

## UN'EFFICIENTE METODOLOGIA PER LA SOLUZIONE DI PROBLEMI DIFFUSIVI ANISOTROPI ETEROGENEI

C. Aricò & T. Tucciarelli

Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale, Aerospaziale, dei Materiali, Università di Palermo, Palermo, Italia, e-mail: [arico@idra.unipa.it](mailto:arico@idra.unipa.it), [costanza.arico@unipa.it](mailto:costanza.arico@unipa.it), [tucciari@idra.unipa.it](mailto:tucciari@idra.unipa.it), [tullio.tucciarelli@unipa.it](mailto:tullio.tucciarelli@unipa.it)

### SOMMARIO

*Si presenta una metodologia per la soluzione di problemi diffusivi anisotropi eterogenei. Il problema è discretizzato su una mesh triangolare non strutturata, che soddisfa la condizione di Delaunay "generalizzata" per tutti i lati dei triangoli. Il volume di controllo è il poligono chiuso dato dall'unione dei punti medi dei lati con un punto particolare, definito circocentro anisotropo di ogni triangolo. La dimensione del sistema risolvibile è pari al numero dei nodi. Si ottiene una struttura del flusso diffusivo attraverso i lati del volume di controllo simile a quella del metodo standard agli Elementi Finiti lineare alla Galerkin, che però consente di pervenire ad una  $M$ -matrice di rigidezza del sistema. Si presentano alcuni test numerici proposti in letteratura, con confronto con soluzioni analitiche e stima dell'ordine di convergenza.*

### 1 INTRODUZIONE

Problemi fisici diffusivi anisotropi riguardano molti temi ambientali, quali il trasporto di calore, problemi di flusso e di trasporto in acque sotterranee, simulazioni di giacimenti di petrolio, simulazioni idrodinamiche, ... Questi problemi sono caratterizzati da un tensore di diffusione a pieno rango, che è diagonale solo se il sistema di riferimento è allineato con la direzione principale di anisotropia (Bear, 1972). Difficoltà di convergenza numerica possono sorgere al crescere dell'anisotropia, cioè la tendenza di un fenomeno ad allinearsi progressivamente lungo una direzione preferenziale.

I problemi diffusivi stazionari soddisfano il *Maximum Principle* (MP): la soluzione non può avere un massimo/minimo all'interno del dominio di calcolo. Uno schema numerico per problemi diffusivi stazionari dovrebbe soddisfare la versione discretizzata del MP, il *Discrete Maximum Principle* (DMP) e calcolare soluzioni prive di oscillazioni spurie. Sono state date una serie di condizioni sufficienti per il soddisfacimento del DMP (Li & Huang, 2010 e bibliografia citata). Tra questi, la condizione più comune è che la matrice di rigidezza del problema debba essere una matrice  $M$ . Una matrice  $M$  è una matrice con coefficienti diagonali positivi, elementi extradiagonali negativi e dominanza diagonale stretta per almeno una riga (Li & Huang, 2010). È stato dimostrato che in problemi 2D con mezzo omogeneo ed isotropo, i metodi agli Elementi Finiti (EF) lineari (P1) soddisfano il DMP quando vale la condizione di Delaunay, per cui la somma di ogni coppia di angoli opposti ad un lato

comune è minore o uguale a  $\pi$  (Li & Huang, 2010). Nel caso di mezzo anisotropo la suddetta condizione non basta e molte tecniche numeriche sono state proposte, a volte molto laboriose, con notevoli costi computazionali e non sempre di successo (Li & Huang, 2010 e bibliografia citata).

Nel presente lavoro si presenta una nuova metodologia per la soluzione di problemi diffusivi anisotropi eterogenei. Le equazioni di governo si discretizzano su una mesh triangolare di base non strutturata che soddisfa la cosiddetta condizione di Delaunay generalizzata, ulteriormente specificata. La particolare discretizzazione spaziale dei flussi così ottenuta attraverso i lati del volume di controllo consente di ottenere sempre una  $M$ -matrice di rigidità.

## 2 EQUAZIONI DI GOVERNO E DISCRETIZZAZIONE SPAZIALE DEI FLUSSI

Sia  $\Omega$  un dominio 2D,  $\Gamma$  il suo contorno e  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$  il vettore delle coordinate spaziali ( $T$  è il simbolo di trasposizione).  $H_1(\Omega)$  è lo spazio di Sobolev delle funzioni a quadrato integrabile con derivata prima a quadrato integrabile su  $\Omega$ .

Si consideri il seguente problema diffusivo nell'incognita  $u(\mathbf{x}, t) \in H_1(\Omega)$ :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{q} = f & \text{in } \Omega & \mathbf{q} = -\mathbf{D}\nabla u \\ u = u_D(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Gamma_D & \mathbf{q}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = g_N(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Gamma_N \end{cases} \quad (1),$$

dove  $\mathbf{q}$  è il vettore flusso diffusivo unitario,  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$  il tensore ( $2 \times 2$ ) diffusivo, simmetrico e definito positivo,  $\Gamma_D$  e  $\Gamma_N$  la parti di  $\Gamma$  dove sono imposte le condizioni al contorno rispettivamente di Dirichlet e di Neumann,  $u_D$  un assegnato valore di Dirichlet su  $\Gamma_D$ ,  $g_N$  un assegnato flusso di Neumann ( $\mathbf{n}$  vettore unitario ortogonale uscente dal contorno) e  $f = f(\mathbf{x}, t) \in L_2(\Omega)$  una data funzione (termine sorgente).

