UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PALERMO
Dottorato di Ricerca in Matematica e Informatica
Dipartimento di Matematica e Informatica
Settore Scientifico Disciplinare MAT/02

ALGEBRE SIMMETRICHE DI ALCUNE CLASSI DI IDEALI MONOMIALI

IL DOTTORE
ANNA MARIA STANGANELLI

IL COORDINATORE
PROF.SSA LUISA DI PIAZZA

IL TUTOR
PROF. ANTONINO GIAMBRUNO

CO-TUTOR
PROF.SSA GAETANA RESTUCCIA

CICLO XXV
ANNO CONSEGUIMENTO TITOLO 2015
Dipartimento di Matematica e Informatica,Via Archirafi,34 90123, Palermo (PA)
091. 23891111, dipartimento.matematicainformatica@unipa.it

Siediti ai bordi dell’aurora,
per te si leverà il sole.
Siediti ai bordi della notte,
per te scintilleranno le stelle.
Siediti ai bordi del torrente,
per te canterà l’usignolo.
Siediti ai bordi del silenzio,
Dio ti parlerà.

A mio figlio Giuseppe,

con amore

Ringrazio la mia famiglia per avermi insegnato ad amare e a rispettare i veri valori della vita.

Contents

1 Introduzione

Sia K un campo. La letteratura $\grave{e}$ ricca di esempi di algebre graduate su K, tra le quali le pi$\grave{u}$ note sono:

1. $K[x_1, ..., x_n]$, l'algebra dei polinomi su K;

   se V $\grave{e}$ un K - spazio vettoriale

2. $T(V)$, l'algebra tensoriale di V;

3. $E(V)$, l'algebra esterna di V;

4. $S(V)$, l'algebra simmetrica di V;

5. Qualunque quoziente di $K[x_1, ..., x_n]$ per un suo ideale graduato;

6. L'algebra di Rees di un ideale graduato I di un anello graduato, Rees(I);

7. L'algebra di Rees estesa di I.

Un problema importante in Algebra Commutativa e Geometria Algebrica $\grave{e}$ lo studio degli invarianti algebrici e geometrici di una K - algebra.
Gli invarianti sono introdotti in un contesto generale,ovvero per un anello A che sia una K - algebra, supponendo che esso sia noetheriano, commutativo con unit$\grave{a}$, e le principali applicazioni riguardano la geometria algebrica, ad esempio la dimensione dell'anello delle coordinate di una variet$\grave{a}$ algebrica. Recentemente nuove applicazioni si hanno in algebra e geometria combinatorica, e riguardano principalmente i complessi simpliciali, o l'anello di Stanley Reisner associato [8], e gli insiemi parzialmente ordinati, o l'anello di Hibi associato [2].
Tra gli invarianti di un anello A sono fondamentali gli invarianti classici, quali la dimensione di Krull, $dimA$, la profondit$\grave{a}$ di un anello locale (A, m), $depth_m(A)$, la molteplicit$\grave{a}$,$e(A)$, e invarianti recenti come la regolarit$\grave{a}$ di Castelnuovo - Munford, $reg(A)$. Altri invarianti sono espressi mediante i gruppi di coomologia di A. Loro definizioni e propriet$\grave{a}$ possono trovarsi nei seguenti testi di Algebra Commutativa e Geometria Algebrica:

1. H. Matsumura, Commutative Algebra, W. A. Benjamin, New York, 1970;

2. H. Matsumura, Commutative Ring Theory, Cambridge Studies in Adv. Mathem. , 1986;

3. A. Grothendieck, Elements d Gé*omé*trie algebrique, Chap. IV, Publi. Math. de l' H.E.S., 1964;

4. D. Eisenbud, Commutative Algebra with a view toward algebraic geometry, Graduate Texts in Mathematics, Springer - Verlag, 1994;

5. W. Bruns, J. Herzog, Cohen - Macaulay Rings, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 39(1998).

Se A *è* l'anello dei polinomi $S = K[x_1, ..., x_n]$, la teoria delle basi di Groebner [1] rappresenta la chiave per ottenere importanti risultati sugli invarianti. Pi*ù* precisamente, dopo aver ordinato le variabili, si introduce un ordinamento totale sui monomi di $S = K[x_1, ..., x_n]$. Una base di Groebner G per un ideale $I \subset S$ *è* una buona base di I, nel senso che l'insieme $\{in_<(g), g \in G\}$ *è* ancora una base per l'ideale iniziale $in_<(I)$. Esistono nuovi metodi algebrici per il calcolo numerico esatto degli invarianti (classicamente l'algebra A *è* generale e noi abbiamo informazioni solo in casi speciali). Scopo principale della tesi *è* lo studio di $S(I) = Sym_S(I)$, l'algebra simmetrica di I sull'anello S, se I *è* un ideale di S, e dei suoi invarianti.
L'utilizzo di:

1. CoCoA: Un sistema per fare calcoli in Algebra commutativa, scaricabile attraverso il sito : cocoa.ima.unige.it, 1992 - 2012,A. Capani, G. Niesi, L. Robbiano; MACAULAY: Un sistema per il calcolo in Geometria Algebrica e Algebra Commutativa, D. Bayer e M. Stillmann(1982 - 1990) (login:anonymus, password: any, cd Cohen Macaulay);

è risultato fondamentale per la verifica e costruzione di esempi. Infatti il teorema di Macaulay [3] afferma che $H_I(t) = H_{in<(I)}(t)$, per cui alcuni degli invarianti (dimensione e molteplicit*à*) possono essere letti sulla funzione di Hilbert di $in_<(I)$, essendo I un ideale di una K - algebra A.
La nozione di s - successione *è* introdotta per un modulo M finitamente generato, su un anello commutativo unitario noetheriano R. Nella ricerca dei valori degli invarianti, la nozione diventa importante se $R = K[x_1, ..., x_n]$ [12], risultando una semplice interazione tra l'algebra computazionale e l'algebra commutativa.
Sia M finitamente generato su R,con generatori $f_1, ..., f_n$.
M ha una presentazione:

$$R^m \longrightarrow R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con matrice di relazioni $(a_{ij}), i = 1, ..., m, j = 1, ..., n, a_{ij} \in R$. L'algebra simmetrica $Sym(M)$ ha la presentazione:

$$R[y_1, ..., y_n]/J$$

dove $J = (g_1, ..., g_m)$, $g_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j, i = 1, ..., m$, e J $\grave{e}$ detto l'ideale delle relazioni di $Sym(M)$ ed $\grave{e}$ sempre lineare nelle variabili y_i. Se R $\grave{e}$ l'anello di polinomi, recentemente sono stati ottenuti risultati riguardanti l'algebra simmetrica di ideali monomiali, moduli monomiali, moduli su anelli di polinomi, in particolare moduli di sizigie di ideali monomiali. Alcuni di questi risultati sono contenuti in:

1. J. Herzog, G. Restuccia, Z. Tang, s - sequences and symmetric algebras, Manuscripta Math., 104,479-501, Springer - Verlag 2001.
2. J. Herzog, G. Restuccia, G. Rinaldo, Regularity and depth of the symmetric algebra, Beitrage Algebra Geom 47(I), 29-51, 2006.
3. M. La Barbiera, G.Restuccia, Mixed Product Ideals generated by s-Sequences, Algebra Colloquium ,18,553 (2011).
4. G.Restuccia,R.Utano,Z.Tang: On the symmetric algebra of the first syzygy module of the maximal ideal,Communications in Algebra(2014),in corso di stampa.
5. G. Restuccia, P.L. Staglian$\grave{o}$,AAPP, On the symmetric algebra of sizygy modules of monomial ideals, Vol.92, n. 2, A3(2014).

Sia $M = I = (f_1, ..., f_q)$ un ideale monomiale in $R = K[x_1, ..., x_n]$, l'ideale delle relazioni J $\grave{e}$ generato dalle forme lineari $g_{ij} = f_{ij}y_j - f_{ji}y_i, 1 \leq i < j \leq q$, essendo $f_{ij} = \frac{f_i}{gcd(f_i,f_j)}, i \neq j$, e f_{ij} $\grave{e}$ un monomio.
Gli ideali annullatori I_i della successione monomiale $f_1, ..., f_q$ sono gli ideali monomiali

$$I_i = (f_{1i}, ..., f_{i-1i}), i = 1, ..., q.$$

Pertanto studiare le s - successioni monomiali $\grave{e}$ pi$\grave{u}$ facile che studiare s - successioni qualsiasi.
Il soggetto della ricerca della presente tesi $\grave{e}$ lo studio dell'algebra simmetrica di una

classe interessante di ideali monomiali: gli ideali L di prodotti misti in due insiemi di variabili. Tale classe *è* stata introdotta in [33],dove si *è* studiata la normalit*à* dell'algebra $Rees(L)$,essendo quest ` ultima connessa alla chiusura integrale di L e delle potenze di L. Recentemente[26] tale classe *è* stata utilizzata allo scopo di testare alcune congetture algebriche,tra cui la congettura di Eisenbud -Goto, sull'algebra simmetrica $Sym(L)$. Poichè tale congettura coinvolge fondamentali invarianti di $Sym(L)$,quali la dimensione di Krull,la molteplicit*à* e la regolarit*à* di Castelnuovo-Munford, era necessario calcolare tali invarianti o loro bounds. Tale problema *è* arduo,ma se L *è* generato da una s-successione, si pu*ò* arrivare ad un risultato concreto. Nel lavoro[22],gli autori individuano le sottoclassi di ideali di prodotti misti, generati da una s-successione,e procedono alla verifica della congettura. Per le rimanenti classi tuttavia *è* possibile calcolare bounds per gli invarianti ed in alcuni casi verificare ancora la congettura. Ci*ò* *è* reso possibile dal fatto che un ruolo cruciale viene rivestito dalla parte lineare J_l dell'ideale iniziale $in_<(J)$, rispetto ad un ordinamento detto ammissibile, dell'ideale delle relazioni J dell'algebra simmetrica, lineare nelle variabili corrispondenti ai generatori di L in $Sym(L)$. Tale ideale J_l costruito mediante gli ideali annullatori di L è tale che $in(J) = J_l + J'$,dove J' *è* un altro ideale e $J' = (0)$,se L *è* generato da una s-successione. Pertanto una parte fondamentale della tesi riguarder*à* il calcolo dell'ideale J_l associato ad alcune classi di ideali di prodotti misti dell'anello $S = K[x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_n]$. Poichè l'ideale I_k, l'ideale monomiale di Veronese squarefree, $I_k \subset K[x_1, ..., x_n], k = 2, ..., n-1$, interviene nella costruzione di un ideale di prodotti misti, noi studiamo inizialmente tale ideale. Di I_k *è* nota l'importanza in combinatorica (*è* un ideale polimatroide). Per $k = 2$, I_2 è l'ideale di un grafo semplice su n vertici , e per $k = 3$, I_3 *è* l'ideale del grafo generalizzato dei 2-cammini di G.
Successivamente si affronta il caso generale per alcune classi di ideali di prodotti misti. Il seguito riguarder*à* il calcolo di bounds per gli invarianti delle loro algebre simmetriche. Un'ultima parte della tesi riguarder*à* le algebre monomiali,generate da un sistema di generatori di ideali di prodotti misti. Esse sono Koszul,poichè per il bi-sorted order, esse ammettono una base di Groebner di grado 2,come dimostrato in[38]. Si studia dettagliatamente la base di Groebner del loro ideale torico e si confronta con quella,pi*ù* nota,lessicografica o lessicografica inversa,di cui non si conosce il grado. Per valori bassi di n,si studia poi l'ipersimplesso associato $\Delta(k, n), k = 2, 3$.
Il contenuto della tesi *è* il seguente:
Il primo capitolo *è* dedicato a nozioni introduttive sulle basi di Groebner, sulla teoria dell'eliminazione, sulle prime sizigie di ideali monomiali. Nel secondo capitolo *è* data

la definizione di s - successione, si studia la connessione con una d - successione, si rivistano, con commenti, risultati relativi al caso in cui il modulo M *è* un ideale monomiale. Nel terzo capitolo si studiano gli ideali di Veronese square - free I_k dell'anello dei polinomi $S = K[x_1, ..., x_n]$, generati da tutti i monomi square-free di ordine k di S. Si scrivono gli ideali annullatori di I_2 e di I_{n-1} che risulta generato da una s - successione. Nel quarto capitolo si considerano classi di ideali L di prodotti misti dell'anello $R = K[x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_n]$, per le quali vengono descritti gli ideali annullatori. Precisamente, se J_k *è* l'ideale di Veronese square - free dell` anello $K[y_1, ..., y_m]$, le classi considerate sono le seguenti:

1. $L_1 = I_k J_1$;
2. $L_2 = I_k J_k$;
3. $L_3 = I_k J_1 + I_1 J_k$;
4. $L_4 = I_k + J_k$;
5. $L_5 = I_k + I_1 J_{k-1}$.

Nel quinto capitolo, si definiscono gli ideali $\underline{T}$ - lineari e si provano teoremi relativi. Per le classi di cui sopra viene descritto l'ideale J_l , connesso al calcolo degli invarianti di $Sym(I_k)$ $Sym(L)$ e si computa la dimensione e la profondit*à* di $R[T_1, ..., T_t]/J_l$, essendo t dei generatori dell'ideale considerato.
Nell'ultimo capitolo infine si studia l'algebra monomiale $K[I_k]$, o analogamente il $k-1$ - ipersimplesso su n punti lattice, e, per $k = 3$, si prova che la sua base di Groebner secondo l'ordinamento sorted non *è* n*è* lessicografica n*è* lessicografica inversa. Ulteriori considerazioni sono fatte per altri valori di $k \geq 2$.
Concludiamo con alcuni problemi aperti emersi nel corso dello svolgimento della tesi e che sono attualmente oggetto del nostro studio.

1. Sia $I_k, k \geq 2$, l'ideale di Veronese square - free, $I_k \subset K[x_1, ..., x_n]$. Se I_k non *è* generato da una s - successione $(k \neq n-1)$, $in_<(J) = J_l + J^*$, essendo J l'ideale delle relazioni di $Sym_R(I_k)$, J_l la parte lineare in $T_1, ..., T_{\binom{n}{k}}$ e J^* un altro ideale monomiale, $J^* \subset K[x_1, ..., x_n][T_1, ..., T_{\binom{n}{k}}]$. Si sa che $reg(J) \leq regin_<(J) = reg(J_l + K)$. Si può provare che $reg(J_l + K) \geq reg(J_l)$?
   Infatti $reg(J_l)$ *è* nota.

2. Il problema di cui in 1. si presenta ancora per le varie classi di ideali di prodotti misti, ma in tal caso il problema *è* pi*ù* difficile. Studiarlo per valori bassi di n.

3. Nella tesi è stata trovata la struttura degli ideali annullatori di I_2 (sempre generati da variabili), determinando esattamente quali sono le variabili che compaiono nei diversi ideali. Trovare la struttura degli ideali annullatori di I_3.

4. Migliorare e completare i risultati sugli altri invarianti per le classi di ideali di prodotti misti, considerate nella tesi.

La dottoressa Anna Maria Stanganelli ringrazia la Professoressa Gaetana Restuccia per il prezioso aiuto scientifico, per la disponibilità, per l'aiuto e il sostegno ricevuti in tutto il suo intenso percorso formativo.
Ringrazia la Professoressa Rosanna Utano ed il Professore Mustapha Lahyane per le proficue discussioni sull'argomento della tesi.
Ringrazia il Professore Antonino Giambruno, suo Tutor, per la sua grande disponibilità e infinita pazienza, e per gli incoraggiamenti a proseguire la ricerca.
Ringrazia la Professoressa Luisa Di Piazza, coordinatore scientifico del Dottorato di ricerca in Matematica e Informatica, per aver sostenuto la ricerca dei giovani dottorandi con valide iniziative didattiche e scientifiche, per esserle stata vicina durante tutto il corso di dottorato, per gli utili consigli e l'affetto dimostratole.

2 Preliminari

2.1 Ordinamenti e basi di Groebner

Premettiamo alcune nozioni introduttive sulle basi di Groebner, sulla teoria dell'eliminazione, sulle prime sizigie di ideali monomiali, sulle serie di Hilbert.
Sia K un campo ed $S = K[x_1, ..., x_n]$ anello dei polinomi a coefficienti in K nelle indeterminate $x_1, ..., x_n$.

Definizione 2.1 *Sia M l'insieme moltiplicativo dei monomi di S. Si definisce ordinamento monomiale su M una relazione d'ordine $<$ su M che soddisfi le seguenti affermazioni:*

1. *$<$ è una relazione d'ordine totale su M;*
2. $\forall x^\alpha, x^\beta \in M : x^\alpha < x^\beta$ *e* $\forall x^\gamma \in M \Rightarrow x^\alpha x^\gamma < x^\beta x^\gamma, \alpha, \beta, \gamma \in N^n$*;*
3. *$<$ è un buon ordinamento, nel senso che ogni sottoinsieme non vuoto di M ammette elemento minimale.*

Definizione 2.2 *Definiamo l'ordinamento lessicografico, $<_{lex}$, come segue:*

Dati $\alpha, \beta \in N^n$, con $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$ definiamo $x^\alpha < x^\beta \Leftrightarrow$ in $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, ..., \alpha_n - \beta_n)$ la prima componente diversa da zero da sinistra è negativa.

Proposizione 2.3 *$<_{lex}$ è un ordinamento monomiale.*

Esempio 2.4 *Nel caso di due variabili x_1 e x_2, e $x_1 > x_2$ abbiamo:*

$$1 < x_2 < x_2^2 < x_2^3 < ... < x_1 < x_2x_1 < ... < x_2^2x_1 < ... < x_1^2 < ... .$$

Esempio 2.5 *Se utilizziamo l` ordinamento lessicografico con $x_1 < x_2$, allora abbiamo:*

$$1 < x_1 < x_1^2 < x_1^3 < ... < x_2 < x_1x_2 < x_1^2x_1 < ... < x_2^2 < ... \; .$$

Definizione 2.6 $\forall \alpha \in N^n, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$

Definizione 2.7 *Definiamo l'ordinamento lessicografico graduato, $<_{deglex}$, come segue:*

Dati $\alpha, \beta \in N^n$ con $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$

$x^\alpha < x^\beta \Leftrightarrow |\alpha| < |\beta|$ oppure $|\alpha| = |\beta|$ e $x^\alpha < x^\beta$ rispetto all'ordinamento lessicografico.

Proposizione 2.8 *$<_{deglex}$ è un ordinamento monomiale.*

Esempio 2.9 *Nel caso di due variabili x_1 e x_2, abbiamo:*

$$1 < x_2 < x_1 < x_2^2 < x_1x_2 < x_1^2 < x_1x_2^2 < x_1^2x_2 < x_1^3 < ....$$

Esempio 2.10 *Se utilizziamo l'ordinamento lessicografico graduato con $x_1 < x_2$, allora abbiamo:*

$$1 < x_1 < x_2 < x_1^2 < x_1x_2 < x_2^2 < x_1^3 < x_1^2x_2 < x_1x_2^2 < x_2^3 < ... \; .$$

Definizione 2.11 *Definiamo ordinamento lessicografico graduato inverso, $<_{degrevlex}$ come segue:*

dati $\alpha, \beta \in N^n$, con $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$

$x^\alpha < x^\beta \Leftrightarrow |\alpha| < |\beta|$ oppure $|\alpha| = |\beta|$ e in $\alpha_n - \beta_n$ la prima componente diversa da zero da sinistra è positiva.È facile verificare che nel caso di due variabili deglex degrevlex coincidono.

Esempio 2.12 $x_1^2x_2x_3 > x_1x_2^3$ *rispetto al deglex con* $x_1 > x_2 > x_3$
$x_1^2x_2x_3 < x_1x_2^3$ *rispetto al degrevlex con* $x_1 > x_2 > x_3$

Proposizione 2.13 *Sia $S = K[x_1, ..., x_n]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo K e nelle indeterminate $x_1, ..., x_n$ e sia $<$ un ordinamento monomiale fissato. Allora $\forall f \in S$ si scrive in modo unico nella forma :*

$$f = c_1 m_1 + ... + c_r m_r, c_1, ..., c_r \in K, m_1, ..., m_r \in M, m_1 > ... > m_r.$$

Definizione 2.14 *Definiamo $lt_<(f) = c_1 m_1$ il leading term di f, $lc_<(f) = c_1$ il leading coefficient di f, $lm_<(f) = m_1$ il leading monomial di f.*

Esempio 2.15 *Sia $f = 2x^2yz + 3xy^3 - 2x^3$.*

Se l'ordinamento è lex con $x > y > z$, allora $lp(f) = x^3, lc(f) = -2, lt(f) = -2x^3$;
Se l'ordinamento è deglex con $x > y > z$, allora $lp(f) = x^2yz, lc(f) = 2, lt(f) = -2x^2yz$;
Se l'ordinamento è degrevlex con $x > y > z$, allora $lp(f) = xy^3, lc(f) = 3, lt(f) = 32xy^3$;

Definizione 2.16 *Sia $I \subset K[x_1, ..., x_n]$ un ideale e $<$ un ordinamento monomiale su S. L` ideale monomiale $in_<(I) = (lm_<(f) : f \in I)$ si dice ideale iniziale di I. Esso è generato dai leading monomi di tutti gli elementi di I.*

Definizione 2.17 *Sia $S = K[x_1, ..., x_n]$, $<$ un ordinamento monomiale in S ed I un ideale di S. Un sistema di elementi $\{g_1, ..., g_s\} \subset S$ si dice Base di Groebner se: $in_<(I) = (lm(g), g \in I) = (lm_<(g_1), ..., lm_<(g_s))$.*

Teorema 2.18 *Sia I ideale e $<$ un ordinamento monomiale, $G = \{g_1, ..., g_s\}$ base di Groebner di I, $f \in k[x_1, ..., x_n], f \neq 0$. Allora:*

1. *$\exists a_1, ..., a_s, r \in k[x_1, ..., x_n], f = a_1 g_1 + ... + a_s g_s + r$ e $r = 0$ oppure $r \neq 0$ e nessun monomio di r è divisibile per nessun dei monomi $lm(g_1), ..., lm(g_s)$;*

2. *r è unico.*

Prova. *Vedi [1], Th. 1.6.7.*

Buchberger ha introdotto le basi di Groebner negli anni 60, e un algoritmo per calcolarle.

Definizione 2.19 *Sia* $S = K[x_1, ..., x_n]$, $<$ *un ordinamento monomiale,* $f, g \in S, f \neq 0, g \neq 0, x^\alpha = lm(f), x^\beta = lm(g)$ *e* $x^\gamma = mcm(x^\alpha, x^\beta)$. *Allora:*

$S(f,g) = \frac{x^\gamma}{lt(f)} f - \frac{x^\gamma}{lt(g)} g$ *si dice S - polinomio di (f,g). Il polinomio S(f,g) ha la proprietà che i termini dominanti di f e g si cancellano.*

Definizione 2.20 *Dati* $f, g, h \in K[x_1, ..., x_n]$ *con* $g \neq 0$,*diciamo che f si riduce ad h modulo g , e scriveremo* $f \xrightarrow{g} h$, *se e solo se* $lp(g)$ *divide un termine non nullo X che appare in f e* $h = f - \frac{X}{lt(g)} g$.

Esempio 2.21 *Siano* $f = y^2x + 4yx - 3x^2, g = 2y + x + 1 \in Q[x, y]$. *Sia* $<_{deglex}$ *l ` ordinamento fissato con* $y > x$. *Allora:*

$f \xrightarrow{g} -\frac{1}{2}yx^2 + \frac{7}{2}yx - 3x^2 \xrightarrow{g} \frac{1}{4}x^3 + \frac{7}{2}yx - \frac{11}{4}x^2 \xrightarrow{g} \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{2}x^2 - \frac{7}{4}x.$

Teorema 2.22 ***Criterio di Buchberger***
Un insieme $\{f_1, ..., f_r\}$ *di polinomi di S,* $f_i = m_i$ *+monomi di grado minore rispetto all'ordinamento dei termini* $<$ *è una base di Groebner per l ` ideale* $(f_1, ..., f_r)$ *da essi generato, rispetto all ` ordinamento dei termini* $<$, *se ogni S - coppia* $S(f_i, f_j) = \frac{lcm(m_i,m_j}{m_i} f_i - \frac{lcm(m_i,m_j}{m_j} f_j$ *può essere ridotta a zero tramite l ` insieme* $\{f_1, ..., f_r\}$ *usando l ` algoritmo della divisione multivariata.*
Prova. *Vedi [1], Th. 1.7.4.*

Esempio 2.23 *Siano* $f_1 = xy - x, f_2 = x^2 - y \in Q[x, y]$ *con ordinamento dei termini deglex con* $x < y$. *Sia* $F = \{f_1, f_2\}$. *Allora* $S(f_1, f_2) = xf_1 - yf_2 = y^2 - x^2 \xrightarrow{F} y^2 - y$ *è ridotto rispetto a F. Così noi aggiungiamo* f_3 *a F, e otteniamo l'insieme* $F' = \{f_1, f_2, f_3\}$. *Allora* $S(f_1, f_2) \xrightarrow{F'} 0$. *Ora* $S(f_1, f_3) = yf_1 - xf_3 = 0$ *e* $S(f_2, f_3) = y^2f_2 - x^2f_3 = -y^3 + x^2y \xrightarrow{F'} x^2y - y^2 \xrightarrow{F'} 0$. *Dunque* $\{f_1, f_2, f_3\}$ *è una base di Groebner.*

2.2 Teoria dell'eliminazione

La teoria delle basi di Groebner si *è* sviluppata con successo in questi ultimi anni; essa nasce dalla introduzione di un ordinamento totale sui monomi dell'anello A dei polinomi in un numero finito di indeterminate, a coefficienti in un campo K di caratteristica zero.
La teoria dell` eliminazione *è* uno dei pi*ù* importanti campi di applicazione; tale argomento *è* classico ma pu*ò* essere rivisto utilmente utilizzando la teoria delle basi di Groebner.
Consideriamo due insiemi di variabili $\{x_1, ..., x_n\}$ e $\{y_1, ..., y_m\}$. Assumiamo che i prodotti di potenze nelle variabili x_i e i prodotti di potenze nelle variabili y_j siano ordinati dai due ordinamenti di termini $<_x, <_y$ rispettivamente. Definiamo un ordinamento di termini $<$ sui prodotti di potenze nelle variabili x_i e y_j come segue:

Definizione 2.24 *Per X_1, X_2 prodotti di potenze nelle variabili x_i e Y_1, Y_2 prodotti di potenze nelle variabili y_j, definiamo: $X_1Y_1 < X_2Y_2 \Longleftrightarrow X_1 <_x X_2$ o $X_1 = X_2$ e $Y_1 <_y Y_2$;*
Questo ordinamento dei termini è chiamato un ordinamento di eliminazione con le variabili x_i più grandi delle variabili y_j.

Lemma 2.25 *L'ordinamento di eliminazione definito nella definizione precedente è un ordinamento dei termini. Inoltre, se Y è un prodotto di potenze nelle variabili y_j e Z è un prodotto di potenze nelle variabili x_i e y_j, tale che uno degli x_i appaia ad una potenza positiva in Z, allora $Y < Z$.*

Esempio 2.26 *Se gli ordinamenti $<_x$ e $<_y$ sono ordinamenti lessicografici, allora l'ordinamento di eliminazione definito nella definizione precendente è un ordinamento di termini lessicografico sulle variabili con le variabili y_j più piccole delle variabili x_i.*

L'ordinamento di eliminazione risulta più vantaggioso rispetto all'ordinamento dei termini lessicografico tra le variabili x_i e y_j. Il vantaggio di questo ordinamento si ha quando si è interessati a proprietà in cui l ordinamento dei termini lessicografico tra due insiemi di variabili non è vantaggioso. Ciò è chiaramente mostrato dal risultato che segue:

Teorema 2.27 *Sia I un ideale non nullo di $K[y_1, ..., y_m, x_1, ..., x_n]$ e sia $<$ un ordinamento di eliminazione con le variabili x_i più grandi delle variabili y_j. Sia $G = \{g_1, ..., g_t\}$ una base di Groebner per questo ideale. Allora $G \cap [y_1, ..., y_m]$ è una base di Groebner per l'ideale $I \cap [y_1, ..., y_m]$. L'ideale $I \cap [y_1, ..., y_m]$ è chiamato un ideale di eliminazione (poichè le variabili x_i sono state eliminate).*

Prova. *Chiaramente $G \cap [y_1, ..., y_m]$ è contenuto in $I \cap [y_1, ..., y_m]$. Ora sia $0 \neq f(y_1, ..., y_m) \cap I \cap [y_1, ..., y_m]$. Dal momento che G è una base di Groebner per I, allora esiste un indice i tale che $lp(g_i)$ divida $lp(f)$. Inoltre, dal momento che f ha solo variabili y_j noi vediamo che $lp(g_i)$ involve solo le variabili y_j, e così dal Lemma precedente, ogni termine in g_i involve solo variabili y_j, il che è equivalente a dire che $g_i \in G \cap [y_1, ..., y_m]$. Allora, per ogni $f \in I \cap [y_1, ..., y_m]$, esiste $g_i \in G \cap [y_1, ..., y_m]$ tale che $lp(g_i)$ divida $lp(f)$, e dunque $G \cap [y_1, ..., y_m]$ è una base di Groebner per $I \cap [y_1, ..., y_m]$.*

Come prima applicazione del teorema presentiamo un metodo per trovare i generatori per l\` intersezione di due ideali.

