UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PALERMO

Dottorato di Ricerca in Scienze Filosofiche
Indirizzo: Filosofia del Linguaggio, della Mente e dei Processi Formativi
Dipartimento di Scienze Umanistiche
Settore Scientifico Disciplinare M-FIL/05

Matematica e Ontologia. Una lettura *indispensabilista* della scienza empirica

IL DOTTORE
Dott. Vincenzo Teresi

IL COORDINATORE
Prof.ssa Francesca Piazza

IL TUTOR
Prof. Francesco La Mantia

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PALERMO

CICLO XXV
ANNO CONSEGUIMENTO TITOLO 2015

Introduzione

Nel dibattito tra realisti e antirealisti in filosofia della matematica, è centrale la posizione che si prende rispetto all'**argomento di indispensabilità**, che, come è noto, stabilisce che gli enti matematici utilizzati indispensabilmente dalle nostre migliori teorie scientifiche sul mondo esistono.

Tale conclusione è frutto, congiuntamente, di due ipotesi filosofiche piuttosto forti.

La prima è quella del **realismo scientifico**, secondo il quale le entità teoriche di cui la scienza ha bisogno per descrivere i fenomeni naturali devono necessariamente esistere (qui si parla di entità teoriche in generale, non specificatamente di oggetti matematici: potrebbe trattarsi del costrutto teorico dell'elettrone, come della forza elettrodebole o del campo gravitazionale, per fare alcuni esempi di grande importanza tratti dalla fisica fondamentale).

La seconda è quella dell'**olismo** (o tesi di Duhem-Quine), secondo cui non è possibile sottoporre a conferma o falsificazione una *singola* ipotesi scientifica; ciò che può essere confermato o falsificato dall'osservazione diretta del fenomeno naturale è una teoria scientifica nel suo complesso (ovvero un *insieme* organico di *diverse* ipotesi scientifiche).

Poichè gli enti matematici sono da considerarsi indispensabili nella formulazione della quasi totalità delle teorie scientifiche sul mondo naturale (almeno secondo la maggior parte di scienziati e filosofi della scienza), la concezione olistica porta alla conclusione che il metodo sperimentale-osservativo della scienza conferma l'esistenza non soltanto delle entità teoriche della fisica (come l'elettrone o le forze fondamentali della natura), ma anche degli enti matematici in sè (ciò, ovviamente, se si accetta anche l'ipotesi del realismo scientifico che ci impegna ontologicamente nei confronti di tutte le entità teoriche di cui la scienza ha bisogno).

L'avversario principale di questa impostazione è il nominalismo.

Diversi autori di orientamento nominalista (*in primis* Hartry Field) hanno infatti cercato di mostrare che l'ipotesi fondamentale dell'argomento di indispensabilità è errata, ovvero che gli enti matematici correntemente utilizzati dalle scienze naturali non sono affatto indispensabili per tali scienze.

Essi sono sì utili (talvolta anche molto utili, ammette lo stesso Field) all'impalcatura del calcolo e delle previsioni della fisica e delle scienze della natura in generale, ma nulla vieta, secondo i nominalisti, che la scienza del mondo fisico possa essere formulata *senza* far ricorso alla matematica e ai suoi oggetti. Field stesso ha dato, nella ben nota opera *Science without numbers*, una versione nominalizzata (cioè che non utilizza enti matematici) della teoria newtoniana della gravitazione.

Dopo tale tentativo (che si può ritenere, per certi versi, riuscito) non si è avuto però alcun tentativo analogo nei confronti delle due grandi teorie della fisica del Novecento, la meccanica quantistica e la relatività (sia ristretta che generale), né, a parere del sottoscritto, l'elaborazione di una convincente alternativa nominalistica all'utilizzo della *probabilità* in fisica classica.

Anche alcuni importanti principi di base, del tutto *deterministici*, delle scienze fisiche classiche (si pensi al 2° principio della dinamica newtoniana o alle equazioni di Maxwell) non possono fare a meno (a parere di chi scrive), per una loro convincente formulazione, di strutture matematiche fondamentali (soprattutto dell'Analisi e del Calcolo differenziale).

Nel presente lavoro cercherò di far vedere:

1. che alcuni concetti e leggi fondamentali della fisica classica (sia della meccanica che dell'elettromagnetismo) non si prestano ai procedimenti di nominalizzazione;

2. che anche l'uso della probabilità in termodinamica e nella meccanica statistica classica non è suscettibile di essere sostituito da equivalenti concetti nominalistici;

3. che la struttura profondamente *geometrizzata* della Relatività ristretta, necessaria per la deduzione dei più importanti principi di tale teoria, richiede l'utilizzo degli enti matematici fondamentali dell'*algebra lineare*;

4. che la Relatività generale, con le sue equazioni di campo stettamente dipendenti dalla *metrica*, e quindi dalla geometria, dello spaziotempo, è una teoria per la quale i concetti e gli oggetti della descrizione matematica riemanniana delle varietà a 4 dimensioni risultano *intrinsecamente* necessari;

5. che qualunque tentativo di nominalizzare la meccanica (e in generale la fisica)

quantistica è semplicemente impossibile.

La base del ragionamento che intendo delineare è il fatto che alcuni enti matematici impiegati nella versione standard di determinate teorie scientifiche sono utilizzati dagli assiomi di tali teorie in un modo non *periferico* ed *estrinseco*, ma come elementi *fondanti* (e dunque *indispensabili*) della stessa costruzione logica degli assiomi, rendendo pertanto impossibile la stessa *pensabilità* delle idee di base della teoria in oggetto al di fuori del contesto matematico e formale di corrente utilizzo.
Alla luce di quanto detto, ritengo che i principali enti matematici da prendere in considerazione ai fini della dimostrazione dell'indispensabilità della Matematica nei confronti delle Scienze della Natura siano i seguenti:

1. I numeri;

2. Le funzioni;

3. Gli insiemi.

Ma prima di entrare nelle questioni specifiche implicate da questi punti è necessario vedere più in dettaglio i termini del confronto realismo-nominalismo relativamente al problema dell'esistenza degli enti matematici.
Abbiamo già visto che, da parte realista, l'argomento forte (e in ogni caso quello su cui intendo basare la mia analisi) è quello di indispensabilità.
In che modo, dunque, i nominalisti, ed Hartry Field in particolare, pretendono di confutare tale argomento?
Il ragionamento di Field si basa sull'ipotesi (da Field stesso ritenuta non contestabile) della cosiddetta *conservatività* della matematica. Da tale importante proprietà delle teorie matematiche seguirebbe direttamente il fatto che tali teorie non sono indispensabili per le scienze della natura.
Vediamo nello specifico cosa si intende per conservatività della matematica, e in particolare come la definisce proprio H. Field.

Il filosofo americano parte dalla domanda: quand'è che una teoria matematica è *buona* (ovvero utile) per le scienze della natura? Ovviamente deve essere consistente, ma, ammette Field, ciò non basta. Dobbiamo infatti avere la certezza che, utilizzando tale teoria matematica in supporto ad un *corpus* di assiomi (ritenuti veri) sul mondo fisico, non ci accada di dedurre da tali assiomi conseguenze false.

Più in dettaglio, Field, che è un nominalista, schematizza il ragionamento nel modo seguente.

Supponiamo di disporre di un set N di assiomi nominalisti (ovvero non facenti riferimento ad entità teoriche) sulla natura. Supponiamo anche di conoscere una teoria matematica S che ci sembra poter essere utile nello sviluppo delle predizioni di N sui fenomeni naturali. E' chiaro che S è una teoria *buona* se e solo se il sistema teorico N + S porta *sempre* (ovvero *necessariamente*) a conseguenze nominaliste vere sul mondo fisico.

Per aversi tale proprietà, S deve essere consistente con *ogni* teoria nominalista internamente consistente a proposito del mondo naturale. Ma, se è data tale consistenza di S con *tutti* gli assiomi nominalisti che si possono enunciare sui fenomeni fisici, allora è anche chiaro che S non potrà consentire di trovare alcun asserto nominalista sulla natura che sia *nuovo*, cioè non deducibile da N solo.

Questa impostazione dà quindi luogo a due definizioni equivalenti di conservatività della matematica. La prima, secondo cui

una teoria matematica S è conservativa se e solo se è consistente con *ogni* teoria nominalista internamente consistente a proposito del mondo naturale,

è proprio la definizione data da Field.

La seconda, in base alla quale

una teoria matematica S è conservativa se e solo se qualunque asserto nominalista sul mondo fisico deducibile da N + S (dove N è un set di assiomi nominalisti sulla natura) è deducibile anche da N solo,

è quella corrente.

Le due definizioni, come ho cercato di illustrare, sono logicamente equivalenti.
Esse, in buona sostanza, dicono che, se una teoria matematica è *buona* per essere utilizzata dalle scienze fisiche, *non deve dare cattive sorprese*, cioè non deve portare ad asserti falsi sul mondo partendo dagli assiomi di una teoria nominalista sulla natura che riteniamo vera.
Ma il *prezzo da pagare* perchè tale teoria matematica non riservi conseguenze inaccettabili sul mondo fisico è che *non porterà* nemmeno *a nulla di nuovo*. Tutto quello che potrà fare sarà *facilitare* determinate deduzioni della teoria fisica in supporto alla quale è utilizzata, deduzioni che potrebbero comunque essere ottenute direttamente dagli assiomi nominalisti della teoria fisica, anche se con dimostrazioni più lunghe, faticose e complesse.
Dunque, è la conclusione di Field, la matematica, a ben guardare, è dispensabile. La fisica (e con essa tutte le scienze della natura) può fare a meno delle teorie matematiche, le quali si riducono a semplici strumenti dell'argomentare (e del prevedere) scientifico che possono in ogni caso essere sostituiti da procedure nominaliste, ovvero da tecniche di ragionamento che prescindono dal riferimento ad enti astratti (matematici).
Tra l'altro, argomenta Field, è vero che tali procedure nominaliste sono in genere più lunghe e complesse rispetto alle omologhe procedure che fanno ricorso ad oggetti e proposizioni della matematica standard, ma non bisogna dimenticare che l'apprendimento della matematica (necessario e previo alle procedure argomentative e di calcolo delle teorie scientifiche correnti) richiede già *a priori* un lavoro ed uno sforzo non indifferenti, prima di potere applicare appropriatamente principi, teoremi e tecniche della matematica alla costruzione di una teoria scientifica.
Inoltre, sempre secondo Field, l'approccio nominalista ha il merito di evidenziare l'*essenziale* del contenuto della descrizione scientifica del mondo, *saltando* il passaggio attraverso l'ente e l'asserto matematico e con esso il ruolo *intermediario* (nella struttura logica del discorso scientifico) della matematica e delle sue procedure dimostrative.
La soluzione proposta dal filosofo americano per rispondere alla domanda sullo statuto epistemologico della matematica è dunque nettamente anti-realista e si muove nell'ambito di quella corrente della filosofia della matematica che va sotto il nome di *finzionalismo*.
Per Field gli asserti della matematica sono, parlando in senso stretto, falsi. Essi, infatti, alludono ad enti verso cui, una volta confutato l'argomento di indispensabilità, non risulta ragionevole formulare alcun genere di impegno ontologico (semplicemente ... non

esistono!). Come tutte le proposizioni che riguardano oggetti inesistenti, le proposizioni della matematica sono *a rigori* false o, al più, *vere vacuamente*. (ossia vere appunto in assenza degli oggetti di cui parlano).

Escludendo il caso degli asserti veri vacuamente (che è un caso alquanto residuale, molto poco interessante per la stragrande parte dell'edificio della matematica standard), rimane così il problema di come distinguere tra di loro asserti come '2 + 2 = 4' e '2 + 2 = 76', dal momento che *entrambi*, per il filosofo della matematica nominalista, sono ... falsi!

La soluzione finzionalista proposta da Field ricorre al concetto della cosiddetta *verità-nella-storia*.

Cerchiamo di vederlo con un certo dettaglio.

Una proposizione matematica può essere vista, secondo questa corrente della filosofia della matematica, in analogia con una proposizione di un racconto o di un romanzo (di una *storia*, appunto) scritto da un narratore. Le asserzioni che lo scrittore fa nel suo racconto sui personaggi del racconto stesso sono asserzioni, a rigor di termini, false, in quanto i personaggi della narrazione non esistono (si sta parlando, ovviamente, di una storia di invenzione). E tuttavia tali asserzioni sono *vere* nell'ambito del racconto stesso!

In altri termini Field (e con lui i finzionalisti in generale) definisce un nuovo predicato, il predicato *vero-nella-storia*, che funziona nella storia (cioè nel racconto del narratore, nell'esempio citato) allo stesso modo in cui il predicato ordinario *vero* funziona nella descrizione linguistica del mondo reale.

Ovviamente, nel caso degli asserti matematici, la storia in questione non è un racconto di avventura o d'amore, ma è la teoria matematica nell'ambito della quale un dato asserto viene formulato (e dimostrato).

Vediamo adesso su quali basi H. Field imposta la sua strategia di nominalizzazione della fisica newtoniana, ed in particolare della teoria della gravitazione.

Il fondamento della procedura è il Teorema di Hilbert, teorema molto importante della geometria e della matematica del Novecento che si propone di fornire gli strumenti di base per una descrizione dello spazio che faccia a meno dell'utilizzo dei numeri (reali, ma anche razionali e naturali).

Nella versione corrente della geometria i numeri sono utilizzati come valori della funzione distanza tra due punti dello spazio.

L'idea di Hilbert consiste nell'introdurre due relazioni (rispettivamente tra quaterne e terne di punti) che consentano di confrontare tra di loro due distanze e valutare l'appartenenza di un punto ad un segmento. Tutti i teoremi della geometria standard possono essere sostituiti da equivalenti nominalistici che fanno uso delle due relazioni definite da Hilbert.
Tali relazioni sono:

y Bet xz   se e solo se   y è un punto del segmento [x, z]   (dist(x, z) = dist(x, y) + dist(y, z))

xy Cong zw   se e solo se   i segmenti [x, y] e [z, w] sono uguali   (dist(x, y) = dist(z, w))

Può essere aggiunta (anche se in realtà non è necessario assumerla come primitiva) una terza relazione che sostituisce l'uguaglianza delle ampiezze degli angoli:

xyz A-Cong uvw   se e solo se   le ampiezze degli angoli xyz (con vertice in y) e uvw (con vertice in v) sono uguali

Il simbolo *dist* nelle formule precedenti indica la funzione distanza tra due punti definita nella versione corrente della geometria euclidea, funzione avente per dominio lo spazio euclideo tridimensionale e per codominio l'insieme dei numeri reali.
Ovviamente Field deve andare ben al di là di questa sia pure già molto importante procedura di nominalizzazione (che non coinvolge principi, concetti e tecniche di calcolo della fisica).
Il filosofo americano, quindi, sulla *falsa riga* del percorso tracciato da Hilbert, definisce altre due relazioni, che consentono di effettuare confronti e valutazioni che riguardano proprietà fisicamente significative (legate, nella versione standard della fisica newtoniana, ad alcune grandezze fondanti della teoria come il potenziale e la forza gravitazionale) senza utilizzare i numeri reali e le funzioni.
Senza entrare nel dettaglio delle definizioni di queste due relazioni, diciamo soltanto che esse permettono di sostituire con equivalenti tecniche nominalistiche le operazioni basate sul calcolo differenziale da cui si ottengono le componenti spaziali della forza gravitazionale (definite come derivate parziali dell'energia potenziale gravitazionale rispetto alle coordinate spaziali).

In definitiva, a parere del sottoscritto, la procedura di nominalizzazione elaborata da Field si può ritenere, dal punto di vista *strettamente tecnico* e per ciò che riguarda la teoria newtoniana della gravitazione, riuscita.

Sulle perplessità di carattere *prettamente concettuale*, che, a mio parere, l'impostazione di Field non può non suscitare, tornerò successivamente.

Qui intendo mettere in evidenza il fatto, estremamente importante per la fisica degli ultimi due secoli, che nessuna procedura di nominalizzazione è stata mai proposta (nemmeno dallo stesso Hartry Field) per quelle teorie (termodinamica, meccanica statistica, meccanica quantistica) che fondano la descrizione e la previsione dei fenomeni fisici di loro interesse sul concetto di *probabilità*, e quindi sull'utilizzo dei *reali* per il calcolo teorico delle frequenze attese di eventi statisticamente distribuiti essenziali per il determinarsi di proprietà salienti di importanti sistemi fisici.

Tali proprietà vanno definite come *proprietà tipiche* e proprio sul concetto di tipicità intendo sviluppare l'approfondimento che segue nel prossimo capitolo.

Successivamente (Cap. 2) verrà messo in evidenza il ruolo indispensabile del concetto di *funzione* in fisica classica (sia nella meccanica di Newton che nella teoria elettromagnetica di Maxwell) e, di nuovo, in meccanica quantistica.

Nel Cap. 3 si cercherà poi di dimostrare l'indispensabilità degli *insiemi*, in quanto enti dotati di strutture algebriche e geometriche fondamentali per tutta la fisica del Novecento (quantistica e relativistica).

Infine (nel Cap. 4) verranno confrontate le argomentazioni già sviluppate (nei tre capitoli precedenti) in favore della tesi indispensabilista con le principali obiezioni a tale tesi avanzate nel dibattito filosofico attuale.

Il realismo in filosofia della matematica. Oggetti o strutture?

Negli ultimi decenni, il dibattito in filosofia della matematica sulla questione del realismo si è ulteriormente complicato a causa della riflessione condotta da alcuni autori sulla *natura* degli enti matematici.

All'originaria domanda “Esistono gli enti matematici?” si è affiancato l'interrogativo

strettamente correlato “Cosa sono gli enti matematici?”.
In realtà è molto difficile separare le due domande, in quanto, come ognuno può facilmente comprendere, non è chiaro come si possa rispondere al quesito circa l'esistenza di un ente se contestualmente non si cerca di capire di *che cosa* si sta ponendo la questione dell'esistenza, così come è difficile risolvere il problema di cosa possa essere un ente se allo stesso tempo non si cerca di individuare ciò che dà ragione dell'*esistenza* di quell'ente.
Non rientra negli scopi di questo lavoro ricostruire tutta l'articolazione del dibattito sul problema della natura, congiunto a quello dell'esistenza, degli enti matematici.
Tuttavia è senz'altro importante chiarire le linee fondamentali della questione della natura degli enti matematici in riferimento al tema dell'*indispensabilità*: di che genere di enti matematici hanno (eventualmente) bisogno le teorie scientifiche sul mondo fisico?
Una ricognizione generale, e ad un tempo sufficientemente attenta, dell'uso della matematica nelle scienze della natura mette in effetti in evidenza il fatto che la formulazione delle leggi naturali in ambito scientifico include spesso l'utilizzo degli enti matematici per individuare e schematizzare concettualmente **relazioni** e **connessioni** organiche tra entità fisiche.
Come è noto, l'idea di struttura (piuttosto che di oggetto) in filosofia della matematica nasce proprio dalla consapevolezza che, in matematica, è spesso molto più importante definire delle relazioni formali ai fini dell'individuazione di realtà cui si è interessati per le loro proprietà matematiche (si pensi, come esempi, alla nozione di gruppo o a quella di spazio vettoriale), piuttosto che conoscere pienamente la natura degli oggetti che tali relazioni connettono.
Per riprendere l'esempio del concetto di gruppo (o di una struttura algebrica in generale), è chiaro che tale realtà (il gruppo) non è definita grazie alla conoscenza della natura dei suoi elementi, ma dalle relazioni formali che vengono imposte tra tali elementi (le relazioni che sono date dalle proprietà delle operazioni definite tra gli elementi del gruppo). Non ha molto senso chiedersi *cosa* sono gli elementi del gruppo in sé stessi: le proprietà che definiscono la nozione di gruppo sono *proprietà delle operazioni* definite tra gli elementi del gruppo e non *proprietà degli elementi*.
Ciò che conta, per caratterizzare il concetto di gruppo, è la *struttura* conferita all'insieme degli elementi del gruppo da operazioni dotate di certe proprietà.

Un gruppo non è un insieme di elementi di cui si conosce la natura, ma un insieme di elementi di cui si conoscono determinate *proprietà relazionali* (le proprietà delle operazioni definite all'interno del gruppo stesso).
L'idea di *struttura* sembra quindi essere quella più adatta per intendere il ruolo degli enti matematici nelle scienze della natura, essendo tale idea basata sulle relazioni tra gli elementi su cui è definita ed essendo le relazioni, per le teorie scientifiche sul mondo, ciò che necessita di essere concettualizzato e posto ai fini dell'individuazione delle leggi di natura.
Potrà risultare utile anche un breve accenno all'analogia tra il moderno concetto di *struttura* e quello (di antica e nobile origine nella tradizione filosofica occidentale) di *universale*.
Anche nel dibattito tradizionale (in particolare medievale) sugli universali si sono storicamente confrontati l'orientamento realista e quello nominalista.
Per i realisti gli universali possono essere:

a. *archetipi* esistenti in sé (nella mente di Dio) *prima* delle cose particolari (universali *ante rem*);

b. *essenze* reali delle cose particolari (universali *in re*);

c. *prodotti* reali della nostra attività mentale, in quanto tali aventi un ruolo fondante nella creazione dei concetti (universali *post rem*).

Per i nominalisti all'*universale* non corrisponde invece alcuna *realtà*, trattandosi soltanto di un *nome* convenzionalmente utilizzato per ragioni di comodità e snellimento linguistici.
Gli orientamenti principali del cosiddetto *realismo delle strutture* nel contemporaneo dibattito ontologico, e in particolare nell'attuale filosofia della matematica, ricalcano (con un parallelismo piuttosto netto) le tre fondamentali correnti dell'antica tradizione realista sugli universali.
Chi scrive è del parere che vi siano ragioni sufficientemente convincenti (soprattutto, come si è detto, alla luce dell'indispensabilità della matematica nelle scienze della natura) per ritenere che gli enti matematici vadano intesi più come strutture che come oggetti *in senso stretto*.

Nel seguito si utilizzeranno indifferentemente le espressioni *enti matematici* e *oggetti matematici*, ma resta inteso che entrambe non fanno riferimento al concetto di oggetto in senso stretto, ma tendono piuttosto ad indicare realtà relazionali da considerarsi sì effettivamente esistenti, ma – appunto – come *tipologie di connessioni* (tra oggetti) assimilabili al concetto ontologico di struttura.

Capitolo 1. L'indispensabilità dei numeri. La teoria della probabilità in Fisica.

1.1 L'uso della probabilità in termodinamica e il concetto di proprietà tipica.

Non è un'esposizione come questa il *luogo* appropriato per descrivere in dettaglio principi, schemi teorici e metodi della **termodinamica** e dei paradigmi di meccanica statistica che possono essere usati per ottenere un certo tipo di *insight* teorico dei fenomeni studiati da questa branca della fisica.

Tuttavia alcuni concetti fondamentali devono essere chiaramente, anche se sinteticamente, richiamati.

La termodinamica studia tutti quei fenomeni che sono connessi con lo scambio di calore e lavoro meccanico tra sistemi gassosi, e in particolare le *trasformazioni* (espansioni, compressioni, riscaldamenti, raffreddamenti) di tali sistemi.

Il primo aspetto di un certo interesse che salta subito all'attenzione, già fin da una definizione molto semplice come questa, è il *salto di livello descrittivo* rispetto alla meccanica newtoniana, ovvero il fatto che non stiamo più parlando di leggi del moto, traiettorie e grandezze cinematico-dinamiche relative a *singole* particelle, ma il nostro sguardo si concentra direttamente su di un sistema formato da un numero molto grande di particelle (le molecole del sistema gassoso in questione).

Nel linguaggio tecnico della termodinamica, si dice che la nostra attenzione è focalizzata su grandezze *macroscopiche*, che nello specifico sono: pressione, temperatura, volume, energia interna, calore, lavoro, per citare le principali, più altre di minore importanza.

Il livello macroscopico è proprio quello del sistema gassoso nel suo complesso, in opposizione al livello *microscopico*, che è quello della dinamica della singola molecola del gas.

L'idea che si possano trattare teoricamente fenomeni concernenti un sistema composto di molte particelle *senza* fare riferimento diretto alle leggi cinematiche e dinamiche che regolano il comportamento della particella singola è, come si può facilmente capire, un'idea piuttosto problematica e che necessita di un solido supporto teorico in grado di coprire il *gap* di livello descrittivo tra fisica microscopica e macroscopica.

Tale supporto teorico è fornito dal concetto matematico di **probabilità** e da quello fisico di **proprietà tipica**.

In effetti, a ben guardare, si ha che la teoria matematica della probabilità, *attraverso* il punto di vista fisico della proprietà tipica, fornisce alla termodinamica le basi teoriche per giustificare in modo rigoroso la propria descrizione macroscopica di tutta una classe di sistemi a molte particelle.

Vediamo tutto questo attraverso un esempio concreto.

Supponiamo di osservare l'evoluzione di un sistema costituito da due masse gassose, inizialmente separate e a due temperature diverse T_1 e T_2, che ad un certo istante vengono poste a contatto l'una con l'altra e lasciate evolvere liberamente.

Quello che ci aspettiamo, con un altissimo livello di confidenza che ci viene dalla fisica ingenua appresa mediante la nostra esperienza, è che, dopo un certo tempo Δt, si formi un'unica massa gassosa tutta alla stessa temperatura, e che, tra l'altro, tale temperatura debba necessariamente avere un valore intermedio T_m tra T_1 e T_2.

Se tale aspettativa è corretta (e in effetti l'osservazione condotta scientificamente dimostra che lo è), possiamo concludere che la proprietà che il sistema in oggetto esibisce dopo il tempo Δt (cioè la temperatura *uniforme* sul sistema gassoso complessivo e con valore pari a T_m) sia la proprietà che *tipicamente* il sistema esibisce alla fine della trasformazione termodinamica avvenuta.

Nulla infatti vieterebbe, dal punto di vista delle leggi del moto delle singole molecole, che il gas più caldo diventasse ancora più caldo e quello più freddo ancora più freddo (ovviamente con un vincolo ben preciso sulla relazione tra l'entità del riscaldamento e l'entità del raffreddamento, vincolo dato dal principio di conservazione dell'energia, che, infatti, è un principio che regola la dinamica microscopica delle singole molecole del sistema gassoso).

L'osservazione mostra che il *comportamento* descritto è quello *tipico* (e la *proprietà* esibita dal sistema alla fine dell'esperimento è quella *tipica*), senza escludere in modo tassativo che possano verificarsi casi, per quanto estremamente rari, in cui i valori delle due temperature, invece di equalizzarsi, si allontanino ancor più l'uno dall'altro.

Se si deve ammettere, sulla base delle leggi dinamiche microscopiche, che tali casi eccezionali possano verificarsi, la proposta più promettente per arrivare ad un'adeguata comprensione teorica del problema è quella di fare ricorso alla teoria della probabilità.

L'applicazione di tale teoria al fenomeno in oggetto, ovviamente, per potere dare luogo ad una valida spiegazione del fenomeno stesso, deve produrre come risultato il fatto che, mentre per il processo di equalizzazione delle temperature la probabilità calcolata sarà molto alta (anche se non pari ad 1), viceversa per il processo di divergenza delle temperature delle due masse gassose la probabilità calcolata sarà estremamente bassa, così bassa che il numero di esperimenti che si dovrebbero fare per arrivare a rilevare una sola occorrenza del processo sarebbe enorme, al punto da rendere praticamente impossibile osservare il processo (anche una sola volta) in un tempo paragonabile con quello dell'attuale durata della storia umana (o, meglio, con il tempo di vita dell'Universo: in tal caso non avremmo alcuna possibilità, nemmeno in un futuro lontanissimo, di osservare il processo).

In altri termini, secondo tale approccio, il concetto di probabilità può costituire un fondamento teorico solido (e, in termini di calcolo finalizzato alle previsioni, anche molto potente) dell'idea di proprietà tipica: é tipica quella proprietà che ha un'altissima probabilità di presentarsi; non tipica, e, di fatto, impossibile da osservare, quella proprietà che ha una bassissima probabilità di presentarsi.

Una precisazione (che poi è una generalizzazione di un aspetto dell'esempio descritto) è d'obbligo.

La proprietà tipica, come proprietà che si presenta *praticamente sempre* sotto determinate condizioni, può essere definita sensatamente soltanto in quello stato del sistema fisico che dovrebbe esibirla che va sotto il nome di **equilibrio termodinamico**.

Per equilibrio termodinamico si intende quello stato in cui il sistema, nelle condizioni date (supposte invarianti), permane indefinitamente (finchè, quindi, non intervenga un cambiamento di quelle condizioni).

Nell'esempio citato, lo stato di equilibrio termodinamico è raggiunto dal sistema dopo il tempo Δt necessario per l'equalizzazione delle temperature. Soltanto allora, infatti, lo stato del sistema non cambia più, laddove, invece, durante l'intervallo di tempo Δt, lo stato del gas era in continuo mutamento: le temperature delle due masse gassose variavano nel tempo in modo significativo, avvicinandosi e dando luogo ad una distribuzione spaziale di temperature in continua evoluzione, fino all'esito conclusivo di una distribuzione uniforme alla temperatura T_m.

E' evidente, già ad un primo colpo d'occhio su tutta la questione, che il ruolo giocato dalla teoria della probabilità, e dunque dalla matematica e dai numeri reali in particolare, nella giustificazione teorica della termodinamica è un ruolo certamente forte e determinante.

E tuttavia il nostro filosofo nominalista, molto verosimilmente, ribatterebbe qualcosa del genere: senza dubbio, in *questo* tipo di formulazione del costrutto teorico termodinamico-statistico, la matematica gioca un grande ruolo; ma tale ruolo è *indispensabile*? Ossia, è proprio vero che non è possibile riformulare il legame logico tra termodinamica e statistica senza far uso della matematica, e, nello specifico, senza far uso dei numeri reali (che sono i valori calcolati delle probabilità utilizzate per definire la proprietà tipica)?

Una risposta approfondita a questa domanda implica un'indagine dettagliata sulla struttura logico-formale della teoria della probabilità, indagine che mi propongo di sviluppare nel seguito.

Ma prima cercherò di far vedere come anche nella struttura teorica e matematica della meccanica quantistica la ben nota presenza del concetto di probabilità, oltre a giocare un ruolo certamente essenziale, sia legata, analogamente a quanto avviene in termodinamica, al problema del salto di livello micro-macroscopico.

1.2 L'uso della probabilità in meccanica quantistica e il salto di livello micro-macroscopico.

Anche la meccanica quantistica si serve, come è noto, della teoria della probabilità. Ciò in virtù del fatto che i suoi assiomi permettono di determinare le leggi evolutive delle cosiddette *funzioni d'onda* dei sistemi fisici (quantistici), funzioni complesse aventi per argomenti le coordinate (reali) che descrivono i gradi di libertà del sistema (il caso più semplice è quello della particella singola, considerata puntiforme, per la quale la funzione d'onda dipende dalla terna di reali che individua la posizione nello spazio della particella).

La conoscenza della funzione d'onda di un sistema ad un dato tempo *t* non consente di determinare i valori di tutte le grandezze fisiche che caratterizzano il sistema al tempo *t*.

Essa consente *soltanto* di ottenere (attraverso il calcolo del quadrato del modulo della funzione d'onda stessa) la distribuzione della probabilità dei diversi valori possibili della grandezza in questione (per esempio, riprendendo il caso della particella singola e puntiforme, la distribuzione della probabilità di rivelare la particella in un dato punto dello spazio).

In termini più concettuali, la funzione d'onda descrive uno *spettro di possibilità*, alle quali attribuisce ben precisi *pesi* (matematicamente le probabilità) che consentono di attribuire ai diversi valori possibili delle grandezze fisiche diverse significatività statistiche nella ripetizione dell'identico esperimento per un numero molto grande di volte.

Ovviamente il concetto stesso di probabilità di un certo (ben determinato) valore di una grandezza fisica ha senso, in questa cornice teorica, solo in quanto, nel momento in cui si misura il valore della grandezza, si ottiene *un solo* valore, e non l'intero spettro dei valori possibili (né una sua porzione).

E' questo il cosiddetto *principio del collasso della funzione d'onda*: nel momento in cui la grandezza fisica G viene misurata, la funzione d'onda del sistema collassa in un'altra funzione d'onda, caratterizzata da un ben determinato valore di G (che sarà il risultato della misura) e denominata autostato di G.

In un certo senso, potremmo dire che la distribuzione di probabilità data dalla funzione d'onda *muore* nel momento in cui si effettua l'operazione di misura, la quale, sempre in un certo senso, segna dunque il riaffermarsi del *mondo classico* su quello che, fino a un attimo prima della misura, era (o sembrava ...) un mondo completamente diverso, con grandezze distribuite e non dotate di valori ben determinati, in una parola il *mondo quantistico*.

Qualunque sguardo attento, onestamente deciso a comprendere fino in fondo i termini precisi di una tale descrizione del problema, non potrà immediatamente non notare l'indeterminatezza dei concetti di mondo classico e mondo quantistico. Qual è il criterio per distinguere quando un sistema si deve comportare in modo classico e quando in modo quantistico?

Dall'esposizione sopra riportata risulta evidente un primo aspetto: la transizione dal comportamento quantistico a quello classico si ha a causa dell'intervento dell'operazione di misura. Ciò porta ad una considerazione tanto elementare quanto importante: dal momento che, fino all'istante in cui avviene la misura, il *sistema microscopico* (l'atomo, l'elettrone, o una qualunque particella elementare, per fare solo alcuni esempi) è *lasciato a sé stesso*, cioè senza alcuna influenza da parte dell'osservatore, mentre l'operazione di misura segna un intervento sul suo stato fisico da parte di un *sistema macroscopico* (l'apparato di misura), bisogna concludere che la transizione dal comportamento quantistico a quello classico non è altro che la **transizione dal livello microscopico a quello macroscopico**, ovvero quello stesso tipo di transizione che avevamo individuato nella spiegazione meccanico-statistica della termodinamica.

La differenza, rispetto al caso della termodinamica, consiste soltanto in un aspetto, certamente di importanza non trascurabile, del problema: mentre in termodinamica il salto di livello micro-macroscopico riguarda il sistema osservato in sé stesso (si passa dalla dinamica della singola molecola, deterministica, alla dinamica di un gas, o sistema a molte molecole, che deve essere descritta con un approccio stocastico), in meccanica quantistica la transizione 'micro-macro' concerne il passaggio dal sistema osservato *da solo* al sistema osservato *in interazione con l'osservatore*.

Ma in entrambi i casi è proprio il passaggio dal livello microscopico a quello macroscopico a rendere necessario l'utilizzo del concetto di probabilità e della matematica ad esso collegata.

L'idea di **possibilità** mi sembra essere il punto *cardine* di tale intervento della probabilità nella formulazione delle leggi della fisica (sia essa classica, come la termodinamica, o quantistica, come la fisica atomica o la fisica delle particelle elementari).

Diverse, infatti, sono le *possibilità* intrinseche del risultato della misura di alcune fondamentali proprietà macroscopiche in termodinamica (come i diversi valori possibili della temperatura, della pressione o dell'energia interna di un gas), allo stesso modo in cui diverse sono le *possibilità* inerenti alla misura di importanti grandezze microscopiche in meccanica quantistica (come i diversi valori possibili di posizione, velocità, momento di un elettrone) da parte di un sistema macroscopico (l'osservatore, ovvero l'apparato di misura).

In termodinamica, tale **spazio delle possibilità** è studiato (e utilizzato per la previsione dei fenomeni macroscopici) mediante, *in primis*, il concetto di *proprietà tipica* (come si è visto nel paragrafo precedente).

In meccanica quantistica, mediante il principio del collasso della funzione d'onda

descriviamo il fatto che l'interazione con il sistema macroscopico dell'apparato di misura produce l'*estrazione* dei *valori più probabili* (dunque, anche qui, in qualche modo *tipici*) dell'osservabile misurato.
Di nuovo, a mio parere, non può non risuonare la domanda (retorica) del filosofo della matematica realista: quale fisica, sia di sistemi macroscopici termodinamici, sia di sistemi microscopici quantistici, è possibile senza la matematica della probabilità?

1.3 Determinismo, possibilità e matematica.

Come detto nel paragrafo precedente, il concetto di possibilità è alla base dell'uso della teoria della probabilità in fisica.
Un approfondimento di questo importante tema filosofico (relativamente, appunto, ai principi e ai metodi della ricerca nell'ambito delle scienze della natura) è a questo punto necessario in ordine proprio alla comprensione delle ragioni dell'indispensabilità per ciò che riguarda il concetto di probabilità e la teoria matematica ad esso collegata.
I due orientamenti fondamentali per le scienze della natura (ed in particolare per la fisica) negli ultimi due secoli sono, per quanto concerne le basi ontologiche delle pratiche conoscitive scientifiche, il determinismo e l'indeterminismo.
Il primo si è affermato nel Seicento e nel Settecento, con la Meccanica e la teoria newtoniana del moto e della gravitazione, il secondo nell'Ottocento e nel Novecento, con le già ampiamente richiamate costruzioni teoriche della Termodinamica e della Fisica quantistica, ma anche della Fisica dei sistemi non lineari e della dinamica stocastica (su cui tornerò in seguito).
Il paradigma deterministico si afferma con l'applicazione della teoria delle equazioni differenziali alla problematica del moto dei corpi. Per tale paradigma, tutte le dinamiche possibili di un corpo all'interno di un campo di forza sono esattamente previste dall'equazione differenziale che traduce il secondo principio di Newton

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

dove ***F*** è la funzione della posizione del corpo (considerato puntiforme) al tempo *t*, il cui significato fisico consiste nel fornire il valore della forza cui è soggetto il corpo a quel tempo *t*, *m* è una costante reale che dà il valore della massa (o inerzia) del corpo, ***a*** è la derivata seconda rispetto al tempo della funzione ***r(t)*** che fornisce la posizione del corpo al tempo *t*, il cui significato fisico consiste nel dare il valore istantaneo dell'accelerazione del corpo (sempre al tempo *t*).

F, ***a*** ed ***r(t)*** sono vettori tridimensionali (forza, accelerazione e posizione hanno tre componenti, corrispondenti alle tre dimensioni dello spazio fisico ordinario).

Come è noto, la forza F è un campo (vettoriale) definito sullo spazio delle posizioni del corpo i cui valori dipendono dalla sorgente (o le sorgenti) del campo di forza stesso.

Poichè tali sorgenti possono essere a loro volta altri corpi, la dinamica di ognuno dei quali dipende, sempre attraverso il secondo principio di Newton, dagli altri corpi, in definitiva risulterà che la dinamica dell'intero sistema di corpi è descritta da un *sistema di equazioni differenziali* accoppiate, ognuna delle quali corrisponde ad uno dei corpi (nel senso che contiene la posizione ***r(t)*** di quel corpo), ma allo stesso tempo contiene una funzione (la forza ***F***) il cui valore istantaneo dipende dalle proprietà e dalla posizione relativa degli altri corpi.

Tutte le possibilità che nella realtà effettuale possono darsi per la dinamica del sistema di corpi sono *a priori* previste, definite e totalmente esaurite dallo strumento matematico del sistema di equazioni differenziali.

Non mi dilungherò qui sul cosiddetto problema della *sensibilità alle condizioni iniziali* che già scaturisce, in diversi casi, da questo *framework* teorico quando il campo di forza ha una certa forma funzionale (si pensi al *problema dei tre corpi* nel caso del campo gravitazionale).

Dirò soltanto che, in linea di principio e, di fatto, per una serie di casi in cui il campo di forza dipende dalla posizione in modo sufficientemente *smooth* (ovvero la forza varia non troppo velocemente al variare della posizione), lo schematismo matematico delle equazioni differenziali accoppiate dà luogo ad una **ontologia deterministica**.