Sia  $\Omega_h$  un'approssimazione poligonale di  $\Omega$  e  $T_h$  una triangolazione non strutturata di  $\Omega_h$ , detta mesh di base.  $N_T$  è il numero di triangoli  $T$  di  $T_h$ .  $P_i, i = 1, \dots, N$  è l'insieme dei vertici (nodi) di tutti i triangoli di  $T_h$  e  $N$  il numero di nodi. Una mesh duale è costruita sopra la mesh di base  $T_h$  ed il volume di controllo duale (o cella) associato al nodo  $P_i$  è il poligono chiuso dato dall'unione dei punti medi di ogni lato dei triangoli con il circocentro "anisotropo" di ogni triangolo che condivide  $P_i$ , come in seguito specificato.

### 2.1 Il circocentro anisotropo

Si assuma un mezzo omogeneo con tensore  $\mathbf{D}$  pieno. I nodi del triangolo  $T$  sono  $i, ip$  e  $im$ , in senso antiorario. Il lato vettore  $\mathbf{r}_{i,ip}$  ( $\mathbf{r}_{i,im}$ ) connette  $i$  e  $ip$  ( $im$ ), orientato da  $i$  a  $ip$  ( $im$ ).  $c_T$  è il circocentro anisotropo del triangolo  $T$  ( $\mathbf{x}_c^T$  vettore delle coordinate spaziali).  $P_{i,ip}$  e  $P_{i,im}$  sono i punti medi dei lati  $\mathbf{r}_{i,ip}$  e  $\mathbf{r}_{i,im}$  ( $\mathbf{x}_{i,ip}$  e  $\mathbf{x}_{i,im}$  vettori delle coordinate).  $c_T$  si calcola in modo da annullare il flusso attraverso i segmenti  $|P_{i,ip}c_T|$  e  $|P_{i,im}c_T|$  dovuti alle componenti del gradiente di  $u$  ortogonali a  $\mathbf{r}_{i,ip}$  e  $\mathbf{r}_{i,im}$ . Questo equivale ad assumere i suddetti flussi nel triangolo  $T$  pari a:

$$Fn_{i,ip}^T = -\mathbf{D}\mathbf{n}_{i,ip} \wedge (\mathbf{x}_c^T - \mathbf{x}_{i,ip}) = 0 \quad \text{e} \quad Fn_{i,im}^T = -\mathbf{D}\mathbf{n}_{i,im} \wedge (\mathbf{x}_c^T - \mathbf{x}_{i,im}) = 0 \quad (2),$$

con  $\mathbf{n}_{i,ip}$  e  $\mathbf{n}_{i,im}$  vettori unitari interni ortogonali a  $\mathbf{r}_{i,ip}$  e  $\mathbf{r}_{i,im}$  rispettivamente. Essendo  $\mathbf{D}$

un tensore pieno,  $\mathbf{r}_{i,ip}$  e  $\mathbf{r}_{i,im}$  generalmente non risultano ortogonali a  $-\mathbf{Dn}_{i,ip}$  e  $-\mathbf{Dn}_{i,im}$ .

## 2.2 Calcolo dei coefficienti diffusivi

In base al calcolo di  $c_T$ , i flussi attraverso  $|P_{i,ip}c_T|$  e  $|P_{i,im}c_T|$  sono interamente dovuti alle componenti del gradiente di  $u$  lungo le direzioni  $\mathbf{r}_{i,ip}$  e  $\mathbf{r}_{i,im}$ . Si deriva una struttura computazionale del flusso attraverso il segmento dal punto medio del lato al circocentro del triangolo simile alla struttura degli EF P1 alla Galerkin conformi (Putti & Cordes, 1988). I flussi attraverso  $|P_{i,ip}c_T|$  e  $|P_{i,im}c_T|$  dovuti ad una differenza unitaria tra i valori di  $u$  nei nodi  $i$  e  $ip$  e  $i$  e  $im$  (flussi specifici) si calcolano come (Aricò & Tucciarelli, 2012):

$$Fd_{i,ip}^T = \mathbf{D}(\mathbf{x}_{ip} - \mathbf{x}_i) \wedge (\mathbf{x}_c^T - \mathbf{x}_{i,ip}) \frac{1}{|\mathbf{r}_{i,ip}|^2} \quad \text{e} \quad Fd_{i,im}^T = \mathbf{D}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{im}) \wedge (\mathbf{x}_c^T - \mathbf{x}_{i,im}) \frac{1}{|\mathbf{r}_{i,im}|^2} \quad (3),$$

dove la norma Euclidea di  $\mathbf{r}_{i,ip}$  ( $\mathbf{r}_{i,im}$ ) è anche la distanza tra i nodi  $i$  e  $ip$  ( $im$ ). Siano  $T_1$  e  $T_2$  i triangoli che condividono  $\mathbf{r}_{i,im}$ , con circocentri anisotropi  $c_{T_1}$  e  $c_{T_2}$ . Nella matrice di rigidezza del sistema di soluzione, i coefficienti extra-diagonali  $Fd_{i,im}$  corrispondenti ai nodi connessi  $i$  e  $im$  possono essere visti come la somma dei flussi unitari attraverso  $|P_{i,ip}c_T|$  e  $|P_{i,im}c_T|$ , pari a:

