione si possono ricordare le colonne tortili dell'architettura barocca o tardobarocca o le punte di trapano, ottenibili tramite torsione di un cilindro, più o meno arrotondato in sommità, che presenta una o due scanalature (Fig. 211).



Fig. 211 Torsione di un cilindro con punta tronco-conica scanalato. L'esito della torsione di un solido di rotazione scanalato può generare una forma simile a quella della punta di un trapano.

MODIFICA DEI PUNTI DI CONTROLLO

Le variazioni di forma sin qui descritte sono controllate da due fattori: uno è relativo a parametri numerici quali, ad esempio, il raggio di raccordo, l'angolo di curvatura o quello di torsione; l'altro è relativo alla selezione di entità geometriche. Si è visto, per esempio, che il raccordo ha esiti differenti a seconda che si intervenga su uno spigolo o su un vertice, oppure l'importanza della definizione dell'asse di torsione.

Un altro modo per alterare una forma elementare è dato dallo spostamento di punti appartenenti alle curve u , v (parallele agli assi x , y), che definiscono la struttura geometrica delle superfici, sulle quali è possibile marcare punti secondo parametri di suddivisione definiti dall'utente. La traslazione di questi punti, definiti *punti di controllo*, determina la deformazione locale della superficie in prossimità del punto stesso (Fig. 212).

Un'altra procedura attribuisce alla superficie una griglia tridimensionale, esterna, che spesso può essere modificata sia per quanto riguarda la forma, sia per quanto riguarda il passo lungo gli assi x , y , z . Entrambi i metodi di suddivisione delle superfici presentano dei punti posizionati all'intersezione delle curve u e delle curve v o all'intersezione dei segmenti della griglia.

Si osservi la differenza tra la geometria definita dalle curve u , v della superficie, inizialmente piana, e la griglia geometrica sovrapposta al solido di rotazione: quest'ultima segue un andamento parallelepipedo con n suddivisioni lungo l'asse x , n' suddivisioni lungo l'asse y , n'' suddivisioni lungo l'asse z . La forma di tale griglia può variare, anche se, prima delle deformazioni, assume, in genere, forme di solidi elementari (Fig. 213).

Le deformazioni possono avvenire sul singolo punto o su gruppi di punti di controllo: in questo caso la deformazione è controllata tramite un vettore di traslazione comune a tutti i punti selezionati, ma, in un qualsiasi momento, è possibile intervenire localmente.

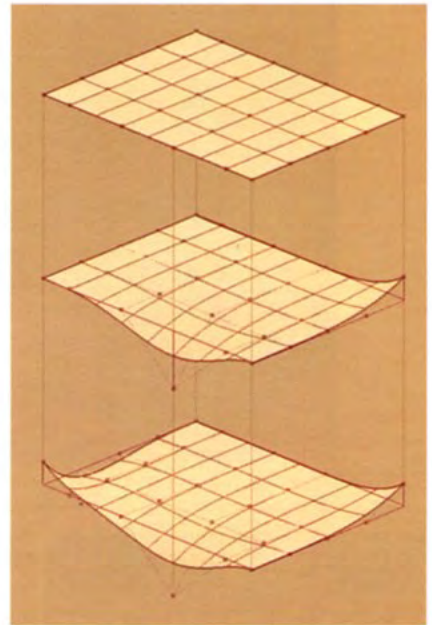


Fig. 212 Deformazione di una superficie piana ottenuta tramite traslazione verticale di alcuni punti di controllo.

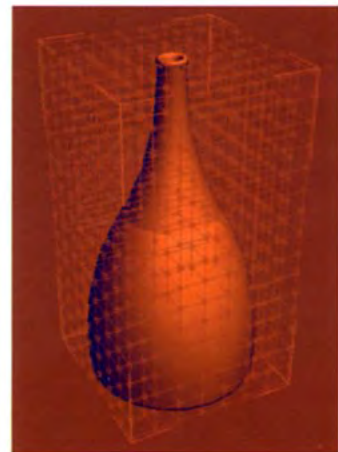
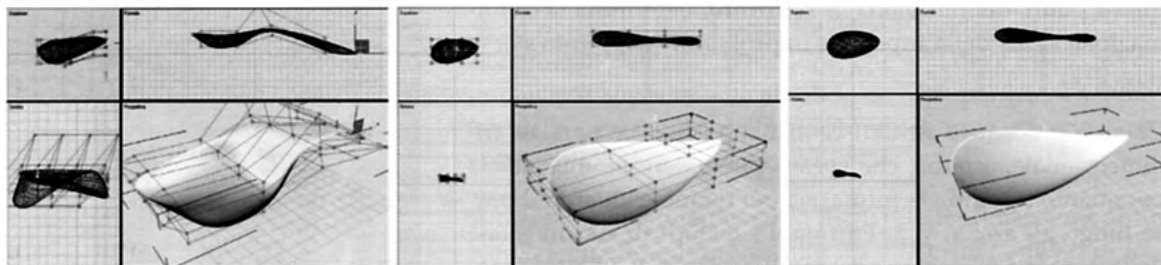