Proposizione 2.28 *Siano I, J ideali di $K[x_1, ..., x_n]$ e sia ω una nuova variabile. Consideriamo l\` ideale $(\omega I, (1-\omega)J)$ in $k[x_1, ..., x_n]$. Allora*

$I \cap J = (\omega I, (1-\omega)J) \cap K[x_1, ..., x_n]$.

Considerazione 2.29 *Se $I = (f_1, ..., f_s)$, e $J = (f_1^{'}, ..., f_p^{'})$, allora un insieme di generatori per l'ideale $(\omega I, (1-\omega)J)$ è $\{\omega f_1, ..., \omega f_s, (1-\omega)f_1^{'}, ..., (1-\omega)f_p^{'}\}$.*

Come conseguenza del risultato otteniamo un metodo per calcolare i generatori dell \` ideale $I \cap J$. Per prima cosa calcoliamo una base di Groebner G per l \` ideale $(\omega I, (1-\omega)J) \subseteq K[x_1, ..., x_n, \omega]$ usando un ordinamento di eliminazione con $x_1, ..., x_n$ più piccole di ω. Otteniamo allora una base di Groebner per $I \cap J$ calcolando $G \cap K[x_1, ..., x_n]$.

Esempio 2.30 *Consideriamo i seguenti ideali in $Q[x, y]$:*

$I = (x^2 + y^3 - 1, x - yx + 3)$ *e* $J = (x^2y - 1)$.

Ci proponiamo di calcolare $I \cap J$. Calcoliamo una base di Groebner G per l'ideale $(\omega(x^2 + y^3 - 1), \omega(x - yx + 3), (1-\omega)(x^2y - 1)) \subseteq Q[x, y, z]$ usando l'ordinamento *dei termini grevlex sulle variabili x e y con $x > y$ e un ordinamento di eliminazione con ω più grande di x e y. Abbiamo:*

$G = \{x^3y^2 - x^3y - 3x^2y - xy + x + 3, x^2y^4 + x^4y - x^2y - y^3 - x^2 + 1, 12853\omega + 118x^4y + 9x^2y^3$
$-357x^3y - 972x^2y^2 + 2152x^2y - 118x^2 - 9y^2 + 357x + 972y - 2152, x^5y + 3x^2y^2 - x^3 +$
$3x^2y - 3y^2 - 3y^2 - 3y - 3.$

Così una base di Groebner per l' ideale $I \cap J$ è

$G = \{x^3y^2 - x^3y - 3x^2y - xy + x + 3, x^2y^4 + x^4y - x^2y - y^3 - x^2 + 1, x^5y + 3x^2y^3 + 3x^2y^2$
$-x^3 + 3x^2y - 3y^2 - 3y - 3.$

2.3 Serie di Hilbert

Sia R un anello commutativo noetheriano con identità. Una serie formale di potenze con coefficienti in R è una espressione formale $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$, dove $a_n \in R$. Definiamo la somma e il prodotto di due serie formali di potenze, come segue:

$\sum_{n\geq 0} a_n X^n + \sum_{n\geq 0} b_n X^n = \sum_{n\geq 0} c_n X^n$
dove $c_n = a_n + b_n$ e
$\sum_{n\geq 0} a_n X^n . \sum_{n\geq 0} b_n X^n = \sum_{n\geq 0} d_n X^n$
dove $d_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_n b_0$. L'insieme di tali serie formali diviene un anello denotato con $R[[X]]$.
Nell'anello $R[[X]]$, è facile vedere che $(1-X)(1+X+X^2+...) = 1$. Così $1-X$ ha un inverso moltiplicativo. Possiamo dire esattamente quali sono gli elementi in $R[[X]]$ che hanno inverso moltiplicativo.

Proposizione 2.31 *La serie formale* $F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \in R[[X]]$ *ha un inverso in* $R[[X]]$ *se e solo se* a_0 *ha un inverso in R.*

Sia $R = K[x_1, ..., x_n]/\mathbf{a}$ un'algebra omogenea su K. Allora $R = \oplus_{i\geq 0} R_i$, dove R_i è il K- spazio vettoriale di elementi omogenei di grado i in R. La dimensione di R_i è finita, dal momento che il numero di monomi di grado i è finito, e $h(i) = dim_K(R_i)$ è chiamata funzione di Hilbert di R.

Definizione 2.32 *Se* $R = \oplus_{i\geq 0} R_i$ *è un algebra omogenea, allora* $H_R(X) = \sum_{i\geq 0} h(i) X^i$ *è chiamata serie di Hilbert di R.*

Esempio 2.33 *Se* $R = K[x, y]$, *allora* R_i *è generato da* $x^i, x^{i-1}y, ..., y^i$. *Questi monomi sono linearmente indipendenti, così* $dim_k(R_i) = i+1$. *Allora avremo* $H_R(X) = 1 + 2X + 3X^2 + ... = (1-X)^{-2}$.

Esempio 2.34 *Se* $R = K[x, y]/(x^2, xy)$, *allora i seguenti monomi costituiscono una k- base per R:* $1, x, y, y^2, y^3, y^4, ...$ *Pertanto si ha:* $h(0) = 1, h(1) = 2$, *e* $h(i) = 1$ *se* $i > 1$. *Così* $H_R(X) = 1 + 2X + X^2 + X^3 + ... = (1 + X - X^2)/(1 - X)$.

Teorema 2.35 *Sia* $R = K[x_1, ..., x_n]$ *una k- algebra omogenea. Allora* $H_R(X) = p(X)/(1-X)^d$, *per qualche polinomio* $p(X) \in \boldsymbol{Z}[X]$ *con* $p(0) = 1$ *e qualche* $d \leq n$. *Per qualche i,* $h_R(i)$ *è un polinomio in i, detto polinomio di Hilbert di R.*
Prova. *Vedi [9], Theorem 7.*

Corollario 2.36 *Sia* $R = K[x_1, ..., x_n]/\boldsymbol{a}$ *un'algebra omogenea con serie di Hilbert* $p(X)/(1-X)^d$*, dove* $p(1) \neq 0$*. Allora la funzione di Hilbert di R,* $h_R(i) = dim_K(R_i)$ *è un polinomio di grado d - 1 in i con coefficiente più alto* $p(1)/(d-1)!$ *per i molto grande (se* $d = 0, h_R(i) = 0$ *per i molto grande).* ***Prova.*** *Vedi [9], Corollary 8.*

Definizione 2.37 *Sia R un'algebra omogenea con* $H_R(X) = p(X)/(1-X)^d$*, dove* $p(1) \neq 0$*. Allora definiamo dimensione di R il numero d.*

Esempio 2.38 *Sia* $R = K[x,y,z]/(x^2, xyz)$*. Se* $i \geq 3$ *i monomi non nulli di grado i in R sono* $x^j y^{i-j}, 0 \leq j \leq 1$*, e* $y^j z^{i-j}, 1 \leq j \leq i-1$*. Essi sono in numero di* $i+3$*, dunque il polinomio di Hilbert di R è* $i+3$*. Usando il corollario vediamo che la dimensione di R è due, poichè* $deg i + 3 = 1$*.*

Definizione 2.39 *Sia M un R - modulo graduato finitamente generato di dimensione d. L'unico polinomio* $P_M(X) \in \boldsymbol{Q}[X]$ *tale che per qualche* $H(M,n) = P_M(n)$ *per* $n \geq 0$ *è chiamato il polinomio di Hilbert di M. Scriveremo:*
$P_M(X) = \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^{d-1-i} e_{d-1-i} \binom{X+i}{i}$*. Allora la molteplicità di M è definita come segue:*
$e(M) = e_0$ *se* $d > 0$*,* $e(M) = l(M)$ *se* $d = 0$*, essendo* $l(M)$ *la lunghezza del modulo M.*

Teorema 2.40 *(di Macaulay) ([3], Theorem 4.1.,Corollary 2.4.)*
Sia $R = K[x_1, ..., x_n]/\boldsymbol{a}$ *una K- algebra omogenea e sia* $in_<(\boldsymbol{a})$ *l'ideale iniziale di* $\boldsymbol{a}$ *per qualche ordinamento totale dei termini in* $K[x_1, ..., x_n]$*. Allora le due K -algebre R e* $R' = K[x_1, ..., x_n]/in_<(\boldsymbol{a})$ *hanno la stessa funzione di Hilbert.*

Corollario 2.41 *Sia* $R = K[x_1, ..., x_n]/\boldsymbol{a}$ *una K- algebra omogenea e sia* $in_<(a)$ *l'ideale iniziale di* $\boldsymbol{J}$ *per qualche ordinamento totale dei termini in* $K[x_1, ..., x_n]$*. Allora* $dim(R) = dim(R')$ *e* $ht(\boldsymbol{a}) = ht(in_<(\boldsymbol{J}))$*.*
Prova. *Poichè il numero* $d = dim(R)$ *si legge sulla funzione di Hilbert di R, il primo asserto è ovvio. D'altra parte* $dim(R) = dim K[x_1, ..., x_n] - ht(J) = dim(R') = dim K[x_1, ..., x_n] - ht(J)$*. Ne segue l'asserto.*

2.4 Primo modulo delle sizigie

Gioca un ruolo centrale nella teoria degli anelli e dei moduli e un ruolo chiave nella teoria delle basi di Groebner e nell'algoritmo di Buchberger il primo modulo di sizigie di un modulo M finitamente generato su un anello A. Essendo il primo modulo di sizigie, un modulo finitamente generato(poichè sottomodulo di un modulo libero su A), uno dei principali obiettivi sarà quello di calcolarne i generatori.

Sia $A = K[x_1, ..., x_n]$. Sia $I = (f_1, ..., f_s)$ un ideale di A. Consideriamo l'omomorfismo di A - moduli ϕ:

$$\phi : A^s \longrightarrow I$$

$$(h_1, ..., h_s) \longmapsto \textstyle\sum_{i=1}^s h_i f_i.$$

Sappiamo che

$$I \cong A^s/ker(\phi), \text{ come A - Moduli.}$$

Definizione 2.42 *Il nucleo della mappa ϕ è chiamato primo modulo di sizigie della $1xs$ matrice $[f_1, ..., f_s]$. È denotato con $Syz_1(f_1, ..., f_s)$. Un elemento $(h_1, ..., h_s)$ di $Syz(f_1, ..., f_s)$ è chiamato una sizigia di $[f_1, ..., f_s]$ e soddisfa:*

$$h_1 f_1 + ... + h_s f_s = 0.$$

Notiamo che la mappa ϕ può anche essere vista come una matrice di moltiplicazione:

$$\phi(h_1, ..., h_s) = [f_1, ..., f_s] \begin{pmatrix} h_1 \\ . \\ . \\ . \\ h_s \end{pmatrix} = \textstyle\sum_{i=1}^s h_i f_i.$$

Questo significa che, se F è la $1xs$ matrice $[f_1, ..., f_s]$ e $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ . \\ . \\ . \\ h_s \end{pmatrix} \in A^s$, allora $\phi((h_1, ..., h_s) = Fh$ e $Syz_1(f_1, ..., f_s)$ è l\` insieme di tutte le soluzioni h della equazione lineare $Fh = 0$.

Esempio 2.43 *Sia* $A = Q[x, y, z, w]$, *e* $I = (x^2 - yw, xy - wz, y_2 - xz)$.
La mappa ϕ *è data da* $(h_1, h_2, h_3) \longmapsto h_1(x_2 - yw) + h_2(xy - wz) + h_3(y^2 - xz)$.
Allora $(y, -x, w)$ *e* $(-z, y, -x)$ *sono anche sizigie di* $[x^2 - yw\ xy - wz\ y^2 - xz]$, *dal momento che*

$$y(x^2 - yw) - x(xy - wz) + w(y^2 - xz) = 0$$

e

$$-z(x^2 - yw) + y(xy - wz) - x(y^2 - xz) = 0.$$

Noi mostreremo in seguito infatti che queste due sizigie generano $Syz_1(x^2 - yw\ xy - wz\ y^2 - xz)$, *che è uguale a :*
$Syz_1(x^2 - yw\ xy - wz\ y^2 - xz) = ((y, -x, w), (-z, y, -x)) \subseteq A^3$.
Grazie all'isomorfismo dato da $I \cong A^s/ker(\phi)$, *l'ideale* I *può essere descritto come quoziente di un* A *- modulo libero e* $Syz_1(f_1, ..., f_s)$ *come insieme di tutte le relazioni lineari tra* $f_1, ..., f_s$.
Il modulo $Syz_1(f_1, ..., f_s)$ *giocherà un ruolo critico nella teoria delle basi di Groebner. In particolare, sarà usato per provare l'algoritmo di Buchberger.*
Osserviamo che, $Syz_1(f_1, ..., f_s)$ *è finitamente generato, essendo un sottomodulo di* A^s *del modulo libero su* A. *Uno dei nostri scopi è calcolare i generatori di* $Syz_1(f_1, ..., f_s)$. *Il prossimo lemma mostra come calcolare questi generatori in un caso speciale.*

Proposizione 2.44 *Sia* $A = K[x_1, ..., x_n]$ *e siano* $c_1, ..., c_s \in K - 0$ *e siano* $X_1, ..., X_s$ *prodotti di potenze in* A. *Per* $i \neq j \in \{1, ..., s\}$ *noi definiamo* $X_{ij} = lcm(X_i, X_j)$. *Allora il modulo* $Syz_1(c_1X_1, ..., c_sX_s)$ *è generato da :*

$$\left\{\tfrac{X_{ij}}{c_iX_i}e_i - \tfrac{X_{ij}}{c_jX_j}e_j \in A^s/1 \leq i < j \leq s\right\},$$

dove $\{e_1, ..., e_s\}$ *è la base standard di* A^s, $e_i = (0, 0, ..., 1, 0, ..., 0), 1 \leq i \leq j$.

Prova. *Anzitutto notiamo che per ogni* $i \neq j$, *la relazione* $\frac{X_{ij}}{c_iX_i}e_i - \frac{X_{ij}}{c_jX_j}e_j$ *è una sizigia di* $[c_1X_1\ c_2X_2\ ...\ c_sX_s]$, *dal momento che:*
$[c_1X_1\ c_2X_2\ ...\ c_sX_s](0, ..., 0, \frac{X_{ij}}{c_iX_i}, 0, ..., 0, -\frac{X_{ij}}{c_jX_j}, 0, ..., 0) = 0$.
Inoltre
$(\frac{X_{ij}}{c_iX_i}e_i - \frac{X_{ij}}{c_jX_j}e_j | 1 \leq i < j \leq s) \subseteq Syz_1(c_1X_1, ..., c_sX_s)$.
Per provare l` inverso, sia $(h_1, ..., h_s)$ *una sizigia di* $[c_1X_1\ c_2X_2\ ...\ c_sX_s]$, *il che significa,* $h_1c_1X_1 + ... + h_sc_sX_s = 0$.

Sia X un qualunque prodotto di potenze in T^n, essendo T^n un K - spazio vettoriale con base, T^n, di tutti i prodotti di potenze, $T^n = \left\{ x_1^{\beta_1}...x_n^{\beta_n} / \beta_i \in \boldsymbol{N}, i = 1, ..., n \right\}$. Allora il coefficiente di X in $h_1 c_1 X_1 + ... + h_s c_s X_s$ deve essere zero. Ciò è sufficiente per considerare il caso per cui $h_i = c_i^{'} X_i^{'}$, $i = 1, ..., s$, e dove $c_i^{'} = 0$ o $X_i X_i^{'} = X$ per un fissato prodotto X. Siano $c_{i_1}^{'}, ..., c_{i_t}^{'}$, con $i_1 < ... < i_t$ i coefficienti non nulli di $c_j^{'}$. Allora si ha $c_1^{'} c_1 + ... + c_s^{'} c_s = c_{i_1}^{'} c_{i_1} + ... + c_{i_t}^{'} c_{i_t} = 0$. Inoltre, abbiamo:

$$(h_1, ..., h_s) = (c_1^{'} X_1^{'}, ..., c_s^{'} X_s^{'}) = c_{i_1}^{'} X_{i_1}^{'} e_{i_1} + ... + c_{i_t}^{'} X_{i_t}^{'} e_{i_t}$$

$$= c_{i_1}^{'} c_{i_1} \frac{X}{c_{i_1} X_{i_1}} e_{i_1} + ... + c_{i_t}^{'} c_{i_t} \frac{X}{c_{i_t} X_{i_t}} e_{i_t}$$

$$= c_{i_1}^{'} c_{i_1} \frac{X}{X_{i_1 i_2}} \left(\frac{X_{i_1 i_2}}{c_{i_1} X_{i_1}} e_{i_1} - \frac{X_{i_1 i_2}}{c_{i_2} X_{i_2}} e_{i_2} \right)$$

$$+ \ (c_{i_1}^{'} c_{i_1} + c_{i_2}^{'} c_{i_2}) \frac{X}{X_{i_2 i_3}} \left(\frac{X_{i_2 i_3}}{c_{i_2} X_{i_2}} e_{i_2} - \frac{X_{i_2 i_3}}{c_{i_3} X_{i_3}} e_{i_3} \right) + ...$$

$$+ (c_{i_1}^{'} c_{i_1} + ... + c_{i_{t-1}}^{'} c_{i_{t-1}}) \frac{X}{X_{i_{t-1} i_t}} \left(\frac{X_{i_{t-1} i_t}}{c_{i_{t-1}} X_{i_{t-1}}} e_{i_{t-1}} - \frac{X_{i_{t-1} i_t}}{c_{i_t} X_{i_t}} e_{i_t} \right)$$

$$+ \underbrace{(c_{i_1}^{'} c_{i_1} + ... + c_{i_t}^{'} c_{i_t})}_{=0} \frac{X}{c_{i_t} X_{i_t}},$$

come volevasi dimostrare.

3 s - successioni

3.1 Definizione di s - successione e primi esempi

Di fondamentale importanza per il calcolo degli invarianti algebrici dell ` Algebra Simmetrica di moduli finitamente generati su anelli noetheriani è il concetto di s - successione, che trova applicazione nella teoria delle basi di Groebner per definire gli ideali di queste algebre simmetriche.
Sia R un anello Neotheriano, M un R - Modulo con generatori $f_1, f_2, ..., f_n$ e (a_{ij}) $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$ la matrice delle relazioni. Denotiamo con $Sym(M)_i$ l'i -esima potenza simmetrica e con $Sym(M) = \oplus_{i \geq 0} Sym(M)_i$ l'algebra simmetrica di M.
Notiamo che

$$Sym(M) = R[y_1, y_2, ..., y_n]/J \text{ con } J = (g_1, g_2, ..., g_m), \text{ dove } g_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j.$$

L'ideale $Sym_+(M) = \oplus_{i>0} Sym_i(M)$ è generato dalle classi resto di y_i che denotiamo con f_i^*.
Consideriamo $S = R[y_1, y_2, ..., y_n]$ come un anello graduato assegnando a ogni variabile y_i il grado uno e agli elementi di R il grado zero. Allora J è un ideale graduato e l'epimorfismo naturale $S \longrightarrow Sym(M)$ è un omomorfismo di R -algebre graduate.
Sia $<$ un ordinamento monomiale sui monomi in $y_1, y_2, ..., y_n$ con $y_1 < y_2 < ... < y_n$. Noi diremo un tale ordinamento ammissibile. Per ogni polinomio $f \in R[y_1, y_2, ..., y_n]$, $f = \sum_a a_\alpha y^\alpha$ noi poniamo $in(f) = a_\alpha y^\alpha$ dove y^α il più grande monomio di f con $a_\alpha \neq 0$ e fissiamo $in(J) = (in(f) : f \in J)$, $\alpha \in N^n, \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), y^\alpha = y_1^{\alpha_1} ... y_n^{\alpha_n}$.

Per $i = 1, ..., n$ poniamo $M_i = \sum_{j=1}^{i} Rf_i$ e sia I_i l'ideale colon $M_{i-1} : f_i$. In altre parole, I_i è l'ideale annullatore del modulo ciclico $M_i/M_{i-1} \cong R/I_i$. Per convenienza noi poniamo anche $I_0 = 0$. Gli ideali I_i sono chiamati gli ideali annullatori della successione $f_1, f_2, ..., f_n$.

Osservazione 3.1 *$(I_1 y_1, I_2 y_2, ..., I_n y_n) \subset in(J)$ e i due ideali coincidono nel grado 1.*

Definizione 3.2 *I generatori $f_1, f_2, ..., f_n$ di M sono chiamati una s - successione (rispetto ad un ordinamento dei termini ammissibile $<$) , se*

$$in(J) = (I_1y_1, I_2y_2, ..., I_ny_n) \ .$$

Se in aggiunta $I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_n$, allora $f_1, f_2, ..., f_n$ è chiamata una s - successione forte.

Consideriamo il caso particolare in cui $R = K[x_1, x_2, ..., x_r]$ l` anello dei polinomi su un campo K, e sia $<$ un ordinamento dei termini su $S = K[x_1, x_2, ..., x_r, y_1, y_2, ..., y_n]$ con $y_1 < y_2 < ... < y_n$ e $x_i < y_j$ per ogni i e j. Allora:

1. Per ogni base di Groebner G di J(rispetto a $<$) si ha $in(J) = (in(f) : f \in G)$. In particolare, $f_1, f_2, ..., f_n$, è una successione di M se gli elementi di G sono di grado uno nelle variabili y_i.

2. Nel caso in cui M sia un ideale monomiale, $in_<(J) = in(J)$.

Osserviamo il seguente fatto proveniente dalla teoria delle basi di Groebner: Sia R un anello dei polinomi,$g_1, g_2, ..., g_m$ polinomi in R e $<_1$ e $<_2$ siano due ordinamenti dei termini su R tali che $in_{<_1}(g_i) = in_{<_2}(g_i)$ per ogni $i = 1, ..., m$. Allora $g_1, g_2, ..., g_m$ è una base di Groebner rispetto a $<_1$ se e solo se esso è una base di Groebner rispetto a $<_2$.
Come conseguenza di questa osservazione otteniamo il seguente:

Lemma 3.3 *Sia I un ideale generato dalla successione di monomi $f = f_1, f_2, ..., f_n$. Se f è una s - successione rispetto ad un ordinamento dei termini ammissibile, allora f è una s -successione rispetto ad ogni altro ordinamento dei termini ammissibile.*

Consideriamo qualche semplice esempio di ideali monomiali.

Esempio 3.4 *Sia $R = K[x_1, x_2, ..., x_n]$,*

1. x_1^2, x_2^2, x_1x_2 è s - successione forte.

Poniamo
$f_1 = x_1^2, f_2 = x_2^2, f_3 = x_1x_2$

$g_{12} = f_{12}T_2 - f_{21}T_1 = x_1^2T_2 - x_2^2T_1$
$g_1 = g_{13} = f_{13}T_3 - f_{31}T_1 = x_1T_3 - x_2T_1$
$g_2 = g_{23} = f_{23}T_3 - f_{32}T_2 = x_2T_3 - x_1T_2$

$$g_3 = S(g_{13}, g_{23}) = x_2T_1 - x_1T_2 = x_1^2T_2 - x_2^2T_1,$$

Ora $S(g_1, g_3) = -x_2T_1g_2$ *, e* $S(g_2, g_3) = x_2^2T_1g_2 - x_1T_2g_3$*, e così dal criterio di Buchberger noi abbiamo* $in(J) = (x_1^2T_2, (x_1, x_2)_{T_3})$*. Notiamo che l'ideale* $M = (x_1^2, x_2^2, x_1x_2)$ *non è di tipo lineare, dal momento che* $x_{22}^2 - T_1T_3$ *è una relazione dell'anello di Rees. Dunque l'esempio mostra che un ideale generato da una s - successione può non essere di tipo lineare.*

2. x_1^2, x_1x_2, x_2^2 *non è una s - successione, dal momento che* $in(J) = (x_1T_3, x_1T_2, x_2T_1T_3)$ *se* $T_1T_3 > T_2^2$ *, e* $in(J) = (x_1T_3, x_1T_2, x_2T_2^2)$ *se* $T_1T_3 < T_2^2$*. Gli esempi (1) e (2) mostrano che la proprietà della s - successione può influire sull'ordine della successione.*

3. *L'ideale* $(x_1x_2x_5^2, x_1x_4x_5, x_3x_4)$ *di tipo lineare ma* $x_1x_2x_4^2, x_1x_4x_5, x_3x_4$ *non è una s -successione, perchè* $in(J) = (x_2x_5T_2, x_1x_5T_3, x_1x_4T_1T_3)$ *se* $T_1T_3 < T_2^2$ *, e* $in(J) = (x_2x_5T_2, x_1x_5T_3, x_2x_3T_2^2)$ *se* $T_1T_3 > T_2^2$*.*

3.2 s - successioni monomiali

Sia $R = K[x_1, x_2, ..., x_m]$, dove K è un campo e sia $I = (f_1, f_2, ..., f_n)$, dove $f_1, f_2, ..., f_n$ sono monomi. Poniamo $f_{ij} = \frac{f_i}{[f_i, f_j]}, i \neq j$. Alora J è generato da $g_{ij} := f_{ij}y_j - f_{ji}y_i, 1 \leq i < j < n$. Notiamo che gli ideali annullatori della successione $f_1, f_2, ..., f_n$ sono già gli ideali $I_i = (f_{1i}, f_{2i}, ..., f_{i-1,i})$. Come abbiamo già osservato prima, una successione monomiale è una s - successione se e solo se $g_{ij}, 1 \leq i < j < n$ è una base di Groebner per J per ogni ordinamento dei termini che estende un ordinamento ammissibile dei termini sulle y_i. Fissiamo ora un tale ordinamento. Richiamiamo i seguenti fatti:

Proposizione 3.5 *Siano $i, j, k \in 1, ..., n$ coppie distinte di interi. Allora*

$$\frac{f_{jk}f_{ki}}{f_{ji}[f_{jk},f_{ik}]} = \frac{f_{ik}f_{kj}}{f_{ij}[f_{jk},f_{ik}]} \in R \ , \ e \ \frac{f_{ki}f_{ij}}{f_{kj}[f_{ij},f_{ik}]} = \frac{f_{ji}f_{ik}}{f_{jk}[f_{ij},f_{ik}]} \in R$$

Prova. Risulta $f_{ij}f_{jk}f_{ki} = f_{ik}f_{kj}f_{ji}$, infatti:

$$\frac{f_i}{[f_i,f_j]}\frac{f_j}{[f_j,f_k]}\frac{f_k}{[f_k,f_j]} = \frac{f_i}{[f_i,f_k]}\frac{f_j}{[f_k,f_j]}\frac{f_k}{[f_j,f_i]}$$

$$\frac{f_{jk}}{[f_{jk},f_{ik}]}f_{ij}f_{ki} = \frac{f_{ik}}{[f_{jk},f_{ik}]f_{kj}f_{ji}}f_{kj}f_{ji} \ .$$

Poichè $[f_{ij}, f_{ji}] = 1$,risulta

$$f_{ji}\left|\frac{f_{jk}}{[f_{jk},f_{ik}]}f_{ki}\right. \ , \text{ e } f_{ij}\left|\frac{f_{ik}}{[f_{jk},f_{ik}]}f_{kj}\right. \ .$$

Infatti:

$$\frac{f_{jk}f_{ki}}{f_{ji}[f_{jk},f_{ik}]} = \frac{f_{ik}f_{kj}}{f_{ij}[f_{jk},f_{ik}]} \in R.$$

Alla stesso modo, abbiamo

$$\frac{f_{ki}f_{ij}}{f_{kj}[f_{ij},f_{ik}]} = \frac{f_{ji}f_{ik}}{f_{jk}[f_{ij},f_{ik}]} \in R.$$

Proposizione 3.6 *Se per ogni $i, j, k, l \in 1, ..., n$ con $i < j, k < l, i \neq k$ e $j \neq l$ noi abbiamo $[f_{ij}, f_{kl}] = 1$, allora $f_1, ..., f_n$ è una s - successione.*

Proposizione 3.7 *Una successione monomiale f_1, f_2, f_3 è una s - successione se e solo se $[f_{12}, f_{23}] = 1$.*

Prova. *Grazie alla proposizione 3.5. si deve solo dimostrare che se f_1, f_2, f_3 è una s - successione, allora $[f_{12}, f_{23}] = 1$. La proprietà di essere s - successione implica che g_{12}, g_{13}, g_{23} è una base di Groebner di J. In particolare, $S(g_{12}, g_{23})$ ha un'espressione standard rispetto a g_{12}, g_{13}, g_{23} con resto zero. Ma*

$$S(g_{12}, g_{23}) = -\frac{f_{21}f_{23}}{[f_{12},f_{23}]}y_3y_1 + \frac{f_{12}f_{32}}{[f_{12},f_{23}]}y_2^2.$$

Così $\frac{f_{12}f_{32}}{[f_{12},f_{23}]}y_2^2$ o $\frac{f_{21}f_{23}}{[f_{12},f_{23}]}y_3y_1$ sono divisi da $in(g_{12}), in(g_{13})$ o $in(g_{23})$.
Nel primo caso, $f_{12}\left|\frac{f_{12}f_{32}}{[f_{12},f_{23}]}\right.$, e così, $[f_{12}, f_{23}]\,|f_{32}$. Allo stesso modo, dal momento che

$$[[f_{12}, f_{23}]\,|f_{32}] = 1\,,$$

segue che $[f_{12}, f_{23}] = 1$. *Nel secondo caso,* $f_{23} \left| \frac{f_{21}f_{23}}{[f_{12},f_{23}]} \right.$, *o* $f_{13} \left| \frac{f_{21}f_{23}}{[f_{12},f_{23}]} \right.$. *Se* $f_{23}\frac{f_{21}f_{23}}{[f_{12},f_{23}]}$, *abbiamo* $[f_{12}, f_{23}]\,|f_{21}$, *e hence* $[f_{12}, f_{23}] = 1$. *Se* $f_{13} \left| \frac{f_{21}f_{23}}{[f_{12},f_{23}]} \right.$, *abbiamo*

$$S(g_{12}, g_{23}) = -\frac{f_{21},f_{23}}{f_{13}[f_{12},f_{23}]}y_1 g_{13} + \frac{f_{12},f_{32}}{[f_{12},f_{23}]}y_2^2 - \frac{f_{21}f_{23}f_{31}}{f_{13}[f_{12},f_{23}]}y_1^2.$$

Allora $\frac{f_{12},f_{32}}{[f_{12},f_{23}]}y_2^2$ *divisa da in*$(g_{12}$, *cosi̇̀ che* $f_{12} \left| \frac{f_{12}f_{32}}{[f_{12},f_{23}]} \right.$, *e allo stesso modo* $[f_{12}, f_{23}]\,|f_{32}$. *Allora* $[f_{12}, f_{23}] = 1$. *Allo stesso modo, in qualunque caso, abbiamo che* $[f_{12}, f_{23}] = 1$.