$$Fd_{i,im} = -Fd_{i,im}^{T_1} - Fd_{i,im}^{T_2} \quad (4),$$

con coefficienti  $Fd_{i,im}^{T_1}$  e  $Fd_{i,im}^{T_2}$  definiti nell' Eq. (3). L'Eq. (4) può essere scritta come:

$$Fd_{i,im} = -\mathbf{D}^1(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{im}) \wedge (\mathbf{x}_c^1 - \mathbf{x}_{i,im}) \frac{1}{|\mathbf{r}_{i,im}|^2} - \mathbf{D}^2(\mathbf{x}_{im} - \mathbf{x}_i) \wedge (\mathbf{x}_c^2 - \mathbf{x}_{i,im}) \frac{1}{|\mathbf{r}_{i,im}|^2} \quad (5),$$

con  $\mathbf{D}^{1(2)}$  tensore diffusivo di  $T_{1(2)}$ . L'Eq. (5) può essere scritta come:

$$Fd_{i,im} = -\frac{(d_{i,im}^{T_1} c_{i,im}^{T_1} \sin \theta_1 + d_{i,im}^{T_2} c_{i,im}^{T_2} \sin \theta_2)}{|\mathbf{r}_{i,im}|^2}, \quad d_{p,pm}^{T_q} = |\mathbf{D}^q(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_{pm})|, \quad q = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}, \quad p = \begin{cases} i \\ im \end{cases}, \quad pm = \begin{cases} im \\ i \end{cases} \quad (6),$$

$c_{p,pm}^{T_q}$  è la distanza tra  $c_{T_q}$  e il punto medio  $P_{i,im}$  nel triangolo  $T_q$  e  $\theta_q$  è l'angolo tra i vettori  $\mathbf{D}^q(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_{pm})$  e  $(\mathbf{x}_c^q - \mathbf{x}_{i,im})$  in  $T_q$ .  $Fd_{i,im}$  deve essere sempre negativo affinché la matrice di rigidezza sia una matrice  $M$ .

## 3 DISCRETIZZAZIONE DEL SISTEMA DIFFUSIVO (1)

### 3.1 Caso isotropo e condizione di Delaunay Generalizzata (GD) per la mesh

Dall'Eq. (2), il volume finito duale  $e_i$  associate al nodo  $P_i$  in un mezzo isotropo è il poligono dato dall'unione del punto medio di ogni lato con il circocentro del triangolo  $T$ , uguale al volume controllo dell'equazione di bilancio di massa per il nodo  $P_i$  nel metodo agli EF standard P1 alla Galerkin (Putti & Cordes, 1988).

Una triangolazione di Delaunay in  $\mathbb{R}^2$  è definita dalla condizione che tutti i nodi della mesh non ricadano dentro i cerchi passanti per i tre nodi di ogni triangolo (Joe, 1986). Una triangolazione di Delaunay gode della seguente condizione per ogni lato interno  $\mathbf{r}_{i,im}$  (Putti & Cordes, 1988):

$$c_{i,im}^{T_1} + c_{im,i}^{T_2} \geq 0 \quad (7).$$

$\mathbf{D}^q = D^q \mathbf{I}$  ( $q = 1, 2$ ,  $\mathbf{I}$  matrice identità e  $D^q$  uno scalare positivo) sono i tensori diffusivi dei triangoli  $T_1$  e  $T_2$  che condividono  $\mathbf{r}_{i,im}$ . Data una mesh di Delaunay, in base all'Eq. (6), si propone di calcolare i coefficienti extra-diagonali  $Fd_{i,im}$  come:

$$Fd_{i,im} = -\frac{(d_{i,im}^{T_1} c_1 + d_{im,i}^{T_2} c_2)}{|\mathbf{r}_{i,im}|^2}, \quad \begin{cases} c_1 = c_{i,im}^{T_1}, c_2 = c_{im,i}^{T_2} & \text{se } c_{i,im}^{T_1} \geq 0 \text{ e } c_{im,i}^{T_2} \geq 0 \\ c_1 = c_{i,im}^{T_1} + c_{im,i}^{T_2}, c_2 = 0 & \text{se } c_{i,im}^{T_1} \geq 0, c_{im,i}^{T_2} < 0 \text{ e } c_{i,im}^{T_1} > |c_{im,i}^{T_2}| \\ c_1 = 0, c_2 = c_{im,i}^{T_2} + c_{i,im}^{T_1} & \text{se } c_{i,im}^{T_1} < 0, c_{im,i}^{T_2} \geq 0 \text{ e } c_{im,i}^{T_2} > |c_{i,im}^{T_1}| \end{cases} \quad (8).$$