Si ha cioè l'importante circostanza in cui le equazioni differenziali che descrivono la dinamica del sistema fisico (un sistema di oggetti puntiformi, nella sua definizione più generale) non sono più *soltanto* uno strumento per calcolare lo stato del sistema ad un tempo posteriore a quello delle condizioni iniziali (che devono essere note perchè si possano risolvere le equazioni differenziali stesse), ma si configurano come quella struttura teorica e concettuale che consente di pensare *a priori* e definire in modo rigoroso ed esatto l'*intero* campo delle possibilità che di fatto la realtà fisica concreta può esprimere.

Il reale è *determinato a priori* dallo schematismo matematico adottato (quello delle equazioni differenziali) e nessuna evoluzione di alcun sistema fisico ipotizzabile può *uscire* dal campo di possibilità che lo schematismo matematico è in grado di prevedere *a priori* una volta date le condizioni iniziali.

Il possibile (nel senso di *definibile e prevedibile a priori* mediante lo schematismo matematico delle equazioni differenziali) **coincide con** tutto **l'effettuale** che il mondo può rivelare nella sua storia evolutiva.

E' chiaro che, rispetto a una tale concezione, la Termodinamica e la fisica del Novecento (Meccanica quantistica, Fisica dei sistemi non lineari, Dinamica stocastica, Teoria del caos) hanno introdotto una visione dell'idea di possibilità significativamente differente.

Ho illustrato il tema della distribuzione probabilistica dei valori possibili di una data grandezza fisica in uno stato quantistico (rappresentato da una funzione d'onda) di un sistema microscopico. L'equazione differenziale che governa l'evoluzione temporale della funzione d'onda (ad esempio, l'equazione di Schroedinger nel caso della dinamica classica dell'elettrone, l'equazione di Dirac per la dinamica relativistica dell'elettrone, l'equazione di Klein-Gordon per il mesone) non ha più il compito, come le equazioni del moto nella fisica newtoniana, di permettere di prevedere esattamente (ad un qualunque tempo t successivo al tempo t_0 delle condizioni iniziali) il valore di una grandezza fisica G che caratterizza lo stato del sistema. Essa consente soltanto di prevedere la distribuzione di probabilità dei valori possibili come risultati della misura di G.

Ciò significa che il paradigma deterministico non è più quello adeguato all'interpretazione filosofica della descrizione scientifica del mondo (almeno del mondo microscopico).

Le possibilità che la realtà naturale può esprimere non sono più *definibili e prevedibili a priori* mediante lo schematismo matematico delle equazioni differenziali, né esiste (almeno secondo tutte le versioni comunemente accettate della Meccanica quantistica) alcuno schematismo matematico che consenta di reintrodurre la piena prevedibilità di tipo classico nella struttura teorica della fisica microscopica.

E' noto (e vi abbiamo accennato prima in questo stesso lavoro) che il tentativo nominalista di costruire una fisica che possa fare a meno degli enti matematici è basato sull'uso di alcune relazioni che consentono di paragonare direttamente entità di carattere fisico, sostituendo il calcolo della forza come gradiente dell'energia potenziale con una procedura che evita di utilizzare il concetto di derivata.

Non si vede come una tale procedura possa essere definita nel caso in cui il paragone diretto di entità di carattere fisico non può portare alla previsione teorica dei fenomeni, situazione che si presenta in tutte quelle teorie fisiche che fanno uso del concetto di probabilità. Tali teorie, infatti, non mettono in relazione diretta gli enti fisici in gioco per giungere alla previsione dei caratteri salienti del fenomeno fisico oggetto di studio, ma fanno riferimento, proprio attraverso la teoria della probabilità, alla possibilità *astratta* di ottenere valori diversi di una grandezza fisica (in ipotetiche repliche identiche dell'esperimento) attribuendo a tali valori probabilità diverse secondo una distribuzione matematica ben precisa.

Non c'è né può esserci, in tali teorie fisiche, alcun meccanismo deterministico che, stabilendo delle opportune relazioni tra enti fisici, possa da solo, a partire da tali relazioni, indurre una previsione sul futuro del sistema.

L'unica possibilità per prevedere l'evoluzione temporale di un sistema fisico nella cui dinamica entrano in gioco le proprietà matematiche della probabilità (vedi, ad esempio, i sistemi termodinamici e quelli quantistici) è quella di ipotizzare in astratto diverse possibilità (non motivate da alcuna particolare relazione tra enti fisici concreti) cui devono poi essere attribuite delle ben precise probabilità, che costituiscono i valori attesi delle frequenze che si verificano nella realtà.

Tali frequenze attese (che sono numeri reali) sono essenziali per arrivare a prevedere le proprietà tipiche del sistema fisico studiato, come credo di avere chiarito nel paragrafo relativo alla termodinamica.

Il motivo di fondo per cui la matematica è (in queste branche della fisica) ineliminabile dallo schematismo concettuale della teoria scientifica è, secondo il sottoscritto, proprio il **carattere astratto dell'ente matematico**.

Tale carattere astratto permette, come ho accennato sopra, di individuare una possibile *legge naturale* che governi il comportamento del sistema fisico laddove non esiste alcuna relazione tra enti concreti che possa motivare un certo tipo di evoluzione del sistema.

Riprendendo l'esempio del processo di equalizzazione della temperatura descritto prima, risulterà chiaro che il meccanismo attraverso il quale possiamo spiegare ciò che effettivamente avviene non si fonda su relazioni tra enti concreti, ma sul *caso*, regolato dalla probabilità, che distribuisce i risultati degli scambi di energia tra le molecole delle due masse gassose secondo funzioni di densità di probabilità ben precise, che sono previste dalla teoria matematica della probabilità.
In altri termini, in una tale situazione, la struttura astratta della matematica è essenziale, nel senso che è parte integrante e, soprattutto, *fondante* della teoria fisica, e non si vede come possa essere sostituita da una equivalente procedura nominalistica, cioè da una procedura che consideri soltanto enti concreti e loro eventuali relazioni salienti per la descrizione teorica del fenomeno fisico.

1.4 Determinismo e prevedibilità.

Nel paragrafo precedente sono stati discussi i risvolti del formalismo utilizzato in Meccanica quantistica e di quello su cui poggia l'interpretazione meccanico-statistica della Termodinamica relativamente alla questione dell'*indispensabilità* degli enti matematici.
In particolare si è messo in evidenza come il formalismo matematico delle due suddette teorie scientifiche sia strettamente connesso con un fondamentale aspetto epistemologico delle teorie medesime: l'aspetto della prevedibilità dei fenomeni fisici sulla base dei principi della teoria.
Abbiamo visto che la piena prevedibilità del fenomeno del moto dei corpi in meccanica classica è una conseguenza dell'applicazione del formalismo delle equazioni differenziali attraverso il 2° principio di Newton, mentre la prevedibilità in termini probabilistico-statistici che si ha sia nella Meccanica quantistica che nella Meccanica statistica classica è una conseguenza dell'applicazione di un formalismo piuttosto diverso (anche se molto spesso continua a far uso delle equazioni differenziali) che utilizza la teoria matematica della probabilità congiuntamente ad altri strumenti fisico-matematici di carattere deterministico.
Tale differenziarsi delle capacità predittive delle teorie scientifiche in base all'utilizzo (o al

non utilizzo) della matematica della probabilità può condurre all'idea (non del tutto esatta, come vedremo) che determinismo e prevedibilità coincidano, nel senso che una teoria che contiene soltanto leggi deterministiche (e quindi non basate sul concetto di probabilità) debba necessariamente avere come conseguenza la piena ed esatta (nei limiti degli errori dovuti agli strumenti di misura utilizzati per conoscere le condizioni iniziali) prevedibilità dei fenomeni.

In realtà determinismo e prevedibilità non sono due concetti totalmente sovrapponibili.

Per capire il motivo di tale non equivalenza logica possiamo far riferimento al già citato problema della *dipendenza dalle condizioni iniziali* e al fenomeno del cosiddetto *caos deterministico*.

In entrambi i casi le leggi del fenomeno studiato sono date secondo un formalismo pienamente e totalmente deterministico, che non utilizza alcun concetto di carattere statistico, e tuttavia l'esatta prevedibilità dello stato del sistema fisico osservato ad un tempo arbitrario (successivo a quello delle condizioni iniziali, supposte note) è, nelle due fattispecie richiamate, un obiettivo raggiungibile soltanto in linea di principio, ma di fatto non ottenibile nella pratica reale dell'applicazione della teoria ai casi concreti.

Avviene infatti, nel primo caso (quello della sensibilità alle condizioni iniziali), che la forte dipendenza della soluzione del problema considerato al tempo t posteriore a t_0 (il tempo delle condizioni iniziali) dai valori a t_0 delle grandezze fisiche che caratterizzano il fenomeno generi, in corrispondenza all'inevitabile incertezza di tali valori dovuta alla precisione finita degli strumenti di misura, un *range* molto ampio di variabilità delle stesse grandezze al tempo t, così ampio da far perdere il carattere stesso di piena prevedibilità del fenomeno fisico sulla base dell'apparato teorico.

Nel secondo caso (quello del caos deterministico) l'andamento temporale della soluzione, per alcuni valori di certi parametri delle equazioni fondamentali del fenomeno, detti *parametri critici*, segue un tipo di variazione estremamente *scatterata*, con ampi cambiamenti (anche in tempi relativamente piccoli) che si succedono in modo apparentemente casuale.

Anche in questo caso, dato l'andamento temporale *caotico* della soluzione del problema fisico esaminato, la piena prevedibilità (dipendente, come si è detto, dall'*esatto* valore dei parametri critici del fenomeno) è resa praticamente impossibile dalle particolari caratteristiche matematiche della teoria.

Esempio tipico della sensibilità alle condizioni iniziali è il problema dei tre corpi, cui ho accennato nel paragrafo precedente, mentre esempi di caos deterministico sono alcuni fenomeni climatici e alcune variabilità temporali che si riscontrano nella dinamica delle popolazioni.

Mentre, dunque, il determinismo fa riferimento ad una piena *prevedibilità in linea di principio*, dovuta al fatto che le equazioni fondamentali del fenomeno non contengono termini che introducono variazioni di carattere probabilistico, quando si parla di prevedibilità in senso stretto ci si riferisce solitamente ad una *prevedibilità di fatto*, che, oltre ad escludere la presenza di sorgenti di disordine stocastico, impone anche che le equazioni della teoria siano concretamente utilizzabili per prevedere con ragionevole esattezza i caratteri salienti del fenomeno studiato ad un tempo t arbitrariamente grande rispetto al tempo t_0 delle condizioni iniziali.

I fenomeni naturali governati da leggi deterministiche, che tuttavia non hanno come conseguenza la piena prevedibilità dell'evoluzione temporale del fenomeno stesso, chiamano in causa, per recuperare (su di un piano più complesso e sofisticato) una peculiare forma di prevedibilità dei caratteri salienti del sistema fisico in oggetto, strumenti matematici particolari (spazio delle fasi, attrattori, ...) dalla cui esistenza non si può prescindere in diversi importanti ambiti della ricerca scientifica (dalle già citate indagini in metereologia e nella dinamica delle popolazioni allo studio del ritmo cardiaco e di svariati fenomeni di fisica dei materiali di grande importanza ingegneristica).

Su tali strumenti ed *enti* matematici e sulla loro *indispensabilità* si tornerà in modo più dettagliato ed approfondito successivamente.

1.5 Il concetto di probabilità e l'impegno ontologico nei confronti dei numeri.

In questo paragrafo mi propongo di analizzare più in profondità la questione di come l'utilizzo in fisica della teoria della probabilità porti come conseguenza inevitabile l'impegno ontologico nei confronti degli enti matematici, ed in particolare nei confronti dei numeri reali.

Riferendoci alla definizione elementare di probabilità, possiamo dire che, per un certo evento atteso E (come l'uscita di un certo numero nel lancio di un dado a facce numerate), la probabilità P di occorrenza di E si definisce come limite della frequenza di E in un numero N di *prove* (nell'esempio precedente le prove sono i lanci del dado) quando N tende ad infinito (ovviamente positivo).

La frequenza di E in N prove è a sua volta definita formalizzando il concetto intuitivo di 'quanto spesso si è verificato l'evento E nelle N prove', cioè mediante l'uguaglianza:

$$F = N_s / N$$

dove F è la frequenza di E in N prove ed N_s è il numero delle occorrenze di E (di *successi*, come si usa dire) registrate nelle N prove.

Dunque, come si è detto sopra, P è il limite di F per N tendente ad infinito.

Notiamo subito che la definizione di F chiama in causa i numeri naturali N_s ed N, nonché il loro rapporto, che in generale è un razionale.

Inoltre la successione di razionali N_s / N in generale tenderà ad un reale, per cui la probabilità P, sempre in generale, sarà un numero reale.

Ovviamente, quando una previsione (e dunque un calcolo) di probabilità viene usato in un esperimento di fisica, non possiamo certo attenderci (per l'occorrenza di un qualunque evento di interesse fisico; potrebbe essere, ad esempio, il decadimento di un atomo radioattivo) un numero di successi N_s reale e nemmeno razionale.

N_s, essendo un numero di occorrenze, non può che essere un numero naturale.

Il procedimento che normalmente si usa è quello di considerare come valore atteso di N_s il naturale più vicino al reale PN, espressione ottenuta dalla definizione di F esplicitando N_s e sostituendo F con P (che è il valore atteso e teoricamente prevedibile di F).

Nelle teorie fisiche che utilizzano la statistica e il calcolo delle probabilità, le grandezze sopra definite vengono utilizzate per scopi diversi, ma che, in definitiva, fanno tutti capo ad una medesima necessità, che mi accingo adesso ad illustrare.

La situazione *tipo* che viene solitamente affrontata dai fisici con l'ausilio dell'approccio statistico-probabilistico è la situazione in cui *qualcosa* del sistema fisico in esame *non è noto*.

Nell'esempio discusso sopra delle due masse gassose che, dopo essere state poste a contatto l'una con l'altra, danno luogo ad una trasformazione che le porta all'equilibrio termodinamico, ciò che non è noto è il valore (al tempo iniziale dell'esperimento) di posizione e momento di ogni molecola di entrambe le masse gassose.

E' chiaro che, se avessimo una tale conoscenza iniziale (e anche una enorme potenza di calcolo), non avremmo alcun bisogno di trattare un tale sistema fisico con i metodi della meccanica statistica per arrivare alla conclusione che le temperature delle due masse si portano, dopo un certo tempo, ad un valore intermedio ed uniforme.

Basterebbe seguire (mediante le leggi della dinamica newtoniana) l'evoluzione di posizione e momento di tutte le molecole in gioco (considerando ovviamente anche le variazioni dei singoli momenti dovute agli urti molecola-molecola), arrivando, alla fine di un tale ponderoso calcolo, alla conclusione dell'equalizzazione della temperatura.

Questa situazione, ovvero il fatto che si può pensare l'approccio probabilistico come reso necessario esclusivamente da un problema di *ignoranza* (nel senso che *ignoriamo* l'esatta condizione iniziale del sistema), ha indotto in molta epistemologia (sia implicita che esplicita) della termodinamica e della fisica statistica in generale l'idea che il concetto di probabilità sia un fatto soltanto *epistemico* e che non ha in alcun modo attinenza con l'*ontologia* relativa al fenomeno fisico studiato.

Chi scrive non condivide tale interpretazione, sia sul piano filosofico che anche, in un certo senso, su quello scientifico.

Cercherò di spiegare il più chiaramente possibile perché.

L'individuazione di una *legge fisica* non è soltanto un modo per calcolare valori di grandezze che possono essere utili per fini concreti (cosa in ogni caso praticamente impossibile per una massa gassosa anche di dimensioni piccolissime, se non si vuole fare ricorso all'approccio termodinamico-statistico, per via della potenza di calcolo limitata di qualsiasi computer).

Una legge fisica mette in evidenza una *proprietà saliente* di un fenomeno, dunque dell'ontologia del mondo. E ciò vale anche quando non si tratta di una legge fondamentale

(come nel caso di un gas, per il quale le leggi fondamentali sono le equazioni del moto delle singole molecole).
Un caso esemplare di ciò si ha proprio nella meccanica newtoniana.
Consideriamo infatti il *principio di conservazione dell'energia* totale (cinetica + potenziale) di un sistema meccanico in un campo di forza conservativo, per esempio il campo gravitazionale.
Se pensiamo che tale principio, che in realtà principio non è (anche se viene spesso denominato in questo modo) in quanto può essere facilmente dimostrato a partire dai principi della dinamica di Newton, sia necessario per risolvere anche un solo problema di meccanica, siamo senz'altro in errore.
I tre principi della dinamica newtoniana sono sufficienti per risolvere *qualunque* problema di meccanica (una volta nota la legge della forza e in approssimazione classica).
Ovviamente il principio di conservazione dell'energia può semplificare (e talvolta di molto) la risoluzione di certi importanti problemi.
Ma è questo il suo valore e la sua importanza? E come non pensare che una legge che è in grado di semplificare anche di molto la risoluzione di diversi non secondari problemi di fisica sia legata a *qualcosa di profondo* del funzionamento del mondo?
In realtà, nessuno scienziato potrebbe seriamente dichiarare che si può tranquillamente fare a meno di principi come la conservazione dell'energia, della quantità di moto o del flusso magnetico (tutte leggi che possono essere assunte come non fondamentali).
A parere del sottoscritto, l'importanza, talvolta cruciale, di tali principi (e di altri simili) in fisica è dovuta al fatto che essi riescono a cogliere in modo estremamente pregnante (e ad un *livello alto di sintesi*) **aspetti essenziali dell'ontologia del mondo naturale**.
Principi del genere sono solitamente molto astratti (rispetto alle leggi cosiddette *fondamentali* da cui possono essere dimostrati), ma, nell'ottica di chi scrive, è proprio tale carattere fortemente astratto che consente loro di raggiungere quel *livello alto di sintesi* necessario per cogliere *proprietà profonde e generali* dei fenomeni cui si riferiscono.
Del tutto analogo è, a mio parere, il caso delle leggi prodotte dall'applicazione dell'approccio termodinamico-statistico alla classe appropriata di sistemi fisici (gas, etc.).
Tali leggi (si pensi all'importantissimo e assolutamente universale 2° principio della termodinamica, nel quale, tra l'altro, si può far rientrare la spiegazione del processo di

equalizzazione della temperatura già ampiamente citato) costituiscono una descrizione di *caratteri precipui* della fenomenologia di importanti sistemi fisici (i sistemi termodinamici, appunto) *che nessuno vedrebbe* se non fossero state elaborate e formulate proprio le leggi in questione.

Tali caratteri precipui sono, nel caso della termodinamica, le *proprietà tipiche* di cui si è già parlato.

Una proprietà tipica, perfettamente comprensibile in un'ottica probabilistico-statistica, sarebbe del tutto *invisibile* e quindi *imprevedibile* dal punto di vista di una teoria che si basasse soltanto sulle leggi fondamentali del moto delle molecole (le leggi della dinamica di Newton).

Se la probabilità non è soltanto un mero fatto epistemico, come ho cercato di dimostrare, ma è legata all'ontologia della natura e dei suoi fenomeni, essa *trascina* con sé l'impegno ontologico nei confronti dei numeri (naturali, razionali e reali, come si è visto).

Ciò, ovviamente, nell'ottica determinata dalla tesi olistica di Duhem-Quine, cui si è accennato nell'Introduzione.

Si tenga inoltre presente che, dal particolare punto di vista dell'*olismo quineano* (che lo scrivente condivide sia in via prettamente di principio che sulla base della considerazione di come si sono evolute le moderne scienze della natura praticamente fin dalla loro nascita con la meccanica di Galileo e Newton nel Seicento), la scienza non è costituita soltanto dal *corpus* dei concetti e dei metodi della fisica-matematica, ma anche da una vera e propria *ontologia*, che indica allo scienziato quali enti deve considerare reali per basare su di essi le sue teorie (naturalmente tale ontologia può essere cambiata, ed è la stessa scienza che, in determinati momenti critici della sua evoluzione, modifica i suoi impegni ontologici per meglio rispondere alle sfide poste dall'interpretazione teorica dei fenomeni studiati).

1.6 Approccio probabilistico in fisica e conservatività della matematica.

Le considerazioni sviluppate nel paragrafo precedente pongono in maniera molto forte il problema del carattere conservativo della matematica rispetto alle teorie scientifiche sul mondo naturale.

H. Field, come si è detto in precedenza, ritiene di avere dimostrato che la matematica è conservativa per le scienze della natura.
Quanto esposto dal sottoscritto in riferimento all'uso del concetto di probabilità e dei metodi probabilistico-statistici in fisica porta invece alla conclusione che la matematica della probabilità è essenziale per *captare* **aspetti e proprietà** dei fenomeni naturali che **altrimenti** rimarrebbero **non visibili** all'analisi teorica dello scienziato (determinando anche, *di fatto*, gravi carenze predittive delle teorie scientifiche, come sarebbe certamente nel caso, ad esempio, della meccanica quantistica).
Vediamo, dunque, di comprendere meglio da dove nasce, nell'approccio da me sviluppato, quella che ritengo essere una confutazione abbastanza netta dell'affermazione di Field riguardo alla conservatività della matematica.
Come messo in evidenza soprattutto parlando dell'interpretazione meccanico-statistica della termodinamica, e ribadito poi relativamente al problema della misura in meccanica quantistica, l'uso del concetto di probabilità nella fisica dell'Otto-Novecento è stato reso necessario dall'esigenza di *connettere*, sul piano teorico, due *livelli conoscitivi* (ma anche *di realtà*) *a priori* nettamente distinti: il livello dello studio dei fenomeni **microscopici** e quello che concerne invece la comprensione dei fenomeni **macroscopici**.
Riprendendo l'esempio descritto per la termodinamica, abbiamo i seguenti due livelli: quello dei moti delle singole molecole e quello dell'evoluzione delle variabili di stato termodinamiche (pressione, temperatura, etc.).
Il primo è il livello microscopico, il secondo quello macroscopico.
Va detto con molta chiarezza che la conoscenza di ognuno di questi due livelli può senz'altro essere completa *in sé stessa*.
Al livello microscopico, infatti, le equazioni del moto di Newton descrivono completamente la dinamica delle molecole del gas, ed anche la teoria macroscopica della termodinamica può essere interamente sviluppata senza fare alcun riferimento ai moti delle molecole, cioè al livello microscopico.
L'utilità del calcolo delle probabilità e della statistica si rivela soltanto nel momento in cui vogliamo **ricomprendere in un quadro teorico unitario i fenomeni (e le loro proprietà salienti) che si manifestano ai due livelli di realtà microscopico e macroscopico.**
E' qui che, a parere di chi scrive, la matematica mostra in modo estremamente chiaro e

pregnante il proprio carattere **non conservativo** nei confronti della scienza della natura.
Abbiamo visto, infatti, che la matematica della probabilità consente, a partire dallo schema teorico della dinamica newtoniana dei moti delle molecole di un gas, di sviluppare un approccio concettuale e di calcolo dal quale *emergono* alcune importantissime proprietà tipiche del sistema fisico in esame che altrimenti la teoria microscopica non sarebbe stata in grado di cogliere.
Tali proprietà tipiche sono proprio quelle che lo *sguardo* termodinamico macroscopico prende in considerazione e studia attraverso l'elaborazione dei propri principi (1° e 2° principio della termodinamica) e delle proprie leggi (le leggi delle trasformazioni dei gas).
Il fenomeno dell'equalizzazione della temperatura di cui si è discusso precedentemente (come diversi altri processi oggi analizzati e spiegati in termini di concetti e categorie della fisica statistica) può essere certamente descritto, ed anche previsto con precisione quantitativa, all'interno dello schema teorico della termodinamica ordinaria (quella, per così dire, macroscopica).
Il problema nasce nel momento in cui si vuole spiegare il fenomeno sulla base della teoria microscopica, il che significa che la difficoltà consiste nel *connettere* la descrizione microscopica con lo studio delle proprietà macroscopicamente rilevanti (una delle quali è proprio la temperatura).
Nella costruzione di tale *connessione* teorica, e dunque nell'elaborazione di un quadro unitario di spiegazione, comprensione e previsione, risiede la funzione, a mio parere *indispensabile*, della matematica e dei suoi oggetti (in primo luogo i numeri reali).
I fenomeni e le teorie presi in considerazione per sviluppare l'approfondimento fin qui esposto mostrano chiaramente che la definizione enunciata da H. Field di *conservatività* di una teoria matematica S rispetto ad un set N di assiomi nominalisti sulla natura, secondo cui (vedi l'Introduzione)

una teoria matematica S è conservativa se e solo se è consistente con ogni teoria nominalista N internamente consistente a proposito del mondo naturale,

non è adeguata.

Non basta infatti che S sia logicamente consistente con tutti gli assiomi nominalisti possibili sui fenomeni naturali per affermare che gli enti matematici di S non consentono di trovare alcunché di *nuovo* sulla natura (nulla cioé *che non sia già deducibile* dagli assiomi nominalisti *da soli*), che è ciò che comunemente si intende per conservatività.
Si è visto, infatti, che il ruolo della matematica consiste, in molti casi di grande importanza scientifica, nel permettere l'emergere della conoscenza di determinate proprietà che un certo livello di elaborazione teorica, *da solo*, non è in grado di *vedere*.
E' ovvio che la matematica sia logicamente consistente con tutti gli assiomi nominalisti possibili (in questo Field ha ragione nel dire che, se così non fosse, ci sarebbe la possibilità che l'applicazione di una teoria matematica ad un *corpus* di assiomi nominalisti sulla natura porti a conseguenze nominaliste false sul mondo fisico), ma ciò non esclude, come credo di avere dimostrato, che essa possa portare a *scoprire* aspetti *nuovi* dei fenomeni naturali, che la teoria scientifica *priva* di quel dato strumento matematico **cognitivamente potente** non sarebbe in grado di scoprire e comprendere.

Capitolo 2. L'indispensabilità delle funzioni.

2.1 Il concetto di funzione nella Meccanica classica.

In questo paragrafo mi propongo di delucidare quei metodi e quelle strategie logico-cognitive che, nella Meccanica classica, utilizzano il concetto matematico di funzione per formulare importanti definizioni e leggi che sono poste a fondamento dell'edificio teorico, da un lato, e delle sue tecniche di calcolo e di previsione, dall'altro.
Tale delucidazione mira, come per i numeri reali nell'uso del concetto di probabilità in Termodinamica e in Meccanica quantistica, alla dimostrazione dell'indispensabilità (per la fisica) dello strumento matematico preso in esame (nella fattispecie, appunto, il concetto di funzione).
Il caso del già citato 2° principio di Newton è, a parere di chi scrive, un caso emblematico.
L'equazione

$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$

utilizza due funzioni, $\boldsymbol{F}$ ed $\boldsymbol{a}$ (mentre m è una costante scalare, la *massa* o *inerzia* del corpo di cui si sta studiando la dinamica). L'una ($\boldsymbol{F}$) è un campo vettoriale (il campo di *forza*) applicato alla posizione $\boldsymbol{r}(t)$ del corpo (con t che indica la variabile tempo), l'altra ($\boldsymbol{a}$) è una funzione vettoriale del tempo, la derivata seconda di $\boldsymbol{r}(t)$, ovvero l'*accelerazione* del corpo medesimo. Tali funzioni sono vettoriali nel senso che, nel caso più generale, i loro valori sono vettori tridimensionali, le cui componenti sono rispettivamente le componenti della forza e quelle dell'accelerazione nelle tre direzioni (diciamo x, y e z) dello spazio fisico.
Questo importantissimo principio della Dinamica newtoniana è stato oggetto di ampi e articolati dibattiti di ordine epistemologico.
Il punto di partenza forse filosoficamente più stimolante di tali dibattiti è stata la nota tesi di Poincaré secondo cui il principio in questione non è altro che una *definizione camuffata*, una mera *convenzione*, senz'altro comoda per impostare i calcoli di meccanica ma del tutto *priva di un reale contenuto conoscitivo*.

L'idea di Poincaré era che l'equazione che esprime il 2° principio non mette in relazione due grandezze (la forza e l'accelerazione) già note a partire da loro specifiche definizioni, ma costituisce essa stessa la *definizione di forza* (si assume, in tale ragionamento, che l'accelerazione è già definita in Cinematica come, appunto, derivata seconda della posizione del corpo, mentre la massa del corpo viene supposta già nota, per esempio grazie ad una definizione operativa).

Alternativamente, se si ritiene che la definizione di forza sia già data (dalla Statica, come definizione operativa; ma nulla, in realtà, ci assicura che la forza della Dinamica e quella della Statica siano la *stessa* grandezza), l'equazione del 2° principio costituisce la *definizione della massa m* del corpo.

Tale dibattito sul contenuto conoscitivo del 2° principio della Dinamica è a mio parere molto istruttivo, in quanto ci introduce nel vivo del problema del *ruolo degli strumenti matematici* in esso utilizzati.

Dal punto di vista dello spirito e delle finalità di questo lavoro, la questione non è se il principio in oggetto sia in grado di *immagazzinare* un contenuto conoscitivo già *precostituito* sul rapporto tra i moti dei corpi e le relative cause, ma piuttosto se l'utilizzo di determinati enti matematici (le funzioni) e di un certo schema teorico fondato su di un'equazione che mette in relazione (o *definisce*, se il lettore preferisce) funzioni permetta di creare la struttura concettuale adeguata per *cogliere gli elementi chiave*, nel moto di un corpo e nelle sue relazioni con altri corpi che ne potrebbero influenzare il moto stesso, sui quali è possibile costruire, sviluppare ed enunciare una *legge fisica universale*.

E' proprio il concetto di forza, inseparabile dalla sua natura matematica (ovvero dal fatto di essere una funzione della posizione del corpo) e proprio grazie a tale natura, che rende possibile generalizzare l'influenza di determinate condizioni fisiche (come la presenza di altri corpi) sulla cinematica del corpo in esame in modo da formulare la relazione (tra corpo e corpo) che è all'origine del mutamento delle caratteristiche del moto del corpo (cioè dell'accelerazione) in termini di legge universale, applicabile a corpi diversi, tipi di interazione diversi e caratteri del tutto generali del moto del corpo studiato.

Ancora una volta, l'uso di uno strumento matematico estremamente duttile, versatile e dal *raggio d'azione* alquanto ampio quale è il concetto di funzione consente di costruire uno schema teorico cognitivamente potente e un insieme di tecniche di calcolo dall'applicabilità

vastissima.
Si pensi anche alla possibilità che il principio in questione ha dato di estensibilità alla dinamica relativistica, laddove la semplice sostituzione di vettori tridimensionali con i corrispondenti quadrivettori relativistici e dell'ordinario tempo t con il tempo proprio τ della particella ha permesso di formulare (senza ulteriori complicazioni formali) il corretto principio relativistico che corrisponde al principio newtoniano in oggetto.
Vediamo adesso più in dettaglio quali sono gli elementi caratteristici di uno schema teorico così efficace e quale preciso ruolo giocano in esso le funzioni che appaiono nell'equazione che esprime il principio.
In effetti, a ben guardare, abbiamo quattro funzioni: $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{a}(t)$, $\boldsymbol{r}(t)$ e il legame funzionale (di proporzionalità diretta, a massa costante) stabilito dal principio stesso tra $\boldsymbol{F}$ ed $\boldsymbol{a}$.
Abbiamo quindi, in simboli:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{F}[\boldsymbol{r}(t)]$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t) = d^2\boldsymbol{r}(t)/dt^2$$

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\mathsf{F}}(\boldsymbol{a}) = m\boldsymbol{a}$$

Tutte queste quattro funzioni hanno un ruolo irrinunciabile nella *ricetta* che il fisico deve seguire per ottenere, alla fine, $\boldsymbol{r}(t)$, cioè l'evoluzione temporale della posizione del corpo e quindi tutte le informazioni fisicamente rilevanti sul moto del corpo.
Se conosciamo l'andamento spaziale del campo di forza (ossia come varia la forza punto per punto per una data massa, o, se preferiamo, per unità di massa) tramite la funzione $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ e conosciamo anche il valore della massa *m*, siamo in grado di porre un *vincolo* sulla variazione nel tempo di $\boldsymbol{r}$ (la funzione $\boldsymbol{r}(t)$), scrivendo l'equazione differenziale

$$\boldsymbol{F}[\boldsymbol{r}(t)] = m\, d^2\boldsymbol{r}(t)/dt^2$$

che avrà come soluzione proprio la funzione ***r(t)***.
Dunque, oltre a conoscere la funzione ***F(r)***, dobbiamo poter *pensare* la posizione del corpo come una funzione del tempo (la funzione ***r(t)***). Dobbiamo inoltre *stabilire* che ***a*** si ottiene da ***r(t)*** attraverso *un altro particolare legame funzionale*, dato dall'azione dell'operatore di derivata seconda (rispetto al tempo *t*) che porta ***r(t)*** nell'accelerazione ***a***. Dobbiamo infine utilizzare la funzione 'moltiplicazione per *m*' che porta ***a*** in ***F***.
Il punto centrale di tale procedura consiste, mi sembra, nel fatto che, per condurre alla conoscenza delle proprietà del moto del corpo (contenute nella funzione ***r(t)***), lo schema teorico in oggetto *mette in relazione* la dipendenza delle grandezze che caratterizzano il moto dalle coordinate **spaziali** *e* da quella **temporale** (la forza, dipendente dalla posizione del corpo nello spazio, viene connessa, mediante il 2° principio, all'accelerazione, dipendente dal tempo).
Il tasso **istantaneo** di variazione della velocità (l'accelerazione) viene legato (attraverso la matematica delle funzioni vettoriali tridimensionali di ***r*** e di *t*) all'intensità **locale** del campo di forza.
Anche qui, come nel caso dell'uso della teoria della probabilità in termodinamica e in meccanica quantistica, a parere del sottoscritto il problema non è sostituire allo schema teorico matematizzato che viene correntemente utilizzato in fisica uno schema alternativo basato esclusivamente su procedure nominalistiche.
La questione è invece (e mi sembra un problema di impatto epistemologico ed ontologico ben più profondo) se una conquista teorica come quella ottenuta dal pensiero newtoniano, basata sulla **connessione tra dipendenza dallo spazio e dipendenza dal tempo** (connessione tuttora valida ed estremamente importante in tutta la fisica, comprese la relatività einsteiniana e la meccanica quantistica), avrebbe potuto essere raggiunta senza *rappresentare* le suddette dipendenze in termini di funzioni matematiche.
Ciò che consente di indagare a fondo il problema del moto dei corpi è la comprensione del fatto che il modo in cui tende a svilupparsi il moto di un corpo in un dato istante dipende dal punto dello spazio in cui si trova il corpo in quell'istante.
Bisogna cioè prima *pensare* la dipendenza dallo spazio (della forza) e quella dal tempo (dell'accelerazione) in termini del *concetto* matematico di funzione, per potere poi porre *in astratto* la connessione tra le due dipendenze (attraverso l'equazione del 2° principio) come

relazione tra due funzioni.
In un certo senso, quella che va pensata e posta è la *dipendenza* (mutua) *tra due dipendenze*.
E' chiaro che tale *relazione* (astratta) non tra enti concreti ma *tra*, a loro volta, *relazioni* (le dipendenze da spazio e tempo di forza e accelerazione) non può che essere posta in termini di *abstracta* (enti astratti) matematici, non essendo, appunto, una relazione tra oggetti concreti del mondo fisico.

2.2 Causalità e funzioni.

Un aspetto molto importante dello schematismo concettuale scientifico (nella fisica classica in modo particolare, ma anche in quella relativistica e quantistica) che risulta essere strettamente connesso, almeno nella versione corrente delle scienze fisiche, al concetto matematico di funzione è l'aspetto del carattere causale dei fenomeni fisici.
Abbiamo già visto che, nella meccanica newtoniana, la conoscenza del moto di un corpo (in tutte le sue proprietà e caratteristiche salienti) si riduce alla conoscenza della funzione $\boldsymbol{r}(t)$ che fornisce, per ogni istante t, il vettore $\boldsymbol{r}$ che individua la posizione del corpo al tempo t.
Abbiamo anche visto che la conoscenza della funzione $\boldsymbol{r}(t)$ viene ordinariamente ottenuta risolvendo l'equazione differenziale che traduce matematicamente il 2° principio di Newton:

$$\boldsymbol{F}[\boldsymbol{r}(t)] = m\, d^2\boldsymbol{r}(t)/dt^2$$

Tale equazione differenziale del 2° ordine (contiene derivate della funzione incognita, $\boldsymbol{r}(t)$ in questo caso, fino alla derivata seconda) può essere risolta soltanto se sono note le cosiddette *condizioni iniziali*, ovvero i valori di $\boldsymbol{r}(t)$ e della sua derivata prima $d\boldsymbol{r}(t)/dt$ (la velocità del corpo) ad un certo istante $t = t_0$.
Ovviamente, in pratica, cercheremo di conoscere $\boldsymbol{r}(t)$ per tempi t successivi al tempo t_0 a cui ci sono note le condizioni iniziali, nel senso che, avendo una certa conoscenza (almeno di posizione e velocità) del moto del corpo ad un certo tempo t_0 (o fino a t_0), utilizzeremo il 2° principio di Newton per formulare una *previsione* sulle caratteristiche del moto medesimo a tempi $t > t_0$.
Evidentemente, la possibilità di una tale previsione è una conseguenza del principio di

causalità: ciò che si ha nel passato (cioè a t_0) determina *completamente* il futuro (cioè la situazione a $t > t_0$).

Possiamo dunque dire che l'**uso delle equazioni differenziali** aventi per funzioni incognite gli andamenti temporali ***r(t)*** delle posizioni dei corpi costituisce una strategia cognitiva nella quale **è implicito il carattere causale dei fenomeni meccanici** (si veda, a tal proposito, quanto detto nel Cap. 1 sull'uso delle equazioni differenziali in meccanica quantistica, dove esse regolano gli andamenti temporali delle funzioni d'onda, funzioni che non contengono *tutta* l'informazione relativa allo stato fisico del sistema, per cui il principio di causalità, inteso *in senso forte*, non è logicamente contenuto nelle equazioni fondamentali della teoria).

Dunque l'utilizzo di una funzione matematica (***r(t)***) per descrivere l'evoluzione della posizione del corpo nel tempo è strettamente connesso al principio di causalità.

In effetti, se si riflette sul concetto di funzione, si ricorderà che, dati un insieme *A* detto dominio della funzione e un insieme *B* detto codominio (sempre della funzione), un'applicazione, o funzione, o corrispondenza *f* da *A* in *B* è una legge che associa ad *ogni* elemento di *A uno ed un solo* elemento di *B*.

L'aggettivo *ogni* nell'espressione 'ad *ogni* elemento di *A*' è essenziale ai fini della nostra discussione su principio di causalità e funzioni.

Se, infatti, si assume come dominio della funzione ***r(t)*** un intervallo di tempo $[\ t_i\ ;\ t_f\ ]$ contenente il tempo t_0 (anche, se si vuole, un intervallo chiuso avente t_0 come estremo sinistro: $[\ t_0\ ;\ t_f]$), l'espressione sopra evidenziata implicherà che ***r(t)*** sia definita, oltre che, eventualmente, nel *passato* di t_0 (tra t_i e t_0), anche per *tutti* i tempi dell'intervallo successivi a t_0 (tra t_0 e t_f), cioè nel *futuro* di t_0.

In altri termini, la natura del dominio scelto per ***r(t)*** (un intervallo cui appartiene il valore t_0) ha come conseguenza il fatto che, se si riesce a trovare l'andamento della funzione ***r(t)***, la *previsione* dei caratteri del moto del corpo *per qualunque tempo futuro* rispetto a t_0 (fino, ovviamente, a t_f) dev'essere senz'altro possibile (il che è un modo di enunciare il principio di causalità).