Esempio 3.8 *Siano* $f_1 = x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}, f_2 = x_1^{\beta_1}...x_n^{\beta_n}$ *e* $f_3 = x_1^{\gamma_1}...x_n^{\gamma_n}$. *Allora la condizione* $[f_{12}, f_{23}] = 1$ *della proposizione 3.7. soddisfatta se e solo se, per ogni* $i = 1, ..., n, \alpha_i \leq \beta_i$ *o* $\beta_i \leq \gamma_i$.
Prova. *È facile provarla.*

Esempio 3.9 *Sia* I_2 *l'ideale di Veronese square - free di* $K[x_1, ..., x_n]$ *generato da tutti i monomi square - free di grado 2. Per* $n \geq 4$, I_2 *non soddisfa la condizione della proposizione 3.6. del capitolo 3. Infatti:*
Sia $I_2 = (x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4)$,
Poniamo $f_1 = x_1x_2, f_2 = x_1x_3, f_3 = x_1x_4, f_4 = x_2x_3, f_5 = x_2x_4, f_6 = x_3x_4$.
$f_{12} = \frac{f_1}{[f_1,f_2]} = x_2; f_{13} = x_2; f_{14} = x_1, f_{23} = x_3, f_{24} = x_1, f_{34} = x_1x_4, f_{15} = x_1, f_{16} = x_1x_2, f_{25} = x_1x_3, f_{26} = x_1, f_{35} = x_1, f_{36} = x_1, f_{45} = x_3, f_{46} = x_2, f_{56} = x_2$.
Se ad esempio calcoliamo $MCD(f_{12}, f_{46}) = MCD(x_2, x_2) = x_2 \neq 1$, *troviamo che* I_2 *non soddisfa la condizione della prop.3.6. per essere generato da una s - successione.*

3.3 Proprietà delle s - successioni

Proposizione 3.10 *Sia R una K - Algebra standard graduata, M un R - modulo graduato che è generato da una s - successione omogenea* $f_1, ..., f_n$ *dove tutti gli* f_i *hanno lo stesso grado, e siano* $I_1, ..., I_n$ *gli ideali annullatori della s - successione. Allora abbiamo:*

1. $d := dimSym(M) = max^{0 \leq r \leq n}_{1 \leq i_1 < ... < i_r \leq n} \{dimR/(I_{i_1} + ... + I_{i_r}) + r\}$,

2. $e(Sym(M)) = \sum^{0 \leq r \leq n, 1 \leq i_1 < ... < i_r \leq n}_{dimR/(I_{i_1} + ... + I_{i_r}) = d - r} e(R/(I_{i_1} + ... + I_{i_r})$.

In particolare, se $f_1, ..., f_n$ *è una s - successione forte, allora*

1' $d = \overset{max}{0 \leq r \leq n} \{dimR/I_r + r\}$

2' $e(Sym(M)) = \overset{\sum}{0 \leq r \leq n} e(R/I_r)$.

Prova. Vedi [12].

Proposizione 3.11 *Sia* $R = K[x_1, ..., x_n]$ *un anello di polinomi sul campo K, e sia M un R - modulo graduato. Assumiamo che M sia generato da una s - successione forte, e siano* $I_1 \subset ... \subset I_n$ *gli ideali annullatori di questa successione.*

1. *Se tutti i generatori di M hanno lo stesso grado, allora Sym(M) è standard graduata e*

$$regSym(M) \leq max\,\{regI_i : i = 1, ..., n\},$$

2. *Per la profondità di Sym(M) rispetto all ideale standard* $(x_1, ..., x_m)$ *graduato, abbiamo*

$$depth_R Sym(M) \geq min\,\{depthR/I_i + i : i = 0, 1, ..., n\}.$$

Prova. Vedi [12].

3.4 s - successioni e d - successioni

Esiste un legame tra le s - successioni e le d - successioni. Il concetto di d - successione fu introdotto da Huneke in [18] per lo studio dell'algebra di Rees di un ideale. Ricordiamo la seguente definizione:

Definizione 3.12 *Una s - successione di elementi $f_1, ..., f_n$ in un anello R è è detta una d - successione, se sono soddisfatte le seguenti proprietà:*

1. $f_1, ..., f_n$ *è un sistema minimale di generatori dell` ideale* $I = (f_1, ..., f_n)$*;*
2. $(f_1, ..., f_{i-1}) : f_i f_j = (f_1, ..., f_{i-1}) : f_j$, $\forall i, j$ *con* $1 \leq i \leq j \leq n$.
   È facile da provare che la condizione (essenziale) 2. è equivalente a
3. $((f_1, ..., f_{i-1}) : f_i) \cap I = (f_1, ..., f_{i-1})$, $\forall i = 1, ..., n$.

Noi chiameremo d - successione una successione che soddisfa le condizioni equivalenti 2. e 3. .
Per testare che una successione è una d - successione è utile usare il seguente lemma:

Lemma 3.13 *Sia $I \subset R$ un ideale generato da $f_1, ..., f_n$ e denotiamo con $\bar{g}$ la classe residua di un elemento $g \in R/(f)$. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. $f_1, ..., f_n$ *è una d - successione;*
2. $(0 : f_1) \cap I = (0)$ *e* $\bar{f_2}, ..., \bar{f_n}$ *una d - successione in* $R/(f_1)$.

Prova. (1) $\Rightarrow$ (2)*: è sufficiente dimostrare che* $\bar{f_2}, ..., \bar{f_n}$ *d - successione. Sia* $\bar{I} = I/(f_1)$ *e sia* $\bar{a} \in (\bar{f_2}, ..., \bar{f_{i-1}})$ *e* $\bar{a} \in \bar{I}$. *Alloraa* $\in (f_1, ..., f_{i-1}) : f_i$ *e* $a \in I$*, ne segue che* $af_i \in (f_1, ..., f_{i-1})$ *e* $a \in I$. *Ciò implica* $a \in ((f_1, ..., f_{i-1}) : f_i) \cap I = (f_1, ..., f_{i-1})$ *, e pertanto* $\bar{a} \in (\bar{f_2}, ..., \bar{f_{i-1}})$.
(2) $\Rightarrow$ (1)*: Se* $a \in (f_1, ..., f_{i-1} : f_i) \cap I$*, allora:*

$$\bar{a} \in (\bar{f_2}, ..., \bar{f_{i-1}}) : \bar{f_i} \cap \bar{I} = (\bar{f_2}, ..., \bar{f_{i-1}}),$$

e così $a \in (f_1, ..., f_{i-1})$.

Il teorema seguente è stato provato in [12], ma noi lo riportiamo perchè è fondamentale e talvolta lo utilizzeremo. In [12] esso è provato per un R - Modulo finitamente generato M. Noi lo riscriviamo per $M = I =$ ideale di R.

Teorema 3.14 *Sia $f_1, ..., f_n$ un sistema di generatori di $I \subset R$, sia $Sym(I) = R[y_1, ..., y_n]/J$.*
Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. *$f_1, ..., f_n$è una s - successione forte rispetto all` ordinamento lessicografico inverso (indotto da $y_1 < y_2 < ... < y_n$).*

2. *$f_1^*, ..., f_n^*$è una d - successione (in $Sym(I)$), essendo $f_1^*, ..., f_n^*$ le immagini di $f_1, ..., f_n$ in $Sym(I)$.*

Prova. (1) $\Rightarrow$ (2) *: Sia $a \in (0 : f_1^*) \cap Sym_+(I)$, dove a è omogeneo, e sia $g \in S = R[y_1, ..., y_n]$ una controimmagine omogenea di a. Allora $deg(g) = d > 0$ e $gy_i \in J$. Siano $I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_n$ gli ideali annullatori di $f_1, ..., f_n$.Proviamo per induzione sul numero di variabili che appaiono in $in(g)$ che $g \in J$, in altre parole , che $a = 0$. Infatti , supponiamo che $in(g) = cy_1^d$. Allora $g = cy_1^d$ e $in(g)y_1 = cy_1^{d+1} \in in(J)$. Questo implica che $c \in I_1$ e così $cy_1 \in J$. In particolare, segue che $g \in J$. Supponiamo ora che $in(g) = cy_{i_1}y_{i_2}...y_{i_d}$ con $i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_d$ e $i_d > 1$. Allora $in(g)y_1 \in in(J)$ implica $c \in I_{i_d}$, che la s - successione è forte. Dunque esiste un elemento $l \in J$ di grado 1 con $in(l) = cy_{i_d}$. Sia $h = g - y_{i_1}y_{i_2}...y_{i_{d-1}}l$. Allora $\bar{h} = a$ e $in(h) < in(g)$, e l'asserto segue dall` ipotesi di induzione.*
Sia $\bar{I} = I/(f_1)R, \bar{S} = S/y_1S$, e $\bar{J} = J/y_1J = J\bar{S}$. Allora $Sym(\bar{I}) = \bar{S}/\bar{J}$. Inoltre, per l` ordinamento lessicografico inverso indotto da $y_1 < y_2 < ... < y_n$ segue che $\bar{in(J)} = in(\bar{J})$. Così, se noi denotiamo con $\bar{f}_2, ..., \bar{f}_n$ è le classi residue di $f_2, ..., f_n$, segue che $\bar{f}_2, ..., \bar{f}_n$ è ancora una s - successione, e che per $i = 2, ..., n$ la classe residua $\bar{f}_i^*$ di f_i^* di $Sym(\bar{I}) = Sym(I)/f_1^*Sym(I)$ è uguale a $\bar{f}_i^*$. Dunque per induzione sulla lunghezza della s - successione,possiamo assumere che $\bar{f}_2, ..., \bar{f}_n$ è una d - successione.
(2) $\Rightarrow$ (1) *Proviamo che $I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_n$, ossia che la s - successione è forte. Infatti, poichè $f_1^*, ..., f_n^*$ è una d - successione segue che $(f_1^*, ..., f_{i-1}^*) : f_i^* \subset (f_1^*, ..., f_i^*) : f_{i+1}^*$, $\forall i$ e poichè $(f_1^*, ..., f_{i-1}^*) : f_i^* = (I_i, f_1^*, ..., f_{i-1}^*)$, segue l'asserto. Sia $g \in I$ un polinomio omogeneo di grado d. Proviamo per induzione su d che $in(g) \in (I_1y_1, ..., I_ny_n)$. Per $d = 1$, questo è ovvio. Ora supponiamo che $d > 1$. Procediamo per induzione su n. Il caso $n = 1$, essendo banale, assumiamo che $n > 1$, e denotiamo come prima$^-$ la riduzione modulo y_1.*

Assumiamo che $\bar{in(g)} = 0$. *Allora* $in(g) \in (y_1)$ *e così* g_1. *Sia* $<$ *l'ordinamento lessicografico inverso. Allora esiste* $h \in S$ *di grado* $d-1$ *tale che* $g = hy_1$. *Segue che* $hy_1 \in J$. *Dal momento che* $f_1^*, ..., f_n^*$ *è una* d *- successione e dal momento che* $deg(h) = d - 1 > 0$, *segue che* $h \in J$. *Per l` ipotesi di induzione abbiamo* $in(h) \in (I_1y_1, ..., I_ny_n)$ *e così* $in(g) = in(h)y_1 \in (I_1y_1, ..., I_ny_n)$.
Così possiamo assumere che $\bar{in(g)} \neq 0$. *Allora, a causa dell` ordinamento dei termini che abbiamo adottato, abbiamo* $in(g) = in(\bar{g})$. *Pertanto è sufficiente dimostrare che* $\bar{in(g)} \in (I_2y_2, ..., I_ny_n)$. *Ma questo segue dall` ipotesi di induzione, dal momento he* $\bar{g} \in \bar{J}$, *e dal momento che* $\bar{S}/\bar{J} = Sym(\bar{I})$ *è generato dalla* d *- successione* $f_2^*, ..., f_n^*$.

4 Ideali di Veronese square - free

In questo capitolo si studiano gli ideali di Veronese square - free I_k dell` anello dei polinomi $S = K[x_1, ..., x_n]$, generati da tutti i monomi liberi da quadrato di grado k di S. Si scrivono gli ideali annullatori di I_k. Per $k = 2, n-1$ si esamina quando I_k è generato da una s - successione.

4.1 Ideali annullatori di I_2

Teorema 4.1 *Sia $I_2 \subset k[x_1, ..., x_n]$ l'ideale 2 - Veronese square - free, generato dalla successione di $\binom{n}{2}$ monomi square - free di grado 2 di S:*
$x_1x_2, x_1x_3, ..., x_{n-1}x_n$ *(1)*
ordinati dall'ordinamento lessicografico, con $x_1 > x_2 > ... > x_n$.
Sia $I^{(g)}_{k_i^{(g)}}, 1 \le g \le n$,
$\alpha(1) + \alpha(2) + ... + \alpha(g-1) + 1 \le k_i^{(g)} \le \alpha(1) + \alpha(2) + ... + \alpha(g)$,
essendo $\alpha(l), 1 \le l \le n, \alpha(0) = 0$,
il numero di monomi della successione (1) che hanno la variabile x_l come primo fattore di un monomio, gli ideali annullatori della successione (1).
Allora abbiamo:
$I^{(g)}_{k_i^{(g)}} = (x_1, x_2, ..., \widehat{x}_g, ..., x_{k_i^g - (\alpha(1)+...+\alpha(g-1))+g-1})$*, dove $\widehat{x}_g$ indica omissione.*
Prova
Poniamo $f_1 = x_1x_2, f_2 = x_1x_3, ..., f_{\binom{n}{2}} = x_{n-1}x_n$, dove $f_1 < ... < f_{\binom{n}{2}}$, dove $f_1 < ... < f_{\binom{n}{2}}$ rispetto all` ordinamento lessicografico dei termini e $x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n$.
Consideriamo l` insieme di cardinalità $\alpha(1) = n-1$ dei monomi generatori ed aventi la variabile $x_1$ come primo fattore, cioè l` insieme dei monomi del tipo x_1x_i, per $i = 2, ..., n$.
Gli ideali annullatori relativi sono in numero di n - 1, $I_1^{(1)}, ..., I_{n-1}^{(1)}$ e si ha:
$I_1^{(1)} = (0) : (x_1x_2) = (0)$
$I_2^{(1)} = (x_1x_2) : (x_1x_3) = (x_2)$
$I_3^{(1)} = (x_1x_2, x_1x_3) : (x_1x_4) = (x_2, x_3)$
$I_4^{(1)} = (x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4) : (x_1x_5) = (x_2, x_3, x_4)$
...
$I_{n-1}^{(1)} = (x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, ..., x_1x_{n-1}) : (x_1x_n) = (x_2, x_3, x_4, ..., x_{n-1})$
Risulta $g = 1$ e $1 \le k_i^{(1)} \le n-1$
Essi possono essere scritti come $I^{(1)}_{k_i^{(1)}} = (\hat{x}_1, x_2, x_3, ..., x_{k_i^{(1)}})$ per $k_i^{(1)} = 1, ..., n-1$.

Consideriamo l` insieme dei monomi del tipo x_2x_j*, per* $j = 3, ..., n$*.Essi sono in numero di* $\alpha(2) = n - 2$ *e risulta:*

$x_2x_3, x_2x_4, ..., x_2x_{n-1}, x_2x_n$

$I_n^{(2)} = (x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, ..., x_1x_{n-1}, x_1x_n) : (x_2x_3)$

$= (x_1, x_1x_4, x_1x_5, x_1x_6, ..., x_1x_{n-1}, x_1x_n) = (x_1)$.

$I_{n+1}^{(2)} = (x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, ..., x_1x_{n-1}, x_1x_n, x_2x_3) : (x_2x_4)$

$= (x_1, x_1x_3, x_1, x_1x_5, x_1x_6, ..., x_1x_{n-1}, x_1x_n, x_3) =$

(x_1, x_3)

......

$I_{(n+1)+(n-2)}^{(2)} = I_{2n-3}^{(2)}(x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, ..., x_1x_{n-1}, x_1x_n, x_2x_3, x_2x_4), ..., x_2x_{n-1}) : (x_2x_n) =$

$= (x_1, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5, ..., x_1x_n, x_3, x_4, x_5, ..., x_{n-1}) =$

$(x_1, x_3, x_4, x_5, ..., x_{n-1})$

In generale potremo scrivere: $I_{k_i^{(2)}}^{(2)} = (x_1, \hat{x_2}, x_3, ..., x_{k_i^{(2)}-\alpha(1)})$ *per* $k_i^{(2)} = n, ..., 2n - 3$*, cioè* $\alpha(1) + 1 \leq k_i^{(2)} \leq \alpha(1) + \alpha(2)$.

Consideriamo l` insieme dei monomi del tipo $x_3x_i, i = 4, ..., n$*. Essi sono in numero di n-3:*

$x_3x_4, x_3x_5, ..., x_3x_{n-1}, x_3x_n$

Gli ideali annullatori sono:

$I_{2n-2}^{(3)} = (x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, ..., x_1x_{n-1}, x_1x_n, x_2x_3, x_2x_4), ..., x_2x_{n-1}, x_2x_n) : (x_3x_4) =$

$(x_1x_2, x_1, x_1x_5, x_1x_6, ..., x_1x_n, x_2, x_2x_5, x_2x_6, ..., x_2x_n) =$

(x_1, x_2)

$I_{2n-1}^{(3)} = (x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, ..., x_1x_{n-1}, x_1x_n, x_2x_3, x_2x_4, ..., x_2x_{n-1}, x_2x_n, x_3x_4) : (x_3x_5) =$

$(x_1x_2, x_1, x_1x_4, x_1, x_1x_6, ..., x_1x_n, x_2, x_2x_4, x_2x_6, ..., x_2x_n, x_4) = (x_1, x_2, x_4)$

.....

$I_{3n-6}^{(3)} = (x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, ..., x_1x_{n-1}, x_1x_n, x_2x_3, x_2x_4, ..., x_2x_{n-1}, x_2x_n, x_3x_4, ..., x_3x_{n-1})$

$: (x_3x_n) =$

$(x_1x_2, x_1, x_1x_4, ..., x_1x_{n-1}, x_1, x_2, x_2x_4, x_2x_{n-1}, x_2, x_4, x_{n-1}) =$

$(x_1, x_2, x_4, ..., x_{n-1})$

In generale, potremo scrivere: $I_{k_i^{(3)}}^{(3)} = (x_1, x_2, \hat{x_3}, x_4 ..., x_{k_i^{(3)}} - (\alpha(1) + \alpha(2) + 1)$ *per* $k_i^{(3)} = 2n - 2, ..., 3n - 6$*, essendo* $2n - 2 = \alpha(1) + \alpha(2) + 1 = n - 1 + n - 2 + 1 = 2n - 2$, $3n - 6 = \alpha(1) + \alpha(2) + \alpha(3) = n - 1 + n - 2 + n - 3 = 3n - 6$.

E cosi` via, giungiamo all` insieme dei monomi del tipo $x_{n-2}x_i, i = n - 1, n$ *di cardinalità* $\alpha(n - 2) = 2$.

$x_{n-2}x_{n-1}, x_{n-2}x_n$

Gli ideali annullatori sono:
$I^{(n-2)}_{k_i^{(n-2)}} = (x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, ..., x_1x_{n-1}, x_1x_n, x_2x_3, x_2x_4, ..., x_2, x_3x_4,$
$..., x_3x_n, ..., x_{n-2}x_n) : (x_{n-1}x_n) =$
$(x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1, x_2x_3, x_2x_4, ..., x_2, x_3x_4, ..., x_3, x_4, ..., x_{n-2}) =$
$(x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_{n-2})$

Esempio 4.2 $n = 4$
$x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4, g = 1, 2, 3, 4.$
$\alpha(1) = 3$
$\alpha(2) = 2$
$\alpha(3) = 1$
Allora: $1 \leq k_i^{(1)} \leq 3, 4 \leq k_i^{(2)} \leq 5, k_i^{(3)} = 6,$ *essendo* $\alpha(1) + \alpha(2) = 5, \alpha(1) + \alpha(2) + \alpha(3) = 6.$
Abbiamo gli ideali annullatori: $I_1^{(1)}, I_2^{(1)}, I_3^{(1)}, I_4^{(1)}, I_5^{(2)}, I_6^{(2)}, I_7^{(2)}, I_8^{(3)}, I_9^{(3)}, I_{10}^{(4)},$
con:
$I_1^{(1)} = (\widehat{x}_1, ..., x_{1-1+1-1}) = (\widehat{x}_1) = (0)$
$I_2^{(1)} = (\widehat{x}_1, x_2, x_{2+1-1}) = (\widehat{x}_1, x_2) = (x_2)$
$I_3^{(1)} = (\widehat{x}_1, x_2, x_{3+1-1}) = (x_2, x_3)$
$I_4^{(2)} = (x_1, \widehat{x}_2, x_{4-3+2-1}) = (x_1, \widehat{x}_2, x_2) = (x_1)$
$I_5^{(2)} = (x_1, \widehat{x}_2, x_{5-3+2-1}) = (x_1, \widehat{x}_2, x_3) = (x_1, x_3)$
$I_6^{(3)} = (x_1, x_2, \widehat{x}_3, x_{6-5+3-1}) = (x_1, x_2, \widehat{x}_3, x_3) = (x_1, x_2).$

Esempio 4.3 $n = 5$
$x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5, x_2x_3, x_2x_4, x_2x_5, x_3x_4, x_3x_5, x_4x_5, g = 1, 2, 3, 4, 5.$
$\alpha(1) = 4$
$\alpha(2) = 3$
$\alpha(3) = 2$
$\alpha(4) = 1$
Allora: $1 \leq k_i^{(1)} \leq 4, 5 \leq k_i^{(2)} \leq 7, 8 \leq k_i^{(3)} \leq 9, k_i^{(4)} = 10,$
Gli ideali annullatori sono:
$I_1^{(1)}, I_2^{(1)}, I_3^{(1)}, I_4^{(1)}, I_5^{(2)}, I_6^{(2)}, I_7^{(2)}, I_8^{(3)}, I_9^{(3)}, I_{10}^{(4)},$
$I_1^{(1)} = (0) : (x_1x_2) = (0) = (\hat{x_1}, x_1) = (0)$
$I_2^{(1)} = (x_1x_2) : (x_1x_3) = (x_2) = (\hat{x_1}, x_2) = (x_2)$
$I_3^{(1)} = (x_1x_2, x_1x_3) : (x_1x_4) = (\hat{x_1}, x_2, x_3) = (x_2, x_3)$
$I_4^{(1)} = (x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4) : (x_1x_5) = (x_2, x_3, x_4)$

$I_5^{(2)} = (x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5) : (x_2x_3) = (x_1, \hat{x_2}, x_{5-(4+1)}) = (x_1)$
$I_6^{(2)} = (x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5, x_2x_3) : (x_2x_4) = (x_1, \hat{x_2}, x_{6-4+1}) = (x_1, \hat{x_2}, x_3) = (x_1, x_3)$
$I_7^{(2)} = (x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5, x_2x_3, x_2x_4) : (x_2x_5) = (x_1, \hat{x_2}, x_3, x_{7-4+1}) = (x_1, x_3, x_4)$
$I_8^{(3)} = (x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5, x_2x_3, x_2x_4, x_2x_5) : (x_3x_4) = (x_1, x_2, \hat{x_3}, x_{8-7+2}) =$
(x_1, x_2)
$I_9^{(3)} = (x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5, x_2x_3, x_2x_4, x_2x_5, x_3x_4) : (x_3x_5) = (x_1, x_2, \hat{x_3}, x_{9-7+2}) =$
(x_1, x_2, x_4)
$I_{10}^{(4)} = (x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5, x_2x_3, x_2x_4, x_2x_5, x_3x_4, x_3x_5) : (x_4x_5) =$
$(x_1, x_2, x_3, \hat{x_4}, x_{10-9+3}) = (x_1, x_2, x_3)$

4.2 Ideali di Veronese square - free generati da una s - successione

Sia $R = K[x_1, x_2, ..., x_n]$ l'anello dei polinomi su un campo K e I_k sia l'ideale di Veronese square - free di R generato da tutti i monomi square - free di grado k nelle variabili $x_1, x_2, ..., x_n$. Nel seguito riportiamo i risultati provati in [22] e riguardanti il caso in cui l'ideale I_k è generato da una s - successione. Poichè la proprietà di essere una s - successione può dipendere dall'ordine della s - successione, noi supporremo che $I_k = (f_1, f_2, ..., f_q)$ dove $f_1 < f_2 < ... < f_q$ rispetto all ordinamento dei termini $<_{lex}$ e $x_1 < x_2 < ... < x_n$.

Lemma 4.4 *Sia $R = K[x_1, x_2, ..., x_n]$ l'anello di polinomi su un campo K e $I_k \subset R$ con $2 \leq k \leq n$. Se I_k è generato da $f_1 < f_2 < ... < f_q$ tali che $[f_{ij}, f_{hl}] = 1$ per $i < j, h < l, i \neq h, j \neq l$ con $i, j, h, l \in 1, ..., q$ allora $k = n - 1$.*
Prova. *Sia $I_k = (X_{i_1}...X_{i_k} | 1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n)$ e $f_1, ..., f_q$ siano i suoi generatori con $q = \binom{n}{k}$. Se $f_{ij} = \frac{fii}{[f_i, f_j]}$ per $i < j$, segue che $f_{ij} = X_{i_1}...X_{i_r}$ con $r < k$ e per f_h, f_l con $h < l, i \neq h, j \neq l$ noi abbiamo $f_{hl} = X_{h_1}...X_{h_p}$ (il massimo grado è $n - k$). Dall ipotesi $[f_{ij}, f_{hl}] = 1$,$i < j, h < l, i \neq h, j \neq l$ segue che $X_{i_j} \neq X_{i_r}$ per tutti i $j = 1, ..., r$ e $t = 1, ..., p$. Questo significa che non ci sono altri generatori f_h, f_l di I_k tali che f_{hl} contiene qualche variabile $X_{i_1}...X_{i_r}$ (che sono in f_{ij}). Segue che se una variabile di f_{ij} è nel monomio f_h, con $h \neq i$, allora tale variabile appartiene ad ogni altro generatore f_l per tutti gli $l > h$ e $l \neq j$. Pertanto la struttura dei monomi che generano I_k è la seguente:*
$f_1 = x_1x_2...x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}, f_2 = x_1x_2...x_{n-3}x_{n-2}x_n, f_3 = x_1x_2...x_{n-3}x_{n-1}x_n, f_{n-1} =$

$x_1x_3...x_{n-2}x_{n-1}x_n, f_n = x_2x_3...x_{n-2}x_{n-1}x_n$. *Essi hanno lo stesso grado* $n-1$. *Segue che* $k = n-1$.