In base all'Eq. (8),  $c_q$  non risulta mai negativo. Nella discretizzazione agli EF standard alla Galerkin, se i due flussi  $Fd_{i,im}^{T_1}$  e  $Fd_{im,i}^{T_2}$  sono calcolati con differenti parametri  $D^q$ , il segno del flusso totale dal nodo  $i$  al nodo  $im$  potrebbe non essere coerente con la differenza dei valori di  $u$ , anche in una mesh di Delaunay. Di contro, la formulazione dell'Eq. (8) garantisce che il segno di  $Fd_{i,im}$  sia negativo. Se la proprietà di Delaunay non è soddisfatta, partendo dalla triangolazione di origine, si può sempre ottenere una mesh che soddisfi l'Eq. (7) per tutti i lati interni, senza cambiare la posizione iniziale dei nodi. Questo può essere ottenuto effettuando una serie di rotazioni locali dei lati (*edge swaps*) (Forsyth, 1991). Se il triangolo  $T_1$  è di contorno, con lato di contorno  $\mathbf{r}_{i,im}$  opposto ad un angolo ottuso, il flusso specifico è negativo, anche per una mesh di Delaunay, poichè la distanza del circocentro dal lato di contorno è negativa e  $Fd_{i,im}$  risulta positivo. Definiamo mesh di Delaunay Generalizzata (GD) una mesh dove vale la seguente condizione per tutti i lati di contorno:

$$c_{i,im}^{T_1} \geq 0 \quad (9).$$

Se l'Eq. (9) non è soddisfatta per uno o più lati di contorno, e/o sono assegnati lati fissi all'interno del dominio (*internal boundaries*), è sempre possibile ottenere una GD mesh, mantenendo i lati fissi interni aggiungendo nodi sui lati di contorno originari (Aricò & Tucciarelli, 2012).

### 3.2 Caso anisotropo direzionalmente omogeneo e condizione di Delaunay Anisotropa Generalizzata per la mesh

Il tensore diffusivo  $\mathbf{D}$  può essere diviso in una componente scalare  $d_0$  ed una direzionale  $\mathbf{D}'$ :

$$\mathbf{D} = d_0 \mathbf{D}' = d_0 \begin{pmatrix} D'_{11} & D'_{12} \\ D'_{21} & D'_{22} \end{pmatrix} \quad \text{con } d_0 = D_{11} + D_{22} \text{ e } D'_{rs} = \frac{D_{rs}}{d_0}, \quad r, s = 1, 2 \quad (10).$$

Il tensore  $\mathbf{D}'$ , come  $\mathbf{D}$ , è simmetrico e definito positivo.  $\mathbf{D}^1$  e  $\mathbf{D}^2$  sono i tensori nei triangoli  $T_1$  e  $T_2$  che condividono il lato  $\mathbf{r}_{i,im}$  aventi la stessa componente  $\mathbf{D}'$ . Il coefficiente extra diagonale  $Fd_{i,im}$  può essere calcolato in base all'Eq. (6), che diventa:

$$Fd_{i,im} = -\frac{(d_{i,im}^{T_1}c_1 + d_{im,i}^{T_2}c_2)\sin\theta}{|\mathbf{r}_{i,im}|^2} \quad (11),$$

e  $\theta = \theta_1 = \theta_2$  (mezzo direzionalmente omogeneo). Anche se  $d_{i,im}^{T_1}$  e  $d_{im,i}^{T_2}$  sono differenti, il coefficiente  $Fd_{i,im}$  calcolato con l'Eq. (11) è sempre negativo e la proprietà  $M$  è garantita se  $\theta \leq \pi$ . Definiamo una mesh che soddisfa la condizione Generalizzata Anisotropa di Delaunay (GAD) se  $Fd_{i,im}$  calcolato per ogni lato della mesh con l'Eq. (11) è sempre negativo. L'ortogonalità in  $T_1$  tra  $\mathbf{r}_{i,q}$  ( $q = im$  o  $ip$ ) e  $\mathbf{n}_{i,q} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{s}$ , ( $\mathbf{s}$  vettore unitario e orientato dal punto medio del lato a  $c_{T_1}$ ), implica:

$$\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x}_c^{T_1} - 1/2(\mathbf{x}_q + \mathbf{x}_i)) \cdot (\mathbf{x}_q - \mathbf{x}_i) = 0 \quad (12).$$

Cambiando  $\mathbf{x}_q$  con il vettore  $\mathbf{x}$  delle coordinate di un punto generico, l'Eq. (12) diventa:

$$\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x}_c^{T_1} - 1/2(\mathbf{x} + \mathbf{x}_i)) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = 0 \quad (13),$$

che è l'equazione di un'ellisse con centro  $c_{T_1}$ , passante per i tre nodi di  $T_1$  (Aricò & Tucciarelli, 2012). L'Eq. (13) può essere scritta come (Aricò & Tucciarelli, 2012):

$$(\mathbf{x}_c^{T_1} - 1/2(\mathbf{x} + \mathbf{x}_i))^T \mathbf{C} \mathbf{C}^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = 0 \quad \text{con} \quad \mathbf{C} = \mathbf{H}\mathbf{\Lambda}^{1/2} \quad (14),$$

dove le colonne della matrice  $\mathbf{H}$  sono gli autovettori di  $\mathbf{D}^{-1}$ ,  $\mathbf{\Lambda}$  è una matrice diagonale con elementi diagonali pari agli autovalori di  $\mathbf{D}^{-1}$ . La matrice  $\mathbf{C}$  agisce su  $\mathbf{x}$  con una rotazione ed una distorsione:  $\mathbf{H}$  tiene conto della rotazione,  $\mathbf{\Lambda}^{1/2}$  della distorsione. Definiamo un nuovo vettore coordinate:

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{F} \mathbf{x} \quad \text{con} \quad \mathbf{F} = \mathbf{C}^T \quad (15).$$