L'equazione differenziale fornita dal 2° principio della dinamica, poi, ammette soluzione per la sua funzione incognita ***r(t)*** (e tale soluzione è unica) per un dominio siffatto (cioè per un intervallo della retta reale), sempre posto che siano note le condizioni iniziali. Ciò in virtù

dell'importante teorema (di esistenza e unicità) dell'Analisi relativo alla soluzione del cosiddetto Problema di Cauchy.
Ancora una volta, a chi scrive sembra che la struttura logica del problema fisico (che qui é il cruciale problema del carattere causale dei fenomeni naturali, in questo caso quelli della Meccanica) sia molto ben esplicitata e chiarita in tutte le sue articolazioni dalla teoria matematica che viene ordinariamente usata per formulare le leggi fisiche, e non è sostenibile, sempre a parere dello scrivente, l'idea che la teoria matematica venga, in un certo senso, *dopo*, a *sovraimporsi* (con qualche utilità, ammettono i nominalisti) ad un contenuto conoscitivo già chiaro *di per sé* e pienamente formulabile in termini di leggi universali senza l'ausilio di alcun procedimento di astrazione matematica.

2.3 Il concetto di *massa* o *inerzia* e la nominalizzazione della Dinamica newtoniana.

Ancora qualche considerazione sul ruolo della massa m nel 2° principio di Newton in relazione alla questione della *nominalizzabilità* della dinamica classica e della fisica in generale.
Si è visto in precedenza che nell'equazione che esprime il 2° principio ha un ruolo molto importante la grandezza m, la *massa* o *inerzia* del corpo di cui si sta studiando il moto.
L'equazione

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

può infatti essere interpretata in tre modi.
Se consideriamo m costante (il corpo rimane lo stesso oppure scegliamo corpi diversi ma con la stessa massa, per esempio pesandoli prima di utilizzarli per l'esperimento di dinamica), l'equazione esprime la proporzionalità diretta tra $\boldsymbol{F}$ ed $\boldsymbol{a}$, tra forza e accelerazione: se raddoppiamo la forza, raddoppia l'accelerazione; se triplichiamo la forza, triplica l'accelerazione, etc.
Se consideriamo $\boldsymbol{a}$ costante (scegliamo corpi con masse diverse e li sottoponiamo a forze

anch'esse diverse in modo da ottenere sempre la stessa accelerazione), l'equazione esprime la proporzionalità diretta tra $\boldsymbol{F}$ ed m, tra forza e massa: se raddoppiamo la massa, dobbiamo raddoppiare la forza (per ottenere l'accelerazione fissata); se triplichiamo la massa, dobbiamo triplicare la forza, etc.

Se consideriamo $\boldsymbol{F}$ costante (scegliamo corpi con masse diverse e li sottoponiamo a forze uguali), l'equazione esprime la proporzionalità inversa tra m ed $\boldsymbol{a}$, tra massa ed accelerazione: se raddoppiamo la massa, otteniamo un'accelerazione dimezzata; se triplichiamo la massa, otteniamo un valore dell'accelerazione che è 1/3 del valore iniziale, etc.

Queste considerazioni di carattere elementare sulle proprietà matematiche della formulazione quantitativa del 2° principio della dinamica mettono in evidenza il ruolo e quindi il *significato* della grandezza m nel principio stesso.

Si evince infatti da quanto detto che m misura in qualche modo la resistenza che il corpo offre alla sollecitazione impressagli dalla forza, nel senso che il risultato, in termini di accelerazione, che otteniamo applicando una certa forza al corpo non dipende soltanto dall'intensità della forza stessa (cioè a forze più intense corrispondono accelerazioni maggiori), ma anche dalla massa m del corpo (cioè a masse più grandi corrispondono accelerazioni minori).

Per tale motivo m è denominata (oltre che massa) anche *inerzia* (o *massa inerziale*) del corpo.

Il *ruolo-significato* che m prende nell'equazione che esprime il 2° principio di Newton è una precisa conseguenza, ritengo, della formulazione matematica del principio.

Come credo, infatti, di avere chiarito analizzando il *mutuo gioco* delle tre grandezze ($\boldsymbol{F}$, m ed $\boldsymbol{a}$) che figurano nell'equazione, la possibilità di attribuire al corpo una proprietà fondamentale come l'inerzia o massa (cui si fa corrispondere, nello schema discusso, una grandezza misurabile) dipende dal fatto di potere *rappresentare* in modo *altamente sintetico*, attraverso appunto una (unica) **equazione**, l'*intreccio* delle reciproche connessioni logiche tra forza, accelerazione e proprietà intrinseche di inerzia del corpo (la massa), sfruttando proprio la **notazione astratta** e perciò *profondamente sintetica* e *potente* dello strumento matematico dell'equazione.

Si noti come l'individuazione della grandezza-proprietà denominata massa ha costituito, nella fisica del Novecento, ed in particolare nella Relatività generale, una sorgente estremamente feconda di approfondimento teorico dei caratteri essenziali dei fenomeni dinamici e gravitazionali, nonché del loro profondo legame logico al livello dei principi fondamentali della Meccanica e della Fisica nel suo complesso (si pensi alla grande questione dell'uguaglianza tra massa inerziale e massa gravitazionale).

Difficile, francamente, pensare a procedure nominalistiche che abbiano la stessa efficacia nell'individuare gli elementi *salienti* e, conseguentemente, *portanti* dell'indagine e della penetrazione teorica dei fenomeni meccanici.

2.4 Spazi di Hilbert ed operatori in meccanica quantistica.

In meccanica quantistica esistono poi alcuni aspetti estremamente importanti della formulazione standard della teoria, che implicano l'utilizzo di determinati concetti e metodi matematici in un modo tale che, a parere del sottoscritto, è difficile poter pensare ad una sostituzione di tali concetti e metodi con procedure nominalistiche di uguale efficacia e potenza predittive.

Intendo riferirmi alla rappresentazione dell'insieme degli stati quantistici di un sistema mediante uno spazio di Hilbert (spazio vettoriale di dimensione infinita) e all'utilizzo di un opportuno operatore su tale spazio per individuare l'insieme di tutti i valori possibili di una grandezza fisica che caratterizza lo stato del sistema (vi è un operatore per ogni grandezza fisica).

Prescindendo dalla questione dell'indispensabilità di spazi di Hilbert ed operatori in sé stessi, un elemento chiave del problema (da cui l'indispensabilità risulta fondata in modo, credo, inoppugnabile) consiste nel fatto che la rappresentazione delle grandezze fisiche caratterizzanti il sistema come operatori su spazi di Hilbert si fonda sulla matematica (per come risulta dalla fisica classica) di tali grandezze.

E' bene chiarire questo aspetto tramite un esempio.

Consideriamo una particella di massa m libera di muoversi nello spazio tridimensionale.

In meccanica classica la relazione matematica tra l'energia cinetica K e il momento (o quantità di moto) p della particella è:

$K = p^2/2m$

Se al momento p si fa corrispondere un certo operatore Q, si ha la seguente importante conseguenza: l'operatore E corrispondente all'energia cinetica K è legato a Q dalla stessa relazione che lega K e p:

$E = Q^2/2m$

In altri termini, il legame funzionale che sussiste tra le grandezze fisiche nella teoria classica si trasferisce identicamente nel legame funzionale tra gli operatori che in meccanica quantistica corrispondono a quelle grandezze.

Tale proprietà del formalismo quantistico è estremamente importante per potere rappresentare la gran parte delle grandezze fisiche mediante i corretti operatori.

Senza di essa, praticamente nella stragrande maggioranza dei casi non si saprebbe quale operatore attribuire ad una certa grandezza fisica!

E' facile notare immediatamente come questa essenziale proprietà si basi in modo fondamentale sulla matematica già sviluppata e stabilita per le grandezze fisiche classiche.

Nell'esempio precedente, se non conoscessimo già l'espressione matematica dell'energia cinetica in termini del momento, non potremmo *costruire* l'operatore quantistico dell'energia cinetica.

Qui risulta dunque evidente l'importanza del **concetto di funzione** (una funzione lega K e p e pertanto E e Q), dal momento che funzioni sono i legami, come si è visto imprescindibili per la meccanica quantistica, stabiliti tra variabili numeriche (in fisica classica) e per conseguenza tra operatori su spazi di Hilbert (in fisica quantistica).

2.5 L'elettromagnetismo classico.

Anche nella teoria classica dell'elettromagnetismo (la grande sintesi matematica e teorica di Maxwell) il concetto di funzione ha un ruolo di primo, se non di *primissimo*, piano.

L'elaborazione maxwelliana delle precedenti leggi empiriche di Coulomb, Gauss, Laplace, Biot-Savart, Tesla, Lorentz, Faraday, Lenz (per citare i principali contributi fisico-matematici alla descrizione dei fenomeni elettrici e magnetici) si basa essenzialmente sulla connessione reciproca tra le due grandezze fondamentali della fenomenologia elettromagnetica: il campo elettrico ***E*** e il campo magnetico ***B***.

Queste due grandezze vettoriali, dipendenti in generale sia dal punto dello spazio in cui vengono calcolate sia dall'istante temporale a cui tale calcolo si riferisce, non sono, ovviamente, le grandezze direttamente osservabili.

La grandezza concretamente misurabile, in questo contesto come nella gran parte degli ambiti delle scienze fisiche, è invece la forza esercitata dai due campi su di una particella carica, la cosiddetta forza di Lorentz, data dalla somma di un contributo elettrico ed uno magnetico secondo l'equazione:

$$\boldsymbol{F} = q\,\boldsymbol{E} + (q/c)\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

dove ***F*** è appunto la forza di Lorentz, *q* e ***v*** indicano rispettivamente la carica e la velocità della particella, *c* è una costante universale (pari alla velocità della luce nel vuoto) e il simbolo X corrisponde all'operazione di prodotto vettoriale.

Tale equazione, una volta noti ***E*** e ***B***, fornisce la forza ***F*** (subita dalla particella carica) che si può considerare *generata* dai due campi.

Il problema si riduce dunque alla determinazione di ***E*** e ***B***, grandezze che, almeno in linea di principio, possono essere ottenute come soluzioni delle cosiddette *equazioni di Maxwell*.

Questo insieme di quattro equazioni vettoriali (tridimensionali), che tecnicamente costituisce un sistema di equazioni differenziali (del 1° ordine) alle derivate parziali (rispetto alle coordinate spaziali e al tempo), ha per funzioni incognite proprio ***E*** e ***B***.

Ai fini della questione qui di interesse (l'esistenza delle funzioni) è fondamentale notare uno dei caratteri più peculiari di tale sistema, in particolare delle ultime due equazioni (quelle che legano tra di loro ***E*** e ***B***).

Vediamo esplicitamente le due equazioni in oggetto:

$$rot\,\boldsymbol{E} = -\,(1/c)\,d\boldsymbol{B}/dt$$

$rot\, \boldsymbol{B} = (4\pi/c)\, \boldsymbol{j} + (1/c)\, d\mathbf{E}/dt$

dove $\boldsymbol{j}$ rappresenta il vettore densità di corrente e il simbolo *rot* indica l'operatore *rotore*, un operatore differenziale del 1° ordine che utilizza le derivate parziali rispetto alle coordinate spaziali.

Come risulta immediatamente chiaro, le ultime due equazioni di Maxwell **mettono in relazione** la ***dipendenza*** di ***E*** e ***B dallo spazio*** (attraverso l'applicazione dell'operatore rotore) con la ***dipendenza*** degli stessi ***E*** e ***B dal tempo*** (attraverso le derivate parziali rispetto, appunto, al tempo).
In questo contesto, come in quello della meccanica newtoniana, è essenziale proprio la connessione, istituita dalle due equazioni sopra riportate, tra due diverse dipendenze funzionali (quella rispetto allo spazio e quella rispetto al tempo), quindi tra due *abstracta*.
Qui, però, in confronto alla struttura logica e formale della meccanica newtoniana, il problema è ancora più articolato, complesso e filosoficamente ricco.
Vediamo perché.
Innanzitutto bisogna notare che le relazioni del tipo accennato sopra sono *due*: una lega la dipendenza del campo elettrico dallo spazio alla dipendenza del campo magnetico dal tempo; l'altra lega la dipendenza del campo magnetico dallo spazio alla dipendenza del campo elettrico dal tempo.
In altri termini, *entrambe* le dipendenze (dallo spazio e dal tempo) vengono considerate per *entrambi* i campi e vengono connesse mediante una sorta di *criterio di scambio*: se consideriamo un campo e la sua dipendenza dallo spazio, la connessione sarà con l'altro campo e la sua dipendenza dal tempo; poi dovremo considerare gli stessi campi, ma con le dipendenze da spazio e tempo scambiate.
Ognuno di questi due passi porta alla formulazione di una delle due equazioni di Maxwell che ho riportato sopra.
Il contenuto fisico di questi due diversi tipi di connessione tra dipendenza dallo spazio e dipendenza dal tempo è a sua volta molto diverso.
Mentre la prima equazione descrive il meccanismo in virtù del quale in un circuito si genera una forza elettromotrice indotta per effetto della variazione nel tempo del flusso del campo

magnetico attraverso la superficie delimitata dal circuito stesso, la seconda equazione spiega (e descrive quantitativamente) come la variazione del campo elettrico nel tempo produca, al pari di una corrente elettrica, un campo magnetico.

Il primo fenomeno è molto importante ai fini della produzione dell'energia elettrica mediante la cosiddetta *dinamo* (si pensi alle centrali idroelettriche o anche al generatore di corrente elettrica per le luci della bicicletta); il secondo ha un'importanza più di carattere teorico per la spiegazione e la descrizione del fenomeno delle onde elettromagnetiche (quindi della luce, oltre che delle onde radio utilizzate nelle trasmissioni a distanza).

Entrambe le relazioni, dunque, sono essenziali per chiarire, sia sul piano prettamente teorico che su quello delle applicazioni tecnologiche, i caratteri più profondi, salienti e determinanti della fenomenologia elettromagnetica.

L'uso degli *abstracta* (le funzioni che legano $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ ad $\boldsymbol{r}$ e a t) è qui, si è già rilevato, particolarmente articolato e sofisticato (in quanto coinvolge *entrambe* le dipendenze spazio-temporali di due grandezze fisicamente fondamentali, i campi) e pertanto dimostra in modo ancor più netto e ineludibile (rispetto al caso della dinamica di Newton) l'*indispensabilità* di tali enti matematici (le funzioni) per la formulazione delle leggi fisiche nell'ambito considerato (ovvero nell'elettromagnetismo classico).

Notevole, inoltre, è l'importanza delle equazioni di Maxwell e del ruolo particolare che esse assegnano ai campi $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$.

Storicamente è indubbio che proprio lo schematismo teorico basato sui campi (*intesi come funzioni* di $\boldsymbol{r}$ e t governate dalle equazioni di Maxwell) ha permesso di giungere ad alcune fondamentali intuizioni di carattere fisico, di cui si dirà tra poco.

La conquista teorica di Maxwell consiste infatti nell'avere spostato l'attenzione dalle forze (elettrica e magnetica) ai campi, ovvero da grandezze più direttamente misurabili, e per conseguenza più *vicine* al dato immediato ed empirico della fenomenologia elettromagnetica, a due grandezze (i campi $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$) di carattere molto più *astratto* e *teorico*, che, da un lato, consentono di derivare i valori delle forze, mediante la già citata, e riportata, equazione della forza di Lorentz, mentre, dall'altro, possono essere definite come funzioni che rispondono ad una dinamica ben precisa, descritta in modo matematicamente rigoroso ed esaustivo da un sistema di equazioni differenziali di cui esse sono le incognite.

E' proprio l'avere posto a fondamento della descrizione scientifica dei fenomeni

elettromagnetici delle entità molto più astratte di quelle precedentemente utilizzate per la formulazione dei principi dell'Elettrologia e del Magnetismo che ha consentito di giungere ad una visione teorica fortemente *unitaria* e *sintetica*, la quale ha permesso nuove ed importanti ipotesi di carattere fisico.
Vediamo più in dettaglio quali sono tali ipotesi.
La prima consiste nell'idea che, essendo i campi definibili anche nello spazio vuoto (a differenza delle forze, che devono necessariamente essere applicate ad oggetti materiali), le onde elettromagnetiche previste dalle equazioni di Maxwell possono propagarsi nel vuoto (non hanno bisogno, a differenza delle onde meccaniche, di alcun mezzo materiale atto alla loro propagazione) e non necessitano dunque della presenza dell'*etere*, sostanza materiale inizialmente ipotizzata proprio per spiegare la propagazione della luce, e degli impulsi elettromagnetici in generale, in assenza di aria, altri gas o mezzi materiali comunque individuabili (come liquidi, cristalli, etc.) e mai riscontrata sperimentalmente.
L'idea, quindi, che le onde elettromagnetiche potessero propagarsi nel vuoto fu un'ipotesi assolutamente nuova, suffragata poi da tutte le osservazioni empiriche effettuate (fino ai giorni nostri), che soltanto lo schematismo teorico maxwelliano poteva consentire di formulare (in modo, per altro, del tutto naturale e immediatamente conseguente ai principi della teoria), laddove invece tutti gli altri tipi di descrizione fisica dei fenomeni elettromagnetici, basati sul concetto di forza in luogo di quello di campo, fallivano nello spiegare proprio il dato di fatto sperimentale della propagazione della luce nel vuoto.
La seconda importante ipotesi di carattere fisico permessa dalla teoria di Maxwell è l'ipotesi dell'invarianza della velocità della luce al mutare dello stato di moto (dunque della velocità) dell'osservatore.
La precedente teoria corpuscolare della luce (la teoria di Newton) non è in grado di spiegare una tale proprietà dei fenomeni di propagazione luminosa. E' ovvio infatti che i corpuscoli di luce ipotizzati da Newton, come tutti i corpuscoli materiali, devono avere una velocità che dipende dall'osservatore (la velocità di un uccello in volo parallelamente ad un treno in corsa ha un valore diverso se viene valutata da un passeggero seduto all'interno del treno o da un osservatore al di fuori del treno seduto sotto un albero).
Nell'ambito della teoria di Maxwell della luce come onda elettromagnetica, invece, anche il principio dell'invarianza della velocità della luce è una conseguenza del tutto naturale delle

equazioni della teoria.

Da tali equazioni, infatti, si può dimostrare che le onde elettromagnetiche si propagano con una velocità fissata dai parametri numerici che figurano nelle equazioni. I valori di questi parametri vengono misurati in esperimenti di elettrologia e magnetismo, in modo cioè del tutto indipendente dalle osservazioni dei fenomeni luminosi, e non sono in nessun caso funzioni dello stato di moto dell'osservatore. Il valore ottenuto per la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche sulla base dei parametri misurati delle equazioni di Maxwell è proprio, entro le incertezze degli strumenti di misura, il valore della velocità di propagazione degli impulsi luminosi che risulta dagli esperimenti appositi volti alla misura di questa importante costante di natura.

Da questa fondamentale conquista teorica dello schematismo maxwelliano, basata sul concetto di campo e sulla sua definizione come funzione delle coordinate spazio-temporali, prende inoltre l'avvio l'elaborazione einsteiniana della Relatività ristretta. Uno dei postulati di base di questa importante teoria della fisica del Novecento è infatti proprio il postulato di invarianza della velocità della luce.

Va anche rilevato che le equazioni di Maxwell forniscono un *framework* descrittivo e predittivo di grande precisione quantitativa riguardo ai fenomeni di *interferenza* e *diffrazione* che si presentano nella propagazione luminosa.

La previsione maxwelliana del fenomeno delle onde elettromagnetiche e l'identificazione, entro un certo *range* di frequenze, di tale fenomeno con la luce ha messo a disposizione dei fisici uno strumento potentissimo per comprendere e prevedere con notevole esattezza numerica i caratteri più importanti ed anche quelli più di dettaglio dell'interferenza e della diffrazione della luce, caratteri che la precedente teoria ondulatoria di Huygens consentiva di prevedere soltanto facendo ricorso ad alcune ipotesi *ad hoc* e in ogni caso con minore precisione quantitativa (anche se sempre con ben maggiore successo rispetto alla teoria corpuscolare di Newton).

La possibilità di descrivere un fenomeno ondulatorio attraverso uno schema concettualmente organico (dunque senza ipotesi *ad hoc*) e preciso nelle sue *performance* predittive dipende ovviamente in modo stringente dall'uso di grandezze fisiche (i campi, nel nostro caso) rappresentate come funzioni di $\boldsymbol{r}$ e t.

Un'onda, infatti, è essenzialmente una funzione periodica della fase $\boldsymbol{kr} - \omega t$, con $\boldsymbol{k}$ vettore d'onda ed $\omega = 2\pi\nu$ frequenza angolare dell'onda considerata (essendo ν la frequenza ordinaria dell'onda medesima).

Si noti, infine, che il modello ondulatorio, con le sue funzioni della fase $\boldsymbol{kr} - \omega t$, è quel modello fisico-matematico su cui è basata la formulazione della teoria quantistica, almeno nella sua versione dovuta a Schroedinger (detta, appunto, *meccanica ondulatoria*).

Storicamente fu proprio l'esperimento della diffrazione di un fascio di elettroni attraverso una doppia fenditura (sulla *falsa riga* dell'esperimento di Young, eseguito con un fascio di luce), che diede risultati del tutto analoghi a quelli ottenuti con la luce e previsti dal modello teorico maxwelliano, che diede una delle conferme più importanti della meccanica di Schroedinger e avvalorò così in modo molto forte il formalismo ondulatorio (che è tuttora, assieme al formalismo matriciale di Heisenberg, uno dei due formalismi fondamentali) della Fisica quantistica.

2.6 L'elettrodinamica quantistica.

E' senz'altro molto illuminante, a parere di chi scrive, vedere come il concetto di campo sia indispensabile anche per il procedimento di *quantizzazione* dell'elettromagnetismo, procedimento che ha portato allo sviluppo dell'importantissima branca della Fisica quantistica che va sotto il nome di Elettrodinamica quantistica.

Dopo che Schroedinger e Heisenberg ebbero formulato le due principali versioni della Meccanica quantistica (la meccanica ondulatoria e quella delle matrici), fu naturale porsi il problema di come arrivare ad una versione *quantizzata* (ovvero coerente con i principi della Meccanica quantistica) della teoria dell'Elettromagnetismo.

Tale formulazione quantizzata era stata in qualche modo anticipata dalla spiegazione dell'effetto fotoelettrico fornita da Einstein mediante l'ipotesi dei cosiddetti *quanti di luce*, e tuttavia mancava ancora una versione coerente, organica ed esaustiva dell'intero complesso della teoria elettromagnetica che fosse compatibile con i principi della Fisica quantistica stabiliti in sede di elaborazione della Meccanica di Schroedinger e Heisenberg.

La chiave per arrivare alla cosiddetta quantizzazione dell'Elettromagnetismo fu trovata in un'idea classica: la rappresentazione del campo elettromagnetico in una qualsiasi regione limitata di spazio come sovrapposizione di onde stazionarie di frequenze diverse (veri e propri *oscillatori classici di campo*).

Già la Meccanica quantistica sviluppata da Schroedinger e Heisenberg aveva realizzato l'obiettivo di quantizzare l'oscillatore meccanico classico (esempi tipici di oscillatore meccanico sono il sistema massa-molla ed il pendolo), sostituendo posizione e momento del corpo oscillante con opportuni operatori definiti sullo spazio di Hilbert degli stati quantistici del sistema.

L'equazione di Schroedinger

$$H\Phi = ih/(2\pi)\ d\Phi/dt$$

(con h pari al valore della *costante di Planck*), in cui H rappresenta l'energia totale (cinetica + potenziale) dell'oscillatore data da (per un oscillatore unidimensionale di massa m e costante elastica k descritto dalla posizione x e dal momento p)

$$H = p^2/(2m) + ½\, k\, x^2$$

viene utilizzata sostituendo ad x e a p i corrispondenti operatori quantistici, in modo da arrivare al calcolo dei valori possibili dell'energia (autovalori dell'operatore H) e delle corrispondenti funzioni d'onda del sistema (autostati dell'operatore H).

L'idea su cui si basa il procedimento di quantizzazione del campo elettromagnetico consiste nello scrivere l'energia totale (elettrica + magnetica) del singolo oscillatore di campo (l'onda stazionaria corrispondente ad una delle frequenze permesse nella regione di spazio considerata), energia che nella teoria classica è data in termini dei campi $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$, e sostituire a tali campi degli opportuni operatori definiti sullo spazio di Hilbert degli stati dell'oscillatore.

E' chiaro dunque il ruolo fondamentale dei campi elettrico e magnetico definiti nella teoria classica anche ai fini dell'elaborazione di una teoria quantistica dell'elettromagnetismo (l'Elettrodinamica quantistica, in sigla QED).

Va inoltre notato come in questa procedura di quantizzazione non soltanto vengono utilizzate quelle particolari funzioni di $\boldsymbol{r}$ e t che sono i campi elettrico e magnetico, essenziali nella descrizione classica dei fenomeni elettromagnetici, ma viene anche utilizzato il legame funzionale (che, ancora una volta, risulta dalla teoria classica) sulla base del quale l'energia H_{field} dell'oscillatore di campo è data in termini dei campi $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$. Tale legame funzionale è

$$H_{field} = 1/(8\pi)\,(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2/\mu_0)\,V$$

con μ_0 pari al valore della permeabilità magnetica del vuoto, mentre V rappresenta il volume della regione di spazio in cui stiamo descrivendo i modi propri di oscillazione del campo elettromagnetico (le onde stazionarie di cui abbiamo detto sopra).

Il ruolo del concetto di funzione è dunque di importanza assolutamente centrale in tutta la procedura di quantizzazione della teoria classica dell'elettromagnetismo, sia per ciò che riguarda l'uso del concetto di campo (come funzione delle coordinate spazio-temporali) sia in riferimento alla funzione che lega l'energia del campo elettromagnetico H_{field} alle grandezze $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$.

Da tale procedura di quantizzazione risulta il fondamentale concetto di *quanto di energia* del campo elettromagnetico, o *quanto di luce*, o *fotone*, già ipotizzato prima da Planck e poi da Einstein (da quest'ultimo nella famosa spiegazione dell'effetto fotoelettrico, che gli valse il Nobel per la Fisica nel 1921).

Il calcolo dello spettro degli autovalori dell'operatore energia del campo H_{field} dà infatti il notevolissimo risultato di uno *spettro discreto*, in cui ogni autovalore (ovvero ogni valore possibile dell'energia del campo) può essere determinato aggiungendo all'autovalore precedente il quanto fondamentale di energia elettromagnetica $h\nu$, dipendente soltanto dalla frequenza ν dell'onda stazionaria considerata.

In formule:

$$E_{n+1} = E_n + h\nu$$

dove gli E_n sono appunto gli autovalori di H_{field}, costituenti una vera e propria successione numerica (lo spettro, abbiamo detto, è discreto) il cui termine iniziale E_0 è la cosiddetta *energia di punto zero*, pari ad $h\nu/2$.

Dunque, a partire dal valore E_0, aggiungendo un certo numero n di fotoni $h\nu$ si ottiene l'autovalore E_n dell'energia di campo immagazzinata in quella data onda stazionaria di frequenza ν.

L'importanza veramente grande che il concetto di fotone ha in elettrodinamica quantistica e nella fisica moderna in generale dovrebbe far riflettere sulle potenzialità descrittive e cognitive dell'utilizzo del concetto di funzione nel percorso teorico e formale che ha portato dalla formulazione classica delle leggi dell'elettromagnetismo alla teoria quantistica del campo elettromagnetico.

Una considerazione finale sarà utile sulla questione dell'*indispensabilità*.

L'obiezione tipica del nominalista (su quanto esposto in questo paragrafo come su altri procedimenti che fanno uso di concetti matematici nella formulazione delle leggi fisiche) è (specificata relativamente al problema dell'indispensabilità delle funzioni nell'elaborazione dell'elettrodinamica quantistica, problema di cui si è appena trattato): senz'altro le funzioni sono utili nello sviluppo del formalismo quantistico; ma siamo proprio sicuri che siano *indispensabili*?

Per rispondere adeguatamente a questa domanda, dobbiamo 'fare un passo indietro' verso alcune questioni epistemologiche di fondo concernenti la fisica quantistica e i suoi principi.

Il nominalista potrebbe infatti ritenere legittimo ipotizzare che il passaggio attraverso il concetto di funzione (relativamente ai campi $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ e alla loro relazione con l'energia elettromagnetica) per arrivare a individuare tutte le proprietà fondamentali dei sistemi fisici studiati dalla QED (quantizzazione dell'energia elettromagnetica *in primis*) sia in realtà un passaggio non necessario.

In altri termini, dobbiamo porci il problema se l'elettrodinamica quantistica possa essere fondata in modo indipendente dal formalismo classico corrispondente (il formalismo dell'Elettromagnetismo di Maxwell), dal momento che i campi $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ e la loro relazione con l'energia elettromagnetica sono concetti fisico-matematici definiti nell'ambito della teoria classica.

La QED sembra proprio avere bisogno, come *punto di partenza* fondante, di alcuni enti astratti (le *grandezze* e le *relazioni* definite in fisica classica mediante il concetto matematico di *funzione*) al di là dei quali non possa ritrovare alcun fondamento alternativo in procedure nominalistiche che, magari continuando ad utilizzare risultati e strategie della teoria classica, facciano tuttavia a meno delle *formule matematiche* di tale teoria.

In effetti, tale caratteristica dell'elettrodinamica quantistica (e in generale di qualunque branca della fisica quantistica) di dipendere, per la fondazione dei propri principi di base, non soltanto dalla fisica classica in senso ampio e generale, ma in particolare dalla *formalizzazione matematica* delle grandezze e delle leggi fondamentali della teoria classica corrispondente, costituisce, allo stato attuale delle conoscenze sviluppate nell'ambito delle scienze fisiche, un tratto *ineliminabile* della metodologia e della fondazione concettuale e formale della teoria quantistica.

Le ragioni di tale **dipendenza ineliminabile** della formulazione della fisica quantistica **dalla matematica della fisica classica** risiedono probabilmente nell'assenza (o almeno nella problematicità dell'elaborazione e dell'adeguatezza) di un modello fisico soddisfacente per i principi e le leggi della teoria quantistica.

L'assenza di un tale modello si rivela in modo estremamente chiaro e netto nella questione del dualismo onda-particella, dualismo che, per quanto interpretato dal punto di vista filosofico (ed ontologico in particolare) attraverso varie soluzioni e concettualizzazioni (talvolta anche piuttosto sofisticate), rende praticamente impossibile, a parere di chi scrive (e non solo), la definizione di un modello logicamente autoconsistente, fisicamente visualizzabile e capace di costituire un supporto adeguato per la deduzione di tutte le previsioni che i principi matematicamente formalizzati della teoria quantistica ordinaria consentono di ottenere.

L'unico modello *di natura*, in qualche modo, *fisica* che la teoria quantistica utilizza è il modello ondulatorio (almeno nella meccanica di Schroedinger), il quale, tuttavia, riguarda la funzione d'onda e non la particella materiale, realmente esistente, la cui posizione è statisticamente distribuita secondo il quadrato del modulo della funzione d'onda.

Naturalmente qui si pone un problema molto complesso di interpretazione della funzione d'onda, o, per essere più precisi, di delucidazione dello statuto ontologico delle onde ipotizzate da de Broglie e Schroedinger per descrivere la dinamica delle particelle materiali.

Numerose sono le ipotesi ontologiche formulate sin qui (fin dagli inizi della meccanica quantistica) sulla natura delle onde di de Broglie-Schroedinger.

Una delle prime fu in effetti un'ipotesi realista. Secondo tale congettura, che fu avanzata ed elaborata da de Broglie nella cosiddetta *teoria dell'onda pilota*, non esiste soltanto la particella materiale di cui cerchiamo di prevedere la posizione, ma anche un campo governato da un'equazione d'onda (l'equazione di Schroedinger), detto appunto *onda pilota*, che agisce fisicamente sulla particella, influenzandone la posizione e facendo sì che questa sia statisticamente distribuita secondo il quadrato del modulo della funzione d'onda (che non è altro, in questa teoria, che la forma matematica della dipendenza spaziale e temporale dell'onda pilota, cioè del campo fisicamente esistente ipotizzato da de Broglie).

La teoria dell'onda pilota di de Broglie è stata riformulata in tempi più recenti da David Bohm e ha dato luogo, in questa versione riveduta (ma che sostanzialmente è basata sui medesimi principi base), ad una teoria perfettamente coerente e capace di generare le stesse previsioni empiriche della teoria quantistica standard.

Lo stesso Schroedinger, inizialmente, ipotizzò che la funzione d'onda fosse la rappresentazione formale di un'entità fisica realmente esistente (una qualche sorta di campo, come nell'idea di de Broglie), anzi dell'*unica* entità fisica realmente esistente, arrivando a congetturare che fosse proprio la particella a non esistere nella realtà, essendo ciò che noi chiamiamo particella soltanto il modo di manifestarsi di quel campo fisico quando lo sperimentatore esegue una misurazione che in qualche modo *presuppone* di avere a che fare con una particella (in altri termini sarebbero l'apparato di misura e la procedura utilizzata per effettuare la misurazione, nonché l'interpretazione di tipo classico del risultato della misura, a determinare l'idea che noi misuriamo proprietà di una particella, nel senso di un oggetto del tutto simile, nella sua ontologia di base, ad una particella classica).

Fu poi Max Born a dare l'interpretazione probabilistico-statistica della funzione d'onda, interpretazione tuttora largamente dominante nell'ambito della comunità scientifica.

Secondo tale interpretazione non esiste alcun campo fisico descritto dall'equazione di Schroedinger. La funzione d'onda è soltanto uno strumento matematico che può essere utilizzato per prevedere (probabilisticamente) la posizione della particella, nel senso che, come si è detto sopra, tale posizione è statisticamente distribuita secondo il quadrato del modulo della funzione d'onda.

L'idea di Born venne anche fortemente sostenuta dal filosofo Karl Popper nella sua interpretazione del formalismo quantomeccanico basata sul realismo scientifico.

Molto importanti sono anche le ipotesi elaborate da Bohr ed Heisenberg.

Per quanto riguarda il fisico danese, egli è il padre del cosiddetto *principio di complementarità*, secondo il quale un sistema quantistico elementare (la particella singola

della visione classica) può manifestarsi ora come onda, ora come particella. La veste che il sistema prenderà dipende dal tipo di esperimento in cui tale sistema viene osservato.
Ad esempio, un fascio di elettroni diretto perpendicolarmente ad uno schermo opaco con una doppia fenditura darà origine ai tipici effetti ondulatori di diffrazione e interferenza (gli stessi cui dà luogo la luce nell'analogo esperimento, l'esperimento di Young).
Se invece studiamo l'*urto* (ad alta energia) tra un elettrone e un fotone (cioè, parlando in termini classici, l'interazione tra un elettrone molto veloce e un campo elettromagnetico radiativo ad alta frequenza), ovvero il cosiddetto *effetto Compton*, vediamo che elettrone e fotone scambiano energia e quantità di moto esattamente come due particelle classiche (si noti che in questo caso anche la radiazione elettromagnetica *si comporta* come una particella, il fotone).
Il principio di complementarità stabilisce però, almeno nella versione datane da Bohr, che il sistema fisico non può mai manifestarsi contemporaneamente come onda *e* come particella.
Alla domanda se esistono le onde o le particelle, dunque, l'interpretazione di Bohr risponde: esiste *qualcosa* che ha sia le proprietà delle onde che quelle delle particelle, e tali proprietà possono essere rivelate in dipendenza esclusiva dell'esperimento (senza che possano manifestarsi *entrambe* nello *stesso* esperimento).
Non così per Heisenberg, il quale, formulando la meccanica delle matrici, intende prescindere dall'individuazione di qualunque ente fisico dotato di proprietà che poi vengono rivelate (e misurate) dagli esperimenti.
Per Heisenberg, cioè, non esistono né le onde né le particelle e, d'altra parte, non è compito dello scienziato cercare di sapere *che cosa* esiste, ma soltanto trovare degli apparati teorici (che, in ultima analisi, si riducono ad apparati matematici) che consentano di prevedere al meglio i risultati delle misure.
La critica popperiana dell'interpretazione standard della fisica quantistica ha cercato di porre di nuovo al centro dell'idea di indagine scientifica del mondo la visione realista, affermando che il dualismo onda-particella è un falso problema, dal momento che, sulla base dell'interpretazione di carattere statistico della funzione d'onda data da Born, l'ente realmente esistente è la particella, essendo la funzione d'onda soltanto uno strumento matematico atto a prevedere probabilità.
Popper, nel suo saggio *La teoria dei quanti e lo scisma nella fisica*, cerca di far vedere che

tutte le caratteristiche del formalismo quantomeccanico che, nell'interpretazione standard, vengono poste alla base dell'idea del ruolo fondamentale dell'osservatore nella dinamica dei fenomeni microscopici (e quindi dell'impossibilità di arrivare, tramite l'indagine scientifica, ad una rappresentazione perspicua del mondo come di un puro oggetto indipendente dall'attività del soggetto) possono invece essere ricondotte al semplice fatto dell'*incompletezza* della teoria quantistica, la quale parla in realtà (secondo Popper) di un oggetto (la particella) *in linea di principio* conoscibile né più né meno di un oggetto classico. Si veda, a tal proposito, la discussione dello stesso Popper sulle relazioni di indeterminazione di Heisenberg, che, per il filosofo austriaco, non descrivono una *barriera invalicabile* riguardante la nostra possibile conoscenza del mondo fisico, dal momento che, in realtà, posizione e momento (o energia e tempo) possono essere misurati *entrambi* (anche se *a posteriori*), per lo *stesso* stato quantistico della particella, con la precisione data dagli strumenti utilizzati.

Tale possibilità *a posteriori* di conoscenza simultanea di due variabili coniugate (come, appunto, posizione e momento o energia e tempo) porta alla conclusione, secondo Popper, che non si può inferire, come fa Bohr e (in modo ancor più estremo) Heisenberg, che, ai fini della conoscenza scientifica, non ha senso presupporre che una particella *abbia* posizione e momento o energia e tempo *ben definiti* per ogni suo stato.

L'impossibilità della conoscenza *a priori* (cioè della *previsione*) dei valori di due variabili coniugate riferiti allo stesso stato quantistico della particella va dunque ascritta, sempre nell'interpretazione popperiana, alla attuale incompletezza della teoria e non ad un *dissolversi* del riferimento ontologico chiaro dato dal modello classico della particella (dotata di certi ben determinati valori delle grandezze fisiche che la caratterizzano).

Chi scrive ritiene, alla luce di quanto detto sulle principali interpretazioni filosofiche della fisica quantistica e della più recente evoluzione di questa (si pensi alla fisica delle particelle, per fare l'esempio forse più notevole), che l'immagine corpuscolare classica della materia sia attualmente in serie difficoltà, sia perché le più avanzate teorie di fisica delle particelle impediscono di attribuire una qualsiasi estensione spaziale alla singola particella (che è concepita, in un qualche misterioso senso, come *puntiforme*), sia in virtù dei fenomeni di annichilazione di particelle materiali con produzione di radiazione elettromagnetica, sia perché la teoria quantistica non è mai stata completata nel senso indicato da Popper, continuando a **necessitare di un apparato matematico probabilistico** che determina *incertezze previsionali* più ampie delle incertezze dovute agli strumenti che possono essere utilizzati per misurare (*a posteriori*) le grandezze fisiche.