Teorema 4.5 *Sia* $R = K[x_1, x_2, ..., x_n]$ *l'anello di polinomi su un campo* K *e* I_k *con* $2 \leq k \leq n$. *L ideale* I_k *è generato da una s - successione se e solo se* $k = n-1$.

Prova. $\Rightarrow$) *Sia* $I_k = (f_1, f_2, ..., f_q)$ *e supponiamo che* $f_1, f_2, ..., f_q$ *sia una s - successione. Noi proviamo che* $[f_{ij}, f_{hl}] = 1$ *per* $i < j, h < l, i \neq h, j \neq l$ *con* $i, j, h, l \in 1, ..., q$. *La proprietà di essere una s - successione implica che*

$$G = \{g_{ij} = f_{ij}T_j - f_{ji}T_i | 1 \leq i < j \leq q\}$$

è una base di Groebner per J, l'ideale delle relazioni di $Sym(I_{n-1})$. *In particolare,* $S(g_{ij}, g_{hl})$ *ha una espressione standard rispetto a G con resto zero. Notiamo che avere una espressione standard di* $S(g_{ij}, g_{hl})$ *equivale a trovare qualche* $g_{st} \in G$ *il cui termine iniziale divide un termine di* $S(g_{ij}, g_{hl})$ *e sostituire un multiplo di* g_{st} *in modo che il restante polinomio abbia un termine iniziale più piccolo e cosi fino a che il resto sia zero.*

Si ha:

$S(g_{ij}, g_{hl}) = \frac{f_{ij}f_{lh}}{[f_{ij}, f_{hl}]}T_jT_h - \frac{f_{hl}f_{ji}}{[f_{ij}, f_{hl}]}T_iT_l$.

Osserviamo che $[f_{ij}, f_{hl}] = 1$ *poichè* $f_1, f_2, ..., f_q$ *sono square - free. Ora consideriamo gli altri casi. Supponiamo che* $i < j, h < l, i \neq h, j \neq l$. *Poichè* $S(g_{ij}, g_{hl})$ *ha una espressione standard rispetto a G, esiste* g_{st} *tale che* $in_<(g_{st})$ *divide* $in_<(S(g_{ij}, g_{hl}))$.

Se $l > j$ *allora* $in_<(g_{st}) | \frac{f_{hl}f_{ji}}{[f_{ij}, f_{hl}]}$.

Il primo caso è$f_{hl} | \frac{f_{hl}f_{ji}}{[f_{ij}, f_{hl}]}$, *allora* $[f_{ij}, f_{hl}] | f_{ji}$. *Ma, dal momento che noi abbiamo* $[[f_{ij}, f_{hl}], f_{ji}] = 1$, *allora segue che* $[f_{ij}, f_{hl}] = 1$.

Il secondo caso è$f_{sl} | \frac{f_{hl}f_{ji}}{[f_{ij}, f_{hl}]}$, *dove* $f_{sl} = in_<(g_{sl})$ *con* $s < j$ *e* $s < h$.

$S(g_{ij}, g_{hl}) = -\frac{f_{ji}f_{hl}}{f_{sl}[f_{ij}, f_{hl}]}g_{sl}T_i + \frac{f_{ij}f_{lh}}{[f_{ij}, f_{hl}]}T_jT_h - \frac{f_{ji}f_{hl}f_{ls}}{f_{sl}[f_{ij}, f_{hl}]}T_iT_s$.

Allora $\frac{f_{ij}f_{lh}}{[f_{ij}, f_{hl}]}T_jT_h$*è diviso da*$f_{ij}$. *Dunque* $[f_{ij}, f_{hl}] | f_{lh}$. *Ma, poichè* $[[f_{ij}, f_{hl}], f_{lh}] = 1$, *allora segue che* $[f_{ij}, f_{hl}] = 1$. *Se* $l < j$ *allora* $in_<(g_{st}) / \frac{f_{ij}f_{lh}}{[f_{ij}, f_{hl}]}$.

Il primo caso è$f_{ij} | \frac{f_{ij}f_h}{[f_{ij}, f_{hl}]}$, *allora* $[f_{ij}, f_{hl}] | f_{lh}$. *Ma poichè* $[[f_{ij}, f_{hl}], f_{lh}] = 1$, *allora segue che* $[f_{ij}, f_{hl}] = 1$.

Il secondo caso è$f_{sh} | \frac{f_{ij}f_{lh}}{[f_{ij}, f_{hl}]}$, *dove* $f_{sh} = in_<(g_{sh})$. *Si può scrivere:*

$S(g_{ij}, g_{hl}) = \frac{f_{ij}f_{lh}}{fsh[f_{ij}, f_{hl}]}g_{sh}T_j - \frac{f_{hl}f_{ji}}{[f_{ij}, f_{hl}]}T_iT_l + \frac{f_{ij}f_{lh}f_{hs}}{f_{sh}[f_{ij}, f_{hl}]}T_jT_s$.

Allora $\frac{f_{ij}f_{lh}f_{hs}}{f_{sh}[f_{ij}, f_{hl}]}T_jT_s$*è diviso da* f_{ij}. *Dunque* $f_{sh}[f_{ij}, f_{hl}] | f_{lh}f_{hs}$. *Dal fatto che* $[[f_{ij}, f_{hl}], f_{lh}] = 1$, *segue* $f_{sh} | f_{lh}$ *e* $[f_{ij}, f_{hl}] | f_{hs}$.

Dalla struttura $f_1, ..., f_q$ se $[f_{ij}, f_{hl}] | f_{hs}$ con $r < h$, allora $[f_{ij}, f_{hl}] = 1$.
Dunque in ogni caso, $[f_{ij}, f_{hl}] = 1$, nell'ipotesi $i < j, h < l, i \neq l, j \neq l$, con $i, j, h, l \in 1, ..., q$. Segue $k = n - 1$ dal Lemma 4.1.
$\Leftarrow)$
Sia $k = n - 1$. L'ideale I_{n-1} è generato da n monomi $f_1, ..., f_n$ di grado $n - 1$. Noi proviamo che $[f_{ij}, f_{hl}] = 1$, per $i < j, h < l, i \neq l, j \neq l$, con $i, j, h, l \in 1, ..., n$. I generatori di I_{n-1} sono i seguenti: $f_1 = x_1x_2...x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}, f_2 = x_1x_2...x_{n-3}x_{n-2}x_n, f_3 = x_1x_2...x_{n-3}x_{n-1}x_n, ..., f_{n-1} = x_1x_3...x_{n-2}x_{n-1}x_n, f_n = x_2x_3...x_{n-2}x_{n-1}x_n$. Calcoliamo $f_{12} = x_{n-1}, f_{13} = x_{n-2}, ..., \ f_{1n} = x_1; f_{23} = x_{n-2}, ..., f_{2n} = x_1$, e così via. In generale noi abbiamo $f_{ij} = x_{n-i}$ per $j = i + 1, ..., n$. Dunque $f_{ij} = x_{n-i}$ per $j = i + 1, ..., n$ e $f_{lh} = x_{n-h}$ per $l = h + 1, ..., n$, segue che $f_{ij} \neq f_{hl}$ perchè $j \neq l$. Allora si ottiene $[f_{ij}, f_{hl}] = 1$ per $i < j, h < l, i \neq l, j \neq l$, con $i, j, h, l \in 1, ..., n$. Dalla Proposizione 3.6. segue che $f_1, ..., f_n$ è una s - successione.

La ricerca degli ideali annullatori per I_{n-1} è particolarmente semplice. Essi sono in numero di n e sono dati dal seguente teorema:

Teorema 4.6 *Sia $R = K[x_1, ..., x_n]$ l'anello dei polinomi su un campo K e $I_{n-1} = (f_1, ..., f_n)$ l'ideale monomiale generato da tutti i monomi square - free di grado n-1. Allora gli ideali annullatori della successione $f_1, ..., f_n$ sono $I_1 = (0)$ e $I_i = (x_{n-i+1})$ per $i = 2, ..., n$.*
Prova. *Sia $I_{n-1} = (f_1, ..., f_n)$, con $f_1 < ... < f_n$. Risulta:*

$$I_{n-1} = (x_1...x_{n-1}, x_1...x_{n-2}x_n, x_1...x_{n-3}x_{n-1}x_n, ..., x_1x_3...x_n, x_2...x_n).$$

Poniamo $f_{ij} = \frac{f_i}{[f_i, f_j]}$ per $i < j$. Allora gli ideali annullatori della successione monomiale $f_1, ..., f_n$ sono $I_i = (f_{1i}, ..., f_{i-1,i})$, per $i = 1, ..., n$. Abbiamo $I_1 = (0)$, e dalla struttura di questi monomi, segue che $I_2 = (f_{12}) = (X_{n-1}), I_3 = (f_{13}, f_{23}) = (x_{n-2}), ..., I_{n-1} = (f_{1,n-1,...,f_{n-2,n-1}}) = (x_2), I_n = (f_{1n}, ..., f_{n-1,n}) = (x_1)$. Dunque $I_i = (x_{n-i+1})$, per $i = 2, ..., n$.

Esempio 4.7 *Sia $R = K[x_1, x_2, x_3, x_4]$.*

$I_3 = (x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_1x_3x_4, x_2x_3x_4)$.

$I_1 = (0) : (x_1x_2x_3) = (0)$

$I_2 = (x_1x_2x_3) : (x_1x_2x_4) = (x_3);$

$I_3 = (x_1x_2x_3, x_1x_2x_4) : (x_1x_3x_4) = (x_2)$

$I_4 = (x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_1x_3x_4) : (x_2x_3x_4) = (x_1)$

Il teorema 4.5. ci dice che se $R = K[x_1, x_2, ..., x_n]$, solo I_{n-1} è generato da una s - successione e , pertanto se $R = K[x_1, x_2, x_3, x_4], n = 4, I_{n-1} = I_3 = (x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_2x_3x_4)$ è generato da una s - successione.
Invece I_2 non è generato da una s - successione.
Nell'esempio che segue, ciò viene mostrato calcolando direttamente la base di Groebner dell'ideale delle relazioni di $Sym_R(I_2) = R[T_1, ..., T_6]/J$ e mostrando che non è lineare nelle sei variabili $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$

Esempio 4.8 *Si consideri $R = K[x_1, x_2, x_3, x_4]$ l'anello dei polinomi a coefficienti in un campo K nelle indeterminate x_1, x_2, x_3, x_4. Sia*

$$I_2 = (x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_1x_4, x_2x_4, x_3x_4).$$

Poniamo

$$f_1 = x_1x_2, f_2 = x_1x_3, f_3 = x_2x_3, f_4 = x_1x_4, f_5 = x_2x_4, f_6 = x_3x_4, \text{ dove}$$
$$f_1 < f_2 < ... < f_6$$

rispetto all'ordinamento lessicografico $x_4 > ... > x_1$. Sia $G = \{g_{ij} = f_{ij}T_j - f_{ji}T_i | 1 \leq i < j \leq 6\}$.
Calcoliamo l'insieme dei generatori dell'ideale J , g_{ij}
$g_{12} = f_{12}T_2 - f_{21}T1, f_{12} = \frac{f_1}{[f_1,f_2]} = x_2, f_{21} = \frac{f_2}{[f_1,f_2]} = x_3, g_{12} = \underline{x_2T_2} - x_3T_1$
$g_{13} = f_{13}T_3 - f_{31}T1, f_{13} = x_2, f_{13} = x_3, g_{13} = \underline{x_2T_3} - x_3T_1$
$g_{14} = f_{14}T_4 - f_{41}T_1 = \underline{x_2T_4} - x_4T_1$
$g_{15} = f_{15}T_5 - f_{51}T_1 = \underline{x_1T_5} - x_4T_1$
$g_{16} = f_{16}T_6 - f_{61}T_1 = \underline{x_1x_2T_6} - x_3x_4T_1$
$g_{23} = f_{23}T_3 - f_{32}T_2 = \underline{x_1T_3} - x_2T_2$
$g_{24} = f_{24}T_4 - f_{42}T_2 = \underline{x_3T_4} - x_4T_2$
$g_{25} = f_{25}T_5 - f_{52}T_2 = \underline{x_1x_3T_5} - x_2x_4T_2$
$g_{26} = f_{26}T_6 - f_{62}T_2 = \underline{x_1T_6} - x_4T_2$

$g_{34} = f_{34}T_4 - f_{43}T_3 = \underline{x_2x_3T_4} - x_1x_4T_3$
$g_{35} = f_{35}T_5 - f_{53}T_3 = \underline{x_3T_5} - x_4T_3$
$g_{36} = f_{36}T_6 - f_{63}T_3 = \underline{x_2T_6} - x_4T_3$
$g_{45} = f_{45}T_5 - f_{54}T_4 = \underline{x_1T_5} - x_2T_4$
$g_{46} = f_{46}T_6 - f_{64}T_4 = \underline{x_1T_6} - x_3T_4$
$g_{56} = f_{56}T_6 - f_{65}T_5 = \underline{x_2T_6} - x_3T_5$
dove sono sottolineati i termini iniziali.
$f_1, .., f_6$ *non è una s - successione perchè* J *non ammette una base di Groebner lineare per qualche ordinamento dei termini in* $R[T_1, ..., T_6]$ *con* $x_i < T_j$ *per ogni* i, j *e* $T_1 < ... < T_6$.
Usando il Cocoa calcoliamo la base di Groebner: $G = \{-x_3T_5 + x_2T_6, -x_3T_4 + x_1T_6, -x_2T_4 + x_1T_5, -x_4T_3+x_2T_6, -x_4T_2+x_1T_6, -x_2T_2+x_1T_3, -x_4T_1+x_1T_5, -x_3T_1+x_2T_3, x_1T_3-x_2T_3, x_2T_3T_5- x_2T_1T_6, -x_1T_2T_5 + x_2T_1T_6, -x_1T_1T_6 + x_2T_1T_6, -x_1x_2T_6 + x_2^2T_6, -x_1^2T_5T_6 + x_2^2T_5T_6.$
Essa è composta da nove quadriche,quattro cubiche, una quartica.

Nel caso generale di $I_k \subset K[x_1, ..., x_n]$, *un esempio significativo è il seguente, per* $k = 3$ *ed* $n = 5$. *Qui* I_3 *non è generato da una s - successione, ma gli ideali annullatori sono ancora generati da variabili.*

Esempio 4.9 *Sia* $I_3 \subset K[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$.
Allora gli ideali annullatori sono in numero di $\binom{5}{3} = 10$, *cioè tanti quanti sono i generatori di* I_3.
$I_1 = (0) : (x_1x_2x_3) = (0)$
$I_2 = (x_1x_2x_3) : (x_1x_2x_4) = (x_3)$
$I_3 = (x_1x_2x_3, x_1x_2x_4) : (x_2x_3x_4) = (x_1)$
$I_4 = (x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_2x_3x_4) : (x_1x_2x_5) = (x_3, x_4)$
$I_5 = (x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_2x_3x_4, x_1x_2x_5) : (x_2x_3x_5) = (x_1, x_4)$
$I_6 = (x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_2x_3x_4, x_1x_2x_5, x_2x_3x_5) : (x_1x_2x_6) = (x_3, x_4, x_5)$
$I_7 = (x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_2x_3x_4, x_1x_2x_5, x_2x_3x_5, x_1x_2x_6) : (x_3x_4x_5) = (x_1, x_2)$
$I_8 = (x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_2x_3x_4, x_1x_2x_5, x_2x_3x_5, x_1x_2x_6, x_3x_4x_5) : (x_2x_3x_6) = (x_1, x_4, x_5)$
$I_9 = (x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_2x_3x_4, x_1x_2x_5, x_2x_3x_5, x_1x_2x_6, x_3x_4x_5, x_2x_3x_6) : (x_3x_4x_6) = (x_1, x_2, x_5)$
$I_{10} = (x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_2x_3x_4, x_1x_2x_5, x_2x_3x_5, x_1x_2x_6, x_3x_4x_5, x_2x_3x_6, x_3x_4x_6) : (x_4x_5x_6) = (x_1, x_2, x_3)$
E sono generati da variabili.

Questo è infatti un risultato generale. Un problema aperto è studiare la struttura di questo ideale, per $n \geq 5$ *per ottenere un teorema analogo al caso* $k = 2$.

Sussiste il:

Teorema 4.10 *Sia $I_k \subset K[x_1, ..., x_n], k \geq 1$.*
Ordiniamo le variabili $x_n > x_{n-1} > ... > x_2 > x_1$, e sia $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{k-1}}x_{i_k}$ il generico generatore di I_k. Allora esiste un ordinamento dei generatori di I_k, tale che gli $\binom{n}{k}$ ideali annullatori $I_1, I_2, ..., I_{\binom{n}{k}}$ di I_k sono generati da variabili.
Prova. *Il risultato è stato provato in diverse versioni da molti autori allo scopo di trovare la regolarità di I_k. Vedesi [15],[16],[37].*
Proviamo adesso un teorema sugli ideali colon tra due generici elementi di I_k, $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{k-1}}x_{i_k}$, $x_{j_1}x_{j_2}...x_{j_{k-1}}x_{j_k} \in I_k$, che mostra che gli ideali colon tra due qualunque generatori non sono necessariamente generati nel grado uno, ma in generale sono generati nel grado $\leq k$.

Teorema 4.11 *Sia $I_k \subset K[x_1, ..., x_n], k > 1$.*
Ordiniamo le variabili $x_n > x_{n-1} > ... > x_2 > x_1$, e sia $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{k-1}}x_{i_k}$ il generico generatore di I_k.
Allora si hanno i seguenti casi:

1. $i_1 = j_1, i_2 = j_2, ..., i_{k-1} = j_{k-1}$ *e* $i_k \neq j_k$ *Allora* $(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{k-1}}x_{i_k}) : (x_{i_1}x_{i2}...x_{i_{k-1}}x_{j_k}) = (x_{i_k})$

2. $i_1 = j_1, i_2 = j_2, ..., i_{k-2} = j_{k-2}$ *e* $i_{k-1} \neq j_{k-1}, i_k \neq j_k$.

   Allora $(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{k-1}}x_{i_k}) : (x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{k-2}}x_{j_{k-1}}x_{j_k}) = (x_{i_{k-1}}x_{i_k})$,

3. $i_1 \neq j_1, i_2 \neq j_2, ..., i_k \neq j_k$.

Allora $(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{k-1}}x_{i_k}) : (x_{j_1}x_{j_2}...x_{j_{k-1}}x_{j_k}) = (x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{k-1}}x_{i_k})$.
Prova.

1. $(x_{i_k}) \subset (x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{k-1}}x_{i_k}) : (x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{k-1}}x_{j_k})$,
   poichè $x_{i_k}.x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{k-1}}x_{j_k} = (x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{k-1}}x_{i_k})x_{j_k} \in (x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{k-1}}x_{i_k})$.
   Proviamo il viceversa.
   Sia $a \in (x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{k-1}}x_{i_k}) : (x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{k-1}}x_{j_k})$.
   Possiamo supporre che a sia un monomio nelle variabili $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n}$.
   Risulta

$a.x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{k-1}}x_{j_k} = b.x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{k-1}}x_{i_k}$;
poichè $K[x_1,...,x_n]$ è un dominio fattoriale, il monomio a deve contenere le variabili x_{ik}, per cui $a \in x_{ik}$, cioè $a = cx_{ik}$, con c monomio.

2. *$(x_{i_{k-1}}, x_{i_k}) \subset (x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{k-1}}x_{i_k}) : (x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{k-2}}x_{j_{k-1}}x_{j_k})$,*
poichè $(x_{i_{k-1}}, x_{i_k}).(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{k-2}}x_{j_{k-1}}x_{j_k}) = (x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{k-1}}x_{i_k})x_{j_{k-1}}x_{j_k} \in (x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{k-1}}x_{i_k})$
Proviamo il viceversa.
Sia $a \in (x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{k-1}}x_{i_k}) : (x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{k-2}}x_{j_{k-1}}x_{j_k})$.
Possiamo supporre che a sia un monomio nelle variabili $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n}$.
Risulta
$a.x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{k-2}}x_{j_{k-1}}x_{j_k} = b.x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{k-1}}x_{i_k}$;
poichè $K[x_1,...,x_n]$ è un dominio fattoriale, il monomio a deve contenere le variabili $(x_{i_{k-1}}, x_{i_k})$, per cui $a \in (x_{i_{k-1}}, x_{i_k})$, cioè $a = c(x_{i_{k-1}}, x_{i_k})$, con c monomio.

3. *L'asserto è ovvio, considerata la struttura dei monomi.*

Osservazione 4.12 *Sebbene il grado di intersezione degli ideali colon tra due ideali principali generati da elementi di I_k, sia $\leq k$, tuttavia per ordinamenti di variabili opportuni e ordinamenti di generatori di I_k opportuni, gli ideali colon di I_k, ossia gli ideali annullatori di I_k, sono sono di tipo lineare, cioè generati da variabili. Ciò capita poichè dal punto di vista combinatorico, i generatori di ogni ideale colon soddisfano a buone proprietà di scambio. Gli ideali I_k sono infatti ideali polimatroidi ([16]) ed hanno quozienti lineari.*

5 Ideali di Prodotti misti

5.1 Ideali di prodotti misti generati ed s - successioni

Sia $R = K[x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_m]$ *un anello di polinomi in due insiemi di variabili su un campo K. Dati* k, r, s, t *interi non negativi tali che* $k + r = s + t$*, consideriamo gli ideali monomiali square free di R del tipo:*
$L = I_k J_r + I_s J_t$*, dove* I_k *(rispettivamente* J_r*) è l'ideale monomiale di R generato da tutti i monomi square - free di grado k (rispettivamente r) nelle variabili* $x_1, ..., x_n$ *(rispettivamente* $y_1, ..., y_m$*).*
Questi ideali sono stati introdotti in [33] da G. Restuccia ed R. Villareal e sono chiamati ideali di prodotti misti. In [7] è data la classificazione di tutti gli ideali di prodotti misti, in due insiemi di variabili. Poniamo $I_0 = J_0 = R$*, allora:*

1. $L = I_k + J_k$*, con* $1 \leq k \leq inf n, m$

2. $L = I_k J_r$*, con* $1 \leq k \leq n, 1 \leq r \leq m$

3. $L = I_k J_r + I_{k+1} J_{r-1}$*, con* $1 \leq k \leq n, 2 \leq r \leq m$

4. $L = J_r + I_s J_t$*, con* $r = s + t, 1 \leq s \leq n, 1 \leq r \leq m, t \geq 1,$

5. $L = I_k J_r + I_s J_t$*, con* $k + r = s + t, 1 \leq k \leq n, 1 \leq r \leq m.$

Esempio 5.1 *Sia* $R = K[x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3]$.

$$L = I_2 + J_2 = (x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, y_1y_2, y_1y_3, y_2y_3).$$

Esempio 5.2 *Sia* $R = K[x_1, x_2, x_3; y_1, y_2]$.

$$L = I_2 J_1 = (x_1x_2y_1, x_1x_2y_2, x_1x_3y_1, x_1x_3y_2, x_2x_3y_1, x_2x_3y_{2)}).$$

Esempio 5.3 *Sia* $R = K[x_1, x_2, y_1, y_2, y_3]$.

$$L = I_1 J_2 + I_2 J_1 =$$
$$(x_1y_1y_2, x_1y_1y_3, x_1y_2y_3, x_2y_1y_2, x_2y_1y_3, x_2y_2y_3, x_1x_2y_1, x_1x_2y_2, x_1x_2y_3).$$

Esempio 5.4 *Sia* $R = K[x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4]$.

$$L = I_2 J_1 + J_3 = (x_1x_2y_1, x_1x_2y_2, x_1x_2y_3, y_1y_2y_3, x_1x_2y_4, y_1y_2y_4, y_1y_3y_4, y_2y_3y_4).$$

Gli autori Restuccia e La Barbiera in [22] hanno ottenuto il seguente risultato:
Sia $R = K[x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_m]$ l'anello dei polinomi su un campo K in due insiemi di variabili. Allora L è generato da una s - successione se e solo se L ha la seguente forma:

1. $L = I_{n-1}J_m$;
2. $L = I_1 J_m$;
3. $L = I_{n-1}J_m + I_n J_{m-1}$;
4. $L = J_m + +I_n J_1$.

Il nostro scopo è esaminare casi in cui questi ideali monomiali non sono generati da una s - sucessione.
Nel seguito supporremo $L = (f_1, f_2, ..., f_q)$ dove $f_1 < f_2 < ... < f_q$ rispetto all'ordinamento di termini monomiale $<_{lex}$ e con ordinamento sulle variabili $x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_m$, tale che $x_1 < x_2 < ... < x_n < y_1 < y_2 < ... < y_m$. Ricordiamo che l'ideale J delle relazioni dell'algebra simmetrica, $Sym_R(L) = R[T_1, ..., T_q]/J$ è generato dagli elementi di $R[T_1, ..., T_6]$ $g_{ij} = f_{ij}T_j - f_{ji}T_i$ per $1 \le i < j \le q$. La successione monomiale $f_1, ..., f_q$ è una s - successione se e solo se l'insieme $g_{ij} = \{1 \le i < j \le q\}$ è una base di Groebner per J per qualche ordinamento dei termini in $K[x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_m; T_1, ..., T_q]$ con $x_1 < x_2 < ... < x_n < y_1 < y_2 < ... < y_m < T_1 < T_2 < ... < T_q$.

Teorema 5.5 *Sia $R = K[x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_m]$ l'anello dei polinomi su un campo K e sia $L = I_k + J_k$ con $1 \le k \le inf\,\{n, m\}$. Allora L non è generato da una s - successione per $k \neq 1$.*
Prova. *Per $k = 1 : L = I_1 + J_1 = (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$è generato da una s - successione forte,essendo generato da una successione regolare per $k > 1$, abbiamo i seguenti casi:*

1. *$k \neq n - 1$: L non è generato da una s - successione, perchè I_k non è generato da una s - successione, grazie al teorema 4.5.*
2. *$k \neq m - 1$: L non è generato da una s - successione perchè J_k non è generato da una s - successione grazie al teorema 4.5.*
3. *$n = m$ e $k = n - 1$: $L = I_{n-1} + J_{n-1} = (f_1, ..., f_n) + (f_{n+1}, ..., f_{2n})$, con $f_1 < ... < f_n < f_{n+1} < ... < f_{2n}$. L è generato da una s - successione*

$\Longleftrightarrow G = \{g_{ij} = f_{ij}T_j - f_{ji}T_I | 1 \leq i < j \leq 2n\}$, *per ogni ordinamento dei termini* $\Leftrightarrow S(g_{ij}, g_{hl}) \overset{G}{\to} 0$ *per ogni* $i, j, h, l \in \{1, ..., 2n\}$ *e* $g_{ij} \neq g_{hl}$. *È sufficiente trovare una* S *- coppia* $S(g_{ij}, g_{hl})$ *che non ha una espressione standard rispetto a* G *con resto zero. I generatori di* L *sono i seguenti:*
$f_1 = x_1x_2...x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}, f_2 = x_1x_2...x_{n-3}x_{n-2}x_n, f_3 = x_1x_2...x_{n-3}x_{n-1}x_n, ...,$
$f_{n-1} = x_1x_3...x_{n-2}x_{n-1}x_n, f_n = x_2x_3...x_{n-2}x_{n-1}x_n,\ f_{n+1} = Y_1Y_2...Y_{n-3}Y_{n-2}Y_{n-1},$
$f_{n+2} = y_1y_2...y_{n-3}y_{n-2}y_n, ..., f_{2n-1} = y_1y_3...y_{n-2}y_{n-1}y_n, f_{2n} = y_2y_3...y_{n-2}y_{n-1}y_n.$
Noi calcoliamo: $S(g_{1n}, g_{2,n+1}) = \frac{f_{1n}f_{n+1,2}}{[f_{1n},f_{2,n+1}]}T_2T_n - \frac{f_{2,n+1}f_{n1}}{[f_{1n},f_{2,n+1}]}T_1T_{n+1} = y_1y_2...y_{n-3}y_{n-2}$ $y_{n-1}T_2T_n - x_2...x_{n-3}x_{n-2}x_n^2T_1T_{n+1}$. *Dalla struttura dei generatori di* L *non esiste alcun* $g_{st} \in G$ *il cui termine iniziale divide un termine di* $S(g_{1n}, g_{2,n+1})$. *Segue che non è possibile dare una espressione standard di* $S(g_{1n}, g_{2,n+1})$ *rispetto a* G *con resto zero. Dunque* L *non è generato da una s - successione.*

Esempio 5.6 *Si consideri* $R = K[x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3]$ *anello dei polinomi a coefficienti in un campo* K. $L = I_2 + J_2 = (x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, y_1y_2, y_1y_3, y_2y_3)$. *Poniamo* $f_1 = x_1x_2, f_2 = x_1x_3, f_3 = x_2x_3, f_4 = y_1y_2, f_5 = y_1y_3, f_6 = y_2y_3$, *dove* $f_1 < f_2 < ... < f_6$ *rispetto all'ordinamento lessicografico e* $x_1 < x_2 < x_3 < y_1 < y_2 < y_3$. *Sia con*$G = \{g_{ij} = f_{ij}T_j - f_{ji}T_i | 1 \leq i < j \leq 6\}$. $f_1, ..., f_6$ *non è una s - successione perchè* J *non ammette una base di Groebner lineare per qualche ordinamento dei termini in* $R[T_1, ..., T_6]$ *con* $x_i < T_j, y_i < T_j$ *per tutti gli* i, j *e* $T_1 < ... < T_6$. *Infatti ci sono* S *- coppie* $S(g_{ij}, g_{hl})$ *di grado due che non hanno una espressione standard rispetto a* G *con resto zero :* $S(g_{13}, g_{24}) = \frac{f_{13}f_{42}}{[f_{13},f_{24}]}T_2T_3 - \frac{f_{24}f_{31}}{[f_{13},f_{24}]}T_1T_4 = y_1y_2T_2T_3 - x_3^2T_1T_4$. *Non esiste alcun* $g_{ij} \in G$ *il cui termine iniziale divide un termine di* $S(g_{13}, g_{24})$.