$\mathbf{x}$  e  $\boldsymbol{\xi}$  rappresentano i vettori delle coordinate rispettivamente nello spazio fisico e computazionale. In base all'Eq. (15), l'Eq. (14) diventa nello spazio computazionale l'equazione di una circonferenza (Aricò & Tucciarelli, 2012):

$$(\boldsymbol{\xi}_{cir}^{T_1} - 1/2(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}_i))^T (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_i) = 0 \quad (16).$$

Il problema anisotropo di origine diventa nello spazio computazionale un problema isotropo. La matrice  $\mathbf{F} = \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{H}^T$  genera una trasformazione affine tra lo spazio fisico e quello computazionale ed  $\mathbf{H}^T$  può essere vista come una trasformazione intermedia, da  $\mathbf{x}$  a  $\boldsymbol{\xi}' = \mathbf{H}^T \mathbf{x}$ . La figura di origine è semplicemente ruotata nel nuovo spazio  $\boldsymbol{\xi}'$  e il flusso unitario nello spazio originario  $\mathbf{x}$  e nel nuovo spazio  $\boldsymbol{\xi}'$  è lo stesso.  $\mathbf{\Lambda}^{1/2}$  provoca una seconda trasformazione, da  $\boldsymbol{\xi}'$  a  $\boldsymbol{\xi}$ , che è una semplice deformazione nella direzione dell'asse principale di  $\boldsymbol{\xi}'$ . Poiché gli autovalori sono entrambi positivi, il segno dei due coefficienti nello spazio fisico e computazionale è lo stesso (Aricò & Tucciarelli, 2012).

### 3.3 Caso anisotropo eterogeneo

Nel caso più generale eterogeneo anisotropo, la proprietà  $M$  della matrice di rigidezza è garantita effettuando un'operazione di "smoothing" del tensore  $\mathbf{D}$ . A tal fine, si trattano differentemente la componente  $d_0$  e quella  $\mathbf{D}'$ .  $d_0$  è assegnato a ciascun nodo e nel calcolo del flusso, viene sempre conservato il suo valore originale medio nel triangolo ed assunto come costante all'interno dell'elemento triangolare.  $\mathbf{D}'$  si assegna a ciascun triangolo della mesh iniziale, che soddisfa la condizione GD. Quando un lato interno viene ruotato (*edge swap*), si assegna ai due nuovi triangoli che condividono il lato ruotato il valore medio delle componenti direzionali  $\mathbf{D}'$  calcolate nei due triangoli originari che condividevano il lato non ancora ruotato e si procede come nel caso di mezzo anisotropo direzionalmente omogeneo (Aricò & Tucciarelli, 2012).

#### 4 TEST NUMERICI

##### 4.1 Test 1. Analisi del numero di condizionamento della matrice di rigidezza

Si assumono un dominio unitario  $\Omega = [0,1]^2$  e un tensore  $\mathbf{D}$  omogeneo e diagonale. Il coefficiente  $D_{11}$  è costante, con valore pari a 1, il coefficiente  $D_{22}$  varia da 1 a 1.d-10 (Mazzia et al., 2011). La mesh di base ha 14 triangoli acuti e 12 nodi. La condizione di Dirichlet è imposta sui lati destro e sinistro del dominio. Le tabella 1 riporta i valori massimo e minimo degli autovalori della matrice di rigidezza ( $\lambda_{max}$  and  $\lambda_{min}$ ) ed il loro rapporto, per differenti valori del coefficiente  $D_{22}$ , sia per la metodologia proposta, sia per un modello standard  $P1$  Galerkin EF. Il numero di condizionamento della matrice di rigidezza è il rapporto  $\lambda_{max}/\lambda_{min}$ . Nel metodo proposto tale rapporto è più vicino ad 1 che nello schema alla Galerkin, e ciò implica un migliore condizionamento del sistema finale. A causa dell'anisotropia, alcuni dei coefficienti extra diagonali della matrice di rigidezza dello schema alla Galerkin diventano positivi e si perde la proprietà  $M$ . I risultati del metodo alla Galerkin si trovano in Mazzia et al. (2011).

$D_{22}$	Schema proposto			Schema $P1$ Galerkin		
	$\lambda_{min}$	$\lambda_{max}$	$\lambda_{max}/\lambda_{min}$	$\lambda_{min}$	$\lambda_{max}$	$\lambda_{max}/\lambda_{min}$
1.d+00	0.88030	4.8407	5.4989	0.8803	4.8407	5.4989
1.d-01	0.72124	2.49489	3.4592	0.72129	3.0363	4.2095
1.d-04	0.57819	1.87076	3.2355	0.6348	2.954	4.6534
1.d-06	0.57799	1.87010	3.2355	0.63468	2.9539	4.6542
1.d-10	0.57799	1.87009	3.2355	0.63468	2.9539	4.6542

**Tabella 1.**  $\lambda_{max}$ ,  $\lambda_{min}$  e numero di condizionamento per lo schema proposto e per  $P1$  Galerkin EF

##### 4.2 Test 2. Studio della presenza di oscillazioni spurie nel caso di mezzo eterogeneo a forte contrasto dei tensori di diffusione $\mathbf{D}$

Si risolve il seguente problema sul dominio  $\Omega = [0,1]^2$  (Edwards & Zengh, 2010):