Penso pertanto che si possa affermare fondatamente che leggi e principi della fisica quantistica (in particolare della meccanica e dell'elettrodinamica) non possano essere formulati nominalisticamente per il semplice fatto che il modello fisico su cui dovrebbe basarsi una tale formulazione è un modello, nell'interpretazione più ottimistica, *incompleto*, mancante cioè di quegli elementi fondamentali (dell'immagine che esso ci restituisce degli enti fisici in gioco e delle loro relazioni) che sarebbero indispensabili per impostare una descrizione che ambisse a fare a meno dell'utilizzo della matematica e dei suoi oggetti.

La matematica riesce infatti a *fare astrazione* da quegli aspetti del modello fisico (a noi ancora ignoti o, nell'interpretazione standard della fisica quantistica, del tutto inconoscibili o addirittura *non esistenti* nel senso della moderna scienza della natura) che un ipotetico fisico nominalista dovrebbe conoscere per evitare il ricorso a funzioni d'onda, probabilità, spazi di Hilbert, operatori e, in generale, tutto il sofisticato apparato matematico utilizzato dalla teoria quantistica ordinaria.

In pratica, un modello fisico la cui piena conoscenza fosse fruibile per il nominalista ai fini dell'elaborazione di una fisica dei fenomeni microscopici che non facesse uso della matematica sarebbe il modello di riferimento di una *teoria delle variabili nascoste* (le variabili nascoste costituirebbero la controparte matematica di quegli aspetti del modello fisico che, dal punto di vista dell'attuale teoria quantistica, non sono noti o addirittura sono, come si è detto sopra, inconoscibili *tout court*).

Non è questa la sede per discutere in dettaglio la questione della possibilità di una teoria delle variabili nascoste che sia equivalente, allo stato attuale delle possibilità di misurare le variabili che caratterizzano un sistema microscopico, alla teoria quantistica standard.

Bisogna tuttavia rilevare che il controllo sperimentale delle disuguaglianze di Bell ha reso piuttosto difficile l'accettazione di una qualsiasi teoria delle variabili nascoste, a meno che non si voglia optare per una teoria deterministica (quindi a variabili nascoste) *non locale* (con tutto ciò che comportano gli effetti di non località, soprattutto in riferimento al problema della coerenza con i principi della Relatività ristretta).

In ogni caso una tale teoria delle variabili nascoste non locale, alternativa alla fisica quantistica standard, non è mai stata elaborata e testata.

La possibilità di disporre di un modello fisico *completo* su cui tentare di costruire una descrizione nominalistica esauriente delle leggi del mondo microscopico é pertanto una possibilità puramente teorica (nel senso che tale modello fisico completo a tutt'oggi non esiste) e, anche come possibilità teorica, molto problematica (a causa, come si è detto, della questione della non località).

La vecchia osservazione di Einstein sull'incompletezza della teoria dei quanti è, a parere del sottoscritto, il punto-chiave che bisogna aver chiaro per comprendere l'indispensabilità della matematica nella fisica quantistica.

Concludo questo paragrafo riportando un brano di un testo scritto da Heisenberg (*The Representation of Nature in Contemporary Physics*):

“La concezione della realtà oggettiva ... si è così dissolta ... nella cristallina chiarezza di una matematica che non rappresenta più il comportamento delle particelle, ma piuttosto la nostra conoscenza di tale comportamento”

Chi scrive ritiene che l'idea qui (come altrove) espressa da Heisenberg sulla dissoluzione dell'oggettività come modo di guardare (e di descrivere scientificamente) al reale sia essenzialmente sbagliata. Ma è sbagliata relativamente ai concetti di conoscenza e realtà oggettive, intesi come fondamenti delle scienze della natura e del metodo di tali scienze, nel senso che, come ha affermato Popper, il formalismo della meccanica quantistica non implica che la conoscenza scientifica del mondo fisico non sia oggettiva e che la stessa realtà naturale non possa più essere concepita come oggettiva, ma semplicemente che la nostra attuale migliore teoria scientifica del mondo microscopico (la meccanica quantistica, appunto) è incompleta.

Ciò che invece il brano sopra riportato mette in evidenza (a mio parere correttamente) in modo molto chiaro è il ruolo estremamente forte che la matematica ha nella teoria quantistica (non a causa di una supposta mancanza di oggettività, costitutiva ed ineliminabile, della conoscenza scientifica dei fenomeni microscopici, ma della incompletezza della attuale teoria).

Tale ruolo forte dell'apparato matematico consiste nello strutturare (da un punto di vista formale) un insieme di relazioni fisicamente salienti prescindendo da una conoscenza completa del modello fisico sottostante.

Come già rilevato per altri ambiti della teoria fisica, un ruolo così forte (al punto da divenire fondante) della matematica nell'elaborazione dei principi della fisica è motivato proprio dal *carattere astratto* degli enti (in questo caso le funzioni, ma anche gli spazi di Hilbert e gli operatori su tali spazi) che la matematica postula e di cui dimostra proprietà, relazioni e connessioni strutturali-formali.

Capitolo 3. L'indispensabilità degli insiemi.

Altro grande ambito in cui si mostra l'utilità e l'indispensabilità della matematica nelle scienze della natura è quello della teoria degli insiemi e del suo utilizzo sia nella fisica classica che in quella quantistica e relativistica.

La domanda fondamentale cui il realismo matematico deve rispondere in proposito è: posto che determinati enti matematici siano indispensabili per le teorie scientifiche, abbiamo bisogno in modo imprescindibile di *strutturare la molteplicità* di tali enti in insiemi (nel senso della teoria matematica degli insiemi), ovvero di *pensare* gli enti matematici utilizzati (numeri, funzioni, ...) *come elementi* di insiemi opportunamente definiti e di cui la matematica ci consente di conoscere caratteristiche e proprietà salienti?

Ancora una volta tenterò di rispondere a questo importante quesito analizzando l'uso concreto della teoria matematica in oggetto (la teoria degli insiemi, in questo caso) nella scienza fisica e, in particolare, nella formulazione dei suoi principi fondamentali.

Tre i nodi teorici essenziali che intendo mettere in evidenza e comprendere adeguatamente nella direzione indicata:

1. La definizione e l'utilizzo dello *spazio delle fasi* in fisica classica, sia deterministica che statistica;

2. L'uso del concetto di metrica pseudo-euclidea e dello *spazio di Minkowski* in Relatività ristretta;

3. La strutturazione dell'insieme degli stati di un sistema come *spazio di Hilbert* in Meccanica quantistica;

4. La connessione tra la geometria dello spaziotempo e l'interazione gravitazionale in Relatività Generale e il conseguente utilizzo generalrelativistico delle *varietà riemanniane* quadridimensionali.

Nell'approfondimento di questi aspetti della *matematizzazione* delle teorie fisiche, cercherò di evidenziare come la piena utilità di determinati strumenti matematici per l'elaborazione teorica delle scienze fisiche è strettamente connessa con la comprensione, la descrizione e la conoscenza di quegli strumenti come **enti che si inquadrano in ben precise strutture** (gli insiemi) di cui è necessario avere il concetto che le definisce e la conoscenza dettagliata delle proprietà matematiche.
Ma prima di entrare nello specifico dei tre *casi di studio* sopra elencati, bisogna affrontare una importante questione che è alla base della necessità, individuata da molta parte del realismo matematico degli ultimi decenni, di considerare gli insiemi come enti indispensabili per le scienze della natura: la questione dell'*infinito attuale* in matematica e degli insiemi di cardinalità infinita.

3.1 La teoria degli insiemi. Cardinalità infinita, infinito potenziale e infinito attuale.

L'idea di insieme e la *teoria degli insiemi* come *corpus* strutturato di concetti, formulato, nel corso di alcuni decenni di ricerche in ambito filosofico e matematico, in termini di teoria assiomatica, sono state definite da diversi logici e filosofi dei nostri tempi come un modo logicamente preciso e coerentemente matematizzato di affrontare il *problema dell'infinito*.
La domanda se l'infinito in matematica possa essere pensato soltanto come la crescita illimitata di una determinata grandezza numerica o possa invece costituire un carattere ben definito di opportuni enti matematici (insiemi transfiniti e loro cardinalità, da Cantor in poi) è una domanda antica, risalente, nella sua prima forma chiaramente e nettamente delineata, ad Aristotele.
Come crescita illimitata, l'infinito è (proprio come in Aristotele) soltanto un *infinito potenziale* e non è una proprietà matematica adatta alla discriminazione tra il più e il meno, il maggiore e il minore (o l'uguale).
Come cardinalità di un insieme transfinito (come l'insieme dei naturali, dei razionali o dei reali), l'infinito costituisce invece, grazie alle definizioni e ai concetti della teoria degli

insiemi di Zermelo-Fraenkel (con l'assioma della scelta), un vero e proprio *infinito attuale*, concetto adatto alla discriminazione tra insiemi più e meno numerosi, per quanto sempre di cardinalità infinita.
Sarà utile a questo punto descrivere (sinteticamente) il set di assiomi su cui si basa la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel, che è oggi considerata la teoria degli insiemi convenzionale e standard per tutti i problemi (fondazionali e non) che possono essere affrontati, nei diversi ambiti della matematica, nei termini dei concetti e del linguaggio della teoria degli insiemi.
L'assiomatizzazione di Zermelo-Fraenkel consiste nel porre i seguenti nove postulati alla base della teoria:

1. Assioma di estensionalità;
2. Assioma dell'insieme vuoto;
3. Assioma della coppia;
4. Assioma dell'insieme somma;
5. Assioma dell'infinito;
6. Assioma dell'insieme potenza;
7. Assioma di regolarità;
8. Assioma di separazione;
9. Assioma di rimpiazzamento.

A tali assiomi viene aggiunto, ai fini della dimostrazione di alcuni importanti teoremi matematici, il celebre *Assioma della scelta*.
Una proprietà, molto importante proprio in relazione alle argomentazioni che si svilupperanno nel seguito, per la dimostrazione della quale è necessario l'assioma della scelta, è la proprietà di ogni spazio vettoriale di ammettere (almeno) una *base* (per il concetto di *base* di uno spazio vettoriale si veda sotto, al par. *Gli spazi di Hilbert*).

3.2 Lo spazio di Minkowski.

Una delle applicazioni più interessanti e potenti della teoria degli insiemi (e in particolare degli spazi metrici) alla fisica consiste nell'utilizzo della *metrica pseudo-euclidea* per formalizzare in termini geometrici le leggi del moto in Relatività ristretta.

La definizione di tale metrica, di cui daremo più in là i dettagli tecnico-matematici, consente di rappresentare le trasformazioni relativisticamente corrette del sistema di riferimento (inerziale) in cui viene descritto il moto di un punto materiale (le cosiddette *trasformazioni di Lorentz*) come *rotazioni in uno spazio metrico quadridimensionale* (spazio delle posizioni e dei tempi che individuano gli eventi della realtà fisica fenomenica) dotato della suddetta metrica, detto *spazio di Minkowski*.

In altri termini, l'introduzione di questo particolare insieme (lo spazio di Minkowski), con le sue peculiari proprietà metriche, permette la *geometrizzazione* delle leggi della Meccanica, gettando un'ampia luce su implicazioni e caratteri specifici delle leggi relativistiche del moto che difficilmente potrebbero essere dedotti senza fare ricorso a tale *framework* matematico-geometrico.

Esempi particolarmente notevoli del grande potere descrittivo e cognitivo di tale procedura di geometrizzazione sono certamente la deduzione della forma relativisticamente corretta della legge che lega la forza all'accelerazione (il corrispondente nella meccanica einsteniana del 2° principio di Newton) e la dimostrazione della celebre legge di equivalenza della massa-energia $\boldsymbol{E = mc^2}$.

Il punto di partenza della deduzione del 2° principio generalizzato della dinamica è la considerazione che, per rotazioni nello spazio di Minkowski (ovvero per trasformazioni di Lorentz), i vettori tridimensionali ordinari che rappresentano $\boldsymbol{F}$ ed $\boldsymbol{a}$ (forza ed accelerazione) cambiano, in generale, in modo da non conservare la norma (la lunghezza del segmento orientato che fornisce la definizione elementare di vettore).

$\boldsymbol{F}$ ed $\boldsymbol{a}$, dunque, *non* sono vettori dello spazio di Minkowski, dal momento che, quando il sistema di riferimento utilizzato in un dato spazio (sulla base del quale vengono valutate le componenti dei vettori in tale spazio) viene ruotato, le componenti di un vettore dato cambiano sì, ma in modo da conservare la norma del vettore (in termini elementari, dal punto di vista del sistema di riferimento ruotato il segmento orientato che rappresenta il vettore si presenta spazialmente disposto in modo differente, ma la sua lunghezza resta identica).

Se si vuole arrivare ad una formulazione relativisticamente corretta del 2° principio, bisogna dunque trovare i *corrispondenti relativistici* della forza e dell'accelerazione, ovvero quei vettori dello spazio di Minkowski che, in qualche modo e *in un qualche senso*, descrivano quelle *stesse* grandezze fisiche che, nel limite classico, sono proprio ***F*** ed ***a***.

Evidentemente i vettori dello spazio di Minkowski dovranno essere vettori quadridimensionali (essendo quadridimensionale lo spazio di Minkowski) e li chiameremo pertanto *quadrivettori* (o anche *vettori d'universo*).

Le particolari leggi di trasformazione delle componenti dei quadrivettori per rotazioni del sistema di riferimento nello spazio di Minkowski (cioè, ripetiamo ancora una volta, per trasformazioni di Lorentz) le chiameremo leggi di *trasformazione covariante* dei quadrivettori.

Da quanto detto prima risulta dunque che le leggi di trasformazione covariante lasciano invariata la norma di un quadrivettore.

Messi a punto, per così dire, alcuni concetti e strumenti fondamentali per descrivere in modo corretto i caratteri geometrici dello spazio di Minkowski, possiamo affermare che, in Relatività ristretta, qualunque legge dinamica (compreso il 2° principio generalizzato) deve potersi esprimere in forma covariante quadridimensionale, cioè in una forma che contenga soltanto termini covarianti rispetto alle rotazioni nello spazio di Minkowski. Tale proprietà, ovviamente, discende dal fatto che in Relatività ristretta una legge dinamica (e, in verità, una legge fisica in generale) deve essere *invariante in forma* per trasformazioni di Lorentz, e, poiché nello spazio di Minkowski le trasformazioni di Lorentz si traducono nelle rotazioni del sistema di riferimento, l'invarianza in forma della legge corrisponde, da un punto di vista geometrico, alla covarianza dei suoi termini rispetto a tali rotazioni.

Tutto ciò risulterà intuitivamente evidente se si considera il caso delle leggi della meccanica newtoniana e si osserva che esse contengono soltanto vettori (in questo caso tridimensionali) covarianti rispetto a rotazioni del sistema di riferimento spaziale (qui lo spazio da considerare per formulare una legge fisica invariante in forma è l'ordinario spazio fisico tridimensionale).

Per rimanere proprio sull'esempio del 2° principio di Newton, è proprio tale proprietà di covarianza che garantisce il fatto di potere esprimere la relazione tra ***F*** ed ***a*** *sempre* mediante la *stessa* equazione (*invarianza in forma* della legge) *a prescindere dal sistema di riferimento* adottato per attribuire i rispettivi valori numerici alle singole componenti dei vettori in gioco nella legge (che sono appunto ***F*** ed ***a***).
Nel caso classico (la meccanica newtoniana, appunto) la proprietà di covarianza dei termini di una legge fisica che possa dirsi tale (cioè sia invariante in forma) risulta ovvia grazie al fatto che noi possiamo facilmente immaginare un vettore nello spazio fisico tridimensionale e comprendere che, ruotando il sistema di riferimento adottato per descrivere algebricamente i vettori in tale spazio, la norma del vettore (ovvero la lunghezza del segmento orientato che lo rappresenta) non può cambiare.
Quando passiamo al caso relativistico, lo spazio da considerare, come abbiamo visto, è lo spazio di Minkowski, che è uno spazio quadridimensionale. Ciò crea la difficoltà di immaginare i vettori e di convincersi euristicamente della loro proprietà di covarianza per trasformazioni del sistema di riferimento in uno spazio quadridimensionale. Le stesse trasformazioni considerate (che, in analogia con il caso tridimensionale, abbiamo chiamato rotazioni) non sono più visualizzabili, in effetti, come rotazioni nel senso dell'intuizione geometrica ordinaria, tant'è che vengono più comunemente denominate *trasformazioni ortogonali* (un tipo di trasformazioni più generali delle rotazioni nello spazio tridimensionale: in uno spazio ad n dimensioni una trasformazione ortogonale conserva la norma dei vettori di quello spazio; ne segue, tra l'altro, come caso particolare, che le trasformazioni ortogonali dello spazio tridimensionale sono le rotazioni in tale spazio).
Pertanto, in Relatività ristretta, per comprendere la proprietà di invarianza in forma (e dunque di covarianza dei suoi termini) di una legge fisica, dobbiamo fare ricorso all'apparato formale della geometria algebrica in 4 dimensioni, abbandonando l'intuizione geometrica ordinaria.
Il problema della generalizzazione relativistica del 2° principio di Newton si riduce dunque, alla luce delle considerazioni sin qui svolte, al problema di ottenere un quadrivettore ***F*** covariante ed un quadrivettore ***a*** anch'esso covariante che, nel limite classico, possano essere identificati con le ordinarie forza ed accelerazione newtoniane.

Un'ultima considerazione dobbiamo sviluppare sulla *massa* o *inerzia* del punto materiale considerato.
Tornando all'esempio della dinamica classica (o newtoniana), dobbiamo infatti aggiungere a quanto detto sopra che, perché la legge considerata (nel nostro caso il 2° principio di Newton) sia invariante in forma, oltre a dovere contenere vettori rigorosamente covarianti, deve contenere, quanto alle grandezze numeriche presenti nell'equazione che esprime la legge stessa, soltanto grandezze rigorosamente *scalari*, ovvero grandezze i cui valori (reali) non cambiano per rotazioni del sistema di riferimento nello spazio fisico.
E' chiaro che tale vincolo è necessario proprio per conservare la proprietà di covarianza dei vettori in gioco nella legge, poiché, se, a seguito di una rotazione del sistema di riferimento spaziale, la grandezza numerica presente nell'equazione (la massa m nel caso del 2° principio) variasse, il prodotto $m\boldsymbol{a}$ (dove $\boldsymbol{a}$ è un vettore covariante) non potrebbe trasformarsi in modo covariante, il che è assurdo, in quanto $m\boldsymbol{a}$ rappresenta la forza $\boldsymbol{F}$, che, come abbiamo detto, deve essere anch'essa un vettore covariante.
Nel caso di una legge relativisticamente corretta, evidentemente, le grandezze numeriche presenti devono essere sempre degli scalari, con l'avvertenza che qui scalare significa invariante rispetto a trasformazioni ortogonali del sistema di riferimento nello spazio di Minkowski.
Un tale scalare, in analogia ai vettori covarianti dello spazio di Minkowski (chiamati, abbiamo visto, vettori d'universo), è definito *scalare d'universo*.
Alla richiesta di avere, nel 2° principio generalizzato, soltanto vettori d'universo, va quindi aggiunto il vincolo che siano presenti soltanto grandezze numeriche che siano scalari d'universo.
Senza passare attraverso troppi dettagli tecnici, darò il risultato ottenuto riguardo al 2° principio generalizzato, risultato che è, va fortemente ribadito e sottolineato, la conseguenza teorica e matematica dell'applicazione di una ben precisa *strategia geometrica*, fondata sulla conoscenza e l'approfondimento algebrico delle *proprietà metriche e vettoriali* (dunque geometriche, nel senso generale e moderno del termine) dello spazio di Minkowski.
Per comprendere tale risultato, dobbiamo soltanto introdurre due grandezze, il tempo proprio τ e la quadrivelocità u_ν del punto materiale di cui si studia il moto.

Il tempo proprio è uno scalare d'universo, mentre la quadrivelocità è un vettore d'universo. Dunque entrambe le grandezze sono definite in modo adeguato per potere correttamente figurare in una formulazione covariante del 2° principio della dinamica.

Per *tempo proprio* si intende il tempo misurato nel sistema di riferimento *del* punto materiale (o *solidale con* il punto materiale).

Per *quadrivelocità* intendiamo un quadrivettore le cui prime tre componenti sono legate alle componenti dell'ordinaria velocità $\boldsymbol{v}$ del punto materiale dalle relazioni:

$$u_i = \gamma v_i$$

mentre la quarta componente è data da:

$$u_4 = ic\gamma$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto, i è l'unità immaginaria e il valore di γ è determinato dalle seguenti relazioni:

$$\gamma^2(1 - \beta^2) = 1 \qquad \text{e} \qquad \beta = v/c$$

con v norma del vettore velocità $\boldsymbol{v}$.

Possiamo adesso dare l'espressione matematica della riformulazione relativistica del 2° principio di Newton:

$$K_\nu = m\, du_\nu /d\tau$$

Come si vede, a secondo membro figura il prodotto della massa per la derivata rispetto al tempo proprio della quadrivelocità (si noti che tale derivata è una forma generalizzata dell'accelerazione classica, che è la derivata rispetto al tempo della velocità). Il secondo membro è dunque una forma relativisticamente riveduta del prodotto $m\boldsymbol{a}$ che costituisce il secondo membro del 2° principio della dinamica classica.

A primo membro dobbiamo quindi avere una qualche forma generalizzata della forza classica.

In effetti K_ν rappresenta proprio tale forza generalizzata e viene chiamata *forza di Minkowski*.

Si noti come tale riformulazione del 2° principio di Newton costituisca a tutti gli effetti una legge fisica invariante in forma proprio nell'ambito della Relatività ristretta, grazie alla sua natura covariante per trasformazioni ortogonali dello spazio di Minkowski.

Tale natura covariante risulta molto facilmente dal fatto che m e τ sono scalari d'universo ed u_ν è un vettore d'universo, per cui l'espressione $m\ du_\nu/d\tau$ (il secondo membro del 2° principio generalizzato) è un vettore d'universo. Da ciò segue, tra l'altro, che la forza di Minkowski (il primo membro) è necessariamente un vettore d'universo.

L'utilizzo di un insieme dotato di una ben precisa struttura geometrica (lo spazio di Minkowski) per arrivare alla riformulazione relativistica dell'importantissimo 2° principio della dinamica non può che condurre, a parere di chi scrive, alla conclusione di un'assoluta indispensabilità di tale ente matematico (lo spazio quadridimensionale con metrica pseudo-euclidea che abbiamo battezzato spazio di Minkowski) per la formulazione delle leggi della dinamica in Relatività ristretta.

Tutta la metodologia seguita *è imperniata*, come ho cercato di eplicitare e mettere in chiara evidenza sia per ciò che riguarda i concetti fondamentali che in riferimento agli elementi base di carattere tecnico, *sulle proprietà geometriche dello spazio di Minkowski*.

E ciò, si badi bene, non per dedurre in modo più facile e veloce (come vorrebbe l'interpretazione nominalista) conseguenze ed implicazioni di vario genere da principi già noti, ma per formulare e stabilire in modo coerente con gli assiomi fondamentali della Relatività i principi stessi della teoria in esame (ovvero della dinamica relativistica del punto materiale).

Vediamo adesso come, sempre facendo affidamento sulla conoscenza di proprietà geometriche (nella fattispecie vettoriali) dello stesso spazio di Minkowski, è possibile arrivare al fondamentale principio di equivalenza massa-energia, in altri termini alla celebre equazione di Einstein $\boldsymbol{E = mc^2}$.

Si è mostrato come la legge che generalizza il 2° principio di Newton, $K_\nu = m\, du_\nu /d\tau$, è formulabile grazie al fatto che u_ν è un vettore d'universo ed m e τ sono degli scalari d'universo.

Dunque, proprio come si fa in meccanica classica, dal prodotto mu_ν possiamo ottenere una *quantità di moto generalizzata* che sarà certamente un vettore d'universo (nel caso classico la quantità di moto $p = mv$ è un vettore dello spazio fisico tridimensionale).

Definiamo pertanto *quadrivettore energia-impulso* p_ν tale quantità di moto generalizzata stabilendo la seguente uguaglianza:

$$p_\nu = mu_\nu$$

Mentre le prime tre componenti di p_ν sono i corrispondenti relativistici delle componenti della quantità di moto classica p, è particolarmente interessante analizzare il significato della quarta componente di p_ν (p_4).

Essa, ricordando l'espressione di u_4, risulta data da:

$$p_4 = \iota\, mc\gamma$$

Questa equazione è molto significativa se si mette in relazione la quantità $\iota\, mc\gamma$ con l'importante grandezza dinamica *energia cinetica*.

E' noto che in meccanica classica l'energia cinetica K è definita utilizzando il concetto di lavoro L della forza F agente sul punto materiale, stabilendo che il lavoro di F su di uno spostamento s del punto materiale in oggetto è dato da:

$$L = Fs$$

e che la variazione ΔK dell'energia cinetica (variazione prodotta dall'applicazione di F nell'intervallo di tempo durante il quale si realizza lo spostamento s) è uguale proprio al lavoro L:

$L = \Delta K$

Utilizzando tale definizione dell'energia cinetica K, attraverso alcuni passaggi matematici, si arriva alla ben nota espressione di K

$K = \frac{1}{2} m v^2$

La stessa procedura dà luogo, in Relatività ristretta, alla seguente espressione per l'*energia cinetica relativistica* T:

$T = mc^2\gamma$

A questo punto un semplice passaggio algebrico ci consente di mettere in relazione p_4 e T:

$p_4 = iT/c$

Pertanto la quarta componente del quadrivettore energia-impulso è essenzialmente (a meno della costante moltiplicativa i/c) l'energia cinetica relativistica T.
E' importante comprendere che ciò istituisce un particolare legame logico tra quantità di moto ed energia cinetica relativistiche, legame che mancava in dinamica classica.
Si ricorderà, infatti, che, dal punto di vista classico, si può avere conservazione della quantità di moto (tale legge di invarianza è una conseguenza, senza alcuna eccezione, del 3° principio di Newton, il *principio di azione e reazione*) senza che si abbia necessariamente conservazione dell'energia cinetica.
Tale eventualità non è in alcun modo consentita in meccanica relativistica, proprio a causa del fatto che quantità di moto ed energia cinetica relativistiche danno rispettivamente le prime tre e la quarta componente del quadrivettore energia-impulso.
Consideriamo, infatti, *per assurdo*, il caso di non conservazione dell'energia cinetica in meccanica relativistica.
Effettuiamo una trasformazione del sistema di riferimento (trasformazione di Lorentz).

Il quadrivettore energia-impulso p_ν si trasforma in modo covariante coerentemente con il cambiamento del sistema di riferimento.

Ciò significa che le prime tre componenti di p_ν nel nuovo sistema potranno essere espresse in termini di tutte e quattro le componenti nel vecchio sistema.

Ricordando però il significato delle componenti di p_ν, ciò è assurdo.

Infatti, poiché le prime tre componenti corrispondono alla quantità di moto, mentre la quarta all'energia cinetica, si ha il risultato che la quantità di moto nel nuovo sistema può essere espressa in termini della quantità di moto e dell'energia cinetica nel vecchio sistema.

Da ciò segue che, se facciamo l'ipotesi che (nel vecchio sistema) la quantità di moto si conservi mentre l'energia cinetica vari (in un dato processo fisico, ad esempio un urto), la quantità di moto nel nuovo sistema necessariamente dovrà variare, il che, come abbiamo detto, è assurdo (la quantità di moto si conserva *sempre*).

Dunque, in meccanica relativistica, l'energia cinetica $T = mc^2\gamma$ si conserva *sempre*, al pari della quantità di moto.

La conseguenza di questa proprietà di invarianza è molto importante.

Consideriamo infatti una espansione al primo ordine (in β^2) di T :

$$T = mc^2(1 + \beta^2/2) = mc^2 + ½\, m\, v^2$$

Se β^2 è molto minore di 1, tale espansione è una buona approssimazione della realtà.

Essa, in definitiva, rappresenta T come somma di due termini, l'energia cinetica classica $½\, m\, v^2$ ed un nuovo termine, la quantità mc^2.

Il termine classico $½\, m\, v^2$ sappiamo bene che, in determinati processi fisici (urti anelastici, fissione nucleare, etc.), varia.

Questo fatto, incontrovertibilmente osservato e (nei casi in cui è applicabile il formalismo della meccanica classica) anche dimostrato teoricamente, implica allora necessariamente che, allo stesso tempo, vari il termine *nuovo* della meccanica relativistica mc^2 (altrimenti non si conserverebbe T).

Ma il termine mc^2 non dipende dalla velocità, ma soltanto dalla massa classica, o *massa a riposo*, m del punto materiale.

L'unica possibilità che rimane è dunque ammettere che la massa a riposo *m* possa variare nel processo fisico considerato.

La massa a riposo può dunque essere convertita in qualcos'altro.

Se ad essa, secondo la formula sopra riportata per *T*, corrisponde un'energia, detta *energia a riposo*, mc^2, in un processo fisico che, ad esempio, fa diminuire la massa a riposo del sistema (come la fissione nucleare) dovremo avere la produzione di una qualche forma di energia equivalente (nel senso che la quantità di energia prodotta dovrà essere mc^2).

Riprendendo l'esempio della fissione, poniamo di un nucleo di uranio (il caso della cosiddetta bomba atomica o di una centrale nucleare), si avrà che la massa a riposo totale di tutte le particelle prodotte nella disintegrazione del nucleo considerato sarà minore della massa a riposo del nucleo prima della fissione.

Parte della massa a riposo del nucleo di uranio è stata convertita in qualche forma di energia.

Tale energia (prima immagazzinata nel nucleo stesso sotto forma di energia a riposo) *appare* in effetti nell'istante successivo alla fissione come radiazione elettromagnetica (come fotoni, se si preferisce) prodotta nella fissione stessa (si noti che i fotoni hanno massa a riposo nulla, dunque la parte dell'originaria massa a riposo del nucleo di uranio convertita in radiazione è stata proprio *trasformata* in una *diversa* forma di energia).

E' questa la celebre legge di equivalenza della massa-energia, che stabilisce appunto che tutta o in parte la massa a riposo *m* di un sistema fisico può essere convertita nell'equivalente energia *E* (la quale può manifestarsi sotto diverse forme) il cui valore è funzione di *m* secondo l'equazione:

$$\boldsymbol{E = mc^2}$$

Vale forse la pena sottolineare ancora e commentare il ruolo essenziale giocato, nel derivare tale legge, dalle proprietà geometriche descritte dall'algebra lineare dei quadrivettori nello spazio di Minkowski.

Se si ricomprende in un unico sguardo globale la dimostrazione sopra delineata, si vede subito che l'elemento portante dell'argomentazione sta nella *possibilità* di legare le componenti della quantità di moto nel nuovo sistema di riferimento a *tutte* le componenti del quadrivettore energia-impulso (dunque sia alla quantità di moto che all'energia) nel vecchio sistema.

A cosa è dovuta, *concettualmente* parlando, tale *possibilità*?

Evidentemente al fatto che quantità di moto ed energia *non sono più*, in meccanica relativistica, un vettore tridimensionale ed uno scalare (relativi allo spazio fisico ordinario) del tutto *indipendenti* l'uno dall'altro.

Quantità di moto ed energia rappresentano adesso parti differenti di un unico quadrivettore dello spazio di Minkowski, ed abbiamo visto che l'algebra dei quadrivettori costituisce un insieme di proprietà geometriche molto forti imperniate, a livello fondamentale, sulla covarianza dei quadrivettori stessi per trasformazioni ortogonali dello spazio di appartenenza (lo spazio di Minkowski, appunto).

In altri termini, riunire quantità di moto ed energia in un'unica quadrupla di numeri (complessi, in quanto $p_4 = iT/c$) non è semplicemente una comodità notazionale a cui non corrisponde niente di sostanzialmente nuovo dal punto di vista matematico e del contenuto fisico della teoria, bensì costituisce il modo di esprimere importanti ed *inedite proprietà geometriche*, cui corrisponde il fondamentale fatto fisico dell'interdipendenza spaziotemporale che è carattere peculiare e di notevoli conseguenze teoriche ed osservazionali della Relatività ristretta.

Dal momento, infatti, che una n-upla di numeri non rappresenta di per sé un vettore di uno spazio n-dimensionale, se le sue componenti non si trasformano in un ben preciso modo (quello covariante) quando si effettua una trasformazione ortogonale del sistema di riferimento, definire il *quadrivettore* energia-impulso, e non semplicemente la quadrupla *(p, T)*, naturalmente dopo avere dimostrato il carattere covariante della quadrupla stessa, significa affermare tutto un insieme di proprietà geometriche dell'*ente matematico* definito (le proprietà, appunto, di un *vettore* di uno spazio quadridimensionale) che hanno importanti e peculiari *conseguenze fisiche*.

Nel caso che stiamo qui illustrando ed approfondendo le proprietà matematico-geometriche che giocano un ruolo essenziale sono proprio le corrette priopriettà di trasformazione covariante delle singole componenti di un quadrivettore dello spazio di Minkowski.

Da tali proprietà dell'*ente matematico* quadrivettore (nella fattispecie il quadrivettore energia-impulso) **viene dedotta la fondamentale *conseguenza fisica* dell'equivalenza della massa-energia**, ovvero la celebre equazione di Einstein $E = mc^2$.
Come nel caso della generalizzazione relativistica del 2° principio di Newton, non si vede come la *profonda* dipendenza della legge fisica ottenuta dalle proprietà di ben precisi enti matematici possa essere, per così dire, *scavalcata* da una qualche procedura nominalistica che abbia analoghe potenzialità teorico-descrittive e cognitive.

3.3 Gli spazi di Hilbert.

Si è già accennato al fatto che in meccanica quantistica lo spazio degli stati di un sistema fisico è uno spazio di Hilbert, ovvero uno spazio vettoriale dotato di un prodotto interno (o scalare) che induce una norma, e quindi una distanza, tale che lo spazio metrico che ne risulta sia *completo* (nel senso topologico, ovviamente).
La struttura di spazio vettoriale, innanzitutto, è, per il formalismo quantomeccanico, un elemento assolutamente indispensabile.
Essenzialmente, il motivo per cui uno stato di un sistema quantistico va rappresentato come vettore di un opportuno spazio lineare, che, utilizzando lo stesso gergo usato dai fisici quantistici, è lo *spazio di Hilbert del sistema*, risiede nella possibilità, per un qualunque elemento di un tale spazio, di essere rappresentato come *combinazione lineare* di un set di vettori dello spazio medesimo detto *base* dello spazio vettoriale.
Vediamo più in dettaglio in cosa consiste questa importante proprietà e qual è il suo legame logico con alcuni aspetti fondamentali del contenuto fisico della teoria quantistica.
Consideriamo il caso di un sistema che sia in grado di esibire due possibili stati di *spin*, diciamo (rispetto ad un asse orientato lungo il quale eseguiamo la misura dello stesso spin) *spin up* e *spin down* (stato con spin rivolto verso l'alto e stato con spin rivolto verso il basso).
In generale, quando misuriamo lo spin (così come quando misuriamo una qualsiasi grandezza fisica), non abbiamo una probabilità del 100% di ottenere uno dei due stati (e una

probabilità nulla di ottenere l'altro stato), ma una distribuzione di probabilità, entrambe diverse da zero, di ottenere i due diversi stati.
Tale situazione, in meccanica quantistica, *deve* necessariamente essere descritta in termini di una combinazione lineare dei due vettori di stato fondamentali (spin up e spin down).
Per combinazione lineare intendiamo la somma dei prodotti dei due vettori per due coefficienti scalari (i quali sono legati alle rispettive probabilità di ottenere i due stati).
In generale, dunque, lo stato $\boldsymbol{s}$ del sistema *prima della misura* dello spin sarà dato dalla seguente espressione in termini degli stati $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{d}$ (*spin up* e *spin down*):

$$\boldsymbol{s} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{d}$$

dove a e b sono appunto i coefficienti scalari (in generale due numeri complessi) di cui si è detto sopra.
Questo tipo di formulazione è *sostanzialmente* diversa da quella utilizzata nella meccanica statistica classica per descrivere una *miscela statistica* di due stati classici (lo stesso, ovviamente, vale per più di due stati).
L'espressione sopra riportata, infatti, proprio grazie all'utilizzo della combinazione lineare di due vettori di stato, è in grado di implicare tutti gli *effetti di interferenza* tra i due stati $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{d}$ che sono caratteristici della meccanica quantistica (e che non si presentano in fisica classica, anche statistica).
Da ciò risulta evidente che la decomponibilità di un elemento in termini di un set (base) di altri elementi dello spazio (mediante una combinazione lineare di tali elementi), che è una caratteristica fondamentale e peculiare proprio degli spazi vettoriali, è essenziale per descrivere effetti quantistici di grandissima rilevanza, quali gli effetti di interferenza, che sono alla base della fenomenologia della fisica quantistica.
In altri termini, senza l'utilizzo dell'algebra lineare dei vettori di stato, le leggi fondamentali della meccanica quantistica non sarebbero formulabili.
Fin qui si è mostrato come la teoria degli spazi vettoriali sia indispensabile per la fisica quantistica, ma non si è ancora evidenziata la necessità di formulare alcuna ipotesi sulla dimensione degli spazi utilizzati per rappresentare gli stati dei sistemi quantistici (si ricordi che uno spazio di Hilbert può avere *dimensione infinita*).

In verità si è già accennato al fatto che l'insieme degli autostati dell'energia di un sistema quantistico (si pensi, ad esempio, al caso dell'oscillatore armonico) è un insieme infinito.
E' possibile dimostrare, inoltre, che tali autostati dell'operatore hamiltoniano (l'operatore che, in meccanica quantistica, corrisponde appunto all'energia totale del sistema) costituiscono una base dello spazio di Hilbert del sistema.
Da ciò risulta pertanto che, essendo una base dello spazio di Hilbert considerato costituita da un numero infinito di vettori di stato, lo stesso spazio di Hilbert ha dimensione infinita.
Tale caratteristica della gran parte degli spazi di Hilbert utilizzati in meccanica quantistica è dunque necessaria per descrivere sistemi quantistici in cui lo spettro delle energie possibili del sistema (gli autovalori dell'operatore hamiltoniano) non ha un limite superiore. E' questo appunto il caso, discusso sopra proprio a titolo di esempio, dell'oscillatore armonico, il cui generico autovalore dell'energia è proporzionale (come si è visto nel capitolo precedente a proposito della descrizione quantistica del campo elettromagnetico, la QED) ad un numero quantico n (in QED il numero di fotoni di un dato modo stazionario di oscillazione del campo) che può essere arbitrariamente grande.
E' ovvio, infatti, che, se lo spettro delle energie possibili di un sistema quantistico non ha un limite superiore, gli autostati corrispondenti, *linearmente indipendenti* (nel senso dell'algebra lineare), saranno in numero infinito e dunque lo spazio di Hilbert di cui il loro insieme costituisce una base avrà, come si era già anticipato, una dimensione infinita.
E' molto importante comprendere che la proprietà di completezza topologica degli spazi di Hilbert è indispensabile per trattare in modo coerente ed organico proprio quei problemi fisici (della meccanica quantistica), quali la dinamica dell'oscillatore armonico e molti altri (anch'essi di grande importanza ed essenzialità nella descrizione dei fenomeni quantistici), che richiedono, per la loro rappresentazione in termini del formalismo quantistico standard, spazi vettoriali di dimensione infinita, ovvero set infiniti di autostati dell'operatore hamiltoniano (cioè dell'energia).
La completezza topologica di uno spazio metrico (quale è, come si è detto sopra, uno spazio di Hilbert), infatti, consiste, secondo uno dei due modi fondamentali di definirla, nel fatto che qualunque successione di Cauchy di elementi dello spazio in oggetto *converge ad un (ben determinato) elemento* dello spazio stesso (la *determinazione univoca* dell'elemento a cui la successione converge è una conseguenza del *Teorema di unicità del limite*).