Fig. 213 Griglia tridimensionale di punti di controllo associata ad un solido di rotazione.

Tali deformazioni consentono di alterare in modo anche determinante una forma e sono molto efficaci quando si devono ottenere superfici che non sono definite tramite geometrie elementari, né si possono ottenere tramite processi di deformazione parametrica secondo vettori geometricamente definibili: il raccordo, la curvatura, la torsione, come si è appena visto, determinano alterazioni definite tramite angoli e archi di circonferenza perfettamente controllabili. Sarebbe molto difficile, se non impossibile, ottenere le superfici raffigurate in questo paragrafo ricorrendo a tali processi, mentre risulta relativamente semplice intervenire tramite le descritte modifiche puntuali.

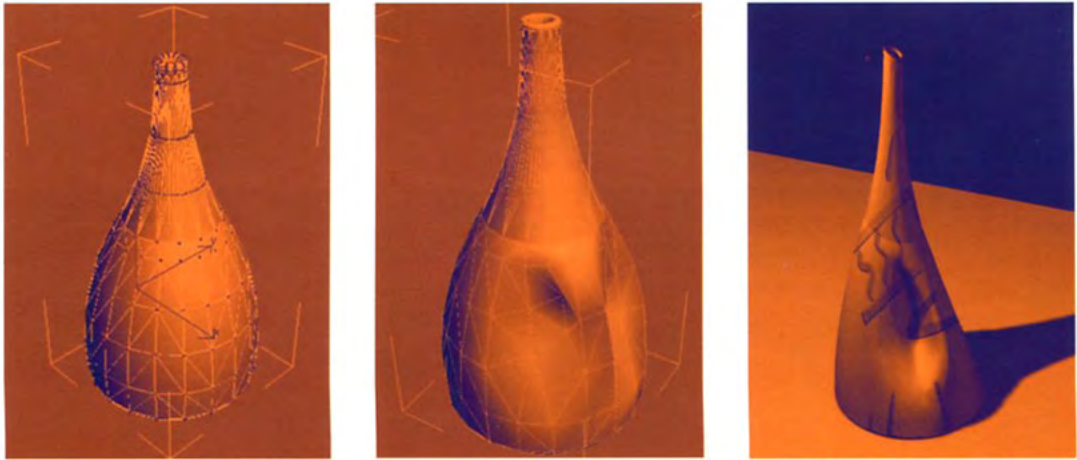
Gli esempi riportati fanno riferimento a superfici e solidi, in quanto tali modifiche possono essere applicate ad entrambe le famiglie geometriche (Figg. 214-216).



Figg. 214 -216 Attribuzione di una griglia tridimensionale di punti di controllo 4x4x4 ad un solido smussato ed effetti della traslazione di gruppi di punti di controllo appartenenti alla griglia precedentemente descritta.

È possibile, inoltre, intervenire in modo analogo anche in presenza di superfici poligonali, già definite meshes, trasladando direttamente i vertici dei poligoni piani in cui è discretizzata la superficie. In questo caso, quando si opera una traslazione di un vertice si interviene su quei poligoni contigui cui appartiene il vertice in esame. Nel caso della deformazione locale di superfici poligonali si può intervenire trasladando uno spigolo o una faccia.

Si può avere un'idea quanto detto osservando il vaso dal collo allungato: gli incavi che dovrebbero facilitarne la presa sono ottenuti tramite traslazione di vertici e spigoli verso l'interno della superficie (Figg. 217-219).



Figg. 217 - 219 Effetti della traslazione di punti di controllo appartenenti ad una superficie poligonale.

Alcuni programmi consentono di attribuire un “peso” ai punti di controllo e ad i vertici delle meshes per determinare la vastità dell’area superficiale interessata dalla deformazione, quasi a simulare la forza con cui si esercita la “pressione” sulla superficie.