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \mathbf{D} \nabla u = 0 \\ u_D(0,0) = 0 \quad u_D(1,1) = 200 \quad u_D(0,x_2) \Big|_{\Gamma_D \setminus \{(0,0),(1,1)\}} = 100 \end{cases} \quad (17,a),$$

con tensori diffusivi discontinui:  $\mathbf{D}_1$  in  $(0 \leq x_1 \leq 1) \times (0 \leq x_2 \leq 1/3)$  e  $(0 \leq x_1 \leq 1) \times (2/3 < x_2 \leq 1)$  e  $\mathbf{D}_2$  in  $(0 \leq x_1 \leq 1) \times (1/3 < x_2 \leq 2/3)$ , con:

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 2464.36002 & 1148.683643 \\ 1148.683643 & 536.6399794 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 2464.36002 & -1148.683643 \\ -1148.683643 & 536.6399794 \end{pmatrix} \quad (17,b).$$

Edwards & Zengh (2010) hanno applicato due schemi *Multi-Point Flux Approximation* (MPFA): uno schema lineare *Triangle Pressure Support* (TPS) ed uno schema *Full-Pressure Support* (FPS). Il TPS calcola delle oscillazioni spurie nella soluzione, mentre i risultati del FPS sono privi di oscillazioni. Per i calcoli effettuati con la metodologia proposta, il dominio è discretizzato con una mesh GD non strutturata con 2624 triangoli e 1377 nodi. A causa del forte contrasto dei tensori  $\mathbf{D}$  nelle tre zone del dominio, sono state considerate due situazioni: la prima, senza contorni fissi interni, la seconda con lati fissi (contorni fissi) interni in corrispondenza dei salti dei tensori  $\mathbf{D}_1$  e  $\mathbf{D}_2$ . I risultati calcolati per i due scenari sono molto simili e per brevità si riportano soltanto quelli ottenuti fissando i lati interni. Le figure 1,a-1,c mostrano i contorni calcolati delle linee iso- $u$ , il profilo 3D di  $u$  e la mesh finale calcolata dopo aver effettuato le operazioni di *edge swaps*. Le soluzioni calcolate nelle due suddette situazioni sono prive di oscillazioni spurie.

### 4.3 Test 3. Studio del fenomeno di *mesh locking*

Si studia il seguente problema nel dominio  $\Omega = [0,1]^2$  (Manzini & Putti, 2007; Gao & Wu, 2011):

$$u = u_D, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D \quad \left. \begin{array}{l} -\nabla \cdot \mathbf{D} \nabla u = f \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = g_N(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N \end{array} \right\}, \quad \text{con } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \quad (18),$$

con parametro  $\varepsilon$  (scalare) positivo, variabile nel range  $[10^{-6}, 1]$ . Si assegna la seguente soluzione esatta:

$$u_{ex} = \exp(-2\pi\sqrt{\varepsilon}x_1) \sin(2\pi x_2) \quad (19),$$

e il termine sorgente  $f$  a secondo membro nella prima delle Eq. (18) si calcola differenziando nello spazio la soluzione esatta data dal secondo membro dell'Eq. (19). Sono stati considerati tre tipi di condizioni al contorno. Caso A: condizione solo di Dirichlet; Caso B: condizione mista Dirichlet/Neumann, con  $u = u_D$  su  $\Gamma_D = [(x_1, x_2), x_1 = 0 \text{ o } x_2 = 0]$  e  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = g_N$  su  $\Gamma_N = [(x_1, x_2), x_1 = 1 \text{ o } x_2 = 1]$ . Caso C: condizione di Neumann quasi esclusiva, con  $u = u_D$  su  $\Gamma_D = [(x_1, x_2), 1-h \leq x_1 \leq 1 \text{ e } x_2 = 1 \text{ o } x_1 = 1 \text{ e } 1-h \leq x_2 \leq 1]$  ( $h$  è la dimensione lineare caratteristica della mesh) e  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = g_N$  su  $\Gamma_N = \Gamma - \Gamma_D$ . Nel Caso C, si impone una condizione di Dirichlet sul nodo in corrispondenza dell'angolo superiore destro del dominio. Il fenomeno di *mesh locking* porta alla mancata convergenza del metodo raffinando la mesh, soprattutto quando il parametro associato al problema ( $\varepsilon$  nel presente caso) tende asintoticamente a zero (Manzini & Putti, 2007).

Per le simulazioni con la metodologia proposta, il dominio è discretizzato con una mesh GD non strutturata, con 272 triangoli acuti e 159 nodi (Manzini & Putti, 2007). La mesh è stata raffinata 5 volte, dividendo a metà ogni lato dei triangoli. La figura 2 mostra le norme  $L_2$  degli errori relativi in funzione della dimensione  $h$ . Non si osserva