La proprietà di completezza, dunque, garantisce che, quando si utilizzano decomposizioni di un vettore di stato in termini di infiniti vettori dello stesso spazio di Hilbert (come avviene quando tali vettori sono i vettori di una base dello spazio di Hilbert considerato, posto naturalmente che tale spazio sia di dimensione infinita), le decomposizioni impiegate abbiano effettivamente *senso fisico*, ovvero *individuino univocamente* il vettore di stato che si vuole rappresentare tramite la decomposizione stessa.

La possibilità di impiegare sensatamente le decomposizioni in termini di basi costituite da un numero infinito di vettori è, come abbiamo osservato all'inizio in riferimento all'indispensabilità della struttura vettoriale dello spazio degli stati di un sistema quantistico, una proprietà *cruciale* che *deve* necessariamente essere presente in uno spazio che possa risultare adatto alla modellizzazione dell'insieme degli stati di un sistema in meccanica quantistica, sempre ovviamente che la fisica del sistema studiato implichi la dimensione infinita dello spazio degli stati in questione (cosa che, come si è detto sopra, è vera per un gran numero di sistemi quantistici).

3.4 Lo spaziotempo generalrelativistico.

Un altro caso estremamente importante di insieme indispensabile, nella conoscenza scientifica attuale (e in generale del Novecento), per la formulazione delle leggi fisiche, e in particolare meccaniche, è quello dello spaziotempo definito e descritto nella Teoria della Relatività Generale di Albert Einstein.

Per comprendere adeguatamente il ruolo fondamentale di tale struttura topologica ed algebrica nell'ambito della suddetta teoria, dobbiamo previamente ricostruire le finalità di base di tale teoria e il metodo, le idee principali e la struttura concettuale di fondo che essa usa per conseguire i propri obiettivi conoscitivi.

Due sono le esigenze di base che muovono il lavoro scientifico-speculativo di Einstein nella formulazione dei principi e delle equazioni fondamentali della Relatività Generale.

La prima è quella di *relativizzare* la gravità.

Con tale espressione si intende il programma di riduzione degli effetti gravitazionali (in altri termini la vecchia forza di gravità di newtoniana memoria) alle conseguenze di un

cambiamento di sistema di riferimento, un po' come le cosiddette forze inerziali (ad esempio la forza avvertita da un passeggero di un autobus in accelerazione) possono essere spiegate in meccanica classica come conseguenza dell'assunzione di un sistema di riferimento non inerziale (nell'esempio citato il sistema di riferimento accelerato dell'autobus).
Il Principio di Relatività Galileiana sarà, in quest'ottica, generalizzato a *tutti* i sistemi di riferimento, inerziali e non, dando luogo al cosiddetto Principio di Equivalenza, secondo il quale gli effetti di un campo gravitazionale sono *localmente equivalenti* alle conseguenze dell'assunzione di un sistema di riferimento non inerziale (ovvero accelerato in opportuni direzione e verso e con un opportuno valore dell'accelerazione).
La seconda esigenza è quella di connettere il meccanismo di generazione della gravità alla distribuzione della massa nello spazio.
Tale connessione sarà articolata da Einstein nei termini del ruolo intermediatore della *geometria dello spaziotempo*, nel senso che le equazioni della Relatività Generale stabiliscono, da un lato, la dipendenza della geometria dello spaziotempo dalla distribuzione spaziale della massa ad un dato istante, e, dall'altro, la dipendenza dei caratteri del moto di un punto materiale (o di un fotone), e quindi (nel linguaggio della fisica classica) delle forze (compresa quella di gravità), da tale geometria spaziotemporale.
L'importanza, in relazione alla questione dell'esistenza degli insiemi, di tale connessione, *via* la *geometrizzazione* (nel senso spiegato) della forza di gravità, consiste proprio nel fatto che la Relatività Generale necessita di una struttura topologica dotata di una *metrica* ben precisa (e con una ben precisa dipendenza dalla distribuzione della massa) per potere descrivere i moti delle particelle (sia materiali che non), e ovviamente tale struttura topologico-metrica (nonché algebrica, come nel caso dello spazio di Minkowski in Relatività ristretta) può essere *pensata* (e, per conseguenza, *definita* in modo preciso e rigoroso) soltanto nell'ambito della teoria matematica degli insiemi.
In un certo senso, il ruolo dato dalla Relatività Generale alla geometria (non più soltanto dello spazio in sé stesso, ma dello spaziotempo nel suo insieme) dà una risposta al vecchio problema della natura degli assiomi della geometria.
Si ricorderà, in proposito, l'antico dibattito tra empirismo e criticismo kantiano, in cui si inseriranno successivamente Bertrand Russell e, con la sua posizione convenzionalista,

Henri Poincaré, fin proprio a ridosso degli anni in cui verrà proposta la Teoria della Relatività Generale.

Per gli empiristi, la geometria era il risultato dell'osservazione, appunto, *empirica* delle proprietà dello spazio fisico reale.

A questa visione, che può non apparire soddisfacente (dal momento che la geometria, come tutte le altre teorie matematiche, viene sviluppata per via puramente teorica, senza fare appello ad alcuna conferma sperimentale ed empirica), Immanuel Kant aveva opposto la sua interpretazione delle proposizioni della geometria come giudizi *sintetici a priori*.

Secondo tale interpretazione, la geometria è sì capace di raggiungere, attraverso il suo argomentare dimostrativo (i suoi teoremi), *nuove* conoscenze sulle proprietà dello spazio fisico concreto (è dunque *sintetica*), ma le strutture fondamentali che essa utilizza per produrre tali conoscenze sono forme *a priori* del soggetto conoscente e non vengono in alcun modo ricavate dall'esperienza sensibile.

La successiva formulazione, da parte (*in primis*) di Riemann e Lobacevskij, delle cosiddette geometrie non-euclidee aveva poi *scompaginato le carte* di tale annosa partita intellettuale.

Se, infatti, è possibile per la mente umana concepire, ed anche formalizzare in modo matematicamente del tutto rigoroso, geometrie basate su assiomi diversi da quelli che fondano la geometria euclidea (e che dunque descrivono spazi dotati di proprietà differenti), a quale intuizione *a priori* dello spazio si può fare appello, visto che essa (se esiste) sembra non essere univoca, consentendo descrizioni tra di loro incompatibili dello spazio stesso?

B. Russell aveva tentato di risolvere la questione proponendo una sorta di sintesi delle due posizioni empirista e criticista, affermando che l'impalcatura globale dell'edificio della geometria euclidea (quella che Kant voleva basata su di un'intuizione del tutto *a priori* delle proprietà dello spazio) era in realtà costituita da due teorie diverse: la *geometria proiettiva*, che si occupa esclusivamente delle relazioni tra punti, rette e piani (senza utilizzare i concetti di distanza e di ampiezza di un angolo), e il *corpus* degli *assiomi metrici*, ovvero di quei postulati che introducono proprio i concetti di distanza e di ampiezza di un angolo e li utilizzano per fondare la descrizione dell'ordinario spazio euclideo.

Russell vedeva nella geometria proiettiva una teoria completamente *a priori* (così come era totalmente *a priori*, per Kant, la geometria euclidea nel suo complesso), mentre attribuiva un *carattere empirico* agli assiomi che portano a definire la metrica e, con essa, tutto l'insieme delle proprietà dello spazio euclideo.

Tale carattere empirico era giustificato, secondo Russell, proprio dal fatto che si erano dimostrati possibili (da Riemann e Lobacevskij in poi) anche altri assiomi, capaci di fondare geometrie, da un lato, perfettamente autoconsistenti e, dall'altro, molto differenti da quella euclidea.

La scelta degli assiomi (quelli che abbiamo chiamato metrici e non quelli della geometria proiettiva) da porre alla base dell'edificio teorico di una geometria in grado di descrivere lo spazio fisico reale poteva dunque essere determinata soltanto dall'osservazione empirica delle proprietà di tale spazio e non poteva avere alcun carattere *a priori*.

Con l'avvento della Relatività Generale le cose cambieranno ancora.

La visione russelliana verrà, di fatto, confutata sul campo. La geometria proiettiva, infatti, può contribuire alla fondazione di una geometria riemanniana a curvatura costante, laddove la teoria di Einstein richiede invece l'utilizzo di una geometria riemanniana a curvatura variabile (abbiamo visto precedentemente, infatti, che la geometria dello spaziotempo dipende, in Relatività Generale, dalla distribuzione della massa, e tale distribuzione, in generale, varia sia nello spazio che nel tempo).

Nell'importante dibattito si è però nel frattempo inserito il grande matematico e fisico francese Henri Poincaré, la cui idea sulla natura degli asserti geometrici è alquanto diversa da quella di Russell.

Per Poincaré gli assiomi della geometria euclidea non sono altro che *definizioni camuffate*, ovvero *convenzioni*.

Se, infatti, fossero verità empiriche, dovremmo concludere che i matematici hanno *sperimentato*, e *sperimentano*, su punti, linee, segmenti, etc., il che è evidentemente assurdo.

Ma nemmeno possiamo affermare che gli assiomi della geometria euclidea siano intuizioni *a priori* delle proprietà dello spazio, dal momento che, come già si è osservato, in tal caso non potremmo nemmeno *concepire* geometrie non-euclidee.

Poincaré ritiene quindi che gli assiomi in questione siano proposizioni che, *convenzionalmente*, stabiliscono un *certo modo di descrivere lo spazio*, modo che viene scelto tra i diversi possibili per i suoi caratteri di *semplicità* e *comodità*.

Lo scienziato francese rigetta dunque sia l'empirismo (gli assiomi della geometria euclidea non sono verità empiriche) che il criticismo kantiano (gli assiomi della geometria euclidea non sono intuizioni *a priori*), e li rigetta *in toto*, senza *salvare*, come fa Russell, qualcosa dell'uno e qualcosa dell'altro.
Tale critica radicale lo porta ad una posizione, come abbiamo visto, strettamente convenzionalista, che lo scrivente non condivide, come verrà illustrato più in là in questo stesso paragrafo, sia sul piano di un'analisi attenta della storia della scienza, sia sul piano prettamente filosofico.
La visione di Poincaré sulla geometria ha tuttavia il merito, sempre a parere di chi scrive, di avere messo in luce la **profonda connessione *di principio* tra geometria e fisica**.
Vediamo in che modo la riflessione del matematico francese è legata a tale importante aspetto del rapporto tra matematica e scienze della natura, rapporto che in questo lavoro è considerato essenziale ai fini della corroborazione, *via* l'Argomento di Indispensabilità, del realismo filosofico relativo agli enti matematici.
Poincaré discute la possibilità di discriminare, sperimentalmente, tra geometria euclidea e geometrie non-euclidee attraverso la misura della *parallasse* di una stella lontana.
In *La science et l'hypothèse* (1902) lo scienziato francese scrive:

Questi sono dei risultati [i risultati delle misure di parallasse] che sembrano accessibili all'esperienza e si è sperato che le osservazioni astronomiche potessero permettere di decidere tra le geometrie. Ma quello che in astronomia si chiama linea retta è semplicemente la traiettoria del raggio luminoso. Se, dunque, per assurdo si venissero a scoprire delle parallassi negative [...] si avrebbe la scelta fra due conclusioni: potremmo rinunciare alla geometria euclidea oppure modificare le leggi dell'ottica e ammettere che la luce non si propaga rigorosamente in linea retta. E' inutile aggiungere che tutto il mondo considererebbe questa soluzione come la più vantaggiosa. Dunque la geometria euclidea non ha nulla da temere da nuove esperienze.

Dunque per Poincaré la decisione sulla *vera* geometria dello spazio fisico non è soltanto un problema di *misure geometriche* in sé stesse, ma è strettamente connessa alle *leggi fisiche* che abbiamo scelto di assumere per interpretare i fenomeni e, contestualmente, le stesse misure geometriche da cui ci aspettiamo una risposta sulla questione “metrica euclidea - metrica non euclidea”.

La geometria non è soltanto ... una questione geometrica! Al contrario, essa *fa parte*, in un certo senso, *della fisica* e dei suoi assunti fondamentali.

Per Poincaré, nella fattispecie del problema fisico considerato (il problema delle misure di parallasse delle stelle molto lontane dalla Terra), cambiare i nostri assunti sulla geometria dello spazio o cambiare le leggi dell'ottica sono due procedimenti, *logicamente* ed *epistemologicamente*, equivalenti, al punto che, per il Nostro, delle misure che in prima battuta sembrano falsificare la geometria euclidea possono invece essere *viste* come delle misure che falsificano alcune delle leggi della fisica (le leggi dell'ottica geometrica) fin lì considerate valide.

L'intuizione del matematico francese sul profondo legame tra geometria e fisica resta, a parere di chi scrive, di grande valore epistemologico anche se le cose, nella storia della scienza del Novecento, andarono in modo diametralmente opposto a ciò che Poincaré stesso aveva previsto.

Con l'avvento della Relatività Generale, infatti, la comunità scientifica decise non di abbandonare le leggi dell'ottica fin lì sviluppate, ma ... di abbandonare proprio la geometria euclidea!

In altri termini, mentre Poincaré risolveva l'eventuale *conflitto* tra geometria euclidea e leggi dell'ottica a favore della geometria euclidea, i fisici, dal 1915 (l'anno della pubblicazione dell'articolo di Einstein sulla Relatività Generale) in poi, risolsero lo stesso conflitto a favore delle leggi dell'ottica, scegliendo di modificare gli assiomi della geometria: se esistono misure, come quelle di parallasse in astronomia, che indicano che i raggi luminosi non si propagano in linea retta (nel senso euclideo di retta, ovviamente), il problema non riguarda la natura fisica della luce in sé stessa, e dunque le leggi *fisiche* dell'ottica, ma investe, invece, la questione della geometria dello spazio, portando a concludere che lo spazio è *curvo* e pertanto, pur continuando i raggi luminosi a percorrere il cammino più breve tra due punti A e B, tale cammino, a causa della curvatura dello spazio (per essere più precisi, dello spaziotempo), non è più un segmento di retta euclidea, ma segue una *geodetica* dello spaziotempo einsteiniano (uno spazio quadridimensionale riemanniano a curvatura variabile).

Se, dunque, è corretta l'idea di Poincaré del profondo legame geometria-fisica, l'incapacità dello scienziato francese di prevedere l'esito di una controversia come quella descritta è dovuta alla lettura convenzionalista che Poincaré stesso diede di tale profonda relazione logica tra concetti geometrici e leggi fisiche: la scienza segue, nella risoluzione di controversie come quella cui si è accennato, l'approccio della *massima comodità*, essendo di fatto *libera* di assumere, *convenzionalmente* appunto, i principi che meglio crede per interpretare i risultati delle misure sperimentali.

In un'ottica realista, al contrario, la possibilità dell'*arbitrio convenzionalista* viene a *cadere* e la decisione sul fatto se vadano cambiate le leggi fisiche o gli assiomi della geometria non è più una decisione *libera*, ma deve tenere conto del *vincolo forte* che la richiesta di un ampio ed organico *potere esplicativo* (richiesta a cui, da un punto di vista realista, la scienza deve ottemperare) impone ad ogni teoria scientifica.

Nel quadro di tale argomentazione, va inoltre considerato il fatto che il realismo sostenuto nel presente lavoro è fondato sull'idea dell'*indispensabilità*, radicata a sua volta nella *visione olistica*, secondo la quale l'insieme di concetti e principi conoscitivi sottoposto a conferma sperimentale è l'insieme globale ed organico di scienze della natura, matematica ed assunti metafisici.

La matematica (e con essa la geometria) è dunque sottoposta, assieme alle scienze fisiche, al criterio della corroborazione osservativa e i suoi principi possono, e talvolta *devono* in modo *necessario* e *inevitabile*, essere modificati, nel contesto di un indispensabile aggiustamento dell'intero *corpus* di idee scientifico-matematiche, per meglio spiegare ed interpretare nuovi e sorprendenti risultati sperimentali.

Ovviamente, nel caso specifico della necessità (generata dalle misure di parallasse negativa) di scegliere tra geometria euclidea e leggi dell'ottica geometrica, il *vincolo* di carattere *esplicativo* (nei confronti dei fenomeni naturali) che ci impone di modificare gli assiomi della geometria, senza elaborare nuove leggi della propagazione della luce, è dato dal fatto che l'adozione di una nuova geometria (quella riemanniana a curvatura variabile) per lo spaziotempo è in grado di *spiegare* tutto uno spettro di fenomeni (*oltre* alle misure di parallasse negativa), attinenti ad *ambiti diversi*, che non sono prevedibili sulla base delle leggi della Relatività ristretta.

In altri termini, se non vogliamo ricorrere, per *ognuno* di tali fenomeni, ad una spiegazione *ad hoc* (dal momento che, come si è detto sopra, si tratta di fenomeni che attengono ad ambiti diversi), dobbiamo necessariamente ipotizzare una diversa geometria dello spaziotempo.
La *libertà* di spiegare un dato fenomeno osservato (le parallassi negative, nel nostro caso) mediante la geometria di Riemann oppure mediante diverse leggi fisiche (relative alla luce) può ragionevolmente sussistere *solo* fino a quando consideriamo *un unico* fenomeno che falsifichi il vecchio schema teorico (la Relatività ristretta, nell'esempio descritto).
Quando, invece, confrontiamo le nostre ipotesi teoriche con più fenomeni (che falsificano il vecchio schema teorico), attinenti ad ambiti e problematiche fisiche differenti, il cambiamento degli assunti relativi alla geometria dello spaziotempo si *impone* con indubbia forza *veritativa*.
Per illustrare quanto appena detto, descriverò il fenomeno della *dilatazione del tempo* che si verifica in un campo gravitazionale intenso, fenomeno di cui le leggi della Relatività ristretta non sono in grado di rendere conto e che può invece essere agevolmente spiegato utilizzando la nuova metrica riemanniana assunta dalla Relatività Generale.
Da un punto di vista teorico, la dilatazione del tempo in presenza di campo gravitazionale è riconducibile all'**espressione matematica dell'*elemento di linea* spaziotemporale** ds, ovvero della distanza tra due eventi (si ricordi che ogni evento è caratterizzato, come in Relatività ristretta, dalle tre coordinate spaziali e dalla coordinata temporale), secondo appunto la metrica riemanniana (dipendente dalla distribuzione spaziale di massa) introdotta dai postulati della Relatività Generale. L'espressione matematica del ds è fornita dall'equazione:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu = (1 + 2\phi / c^2)\, c^2\, dt^2 - d\mathbf{x}^2$$

In tale equazione, $g_{\mu\nu}$ rappresenta il *tensore metrico* (che determina la curvatura e dunque il carattere riemanniano dello spaziotempo einsteiniano), dx^μ è il quadrivettore delle differenze (infinitesime) delle coordinate spaziotemporali dei due eventi che costituiscono i due estremi dell'elemento di linea, ϕ è il potenziale gravitazionale (newtoniano) e $d\mathbf{x}$ è il vettore tridimensionale che congiunge le posizioni spaziali dei due eventi.

Una volta assunta, per lo spaziotempo generalrelativistico in presenza di un campo gravitazionale di potenziale ϕ, una siffatta espressione dell'elemento di linea, si ha come conseguenza una relazione, diversa da quella valida per lo spaziotempo minkowskiano, tra l'intervallo di *tempo proprio* $d\tau$ (la durata caratteristica di un dato processo fisico) e l'intervallo dt della coordinata temporale misurato da un certo osservatore per lo stesso processo.

Va sottolineato il fatto che la relazione tra $d\tau$ e dt è una conseguenza dell'equazione che definisce l'elemento di linea in quanto è una conseguenza della metrica (ovvero della *geometria*) dello spaziotempo. L'elemento di linea, infatti, essendo la *distanza* tra due generici eventi spaziotemporali infinitamente vicini, individua, con la propria espressione matematica, le *proprietà geometriche* dello spaziotempo, determinando la metrica riemanniana opportuna e consentendoci così di descrivere relativisticamente il campo gravitazionale (cosa che la metrica minkowskiana della Relatività ristretta non era in grado di fare).

In termini molto semplici, ma rispettosi della *sostanza* concettuale della teorizzazione einsteiniana, se vogliamo descrivere un campo gravitazionale in accordo con il Principio di Relatività (generalizzato, come abbiamo accennato all'inizio del paragrafo, a sistemi di riferimento del tutto arbitrari, sia inerziali che non), dobbiamo introdurre l'elemento di linea sopra definito nello spaziotempo (e dunque dobbiamo introdurre una certa geometria dello spaziotempo) e tale introduzione genera una nuova relazione tra tempo proprio e coordinata temporale misurabile da parte di un osservatore.

La relazione tra $d\tau$ e dt generata dall'introduzione della nuova metrica, o geometria, dello spaziotempo è:

$$d\tau = g_{00}^{1/2}\, dt$$

Un aspetto molto importante di questa relazione risiede nel fatto che l'elemento g_{00} del tensore metrico dipende (come in generale tutti gli elementi di tale tensore) dalla posizione spaziale $\boldsymbol{x}$ e dunque l'intervallo di tempo misurato dt dipenderà anch'esso da $\boldsymbol{x}$.

Nel caso considerato di un campo gravitazionale newtoniano di potenziale ϕ, g_{00} è dato da:

$g_{00} = 1 + 2\phi /c^2$

In tale espressione la dipendenza di g_{00} dalla posizione $\boldsymbol{x}$ si realizza attraverso il potenziale ϕ, che è proprio una funzione di $\boldsymbol{x}$.
In generale, poiché $\phi < 0$, si ha:

$d\tau < dt$

Osserviamo inoltre che, all'infinito (ovvero in assenza di campo), $\phi = 0$ e pertanto $g_{00} = 1$, da cui:

$d\tau = dt_{nofield}$

E, sostituendo nella disuguaglianza precedente, otteniamo alla fine:

$dt_{nofield} < dt$

Quest'ultima relazione stabilisce il celebre risultato della **dilatazione temporale gravitazionale**, in quanto afferma che la durata di un processo fisico misurata in assenza di campo è più piccola della durata dello stesso processo misurata *in presenza* di campo, ovvero che *il campo gravitazionale ha l'effetto di dilatare la durata misurata di un qualunque processo fisico*.
Come si è visto, questo sorprendente fenomeno è strettamente connesso alla *geometria* (nel senso della *metrica* riemanniana) dello spaziotempo generalrelativistico, esattamente come le misure di parallasse negativa per le stelle lontane. Si ha, infatti, parallasse negativa se la luce segue, in presenza di campo gravitazionale, una geodetica della varietà riemanniana che descrive lo spaziotempo e non una retta euclidea dello spazio tridimensionale ordinario. In pratica, ciò che accade è un fenomeno di deflessione dei raggi luminosi emessi dalle stelle lontane, che, prima di arrivare ai telescopi posti sulla superficie terrestre, passano molto vicino al Sole, il cui campo gravitazionale, *incurvando* la geometria dello spazio circostante, *costringe* la luce a seguire una traiettoria curva (e non più rettilinea, come

avrebbe dovuto essere nel caso di gravità e geometria dello spazio non interconnesse, caso che è quello della teoria newtoniana della gravitazione).

Adottando, a scopo puramente didattico, una visione elementare, potremmo dire che un raggio luminoso emesso da una stella molto lontana dal nostro Sistema planetario viene *attratto* dal Sole e dunque deviato dal proprio naturale cammino rettilineo. Ma tale visione semplificata ed intuitiva non deve far pensare che il fenomeno in questione fosse già prevedibile nell'ambito della teoria newtoniana della gravitazione, in quanto, come è noto, la legge di gravitazione universale di Newton lega la forza di gravità alle masse a riposo (di entrambi i corpi interagenti) e, per la luce (o, se si preferisce, per il fotone), la massa a riposo, prevista e osservata, è pari a zero.

Lo schema teorico generalrelativistico, invece, in modo del tutto naturale, basandosi sull'*accoppiamento* massa del Sole – metrica spaziotemporale, consente di determinare con rigore concettuale e precisione di calcolo la traiettoria curva del raggio luminoso.

In prima approssimazione, utilizzando le equazioni di campo di Einstein (che in questo lavoro non sono riportate), attraverso un procedimento di *linearizzazione* delle equazioni stesse (valido per campi deboli e statici) si può ottenere la seguente espressione dell'angolo di deflessione $\Delta\theta$ del raggio luminoso rispetto alla traiettoria rettilinea prevista dall'ottica geometrica (il cosiddetto *angolo di Einstein*):

$$\Delta\theta = - 4GM / Rc^2$$

dove G è la costante newtoniana di gravitazione universale, M è la massa del Sole, R è la distanza della traiettoria del raggio luminoso non deflesso dal centro del Sole.

Nel caso di R pari al raggio solare (ovvero di luce emessa dalla stella lontana che 'sfiora' il bordo solare), $\Delta\theta$ risulta pari a 1.75 secondi d'arco.

Tale angolo di deflessione è stato sperimentalmente osservato (per la prima volta nel 1919), confermando la previsione teorica.

Oggi i controlli sperimentali della formula dell'angolo di Einstein si sono accumulati in gran numero, ottenendo *sempre* conferme della previsione teorica con una precisione che attualmente arriva all'1 %.

Quanto alla corroborazione osservativa della previsione generalrelativistica della dilatazione temporale gravitazionale, anche qui ci sono ormai moltissime conferme.

Una delle più recenti (e del tutto *indipendente* dai fenomeni coinvolti nella deflessione gravitazionale della luce) è consistita nella misura di intervalli temporali tramite orologi atomici posti su aerei in volo e mediante orologi identici posti sulla superficie terrestre (alla quota di un aereo in volo il campo gravitazionale terrestre è minore che al suolo e dunque una certa durata temporale risulta 'accorciata').

I due fenomeni qui considerati (deflessione gravitazionale della luce e dilatazione temporale gravitazionale), è il caso di ribadire, sono *completamente indipendenti* e coinvolgono problematiche fisiche molto differenti (come si è visto anche dai differenti tipi di esperimenti condotti per rivelarli).

In una tale situazione *fattuale*, l'adozione della geometria riemanniana a curvatura variabile per lo spaziotempo cui far riferimento nella teoria fisica non è più, come avrebbe voluto il convenzionalismo di Poincaré, frutto di una scelta sostanzialmente libera e, in ultima analisi, puramente definitoria, risultando invece un'ipotesi dal potere esplicativo molto ampio e capace di portare a sintesi in modo organico ed elegante importanti ambiti fenomenici e rilevanti problematiche fisiche tra di loro anche molto eterogenei (i due fenomeni che ho qui discusso sono solo due esempi tra i tanti che si possono fare, essendo veramente numerose, ormai, le conferme sperimentali della Teoria della Relatività Generale).

La scienza, di cui (va tenuto sempre presente) *fanno parte* le teorie matematiche, non produce soltanto meri dispositivi di calcolo atti alla previsione quantitativa dei fenomeni naturali, ma, come ha puntualizzato il grande epistemologo austriaco K. Popper, ha per obiettivo la *verità*:

Ciò che ricerchiamo nella scienza non è tanto l'utilità quanto la verità: approssimazione alla verità; potere esplicativo e potere di risolvere problemi, e quindi comprensione.

(da *La teoria dei quanti e lo scisma nella fisica*, K. Popper).

3.5 La filosofia dello spazio e del tempo e la Relatività Generale.

Illustrando quella che, a parere di chi scrive, è l'importanza della Teoria della Relatività Generale per il dibattito ontologico sugli insiemi (nella fattispecie sullo spaziotempo einsteiniano), non possiamo non approfondire il tema della concezione filosofica dello spazio e del tempo come entità aventi un ruolo, in generale essenziale, nelle scienze della natura e in particolare in fisica.

Una prima sintetica schematizzazione del panorama delle idee filosofiche su tale tema è quella che distingue due fondamentali correnti interpretative dei concetti di spazio e tempo: il sostanzialismo e il relazionismo.

Per **sostanzialismo** si intende, in generale, una concezione secondo la quale spazio e tempo esistono *indipendentemente* e *prima* dei corpi materiali e degli eventi del mondo fisico.

I corpi si muovono, interagiscono e danno luogo a tutti gli eventi che le scienze fisiche descrivono in un *palcoscenico* (quello dello spazio e del tempo) che deve *già* esistere di per sé in modo da fornire ai suddetti corpi l'*ambiente* necessario allo svolgersi delle loro *storie*, appunto, *spaziotemporali* (come vengono spesso definite proprio nella fisica relativistica).

Contestualmente a tale funzione di *teatro* degli eventi fisici, lo spaziotempo risulta essere una realtà che può esistere anche *in totale assenza* di corpi e dunque di materia (comunque questa venga intesa). Il *vuoto*, in altre parole, non è soltanto un concetto limite ricavabile dall'estrapolazione teorica dell'esito finale di un'operazione di sottrazione progressiva di enti materiali da una certa porzione ben delimitata di spazio, ma è proprio una *realtà effettivamente esistente* in sé.

Di contro, il **relazionismo** si configura come una visione filosofica che concepisce spazio e tempo esclusivamente come *insiemi di relazioni* tra corpi ed eventi fisici.

Spazio e tempo, per una dottrina relazionista, non hanno esistenza in sé, ma sono soltanto relazioni (senz'altro fondanti ed essenziali nell'ambito della rappresentazione, e conseguentemente della descrizione scientifica, del mondo fisico, ma comunque *soltanto relazioni*) sulla base delle quali il soggetto crea un *ordine* all'interno del proprio *paesaggio* di sensazioni e percezioni generate dal contatto con il mondo esterno.

Il vuoto, per le filosofie relazioniste, non esiste e, come ebbe a dire Cartesio, "se Dio togliesse ogni corpo contenuto in qualche vaso ... i lati del vaso diverrebbero per ciò stesso

reciprocamente contigui" (*Principia Philosophiae*, 1644).
Sarà interessante (ed istruttivo) comprendere adeguatamente come si collocano nel dibattito tra sostanzialisti e relazionisti i due grandi pensatori Newton e Leibniz, entrambi molto importanti per la fondazione teorica della fisica moderna ai suoi inizi.
Il fisico e matematico inglese Isaac Newton è solitamente annoverato tra i sostanzialisti per la sua concezione dello spazio e del tempo *assoluti*, concezione che viene spesso contrapposta all'idea di spazio e tempo *relativi* (al sistema di riferimento) che è una conseguenza delle due teorie relativistiche di Albert Einstein.
La questione del sostanzialismo di Newton non è tuttavia, a ben guardare, affatto ovvia.
Lo scienziato inglese afferma sì (nello *Scholium* ai *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687) che spazio e tempo assoluti esistono "senza relazione alcuna con alcunché di esterno", ma, se si guarda allo sviluppo dell'argomentazione newtoniana nel suo complesso (soprattutto per ciò che è esposto nei Principia), si vede abbastanza facilmente che a Newton preme essenzialmente distinguere le *grandezze* spaziotemporali *assolute* necessarie alle teorie fisiche dalle *misure relative* di tali grandezze che sono concretamente realizzate attraverso strumenti sensibili.
Il problema che porta Newton a pensare spazio e tempo come assoluti è dunque un problema più squisitamente *metodologico* che autenticamente *ontologico*: le misure (relative) di spazio e tempo presuppongono (ma ne sono concettualmente distinte) uno spazio ed un tempo assoluti, nel senso di grandezze (che il fisico si propone appunto di misurare) che in sé stesse sono assolute, dal momento che, per Newton, le misure di tali grandezze spaziotemporali risultano relative soltanto per via dell'inevitabile dipendenza del valore misurato dallo strumento (e dal processo) di misura e non per una qualche ragione *di principio* (come, ad esempio, sarà nella fisica relativistica, in cui le stesse grandezze spaziotemporali, a prescindere dall'influenza dei processi fisici di misura, dipendono, *per legge universale di natura*, dal sistema di riferimento adottato).
Tale concezione, come è evidente, non riguarda l'idea, di carattere ontologico, dello spazio e del tempo come *sostanze*, ovvero come realtà (fisiche, in questo caso) esistenti indipendentemente da corpi materiali (per lo spazio) ed eventi (per il tempo).
Anzi, Newton stesso scrive (nel manoscritto inedito *De Gravitatione et equipondio fluidorum*):

Le parti della durata e dello spazio sono comprese essere identiche a ciò che realmente sono grazie al loro mutuo ordine e alla loro mutua posizione; né hanno un qualunque tipo di individualità a parte quella dell'ordine e della posizione, che dunque non possono essere alterate.

E' chiaro che il pensatore inglese, in questo passo, sta risolvendo la natura e l'identità di istanti temporali e punti spaziali in ben precise **proprietà relazionali** (*ordine* e *posizione*), affermando anche esplicitamente che, al di là dell'identità data da tali proprietà, istanti e punti non *hanno un qualunque* [altro] *tipo di individualità*.

La questione dell'identità, o individualità, di una sostanza (al di là delle proprietà relazionali, come ordine e posizione, che possono fornire una forma di individualità di tipo diverso da quella inerente al concetto classico di sostanza, in quanto si tratta sempre di un'individualità che dipende da altri enti o sostanze) è ancor più importante (in generale e nel contesto del dibattito sulla natura dello spazio e del tempo) nel pensiero di Leibniz.

Il filosofo tedesco afferma, come una delle basi della sua ontologia, il cosiddetto Principio dell'Identità degli Indiscernibili, il quale stabilisce che entità indistinguibili quanto all'essenza e al concetto, in altri termini dotate delle stesse proprietà, sono identiche.

Nella polemica che lo oppone al teologo newtoniano Clarke, Leibniz applica questo principio per dimostrare l'insostanzialità dello spazio e del tempo.

L'argomentazione leibniziana procede nel modo seguente. Se istanti temporali e punti spaziali fossero sostanze, dovrebbero essere dotati di identità distinte. Ma, se immaginiamo un Universo creato da Dio in un istante diverso o rigidamente traslato di una certa distanza (rispetto al nostro Universo effettivo), questo nuovo Universo, ottenuto da quello realmente esistente preservando tutti i rapporti spaziotemporali al suo interno, risulta del tutto indistinguibile da quello reale, onde, applicando il Principio dell'Identità degli Indiscernibili, è identico all'Universo effettivamente esistente. Ciò significa che i diversi istanti temporali e punti spaziali di cui è costituita la diversa regione di spaziotempo occupata dal secondo Universo (quello immaginato) non hanno in realtà identità autonome, ma rappresentano soltanto rapporti interni a tale mondo (tra eventi, in riferimento al tempo, e tra corpi, in riferimento allo spazio).

In particolare, per Leibniz, il tempo *è* l'ordine di successione degli eventi e lo spazio *è*

l'ordine di coesistenza dei corpi.
E' frequente nella letteratura sulla storia del pensiero scientifico e filosofico, soprattutto a partire dall'interpretazione che ha dato delle idee di Newton la storiografia di orientamento positivista, l'opposizione tra il cosiddetto sostanzialismo di Newton e il relazionismo di Leibniz.
Tuttavia, come credo di avere illustrato in modo sufficientemente completo, la tesi di Newton sulla natura dello spazio e del tempo non è, in realtà, così lontana da quella di Leibniz.
Anche per Newton, come per Leibniz, spazio e tempo individuano fondamentalmente strutture relazionali (ordine e posizione, come abbiamo visto sopra) e non sono realtà sostanziali nel senso classico del termine, mentre, come ho spiegato prima, il carattere assoluto delle grandezze spaziotemporali è da intendere soltanto come indipendente dagli strumenti e dai processi fisici utilizzati per misurare tali grandezze.
Come si può evincere da una lettura attenta del già citato *Scholium*, potremmo dire, in definitiva, che per Newton spazio e tempo esistono, ma in un modo del tutto peculiare, che non rientra né in quello delle sostanze, né in quello degli accidenti.
Il confronto (e lo scontro) intellettuale tra sostanzialisti e relazionisti prosegue, in ogni caso, fino ai tempi di Einstein, il quale affronta la questione ontologica riguardante spazio e tempo in diversi scritti, delineando nuovamente l'antica contrapposizione tra le due visioni filosofiche, descritte come:

a) [la concezione che intende] *lo spazio come qualità relativa alla posizione nel mondo degli oggetti materiali;*

b) [la concezione che intende] *lo spazio come contenitore di tutti gli oggetti materiali.*

(Einstein, *Prefazione a Jammer*, 1954)

Ovviamente la prima visione può essere classificata come relazionista, mentre la seconda come sostanzialista.

E' piuttosto importante, ai fini della questione dell'esistenza degli insiemi su cui stiamo cercando di indagare in questo capitolo, seguire l'evoluzione del pensiero di Einstein in merito al problema ontologico dello spazio e del tempo, e in particolare comprendere qual è il tipo di concezione dello spaziotempo che risulta dalla Teoria della Relatività Generale.
Abbiamo visto che tale teoria, al fine di ottenere una descrizione del campo gravitazionale coerente con il Principio di Relatività, generalizzato nel Principio di Equivalenza, spiega gli effetti gravitazionali sul moto dei corpi come conseguenze di una particolare geometria dello spaziotempo indotta dalla presenza di massa (ovvero di altri corpi) nello spazio.
Ai fini, dunque, della formulazione delle leggi fisiche che regolano la dinamica dei corpi in presenza di campo gravitazionale, lo spaziotempo (con la sua geometria) ha un ruolo essenziale.
Non è possibile, sembrerebbe, nel contesto della dinamica generalrelativistica, prescindere da un forte impegno ontologico nei confronti dello spaziotempo in quanto tale.
Questa tesi è, a parere di chi scrive, corretta, ma un suo ulteriore approfondimento ci può portare proprio *nel cuore* della questione dell'ontologia degli *insiemi* (intesi come *enti matematici* descritti dalla Teoria matematica degli Insiemi) e può anche contribuire ad illuminare il problema della *natura* degli enti matematici di cui stiamo cercando di dimostrare l'esistenza.
Su cosa si basa, a ben riflettere, la necessità di *credere* nell'esistenza dello spaziotempo? Sulla sua geometria, come abbiamo spiegato. E' la *geometria* determinata dalla metrica riemanniana dello spaziotempo che risulta fondamentale per la formulazione delle leggi dinamiche, in quanto essa consente di connettere la forza di gravità alla distribuzione spaziale della massa e, ad un tempo, di costruire una descrizione delle interazioni gravitazionali coerente con il Principio di Equivalenza.
Ma la geometria spaziotemporale, innanzitutto, chiama in causa la natura **prettamente matematica** dell'ente spaziotempo su cui ci stiamo impegnando ontologicamente. Non stiamo, infatti, semplicemente richiedendo che esista un *ambiente fisico* informalmente concepito che funga da *palcoscenico* dei fenomeni naturali. Stiamo in realtà richiedendo *molto di più*: l'esistenza di un insieme con una struttura matematica (topologica, algebrica e metrica, in una parola geometrica) ben precisa.

Lo spaziotempo della Relatività Generale non è un insieme nel senso ordinario, informale e non matematico del termine, ma, al contrario, è un insieme nel senso tecnico e matematicamente definito della Teoria degli Insiemi (nonché uno spazio topologico, vettoriale e metrico, che sono particolari strutture geometriche di cui possono essere dotati gli insiemi matematici).
D'altra parte, se teniamo presente il dibattito tra sostanzialisti e relazionisti e l'idea, sia newtoniana che leibniziana, di spazio e tempo come proprietà relazionali, ci rendiamo conto del fatto che l'insieme matematico (con la sua struttura geometrica, riassunta nella varietà riemanniana dotata della metrica $g_{\mu\nu}$) rappresentato dallo spaziotempo generalrelativistico è importante in quanto *struttura relazionale* e non in quanto oggetto in sé stesso.
Di esso è fondamentale la geometria (e per questo, abbiamo sottolineato, è un *vero* ente matematico e non un qualche altro tipo di entità teorica non meglio definita) e la geometria **descrive relazioni** matematicamente formalizzate attraverso assiomi e mediante l'uso, *via* la metrica introdotta, dei numeri reali.
L'**ente matematico** di cui ho inteso qui dimostrare l'esistenza (lo spaziotempo einsteiniano) è pertanto una **struttura** e non un oggetto, e la filosofia dello spazio e del tempo nell'ambito della quale si inquadra la visione qui sostenuta è una forma di *strutturalismo spaziotemporale*.