5.2 Ideali annullatori di alcune classi di ideali di prodotti misti

Nel presente paragrafo si focalizza l'attenzione su alcune classi di ideali di prodotti misti non generati da una s - successione. Sia $S = K[x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_n]$. *Nel presente paragrafo consideriamo gli ideali annullatori di alcune classi di ideali di prodotti misti.*

Teorema 5.7 *Siano* $I_k \subset K[x_1, ..., x_n]$ *e* $J_k \subset K[y_1, ..., y_n]$ *ideali k- Veronese square - free. Sia* $K = I_k + J_k \subset k[x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n]$. *Siano* $I_k^{(i)}, i = 1, ..., \binom{n}{2}$ *gli ideali annullatori di* I_k *e* $J_k^j, j = 1, ..., \binom{n}{2}$ *gli ideali annullatori di* J_k. *Allora gli ideali annullatori di* K *sono:* $K^i, i = 1, ..., \binom{n}{2}, \binom{n}{2} + 1, ..., \binom{n}{2} + \binom{n}{2}$, *dato da*

$K^{(i)} = I_k^{(i)}$ *for* $i = 1, ..., \binom{n}{2}$
$K^{(i)} = (I_k, J_k^{(i)})$ *for* $i = \binom{n}{2} + 1, ..., \binom{n}{2} + \binom{n}{2}$
Prova *Si consideri la successione di monomi che generano* $K = I_k + J_k$, $f_1, f_2, ..., f_{\binom{n}{2}}, g_1, g_2, ..., g_{\binom{n}{2}}$ *dove ogni* $f_i = x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_k}$ *e* $g_j = y_{j_1} y_{j_2} ... y_{j_k}$.
Gli ideali annullatori della successione $f_1, f_2, ..., f_{\binom{n}{2}}$ *sono gli ideali annullatori di* I_k.
Consideriamo ora:
$K^{(\binom{n}{2}+1)} = (f_1, f_2, ..., f_{\binom{n}{2}}) : g_1 = (f_1, f_2, ..., f_{\binom{n}{2}}) = I_k$
e $K^{(\binom{n}{2}+2)} = (f_1, f_2, ..., f_{\binom{n}{2}}, g_1) : g_2 = (f_1, f_2, ..., f_{\binom{n}{2}}, g_1 : g_2) = (I_k, J_k^1)$.
Allo stesso modo $K^{(\binom{n}{2}+2)} = (f_1, f_2, ..., f_{\binom{n}{2}}, g_1, g_2) : g_3 = (I_k, J_k^2)$, *e in generale otteniamo l'asserto.*

Esempio 5.8 *Sia* $R = K[x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3]$.
Sia $L = I_2 + J_2 = (x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, y_1y_2, y_1y_3, y_2y_3)$.
$I_2^{(1)} = (0), I_2^{(2)} = (x_2), I_2^{(3)} = (x_1), I_2^{(4)} = I_2, I_2^{(5)} = (I_2, y_2), I_2^{(6)} = (I_2, y_1)$.

Teorema 5.9 *Siano $I_k \subset K[x_1, ..., x_n]$ e $J_k \subset k[y_1, ..., y_n]$ gli ideali k - Veronese square - free.*
Sia $I_k^{(i)}, i = 1, ..., \binom{n}{k}, 1 \leq k \leq n$, l'ideale annullatore di I_k.
Consideriamo $J_1 \subset k[y_1, ..., y_n], J_1 = (y_1, ..., y_n)$. Allora gli $n\binom{n}{k}$ ideali annullatori di $K = I_kJ_1 \subset k[x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n]$ sono:

1. $K^{(j)} = I_k^{(j)}$, $1 \leq j \leq \binom{n}{k}$

2. $K^{(j)} = (y_1 I_k^{(i)})$, $\binom{n}{k} \leq j \leq 2\binom{n}{k}$, $i = j - \binom{n}{k}$

3. $K^{(j)} = (y_1, y_2, I_k^{(i)})$ $2\binom{n}{k} + 1 \leq j \leq 3\binom{n}{k}$, $i = j - 2\binom{n}{k}$
   ....

4. $K^{(j)} = (y_1, y_2, ..., y_{n-1}, I_k^{(i)}), (n-1)\binom{n}{k} + 1 \leq j \leq n\binom{n}{k}$, $i = j - (n-1)\binom{n}{k}$

Prova. *Gli ideali annullatori di J_1 sono:*
$J_1^{(1)} = (0), J_1^{(2)} = y_1 : y_2 = (y_1), ..., J_1^{(n)} = (y_1, ..., y_{n-1}) : (y_n) = (y_1, ..., y_{n-1})$,
$J_1^{(i)} = (y_1, .., y_{i-1})$, *for* $i = 1, ..., n$, *and* $J_1^{(1)} = (0)$.
Consideriamo la successione di monomi che generano K, con ordinamento lessicografico e con ordinamento sulle variabili dato da $x_1 > x_2 > ... > x_n > y_1 > ... > y_n$,
$x_1x_2y_1, x_1x_3y_1, ..., x_1x_{n-1}y_1, x_1x_2y_2, ..., x_{n-1}x_ny_n$ *in number of* $n\binom{n}{k}$.
Scriviamo
$K = I_ky_1 + I_ky_2 + ... + I_ky_n$
Per due monomi di I_ky_1, abbiamo $x_ix_ky_1 : x_lx_my_1 = x_ix_k : x_lx_m$.
Allora gli ideali annullatori di I_ky_1 sono gli ideali annullatori di I_k. Consideriamo ora $I_ky_1 : x_ix_ky_2, x_ix_k \in I_k$. Abbiamo $I_ky_1 : x_ix_ky_2 = (y_1)$,poichè ogni monomio $y_1y_2x_ix_k \in I_ky_1$. Inoltre $(I_ky_1, x_ix_ky_2) : x_jx_ly_2 = (y_1, x_ix_k : x_jx_l) = (y_1, I_k^{(t)})$, per qualche t, $2 \leq t \leq \binom{n}{2}$. E così via, otteniamo che gli ideali annullatori di K, sono:
$K^{(j)} = I_k^{(j)}, j = 1, ..., \binom{n}{k}$ *e*
$K^{(j)} = (y_1, I_k^{(i)}), \binom{n}{k} \leq j \leq 2\binom{n}{k}, i = j - \binom{n}{k}$
$K^{(j)} = (y_1, y_2, I_k^{(i)})2\binom{n}{k} + 1 \leq j \leq 3\binom{n}{k}, i = j - 2\binom{n}{k}$ ....

$K^{(j)} = (y_1, y_2, ..., y_{n-1}, I_k^{(i)}), (n-1)\binom{n}{k} + 1 \leq j \leq n\binom{n}{k}, i = j - (n-1)\binom{n}{k}$

Esempio 5.10 $K = I_2 J_1$ $n = 3$

$x_1x_2y_1, x_1x_3y_1, x_2x_3y_1, x_1x_2y_2, x_1x_3y_2, x_2x_3y_2, x_1x_2y_3, x_1x_3y_3, x_2x_3y_3$

Gli ideali annullatori sono:

$K^{(1)} = (0) : x_1x_2y_1 = (0) = I_2^{(1)}$

$K^{(2)} = x_1x_2y_1 : x_1x_3y_1 = (x_2) = I_2^{(2)}$

$K^{(3)} = (x_1x_2y_1, x_1x_3y_1) : x_2x_3y_1 = (x_2) = I_2^{(3)}$

$K^{(4)} = (x_1x_2y_1, x_1x_3y_1, x_2x_3y_1) : x_1x_2y_2 = (y_1) = (y_1, I_2^{(1)})$

$K^{(5)} = (x_1x_2y_1, x_1x_3y_1, x_2x_3y_1, x_1x_2y_2) : x_1x_3y_2 = (y_1, x_2) = (y_1, I_2^{(2)})$

$K^{(6)} = (x_1x_2y_1, x_1x_3y_1, x_2x_3y_1, x_1x_2y_2, x_1x_3y_2) : x_2x_3y_2 = (y_1, x_1) = (y_1, I_2^{(3)})$

$K^{(7)} = (x_1x_2y_1, x_1x_3y_1, x_2x_3y_1, x_1x_2y_2, x_1x_3y_2, x_2x_3y_2) : x_1x_2y_3 =$
$(y_1, y_2) = (y_1, y_2, I_2^{(1)})$

$K^{(8)} = (x_1x_2y_1, x_1x_3y_1, x_2x_3y_1, x_1x_2y_2, x_1x_3y_2, x_2x_3y_2, x_1x_2y_3) : x_1x_3y_3 =$
$(y_1, y_2, x_2) = (y_1, y_2, I_2^{(2)})$

$K^{(9)} = (x_1x_2y_1, x_1x_3y_1, x_2x_3y_1, x_1x_2y_2, x_1x_3y_2, x_2x_3y_2, x_1x_2y_3, x_1x_3y_3) : x_2x_3y_3 =$
$(y_1, y_2, x_1) = (y_1, y_2, I_2^{(3)})$

Esempio 5.11 $K = I_2 J_1$ $n = 4$

$x_1x_2y_1, x_1x_3y_1, x_1x_4y_1, x_2x_3y_1, x_2x_4y_1, x_3x_4y_1,$

$x_1x_2y_2, x_1x_3y_2, x_1x_4y_2, x_2x_3y_2, x_2x_4y_2, x_3x_4y_2,$

$x_1x_2y_3, x_1x_3y_3, x_1x_4y_3, x_2x_3y_3, x_2x_4y_3, x_3x_4y_3,$

$x_1x_2y_4, x_1x_3y_4, x_1x_4y_4, x_2x_3y_4, x_2x_4y_4, x_3x_4y_4$

$K^{(1)} = (0) : x_1x_2y_1 = (0) = I_2^{(1)}$

$K^{(2)} = (x_2) = I_2^{(2)}$

$K^{(3)} == (x_2, x_3) = I_2^{(3)}$

$K^{(4)} = (x_1, x_1x_4) = (x_1) = I_2^{(4)}$

$K^{(5)} = (x_1, x_3) = I_2^{(5)}$

$K^{(6)} = (x_1x_2, x_1, x_1, x_2, x_2) = (x_1, x_2)$

$K^{(7)} = (y_1, x_3y_1, x_4y_1, x_3y_1, x_4y_1, x_3x_4y_1) = (y_1) = (y_1, I_2^{(1)})$

$K^{(8)} = (x_2y_1, y_1, x_4y_1, x_2y_1, x_2x_4y_1, x_4y_1, x_2) = (y_1, x_2) = (y_1, I_2^{(2)})$

$K^{(9)} = (x_2y_1, x_3y_1, y_1, x_2x_3y_1, x_2y_1, x_3y_1, x_2, x_3) = (y_1, x_2, x_3) = (y_1, I_2^{(3)})$

$K^{(10)} = (x_1y_1, x_1y_1, x_1x_4y_1, y_1, x_4y_1, x_4y_1, x_1, x_1, x_1x_4) =$
$(y_1, x_1) = (y_1, I_2^{(4)})$

$K^{(11)} = (y_1, x_1, x_3) = (y_1, I_2^{(5)})$

$K^{(12)} = (y_1, x_1, x_2) = (y_1, I_2^{(6)})$

$K^{(13)} = (y_1, y_2) = (y_1, y_2, I_2^{(1)})$

$K^{(14)} = (y_1, y_2, x_2) = (y_1, y_2, I_2^{(2)})$
$K^{(15)} = (y_1, y_2, x_2, x_3) = (y_1, y_2, I_2^{(3)})$
$K^{(16)} = (y_1, y_2, x_3) = (y_1, y_2, x_1) = (y_1, y_2, I_2^{(4)})$
$K^{(17)} = (y_1, y_2, x_1, x_3) = (y_1, y_2, I_2^{(5)})$
$K^{(18)} = (y_1, y_2, x_1, x_2) = (y_1, y_2, I_2^{(6)})$
$K^{(19)} = (y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2, y_3, I_2^{(1)})$
$K^{(20)} = (y_1, y_2, y_3, x_2) = (y_1, y_2, y_3, I_2^{(2)})$
$K^{(21)} = (y_1, y_2, y_3, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3, I_2^{(3)})$
$K^{(22)} = (y_1, y_2, y_3, x_1) = (y_1, y_2, y_3, I_2^{(4)})$
$K^{(23)} = (y_1, y_2, y_3, x_1, x_3) = (y_1, y_2, y_3, I_2^{(5)})$
$K^{(24)} = (y_1, y_2, y_3, x_1, x_2) = (y_1, y_2, y_3, I_2^{(6)})$

Teorema 5.12 *Sia I_k l'ideale k -esimo Veronese square - free ideal di $K[x_1, ..., x_n]$ e J_k l'ideale k-esimo Veronese square - free di $K[y_1, ..., y_n]$. Siano $I_k^{(i)}, i = 1, ..., \binom{n}{k}$ gli ideali annullatori della successione di monomi che generano $I_k^{(i)}$ e $J_k^{(i)}, i = 1, ..., \binom{n}{k}$ gli ideali annullatori della successione di monomi che generano J_k. Poniamo $H = I_k J_1$ e siano $H^{(i)}, i = 1, ...,$ gli ideali annullatori di H.*
Poniamo $K = I_k J_1 + I_1 J_k$ e siano $K^{(i)}, i = 1, ..., n$ gli ideali annullatori di K.
Allora abbiamo:

1. $K^{(i)} = H^{(i)}$, *for* $i = 1, ..., n\binom{n}{k}$

2. $K^{(n\binom{n}{k}+h)} = (I_{k-1}^{[1]}, J_k^{(h)})$ *for* $h = 1, ..., 2\binom{n}{k}$, *essendo* $I_{k-1}^{[h]} \subset K[x_1, ..., x_{\widehat{h}}, ..., x_n], h = 1, ..., \binom{n}{k}$ *il* $(k-1)$ *- esimo ideale di Veronese square free di* $K[x_1, ..., x_{\widehat{h}}, ..., x_n]$

3. $K^{(n\binom{n}{k}+\binom{n}{k}+h)} = K^{((n+1)\binom{n}{k}+h)} = (I_{k-1}^{[2]}, J_k^{(h)}), h = 1, ..., \binom{n}{k}$

4. $K^{((n+2)\binom{n}{k}+h)} = (I_{k-1}^{[3]}, J_k^{(h)}), h = 1, ..., \binom{n}{k}$

   ....

5. $K^{((n+n-1)\binom{n}{k}+h)} = (I_{k-1}^{[n-1]}, J_k^{(h)}), h = 1, ..., \binom{n}{k}$

Prova. *È ovvio che fino a $n\binom{n}{k}$, abbiamo come ideali annullatori di K, gli ideali annullatori di H, $H^{(i)} \subset K[x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_n]$. Consideriamo ora il $n\binom{n}{k} + 1$ - esimo ideale annullatore di K.*
Abbiamo:

$K^{(n\binom{n}{k}+1)} = (I_k J_1 : x_1 y_1 y_2 ... y_k = (\widehat{x}_1 x_{i_2} x_{i_3} ... x_{i_k}, 1 \leq i_2 \leq i_k \leq n) =$
$(I_{k-1}^{[1]}) = (I_{k-1}^{[1]}, \widehat{y}_1).$
Inoltre:
$K^{(n\binom{n}{k}+2)} = (I_k J_1, x_1 y_1 y_2 ... y_k) : x_1 y_1 y_3 ... y_k = (I_{k-1}^{[1]}, y_1 y_2 ... y_k : y_1 y_3 ... y_k) =$
$(I_{k-1}^1, J_k^2) = (I_{k-1}^1, \widehat{y}_1, y_2)$
...
E così via, fino al $n\binom{n}{k} + \binom{n}{k}$ *- esimo ideale annullatore*
Otteniamo:
$K^{(n\binom{n}{k}+h)} = (I_{k-1}^{[1]}, J_h^i)$, *per* $i = 1, ..., \binom{n}{k}$
Seguendo la stessa procedura otteniamo:
$K^{(n\binom{n}{k}+\binom{n}{k}+h)} = K^{((n+1)\binom{n}{k}+h)} = (I_{k-1}^{[2]}, J_k^{(h)}), h = 1, ..., \binom{n}{k}$
$K^{((n+2)\binom{n}{k}+h)} = (I_{k-1}^{[3]}, J_k^{(h)}), h = 1, ..., \binom{n}{k}$
Segue l'asserto.

Esempio 5.13 *Per* $n = 3$,

$$K = I_3 J_1 + I_1 J_3 = (x_1 x_2 x_3 y_1, x_1 x_2 x_3 y_2, x_1 x_2 x_3 y_3, x_1 y_1 y_2 y_3, x_2 y_1 y_2 y_3, x_3 y_1 y_2 y_3)$$

$K^{(1)} = 0 : x_1 x_2 x_3 y_1 = (0)$
$K^{(2)} = (y_1), K^{(3)} = (y_1, y_2), K^{(4)} = (x_1 x_2 x_3 y_1, x_1 x_2 x_3 y_2, x_1 x_2 x_3 y_3) : x_1 y_1 y_2 y_3 =$
$(x_2, x_3) = (I_2^{[1]}, I_2^{(1)}),\ (x_2, x_3) \subset k[x_2, x_3], I_2^{[1]} = (x_2, x_3),\ I_2^{(1)} = (0)$
$K^{(5)} = (x_1 x_2 x_3 y_1, x_1 x_2 x_3 y_2, x_1 x_2 x_3 y_3, x_1 y_1 y_2 y_3) : x_2 y_1 y_2 y_3 =$
$(x_1 x_3, x_1) = (I_2^{[2]}, I_2^{(3)}) = (x_1)$
$K^{(6)} = (x_1 x_2 x_3 y_1, x_1 x_2 x_3 y_2, x_1 x_2 x_3 y_3, x_1 y_1 y_2 y_3, x_2 y_1 y_2 y_3) : x_3 y_1 y_2 y_3 =$
$(x_1 x_2, x_2) = (I_2^{[3]}, I_2^{(2)}) = (x_2)$
$dim(k[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3]/(y_1, y_2, x_1, x_2) + 6 = dim(k[x_3, y_3] + 6) = 2 + 6 = 8$
D'altra parte l'ideale delle relazioni di $Sym(I_3 J_1 + I_1 J_3)$ *è:*
$J = (y_2 T_1 - y_1 T_2, y_3 T_1 - y_1 T_3, y_2 T_3 - y_3 T_2, x_2 x_3 T_4 - y_2 y_3 T_1, x_1 x_3 T_5 - y_2 y_3 T_1,$
$x_1 x_2 T_6 - y_2 y_3 T_1, x_1 x_2 T_6 - y_1 y_3 T_2, x_2 x_3 T_4 - y_1 y_2 T_3, x_1 x_3 T_5 - y_1 y_2 T_3,$
$x_1 x_2 T_6 - y_1 y_2 T_3, x_2 T_4 - x_1 T_5, x_3 T_4 - x_1 T_6, x_3 T_5 - x_2 T_6)) = (g_1, g_2, ..., g_{13})$
Possiamo verificare facilmente che:
$g_4 = x_2(x_3 T_4 - x_1 T_6) + x_2 x_1 T_6 - y_2(y_3 T_1 - y_1 T_3) - y_1 y_2 T_3 =$
$x_2 g_{12} - y_2 g_2 + g_{10}$
$g_5 = x_1 g_{13} - y_2 g_2 + g_{10}$
$g_6 = -x_1 g_{13} - y_2 g_2 + g_9$
$g_{10} = -x_1 g_{13} + y_2 g_2 + g_5$

$htJ \geq 6$
$dim(k[x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3][T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6]/J) \leq 6, 12-6 = 6$, *put* $S = K[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3]$
e $\underline{T} = (T_1, T_2, ..., T_6)$
$dimS[\underline{T}]/J = dimS[\underline{T}]/in_< J = dimS[\underline{T}]/(J_l + K) = dimS[I]/J_6 = 6$
$g_4 = x_2(x_3T_4 - x_1T_6) + x_2x_1T_6 - y_2(y_3T_1 - y_1T_3) - y_1y_2T_3 =$
$x_2g_{14} - y_2g_2 + g_{12}$

L'esempio precedente è meno complicato dell'esempio che segue, poichè, per n=3, I_3 *è generato dal singolo monomio* $x_1x_2x_3$.

Esempio 5.14 *Sia* $R = K[x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_m]$ *anello dei polinomi su un campo K e sia* $K = I_2J_1 + I_1J_2 \subset K[x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n]$, $I_1 = (x_1, ..., x_n)$. *Per n=3 abbiamo:*
Prova. *Considero il primo ideale di K,* $H = I_2J_1$. *Gli ideali di* I_2J_1 *si ricavano dal teorema precedente e sono in numero di* $n\binom{n}{2}$.
Pertanto scrivendo $I_1J_2 = J_2I_1 = J_2x_1 + ... + J_2x_n$, *dobbiamo procedere a trovare gli ideali annullatori di* $I_2J_1 + I_1J_2$.

Teorema 5.15 *Sia* $R = K[x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_n]$ *anello dei polinomi su un campo K e sia* $L = I_2 + I_1J_1 \subset K[x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n]$.
Prova. *Gli ideali annullatori di* I_2 *sono noti:* $I_2^{(1)}, I_2^{(2)}, ..., I_{\binom{n}{2}}^{(\binom{n}{2})}$. *D'altra parte*

$$I_1J_1 = (x_1y_1, ..., x_1y_n, x_2y_1, ..., x_2y_n, ..., x_ny_1, ..., x_ny_n) \text{ (} nxn = n^2 \text{ generatori).}$$

Pertanto il primo ideale annullatore coinvolgente le variabili y_i *è :*
$K^{(\binom{n}{2}+1)} = I_2 : x_1y_1 = (x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n, x_2x_3, ..., x_2x_n, ..., x_{n-2}x_{n-1}, x_{n-2}x_n, x_{n-1}x_n) =$
$(x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n)$.
$K^{(\binom{n}{2}+2)} = (I_2, x_1y_1) : (x_1y_2) = (y_1, x_2, ..., x_n)$.
...
$K^{(\binom{n}{2}+n)} = (y_1, ..., y_{n-1}, x_1, x_2, ..., x_{n-1})$. ... *E cosi̋ via.*
Tutti gli ideali annullatori considerati sono ideali colon per monomi contenenti le variabili x_1 *e sono in numero di n. Consideriamo gli ideali colon per monomi contenenti la variabile* x_2, *anch'essi sono in numero di n.*

Teorema 5.16 *Sia* I_k *il k - esimo ideale di Veronese di* $K[x_1, ..., x_n]$ *e* J_k *sia il k - esimo ideale di Veronese di* $K[y_1, ..., y_n]$. *Siano* $I_k^{(i)}, i = 1, ..., \binom{n}{k}$ *gli ideali annullatori di* I_k *e* $J_k^{(j)}, j = 1, ..., \binom{n}{k}$ *gli ideali annullatori di* J_k. *Sia* $K = I_kJ_k \subset K[x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_n]$. *Allora gli ideali annullatori di K sono in numero di* $\binom{n}{k}\binom{n}{k}$ *e sono:*

1. $K^{(i)} = I_k^{(i)} = (J_k^{(1)}, I_k^{(i)})$, *for* $i = 1, ..., \binom{n}{k}$, $J_k^{(1)} = (0)$;

2. $K^{(i)} = (J_k^{(2)}, I_k^{(i-\binom{n}{k}-1)})$, *for* $i = \binom{n}{k} + 1, ..., 2\binom{n}{k}$;

3. $K^{(i)} = (J_k^{(3)}, I_k^{(i-2\binom{n}{k}-1)})$, *for* $i = 2\binom{n}{k} + 1, ..., 3\binom{n}{k}$;

   .

   .

   .

4. $K^{(i)} = (J_k^{\binom{n}{k}}, I_k^{(i-\binom{n}{k})})$, *for* $i = (\binom{n}{k} - 1)\binom{n}{k} + 1, ..., \binom{n}{k}\binom{n}{k}$;

Prova *Siano* $f_1, ..., f_{\binom{n}{k}}$ *i generatori monomiali di* J_k*, ordinati con ordinamento lessicografico rispetto all'ordinamento sulle variabili dato da* $y_1 > y_2 > ... > y_n$*,*
Scriviamo:
$K = I_kJ_k = I_kf_1 + I_kf_2 + ... + I_kf_{\binom{n}{k}}$
Consideriamo gli ideali annullatori dell'ideale I_kf_1*. Per ogni coppia di monomi di* I_kf_1 *si ha* $m_if_1 : m_jf_1 = (m_i : m_j)$*, con* $m_i, m_j \in I_k$*. Si deduce che* I_kf_1 *ha* $\binom{n}{k}$ *ideali annullatori dati da* $\binom{n}{2}$ *ideali annullatori di* I_k*,* $I_k^{(i)}, i = 1, ..., \binom{n}{k}$*.*
Consideriamo ora $I_kf_1 : m_1f_2$*, with* $m_1 \in I_k$*.*
Risulta
$K^{(\binom{n}{k}+1)} = I_kf_1 : m_1f_2 = (f_1) = (f_1 : f_2) = J_k^{(2)} = (J_k^{(2)}, I_k^{(1)} = (0))$
Se continuiamo nel calcolo otteniamo:
$K^{(\binom{n}{k}+2)} = (I_kf_1, m_1f_2) : (m_2f_2) = ((f_1 : f_2), (m_1 : m_2))$
$K^{(\binom{n}{k}+3)} = (I_kf_1, m_1f_2, m_2f_2) : (m_3f_2) = ((f_1 : f_2), (m_1, m_2) : m_3) = (J_k^{(2)}, I_k^{(2)})$
$K^{(\binom{n}{k}+4)} = (I_kf_1, m_1f_2, m_2f_2, m_3f_2) : (m_4f_2) = ((f_1 : f_2), (m_1, m_2, m_3) : m_4) = (J_k^{(2)}, I_k^{(3)})$ *In generale otteniamo:*
$K^{(i)} = (J_k^{(2)}, I_k^{(i-\binom{n}{k}-1)})$ *for* $i = \binom{n}{k} + 1, ..., 2\binom{n}{k}$

Esempio 5.17 *Per* $n = 2$*,* $K = I_1J_1 + J_2$*,* $n = 2, k[x_1, x_2; y_1, y_2]$
L'ideale delle relazioni è:
$K = I_1J_1 + J_2 = (x_1y_1, x_2y_1, x_1y_2, x_2y_2, y_1y_2)$
J è generato da:
$x_1T_2 - x_2T_1, y_2T_1 - y_1T_3, y_2x_2T_1 - y_1x_2T_4, y_2T_1 - x_1T_5, x_1y_2T_2 - x_2y_1T_3,$
$y_2T_2 - y_1T_4, y_2T_2 - x_2T_5, x_2T_3 - x_1T_4, y_1T_3 - x_1T_5, y_1T_4, y_1T_3 - x_1T_4, y_1T_3 - x_1T_5,$
$y_1T_4 - x_2T_5$

D'altra parte è facile verificare che:
$g_3 = y_2(x_2T_1 - x_1T_2) + x_1y_2T_2 - y_1x_1T_4 = y_2(-g_1) + x_1(y_2T_2 - y_1T_4) = y_2(-g_1) + x_1.g_6$
$g_5 = x_1(y_2T_2 - y_1T_4) + x_1y_1T_4 - x_2y_1T_3 = x_1.g_6 + y_1(x_1T_4 - x_2T_3) = x_1g_6 + y_1(-g_8)$
$J = (g_1, g_2, g_4, g_7, g_8, g_{10})$
$g_6 = y_2T_2 - x_2T_5 + x_2T_5 - y_1T_4 = g_7 + (x_2T_5 - y_1T_4) = g_7 - g_{10}$
$g_9 = y_1T_3 - y_2T_1 + y_2T_1 - x_1T_5 = -g_2 + g_4$
Per cui, avremo: $J = (\underline{x_1T_2} - x_2T_1, y_2T_1 - \underline{y_1T_3}, y_2T_1 - \underline{x_1T_5}, y_2T_2 - \underline{x_2T_5}, x_2T_3 - \underline{x_1T_4}, y_1T_4 - \underline{x_2T_5})$

Esempio 5.18 $K = I_2J_1 + J_3, n = 3$
$x_1x_2y_1, x_1x_3y_1, x_2x_3y_1, x_1x_2y_2, x_1x_3y_2, x_2x_3y_2, x_1x_2y_3, x_1x_3y_3, x_2x_3y_3, y_1y_2y_3$
$(I_2J_1) : y_1y_2y_3 = I_2$
$n\binom{n}{2} + 1 = 3.3 + 1 = 10$
Poichè $S = K[x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3]$*, e considero* $K^* = K^{(1)} + K^{(2)} + ... + K^{(10)}$*, abbiamo:*
$S/K^* = k[x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3]/(x_1, x_2, y_1, y_2, I_2) = k[x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3]/(x_1, x_2, y_1, y_2) = k[x_3, y_3]$
$dimS/K^* = dim(k[x_3, y_3] + 10 = 2 + 10 = 12$
Quanto vale in effetti la $dimSym_S(I_2J_1 + J_3)$*?*
Osserviamo che le relazioni generatrici dell'ideale delle relazioni dell'algebra simmetrica sono in numero elevato. Ne scriviamo alcune:
$x_2T_2 - x_3T_1, x_1T_3 - x_3T_1, y_2T_1 - y_1T_4, x_2y_1T_5 - x_3y_2T_1, x_1y_1T_6 - x_3y_2T_1, y_1T_7 - y_3T_1, x_3y_3T_1 - x_2y_1T_8, x_3y_3T_1 - x_2y_1T_8, x_3y_3T_1 - x_1y_1T_9, x_1x_2T_{10} - y_2y_3T_1, x_2x_3T_{10} - y_1y_2T_9, ...$

6 Ideali $\underline{\mathbf{T}}$ - lineari provenienti dall'algebra simmetrica di un ideale di prodotti misti

6.1 Ideali $\underline{T}$ - lineari

Sia R un anello noetheriano commutativo unitario e $R[T_1, ..., T_t]$ un anello noetheriano.