*mesh locking* e si ottiene un ordine di convergenza pari circa a 2. Nel caso A, poiché la triangolazione di partenza è acuta, la situazione più regolare è quella corrispondente al caso  $\varepsilon = 1$  (caso isotropo), ed i circocentri di due triangoli che condividono un lato stanno da parti opposte rispetto al lato stesso. Riducendo il valore di  $\varepsilon$ , i triangoli della mesh calcolata con la metodologia proposta, in seguito ad operazioni di *edge swap*, tendono ad allungarsi e a disporsi lungo la direzione principale di anisotropia. Le operazioni di *edge swap* potrebbero introdurre qualche piccolo errore in corrispondenza dei lati sul contorno, sui cui nodi sono imposte le condizioni di Dirichlet. Le soluzioni relative al caso B sembrano indipendenti dal crescere dell'anisotropia. Questo potrebbe essere dovuto al fatto che l'errore introdotto dalla sostituzione di una condizione di Dirichlet con una di Neumann è superiore all'errore dovuto alla progressiva deformazione ed allungamento dei triangoli della mesh per  $\varepsilon$  decrescente. La soluzione calcolata nel caso C non mostra *mesh locking*, per tutto il range dei valori di  $\varepsilon$  studiato. Le soluzioni calcolate da Manzini & Putti (2007) e da Gao & Wu (2011) mostrano qualche effetto di *mesh locking* per i valori più piccoli di  $\varepsilon$  (inferiore a 1.d-03).

## 5 CONCLUSIONI

E' stata presentata una nuova metodologia per la soluzione del problema diffusivo eterogeneo anisotropo. L'equazione di governo alle derivate parziali è discretizzata su una mesh di base triangolare non strutturata che soddisfa la condizione di Delaunay Generalizzata (GD) e una mesh duale è costruita sulla mesh di base. Il volume di controllo duale è ottenuto collegando il punto medio di ogni lato dei triangoli con il circocentro anisotropo di ogni triangolo.

I principali vantaggi della procedura sono: 1) l'algoritmo agisce direttamente sulla mesh fisica, senza utilizzare lo spazio computazionale; 2) il numero e la posizione dei nodi restano immutati, mentre la geometria della mesh può adattarsi al variare del tensore  $\mathbf{D}$ ; 3) la matrice di rigidità è una matrice  $M$ ; 4) la procedura è stata estesa a problemi di trasporto convettivi/diffusivi, con coefficienti del tensore diffusivo variabili nel tempo (Aricò et al., 2012).

I risultati calcolati sono privi di oscillazioni spurie, la metodologia mostra un ordine di convergenza circa 2 e non sono stati osservati fenomeni di *mesh locking*, anche per problemi fortemente anisotropi.

## BIBLIOGRAFIA

- Aricò, C. & Tucciarelli, T., Efficient solution of heterogeneous anisotropic diffusion problems, *J. Comput. Phys.*, 2012 submitted.
- Aricò, C., Sinagra, M & Tucciarelli, T., Un'efficiente metodologia per la soluzione di problemi di trasporto anisotropi eterogenei convettivi, dispersivi/diffusivi e di reazione, sottoposto al XXXIII Convegno nazionale di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Brescia Settembre 2012.
- Bear, J. Dynamics of Fluids in Porous Media, Dover, New York, 1972.
- Edwards, M. G. & Zheng, H. Double-families of quasi-positive Darcy-flux approximations with highly anisotropic tensors on structured and unstructured grids, *J. Comput. Phys.*, 2010, 229(3), 594-625.
- Joe, B. Delaunay triangular meshes in convex polygons, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 1986, 7, 514-539.
- Forsyth, P.A. A control volume finite element approach to NAPL groundwater contamination,



*SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 1991, 12, 1029-1057.

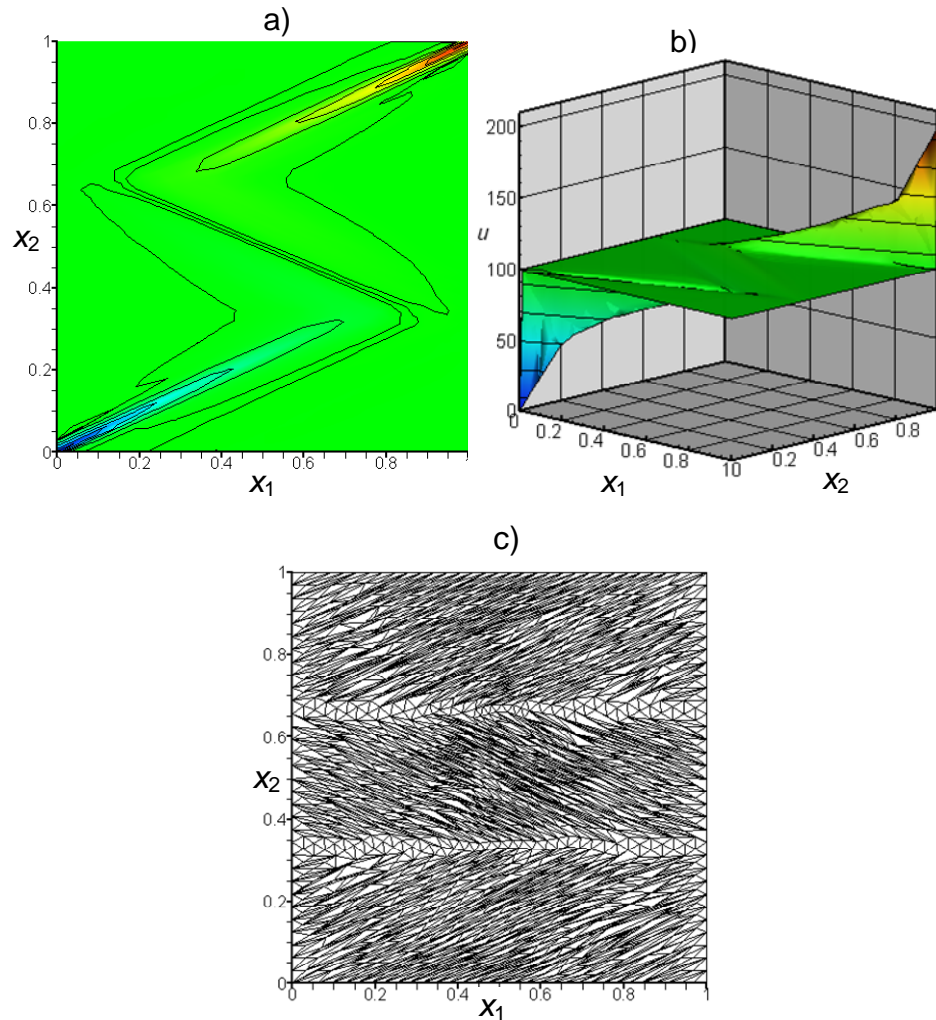
Gao, Z. & Wu, J. A linearity-preserving cell-centered scheme for the heterogeneous and anisotropic diffusion equations on general meshes, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 2011, 67(12), 2157-2183.