3.6 Geometria spaziotemporale generalrelativistica e campi di forza.

Vale la pena, a conclusione di questi paragrafi sulla ricaduta ontologica della Relatività Generale in riferimento agli insiemi, esaminare i principi teorici di base dell'applicazione della geometria spaziotemporale riemanniana alla descrizione di un generico campo di forza (diverso da quello gravitazionale), quale, ad esempio, il campo elettromagnetico o quello di un'altra forza fondamentale.
E' chiaro, infatti, che, una volta che si accetta la metrica generalrelativistica come **proprietà autenticamente attinente all'ontologia** del mondo fisico e non semplicemente come uno stratagemma *convenzionale* per costruire una descrizione relativisticamente corretta del campo gravitazionale, bisogna necessariamente accettare anche di cambiare la descrizione

degli *altri* campi di forza, con conseguenze (prevedibilmente) anche sul *contenuto fisico* delle nuove teorie di campo così ottenute.

In generale, la revisione delle vecchie teorie di campo della fisica classica sulla base dell'introduzione della geometria riemanniana nello spaziotempo viene condotta secondo il cosiddetto *principio di minimo accoppiamento*.

Tale principio consiste nella prescrizione di una procedura tecnico-matematica ben definita atta a rendere le leggi di una data teoria di campo coerenti con il Principio di Equivalenza.

I passi fondamentali di questa procedura sono i seguenti:

1. sostituzione, in tutti i prodotti scalari che ricorrono nelle equazioni della teoria, della metrica einsteiniana della Relatività ristretta (la metrica dello spaziotempo minkowskiano) con la metrica di Riemann della Relatività Generale;

2. sostituzione (sempre in tutte le equazioni fondamentali della teoria) delle derivate parziali con le *derivate generalcovarianti*;

3. sostituzione dell'elemento di volume d^4x dello spaziotempo minkowskiano con $d^4x\,(-g)^{1/2}$.

Due precisazioni, proprio sul piano tecnico-matematico, sono necessarie per comprendere la procedura descritta.

La grandezza g che appare nel passo 3 è data da:

$$g = det\ g_{\mu\nu}$$

mentre le *derivate generalcovarianti* del passo 2 sono definite in modo tale da preservare la metrica.

Si noti come, nella procedura descritta, il passo 1 coinvolge direttamente la metrica, ovvero la *geometria* dello spaziotempo generalrelativistico, il passo 2 coinvolge (oltre, indirettamente, alla stessa metrica, necessaria per definire le derivate generalcovarianti) il concetto di funzione, di cui si è discusso, sotto il profilo ontologico, nel Cap. 2 (dal momento che la derivazione è un'operazione che viene effettuata su funzioni), mentre il passo 3 chiama di nuovo in causa la geometria attraverso il determinante g del tensore metrico $g_{\mu\nu}$.

Come si vede, la possibilità di ottenere una teoria relativisticamente corretta (nel senso della Relatività Generale) di un campo di forza (diverso da quello gravitazionale) è fondata su di un procedimento *matematico* ben definito (ed anche piuttosto sofisticato) e in particolare sulla *geometria* dell'*insieme* spaziotempo secondo la metrica riemanniana a curvatura variabile introdotta dalla Teoria della Relatività Generale.

Il filosofo della matematica di orientamento nominalista dovrebbe, se non fornire esplicitamente una versione nominalizzata delle teorie di campo formulate in modo coerente con i principi della Relatività Generale, almeno spiegare come potrebbero essere *trasferiti* nella descrizione teorica di un qualunque campo di forza, *diverso da quello gravitazionale*, gli effetti di una metrica elaborata per dedurre le leggi del campo gravitazionale.

Tale trasferimento degli effetti della metrica spaziotemporale su altri campi di forza (di per sé non aventi alcun tipo di connessione logica e fisica con il campo gravitazionale) è possibile non solo in virtù dell'applicazione di un apparato matematico (come quello descritto) da intendersi come un mero *dispositivo tecnico*, ma anche (e, direi, *in primis*, da un punto di vista sia logico che epistemico) in virtù di una ben precisa ipotesi **ontologica** sull'esistenza, ad un livello *fondamentale*, ovvero *prima* ancora della scelta del particolare campo di forza che si vuole descrivere, di un insieme dotato di una ben definita struttura geometrica, lo spaziotempo riemanniano della Relatività Generale.

Se, infatti, l'utilizzo di tale insieme e della sua geometria fosse funzionale *soltanto* alla descrizione del campo gravitazionale, potremmo anche, seguendo un approccio antirealista e nominalista, affermare che il linguaggio insiemistico-geometrico adottato dalla Relatività Generale è solo *un altro modo* di descrivere quella che, nel linguaggio della fisica classica, era la forza di gravità.

Il nominalista potrebbe, in sostanza, chiosare: "Beh, la descrizione geometrica è molto elegante e (almeno per chi conosce bene la matematica ...) probabilmente di una qualche utilità, ma *in realtà*, adottando questa descrizione, non abbiamo fatto altro che ... *chiamare geometria* la vecchia forza di gravità!".

Ma, come abbiamo detto, le cose non stanno così, dal momento che la geometria spaziotemporale della Relatività Generale può essere con successo impiegata per trovare nuove e *più corrette* (dal punto di vista del Principio di Equivalenza) descrizioni di campi di forza del tutto distinti da quello gravitazionale.

In altri termini, il nostro **impegno ontologico** sullo spaziotempo generalrelativistico con la sua peculiare geometria è un elemento indispensabile dell'indagine teorica che porta alla costruzione di descrizioni delle forze fondamentali della natura coerenti con *i nostri migliori principi fisici* (in questo caso, in primo luogo il Principio di Equivalenza).

Abbiamo inoltre accennato, all'inizio di questo paragrafo, al fatto che il contenuto fisico delle teorie di campo modificate sulla base della nuova geometria spaziotemporale è diverso (e, naturalmente, più vicino ai risultati dell'indagine sperimentale).

In effetti, abbiamo già mostrato, discutendo il fenomeno della deflessione dei raggi luminosi (e delle onde elettromagnetiche in generale) in un campo gravitazionale, come la teoria del campo elettromagnetico accoppiata alla geometria spaziotemporale generalrelativistica porti a previsioni (confermate dall'osservazione empirica) assolutamente non formulabili nel contesto della teoria classica di Maxwell.

L'utilizzazione della nuova metrica spaziotemporale, dedotta dalla nuova descrizione del campo gravitazionale, porta dunque a sorprendenti *scoperte* anche per ciò che riguarda gli altri campi fondamentali (visto che il caso del campo elettromagnetico è soltanto un esempio, simile a diversi altri che possono essere portati in riferimento alle altre forze fondamentali).

Capitolo 4. La difesa dell'Argomento di Indispensabilità dalle principali obiezioni mosse dalla Filosofia della Matematica attuale.

L'obiettivo teorico di questo capitolo consiste nel prendere in considerazione (nella prospettiva di un loro superamento) le obiezioni più rilevanti che sono state avanzate da diversi filosofi della matematica degli ultimi decenni nei confronti dell'argomento di indispensabilità.

Una parte importante dei capitoli precedenti è stata impostata, abbiamo visto, su di una sorta di *risposta* agli argomenti di Hartry Field contro l'indispensabilità della matematica.

Tali argomenti, infatti, sono considerati da chi scrive alquanto significativi in relazione alla posizione da prendere sulla questione dell'indispensabilità.

Ciò in virtù della loro natura particolarmente *interna* al problema della comprensione teorica del *modo* in cui la matematica è *utilizzata* per formulare i principi della fisica e, con essa, delle scienze della natura in generale.

L'indubbio merito di H. Field è stato quello di mettere in evidenza ed indagare a fondo i punti cruciali della concezione indispensabilista del *rapporto* tra matematica e fisica.

La tesi fieldiana della *conservatività* della matematica, che il sottoscritto ritiene di avere confutato nei capitoli precedenti, è una tesi che riguarda in maniera logicamente stringente, *da vicino*, per così dire, il modo in cui la matematica consente di derivare agevolmente conseguenze fisiche (anche rilevanti, ammette lo stesso Field) da principi teorici che altrimenti rimarrebbero, in un certo senso, *muti*, se non *sviluppati* (quanto, appunto, al loro effettivo contenuto fisico) attraverso complicate, onerose e talvolta molto difficoltose procedure nominalistiche.

Se, a parere di chi scrive, tale tesi è sbagliata, è pur vero che, forse, essa costituisce (nell'attuale panorama della filosofia della matematica) la fondamentale tesi *interna* sull'uso della matematica nelle scienze naturali che è a sostegno della concezione nominalista sugli enti matematici.

Valutata (come penso di aver fatto) l'inadeguatezza di tale tesi, ritengo sia utile passare a considerare le altre obiezioni logicamente e filosoficamente rilevanti sollevate dall'attuale filosofia della matematica contro l'argomento di indispensabilità, obiezioni che, seppur meno strettamente riguardanti la *struttura logica* del *rapporto* intercorrente tra matematica e scienze della natura, hanno un'importanza non trascurabile in riferimento a diversi aspetti sia metafisici che epistemologici concernenti gli enti matematici, la loro esistenza, la loro natura, la loro conoscibilità.

4.1 Le obiezioni di Penelope Maddy.

In questo paragrafo mi propongo di analizzare e confutare le obiezioni mosse dalla filosofa della matematica statunitense Penelope Maddy all'A. I., obiezioni che sono, a parere del sottoscritto, particolarmente interessanti in quanto coinvolgono diverse importanti questioni soprattutto di carattere epistemologico.
Fondamentalmente, si tratta di tre tipi di contestazione della verità delle ipotesi dell'A. I., basati su tre differenti ordini di problemi:

1. il problema dell'*effettivo* impegno ontologico degli scienziati nei confronti delle entità teoriche postulate dalle *nostre migliori teorie scientifiche*;

2. il problema dell'uso di ipotesi esplicitamente false (per ragioni di comodità descrittiva e di calcolo) nelle teorie scientifiche;

3. il problema delle ragioni che possono essere correttamente addotte per un impegno ontologico naturalisticamente fondato.

Vediamo una per una, alla luce di quanto è emerso nei capitoli precedenti, le tre questioni sollevate da P. Maddy.

Per ciò che riguarda la prima, la filosofa statunitense pone il problema di quanto, *in realtà*, gli stessi scienziati *credano* negli enti di cui si valgono le teorie da essi costruite per ottenere le spiegazioni più ampie ed organiche possibili dei dati sperimentali al momento disponibili.
Maddy fa l'esempio della teoria atomica, che definì il concetto (moderno) di atomo già nell'Ottocento (1860 è la data indicata da Maddy, quando l'atomo divenne *la fondamentale unità della chimica*, grazie all'accettazione dell'opera di S. Cannizzaro, sulla determinazione dei pesi atomici degli elementi, nello storico congresso di Karlsruhe), ma soltanto ai primi del Novecento (1913, data dell'elaborazione del modello atomico di Bohr) fu pienamente accettata come *descrizione effettiva* della natura *reale* delle sostanze chimiche.
Prima del 1913, l'atomo era considerato, secondo l'interpretazione di Maddy, niente di più che un sofisticato *oggetto finzionale* utile a *sistematizzare* le proprietà chimiche degli elementi (si pensi alla costruzione della tavola periodica), ma nessuno *veramente* credeva nella sua esistenza reale.
Le successive osservazioni sperimentali (a partire dal 1913) resero poi la precedente assunzione teorica dell'atomo come entità utile per una formulazione scientificamente valida della chimica una vera e propria *assunzione sull'esistenza reale* dell'atomo.
Maddy utilizza questo esempio per dire che il mero impiego di un *ente teorico* nell'ambito di una data scienza non implica *sic et simpliciter* un impegno ontologico nei confronti dell'ente medesimo da parte degli scienziati.
Da tale considerazione, sempre secondo Maddy, si deduce che il semplice uso di un dato *ente matematico* nel contesto di una certa teoria scientifica non porta alla conclusione che vi *debba* essere, *sulla base* dei risultati della scienza, impegno ontologico verso quell'ente.
La scelta dell'approccio naturalista (secondo il quale la filosofia deve tenere in gran conto le conclusioni della scienza nelle sue teorizzazioni di ordine sia metafisico-ontologico che epistemologico) porta infine a concludere che, se gli stessi uomini di scienza non si impegnano ontologicamente verso un dato ente teorico (che può anche essere un ente matematico) utilizzato dalla scienza, la filosofia non può affermare che *dobbiamo* necessariamente impegnarci verso quell'ente *in quanto* esso fa parte del bagaglio di oggetti teorici utilizzati dalla conoscenza scientifica.
La seconda questione posta da P. Maddy riguarda l'uso, soprattutto nelle scienze fisiche, di schemi teorici e metodologie di calcolo che contengono ipotesi riconosciute come false

dagli stessi scienziati che le formulano o che, comunque, utilizzano convintamente quegli schemi e quei metodi per ottenere previsioni *ragionevolmente approssimate* dei fenomeni reali.

Un esempio tipico, che concerne proprio l'uso di una certa teoria matematica in fisica, è quello dei calcoli che vengono spesso effettuati nello studio dei fluidi (liquidi e gas), ma anche (sotto opportune condizioni) dei solidi, basandosi sulla matematica del *continuo* (si pensi, in primo luogo, al Calcolo differenziale classico).

Ovviamente, data proprio la struttura atomica della materia, ormai confermata sperimentalmente in una gran quantità di situazioni, i corpi fisici (sia fluidi che solidi) non hanno una natura continua.

Ciononostante, per determinati tipi di calcoli, ipotizzare (*falsamente*) che un corpo materiale sia continuo costituisce uno strumento rappresentativo di successo, nel senso che su di una tale ipotesi è possibile costruire (proprio utilizzando il calcolo differenziale e l'analisi matematica del continuo) *dispositivi* teorici previsionali capaci di fornire *stime*, ovviamente approssimate ma sufficientemente vicine alla realtà, delle grandezze fisiche salienti in gioco.

Ci troviamo quindi di fronte, in un caso del genere, ad uno schema interpretativo teorico (e matematico) che incorpora al proprio interno, in modo del tutto coerente e predittivamente efficace (relativamente alla conferma sperimentale dello schema stesso), proposizioni ritenute (con ottime ragioni, tra l'altro) false.

La procedura della conferma osservativa dello schema teorico elaborato *non* garantisce dunque, con buona pace dell'*olismo* quineano, la validazione di *tutte* le ipotesi teoriche contenute nello schema in oggetto.

Il terzo problema sollevato dalla filosofa statunitense si focalizza su di una questione *di principio* riguardante il criterio di base che va utilizzato per stabilire quali sono gli enti teorici nei confronti dei quali siamo *tenuti* ad impegnarci sul piano ontologico.

Tale criterio, proprio nell'ottica quineana, si pretende di fondarlo sul *naturalismo*. La stessa pratica scientifica, dunque, ci indica, secondo questa impostazione, nell'esistenza di quali enti possiamo, e *dobbiamo*, realmente credere.

Ciò significa, argomenta Maddy, che, come è la pratica scientifica della fisica a dirci se gli elettroni, o i neutrini (o altre entità teoriche della fisica), esistono, allo stesso modo deve

essere la pratica scientifica dei matematici a dirci se i numeri, o le funzioni (o altri enti matematici), esistono.
Non ha pertanto alcun senso sostenere, come fa l'argomento di indispensabilità, l'impegno ontologico nei confronti degli enti matematici sulla base dell'utilizzo di tali enti nell'ambito di teorie non matematiche.
Questi gli elementi argomentativi essenziali secondo i quali sono articolate le obiezioni formulate da Penelope Maddy.
Cerchiamo adesso di capire quanto tali obiezioni possano essere ritenute fondate, anche considerando i punti teorici nodali che sono emersi dall'esame dei casi di studio discussi nei capitoli precedenti.
Cominciamo dalla prima obiezione.
Essa, in ultima analisi, è basata sulla rilevazione di un diverso atteggiamento (quanto all'impegno ontologico) da parte degli scienziati nei confronti di enti (matematici e non) utilizzati nelle loro teorie.
Maddy nota che (in alcuni casi), anche quando tali enti sono già incorporati in modo organico in una data teoria ben confermata, vi può essere una prima fase, che può durare anche diverse decine d'anni, durante la quale gli stessi fautori di quella teoria non si impegnano nei confronti degli enti in questione in merito alla loro effettiva esistenza.
Poi, ammette la stessa Maddy (come nel caso della teoria atomica della materia), dopo ulteriori sviluppi della teoria (e/o ulteriori conferme osservazionali), si arriva a *credere realmente* negli enti in oggetto.
Dunque, inizialmente, la quantità di fatti sperimentali che la teoria è in grado di spiegare non è considerata (dagli stessi uomini di scienza) sufficiente per *vincolare* in modo *stringente* la natura effettiva di ciò che viene ipoteticamente assunto come base della teoria, sicché lo scienziato epistemologicamente accorto, pur trovando utili le assunzioni di base della teoria ai fini della spiegazione di un certo spettro di fenomeni, non ritiene che tale bagaglio di conferme sia tale (sia *quantitativamente* che, probabilmente, anche *qualitativamente*) da impegnarci sull'effettivo contenuto ontologico di quelle assunzioni.
Ma se, successivamente, le conferme, non solo e non tanto, aumentano, ma hanno una natura tale (per esempio la teoria è corroborata in un ambito osservativo molto diverso da quello che ha dato origine, inizialmente, alle ipotesi in questione) da rendere molto difficile

pensare ad un contenuto (in termini di enti considerati realmente esistenti) diverso delle ipotesi verso cui si era in precedenza ontologicamente *agnostici*, allora ecco che l'atteggiamento degli scienziati nei confronti degli enti inizialmente ipotizzati si modifica, diventando un vero e proprio impegno ontologico verso quegli stessi enti (talvolta anche molto forte).

Consideriamo, ad esempio, il caso esposto nel Cap. 1 dei *numeri reali* e dell'impegno verso di essi motivato dal sottoscritto attraverso l'analisi dell'uso della teoria della probabilità in fisica (in particolare nello studio dei sistemi termodinamici).

L'utilizzo dei numeri reali, abbiamo visto, si è dimostrato indispensabile, *via*, appunto, il calcolo delle probabilità e la scienza statistica, non in un *singolo* ambito fenomenico, ma in *svariati* rami della fisica (sia classica che quantistica) tra di loro del tutto *indipendenti*.

L'approccio statistico è in grado di spiegare le proprietà termodinamiche di un gas, così come il calore specifico di un solido o le proprietà della radiazione cosmica di fondo.

In ognuno di questi casi (che sono soltanto alcuni dei molti esempi che si possono fare) i numeri reali sono parimenti necessari indipendentemente dal contenuto specifico (molto diverso) delle particolari teorie fisiche nell'ambito delle quali essi vengono impiegati.

E' qualcosa di totalmente analogo, a parere di chi scrive, a ciò che è accaduto all'ipotesi atomista nel momento in cui si è riscontrato che essa è in grado di spiegare svariati e (tra di loro) parecchio differenti fenomeni naturali. A quel punto l'ipotesi atomista è diventata una vera e propria assunzione ontologica, e non semplicemente un'idea *strumentalmente* adottata per dare una configurazione coerente e sistematica alla descrizione teorica delle proprietà chimiche degli elementi.

Sostanzialmente identico mi sembra il caso delle *funzioni*, ampiamente discusso nel Cap. 2.

Le funzioni, come ho cercato di mostrare, sono indispensabili nella formulazione sia della Meccanica newtoniana che della teoria di Maxwell dell'elettromagnetismo, ambiti della fisica classica completamente disgiunti (se non per l'applicazione delle equazioni della dinamica al moto delle cariche sotto l'azione dei campi elettrico e magnetico governati appunto dalle equazioni di Maxwell).

Molto simile la *sorte* dei concetti *geometrici*, e quindi delle ipotesi fisico-matematiche basate sugli *insiemi*, nel momento in cui, ad esempio, si è visto, con la Relatività Generale, che la metrica riemanniana a curvatura variabile dello spaziotempo einsteiniano consente di spiegare fenomeni molto differenti come la deflessione della luce nelle vicinanze di un corpo molto massivo e la dilatazione temporale gravitazionale.

Per quanto riguarda la seconda obiezione, imperniata sull'uso di assunzioni esplicitamente false in diverse teorie fisiche, dobbiamo, a parere dello scrivente, distinguere due generi molto differenti di *uso*.

Esiste, infatti, un uso *interno* di assunzioni (sia fisiche che matematiche) nella *formulazione* degli stessi *principi* di una data teoria scientifica, ed esiste anche un uso, che potremmo definire *esterno* o *accessorio*, che consiste nell'impiegare determinati oggetti ed ipotesi astratti per derivare in modo tecnicamente più agevole, *da principi già formulati* e stabiliti, alcune conseguenze (anche importanti) di carattere fisico.

A parere del sottoscritto, l'obiezione di Maddy può riguardare soltanto il caso dell'uso esterno, mentre l'uso interno richiede certamente un chiaro impegno ontologico nei confronti degli enti in tal modo utilizzati.

Quando, infatti, uno scienziato formula una versione *approssimata* (e dunque, a rigor di termini, *falsa*) di un dato *corpus* di principi teorici, sa benissimo che le conseguenze che potrà dedurre da tale teoria approssimata sono, sempre *a rigori*, false.

La conferma sperimentale avverrà soltanto entro l'ordine di approssimazione utilizzato, ma, in termini strettamente logici, una teoria fisica contenente leggi e principi approssimati non può ricevere alcuna corroborazione empirica.

Ciò significa che la conclusione di Maddy, secondo cui la conferma sperimentale (che in realtà viene ottenuta soltanto entro un certo ordine di approssimazione, ma in effetti, *a rigori*, non viene mai ottenuta *in senso stretto*) validerebbe, dal punto di vista dell'olismo quineano, anche le assunzioni esplicitamente false, è in realtà una conclusione errata.

Il fisico, in una tale circostanza, sta consapevolmente usando uno schema teorico *falso* in grado, tuttavia, di fornire risultati *sufficientemente* vicini alla realtà (*non troppo falsi*, se ci si passa l'espressione, ma comunque *falsi*). Egli richiede soltanto che la discrepanza tra la previsione e la realtà ricada all'interno dell'ordine di approssimazione introdotto nello schema teorico e non intende affatto, se ciò avviene, che l'ipotesi approssimata (e pertanto falsa) sia confermata *in senso stretto*.

Ritengo di aver mostrato, nei tre capitoli precedenti, che gli enti matematici vengono utilizzati in fisica nella formulazione di molti (e fondamentali) principi teorici, ovvero secondo quello che abbiamo chiamato uso *interno*.

Chi scrive è ben consapevole del fatto che diversi asserti matematici possono essere utilizzati anche per formalizzare ipotesi fisiche approssimate, e dunque esplicitamente false, ma questo uso *esterno* delle teorie matematiche non è, a parere del sottoscritto, quello che va preso in considerazione quando si pone la domanda ontologica relativamente agli enti matematici, dal momento che, come credo di avere chiarito, l'utilizzo di uno schema teorico - *a rigori* - falso non può portare alla conferma - *in senso stretto* - di alcunché.

La terza obiezione avanzata da P. Maddy concerne la valenza specifica della particolare disciplina scientifica all'interno della quale decidiamo di considerare un dato ente matematico (ed il suo uso) per dimostrarne l'esistenza.

Per Maddy un *vero* naturalista guarda a *tutte* le pratiche scientifiche *in quanto tali* come a discipline di *pari dignità* e dunque di uguale utilità in riferimento alla ricerca della soluzione del problema ontologico riguardante gli enti teorici (matematici e non) impiegati dalla scienza stessa. Non vi è dunque alcun motivo per pretendere di dimostrare l'esistenza di un certo ente matematico basandosi sul suo utilizzo nella scienza della natura, dal momento che dovrebbe essere la *pratica matematica* stessa (di pari dignità epistemica rispetto ai diversi rami della scienza della natura) a giustificare l'impegno ontologico nei confronti di un *ente* – appunto - *matematico*, allo stesso modo in cui di un ente teorico della fisica (il protone o la forza nucleare debole, ad esempio) giustifichiamo l'ipotesi di esistenza in base a considerazioni di indispensabilità (di quell'ente) all'interno dell'impalcatura teorica della fisica medesima.

L'impostazione di Maddy è in evidente contrasto con la ben nota affermazione di Quine sulla (da lui stesso battezzata) *matematica ricreativa*, cioè quella matematica che non ha alcun ruolo nelle scienze della natura. Sulla verità delle proposizioni di una tale matematica non si può fare, per Quine, alcun affidamento, proprio in quanto manca a queste proposizioni la conferma empirica che potrebbe venir loro soltanto dal fare parte *integrante* di una teoria scientifica su di un certo dominio di fenomeni naturali.

Alla base di tale divergenza vi è, probabilmente, una diversa concezione dell'approccio naturalista in filosofia.

Per Quine, come è noto, non esiste una *filosofia prima*, ovvero un *tribunale* ultimo del pensiero che può giudicare i metodi, lo statuto epistemologico e la legittimità delle assunzioni ontologiche di tutte le scienze particolari.

Orientamenti epistemologici e ipotesi ontologiche fanno parte, esattamente quanto i concetti e i linguaggi specifici delle scienze particolari, del *corpus* globale e integrato della conoscenza scientifica.

In un certo senso, la filosofia è parte (sia in forma inconsapevole e ingenua sia in forma consapevole e matura) della scienza.

Per Quine, nel momento in cui l'uomo produce un certo sforzo conoscitivo nei confronti di un dato insieme di fenomeni, mette in atto, assieme alla costruzione di metodi e concetti scientifici specifici, anche (inevitabilmente) l'elaborazione di ben precise scelte epistemologiche, metafisiche e ontologiche, che sono necessarie e funzionali proprio alla fondazione di quell'insieme di metodi e concetti specifici.

Il grande logico e filosofo americano non intende dunque diminuire l'importanza della riflessione filosofica, che anzi viene da lui inserita *di diritto* e *di fatto* nel corpo *vivo* della conoscenza (scientifica) dei fenomeni, ma vuole mettere in guardia rispetto alla tentazione di considerare la filosofia una forma di pensiero che, *dall'esterno* e da una posizione di *superiorità* critica rispetto alle scienze particolari, giudica queste attribuendo ai loro metodi e ai loro orientamenti (più o meno impliciti) di carattere epistemologico e metafisico-ontologico *patenti* di legittimità e di correttezza che in realtà non ha, come *giudice esterno*, alcun titolo per dare.

L'approfondimento critico dei metodi e delle assunzioni teoriche della scienza, svolto dall'attività filosofica, è *interno* alla ricerca scientifica medesima, ma, per ciò stesso, forse ancora più importante di quello che potrebbe essere messo in atto da una filosofia prima di concezione tradizionale.

Diversa è la posizione di P. Maddy, per la quale, come si è accennato sopra, *ogni* pratica scientifica legittima *da sé stessa* i propri metodi e la propria elaborazione teorica.

Per Maddy, in caso di contrasto tra una teoria scientifica e la riflessione filosofica, è quest'ultima che deve cedere. Alla superiorità della filosofia sulle scienze particolari viene dunque sostituito il suo *opposto speculare*: le scienze sono sempre più importanti, in tutte le scelte significative che concernono problemi filosofici, rispetto alla filosofia stessa.

Dovrebbe, a questo punto, essere chiaro che per Quine ciò è del tutto assurdo, in quanto, come si è detto, la riflessione filosofica è interna allo stesso procedere della ricerca scientifica e pertanto il punto non è che la filosofia deve cedere alla scienza (né il suo contrario), ma, molto più *olisticamente*, che critica filosofica e metodi specifici delle scienze particolari devono interagire *costruttivamente*, in modo da produrre, nell'avanzare del processo della ricerca scientifica, insiemi *organici* di conoscenze dotati di sempre maggiore potere esplicativo e, in definitiva, sempre più vicini al *vero*.

L'idea di Maddy che ogni pratica scientifica (e quindi anche la pratica matematica) si legittima sostanzialmente da sé è dunque, alla luce dell'epistemologia quineana (che il sottoscritto condivide), insostenibile.

La Matematica va vista, assieme alle altre scienze particolari (e alla filosofia), nel quadro dell'insieme globale dell'*intera conoscenza scientifica*, e in quest'ottica va collocato e compreso l'Argomento di Indispensabilità.

Chi scrive non ritiene che la ricerca matematica che non ha (o non ha *ancora*, forse dovremmo più correttamente dire) trovato possibilità di applicazione nell'ambito delle scienze della natura non abbia dignità conoscitiva.

Sotto un certo punto di vista, si può forse avanzare, ai fini di una adeguata descrizione del ruolo che la matematica ricopre nel corpo unitario della conoscenza scientifica, una proposta epistemologica simile a quella avanzata da Popper relativamente al ruolo della metafisica.

Per il filosofo austriaco la metafisica non è avulsa dallo sviluppo della scienza nel senso galileiano e moderno del termine. Le idee metafisiche, a ben guardare, pur non essendo in sé falsificabili, hanno storicamente stimolato l'elaborazione di diverse teorie (falsificabili, secondo il punto di vista di Popper) sui fenomeni naturali, teorie poi empiricamente confermate e diventate quindi teorie scientifiche ben consolidate ed universalmente accettate.

Se, da un lato, non è corretto affermare che la metafisica *è* scienza (vedi il problema della *demarcazione*), dall'altro dobbiamo anche ammettere che il patrimonio culturale metafisico fa parte *integrante* del cammino della conoscenza, cammino che, nella sua fase metodologicamente più definita (nel senso dell'utilizzo del criterio di falsificazione), porta alla costruzione delle teorie scientifiche.

Per Popper, le idee metafisiche vengono elaborate per esigenze di vario tipo che non sono necessariamente di descrizione-previsione della dinamica dei fenomeni naturali e tantomeno costituiscono (almeno nella stragrande parte dei casi) asserti falsificabili sul mondo.
Esse, tuttavia, possono essere utilizzate per giungere alla definizione di proposizioni falsificabili, mediante le quali costruire una organica e predittivamente potente teoria scientifica.
L'immagine usata dallo stesso Popper è quella di un liquido (posto in un contenitore) con delle particelle in sospensione, lasciato in quiete per un certo tempo in modo tale che, a poco a poco, le particelle inizialmente in sospensione si vadano depositando sul fondo del contenitore. In una fase intermedia (quando già un buon numero di particelle si è depositata sul fondo, ma rimangono ancora molte particelle in sospensione), possiamo identificare il deposito sul fondo come la scienza già consolidata, mentre le particelle ancora in sospensione costituiscono le idee metafisiche.
Il processo di graduale deposito delle idee-particelle sul fondo del contenitore rappresenta la trasformazione progressiva delle idee metafisiche in asserti scientifici (ovvero falsificabili).
Una situazione simile si presenta, a parere di chi scrive, nel rapporto tra matematica e scienze empiriche.
E' avvenuto spesso (e avviene tuttora), infatti, che la matematica producesse concetti e teorie che non trovavano nell'immediato alcuna traduzione in termini di principi e leggi delle scienze della natura. Tali concetti e teorie in prima battuta del tutto *astratti* (in un'immagine *à la Popper* le 'particelle in sospensione') hanno poi (frequentemente) costituito la base formale per la costruzione di diverse descrizioni scientifiche del mondo naturale (le 'particelle' si sono 'depositate sul fondo').
Dunque, come non vi è identità tra metafisica e scienza, ma vi è comunque un rapporto di *scambio* concettuale e teorico (spesso fecondo proprio per la scienza), allo stesso modo non vi è identità tra matematica e scienza della natura, ma sussiste comunque tra le due una relazione molto importante (un'*osmosi*, potremmo dire), essenziale per lo strutturarsi e il progredire della scienza della natura, che è proprio quella relazione di *organicità* e di *integrazione* posta da Quine alla base dell'Argomento di Indispensabilità.
La validità di tale argomento risiede quindi nell'analisi degli impegni ontologici degli asserti matematici intesi *come parte* del vasto panorama della conoscenza scientifica.

La legittimità di un tale genere di analisi è garantita, come credo di avere chiarito, dal carattere *olistico* del *naturalismo* quineano, che lo scrivente assume come base sufficientemente adeguata di descrizione dei rapporti reciproci tra scienza, matematica e ontologia.

Ciò non significa che la questione ontologica concernente gli enti matematici non possa essere affrontata al di fuori del contesto definito dal rapporto tra matematica e scienza della natura, e quindi senza fare ricorso all'Argomento di Indispensabilità. Le considerazioni sin qui svolte indicano soltanto che l'Argomento di Indispensabilità è ben fondato e che pertanto l'obiezione di Penelope Maddy basata sulla pari dignità di tutte le pratiche scientifiche non ha sufficienti ragioni a sostegno.

L'aspetto della ***compenetrazione olistica*** **tra matematica e scienza della natura** (in particolare la fisica) è un aspetto che credo di avere ampiamente illustrato nei capitoli precedenti, praticamente in tutti i casi di studio considerati.

Due di tali casi voglio tuttavia richiamare nell'ambito della presente discussione, in quanto mi sembra siano due esempi particolarmente *forti* di *uso interno* (nel senso definito in questo stesso paragrafo) della matematica nella formulazione dei principi di una teoria fisica.

Il primo di tali casi di studio è costituito dall'assunzione, in Relatività ristretta, di una relazione tra la forza (generalizzata, detta anche – si ricorderà – *forza di Minkowski*) e la quadriaccelerazione, che estende (modificandolo in misura significativa) il 2° principio di Newton alla dinamica relativistica.

La relazione in oggetto può essere ottenuta (volendo darne una derivazione rigorosa e del tutto generale) attraverso l'utilizzo di alcune *profonde* proprietà algebriche dello spazio di Minkowski (le proprietà dei quadrivettori dello spaziotempo relativistico).

Si tratta, a parere del sottoscritto, di un esempio emblematico di *geometrizzazione* della meccanica che non ha il mero risultato di rendere più formale ed elegante l'espressione delle leggi di questa fondamentale branca della fisica, ma ***produce*** – proprio *in senso stretto* – **un nuovo principio**.

Del tutto simile, sotto questo punto di vista, il secondo dei due casi di studio accennati, quello della derivazione (sempre in Relatività ristretta) del principio di *equivalenza della massa-energia*, in altri termini la famosa equazione $\boldsymbol{E = mc^2}$.

Anche in tale derivazione l'algebra dei quadrivettori dello spazio di Minkowski è assolutamente essenziale, e il punto epistemologico ed ontologico di grande importanza è che l'ente matematico *spazio di Minkowski* (con le sue proprietà algebriche) è indispensabile per giungere ad **una nuova legge fisica**, del tutto ignota in Meccanica classica.

4.2 L'obiezione di Elliott Sober.

Meritevole di considerazione e di un'attenta analisi critica è anche l'obiezione avanzata dal filosofo statunitense Elliott Sober.

L'argomentazione di Sober si muove all'interno della cornice teorica del cosiddetto *empirismo contrastativo*.

Questa rilevante corrente dell'attuale filosofia della scienza è basata su di una particolare interpretazione del paradigma della confermabilità delle teorie scientifiche.

Per un empirista contrastativo una certa assunzione teorica A_1 è confermata in contrasto con un'altra assunzione teorica A_2, alla luce di una certa osservazione O, ovvero – in altri termini - O favorisce A_1 rispetto ad A_2, se la probabilità di ottenere l'osservazione O sotto l'ipotesi che sia vera A_1 è maggiore della probabilità di ottenere la stessa osservazione O sotto l'ipotesi che sia vera A_2.

Esprimendoci in modo meno formale, un assunto teorico, per potersi dire che è stato sperimentalmente confermato, deve *competere* con uno o più assunti concorrenti e *vincere* in tale competizione.

Se l'osservazione, o *le* osservazioni, sperimentali risultano meno probabili postulando gli assunti concorrenti, allora l'ipotesi teorica che volevamo sottoporre al controllo empirico può essere considerata confermata.

Dunque un assunto teorico è confermato sempre *rispetto a* (o *in contrasto con*) altri assunti teorici che pretendono di spiegare gli stessi dati osservativi.

E. Sober, esponente di questa corrente dell'epistemologia contemporanea, utilizza il principio che ho appena riportato al fine di una (pretesa) confutazione dell'Argomento di Indispensabilità.

Il filosofo americano, infatti, sostiene che, in tale argomento, le teorie matematiche vengono presentate come empiricamente confermate (assieme alle teorie scientifiche nell'ambito delle quali vengono utilizzate) senza essere state *messe in competizione* con alternative *non matematiche* (cioè con versioni nominalizzate delle teorie scientifiche di cui sopra) o con *altre* teorie matematiche.

In una tale situazione, sostiene sempre Sober, non si può affermare che le teorie matematiche siano state *veramente* confermate (dal punto di vista dell'empirismo contrastativo) e pertanto l'ipotesi fondamentale dell'Argomento di Indispensabilità viene a cadere.

Ancora una volta credo che la risposta all'obiezione antiindispensabilista sia implicitamente contenuta nelle discussioni delle teorie scientifiche concrete presentate nei capitoli precedenti.

Per Sober, e con lui tutti gli empiristi contrastativi, se non ci sono alternative teoriche che possano pretendere di rendere conto degli stessi dati sperimentali alla luce dei quali viene valutata la correttezza della teoria in esame, non ci può essere vera conferma empirica di tale teoria.

Ma, in realtà, chi scrive ritiene di aver mostrato che, in molti e grandemente rilevanti casi, **non esistono serie e convincenti alternative** ai concetti e ai metodi matematici correntemente utilizzati nelle più importanti teorie della scienza moderna e contemporanea.

Si pensi, come esempio particolarmente chiaro ed emblematico, al caso della Meccanica quantistica.

Si è fatto vedere, sia in riferimento alla questione dell'esistenza delle funzioni che degli insiemi, come la struttura stessa della fisica microscopica *esiga* l'**astrazione matematica** degli spazi di Hilbert (con l'algebra dei vettori di stato da una parte e la corrispondenza tra operatori su tali vettori e grandezze fisiche, che è mediata dal concetto di funzione, dall'altra) per formulare connessioni teoricamente rilevanti tra elementi fisicamente salienti, in una condizione in cui tali connessioni non offrono altra possibilità di modellizzazione.

La Relatività Generale, inoltre, offre un ambito di pari efficacia dimostrativa in riferimento alla conferma della teoria matematica degli insiemi, dal momento che la *geometria* dello spaziotempo generalrelativistico è essa stessa da una parte *fisicamente attiva* (e dunque dà luogo, come si è più volte illustrato e sottolineato, a fenomeni naturali importanti e non previsti dalla meccanica classica o dalla Relatività ristretta) e dall'altra è formulabile soltanto in modo *astratto* facendo ricorso alle varietà riemanniane quadridimensionali.

Se, dunque, i principi dell'empirismo contrastativo imporrebbero di trovare delle alternative teoriche per poter dire che alcune teorie matematiche, congiunte alla Meccanica quantistica o alla Relatività Generale (per usare gli esempi qui richiamati), sono confermate dagli esperimenti e dalle osservazioni, dobbiamo rispondere, a perere dello scrivente, che il criterio empirista contrastativo non è adeguato al problema che stiamo trattando.

Almeno tanto mi pare di potere concludere sulla base dell'attuale stato di avanzamento della conoscenza scientifica (e della fisica in particolare).

4.3 Il dilemma di Benacerraf.

Una delle principali sfide che il realismo in filosofia della matematica deve affrontare è il cosiddetto *dilemma di Benacerraf*.