Definizione 6.1 *Sia l'ideale $I_l = (H_1T_1, ..., H_tT_t) \subset R[T_1, ..., T_t]$, dove $H_1, ..., H_t$ sono ideali di R. Noi diciamo che I è lineare nelle variabili $T_1, ..., T_t$ o $\underline{T}$ - Lineare. Per gli ideali $\underline{T}$ - lineari noi abbiamo:*

Proposizione 6.2 *Sia $I_l = (H_1T_1, ..., H_tT_t)$ un ideale $\underline{T}$ - Lineare di $R[T_1, ..., T_t]$. Allora:*

$$I_l = \bigcap_{1 \leq r \leq t}(H_{i_1} + ... + H_{i_r}, T_1, ..., \hat{T}_{i_1}, ..., \hat{T}_{i_r}, ..., T_t)$$

con $1 \leq i_1 \leq ... \leq i_r \leq t$.

Prova. *Per ogni ideale L di $R[T_1, ..., T_t]$, usiamo denotare con L_m la sua componente omogenea di grado m. Allora, per ogni $m \geq 1$,*

$$(H_1T_1, ..., H_tT_t)_m = \sum_{1 \leq j_1 \leq ... \leq j_s \leq t}^{\alpha_1 + ... + \alpha_s = m}(H_{j_1} + ... + H_{j_s})T_{j_1}^{\alpha_1} ... T_{j_s}^{\alpha_s}$$

e per ogni $0 \leq r \leq t, 1 \leq i_1 \leq ... \leq i_r \leq t$,

$$(H_{i_1} + ... + H_{i_r}, T_1, ..., \hat{T}_{i_1}, ..., \hat{T}_{i_r}, ..., T_t)_m$$

$$= \sum_{\{j_1, ..., j_s\} \notin \subseteq \{i_1, ..., i_r\}}^{\alpha_1 + ... + \alpha_s = m, 1 \leq j_1 \leq ... \leq j_s \leq t} RT_{j_1}^{\alpha_1} ... T_{j_s}^{\alpha_s} +$$

$$\sum_{\{j_1, ..., j_s\} \subseteq \{i_1, ..., i_r\}}^{\alpha_1 + ... + \alpha_s = m, 1 \leq j_1 \leq ... \leq j_s \leq t}(H_{j_1} + ... + H_{j_s})T_{j_1}^{\alpha_1} ... T_{j_s}^{\alpha_s}$$

D'altra parte, si ha:

$$\bigcap_{1 \leq i_1 < ... < i_s \leq t}^{0 \leq r \leq t}(H_{i_1} + ... + H_{i_r}, T_1, ..., \hat{T}_{i_1}, ..., \hat{T}_{i_r}, ..., T_t)_m$$

$$= \sum_{1 \leq j_1 \leq ... \leq j_s \leq t}^{\alpha_1 + ... + \alpha_s = m}(\bigcap_{\{j_1, ..., j_s\} \subseteq \{i_1, ..., i_r\}}^{0 \leq i_1 < ... < i_r \leq t}(H_{j_1} + ... + H_{j_s}))T_{j_1}^{\alpha_1} ... T_{j_s}^{\alpha_s}$$

$$= \sum_{1 \leq j_1 \leq ... \leq j_s \leq t}^{\alpha_1 + ... + \alpha_s = m}(H_{j_1} + ... + H_{j_s})T_{j_1}^{\alpha_1} ... T_{j_s}^{\alpha_s},$$

come volevasi dimostrare.

Proposizione 6.3 *Sia* $I_l = (H_1T_1, ..., H_tT_t)$ *un ideale* $\underline{T}$*- Lineare di* $R[T_1, ..., T_t]$. *Allora:*

$$d = dim(R[T_1, ..., T_t]/I_l) = max_{1 \leq r \leq t} \{dim(R/(H_{i_1} + ... + H_{i_r}) + r\}$$

con $1 \leq i_1 \leq ... \leq i_r \leq t$.
Prova. *Dalla struttura di* I_l , r *è la differenza tra il numero totale* t *di variabili* T_i *e il numero* t - r *di variabili* T_j *che compaiono negli ideali, addendi di* I_l. *D'altra parte, sia* $H = \sum(H_{i_1} + ... + H_{i_r}) = \sum Q_{j_1} \cup ... \cup Q_{j_r}$, *essendo* $Q_{j_1} \cup ... \cup Q_{j_r}$, *la decomposizione primaria di* $H_{i_1} + ... + H_{i_r}$. *L'asserto segue dalla definizione di altezza di un ideale e di dimensione di Krull di un anello noetheriano commutativo unitario.*

Siamo interessati allo studio di ideali del tipo $\underline{T}$*- lineari, provenienti dall` ideale iniziale* $in_<(J)$, *essendo* $J$ *l` ideale delle relazioni dell` algebra simmetrica di un ideale di prodotti misti* $L \subset K[x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n]$.*Precisamente vogliamo trovare gli invarianti o loro bounds dell'algebra* $R[x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_m]/J_l$, *essendo* J_l *la parte lineare di* $in_<(J)$.
Le seguenti disuguaglianze sono necessarie nel seguito per lo studio della profondità e della regolarità di $R[T_1, ..., T_t]/I_l$, *supposto che* $R = K[x_1, ..., x_n]$ *sia graduata standard.*

Teorema 6.4 *Sia* R *un anello Noetheriano,* $I \subset R$ *un ideale, e* $0 \to U \to M \to N \to 0$ *una successione esatta di* R*- moduli finitamente generati su* R. *Allora si hanno le seguenti disuguaglianze:*

1. $grade(I, M) \geq min \{grade(I, U), grade(I, N)\}$;
2. $grade(I, U) \geq min \{grade(I, M), grade(I, N) + 1\}$;
3. $grade(I, N) \geq min \{grade(I, U) - 1, grade(I, M)\}$;

Prova. *Vedasi [3],Prop. 1.2.9.*

Teorema 6.5 *Sia* $0 \to U \to M \to N \to 0$ *una successione esatta di moduli graduati su* $R = K[x_1, ..., x_n]$ *graduata standard. Allora si hanno le seguenti disuguaglianze:*

1. $reg(U) \leq max \{reg(M), reg(N) + 1\}$;

2. $reg(M) \leq max\{reg(U), reg(N)\}$;

3. $reg(N) \leq max\{reg(U) - 1, reg(M)\}$;

Prova. *Si deducono dalla risoluzione proiettiva minimale graduata dei moduli* U, M, N*. Sono provate in letteratura da diversi autori. Vedi ad esempio [27], Def.1.1. Allora ci sarà utile:*

Teorema 6.6 *Siano* I_1 *ed* I_2 *ideali di* R*,* $I_1 + I_2 \neq (1)$
$dimR/I_1 + I_2 \leq dimR/I_1$
$dimR/I_1 + I_2 \leq dimR/I_2$
Prova. *Vedi [35], Teorema 10.*

Proposizione 6.7 *Sia* $R = K[x_1, ..., x_n]$ *un anello di polinomi, e siano* $I_1 \subseteq ... \subseteq I_n$ *ideali graduati di* R*. Allora si ha:*

1. $regR[y_1, ..., y_n]/(I_1y_1, ..., I_ny_n) \leq max\{regI_i : i = 1, ..., n\}$,

2. $depthR[y_1, ..., y_n]/(I_1y_1, ..., I_ny_n) \geq min\{depthR/I_i + i : i = 0, 1, ..., n\}$.

Prova.
1. *Poniamo* $R_i = R[y_1, ..., y_i], S = R_n$ *e* $J_i = (I_1y_1, ..., I_iy_i)$*, e proviamo la disuguaglianza per la regolarità per induzione su* n*. Se* $n = 1$ *, consideriamo la successione esatta di* R *- Moduli*

$$0 \longrightarrow I_1R_1/J_1 \longrightarrow R_1/J_1 \longrightarrow R_1/I_1R_1 \longrightarrow 0$$

Dalla 1. del teorema 3.11. segue che:

$$regR_1/J_1 \leq max\{regI_1R_1/J_1, regR_1/I_1R_1\}.$$

Risulta: $I_1R_1/J_1 = I_1R[y_1]/I_1y_1 = I_1R + (I_1y_1)R[y_1]/I_1y_1 = I_1R = I_1$;
$R_1/I_1R_1 = R[y_1]/I_1R[y_1] \cong R/I_1[y_1]$
Ne segue che: $regR_1/J_1 = max\{regI_1, regR/I_1\} = regI_1$.
Ora assumiamo che $n > 1$*. Consideriamo le seguenti successioni esatte:*

i) $0 \longrightarrow I_nR_n/J_n \longrightarrow R_n/J_n \longrightarrow /I_nR_n \longrightarrow 0$

ii) $0 \longrightarrow I_nR_{n-1}/J_{n-1} \longrightarrow R_{n-1}/J_{n-1} \longrightarrow /I_nR_{n-1} \longrightarrow 0$,

Dall'ipotesi di induzione, e poichè $I_nR_n/J_n \cong I_nR_{n-1}/J_{n-1}$*, segue che*
$regR_n/J_n \leq max\{regI_nR_n/J_n, regR_n/I_nR_n\}$
D'altra parte $I_nR_n/J_n = I_nR[y_1,...,y_n]/(I_1y_1,...,I_ny_n) = I_nR[y_1,...,y_{n-1}]+I_nR[y_n]/(I_1y_1,...,I_ny_n)$
$\cong I_nR[y_n]/(I_1y_1,...,I_ny_n)$
Ne segue che :$regR_n/J_n \leq max\{regR_{n-1}/J_{n-1}, regR_{n-1}/I_nR_{n-1}+1, regR/I_n\}$
2. *Procedendo in maniera analoga per il calcolo della regolarità e utilizzando il teorema 1, segue l'asserto.*

Esempio 6.8 *Sia* $R = K[X_1, X_2, X_3; Y_1, Y_2, Y_3]$.
Sia $L = I_2 + J_2 = (X_1X_2, X_1X_3, X_2X_3, Y_1Y_2, Y_1Y_3, Y_2Y_3)$.
Poniamo:
$f_1 = X_1X_2, f_2 = X_1X_3, f_3 = X_2X_3, f_4 = Y_1Y_2, f_5 = Y_1Y_3, f_6 = Y_2Y_3$, *dove* $f_1 < ... < f_6$*, rispetto all` ordinamento lessicografico dei termini e* $X_1 < X_2 < X_3 < Y_1 < Y_2 < Y_3$.
$G = \{X_2T_2 - X_3T_1, X_1T_3 - X_3T_1, X_1X_2T_4 - Y_1Y_2T_1, X_1X_2T_5 - Y_1Y_3T_1,$
$X_1X_2T_6 - Y_2Y_3T_1, X_1T_3 - X_2T_2, X_1X_3T_5 - Y_1Y_3T_2, X_1X_3T_6 - Y_2Y_3T_2, X_2X_3T_4 - Y_1Y_2T_3, X_2X_3T_5 -$
$Y_1Y_3T_3, X_2X_3T_6 - Y_2Y_3T_3, Y_2T_5 - Y_3T_4, Y_1T_6 - Y_3T_4, Y_1T_6 - Y_2T_5$
è un insieme di generatori per J.
La base di Groebner di J è:

$$BG(J) = G \cup \{S(g_{13}, g_{24}), S(g_{13}, g_{25}), S(g_{13}, g_{26})\}$$

dove le tre S - coppie hanno le seguenti espressioni:
$S(g_{13}, g_{24}) = Y_1Y_2T_2T_3 - X_3^2T_1T_4$;
$S(g_{13}, g_{25}) = Y_1Y_2T_2T_3 - X_3^2T_1T_5$;
$S(g_{13}, g_{26}) = Y_1Y_2T_2T_3 - X_3^2T_1T_6$;
Gli ideali annullatori della successione $f_1, ..., f_6$ *sono:*
$I_1 = (0)$;
$I_2 = (X_1X_2) : (X_1X_3) = (X_2)$;
$I_3 = (X_1X_2, X_1X_3) : (X_2X_3) = (X_1)$;
$I_4 = (X_1X_2, X_1X_3, X_2X_3) : (Y_1Y_2) = I_2$;
$I_5 = (X_1X_2, X_1X_3, X_2X_3, Y_1Y_2) : (Y_1Y_3) = (I_2, Y_2)$;
$I_6 = (X_1X_2, X_1X_3, X_2X_3, Y_1Y_2, Y_1Y_3) : (Y_2Y_3) = (I_2, Y_1)$.
Inoltre $in_<(J) = J_l + J^*$*, con*

$$in_<(J) = (I_1T_1, I_2T_2, ..., I_6T_6, ...$$

$$J_l = (I_1T_1, I_2T_2, ..., I_6T_6)$$

$J_l = ((X_2)T_2, (X_1)T_3, (X_1X_2, X_1X_3, X_2X_3)T_4, (X_1X_2, X_1X_3, X_2X_3, Y_2)T_5, (X_1X_2, X_1X_3, X_2X_3, Y_1)T_6)$
, e $J^* = (X_3^2T_1T_4, X_3^2T_1T_5, X_3^2T_1T_6)$.
Da calcoli diretti, otteniamo:
$dim(Sym_R(L)) = depth(Sym_R(L)) = 7$
$dim(Sym_R(L)) < dimR[Y_1, Y_2, Y_3]/J_l$
$pd(Sym_R(L)) = 5.$
$R/I_1 = K[X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3]/(0) \cong K[X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3] = R$
$dimR/I_1 + 1 = 6 + 1 = 7$
$dimR/I_2 + 2 = dimK[X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3]/(X_2) + 2 =$
$dimK[X_1, X_3, Y_1, Y_2, Y_3] + 2 = 5 + 2 = 7$

$dimR/I_6 + 6 = dimK[X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3]/(I_2, Y_1) + 6 =$
$dimK[X_1, X_2, X_3, Y_2, Y_3]/I_2 + 6 =$
$dim(K[X_1, X_2, X_3]/I_2)[Y_2, Y_3] + 6 =$
$dimK[X_1, X_2, X_3]/I_2 + 2 + 6 =$
$dimK[X_1, X_2, X_3]/I_2 + 8 = 1 + 8 = 9.$
$dim(Sym_R(L)) < dimR[Y_1, Y_2, Y_3]/J_l = 9$

6.2 J_l e invarianti

Sia R un anello commutativo unitario e sia M un R - modulo finitamente generato $M = Rf_1 + ...Rf_n$. *Siano* $I_i = M_{I-1} : Rf_i, M_i = Rf_1 + ... + Rf_i, i \leq n$, *gli ideali annullatori di M,* $I_i \subset R$. *Consideriamo l'anello* $R[T_1, ..., T_n]$, *dove le* T_i *sono indeterminate e sia* $K = (I_1T_1, ..., I_nT_n) \subset R[T_1, ..., T_n]$ *l` ideale di* $R[T_1, ..., T_n]$ *generato nel grado 1 in* $T_1, ..., T_n$.

Definizione 6.9 *K sarà detto ideale lineare associato ad M. Se* $I_1 \subseteq I_2 \subseteq ... \subseteq I_n$, *K sarà detto ideale fortemente lineare associato ad M.*

Esempio 6.10 *Sia M come sopra e sia J l` ideale delle relazioni di* $Sim_R(M)$. *Supponiamo M generato da una s - successione. Allora* $K = in_<(J) = (I_1T_1, ..., I_nT_n)$ *è l'ideale lineare associato ad M.*

Esempio 6.11 *Sia* $L \subset R[T_1, ..., T_n]$, *un ideale generato da elementi di R che formano una successione regolare,* $L = (f_1, ..., f_n) \subset R$. *Allora L è generato da una s - successione forte, poichè le successioni regolari sono d - successioni.*

Risulta $0 : f_1 = 0, f_1 : f_2 = (f_1), (f_1, f_2) : f_3 = (f_1, f_2), ..., (f_1, ..., f_{i-1}) : f_i = (f_1, ..., f_{i-1})$.
L'ideale $K = ((f_1)T_2, (f_1, f_2)T_3, ..., (f_1, ..., f_{n-1})T_n)$ *è un ideale fortemente lineare. Infatti:*
$(0) \subset (f_1) \subset (f_1, f_2) \subset ... \subset (f_1, f_2, ..., f_{n-1})$

Osservazione 6.12 *Sia* $I \subset k[x_1, ..., x_n]$ *un ideale monomiale,* $I = (m_1, ..., m_t)$. *Allora gli ideali annullatori dell'ideale* I,I_i *sono ancora ideali monomiali,* $I_1 = (0), I_2, ..., I_t$. K *è un ideale di* $S = K[x_1, ..., x_n; T_1, ..., T_t]$, *ove* $K = (I_2T_2, I_3T_3, ..., I_nT_t)$ *ha una struttura particolarmente interessante per lo studio degli invarianti di* $R[T_1, ..., T_t]/K$, *soltanto in funzione degli invarianti di particolari quozienti dell` anello* R *mediante gli ideali annullatori che compaiono in* K. *I teoremi che seguono riguardano il calcolo degli invarianti di* $S/K : dim(S/K), e(S/K), depth(S/K), reg(S/K)$, *nei casi in cui* $L = I_k \subset K[x_1, ..., x_n]$, *cioè l'ideale di Veronese square - free ed* L *è un ideale di prodotti misti,* $K[x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_m]$, *appartenente alle classi considerate nel capitolo 5.*

Teorema 6.13 *Sia* $R = K[x_1, ..., x_n]$, $L \subset R$, $L = I_k = k$ *- esimo ideale di Veronese square - free. Siano* $I_k^{(1)}, I_k^{(2)}, ..., I_k^{\binom{n}{k}}$ *gli ideali annullatori di* I_k. *Allora si ha:* $K = (I_k^{(2)}T_2, I_k^{(3)}T_3, ..., I_k^{\binom{n}{k}}T_{\binom{n}{k}}) \subset R[T_1, ..., T_{\binom{n}{k}}] = S$.
e risulta:

1. $dim(S/K) = \binom{n}{k} + 1$
2. $depth(S/K) = \binom{n}{k} + 1$

Prova.
Sfruttiamo il ragionamento che adotteremo nel caso $k = 2$, *come mostra il teorema seguente. La generalizzazione è facile da ottenere.*

Teorema 6.14 *Sia* I_2 *l'ideale 2 - Veronese square free di* $S = K[x_1, ..., x_n]$. *Sia* J *l'ideale delle relazioni di* $Sym_S(I_2)$ *e sia* $J_2 = (I_1Y_1, ..., I_{\binom{n}{2}}Y_{\binom{n}{2}})$ *l'ideale di* $S[Y_1, ..., Y_{\binom{n}{2}}]$, *essendo* $I_1 = (0), I_2, ..., I_{\binom{n}{2}}$ *gli ideali annullatori della successione di monomi che generano* I_2, *ordinati lessicograficamente con ordinamento sulle variabili dato da* $x_1 > x_2 > ... > x_n \quad x_1x_2 > x_1x_3 > ... > x_1x_n > x_2x_3 > ... > x_{n-1}x_n$.

Si consideri la K *- Algebra* $S[Y_1, ..., Y_{\binom{n}{2}}]/J_2$, *allora abbiamo:*

1. $dim(S[Y_1,...,Y_{\binom{n}{2}}]/J_2) = \binom{n}{2} + 1$

2. $depth(S[Y_1,...,Y_{\binom{n}{2}}]/J_2) = \binom{n}{2} + 1$

3. $S[Y_1,...,Y_{\binom{n}{2}}]/J_2$ *è un anello Cohen - Macaulay.*

Prova.

1. *Essendo l'ideale* $J_2 = (I_1Y_1, ..., I_{\binom{n}{2}}Y_{\binom{n}{2}}) \subset S[Y_1, ..., Y_{\binom{n}{2}}]$, $J_2 = (I_2Y_2, ..., I_{\binom{n}{2}}Y_{\binom{n}{2}})$ *della forma data dalla proposizione 6.1.,abbiamo la formula per la dimensione:* $dim(S[Y_1, ..., Y_{\binom{n}{2}}]/J_2) = max\,\{dimS/(I_{i_1} + ... + I_{i_r}) + r, 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_r \leq n\}$.

   (a) *Supponiamo* $r = \binom{n}{2}$. *Allora* $I_2 + ... + I_{\binom{n}{2}} = (x_1, ..., x_{n-1})$. *Ogni variabile* x_i, $1 \leq i \leq n-1$, *appare in al più n ideali annullatori.*
   La variabile x_n *non` appare, dal momento che i monomi dove* x_n *appare sono* $x_1x_n, x_2x_n, ..., x_{n-1}x_n$, *e, se noi consideriamo we qualche ideale colon del tipo* $x_ix_n : x_jx_k, i, j, k < n$, *esso è generato da una variabile* $x_l, l \neq n$.
   Allora abbiamo:
   $S/(x_1, ..., x_{n-1}) = K[x_1, ..., x_n]/(x_1, ..., x_{n-1}) \cong K[x_n]$.

   (b) $r < n, i_r \leq k_i^{(1)}, 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_r \leq k_{\alpha(1)}^{(1)}$, $k_{\alpha(1)}^{(1)} = n-1$.
   Abbiamo $I_{i_1}^{(1)} + ... + I_{i_r}^{(1)} = I_1^{(1)} + ... + I_{k_i^{(1)}}^{(1)} = (\hat{x_1}, x_2, ..., x_{k_i^{(1)}}), k_i^{(1)} \leq n-1$
   $S/(\hat{x_1}, x_2, ..., x_{k_i^{(1)}}) + k_i^{(1)} = n - k_i^{(1)} + k_i^{(1)} = n < \binom{n}{2}$.

   (c) $r \leq k_i^{(2)}, 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_r \leq k_{\alpha(1)+\alpha(2)}^{(2)}$,$\alpha(1) + \alpha(2) = n-1+n-2 = 2n-3$
   Abbiamo
   $I_1^{(1)} + I_2^{(1)} + ... + I_{n-1}^{(1)} + I_n^{(2)} + ... + I_{k_i^{(2)}}^{(2)} =$
   $(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_1, x_2, ..., x_{k_i^{(2)}-\alpha(1)}) = (x_1, ..., x_{n-1})$
   $dim(S/(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) + k_i^{(2)} = dim(K[x_n]) + k_i^{(2)} \leq 1 + 2n - 3 = 2n - 2 < \binom{n}{2}$

   Partendo da $r = n$, *e per ogni* $r > n$, *la somma degli ideali colon è* $(x_1, ..., x_{n-1})$, *allora calcolando le dimensioni relative a tutti i possibili casi per* $r \leq \binom{n}{2} - 1$,

otteniamo $dimS/(x_1,...,x_{n-1})+r=1+r\leq 1+\binom{n}{2}-1=\binom{n}{2}$. *Questo implica che il massimo delle dimensioni è:*
$dimS/(x_1,...,x_{n-1})+\binom{n}{2}=dimK[x_n]+\binom{n}{2}=1+\binom{n}{2}$.
Dunque, abbiamo: $dim(S[Y_1,...,Y_{\binom{n}{2}}]/J_2)=1+\binom{n}{2}$
Deduciamo:
$htJ_2=n-1=gradeJ_2$.

2. *Consideriamo la successione di monomi che generano* J_2 :
   $I_2^{(1)}Y_2,...,I_{\binom{n}{2}}^{(n)}Y_{\binom{n}{2}}$, *che può essere scritta esplicitamente come*
   $X_1Y_2,X_1Y_3,X_2Y_3,...,...,X_1Y_{\binom{n}{2}},X_2Y_{\binom{n}{2}},...,X_{n-1}Y_{\binom{n}{2}}$
   Possiamo trovare in questa successione la successione $X_1Y_2,X_2Y_3,X_3Y_4,X_4Y_5,...,X_{n-1}Y_n$ *di lunghezza n -1, che è una successione regolare di elementi di* $S[Y_1,...,Y_n]$.
   Dopo una permutazione degli elementi della successione (1), otteniamo che ogni successione regolare J_2 *ha lunghezza n - 1, allora:*
   $grade(J_2)\geq n-1$.
   Abbiamo $dim(S[Y_1,...,Y_{\binom{n}{2}}]/J_2)=dim(S[Y_1,...,Y_{\binom{n}{2}}]-ht(J_2)=n+\binom{n}{2}-ht(J_2)$.
   Cosi deduciamo $1+\binom{n}{2}=n+\binom{n}{2}-ht(J_2)$ *and* $ht(J_2)=n-1$.
   Ma $grade(J_2)\leq ht(J_2)=n-1$. *Così* $grade(J_2)=n-1$.
   Inoltre, J_2 *può essere generato dalla successione*

   $$X_1Y_2,X_1Y_3,X_2Y_3,...,...,X_1Y_{\binom{n}{2}},X_2Y_{\binom{n}{2}},...,X_{n-1}Y_n.$$

   Segue $depth(S[Y_1,...,Y_{\binom{n}{2}}]/J_2)=n+\binom{n}{2}-(n-1)=\binom{n}{2}+1$.

3. *Segue dall'uguaglianza* $dim(S[Y_1,...,Y_{\binom{n}{2}}]/J_2)=depth(S[Y_1,...,Y_{\binom{n}{2}}]/J_2)$.

Teorema 6.15 *Sia* $R=k[x_1,...,x_n;y_1,...,y_n],T_1,...,T_m$ *indeterminate su R. Sia* $L\subset R$ *un ideale di prodotti misti. Siano* $L^{(i)}$ *gli ideali annullatori di L.*
Allora si ha:
Sia K l'ideale di tipo lineare associato ad L.