Li, X. & Huang, W., An anisotropic mesh adaptation method for the finite element solution of heterogeneous anisotropic diffusion problems, *J. Comput. Phys.* 2010, 229(21), 8072-8094.

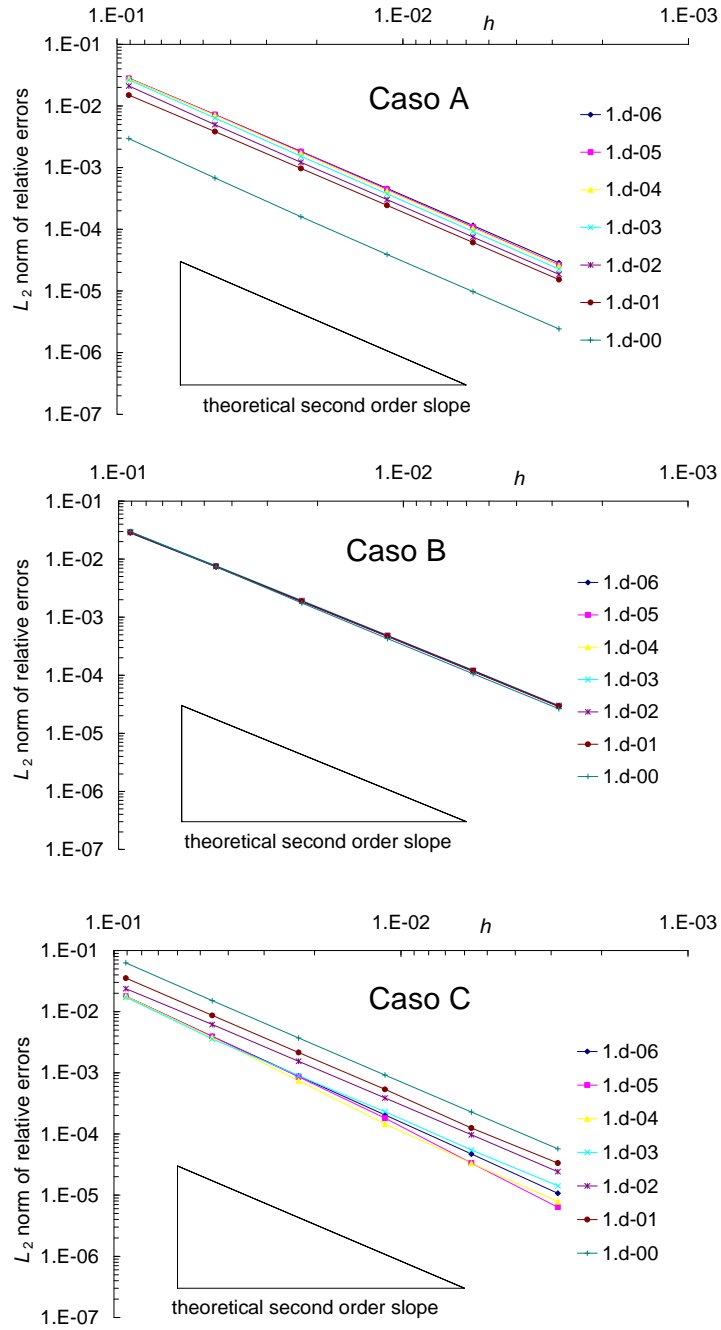
Manzini, G. & Putti, M. Mesh locking effects in the finite volume solution of 2-D anisotropic diffusion equations, *J. Comput. Phys.*, 2007, 220(2), 751-771.

Mazzia, A., Manzini, G. & Putti, M. Bad behaviour of Godunov Mixed Methods for strongly anisotropic advection-dispersion equations, *J. Comput. Phys.*, 2011, 230(23), 8410-8426.

Putti, M. & Cordes, C. Finite element approximation of the diffusion operator on tetrahedral, *SIAM J. Sci. Comput.* 1988, 19(4), 1154-1168.



**Figura 1.** Test 2. a) iso- $u$ ; b) profilo 3D di  $u$ ; c) mesh finale calcolata



**Figura 2.** Test 3. Norme  $L_2$  degli errori relativi in funzione della dimensione caratteristica della mesh  $h$ ; casi A), B) e C)