Nel 1973, con l'importante articolo sul problema della verità in matematica (*Mathematical Truth*), il filosofo statunitense Paul J. S. Benacerraf pose la questione della necessità per la filosofia della matematica di fornire, *ad un tempo*, una *buona epistemologia* ed una *buona semantica* per gli enti, le teorie e gli asserti delle scienze matematiche.

In *Mathematical Truth* Benacerraf, basandosi sulla *teoria causale della conoscenza*, afferma che, quando riteniamo di conoscere un'entità (e, in generale, una verità) matematica, dobbiamo poter giustificare questa nostra fiducia (nel fatto di avere avuto un *accesso epistemico* ad un certo oggetto matematico) sulla base di un (se non del tutto certo, almeno plausibile) *legame causale* tra noi e l'oggetto matematico stesso.

Secondo, infatti, la teoria causale della conoscenza, perché si possa dire che un soggetto conosce che *p* (*p* sta per una certa proposizione), *la sua credenza che p deve essere causalmente connessa in un modo appropriato con ciò che fa sì che sia vero che p*.

Tale definizione di *cosa è conoscere*, evidentemente, pone un grosso problema alla giustificazione della nostra credenza di potere avere un qualche accesso conoscitivo ad un ente matematico, dal momento che un ente matematico è un ente astratto e non può pertanto avere alcun potere causale.

Benacerraf lancia dunque ai filosofi della matematica la sfida di formulare una *buona epistemologia* degli oggetti e degli enunciati matematici, dove, per buona epistemologia, Benacerraf intende una descrizione dei processi conoscitivi concernenti le verità affermate da un dato sapere che sia basata sulla teoria causale della conoscenza.
La richiesta della buona epistemologia, per come è formulata da Benacerraf, è tipicamente una richiesta a cui difficilmente riescono a rispondere le filosofie platoniste della matematica, in quanto tali filosofie si impegnano sull'esistenza degli oggetti matematici e devono dunque, per ottemperare al criterio di Benacerraf, descrivere il processo di conoscenza delle verità matematiche in termini di rapporti causali tra enti astratti (gli oggetti matematici) e il soggetto conoscente.
Le filosofie antirealiste del sapere matematico hanno invece più facilità a raccogliere la sfida della buona epistemologia, visto che non devono impegnarsi su oggetti astratti e sulla loro conoscibilità (nel senso della teoria causale della conoscenza).
La seconda richiesta formulata da Benacerraf è quella della *buona semantica*.
Per il filosofo americano una *buona semantica* di un certo insieme di asserti (quelli che costituiscono l'articolazione linguistica di un dato sapere, per esempio quello matematico) è caratterizzata dai seguenti due aspetti fondamentali:

1. la semantica che si applica agli asserti in questione deve essere strutturalmente analoga a quella che si applica agli asserti del linguaggio ordinario;

2. l'analisi semantica deve essere corredata da una distinzione tra verità e giustificazione.

Esemplificando questi due aspetti in riferimento proprio alla matematica e alle sue proposizioni, quanto sopra esposto significa che, ad esempio, gli asserti "vi sono almeno tre numeri primi maggiori di 17" e "vi sono almeno tre grandi città più antiche di New York"

I. devono essere *semanticamente analizzati in modo del tutto analogo*

e

II. devono essere *considerati veri se esistono oggetti*, con proprietà rilevanti ai fini della verità degli asserti in questione, *indipendentemente dalle nostre procedure di giustificazione*.

Tale richiesta, al contrario di quella della buona epistemologia, è di facile approccio proprio per le concezioni platoniste della matematica, mentre tipicamente crea grossi problemi alle descrizioni antirealiste.
Per un platonista, infatti, l'asserto "vi sono almeno tre numeri primi maggiori di 17" è vero, *allo stesso modo* dell'altro (riguardante oggetti concreti, le città), in virtù dell'*esistenza* di tre oggetti (matematici, in questo caso) - tre numeri naturali - dotati di determinate proprietà (essere primi e maggiori di 17).
Per un filosofo antirealista (che non ritiene giustificato l'impegno ontologico sugli enti matematici), invece, l'analisi semantica di un enunciato matematico come quello riportato deve necessariamente essere condotta *in modo differente* da quella di un enunciato su oggetti concreti come le città, dal momento che per un filosofo antirealista della matematica gli oggetti matematici non esistono, mentre sugli oggetti concreti possiamo anche impegnarci (come, di fatto, avviene nelle concezioni nominaliste).
Anche la distinzione tra verità e giustificazione è molto più semplice per un platonista (per il quale un asserto matematico è vero sulla base di enti matematici realmente esistenti e caratterizzati da proprietà rilevanti per la verità dell'asserto stesso, dunque del tutto indipendentemente dalle procedure da noi utilizzate per accertare tale verità) che per un antirealista (per il quale non vi sono enti matematici e dunque è molto più difficile individuare gli oggetti, realmente esistenti e quindi indipendenti dalle nostre procedure di giustificazione, sulla base dei quali un asserto matematico è ritenuto vero).
La simultanea richiesta di buona epistemologia e buona semantica per una adeguata interpretazione filosofica del sapere matematico pone dunque il cosiddetto *dilemma di Benacerraf*: sembra molto difficile soddisfare *entrambe* le richieste; in particolare, per il platonismo è difficile soddisfare la richiesta della buona epistemologia, mentre per l'antirealismo è difficile soddisfare la richiesta della buona semantica.
E' quindi necessario chiedersi *se* (ed eventualmente *in che modo*) la discussione fin qui svolta, e in particolare l'analisi di alcune specifiche teorie fisiche condotta nei capitoli

precedenti, può offrire una risposta al dilemma di Benacerraf (positiva per il platonismo o almeno per il realismo in generale) basata sull'Argomento di Indispensabilità.

Un primo aspetto da mettere in rilievo, in proposito, è costituito dal fatto che l'ipotesi di base di Benacerraf, ovvero la teoria causale della conoscenza, è un'ipotesi la cui fondatezza è tutt'altro che scontata.

In effetti, oggi le critiche a tale modello del processo conoscitivo sono molte, e alcune di esse anche parecchio incisive.

Su questo tema specifico (e sull'idea che il sottoscritto si è fatto di tale questione) si tornerà più avanti, anche per via della sua generale attinenza con gli aspetti epistemologici dell'indagine filosofica sugli oggetti matematici.

Qui ciò che resta comunque importante è capire se e in che termini il ragionamento di Benacerraf (in particolare la sua richiesta di una buona epistemologia per la concezione filosofica delle teorie e degli enti matematici) coglie una questione genuinamente rilevante, a prescindere dall'adeguatezza o meno della teoria causale della conoscenza.

Hartry Field, con il lavoro *Realism, Mathematics and Modality* (1989), ha messo in evidenza il fatto che la richiesta di Benacerraf può essere *riletta* come la richiesta di spiegare in virtù di quali meccanismi le nostre *credenze* sugli oggetti matematici corrispondono così bene ai *fatti* che concernono quegli stessi oggetti (e tale questione *è* certamente rilevante, come argomenta lo stesso Field e come anche chi scrive ritiene).

Un'indagine approfondita ed esauriente del problema posto da Field (come riformulazione di quello sollevato da Benacerraf) esula dagli scopi di questo lavoro.

Interessa qui però mettere in rilievo il fatto che l'Argomento di Indispensabilità offre una giustificazione molto naturale e (a parere di chi scrive) convincente della *corrispondenza* credenze-fatti in matematica che Field-Benacerraf correttamente problematizza.

La possibilità, infatti, di dedurre (grazie all'utilizzo di concetti e teoremi matematici) da ipotesi vere (dal punto di vista empirico) conseguenze ancora vere (sempre nel senso empirico del termine), possibilità che è alla base del concetto di *indispensabilità*, non consente forse di ritenere *vere* le nostre *credenze* sugli oggetti matematici e sui fatti che li riguardano?

Naturalmente, l'affidabilità delle nostre credenze matematiche non può essere stabilita valutando *individualmente ogni singola* credenza alla luce del controllo empirico delle conseguenze (della credenza matematica stessa unita ad ipotesi di carattere puramente fisico).

Come è nello spirito dell'olismo quineano, la valutazione di affidabilità è *globale*. Un'intera teoria fisico-matematica viene cioè controllata mediante l'osservazione empirica e dobbiamo accontentarci di una definizione di affidabilità che non riguarda il singolo concetto matematico (o anche fisico) in sé stesso, ma investe l'intera struttura di credenze (matematiche e fisiche) e connessioni logiche tra credenze.

Affidabile può essere un'intera teoria fisico-matematica e non un singolo asserto, per quanto incontrovertibile possa sembrarci (pensiamo, ad esempio, alle proprietà dei numeri naturali o alle idee più consolidate della teoria atomica della materia).

Ciò non toglie che, se i *fatti matematici* fossero diversi, diverse sarebbero le conseguenze fisiche di un determinato *set* di assunti teorici (fisico-matematici) e su tale diversità poggia il meccanismo della conferma empirica di quell'insieme di assunzioni teoriche.

L'affidabilità non nasce dunque dalla connessione *causale* diretta di un *singolo* ente matematico con il soggetto conoscente, ma dalla valutazione del *potere predittivo* di un'*intera* teoria, potere predittivo che ha ben poco a che vedere con il legame causale cui fa riferimento l'impostazione di Benacerraf.

Gli enti astratti (non solo matematici: la stessa cosa vale per le entità teoriche della fisica) hanno un potere predittivo (ed anche, ovviamente, *esplicativo*) che è basato sul loro utilizzo all'interno di una struttura teorica integrata e complessa che viene costruita dai ricercatori con l'intento di ottenere, *a valle* (ovvero *alla periferia* del sistema teorico stesso), un *mondo previsto* il più possibile simile al *mondo reale*.

Nessun ente astratto della teoria è connesso causalmente al soggetto, se non nel senso che il soggetto lo produce con la propria attività mentale. Esso non è nemmeno la *rappresentazione* di *una* certa realtà del mondo esterno, in quanto il rapporto della teoria con il mondo è, conviene sottolinearlo ancora, *globale*.

L'equivoco della connessione causale ente astratto-soggetto deriva dall'idea che noi accediamo a degli enti che poi utilizziamo come rappresentazioni (idealizzate) dei *singoli* fenomeni del mondo.

In realtà, ciò che avviene nel processo della conoscenza è affatto diverso: il soggetto utilizza sì enti astratti nella costruzione dei propri asserti sul mondo, ma il rapporto tra tali enti e il mondo è del tutto *indiretto*, ed è indiretto perché è *globale*, nel senso che l'*intera* rete di tutti gli asserti della teoria (asserti che, in generale, fanno appunto uso degli enti astratti) è in rapporto (predittivo ed esplicativo) con l'*intero* mondo dei fenomeni considerati.

Il *singolo* ente astratto non ha la funzione di *rappresentazione* di *un* dato oggetto, realtà o fenomeno del mondo, ma è importante in quanto parte di uno (o più) asserti, i quali, assieme agli altri asserti della teoria, ci consentono determinate previsioni sul mondo e dunque rendono anche possibile la corroborazione empirica della teoria medesima.

Tale corroborazione empirica convalida così l'affidabilità delle nostre credenze matematiche (come credenze che riguardano un genere particolare di enti astratti, quelli matematici) in un *modo* e in un *senso* completamente diversi da quelli della convalida di determinate *rappresentazioni* mentali di *singoli* oggetti o fenomeni naturali.

Per Quine, e per tutti i sostenitori di una visione olistica improntata a principi analoghi, l'uomo vive immerso in un flusso di sensazioni a cui cerca di *dare una forma* ed una *struttura* (un flusso che cerca di *sagomare*, potremmo dire in termini più immaginifici) costruendo delle entità teoriche che trovano la loro giustificazione (epistemologica e, per conseguenza, ontologica) in un **procedimento di conferma empirica che ha carattere olistico** (nel senso che è stato sopra chiarito). Per quanto riguarda specificatamente gli enti matematici, la tesi olistica impone che la conferma empirica dell'esistenza di tali enti (e delle proprietà che di essi vengono affermate dagli asserti contenuti nelle teorie matematiche) vada ottenuta cercando di validare (empiricamente, appunto) l'intero complesso del sapere scientifico (nei suoi concetti matematici e nelle sue ipotesi fisiche).

La Matematica, in questo senso, può essere dunque definita una scienza *empirica* (dal momento che la sua conferma è a tutti gli effetti sperimentale).

Tale riconoscimento del carattere empirico della conoscenza matematica è, tuttavia, di genere piuttosto diverso da quello della tradizione empirista classica (si pensi, ad esempio, a J. S. Mill).

L'interpretazione empirista classica della Matematica, infatti, guardava ai teoremi matematici come a vere e proprie leggi naturali che potevano essere trovate osservando il comportamento di oggetti fisici concreti ed insiemi di tali oggetti sottoposti a determinate *operazioni* (nel senso procedurale-materiale del termine *operazione*).

Per Mill, ad esempio, le leggi dell'addizione dei numeri naturali potevano essere ottenute

analizzando ciò che avviene quando vengono riassemblati nello stesso raggruppamento due o più insiemi (prima separati) di oggetti fisici.
Ciò che mancava alla tesi empirista classica sulla Matematica era la considerazione di enti ed asserti matematici *assieme* alle teorie scientifiche sul mondo naturale nell'ambito delle quali tali enti ed asserti sono utilizzati.
Abbiamo visto, discutendo lo statuto epistemologico delle proposizioni della geometria, come Poincaré e i convenzionalisti siano stati tra i primi a individuare il profondo legame logico e filosofico tra geometria (e quindi matematica), da un lato, e fisica, dall'altro, e come la Relatività Generale utilizzi tale intuizione per arrivare ad una descrizione (in termini di geometria dello spaziotempo, appunto) del campo gravitazionale dotata della proprietà, considerata auspicabile ed anzi autenticamente irrinunciabile, di essere coerente con il Principio di Equivalenza (cioè con la Relatività galileiana generalizzata).
Mentre la visione convenzionalista, pur mettendo in evidenza la traducibilità di importanti leggi fisiche in un linguaggio geometrico, lasciava comunque la *libertà* di decidere sulla geometria (euclidea o non euclidea) da adottare, *scaricando* le eventuali necessità di modifica della teoria (necessità dovute ad una possibile futura falsificazione empirica) su altri assunti (quelli più prettamente fisici), Einstein, con l'elaborazione della Relatività Generale, faceva leva proprio sulla modifica degli assiomi della geometria per risolvere il citato problema di una descrizione relativisticamente consistente del campo gravitazionale.
Abbiamo visto, nel Cap. 3, le ragioni (epistemologicamente molto forti, proprio alla luce del paradigma della confermabilità empirica delle teorie scientifiche) per una tale opzione che investe direttamente enti e proprietà geometrici (e quindi matematici), sui quali l'elaborazione teorica einsteiniana determina quindi la *necessità* di un impegno ontologico chiaro e fondato proprio sulla conferma empirica olistica della teoria fisico-matematica della Relatività Generale nella sua globalità (con le ipotesi fisiche, da un lato, e gli assunti della matematica coinvolta, dall'altro).
Situazioni simili (riguardanti altri enti e proprietà matematici) sono state evidenziate discutendo l'*indispensabilità* sia nella fisica classica (vedi l'uso della probabilità in meccanica statistica), sia nella fisica quantistica, sia nella Teoria della Relatività ristretta.
Tutti questi esempi mettono in rilievo il fatto che la Matematica ha un carattere *empirico*, in quanto viene confermata (mediante il metodo dell'osservazione, appunto, empirica) nel

contesto del controllo sperimentale delle scienze della natura che la utilizzano indispensabilmente.

Il carattere empirico, così inteso, degli asserti matematici fa di questi un *corpus* di conoscenze che, esattamente *come* la fisica e *assieme* alla fisica, modellizza la realtà fenomenica.

Non vi è, in ultima analisi, alcuna differenza di principio tra asserti matematici e asserti fisici. Entrambe le categorie di proposizioni partecipano alla costruzione di un sistema teorico in cui il ruolo dell'una e quello dell'altra sono inestricabilmente intrecciati.

L'unica differenza che possiamo plausibilmente individuare (sulla base dell'esame del modo in cui le teorie fisiche effettivamente sviluppate nella storia della scienza moderna sono concretamente articolate) tra le due classi di asserti consiste nel fatto che gli asserti che chiamiamo *matematici* partecipano alla modellizzazione della realtà *ad un livello più profondo* rispetto agli asserti cosiddetti *fisici*.

Per usare le parole di Quine, le proposizioni matematiche (assieme ai principi della Logica) occupano la *regione centrale* della struttura del sapere scientifico, mentre le leggi fisiche si collocano in *zone* decisamente più *periferiche*.

E' questo il motivo per cui *ogni* cambiamento della descrizione matematica *profonda* del mondo (si pensi alla modifica della metrica dello spaziotempo in Relatività Generale) genera *diverse* conseguenze di carattere fisico in ambiti fenomenici anche ben distinti tra loro (rimanendo all'esempio della Relatività Generale, la modifica della metrica spaziotemporale consente di prevedere *sia* la deflessione della luce dovuta alla forza attrattiva esercitata da un corpo molto massivo *sia* la dilatazione temporale gravitazionale).

La conferma sperimentale di tali ben distinte conseguenze fisiche dà così motivo per preferire *il* mutamento della descrizione matematica profonda a cambiamenti (più o meno radicali) di *diverse* leggi fisiche specifiche riguardanti i *diversi* ambiti fenomenici in questione.

Se, dunque, la Matematica viene considerata nel complesso dell'edificio del sapere scientifico sul mondo della natura, allora si scopre che gli assunti matematici *dipendono dai fenomeni* (dal centro della struttura del sapere scientifico essi determinano la forma specifica delle leggi fisiche che regolano molti ambiti fenomenici distinti).

Un altro esempio molto istruttivo di tale carattere *sperimentale* ed *osservativo* della

Matematica è dato da un tipico fenomeno quantistico.

Una delle proprietà più importanti (e peculiari) dei sistemi quantistici è il carattere discreto dello spettro dei valori possibili della loro energia (se ne è parlato a proposito dell'oscillatore armonico e del campo elettromagnetico quantizzati).

Abbiamo messo in rilievo (vedi Cap. 2) che, da un punto di vista teorico, tale carattere discreto è una conseguenza dell'utilizzo di operatori lineari sullo spazio di Hilbert del sistema, operatori che vengono fatti corrispondere alle grandezze fisiche che caratterizzano la dinamica del sistema stesso (tra queste grandezze, ovviamente, vi è l'energia).

I valori che potranno essere concretamente misurati per una data grandezza fisica sono rappresentati dagli autovalori dell'operatore corrispondente alla grandezza in oggetto.

L'insieme di tali autovalori è in generale discreto.

Di qui la quantizzazione dei livelli energetici di un oscillatore o di un atomo (la quantizzazione delle energie emesse o assorbite, attraverso la radiazione elettromagnetica, da un atomo che compie un salto di livello energetico fu proprio il *rompicapo* che stimolò la nascita della teoria quantistica).

A cosa è dovuta, dunque, la capacità della teoria di prevedere le energie quantizzate?

Evidentemente all'uso di operatori lineari su spazi vettoriali (si ricorderà che gli spazi di Hilbert sono spazi vettoriali).

Pensare ad un impiego meramente strumentale dell'algebra degli operatori (e, contestualmente, degli stessi vettori di stato dello spazio di Hilbert) non riflette l'effettiva costruzione della struttura teorica della Meccanica quantistica.

L'applicazione dei principi della teoria quantistica a sistemi fisici *del tutto generali* trova nella *meccanica delle matrici* (e quindi di operatori e spazi di Hilbert) di Heisenberg un livello di formalizzazione che non è evitabile.

L'approccio di Schroedinger della *meccanica ondulatoria* non è adatto a trattare sistemi delle più svariate tipologie, essendo nato per spiegare (tramite la funzione d'onda) la dinamica dell'elettrone in orbita attorno al nucleo nell'atomo di idrogeno.

Ancora una volta, dunque, la descrizione *del tutto generale* di un certo fenomeno fisico, in questo caso la quantizzazione dei valori di una grandezza fisica (*in primis* l'energia, ma anche altre importanti grandezze come il momento angolare), è *generata* da un apparato matematico e dallo specifico *contenuto conoscitivo* che esso porta con sé.

Il grande fisico F. J. Dyson, in *Mathematics in the physical sciences* (1964), scrive:

La matematica non è meramente uno strumento per mezzo del quale si possono calcolare le proprietà dei fenomeni; ***essa è la sorgente principale dei concetti e dei principi*** *per mezzo dei quali si possono creare nuove teorie.*

E' da tener presente che proprio il fatto che il contenuto conoscitivo profondo dei concetti e dei principi utilizzati dalla scienza è di natura matematica rende possibile confermare (o falsificare) sperimentalmente le teorie matematiche su cui i costrutti teorici della scienza empirica sono basati.
Da tale conferma sperimentale discende l'impegno ontologico nei confronti degli enti matematici, e dobbiamo senz'altro notare come il fatto che la Matematica sia utilizzata (come è ormai da più di un secolo) in teorie fisiche *profonde* e *sofisticate* (che necessitano di teorie matematiche *molto forti*, ovvero con *ontologie molto ricche*, ben più ricche – certamente - di quella della teoria dei numeri naturali cui faceva riferimento Mill) determini un chiaro impegno ontologico verso uno **spettro molto ampio di enti matematici** (ben oltre i naturali: si pensi soltanto ai reali, alle funzioni, agli insiemi in tutta la gamma delle loro strutture algebriche e geometriche).
Va anche sottolineato, per concludere con un aspetto – a parere di chi scrive – di non secondaria importanza, che il mutamento (in fatto di ontologia degli enti matematici) generato dalla considerazione olistica della matematica nella sua compartecipazione alla strutturazione teorica della fisica (e in particolare della fisica del Novecento e contemporanea) è un mutamento non soltanto *quantitativo* (impegno ontologico verso *più* enti), ma anche *qualitativo*, nel senso che i *bisogni teorici* della fisica attuale sono bisogni di livello concettuale molto alto, che soltanto teorie matematiche estremamente *astratte* e formalmente molto raffinate possono soddisfare.
Ancor più, dunque, considerando tale aspetto, risulta chiara la necessità di assumere l'esistenza di enti *astratti* (provenienti dalle teorie matematiche utilizzate) e non semplicemente di impiegare tecniche *operative* (come i cambiamenti di raggruppamento di oggetti fisici descritti da Mill) finalizzate al *calcolo delle proprietà dei fenomeni* (come lo chiama Dyson).

La fisica attuale non necessita soltanto di una *pratica* matematica più o meno spiegabile in termini di operazioni *concrete* (i raggruppamenti di Mill o altre simili tecniche escogitate dalle concezioni nominaliste), ma rivela, anche e soprattutto, la profonda esigenza di *forti impegni teorici* sui concetti matematici che essa utilizza indispensabilmente.
Ed è difficile (se non, francamente, impossibile) pensare ad una *fondatezza di principio* di tale ingente investimento teorico se non sulla base di una chiara ontologia che includa anche quegli enti *astratti* (gli oggetti matematici) sui quali soltanto è possibile far poggiare il *rigore* e la *generalità* degli impegni teorici (sui concetti, i postulati e i metodi matematici impiegati) di cui la fisica contemporanea ha bisogno.

4.4 L'obiezione di Balaguer. Causalità contro indispensabilità?

L'obiezione avanzata dal filosofo Mark Balaguer si focalizza sulla questione dell'assenza di poteri causali degli enti matematici (in quanto enti astratti) seguendo una linea che, come si vedrà, è interessante in sé da discutere per il problema dell'epistemologia e dell'ontologia del principio di causalità che è implicito in essa.
In *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics* (1998) Balaguer definisce in modo molto chiaro la sua concezione filosofica della scienza empirica, affermando che tutto quello che una data teoria scientifica cerca di dire sul mondo della natura si esaurisce nel suo contenuto nominalistico.
Tutti i mezzi *astratti* (entità teoriche, oggetti matematici, etc.) che essa utilizza per costruire il proprio dispositivo previsionale riguardo ai fenomeni naturali non sono altro che *strumenti* linguistico-concettuali di nessun valore ontologico.
E ciò fondamentalmente per via dell'*assenza di poteri causali degli enti astratti*.
L'argomentazione di Balaguer si articola, a partire da tale assunto (l'assenza di poteri causali degli enti astratti, e degli enti matematici in particolare), nei seguenti tre punti:

1. il comportamento del mondo fisico non dipende in alcun modo dall'esistenza degli enti matematici (dal momento che tale comportamento è influenzato soltanto da entità con poteri causali);

2. dunque tutto ciò che la scienza empirica afferma sul mondo fisico, posto che sia vero, continuerebbe ad esser vero anche se non esistessero enti matematici;

3. si deve pertanto concludere che, sulla base dell'utilizzo della matematica nella scienza empirica, non vi è alcuna ragione per un impegno ontologico nei confronti degli enti matematici.

In effetti, l'argomento della non-dipendenza del mondo dall'esistenza degli enti matematici è già stato discusso in questo lavoro, mettendo in evidenza come le conseguenze fisiche degli assiomi di una teoria scientifica siano in realtà dipendenti dalla matematica che si decide di utilizzare per derivare tali conseguenze, tant'è che questo aspetto di connessione tra matematica e risultati empirici di una teoria fisica può essere utilizzato per controllare sperimentalmente la validità degli asserti matematici (se si assume un'ottica olistica *à la Quine*).
Se, come personalmente ritengo, tale ragionamento è corretto, la conclusione (non accettabile) dell'argomentazione di Balaguer deve essere dovuta alla non adeguatezza dell'ipotesi iniziale che afferma il comportamento del mondo fisico essere *influenzato* soltanto da entità con poteri causali.
A parere di chi scrive, se si ritiene non adeguata tale ipotesi, esistono due possibili *strade*:

a. criticare il concetto di *influenza*: cosa vuol dire che il comportamento del mondo fisico è *influenzato* soltanto da entità con poteri causali? In che modo la conoscenza empirica del comportamento del mondo fisico determina la conoscenza (e l'impegno ontologico) su di un ente? In altre parole qual è il corretto modello della conoscenza di un ente? E' adeguata la *teoria causale della conoscenza* (di un ente)?

b. spostare la questione, come abbiamo detto all'inizio di questo paragrafo, sul problema dell'epistemologia e dell'ontologia del principio di causalità.

La prima opzione - si ricorderà - è stata già valutata analizzando, nella prospettiva

dell'olismo quineano, il processo della conoscenza scientifica in termini di validazione empirica *globale* di un'*intera* teoria o *set* di postulati (tra cui quelli che riguardano l'esistenza degli enti che costituiscono l'ontologia della teoria), giungendo alla conclusione della non adeguatezza della *teoria causale della conoscenza.*
La seconda opzione affronta il problema, per così dire, da un punto di vista diverso.
Ammettendo infatti che, *in un qualche senso*, i poteri causali degli enti siano importanti nell'elaborazione della conoscenza (e dell'annessa ontologia) del mondo naturale, ci si deve chiedere *di quale causalità* (con quale significato di questa categoria linguistica, ovvero con quale contenuto specifico del concetto corrispondente) *si sta effettivamente parlando*. Come intendiamo la causalità in fisica? Tale principio di connessione tra due eventi ha, per come lo concepiamo nelle scienze della natura, un ruolo plausibile nella determinazione dell'esistenza di un ente?
Un adeguato ed esauriente approfondimento del tema della causalità nei fenomeni naturali aprirebbe una discussione fin troppo ampia per le necessità di analisi logica e filosofica del problema poste dagli scopi del presente lavoro.
E' tuttavia opportuno delineare qui i termini fondamentali del dibattito su questo tema, il cui chiarimento è indispensabile per rispondere al quesito teorico sull'ineludibilità dell'impegno ontologico sugli oggetti matematici motivato dall'uso della matematica nella conoscenza scientifica.

4.5 Il principio di causalità nelle scienze della natura.

La questione dello statuto epistemologico del principio di causalità è uno dei temi più dibattuti della filosofia della scienza contemporanea.
Molta epistemologia attuale e, in generale, dell'ultimo secolo ha messo in evidenza come gli sviluppi del sapere scientifico del Novecento abbiano fortemente problematizzato la nozione di causa, fino, secondo alcuni importanti filosofi della scienza della nostra epoca, a renderla *sorpassata* e *desueta*.
Secondo tali autori il concetto di causa è stato di fatto sostituito (in scienza) dall'idea di *dipendenza nomologica* e *funzionale*, con l'evidente conseguenza di *svuotare* il principio di

causalità del suo tradizionale contenuto metafisico e di ridurlo ad una mera indicazione metodologica ed epistemica.

La riflessione che ha portato ad una tale conclusione si ricollega, a ben guardare, all'opera di un autore pienamente inserito nella tradizione, David Hume.

L'analisi humeana della causalità costituisce un punto di svolta nella storia dell'epistemologia occidentale e vale pertanto la pena soffermarvisi, anche allo scopo di comprendere adeguatamente i termini del dibattito attuale sul tema.

Il filosofo britannico si propone di definire la natura del nesso causale tra due eventi, muovendo dall'analisi delle caratteristiche degli eventi medesimi e cercando di individuare se vi è la possibilità di *dedurre logicamente*, a partire dalle caratteristiche dell'evento *causa*, quelle dell'evento *effetto* (nonché, ovviamente, lo stesso *darsi* dell'effetto).

Tale analisi porta inevitabilmente alla conclusione che questo tipo di deducibilità, in realtà, non sussiste.

E' impossibile, ad esempio, dedurre dalle proprietà di colore e consistenza delle nuvole in cielo (nuvole, poniamo nel nostro esempio, molto scure e dense) il fatto che pioverà in modo abbondante. Non vi è, infatti, alcuna connessione tra i concetti che corrispondono alle proprietà di colore e consistenza delle nuvole e il concetto di abbondanza della pioggia che ha origine da quelle condizioni atmosferiche.

Ciò che di fatto genera l'idea di un nesso causale tra le due circostanze descritte (quella che in cielo sono presenti nuvole grigie e dense e quella che si ha un'abbondante precipitazione) è il fatto che noi siamo *abituati* a riscontrare una *congiunzione regolare* tra le due circostanze, in parole povere il fatto che quando è presente la prima circostanza è presente anche l'altra.

La concezione humeana della causalità è una concezione *regolarista* basata sull'*abitudine*.

Avere l'idea di un certo nesso causale tra due eventi o circostanze (o condizioni) *non vuol dire* in alcun modo *avere conoscenza* del fatto che i due eventi in questione abbiano in comune *qualcosa* (una proprietà, una caratteristica, ...) che giustifichi l'occorrenza dell'effetto a seguito di quella della causa.

Tutto ciò che il soggetto umano è in grado di fare, in realtà, è soltanto osservare *ripetutamente* l'occorrenza dell'effetto *dopo* quella della causa (*congiunzione regolare* di causa ed effetto) e, sulla base dell'*abitudine* (intesa come tendenza di carattere psicologico e disposizionale), formarsi l'idea di un *legame necessario* tra i due eventi.

Ma per Hume tale necessità *non è* una necessità *logica*: essa è soltanto il risultato, per così dire, della *fissazione* psicologica della *congiunzione regolare* dei due eventi che individuiamo come causa ed effetto.

E' ben noto che, successivamente, Kant, nella grande sintesi di empirismo e razionalismo che costituisce il motore e l'asse concettuale fondamentale della sua impostazione gnoseologica, contestò la concezione humeana, pur salvandone alcuni importanti elementi.

Le due esigenze principali alla base dello sviluppo del criticismo kantiano sono, da un lato, l'istanza di ricondurre il processo conoscitivo all'*esperienza* (esigenza empirista), dall'altro il bisogno irrinunciabile, se si vuole *salvare* il carattere *universale* della conoscenza (esigenza razionalista), di fondare in modo sicuro i giudizi della scienza su di uno *schematismo a priori* dell'intelletto.

Lo *schema* fornito dal principio di causalità costituisce per Kant una delle chiavi di volta (forse la principale) per dare della conoscenza scientifica una descrizione che contemperi ad un tempo l'esigenza empirista di *ancorare* il processo conoscitivo ai dati dell'esperienza sensibile e, insieme, il principio razionalista che vede nella rappresentazione scientifica dei fenomeni naturali un'attività che si svolge secondo strutture intellettuali *a priori* ed è pertanto capace di generare una conoscenza di carattere *universale*.

La causalità, nell'impostazione kantiana, non può pertanto derivare dall'*abitudine*, in quanto tale aspetto dell'attività mentale del soggetto umano non è in grado di giustificare proprio il carattere universale della conoscenza.

L'*osservazione ripetuta* dell'occorrenza congiunta di due eventi (metodo induttivo) non può portare ad istituire un *legame necessario e universale* tra gli eventi medesimi, visto che l'induzione non ha alcun carattere di vera e propria necessità.

L'*aprioricità* (e dunque il carattere *trascendentale*, in quanto attinente ai modi, ad un tempo propri del soggetto umano e universali, secondo cui gli uomini conoscono) della categoria della causalità non esclude che, in concreto, per stabilire un nesso causale particolare tra due specifiche circostanze o condizioni fisiche, si operi attraverso l'induzione, raccogliendo un campione numericamente significativo di occorrenze congiunte effettive.

Ma, nell'ottica kantiana, il lavoro (indispensabile, nella pratica scientifica concreta) sui casi particolari non legittima l'idea che il nesso causale che lo scienziato intende individuare e definire attraverso una legge fisica sia soltanto l'espressione di una generalizzazione *per abitudine* di molti casi particolari di occorrenza congiunta.

Il carattere *a priori* e trascendentale del principio di causalità resta necessario, per Kant, per individuare e qualificare una generalizzazione come connessione causale vera e propria, cioè come congiunzione universalmente necessaria.

Nella misura in cui, tuttavia, lo stesso Kant, in diversi passi della sua opera, sembra distinguere tra leggi causali *particolari* (quelle concretamente elaborate nell'effettiva pratica scientifica) e vere leggi causali *universali*, il problema dell'interpretazione della concezione kantiana del principio di causalità resta aperto.

Nello specifico, quello che qui interessa mettere in evidenza è come, anche ammettendo il carattere *a priori* della causalità, la possibilità di attribuire ad un nesso causale *particolare* un contenuto che vada al di là della semplice connessione *nomologica* (la *dipendenza funzionale* stabilita dalla legge fisica) resta piuttosto dubbia.

L'attacco di Hume alla metafisica della causalità provoca la ridefinizione kantiana del problema, basata sul trascendentale e quindi sull'individuazione di forme *a priori* della conoscenza umana che giustifichino (nell'ottica dell'*universalità* del sapere scientifico) l'utilizzo concreto del principio di causa-effetto, e, con tale ridefinizione, l'approdo ad una *metafisica descrittiva* che rende conto (non più sulla base di un razionalismo di tipo classico, ma su base, appunto, trascendentale) del carattere fondante della causalità per il procedere della ricerca scientifica.

Ma l'idea che tale metafisica descrittiva possa realmente indicare nella causalità qualcosa di sostanzialmente diverso dalla *spiegazione* in termini di *leggi* (e condizioni specifiche in cui applicare tali leggi) costituisce una visione attualmente contestata e, a parere di chi scrive, priva di un fondamento sicuro.

Ha scritto il grande epistemologo Kuhn nel suo denso saggio *La tensione essenziale* (1977):

Il concetto ristretto di causa, benché sia stato una parte vitale della fisica dei secoli XVII e XVIII, ha visto declinare la sua importanza nel XIX ed è praticamente scomparso nel XX. [...] La struttura della spiegazione fisica ha una notevole somiglianza con quella che Aristotele aveva sviluppato nella sua analisi delle cause formali. [...] La causa in fisica è di nuovo diventata causa in senso ampio, cioè spiegazione.

Quello che Kuhn indica in questo passo come *il concetto ristretto di causa* si può certamente identificare con l'idea di *causa efficiente* della tradizione aristotelica e medievale, mentre lo stesso Kuhn effettua poi nel brano citato un interessante accostamento tra la *causa formale* (anche questa di aristotelica memoria) e la spiegazione scientifica moderna e contemporanea, soprattutto a partire dall'Ottocento.

Ma dire che si è passati, nell'evoluzione della scienza degli ultimi due secoli, dal concetto di causa efficiente a quello di causa formale, ovvero alla spiegazione in termini di leggi e condizioni, equivale in ultima analisi a dire che la causalità nelle scienze della natura è soltanto un modo, diverso sotto il profilo esclusivamente linguistico ma concettualmente identico, di indicare l'essere governati (da parte della natura e dei suoi fenomeni) da leggi che hanno il carattere dell'universalità e della necessità, ovvero da quelle che vengono solitamente denominate *leggi fisiche* o *leggi di natura*.

E' evidente che la nozione di legge, che, da un punto di vista formale matematico, si sostanzia nel concetto di *dipendenza funzionale*, non contiene alcun riferimento ad un'idea *metafisicamente forte* di causalità *in senso stretto*, o, detto in altri termini, alla nozione di *causa efficiente*, essendo una legge fisica soltanto l'espressione della dipendenza (attraverso una funzione matematica che lega tra di loro i valori di due grandezze fisiche) di una circostanza o condizione fenomenica da un'altra.

Se, pertanto, dalla presente disamina dell'idea di causalità risulta (come il sottoscritto ritiene) che il fondamento del concetto di *causa efficiente* come concetto *preso a sé stante* (cioé indipendentemente dalla *causa formale* e dunque dalla *spiegazione*) e metafisicamente significativo sia dubbio se non addirittura chiaramente inesistente, altrettanto infondata risulta, sempre a parere di chi scrive, l'idea di *poteri causali* degli enti che costituiscono l'ontologia implicata dalle nostre migliori teorie scientifiche.

Quale possibilità vi è dunque di basare la nostra descrizione del processo conoscitivo (la nostra *epistemologia*) sulla teoria causale della conoscenza, che dei poteri causali degli enti con cui il soggetto conoscente entra in rapporto fa il proprio fondamento logico e filosofico?

Credo nessuna, a meno di non volere intendere appunto il concetto di causa in un senso estremamente ampio.

Ma in tal caso il contenuto precipuo della teoria causale della conoscenza si dissolverebbe, lasciando il posto ad un'idea (quella della conoscenza come spiegazione per mezzo di leggi) che non fa alcun riferimento a supposti poteri causali degli enti del mondo naturale e pertanto non è in alcun modo in conflitto con la visione secondo cui gli enti astratti (in ogni caso non dotati di poteri causali) sono accessibili al soggetto umano e dunque conoscibili.

Allo scopo di esemplificare concetti ed aspetti teorici chiave di questa esposizione specificatamente dedicata alla questione della causalità nella scienza e, di riflesso, nelle nostre concezioni epistemologiche, illustrerò un esempio tratto dalla Teoria della Relatività Generale.

Si è già accennato al fatto che l'equazione di campo di Einstein, legge fondamentale della suddetta teoria, lega la metrica (ovvero la curvatura) dello spaziotempo (e quindi, in termini newtoniani, la vecchia forza di gravità) alla distribuzione spaziale (ad un certo istante) della densità di massa-energia.

Tale legge può, ad un primo approccio, essere facilmente (e superficialmente) interpretata in termini di causalità efficiente, ritenendo che essa affermi che la distribuzione spaziale della massa-energia determini causalmente il campo gravitazionale.

Ma, entrando più nel dettaglio tecnico matematico, non si può trascurare il fatto che, nella stessa definizione del tensore T_{ab} che esprime la distribuzione spaziale della massa-energia, figura esplicitamente il tensore metrico g_{ab}.