1. *Se* $L_1=I_kJ_1\subset R$, $K_1=(L_1^{(2)}T_2,L_1^{(3)}T_3,...,L_1^{(n\binom{n}{k})}T_{n\binom{n}{k}})\subset R[T_1,T_2,...,T_{n\binom{n}{k}}]=S_1$

2. *Se* $L_2=I_kJ_k\subset R$, $K_2=(L_2^{(2)}T_2,L_2^{(3)}T_3,...,L_2^{(\binom{n}{k}\binom{n}{k})}T_{\binom{n}{k}\binom{n}{k}})\subset R[T_1,T_2,...,T_{\binom{n}{k}\binom{n}{k}}]=S_2$

3. *Se* $L_3 = I_kJ_1 + I_1J_k \subset R$, $K_3 = (L_3^{(2)}T_2, L_3^{(3)}T_3, ..., L_3^{(2n\binom{n}{k})}T_{2n\binom{n}{k}}) \subset R[T_1, T_2, ..., T_{2n\binom{n}{k}}] = S_3$

4. *Se* $L_4 = I_k + J_k \subset R$, $K_4 = (L_4^{(2)}T_2, L_4^{(3)}T_3, ..., L_4^{(2\binom{n}{k})}T_{2\binom{n}{k}}) \subset R[T_1, T_2, ..., T_{2\binom{n}{k}}] = S_4$

5. *Se* $L_5 = I_k + I_1J_{k-1} \subset R$, $K_5 = (L_5^{(2)}T_2, L_5^{(3)}T_3, ..., L_5^{(\binom{n}{k}+n\binom{n}{k-1})}T_{\binom{n}{k}+n\binom{n}{k-1}}) \subset R[T_1, T_2, ..., T_{\binom{n}{k}+n\binom{n}{k-1}}] = S_5$

Prova. *Discendono dai teoremi 5.7. 5.9. 5.12. 5.15. 5.16. in cui si calcolanogli ideali annullatori.*

Teorema 6.16 *Sia* $R = k[x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_n]$, $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$ *come nel teorema precendente. Allora si ha:*

1. $dim(S_1/K_1) = n\binom{n}{k} + 2$
2. $dim(S_2/K_2) = \binom{n}{k}\binom{n}{k} + 2$
3. $dim(S_3/K_3) = 2n\binom{n}{k} + 2$
4. $dim(S_4/K_4) = 2\binom{n}{k} + 2$
5. $dim(S_5/K_5) = \binom{n}{k} + n\binom{n}{k-1} + 2$

Prova. 1. *Gli ideali annullatori di* L_1 *sono in numero di* $n\binom{n}{k}$. *Applicando la formula per la dimensione dimostrata nel teorema..,in ognuno dei casi e per ogni valore di* $r \leq n\binom{n}{k}$, *il massimo della dimensione è raggiunto per* $r = n\binom{n}{k}$, $r \geq 2$. *Pertanto avremo* $dim(R/(I_1 + ... + I_n) + n\binom{n}{2} = dim(K[x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_n]/(x_1, ..., x_{n-1}, y_1, ..., y_{n-1}) + n\binom{n}{2} = dim(k[x_n, y_n]) + n\binom{n}{2} = 2 + n\binom{n}{2}$. *Per i casi 2.,3.,4.,5., vale la stessa osservazione che in 1.*

Teorema 6.17 *Sia* $R = K[x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_n]$, $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$ *come nel teorema precendente. Allora si ha:*

1. $depth(S_1/K_1) = n\binom{n}{k} + 2$
2. $depth(S_2/K_2) = \binom{n}{k}\binom{n}{k} + 2$
3. $depth(S_3/K_3) = 2n\binom{n}{k} + 2$
4. $depth(S_4/K_4) = 2\binom{n}{k} + 2$

5. $depth(S_5/K_5) = \binom{n}{k} + 2$

Prova.

1) Nell'ideale K_1, è possibile individuare la successione monomiale
$x_1T_2, x_2T_3, x_3T_4, ..., x_{n-1}T_n, y_1T_{n+1}, y_2T_{n+2}, ..., y_{n-1}T_{2n-1}$
di lunghezza $2n-2$, che forma una successione regolare. D'altra parte $ht(K_1) = dim(R[T_1, ..., T_{n\binom{n}{k}}] - dim(S_1/K_1) = 2n + n\binom{n}{k} - n\binom{n}{k} - 2 = 2n-2$. Ne segue che $ht(K_1) = grade(K_1) = 2n-2$, e $depthS_1/K_1 = 2n + n\binom{n}{k} - 2n + 2 = n\binom{n}{k} + 2$.
Per i rimanenti casi, si procede allo stesso modo,individuando in K_2, K_3, K_4, K_5 la successione monomiale che forma una successione regolare.

Esempio 6.18 *$I_2 = (x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3) \subset K[x_1, x_2, x_3] = S$. We have*
$I_1 = (0), I_2 = (x_1x_2) : (x_1x_3) = (x_2), I_3 = (x_1x_2, x_1x_3) : (x_2x_3) = (x_1)$.
Then $in_<(J) = ((x_2)Y_2, (x_1)Y_3) = ((x_2)Y_2, (x_1)Y_3)$, and $in_<(J) = J_2$.
Infatti I_2 è generato da una s - successione $Sym_R(I_2) = R[Y_1, Y_2, Y_3]/J$ and $dim(Sym_S(I_2) = dim(S[Y_1, Y_2, Y_3]/in_<(J)) = dim(S[Y_1, Y_2, Y_3]/J_2)$.
Dobbiamo calcolare le seguenti dimensioni:
$dim(S/I_1) + 1 = dimR + 1 = 3 + 1 = 4$
$dim(S/(I_2) + 1 = dim(K[x_1, x_2, x_3]/(x_1)) + 1 = 2 + 1 = 3$
$dim(S/(I_3) + 1 = dim(K[x_1, x_2, x_3]/(x_2)) + 1 = 2 + 1 = 3$
$dim(S/(I_1 + I_2)) + 2 = dim(K[x_1, x_2, x_3]/(x_2) + 2 = 2 + 2 = 4$
$dim(S/(I_1 + I_3)) + 2 = dim(K[x_1, x_2, x_3]/(x_1) + 2 = 2 + 2 = 4$
$dim(S/(I_2 + I_3)) + 2 = dim(K[x_1, x_2, x_3]/(x_1, x_2) + 2 = 1 + 2 = 3$
$dim(S/(I_1 + I_2 + I_3)) + 3 = dim(K[x_1, x_2, x_3]/(x_1, x_2) + 3 = 1 + 3 = 4$
In conclusione abbiamo:
Allora $dim(Sym_S(I_2)) = 4 = \binom{3}{2} + 1$
Allora risulta:
$dim(Sym_S(I_2)) = max\,\{dim(S/I_{i_1} + I_{i_2} + I_{i_3} + i_3, 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 3\} = max\,\{3, 4\} = 4 = \binom{3}{2} + 1$.
La successione x_2Y_2, x_1Y_3 è una successione regolare che genera J_2, per cui $depth(Sym_S(I_2)) = 2$ e $Sym_S(I_2)$ è CM.

Esempio 6.19 *Sia $R = K[x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3]$.*
Sia $L = I_2 + J_2 = (x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, y_1y_2, y_1y_3, y_2y_3)$.
$I_2^{(1)} = (0), I_2^{(2)} = (x_2), I_2^{(3)} = (x_1), I_2^{(4)} = I_2, I_2^{(5)} = (I_2, y_2), I_2^{(6)} = (I_2, y_1)$.
$k[x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3]/(I_2^{(2)} + I_2^{(3)} + I_2^{(4)} + I_2^{(5)} + I_2^{(6)}) =$

$= k[x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3]/(x_1, x_2, I_2, y_1, y_2) =$

$k[x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3]/(x_1, x_2, y_1, y_2) = k[x_3, y_3]$

$dim(k[x_3, y_3] + 6 = 2 + 6 = 8.$

Posto $L_4 = I_2 + J_2$ *è facile verificare che* $dimSym_R(S_4/K_4) = 8.$

Calcoliamo ora:

$dim(k[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3][T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6])/J =$

J è generato da:

$x_3T_1 - x_2T_2, x_3T_1 - x_1T_3, x_2T_2 - x_1T_3, x_1x_2T_4 - y_1y_2T_1, x_1x_2T_5 - y_1y_3T_1,$

$x_1x_2T_6 - y_1y_3T_1, x_1x_3T_4 - y_1y_2T_2, x_1x_3T_5 - y_1y_3T_2, x_1x_3T_6 - y_1y_3T_2,$

$x_2x_3T_4 - y_1y_2T_3, x_2x_3T_5 - y_1y_3T_3, x_1x_3T_6 - y_1y_3T_3, y_3T_5 - y_2T_4,$

$y_3T_5 - y_1T_6, y_2T_5 - y_1T_6$

$htJ \geq 6$

$dim(Sym(I_2 + J_2)) \leq 12 - 6 = 6 < 8.$

D'altra parte L_4 *non è generato da una s - successione.*

La base di Groebner è non lineare in $T_1, ..., T_6$. *Infatti è di grado 2.*

$G = \{y_2T_5 - y_1T_6, y_3T_5 - y_1T_6, -y_2T_4 + y_1T_6, x_2T_2 - x_1T_3, x_3T_1 - x_1T_3, -y_1T_4T_6 + y_1T_5T_6,$
$y_1y_2T_6 - y_1y_3T_6, -y_1y_3T_3 + x_1x3T_6, x_2x_3T_5 - x_1x_3T_6, -y_1y_2T_3 + x_2x_3T_4, -y_1y_3T_2 +$
$x_1x_3T_6, x_1x_3T_5 - x_1x_3T_6, -y_1y_2T_2 + x_1x_3T_4, -y_1y_3T_1 + x_1x_2T_6, x_1x_2T_5 - x_1x_2T_6, -y_1y_2T_1 +$
$x_1x_2T_4, x_2x_3T_4T_6 - x_1x_3T_6^2, x_1x_3T_4T_6 - x_1x_3T_6^2, x_1x_2T_4T_6 - x_1x_2T_6^2, -y_1^2T_3T_6 + x_1x_3T_6^2,$
$-y_1^2T_2T_6 + x_1x_3T_6^2, x_1x_3T_2T_6 - x_1x_3T_3T_6, -x_1^2T_3T_5 + x_1^2T_3T_6, -y_1^2T_1T_6 + x_1x_2T_6^2,$
$x_1^2T_3T_6 - x_1x_2T_3T_6, -x_2x_3y_1T_6 + x_1x_3y_3T_6, -x_1x_3y_1T_6 + x_1x_3y_3T_6, -x_1x_2y_1T_6 + x_1x_2y_3T_6, x_1x_3y_2T_6 -$
$x_1x_3y_3T_6, x_1x_2y_2T_6 - x_1x_2y_3T_6, -x_1^2x_3T_6 + x_1x_2x_3T_6, x_2x_3T_4^2 - x_1x_3T_6^2,$
$x_1 + x_3T_4^2 - x_1x_3T_6^2, x_1x_2T_4^2 - x_1x_2T_6^2, x_2x_3y_3T_4 - x_1x_3y_3T_6, x_1x_3y_3T_4 - x_1x_3y_3T_6,$
$x_1x_2y_3T_4 - x_1x_2y_3T_6, -x_1^2T_3T_4^2 + x_1x_2T_3T_6^2, -x_1^2y_3T_3T_4 + x_1x_2y_3T_3T_6,$
$x_1x_3y_3^2T_3T_6 - x_1x_2x_3^2T_6^2, x_1x_2y_3^2T_3T_6 - x_1x_2^2x_3T_6^2, x_1x_2y_3^2T_1T_6 - x_1^2x_2^2T_6^2$

6.3 Invarianti di $Sym_R(L)$

Sia $L = I_k \subset K[x_1, ..., x_n]$ *l'ideale di Veronese square-free e sia* $L \subset K[x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_n]$ *un ideale di prodotti misti appartenenti ad una delle classi considerate nel capitolo 5.Noi ci interesseremo dei seguenti invarianti: dimensione (dim), profondità (depth), regolarità (reg), di* $Sym_R(L)$*. Purtroppo, siamo in grado di dare soltanto bounds per il valore degli invarianti. Tuttavia, in alcuni casi e, per valori bassi di* n *ed* m*, saremo in grado di dare l` esatto valore. Poichè, in generale, nei casi che consideriamo,* L *non è generato da una s - successione,* $in_<(J) = J_l + K$*, dove* J_l *è la parte lineare di* $in_<(J)$*, essendo* $<$ *il revlex order, e* J *l'ideale delle relazioni di* $Sym_R(L)$*.*

Teorema 6.20 *Sia* $I_k \subset K[x_1, ..., x_n]$ *l'ideale di Veronese square-free . Allora:* $d = dim(Sym_R(I_k)) \leq \binom{n}{k}+1$ *e* $d = \binom{n}{k}+1$ *se* $k = n-1$*, nel qual caso* $d = \binom{n}{n-1}+1 = n+1$

Prova. *Risulta* $Sym_R(I_k) = R[T_1, ..., T_{\binom{n}{k}}]/J$, $dim(R[T_1, ..., T_{\binom{n}{k}}]/J) = dim(R[T_1, ..., T_{\binom{n}{k}}]/in_<(J))$*, grazie al teorema di Macaulay,essendo* $<$ *il revlex order sui monomi di* $R[T_1, ..., T_{\binom{n}{2}}]$*. Pertanto* $dim(R[T_1, ..., T_{\binom{n}{2}}]/in_<(J)) = dim(R[T_1, ..., T_{\binom{n}{2}}]/(J_l+K)) \leq dim(R[T_1, ..., T_{\binom{n}{2}}]/J_l)$*, grazie al teorema 6.6. del capitolo 6. Infine poichè* $dim(R[T_1, ..., T_{\binom{n}{2}}]/J_l = \binom{n}{k} + 1$ *(Teorema 6.4., capitolo 6), avremo che* $dim(Sym_R(I_k) \leq \binom{n}{k}+1$*. Per quanto riguarda l'uguaglianza, se* $k = n-1$*,* I_k *è generato da una s - successione (Teorema 4.5., capitolo 4) e abbiamo* $in_<(J) = J_l, K = (0)$*. Ne segue che l'asserto segue dal teorema 3.6. di [22] poichè* $\binom{n}{k} + 1 = \binom{n}{n-1} + 1 = n + 1$*.*

Teorema 6.21 *Sia* $R = K[x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_n]$ *e sia* L *un ideale di prodotti misti, appartenente ad una delle classi di cui nel capitolo 5. Allora avremo:*

1. *Se* $L_1 = I_k J_1$*,* $d = dim(Sym_R(L_1)) \leq n\binom{n}{k} + 2$ *e* $d = n\binom{n}{k} + 2$*, se* $k = n$*, nel qual caso* $d = n\binom{n}{n} + 2 = n + 2$*;*
2. *Se* $L_2 = I_k J_k$*,* $d = dim(Sym_R(L_2)) \leq \binom{n}{k}\binom{n}{k} + 2$*;*
3. *Se* $L_3 = I_k J_1 + I_1 J_k$*,* $d = dim(Sym_R(L_3)) \leq 2nnk + 2$*;*
4. *Se* $L_4 = I_k + J_k$*,* $d = dim(Sym_R(L_4)) \leq 2\binom{n}{k} + 2$*, e* $d = 2\binom{n}{k} + 2$ *se* $k = n-1$*, nel qual caso* $d = 2\binom{n}{n-1} + 2 = 2n + 2$*;*
5. *Se* $L_5 = I_k + I_1 J_{k-1}$*,* $d = dim(Sym_R(L_5)) \leq \binom{n}{k} + n\binom{n}{k-1} + 2$*.*

Prova. *Per 4., si veda il risultato ottenuto in Theorem 2.2. di [22].*

7 Algebre monomiali provenienti dall'ideale di Veronese square - free I_k

Fissiamo d+1 interi positivi $r, s_1, s_2, ..., s_d$ *e consideriamo l'insieme*

$$A = \left\{(i_1, i_2, ..., i_d) \in Z^d : i_1 + i_2 + ... + i_d = r, 0 \leq i_1 \leq s_1, ..., 0 \leq i_d \leq s_d\right\}$$

Esiste una biezione naturale tra un elemento di A e la stringa debolmente crescente di lunghezza r sull` alfabeto $\{1, 2, ..., d\}$ *avente al più* s_j *occorrenze della lettera j. Sotto questa biezione, il vettore* $(i_1, i_2, ..., i_d)$ *di A è mappato nella stringa debolmente crescente*

$$u_1 u_2 ... u_r = \underbrace{11...1}_{i_1 volte}\underbrace{22...2}_{i_2 volte}\underbrace{33...3}_{i_3 volte}...\underbrace{dd...d}_{i_d volte}$$

Scriviamo $x_{u_1 u_2 ... u_r}$ *per la corrispondente variabile nell'anello dei polinomi* $K[\underline{X}]$. *Denotiamo con sort(.) l'operatore che prende ogni stringa sull'alfabeto* $\{i_1, i_2, ..., i_d\}$ *e la seleziona nell'ordine debolmente crescente. Con queste convenzioni, l'ideale torico è descritto come segue:*

Proposizione 7.1 *L'ideale torico definito dall'insieme A è uguale a:*

$$I_A = (x_u x_v ... x_w - x_{u'} x_{v'} ... x_{w'} : sort(uv...w) = sort(u'v'...w'))$$

Per esempio l ideale della superficie di Veronese nello spazio proiettivo P^5 *è uguale in questa notazione a :*
$(\underline{x_{11}x_{33}} - x_{13}^2, \underline{x_{11}x_{22}} - x_{12}^2, \underline{x_{11}x_{23}} - x_{12}x_{13}, \underline{x_{12}x_{33}} - x_{13}x_{23}, \underline{x_{13}x_{22}} - x_{12}x_{23}, \underline{x_{33}x_{22}} - x_{23}^2)$.
Vedremo nel seguito che questi sei generatori minimali costituiscono la base di Groebner ridotta per l'ideale di Veronese rispetto ad un ordinamento di termini che seleziona come termini iniziali dei binomi i monomi sottolineati.Questo è il caso $d = 3, r = s_1 = s_2 = s_3 = 2$ *del Teorema 7.3. Premettiamo alcune definizioni:*

Definizione 7.2 *Un monomio* $x_{u_1 u_2 ... u_r} x_{v_1 v_2 ... v_r} x_{w_1 w_2 ... w_r}$ *in* $K[\underline{X}]$ *è detto sorted se*

$$u_1 \leq v_1 \leq ... \leq w_1 \leq u_2 \leq v_2 \leq w_2 \leq u_3 \leq v_3 \leq ... \leq w_3 \leq ... \leq u_d \leq\leq v_d \leq ... \leq w_d.$$

(1)

Per i monomi che non sono sorted definiamo numero di inversione il numero delle inversioni nella stringa (1), dove una inversione in una stringa di interi $l_1 l_2 ... l_v$ significa una coppia di indici (i,j) tali che $i < j$ e $l_i > l_j$. I seguenti due fatti sono facilmente verificati:

1. *Ogni potenza di una variabile è sorted (è sufficiente scrivere $x_i^n = x_i x_i ... x_i$);*

2. *Se un monomio non è sorted, allora esso contiene un fattore quadratico che non è sorted.*

Teorema 7.3 *([39], Theorem 14.2.)Esiste un ordinamento di termini $<$ su $K[\underline{X}]$ tale che i monomi sorted sono precisamente i monomi $<-$standard modulo I_A. L'ideale iniziale $in_<(I_A)$ è generato da monomi quadratici square - free non sorted. La corrispondente base di Groebner ridotta di I_A è:*

$$\left\{ \underline{x_{u_1 u_2 ... u_r} x_{v_1 v_2 ... v_r}} - x_{w_1 w_3 ... w_{2r-1}} x_{w_2 w_4 ... w_{2r}} : w_1 w_2 w_3 ... w_{2r} = sort(u_1 v_1 u_2 v_2 ... u_r v_r) \right\}$$

Prova: *Sia G il seguente insieme di binomi sottolineati:*

$\left\{ \underline{x_{u_1 u_2 ... u_r} x_{v_1 v_2 ... v_r}} - x_{w_1 w_3 ... w_{2r-1}} x_{w_2 w_4 ... w_{2r}} \right\}$. Mostriamo anzitutto che queste relazioni giacciono in I_A. Notiamo che per ogni $j \in \{1, 2, ..., d\}$ le stringe $u_1 u_2 ... u_r$ e $v_1 v_2 ... v_r$ hanno ognuna al più s_j occorrenze della lettera j. Noi dobbiamo verificare che le stringhe $w_1 w_3 ... w_{2r-1}$ e $w_2 w_4 ... w_{2r}$ hanno la stessa proprietà . Questo accade perchè il numero di j in $w_1 w_3 ... w_{2r-1}$ e il numero di j in $w_2 w_4 ... w_{2r}$ sono o entrambi uguali o differiscono di una unit, come segue da $w_1 \leq w_2 \leq w_3 \leq ... \leq w_{2r}$. Utilizzando la teoria delle basi di Groebner, consideriamo la relazione di riduzione su $k[\underline{X}]$ definita dai binomi sottolineati di prima. Un monomio m è in forma normale rispetto a questa relazione di riduzione se e solo se m è sorted Se un monomio m_1 non sorted è ridotto a un altro monomio m_2 usando G, allora il numero di inversioni di m_2 è strettamente minore del numero di inversioni di m_1. Questo mostra che la relazione di riduzione definita da G è noetheriana. Esiste allora un ordinamento dei termini $<$ su $K[\underline{X}]$ che seleziona il termine sottolineato termine come termine iniziale per ogni binomio di G.

Consideriamo l'ideale iniziale $in(I_A)$. Ogni monomio che non sia sorted sta in questo ideale. Supponiamo che qualche monomio sorted m_1 stia in $in(I_A)$. Allora esiste un binomio non nullo $m_1 - m_2$ in I_A tale che m_2 non stia in $in_<(I_A)$. Allora m_2 è anche sorted, il che significa che m_1 e m_2 sono monomi sorted che stanno *nella stessa classe residua modulo I_A.Dalla descrizione di I_A data nella proposizione 7.1., segue che m_1 ed m_2 sono uguali. Questa è una contraddizione. Dunque i monomi in $in_<(I_A)$ sono precisamente i monomi non sorted. Concludiamo che G è la base di Groebner ridotta di I_A rispetto a $<$.*

Esempio 7.4 *In $K[x_1, x_2, x_3]$,*

$$I_2 = (x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2^2, x_2x_3, x_3^2),$$

Siano le due K - algebre:
$K[I_2] = K[x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2^2, x_2x_3, x_3^2]$
$K[x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{22}, x_{23}, x_{33}]$

$$f : K[x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{22}, x_{23}, x_{33}] \to K[x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2^2, x_2x_3, x_3^2]$$

$x_{11} \mapsto x_1^2$;$x_{12} \mapsto x_1x_2$;$x_{13} \mapsto x_1x_3$;$x_{22} \mapsto x_2^2$;$x_{23} \mapsto x_2x_3$;$x_{33} \mapsto x_3^2$.

$x_{11}x_{22} - x_{12}^2 \mapsto x_1^2x_2^2 - (x_1x_2)^2 = (1122) - (1212) \to 0$; $x_{11}x_{33} - x_{13}^2 \mapsto x_1^2x_3^2 - (x_1x_3)^2 = (1133) - (1313) \to 0$; $x_{11}x_{23} - x_{12}x_{13} \mapsto x_1^2x_2x_3 - x_1x_2x_1x_3 = (1123) - (1213) \to 0$; $x_{12}x_{33} - x_{13}x_{23} \mapsto x_1x_2x_3^2 - x_1x_3x_2x_3 = (1233) - (1323) \to 0$; $x_{13}x_{22} - x_{12}x_{23} \mapsto x_1x_3x_2^2 - x_1x_2x_2x_3 = (1322) - (1223) \to 0$; $x_{22}x_{33} - x_{23}^2 \mapsto x_2^2x_3^2 - (x_2x_3)^2 = (3322) - (2323) \to 0$.

$G = \{x_{11}x_{22} - x_{12}^2, x_{11}x_{33} - x_{13}^2, x_{11}x_{23} - x_{12}x_{13}, x_{12}x_{33} - x_{13}x_{23}, x_{13}x_{22} - x_{12}x_{23}, x_{22}x_{33} - x_{23}^2\}$

Proposizione 7.5 *([39], Prop. 14.4.) In generale, la base di Grobener ridotta data nel teorema 7.2. non è nè lessicografica nè lessicografica inversa.*
Prova: *Scriviamo la base di Groebner ridotta nel caso $d = 4, r = 3, s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 2$. Le considerazioni valide in questo caso saranno infatti valide in generale. Allora:*

$$A = \{(2, 1, 0, 0), (1, 2, 0, 0), ..., (0, 0, 1, 2), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1)\},$$

$$K[\underline{X}] = [x_{112}, x_{122}, ..., x_{344}x_{123}x_{124}x_{134}x_{234}].$$

$K[x_{112}, x_{122}, x_{113}, x_{133}, x_{114}, x_{144}, x_{223}, x_{233}, x_{224}, x_{244}, x_{334}, x_{344}, x_{123}, x_{124}, x_{134}, x_{234}] \to$
$K[x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_1^2x_3, x_1x_3^2, x_1^2x_4, x_1x_4^2, x_2^2x_3, x_2x_3^2, x_2^2x_4, x_2x_4^2, x_3^2x_4, x_3x_4^2, x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_1x_3x_4, x_2x_3x_4]$

$x_{112} \mapsto x_1^2x_2$;$x_{122} \mapsto x_1x_2^2$;$x_{113} \mapsto x_1^2x_3$;$x_{133} \mapsto x_1x_3^2$;$x_{114} \mapsto x_1^2x_4$;$x_{144} \mapsto x_1x_4^2$;$x_{223} \mapsto x_2^2x_3$;$x_{233} \mapsto x_2x_3^2$;$x_{224} \mapsto x_2^2x_4$;$x_{244} \mapsto x_2x_4^2$;$x_{334} \mapsto x_3^2x_4$;$x_{344} \mapsto x_3x_4^2$;$x_{123} \mapsto x_1x_2x_3$;$x_{124} \mapsto x_1x_2x_4$;$x_{134} \mapsto x_1x_3x_4$;$x_{234} \mapsto x_2x_3x_4$.

Ne segue che: $x_{112}x_{133} - x_{113}x_{123} \mapsto x_1^2x_2x_1x_3^2 - x_1^2x_3x_1x_2x_3 = (112133) - (113123) \to 0$;$x_{112}x_{134} - x_{113}x_{124} \mapsto x_1^2x_2x_1x_3x_4 - x_1^2x_3x_1x_2x_4 = (112134) - (113124) \to 0$; $x_{112}x_{144} - x_{114}x_{124} \mapsto x_1^2x_2x_1x_4^2 - x_1^2x_4x_1x_2x_4 = (112144) - (114124) \to 0$; $x_{112}x_{223} - x_{122}x_{123} \mapsto x_1^2x_2x_2x_2^2x_3 - x_1x_2^2x_1x_2x_3 = (112223) - (122123) \to 0$; $x_{112}x_{224} - x_{122}x_{124} \mapsto x_1^2x_2x_2^2x_4 - x_1x_2^2x_1x_2x_4 = (112224) - (122124) \to 0$; $x_{112}x_{233} - x_{123}^2 \mapsto x_1^2x_2x_2x_3^2 - (x_1x_2x_3)^2 = (112233) - (123123) \to 0$; $x_{112}x_{334} - x_{123}x_{134} \mapsto (112334) - (123134) \to 0$;$x_{112}x_{344} - x_{124}x_{134} = (112344) - (124134) \to 0$; $x_{113}x_{122} - x_{112}x_{123} \mapsto (113122) - (112123) \to 0$;$x_{113}x_{144} - x_{114}x_{134} = (113144) - (114134) \to 0$; $x_{113}x_{223} - x_{123}^2 \mapsto (113223) - (123123) \to 0$;$x_{113}x_{224} - x_{123}x_{124} = (113224) - (123124) \to 0$; $x_{113}x_{233} - x_{123}x_{133} \mapsto (113233) - (123133) \to 0$;$x_{113}x_{234} - x_{123}x_{134} = (113234) - (123134) \to 0$;$x_{133}x_{244} - x_{124}x_{134} \mapsto (133244) - (124134) \to 0$;$x_{113}x_{334} - x_{133}x_{134} = (113334) - (133134) \to 0$; $x_{113}x_{344} - x_{134}^2 \mapsto (113344) - (134134) \to 0$;$x_{114}x_{122} - x_{112}x_{124} = (114122) - (112124) \to 0$;$x_{114}x_{123} - x_{113}x_{124} \mapsto (114123) - (113124) \to 0$;$x_{114}x_{133} - x_{113}x_{134} = (114133) - (113134) \to 0$; $x_{114}x_{223} - x_{123}x_{124} \mapsto (114223) - (123124) \to 0$; $x_{114}x_{224} - x_{124}^2 = (114224) - (124124) \to 0$; $x_{114}x_{233} - x_{123}x_{134} \mapsto (114233) - (123134) \to 0$;$x_{114}x_{234} - x_{124}x_{134} = (114234) - (124134) \to 0$; $x_{114}x_{244} - x_{124}x_{144} \mapsto (114244) - (124144) \to 0$;$x_{114}x_{334} - x_{134}^2 = (114334) - (134134) \to 0$; $x_{114}x_{344} - x_{134}x_{144} \mapsto (114344) - (134144) \to 0$;$x_{122}x_{133} - x_{123}^2 = (122133) - (123123) \to 0$; $x_{122}x_{134} - x_{123}x_{124} \mapsto (122134) - (123124) \to 0; x_{122}x_{144} - x_{124}^2 = (122144) - (124124) \to 0; x_{122}x_{233} - x_{123}x_{223} \mapsto (122233) - (123223) \to 0; x_{122}x_{234} - x_{123}x_{224} = (122234) - (123224) \to 0; x_{122}x_{244} - x_{124}x_{224} \mapsto (122244) - (124224) \to 0; x_{122}x_{334} - x_{123}x_{234} = (122334) - (123234) \to 0; x_{122}x_{344} - x_{124}x_{234} \mapsto (122124) - (124234) \to 0; x_{123}x_{144} - x_{124}x_{134} = (123144) - (124134) \to 0; x_{123}x_{244} - x_{124}x_{234} \mapsto (123244) - (124234) \to 0; x_{123}x_{334} - x_{133}x_{234} = (123334) - (133234) \to 0; x_{123}x_{344} - x_{134}x_{234} \mapsto (123344) - (134234) \to 0; x_{124}x_{133} - x_{123}x_{134} = (124133) - (123134) \to 0; x_{124}x_{223} - x_{123}x_{224} \mapsto (124223) - (123224) \to 0; x_{124}x_{233} - x_{123}x_{234} = (123233) - (123234) \to 0; x_{124}x_{334} - x_{134}x_{234} \mapsto (124334) - (134234) \to 0; x_{124}x_{244} - x_{134}x_{244} = (124244) - (134244) \to 0; x_{133}x_{144} - x_{134}^2 \mapsto (133144) - (134134) \to 0; x_{133}x_{223} - x_{123}x_{233} = (133223) - (123233) \to 0; x_{133}x_{224} - x_{123}x_{234} \mapsto (33224) - (123234) \to 0; x_{133}x_{244} - x_{134}x_{234} = (133244) - (134234) \to 0; x_{133}x_{344} - x_{134}x_{334} \mapsto (133344) - (134334) \to 0; x_{134}x_{223} - x_{123}x_{234} = (134223) - (123234) \to 0; x_{134}x_{224} - x_{124}x_{234} \mapsto (134224) - (124234) \to 0; x_{134}x_{233} - x_{133}x_{234} = (134233) - (133234) \to 0; x_{144}x_{233} - x_{124}x_{234} \mapsto$

$(144233)-(124234)\to 0; x_{144}x_{224}-x_{124}x_{244}=(144224)-(124244)\to 0; x_{144}x_{233}-x_{134}x_{234}\mapsto(144233)-(134234)\to 0; x_{144}x_{234}-x_{134}x_{244}=(144234)-(134244)\to 0; x_{144}x_{334}-x_{134}x_{344}\mapsto(144334)-(134344)\to 0; x_{223}x_{244}-x_{224}x_{234}=(223244)-(224234)\to 0; x_{223}x_{334}-x_{233}x_{234}\mapsto(223334)-(233234)\to 0; x_{223}x_{344}-x_{234}^2=(223344)-(234234)\to 0; x_{224}x_{233}-x_{223}x_{234}\mapsto(224233)-(223234)\to 0; x_{224}x_{334}-x_{234}^2=(224334)-(234234)\to 0; x_{224}x_{344}-x_{234}x_{244}\mapsto(224344)-(234244)\to 0; x_{233}x_{244}-x_{234}^2=(233244)-(234234)\to 0; x_{233}x_{344}-x_{234}x_{334}\mapsto(233344)-(234334)\to 0; x_{244}x_{334}-x_{234}x_{344}=(244334)-(234344)\to 0.$

Dunque $K[\underline{X}]$ *è un anello di polinomi in 16 variabili. La base di Groebner G, calcolata col Cocoa, è costituita da 68 binomi quadratici:*

$G=\{\underline{x_{112}x_{133}}-x_{113}x_{123}, \underline{x_{112}x_{134}}-x_{113}x_{124}, \underline{x_{112}x_{144}}-x_{114}x_{124}, \underline{x_{112}x_{223}}-x_{122}x_{123}, \underline{x_{112}x_{224}}-x_{122}x_{124}, \underline{x_{112}x_{233}}-x_{123}^2, \underline{x_{112}x_{234}}-x_{123}x_{124}, \underline{x_{112}x_{244}}-x_{124}^2, \underline{x_{112}x_{334}}-x_{123}x_{134}, \underline{x_{112}x_{344}}-x_{124}x_{134}, \underline{x_{113}x_{122}}-x_{112}x_{123}, \underline{x_{113}x_{144}}-x_{114}x_{134}, \underline{x_{113}x_{223}}-x_{123}^2, \underline{x_{113}x_{224}}-x_{123}x_{124}, \underline{x_{113}x_{233}}-x_{123}x_{133}, \underline{x_{113}x_{234}}-x_{123}x_{134}, \underline{x_{133}x_{244}}-x_{124}x_{134}, \underline{x_{113}x_{334}}-x_{133}x_{134}, \underline{x_{113}x_{344}}-x_{134}^2, \underline{x_{114}x_{122}}-x_{112}x_{124}, \underline{x_{114}x_{123}}-x_{113}x_{124}, \underline{x_{114}x_{133}}-x_{113}x_{134}, \underline{x_{114}x_{223}}-x_{123}x_{124}, \underline{x_{114}x_{224}}-x_{124}^2, \underline{x_{114}x_{233}}-x_{123}x_{134}, \underline{x_{114}x_{234}}-x_{124}x_{134}, \underline{x_{114}x_{244}}-x_{124}x_{144}, \underline{x_{114}x_{334}}-x_{134}^2, \underline{x_{114}x_{344}}-x_{134}x_{144}, \underline{x_{122}x_{133}}-x_{123}^2, \underline{x_{122}x_{134}}-x_{123}x_{124}, \underline{x_{122}x_{144}}-x_{124}^2, \underline{x_{122}x_{233}}-x_{123}x_{223}, \underline{x_{122}x_{234}}-x_{123}x_{224}, \underline{x_{122}x_{244}}-x_{124}x_{224}, \underline{x_{122}x_{334}}-x_{123}x_{234}, \underline{x_{122}x_{344}}-x_{124}x_{234}, \underline{x_{123}x_{144}}-x_{124}x_{134}, \underline{x_{123}x_{244}}-x_{124}x_{234}, \underline{x_{123}x_{334}}-x_{133}x_{234}, \underline{x_{123}x_{344}}-x_{134}x_{234}, \underline{x_{124}x_{133}}-x_{123}x_{134}, \underline{x_{124}x_{223}}-x_{123}x_{224}, \underline{x_{124}x_{233}}-x_{123}x_{234}, \underline{x_{124}x_{334}}-x_{134}x_{234}, \underline{x_{124}x_{244}}-x_{134}x_{244}, \underline{x_{133}x_{144}}-x_{134}^2, \underline{x_{133}x_{223}}-x_{123}x_{233}, \underline{x_{133}x_{224}}-x_{123}x_{234}, \underline{x_{133}x_{244}}-x_{134}x_{234}, \underline{x_{133}x_{344}}-x_{134}x_{334}, \underline{x_{134}x_{223}}-x_{123}x_{234}, \underline{x_{134}x_{224}}-x_{124}x_{234}, \underline{x_{134}x_{233}}-x_{133}x_{234}, \underline{x_{144}x_{233}}-x_{124}x_{234}, \underline{x_{144}x_{224}}-x_{124}x_{244}, \underline{x_{144}x_{233}}-x_{134}x_{234}, \underline{x_{144}x_{234}}-x_{134}x_{244}, \underline{x_{144}x_{334}}-x_{134}x_{344}, \underline{x_{223}x_{244}}-x_{224}x_{234}, \underline{x_{223}x_{334}}-x_{233}x_{234}, \underline{x_{223}x_{344}}-x_{234}^2, \underline{x_{224}x_{233}}-x_{223}x_{234}, \underline{x_{224}x_{334}}-x_{234}^2, \underline{x_{224}x_{344}}-x_{234}x_{244}, \underline{x_{233}x_{244}}-x_{234}^2, \underline{x_{233}x_{344}}-x_{234}x_{334}, \underline{x_{244}x_{334}}-x_{234}x_{344}.$

In ognuno di questi 68 binomi il primo termine è il termine iniziale (monomio non sorted) e il secondo termine è il termine ***trailing****. Notiamo che i termini trailing sono sorted mentre i termini iniziali non sono sorted.*
Se G fosse la base di Groebner per un ordinamento lessicografico, allora esisterebbe una variabile x_{ijk} *che appare solo nei termini iniziali. Se G fosse la base di Groebner per un ordinamento lessicografico inverso, allora esisterebbe una variabile* x_{ijk} *che appare solo nei termini trailing. Ma ognuna delle 16 variabili appare sia in qualche termine iniziale sia in qualche termine trailing. Concludiamo che la base di Groebner G non è nè lessicografica nè lessicografica inversa.*

La proprietà della proposizione precedente vale anche per $d = 6, r = 3, s_1 = s_2 = ... = s_6 = 1$.
Il caso square - free può essere definito mediante il terzo ipersimplesso:

$$\Delta(3,6) = conv\,\{e_i + e_j + e_k : 1 \leq i < j < k \leq 6\},\ e_i = (0,0,...,1,0,0,...,0) \in N^6$$

Il corrispondente ideale Torico I_A *è il nucleo dell` omomorfismo di* K *- algebre*

$$k[x_{rst} : 1 \leq i < j < k \leq 6] \to k[t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6], x_{ijk} \to t_i t_j t_k.$$

La base di Groebner ridotta di I_A *consiste di 69 binomi e può essere ottenuta mediante la teoria dell'eliminazione. Ogni variabile* x_{ijk} *appare in qualche termine iniziale, cosi che G non può essere lessicografica inversa. Le sei variabili* $x_{123}, x_{234}, x_{345}, x_{456}, x_{156}, x_{126}$ *appaiono solo in termini iniziali, pertanto possono comparire prima in un possibile ordinamento lessicografico. Sia X l` insieme delle altre 14 variabili. L'ideale di eliminazione* $I \cap K[X]$ *ha una base di Groebner indotta(dove sono sottolineati i monomi iniziali):*
$G \cap K[\underline{X}] = \big\{\underline{x_{124}x_{256}} - x_{125}x_{246}, \underline{x_{124}x_{346}} - x_{134}x_{346}, \underline{x_{124}x_{356}} - x_{135}x_{246}, \underline{x_{125}x_{134}} - x_{124}x_{135}, \underline{x_{125}x_{346}} - x_{135}x_{246}, \underline{x_{12}x_{356}} - x_{135}x_{256}, \underline{x_{134}x_{256}} - x_{135}x_{246}, \underline{x_{134}x_{356}} - x_{135}x_{346}, \underline{x_{136}x_{145}} - x_{135}x_{146}, \underline{x_{136}x_{235}} - x_{135}x_{236}, \underline{x_{136}x_{245}} - x_{135}x_{246}, \underline{x_{145}x_{235}} - x_{135}x_{245}, \underline{x_{145}x_{236}} - x_{135}x_{246}, \underline{x_{146}x_{235}} - 135\ x_{246}, \underline{x_{146}x_{236}} - x_{136}x_{246}, \underline{x_{146}x_{245}} - x_{145}x_{246}, \underline{x_{236}x_{245}} - x_{235}x_{246}, \underline{[}x_{256}x_{346} - x_{246}x_{356}.$

Ognuna delle rimanenti 14 variabili appare in qualche termine trailing e dunque non può essere la variabile successiva alle prime sei in un possibile ordinamento dei termini lessicografico. Ad esempio, si consideri l'ultimo binomio $x_{256}x_{346} - x_{246}x_{356}$. *Secondo l'ordinamento lex il monomio iniziale è* $x_{246}x_{356}$, *poichè vi compare la variabile* x_{356}.*Questo mostra che la base di Groebner per l'ipersimplesso* $\Delta(3,6)$ *non è nè lessicografica nè lessicografica inversa.*

Esempio 7.6 1. *Per* $n = 2, K[x_1, x_2], I_3 = (0) I_A = (0)$.

2. *Per* $n = 3, K[x_1, x_2, x_3], I_3 = (x_1 x_2 x_3)$
   $K[x_{123}] \to K[x_1 x_2 x_3], x_{123} \mapsto x_1 x_2 x_3, I_A = (0)$.

3. *Per* $n = 4, K[x_1, x_2, x_3, x_4]$,
   $K[x_{123}, x_{124}, x_{134}, x_{234}] \to K[x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_1x_3x_4, x_2x_3x_4]$

   $x_{123} \mapsto x_1x_2x_3; x_{124} \mapsto x_1x_2x_4; x_{134} \mapsto x_1x_3x_4; x_{234} \mapsto x_2x_3x_4;$
   $x_{123}x_{124} - x_{134}x_{234} \neq 0; x_{123}x_{234} - x_{124}x_{134} \neq 0; x_{124}x_{234} - x_{134}x_{123} \neq 0; I_A =$
   $(x_{123}x_{124} - x_{134}x_{234}, x_{123}x_{234} - x_{124}x_{134}, x_{124}x_{234} - x_{134}x_{123})$ *;*

4. *Per* $n = 5, K[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5], K[x_{123}, x_{124}, x_{125}, x_{134}, x_{135}, x_{145}, x_{234}, x_{235}, x_{245}, x_{345}] \to$
   $K[x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_1x_2x_5, x_1x_3x_4, x_1x_3x_5, x_1x_4x_5, x_2x_3x_4, x_2x_3x_5, x_2x_4x_5, x_3x_4x_5]$
   $x_{123} \mapsto x_1x_2x_3; x_{124} \mapsto x_1x_2x_4; x_{125} \mapsto x_1x_2x_5; x_{134} \mapsto x_1x_3x_4; x_{135} \mapsto x_1x_3x_5;$
   $x_{145} \mapsto x_1x_4x_5; x_{234} \mapsto x_2x_3x_4; x_{235} \mapsto x_2x_3x_5; x_{245} \mapsto x_2x_4x_5; x_{345} \mapsto x_3x_4x_5;$
   $x_{123}x_{124} - x_{125}x_{134} \neq 0; x_{123}x_{124} - x_{125}x_{135} \neq 0; x_{123}x_{124} - x_{125}x_{145} \neq 0; x_{123}x_{124} -$
   $x_{125}x_{234} \neq 0;$
   $x_{123}x_{124} - x_{125}x_{245} \neq 0; x_{123}x_{124} - x_{134}x_{135} \neq 0;$
   .....
   $I_A \neq (0)$

5. *Per* $n = 6$,
   $K[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]$, $K[x_{123}, x_{124}, x_{125}, x_{126}, x_{134}, x_{134}, x_{135}, x_{145}, x_{146}, x_{156}, x_{234}, x_{235}, x_{236},$
   $x_{245}, x_{256}, x_{345}, x_{346}, x_{356}, x_{456}] \to$
   $K[x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_1x_2x_5, x_1x_2x_6, x_1x_3x_4, x_1x_3x_5, x_1x_4x_5, x_1x_4x_6, x_1x_5x_6, x_2x_3x_4,$
   $x_2x_3x_5, x_2x_3x_6, x_2x_4x_5, x_2x_4x_6, x_2x_5x_6, x_3x_4x_5, x_3x_4x_6, x_3x_5x_6, x_4x_5x_6]$
   $x_{123} \mapsto x_1x_2x_3; x_{124} \mapsto x_1x_2x_4; x_{125} \mapsto x_1x_2x_5; x_{126} \mapsto x_1x_2x_6; x_{134} \mapsto x_1x_3x_4;$
   $x_{135} \mapsto x_1x_3x_5; x_{145} \mapsto x_1x_4x_5; x_{146} \mapsto x_1x_4x_6; x_{156} \mapsto x_1x_5x_6; x_{234} \mapsto x_2x_3x_4;$
   $x_{235} \mapsto x_2x_3x_5; x_{236} \mapsto x_2x_3x_6; x_{245} \mapsto x_2x_3x_6; x_{256} \mapsto x_2x_5x_6; x_{345} \mapsto x_3x_4x_5;$
   $x_{346} \mapsto x_3x_4x_6; x_{356} \mapsto x_3x_4x_6; x_{456} \mapsto x_4x_5x_6;$
   $x_{124}x_{256} - x_{125}x_{246} \mapsto x_1x_2x_4x_2x_5x_6 - x_1x_2x_5x_2x_4x_6 = (124256) - (125246) \to 0;$

$x_{124}x_{346} - x_{134}x_{346} \mapsto (124346) - (134346) \to 0;$
$x_{124}x_{356} - x_{135}x_{246} \mapsto (124356) - (135246) \to 0;$
$x_{125}x_{134} - x_{124}x_{135} \mapsto (125134) - (124135) \to 0;$
$x_{125}x_{346} - x_{135}x_{246} \mapsto (125346) - (135246) \to 0;$
$x_{125}x_{356} - x_{135}x_{256} \mapsto (125356) - (135256) \to 0;$
$x_{134}x_{256} - x_{135}x_{246} \mapsto (134256) - (135246) \to 0;$
$x_{134}x_{356} - x_{135}x_{346} \mapsto (134356) - (135346) \to 0;$
$x_{136}x_{145} - x_{135}x_{146} \mapsto (136145) - (135146) \to 0;$

$x_{136}x_{235} - x_{135}x_{236} \mapsto (136235) - (135236) \to 0;$

$x_{136}x_{245} - x_{135}x_{246} \mapsto (136245) - (135246) \to 0;$

$x_{145}x_{235} - x_{135}x_{245} \mapsto (145235) - (135245) \to 0;$

$x_{145}x_{236} - x_{135}x_{246} \mapsto (145236) - (135246) \to 0;$

$x_{146}x_{235} -_{135} x_{246} \mapsto (146235) - (135246) \to 0;$

$x_{146}x_{236} - x_{136}x_{246} \mapsto (146236) - (136246) \to 0;$

$x_{146}x_{245} - x_{145}x_{246} \mapsto (146245) - (145246) \to 0;$

$x_{236}x_{245} - x_{235}x_{246} \mapsto (236245) - (235246) \to 0;$

$x_{256}x_{346} - x_{246}x_{356} \mapsto (256346) - (246356) \to 0;$

$I_A = (x_{124}x_{256} - x_{125}x_{246}, x_{124}x_{346} - x_{134}x_{346}, x_{124}x_{356} - x_{135}x_{246}, x_{125}x_{134} - x_{124}x_{135},$
$x_{125}x_{346} - x_{135}x_{246}, x_{12}x_{356} - x_{135}x_{256}, x_{134}x_{256} - x_{135}x_{246}, x_{134}x_{356} - x_{135}x_{346},$
$x_{136}x_{145} - x_{135}x_{146}, x_{136}x_{235} - x_{135}x_{236}, x_{136}x_{245} - x_{135}x_{246}, x_{145}x_{235} - x_{135}x_{245},$
$x_{145}x_{236} - x_{135}x_{246}, x_{146}x_{235} -_{135} x_{246}, x_{146}x_{236} - x_{136}x_{246}, x_{146}x_{245} - x_{145}x_{246},$
$x_{236}x_{245} - x_{235}x_{246}, x_{256}x_{346} - x_{246}x_{35}).$

Ci proponiamo adesso di studiare l'ipersimplesso $\Delta(3,5)$*, essendo*

$$\Delta(3,5) = conv\,\{e_i + e_j + e_k : 1 \leq i < j < k \leq 5\}.$$

Proposizione 7.7 *La base di Groebner G per* $\Delta(3,5)$ *non è nè lessicografica nè lessicografica inversa.*

Prova.

Le relazioni ottenute dalla teoria di eliminazione delle basi di Groebner, sono soltanto due binomi e precisamente

$$\underline{x_{125}x_{134}} - x_{124}x_{135}, \underline{x_{145}x_{235}} - x_{135}x_{245}$$

Poichè i monomi iniziali sono coprimi, l'insieme dei due binomi è una base di Groebner per l'ideale torico di $\Delta(3,5)$*, dove:*
$\Delta(3,5) = conv\,\{e_i + e_j + e_k : 1 \leq i < j < k \leq 5\}$.
Che essa non sia nè lessicografica, nè lessicografica inversa deriva dalla struttura dei monomi iniziali $x_{124}x_{135} >_{lex} x_{125}x_{134}$. *Per il revlex,* $x_{135}x_{245} > x_{145}x_{235}$. *Per trovare la base di Groebner lessicografica, noi dobbiamo solo calcolare la S - coppia* $S(f_1, f_2)$,
$f_1 = x_{125}x_{134} - x_{134}x_{135}$, $f_2 = x_{145}x_{235} - x_{135}x_{245}$
Essendo $in_{<}f_1 = x_{124}x_{135}, in_{<}f_2 = x_{135}x_{245}$ *otteniamo:*
$S(f_1, f_2) = x_{124}f_2 - x_{245}f_1 = x_{124}x_{145}x_{235} - x_{245}x_{125}x_{134} = f_3$
$S(f_2, f_3) = x_{135}f_3 - x_{145}x_{235}f_1 = x_{135}x_{245}x_{125}x_{134} - x_{145}x_{235}x_{125}x_{134} = x_{125}x_{134}(x_{135}x_{245} - x_{145}x_{235}) = x_{125}x_{134}f_2 \longrightarrow 0$, *modulo* f_2*.Inoltre:*
$S(f_2, f_3) \longrightarrow 0$, *dal momento che* $gcd(in_{<}f_2, in_{<}f_3) = 1$.
Abbiamo cosi ottenuto la base di Groebner lessicografica $\{f_1, f_2, f_3\}$ *per l'ordinamento delle variabili*
$x_{123} > x_{124} > x_{125} > x_{134} > x_{135} > x_{145} > x_{234} > x_{235} > x_{245} > x_{345}$.
Dal momento che $in_{<_{rev}}(f_1) = x_{124}x_{135}$ *e* $in_{<_{rev}}(f_2) = x_{135}x_{245}$*, la precedente base di Groebner lessicografica non è una base di Groebner lessicografica inversa.*

Il precedente risultato può essere generalizzato dal seguente:

Teorema 7.8 *La base di Groebner G per* $\Delta(3,n), n \geq 6$*, non è nè lessicografica nè lessicografica inversa.*

Prova. *Il corrispondente ideale torico* I_A *è il nucleo dell'omomorfismo di K- algebre* $k[x_{ijk}, 1 \leq i < j < k \leq n] \longrightarrow K[x_1, ..., x_n]$,$N = \binom{n}{3}$, $x_{ijk} \longmapsto x_i x_j x_k$.
Ogni variabile x_{ijk} *appare in alcuni termini iniziali, pertanto G non può essere*

lessicografica inversa. Le sei variabili $x_{123}, x_{234}, x_{345}, x_{456}, x_{126}$ *appaiono solo in termini iniziali, pertanto esse possono venire prima in un possibile ordinamento lessicografico. Sia X l'insieme di altre N - 6 variabili. L'ideale di eliminazione* $I_A \cap K[X]$ *ha una base di Groebner indotta* $G \cap K[X] = \{..., \underline{x_{256}x_{346}} - x_{246}x_{356}, ...\}$.
Osserviamo che le variabili $x_{125}, x_{134}, ..., x_{356}$ *appaiono in qualche termine trailing e dunque non possono essere le variabili successive in un possibile ordinamento lessicografico dei termini. Questo mostra che la base di Groebner per l'ipersimplesso* $\Delta(3, n)$ *non è nè lessicografica nè lessicografica inversa.*

BIBLIOFRAFIA

February 12, 2015

1. *W. Adams, D. Loustaneau, An introduction to Groebner basis, Graduate studies in Mathematics, Vol. 3, Am. Math. S., 1994.*

2. *A. Aramova ,J. Herzog,T.Hibi, Finite lattices and lexicographic Groebner bases, European J. of Combinatorics(2000),21,431-439.*

3. *W. Bruns, J. Herzog, Cohen - Macaulay rings. Revised edition. Cambridge Studies in advanced mathematics 39, Cambridge University Press, 1998.*

4. *A. Capani, G. Niesi and L. Robbiano, CoCoa, 1998. Avaiable via ISSS 1827 - 9015. Vol. 3 (2008),317.*

5. *D. Eisenbud, Commutative Algebra with a view towards Algebraic Geometry, Springer 1995.*

6. *D. Eisenbud, S. Goto, Linear Free resolutions and minimal molteplicity, J. Algebra 88 (1984), 84 - 133.*

7. *J. Elias, J. M. Giral, R.M. Mir Roig, S. Zarzuela Editors. Six Lectures of Commutative Algebra, Progress in Mathematics 166, Birkhaeuser.*

8. *R. Froeberg,On Stanley-Reisner ring,Topics in Algebra,Part 2, Banach Center Publications,1990.*

9. *R. Froeberg, An introduction to Groebner basis, II Series : Pure and applied mathematics, ISBN 0471 97442 0, 1977.*

10. *D.R. Grayson, M.E. Stillman. Macaulay 2. A software system for research in Algebraic Geometry and Computer Algebra, downloaded from the website http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2.*

11. A. Grothendieck, Elements d Géométrie algebrique, Chap. IV, Publi. Math. de l' H.E.S., 1964;

12. J. Herzog, G. Restuccia, Z. Tang, s - sequences and symmetric algebras, manuscripta math. 104,479 - 501, Springer - Verlag 2001.

13. J. Herzog, T. Hibi, Monomial Ideals, Graduate texts in Mathematics, Springer, 2010.

14. J. Herzog, T. Hibi, G. Restuccia, Strongly Koszul Algebras, Math. Scand.86, (2000), 161 - 178.

15. J. Herzog, T. Hibi, X. Zheng, Monomial ideals whose powers have a linear resolution, Math. Scand. 95 (2004), 23-32.

16. J. Herzog, T. Hibi, Cohen Macaulay polymatroidal ideals, European Journal of Combinatorics, 2006,Vol.27(4), 513-517.

17. J. Herzog, G. Restuccia, G. Rinaldo, Regularity and depth of the symmetric algebra, Beitrage Algebra Geom 47(I), 29-51, 2006.

18. C. Huneke, The theory of d - sequences and power of ideals. Adv. in Math. 46, 249 - 279 (1982).

19. L.T. Hoa, N.D. Tam, On some invariants of a mixed product of ideals. Arch. Math.,94 (2010), 327 - 337.

20. C. Ionescu, G. Rinaldo, Some Algebraic invariants related to mixed product ideals. Arch. Mat. (Basel) 91(2008), 20 - 30.

21. M. Kuhl, On the symmetric algebra of an ideal. Manuscripta math,. 37, 49 - 60 (1982).

22. M. La Barbiera, G.Restuccia, Mixed Product Ideals generated by s-Sequences,Algebra Colloquium ,18,553 (2011).

23. H. Matsumura, Commutative Algebra, W. A. Benjamin, New York, 1970;

24. H. Matsumura, Commutative Ring Theory, Cambridge Studies in Adv. Mathem. , 1986;

25. *E. Miller, B. Sturmfels, Combinatorial Commutative Algebra and Alebraic Geometry, Springer GTM 227(2004), Syzigy 2005.*

26. *G. Restuccia, Symmetric Algebras of finitely generated graded modules and s - sequences, Rend. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino, Vol. 64,4 (2006).*

27. *G. Restuccia, J. Herzog, Regularity functions for homogeneous algebras, Arch. Math. 76 (2001), 100-108.*

28. *G. Restuccia, P. L. Staglianò, AAPP, On the symmetric algebra of syzygy modules of monomial ideals, VOL. 92,n.2, A3(2014).*

29. *G. Restuccia, A. M. Stanganelli, On the k- Veronese square- free ideal of* $K[x_1, ..., x_n]$, *(in corso di redazione),2015.*

30. *G. Restuccia, A. M. Stanganelli, Special classes of mixed product ideals and their symmetric algebras, (in corso di redazione), 2015.*

31. *G. Restuccia, A. M. Stanganelli, 3th - hipersimplex, (in corso di redazione), 2015.*

32. *G. Restuccia, Z. Tang, R. Utano, Stanley Conjecture on monomial ideals of mixed products. Comm. Alg. 29(8), (2001) 3571 - 3580.*

33. *G.Restuccia, R. Villareal : On the normality of monomial ideals of mixed products. Commun. Algebra 29,(2001)*

34. *G.Restuccia,R.Utano,Z.Tang: On the symmetric algebra of the first syzygy module of the maximal ideal,Communications in Algebra(2014),in corso di stampa.*

35. *M. E. Rossi, Altezza e Dimensione nell` anello graduato associato ad un ideale, Rend. Sem. Mat. Uuniv. Polit. Torino, Vol. 36 (1977 - 78).*

36. *G. Rinaldo, Betti Numbers of mixed product ideals. Arch. Mat., Birkhauser Verlag, ISSN:0003 -889X, 91,PP. 416 -426,2008.*

37. *L. Sharifan, M. Varbaro, Graded Betti numbers and ideals with linear quotients, Le Matematiche, (2005), VOL. XXIII, 257-665.*

38. *A. Simis, W. Vasconcelos, On the dimension and integrality of symmetric algebras. Math. Z. 177, 341 - 358 (1981).*

39. B. Sturmfels, Groebner basis and convex polytopes, American Mathematical Society, 1996.

40. R. H. Villareal, Monomial Algebras. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 238, Marcel Dekker, New York, 2001.