Ciò significa che non possiamo risolvere l'equazione (tensoriale) di Einstein specificando *prima* T_{ab} e *poi* g_{ab}, cioè (come ci si aspetterebbe in presenza di un vero nesso causale) *prima* la supposta causa (la distribuzione spaziale della massa-energia, matematicamente T_{ab}) e *poi* il supposto effetto (la metrica dello spaziotempo, matematicamente g_{ab}).

Le 10 equazioni scalari che scaturiscono dall'equazione tensoriale di Einstein devono in realtà essere risolte *simultaneamente* in T_{ab} e g_{ab}, il che ci fa comprendere in modo inequivocabile come la legge in questione *non* esprime il fatto che T_{ab} *causa* g_{ab} (la distribuzione della materia *causa* la curvatura dello spaziotempo, o, se si preferisce, il campo gravitazionale).

Piuttosto che un nesso causale in senso stretto, la legge fondamentale della Relatività Generale esprime quindi una *dipendenza funzionale reciproca* (una *correlazione*) tra distribuzione spaziale della massa-energia e curvatura dello spaziotempo.

E' questo un caso in cui il carattere prettamente nomologico delle leggi fisiche emerge in modo netto e lampante (per via del fatto che i due tensori T_{ab} e g_{ab} sono *parimenti* incognite dell'equazione di campo, sottoposte ad una *dipendenza mutua*, per così dire, *inestricabile*); e inoltre chi scrive ritiene che, in ultima analisi, pressocché la totalità delle leggi fisiche è meglio interpretata sulla base di un'ottica nomologica piuttosto che causale *in senso stretto*.

Naturalmente, il dibattito sulla causalità dai tempi di Hume fino ai nostri giorni non vede soltanto la presenza della concezione *regolarista* di ascendenza, appunto, humeana.

La concezione cosiddetta *singolarista*, la cui origine può essere fatta risalire a John Locke, ha conteso (e tuttora contende) il campo alla visione regolarista.

Se per il regolarista la causalità può essere completamente compresa in termini di congiunzione costante (o *successione regolare*) tra due tipologie di eventi, per il singolarista la relazione causale sussiste primariamente per una *singola* coppia di eventi, essendo la regolarità della successione tra coppie di eventi dello stesso tipo soltanto un corollario dell'esistenza della singola relazione causale che esemplifica il legame regolare e costante che può essere riscontrato per una certa classe di coppie di eventi.

In tempi recenti, la concezione singolarista è stata ripresa da Curt J. Ducasse, il quale, in un articolo del 1926 (*On the Nature and Observability of the Causal Relation*), ha difeso un'idea di causalità molto vicina al senso comune e, per ciò stesso, di stampo singolarista.

Per Ducasse, la singola relazione causale è già di per sé osservabile e le leggi non sono altro che generalizzazioni di connessioni tra eventi che sono già state riconosciute come causali.

Su di un'idea come questa, che attribuisce (sotto opportune condizioni) ad una singola relazione tra due eventi un carattere (quello della causalità) che può essere chiaramente distinto da tutte le proprietà degli oggetti coinvolti nella relazione stessa, diversi autori (anche contemporanei) fondano il concetto di *potere causale* (di un oggetto o ente del mondo fisico).

Attraverso tale concetto, si è tentato di recuperare, in qualche modo, il contenuto *metafisico forte* della causalità efficiente. Ma, ovviamente, un recupero (logico e filosofico) di questo tipo può darsi soltanto all'interno di una prospettiva singolarista. E una tale prospettiva, d'altra parte, deve far fronte a notevoli difficoltà.

La principale di tali difficoltà risiede proprio nel già citato problema della distinguibilità del carattere causale di una relazione tra eventi dalle proprietà degli enti che partecipano al determinarsi di tali eventi. E' chiaro, infatti, che, se il carattere causale può essere ridotto a proprietà di altro genere (degli oggetti fisici), non vi è la possibilità di qualificare una *singola* connessione tra eventi come causale. L'unica possibilità che rimarrebbe per continuare a descrivere i fenomeni fisici in termini causali sarebbe quella basata sulla *ricorrenza* di un certo tipo di connessione (in sé consistente, ad un livello più fondamentale, in un diverso genere di relazione, coinvolgente, in realtà, proprietà degli oggetti fisici distinte dai supposti poteri causali della concezione singolarista). Ma il criterio della *ricorrenza* (per individuare una data tipologia di relazione come causale) rimanderebbe inevitabilmente alla tesi regolarista, mettendo fuori gioco il carattere causale della singola connessione tra eventi naturali basato sul concetto di potere causale di un ente.

La non riducibilità del carattere causale a proprietà di altro genere costituisce tuttavia un grande problema dell'attuale dibattito filosofico sulla causalità, sul quale l'accordo tra epistemologi, ontologi e filosofi della scienza di vario orientamento non è affatto unanime.

Chi scrive ritiene che la possibilità di distinguere in modo chiaro tra carattere causale e proprietà non causali sia fuori della portata del discorso scientifico, che, lo ripetiamo, si sviluppa sempre attraverso l'individuazione di leggi che mettono in relazione grandezze, ovvero *proprietà* misurabili, relative agli enti fisici coinvolti nei fenomeni di interesse.

E ovviamente, tra tali proprietà misurabili, non ve ne è alcuna specificatamente causale.

Il dibattito filosofico degli ultimi decenni ha rimesso al centro della riflessione epistemologica anche la questione della relazione tra necessità e causalità.

Anche su questo tema regolarismo e singolarismo si confrontano con tesi significativamente diverse.

Mentre i regolaristi tendono a considerare la necessità come una conseguenza della ricorrenza costante della successione tra due eventi appartenenti a due tipologie determinate, privando la singola relazione causale di un intrinseco carattere di necessità, i singolaristi sono invece più portati a guardare al legame di causazione in sé stesso come ad una forma, per quanto specifica e con caratteri tutti suoi particolari, di connessione necessaria.

E' interessante però notare come proprio l'aspetto della necessità del rapporto di causazione costituisca una difficoltà non indifferente per l'analisi singolarista, al punto che proprio la riflessione della singolarista Elizabeth Anscombe sul problema mostra, a parere del sottoscritto, l'impossibilità di caratterizzare il legame causale come necessario, privando ancora una volta l'idea di causa di un elemento molto importante (per non dire essenziale)

del suo contenuto metafisico tradizionale.
Scrive E. Anscombe in *Causality and Determination* (1971):

la necessità sarà quella delle leggi di natura; attraverso di essa noi saremo in grado di derivare una conoscenza dell'effetto dalla conoscenza della causa, o viceversa, ma questo non ci mostra la causa come fonte dell'effetto. La causalità non deve dunque essere identificata con la necessitazione.

In tale illuminante passo, la Anscombe mette in evidenza il fatto che il carattere della necessità va attribuito alle leggi naturali, il che, se da un lato ci garantisce le virtù predittive della scienza ("... noi saremo in grado di derivare una conoscenza dell'effetto dalla conoscenza della causa ..."), da un altro (ovvero da un punto di vista meno strumentale e più strettamente metafisico) non ci chiarisce affatto lo *status* ontologico del rapporto di causazione, poiché "... non ci mostra la causa come *fonte* dell'effetto ...".
La filosofa britannica conclude che, pertanto, la causalità non può essere identificata con la necessitazione.
Tali considerazioni mostrano in modo molto chiaro, a parere del sottoscritto, la grande difficoltà (se non la vera e propria impossibilità) ad attribuire alla relazione causale un ben definito contenuto che la distingua con chiarezza da tutte le altre tipologie di relazione tra eventi naturali.
Va menzionata, infine, l'articolazione teorica sul rapporto di causa-effetto sviluppata dal filosofo americano Wesley C. Salmon, anch'essa volta al recupero del ruolo della nozione di causa nel resoconto epistemologico della scienza moderna e contemporanea.
Salmon parte dalla sostituzione del classico concetto di *evento* con quello di *processo*. Per lui, mentre il concetto di evento (accadimento essenzialmente discreto, di cui si considera come praticamente nulla la durata temporale e che non possiede nemmeno una estensione spaziale che abbia un qualche ruolo nella descrizione filosofica del rapporto di causazione) porta a pensare la relazione causale come qualcosa che si determina *puntualmente* nello spaziotempo, il concetto di processo induce una rappresentazione (più realistica per il filosofo statunitense) del legame di causa-effetto come la trasmissione di un'*influenza causale* attraverso una *regione estesa* del continuo spaziotemporale.

In *Probabilistic Causality* (1980) e *Causality: Production and Propagation* (1981), Salmon espone una teoria piuttosto ampia del rapporto di causazione che tenta di descrivere la natura intrinseca dei processi causali intendendoli come *processi causali individuali*, al di là della caratterizzazione regolarista della causalità in termini di congiunzione costante o successione regolare.

Per il filosofo americano, un processo individuale *genuinamente* causale si distingue (da altri processi fisici, i cosiddetti *pseudoprocessi*, che non supportano la propagazione di *autentiche* influenze causali) grazie al fatto che esso è in grado di trasmettere un *marchio*, ovvero un segnale (intuitivamente potremmo pensare, ad esempio, ad un segnale elettromagnetico) capace di mantenere nel tempo un'eventuale modificazione del processo stesso.

L'idea salmoniana originaria del processo causale che ho appena esposto è andata incontro a diverse critiche, concernenti soprattutto il carattere di *uniformità* del processo causale autentico *prima* dell'introduzione del marchio (in assenza di interazioni locali) e, con una modificazione che ha anch'essa la caratteristica di mantenersi stabile nel tempo, *dopo* l'introduzione del marchio.

Il vincolo di uniformità dei processi genuinamente causali dell'originaria teoria di Salmon è stato infatti considerato inadeguato nella descrizione di molti di quelli che, sia nel linguaggio comune che nell'ordinaria pratica scientifica, consideriamo (intuitivamente) come genuini processi causali.

Il filosofo americano ha così, negli anni successivi, modificato il proprio criterio di individuazione dei processi genuinamente causali, affermando che tali processi possono essere distinti dagli pseudoprocessi in quanto trasmettono alcune grandezze fisiche che si conservano (l'energia meccanica, il momento angolare, etc.).

Ma anche questa visione va incontro, a parere del sottoscritto come di diversi importanti autori attuali (vedi, per esempio, Federico Laudisa), a diverse difficoltà non certo da poco, soprattutto in ordine al rapporto tra causazione e leggi naturali.

In tale impostazione, infatti, il processo genuinamente causale è definito sulla base di leggi fisiche di conservazione. Ciò significa che, se una legge fisica non è altro che una generalizzazione di una *congiunzione regolare* (di eventi o proprietà di eventi o enti fisici), allora ciò che rende un processo un genuino processo causale non può, di nuovo, essere

definito in base a caratteristiche *intrinseche* del *singolo* processo, ma si risolve ancora una volta nella *ripetizione regolare* di determinate congiunzioni di fenomeni e proprietà fisiche.
In definitiva mi sembra di potere affermare che lo stato attuale della delucidazione filosofica del principio di causalità non *metta a disposizione* dello scettico sulla conoscibilità degli enti matematici (in quanto enti astratti) una visione metafisica del rapporto di causazione che supporti adeguatamente la teoria causale della conoscenza.
Se, infatti, si cerca di fondare in modo convincente la valenza metafisica forte dell'idea di *causalità*, con l'intento di superare la concezione regolarista che riconduce il concetto di causa all'*abitudine* humeana, si ricade (come si è visto nella trattazione appena sviluppata) in un modo o nell'altro nell'idea di *legge* (e dunque di *regolarità* nel presentarsi di un fenomeno).
Chi scrive non ritiene che ci si possa disfare in modo, per così dire, filosoficamente spregiudicato dell'idea di causalità; e tuttavia ritiene che un concetto di causa utile per il chiarimento filosofico delle modalità e dei risultati della ricerca scientifica sia un concetto ben più complesso e ricco di quello che si trova a fondamento della teoria causale della conoscenza.
Tale concetto è essenzialmente costituito dall'idea di *spiegazione* (come dice Kuhn nel passo sopra riportato), e dunque non tanto di causa di un fenomeno come, a sua volta, un altro fenomeno che precede il primo e lo pone in essere (la *causa efficiente* in senso tradizionale), ma piuttosto di *legge* e di *insieme di connessioni* inquadrabili in una ben precisa *forma* di una dinamica evolutiva (di un sistema fisico soggetto a determinate condizioni ambientali).
Ciò che risulta profondamente inadeguata (a parere del sottoscritto), alla luce di una tale concezione della causalità che risulta dall'esame delle scienze fisiche, è proprio l'idea di *potere causale*, essenziale, come abbiamo visto, nella teoria causale della conoscenza.
Il concetto di potere causale perde la sua capacità esplicativa a vantaggio proprio dell'idea di *forma* e di *legalità formale* di un principio fisico (o di scienza della natura in generale).
Non è inutile, a questo punto, richiamare brevemente la concezione aristotelica della causalità, basata proprio in modo necessario ed essenziale sull'idea di *forma*.
Per Aristotele vi sono quattro tipi di cause di un dato processo o fenomeno:

a. la causa efficiente;

b. la causa materiale;

c. la causa finale;

d. la causa formale.

Il filosofo greco non dà affatto più importanza alla causa efficiente rispetto alle altre (come, a parere di chi scrive, fa chi sostiene una teoria causale della conoscenza).

Molto significativo è, d'altra parte, il ruolo che le cause finale e formale hanno nella sua visione della causalità.

Il concetto di *forma*, peraltro centrale in tutta la metafisica aristotelica, garantisce l'identità di quello che Salmon avrebbe poi definito un *genuino* processo causale, impedendo che la spiegazione causale *collassi* in una mera *deduttività* logica di per sé incapace di individuare i nessi *essenziali* per il carattere causale del processo in questione e la struttura di tali nessi.

La legge di natura, nell'ambito del discorso scientifico moderno, svolge proprio il compito di individuare la *forma* specifica del processo causale alla base del fenomeno che si intende spiegare, legando tra di loro quelle proprietà (degli enti in gioco nel fenomeno) che sono *essenziali* per la spiegazione.

Mentre i modelli di carattere *deduttivo* della spiegazione scientifica (si pensi al fortunato modello di Hempel-Oppenheim) si focalizzano sulla possibilità di *dedurre* il fenomeno osservato da un insieme di premesse (tra cui anche una o più leggi generali), l'idea di *forma* come componente essenziale della causalità (e quindi l'idea di *causa formale*) punta a determinare la *struttura reale* di ciò che, nel fenomeno, è *effettivamente* causalmente connesso e che può, pertanto, *genuinamente* spiegare il fenomeno stesso (si pensi a tutta una classe di controesempi al modello di Hempel-Oppenheim, costruiti in modo da far vedere che alcune premesse da cui si può legittimamente dedurre il fenomeno osservato non hanno in realtà alcuna genuina connessione causale, o esplicativa che dir si voglia, con il fenomeno in oggetto).

La *causa efficiente* non è certo ignorata dalla concezione aristotelica, ma, nella visione del filosofo greco, essa non ha alcun senso *presa a sé stante* in un'ottica strettamente *meccanicistica* quale è, in definitiva, quella nell'ambito della quale si muove la teoria causale della conoscenza.

Tale ottica meccanicistica, inoltre, come si è già accennato, non è più il punto di vista maturo della scienza moderna (almeno, come dice Kuhn, a partire dal XX secolo), a causa delle grandi rivoluzioni di inizio Novecento (la Relatività e la Meccanica quantistica) ed anche dei più recenti sviluppi della Fisica statistica, della Teoria del Caos e della Fisica dei Sistemi Complessi, ambiti in cui la spiegazione scientifica del fenomeno fisico è qualcosa di ben diverso dalla mera individuazione di un ente-*causa efficiente* che *metta in moto* (secondo proprio la metafora *meccanica* sei e settecentesca proveniente dalla scienza galileiana e newtoniana relativa al *moto* dei corpi macroscopici) il processo che ci si propone di spiegare.

In una visione che, proprio nell'intento di essere più adeguata all'attuale articolarsi e svilupparsi del sapere scientifico, recuperi la concezione ricca e integrata di causalità della filosofia aristotelica, la *causa efficiente* può essere definita ed individuata soltanto nel quadro dell'apprensione di una *forma complessiva e generale* del fenomeno che si intende descrivere e spiegare.

E' questo, a parere dello scrivente, l'unico modo di ripensare in termini propriamente metafisici l'idea di causa. Tale modo passa, come ho cercato di illustrare, attraverso la ridefinizione del contenuto profondo del concetto di causazione, portando ad un radicale allontanamento dal punto di vista meccanicistico, allontanamento che è stato analizzato da un punto di vista prettamente epistemologico nei paragrafi precedenti allorché si è messo in evidenza, utilizzando il paradigma quineano dell'olismo, come la conoscenza scientifica ricorra, per spiegare i fenomeni del mondo naturale, a tutto uno spettro di enti ed asserti teorici, connessi tra di loro in una *rete* strutturata e integrata, che, soltanto *nel loro insieme*, danno conto del fenomeno e del suo modo di presentarsi nelle condizioni date.

E l'idea di *rete* e di *insieme* degli asserti teorici che spiegano il fenomeno in esame non è altro, secondo chi scrive, che la traduzione, in termini *epistemici* e di *rappresentazione* (linguistica e mediata da concetti) del fenomeno stesso, della nozione *metafisica* di *forma*.

Se è impossibile, come si è cercato di dimostrare in questo paragrafo, pensare la causalità come mero fatto *meccanico*, indipendentemente dal concetto di *spiegazione* scientifica in senso ampio e quindi di *forma*, allora anche il processo conoscitivo alla base della scienza, del suo sviluppo e del suo progresso non può che articolarsi nei termini della costruzione di una *forma* (data dalla struttura specifica dell'insieme delle *relazioni* di idee, concetti e proposizioni che compongono l'edificio della teoria scientifica) che sia in grado di cogliere gli *elementi,* anch'essi *formali* (in quanto costituiti dalle *relazioni* realmente esistenti tra gli enti e le proprietà in gioco nel fenomeno), che caratterizzano la realtà naturale sotto indagine.

Va messo in rilievo, in questo quadro descrittivo, il fatto che la visione della causalità che ho inteso sostenere in questo paragrafo si allontana anche dall'idea strettamente regolarista di derivazione humeana, dando al concetto di *legge di natura* un significato (ed un ruolo nell'insieme complessivo del modello sostenuto di causalità) piuttosto differente da quello che tipicamente gli conferisce la concezione regolarista.

Mentre per Hume la legge naturale è soltanto la codificazione (o *generalizzazione*, solitamente nel linguaggio del calcolo quantitativo e quindi della matematica) dell'*abitudine* che *cristallizza*, per così dire, in un principio eterno ed universale l'osservazione di una ripetizione regolare, nella visione qui discussa la legge di natura è l'espressione di una *forma*, pragmaticamente utile per effettuare previsioni basate sull'attesa del ripetersi regolare del fenomeno in esame, ma, cosa teoreticamente ancora più importante, capace di esprimere l'*intreccio causale globale* (in altri termini, la *forma della spiegazione* del fenomeno) alla base del processo fisico studiato.

A tal proposito, sarà utile richiamare qui l'accenno al modello di Salmon sviluppato sopra.

Il filosofo statunitense, nel suo lavoro epistemologico, è mosso dall'intento di recuperare l'idea di causa, cercando di superare la concezione regolarista e quindi sforzandosi di costruire un modello che possa fare a meno del concetto di legge di natura (intesa, alla maniera regolarista, come generalizzazione della congiunzione ripetuta).

Come si è messo in evidenza, non riuscirà in questo proposito, giungendo ad elaborare una visione che, in ultima analisi, necessita proprio di alcune particolari leggi fisiche (le leggi di conservazione).

A parere del sottoscritto, tale insuccesso non è dovuto ad un errore nell'idea iniziale (il recupero della nozione di causa), ma proprio ad una concezione filosoficamente troppo restrittiva di legge naturale, quella della visione regolarista.

Se, infatti, la *legge di natura* viene intesa come *forma della spiegazione*, non vi è più ragione di vedere in essa un problema per l'idea di causalità.

Naturalmente, una tale idea di *legge* porta anche a rivisitare, nel modo che ho sopra esposto, il concetto stesso di *causa*, che deve, a questo punto, essere pensato in termini diversi da quelli strettamente *meccanicistici* della scienza sei e settecentesca.

Un caso chiaramente esemplificativo di questa diversa idea di causalità è quello, discusso nel primo capitolo, della spiegazione fisico-statistica dei processi diffusivi.

L'esperimento descritto in quel capitolo (la diffusione di un gas da un vano ad un altro di un contenitore, nel caso in cui vi sia una forte differenza di concentrazione di tale gas tra i due vani) illustra molto bene in che termini vada concepita, secondo il sottoscritto, la nozione di causa al fine di descrivere in modo convincente la struttura della spiegazione adottata relativamente al fenomeno in questione.

Nessuno, in tale spiegazione, può ragionevolmente individuare quale sia lo specifico e ben determinato ente (la causa efficiente) che *spinge* il gas in oggetto da un vano all'altro del contenitore. Sono piuttosto tutta una serie di *condizioni* (tra cui, *in primis*, la differenza di concentrazione del gas tra i due vani), e di *connessioni* tra *condizioni*, *proprietà* e *aspetti* statistici delle distribuzioni del gas nei due vani, che producono (e determinano nelle sue caratteristiche precipue) il processo fisico della diffusione.

Ma da una tale descrizione della spiegazione data per il fenomeno qui considerato della diffusione gassosa si può dedurre che l'ottica causale con cui noi guardiamo il fenomeno è soltanto il frutto dell'*abitudine* humeana?

A parere di chi scrive, una tale inferenza sarebbe del tutto errata. Il fatto che, nel fenomeno in questione, non si possa individuare una causa efficiente, nel senso tradizionale (cartesiano e meccanicistico) del termine, *non* significa che la spiegazione fisico-statistica che noi diamo del fenomeno sia basata *soltanto* sulla *fissazione* (nel soggetto della conoscenza) di una *ripetizione regolare* come legge generale, a cui si attribuisce una validità universale ed eterna a causa proprio dell'*abitudine* di humeana memoria.

La spiegazione illustrata *è* a tutti gli effetti una spiegazione *causale*. Ciò in quanto un tale genere di spiegazione è comunque basato su connessioni *oggettivamente* sussistenti e non è semplicemente il frutto dell'osservazione di una congiunzione che si ripete costantemente.

Abbiamo già discusso come la concezione *soggettivista* della probabilità non renda conto proprio del carattere *oggettivo* delle proprietà probabilistiche (i gas diffondono a prescindere dal fatto che ci sia o meno un fisico, che, ignorando posizioni e momenti di *tutte* le molecole del gas, decide di trattare il moto di tali molecole mediante un approccio probabilistico-statistico invece che calcolando, newtonianamente, la traiettoria di *ogni* molecola sulla base delle leggi, deterministiche e meccanicistiche, della dinamica classica).

La teoria della probabilità, e con essa la Fisica statistica, consentono di individuare proprietà causali *genuine* del mondo, che hanno un pieno *status oggettivo* e non sono correttamente interpretabili in termini di *abitudine* humeana.

In conclusione, possiamo dire che il trinomio *causa-legge-spiegazione*, se inteso nei termini di quel concetto ricco ed ampio di causalità che ho cercato di sviluppare in questo paragrafo, può rendere conto validamente dell'effettivo procedere della ricerca scientifica in fisica e nelle scienze naturali in generale, allontanando dall'epistemologia idee non convincentemente fondate e, nell'opinione dello scrivente, fortemente fuorvianti, come, ad esempio, quella di *potere causale* e, con essa, lo schema inadeguato, nonché portatore di autentici equivoci filosofici, della *teoria causale della conoscenza*.

La caratteristica fondamentale del suddetto trinomio *causa-legge-spiegazione* è, a parere del sottoscritto, il fatto che esso chiarisce, se indagato nella prospettiva di una visione ampia ed integrata della causalità, la compresenza e la reciproca connessione dei diversi aspetti filosofici del problema della conoscenza scientifica del mondo naturale. L'aspetto *metafisico* è rappresentato dalla *causa*, quello *epistemologico* dalla *spiegazione*, mentre la *legge*, in un certo senso, rappresenta la *relazione* tra i due aspetti precedenti.

Nella *legge* di natura, infatti, le connessioni *concretamente esistenti* nel fenomeno studiato (tra enti, proprietà, etc.) vengono tradotte in uno *schema concettuale* e formale (matematico) che renderà possibile l'articolazione della *spiegazione* scientifica del fenomeno.

Soltanto la corretta comprensione di questo importante trinomio filosofico consente, a parere dello scrivente, di individuare il giusto indirizzo epistemologico sulla base del quale elaborare un'adeguata descrizione del processo conoscitivo.

4.6 Contenuto empirico e contenuto teorico della scienza.

Centrale nella disamina del dibattito tra nominalisti e realisti riguardo all'indispensabilità della matematica è senza dubbio la questione della distinzione tra *contenuto empirico* e *contenuto teorico* delle scienze della natura.

Lo stesso Field, come si è messo in evidenza all'inizio di questo lavoro, basa la propria strategia di nominalizzazione della fisica sulla possibilità di *separare nettamente* contenuto empirico e contenuto teorico di una teoria scientifica, in modo da potere *tradurre* il contenuto empirico in termini puramente nominalistici e *confinare* così i principi (e con essi gli enti) teorici in un ambito di pensiero e di linguaggio senz'altro utile ma certamente *non indispensabile* dal punto di vista della costruzione della conoscenza dei fenomeni naturali.

Il problema della separabilità tra contenuto empirico e contenuto teorico nelle scienze della natura è posto, forse per la prima volta in modo sistematico, dalla tradizione del neopositivismo logico dei primi decenni del Novecento, che lo declina nei termini della questione della definibilità di enunciati *puramente osservativi* (detti *enunciati protocollari*) su cui basare la successiva costruzione teorica della scienza.

Per i neopositivisti il vocabolario teorico e quello osservativo della scienza (e, con essi, gli enunciati che utilizzano tali vocabolari, enunciati teorici ed enunciati osservativi, appunto) *devono* potersi separare in modo ben chiaro e definito. Per questi filosofi della logica e della scienza tale *separabilità* costituisce un principio fondante della loro impostazione, che si unisce all'altro grande *obiettivo* filosofico di questa corrente dell'epistemologia del XX secolo di operare una piena e radicale *riduzione* del teorico all'osservativo.

Ma, in effetti, lo stesso principio della chiara distinguibilità dei termini teorici da quelli osservativi (su cui si basa la possibilità di porre e raggiungere l'*obiettivo* della *riduzione*) rappresenta un punto molto problematico, come diversi epistemologi novecenteschi hanno messo chiaramente in evidenza, giungendo anche, alcuni di loro, alla conclusione dell'impossibilità di tale netta distinzione.

Tre nomi, tra tutti, dei più importanti: Karl Popper, Norwood Russell Hanson e Paul Feyerabend.

Quanto al primo, dobbiamo tenere presente che il filosofo austriaco fonda il *cuore* del proprio resoconto epistemologico delle pratiche concrete della ricerca scientifica sulla nozione di *falsificabilità* degli asserti teorici.

Per Popper le leggi universali della scienza (dunque gli asserti teorici alla base dell'intero edificio della conoscenza di un dato ambito di fenomeni naturali) sono proposizioni non verificabili, ma che devono certamente essere *falsificabili*, ovvero ammettere controesempi rilevabili, almeno *in linea di principio*, attraverso l'osservazione sperimentale.

Ma come avviene *di fatto* la falsificazione di un asserto teorico secondo Popper? La

procedura cui, in ultima analisi, fa riferimento la visione popperiana consiste nel mettere a confronto l'enunciato teorico con le asserzioni *base* sui fatti osservativi che registrano il generale consenso della comunità scientifica. Tali asserzioni base, ovviamente, dovrebbero utilizzare quel *linguaggio osservativo* capace di esprimere gli aspetti salienti dei fenomeni naturali in un modo così *fedele* a ciò che *concretamente* si palesa nei fenomeni stessi da rendere appunto possibile il successivo controllo degli asserti teorici mediante il confronto con i *nudi fatti* fenomenici (*nudi fatti* che dovrebbero appunto essere espressi in modo assolutamente *scevro* da qualunque visione teorica proprio grazie alle asserzioni base).
Per Popper tale linguaggio osservativo può essere senz'altro messo a punto, e su di esso si basa, in effetti, la possibilità di impostare con relativa confidenza un'epistemologia della falsificabilità.
Ma, e questo è il punto critico (ed estremamente *delicato*) dell'analisi popperiana, il linguaggio osservativo della scienza non sfugge ad importanti e fondanti presupposti teorici, sulla base dei quali, soltanto, i suoi termini hanno *senso*.
Per il filosofo austriaco un *linguaggio* puramente *fenomenico* (senza, dunque, alcun presupposto teorico) semplicemente non può darsi, e perplessità molto simili lo stesso Popper nutre per un *linguaggio cosale*, ovvero un linguaggio basato su presupposti teorici talmente *semplici* (forse dovremmo meglio dire talmente *primitivi*) che *tutti* i possibili osservatori umani li condividano facilmente.
Popper non mostra grande preoccupazione in riferimento al fatto che il linguaggio osservativo della scienza contiene spesso importanti presupposti teorici (aspetto da lui stesso messo in evidenza, come si è detto), nel senso che, dal suo punto di vista, la presenza pervasiva di tali presupposti alla base del significato dei termini scientifici osservativi non mette in discussione il criterio di falsificabilità e pertanto non inficia la validità della sua epistemologia.
Ciò che è cruciale, per il filosofo viennese, è che le asserzioni base siano *universalmente condivise* (che siano o meno *contaminate* da assunzioni teoriche), in modo tale che esse possano costituire l'*autorità indiscussa* sulla base della quale decidere se una teoria è empiricamente falsificata oppure no.
Il criterio dell'universale condivisione di un'asserzione, per fare di questa un'asserzione base, va incontro senz'altro ad una facile critica, imperniata sul fatto che anche su asserzioni con

un notevolissimo contenuto teorico (che nessuno sarebbe disposto a considerare asserzioni base) vi può essere un generale, e forse anche universale, consenso.

Popper dà in realtà l'impressione di basare la particolarissima autorità che conferisce alle asserzioni base su qualcosa di diverso dal semplice consenso della comunità scientifica universale, qualcosa di *empirico* in un senso *assoluto* ed anche, in effetti, *preriflessivo*, come se potesse essere chiaro, *prima* e *al di là* di qualunque disamina filosofica, il carattere appunto *empirico* di un'asserzione.

Chi scrive ritiene molto importante questo genere di critica all'impostazione popperiana, che una volta di più mette in rilievo la difficoltà di separare *nettamente* (nel linguaggio della scienza) asserti, termini e significati del tutto empirici e del tutto teorici.

In ogni caso, comunque, anche se si ritiene l'epistemologia popperiana non seriamente toccata da questo rilievo, resta il fatto che, *per lo stesso Popper*, anche le asserzioni base (e non soltanto gli assiomi e, in generale, le proposizioni delle teorie) sono *cariche* di assunzioni teoriche (in misura diversa a seconda dei casi, ma contengono comunque almeno *qualche* presupposto teorico). E ciò per via del fatto che Popper, come ho discusso sopra, non crede nella possibilità né di un linguaggio fenomenico né di un linguaggio cosale.

Dunque, in definitiva, per il grande epistemologo austriaco, *tutto* il linguaggio della scienza è *impregnato* di assunti teorici, che, ovviamente, possono essere *a livello più o meno alto*, ma in ogni caso *non* consentono (praticamente *mai*) di qualificare un singolo asserto come *puramente empirico*.

Ancora più radicale è la posizione di Hanson.

Questo brillante filosofo americano, profondamente influenzato dalla lettura delle *Ricerche filosofiche* di L. Wittgenstein, può essere per molti aspetti collocato nell'ambito del movimento neowittgensteiniano, le cui fondamentali intuizioni sul linguaggio (quella di *gioco linguistico* in modo particolare) determineranno in parte non secondaria i suoi indirizzi più caratteristici nell'ambito della filosofia della scienza.

Per Hanson, *wittgensteinianamente* appunto, il *significato* di un termine di un dato linguaggio non è qualcosa di *precostituito* che viene *poi* veicolato (in modo, potremmo dire, *neutro*) dal termine utilizzato, ma dipende profondamente dal *gioco linguistico* all'interno del quale il termine medesimo è impiegato.

Quanto detto non vale soltanto per i termini più astratti e teorici, ma anche per quelli apparentemente più vicini all'esperienza *immediata*.

Questa tesi, trasportata nell'ambito dell'epistemologia della scienza, porta a ritenere che sia i termini teorici che, *anche*, quelli *osservativi* hanno significati che si definiscono *nel contesto* di una certa teoria e non entrano, *già* ben formati e chiari, nella teoria come se provenissero da un mondo esterno ad essa.

Hanson afferma che i termini osservativi sono *carichi di teoria* (*theory-laden*). Con questa affermazione il filosofo statunitense stabilisce una dipendenza molto forte del significato di un termine scientifico (osservativo, ma lo stesso vale, *a fortiori*, per quelli teorici) dai concetti che costituiscono il tessuto logico e di pensiero della teoria che quel termine utilizza.

La tesi di Hanson, si badi bene, non è una mera ovvietà. Bisogna tenere presente, infatti, per capirne bene il significato e la portata, il problema da cui è partito il Nostro per arrivare poi a sostenere questa idea della profonda dipendenza del significato di un termine scientifico dalla teoria in cui il termine stesso è impiegato: il problema dell'*incommensurabilità* tra teorie.

Esistono teorie relative ad uno stesso ambito di fenomeni naturali, secondo Hanson (e non solo), che sono formulate nello stesso linguaggio. Esse potranno anche portare ad affermazioni (e previsioni) diverse (anche considerevolmente diverse) sui medesimi fenomeni fisici, ma saranno sempre in un modo o nell'altro *confrontabili*, in quanto, dal momento che utilizzano lo stesso linguaggio, i concetti su cui si basano saranno gli stessi.

Viceversa, altre teorie (sempre concernenti uno stesso ambito di fenomeni) saranno formulate in linguaggi differenti.

In una tale situazione, i concetti alla base delle diverse elaborazioni teoriche saranno anch'essi differenti (per esempio, nel caso di due teorie distinte T e T' sullo stesso dominio di oggetti e fenomeni, T potrebbe far uso di concetti che T' non utilizza e, specularmente, T' potrebbe ricorrere a concetti che non sono presenti in T).

A causa di questa diversità degli insiemi di concetti su cui si basano le teorie considerate (nella seconda delle due circostanze descritte), tali teorie risultano *incommensurabili* l'una rispetto all'altra.

Non vi è modo, infatti, proprio per via della differente natura dei concetti utilizzati, di confrontare le affermazioni fatte da una teoria con quelle fatte dall'altra (laddove entrino in gioco almeno alcuni dei concetti non comuni alle due teorie). In termini intuitivi, potremmo dire che le due impostazioni teoriche non possono parlarsi ... nemmeno per litigare! (Anche la possibilità di giudicare incompatibili le affermazioni fatte dalle due teorie su di uno stesso dominio di oggetti è vietata dal fatto che i concetti utilizzati per formulare tali affermazioni sono differenti).

Il significato dei termini che costituiscono i linguaggi delle due teorie è dunque *strettamente* dipendente da tali linguaggi, non nel senso banale che un termine è (necessariamente) definito all'interno di un linguaggio, ma nel senso (ben più forte) che un termine-concetto interno ad un linguaggio-teoria ha significato *soltanto* nell'ambito di quel linguaggio-teoria, non essendo in generale i significati dei termini utilizzati da un linguaggio *trasportabili* in un altro linguaggio (in altre parole, certi termini utilizzati da una teoria possono non avere alcun significato nell'altra teoria, e, naturalmente, viceversa).

La conseguenza di questa visione è molto profonda: l'unità elementare di significato è l'intero linguaggio (o, se si preferisce, l'intera teoria) e pertanto anche i termini che apparentemente si riferiscono a *fatti* dell'esperienza *immediata* (nel nostro caso, i termini *osservativi*) sono in realtà strettamente dipendenti, quanto al loro significato, da fondamentali elementi *teorici* che si trovano alla base dello specifico approccio conoscitivo che lo scienziato sta adottando, ovvero dipendono dalla *teoria* (più o meno consapevole) che viene implicitamente assunta e che dà senso anche alle osservazioni e all'utilizzo (finalizzato alla descrizione di tali osservazioni) degli stessi termini *osservativi*.

Per Hanson questo aspetto del legame concetti (o termini) scientifici – teoria (o linguaggio) è connesso in modo significativo al celebre problema, di wittgensteiniana memoria, del *vedere come*. Il filosofo americano afferma infatti che noi vediamo *secondo una teoria*, nel senso che ciò che cade sotto i nostri sensi viene percepito sulla base di un condizionamento rappresentativo imposto dagli assunti teorici in cui crediamo.

Seguendo questa linea argomentativa, Hanson sviluppa una tesi di dipendenza dell'osservazione dalla teoria che va ben oltre la semplice definizione del significato dei termini osservativi all'interno di un certo contesto linguistico-teorico (che determina quel significato in un modo che è dato dai particolari concetti utilizzati dalla teoria stessa).

Le assunzioni teoriche che, più o meno consapevolmente, costituiscono la *cornice* di riferimento, all'interno della quale vengono pensati e realizzati esperimenti e osservazioni, entrano, per Hanson, in modo *profondo* e *costitutivo* negli stessi processi percettivi. Il fisico newtoniano e quello novecentesco (dopo le grandi rivoluzioni scientifiche di inizio secolo) *non* vedono le *stesse* cose.

In una tale situazione, è chiaro che il criterio della falsificabilità delle teorie scientifiche tanto caro a Popper diventa molto problematico. Se, infatti, una teoria determina il modo secondo cui percepiamo i fenomeni, come può l'osservazione (appunto dei fenomeni, dunque basata sulla loro percezione) falsificare la teoria? In effetti, quello che dovrebbe accadere, nell'ottica di Hanson, è che la teoria che decidiamo di sottoporre al controllo sperimentale *crea* (attraverso il condizionamento della percezione) la sua stessa conferma osservativa.

Questo aspetto dell'epistemologia hansoniana, se si segue il filosofo americano fino alle estreme conseguenze del suo pensiero, costituisce certamente un punto molto discutibile, che alcuni autori hanno provato a correggere introducendo il concetto di *condizionamento parziale* della percezione da parte delle teorie.

Ma, comunque si ritenga di potere (e di dovere) delimitare la portata dell'influenza degli assunti teorici sull'osservazione, ciò che qui interessa mettere in rilievo è il fatto che l'idea di Hanson dei termini del linguaggio scientifico (compresi quelli osservativi) che dipendono strettamente e profondamente (quanto al loro significato) dal *framework* teorico nel cui ambito il ricercatore si muove è senza dubbio un'idea che descrive adeguatamente il modo secondo cui il linguaggio della scienza si costituisce, si struttura ed evolve.

Il fondamento di questa idea, come si è accennato sopra, risiede nel concetto wittgensteiniano di *gioco linguistico*, a sua volta ancorato alla visione del *significato* come *uso* ("Il significato è l'uso" è la celebre frase delle *Ricerche filosofiche*).

E in effetti, a parere di chi scrive, applicando l'intuizione wittgensteiniana al modo in cui si articola il lavoro dello scienziato (in particolare a partire dall'Otto-Novecento), ci si può facilmente rendere conto del fatto che il significato di un termine osservativo dipende in modo stringente da come tale termine viene usato.

Non esiste un significato precostituito, poniamo, del termine *energia*, che ci consenta, a partire appunto da tale concetto già di per sé chiaro e definito, di effettuare misure di energia secondo le opportune procedure (opportune proprio in riferimento a quel significato precostituito) e di inserire *poi* (in un momento epistemicamente *ben distinto* e *successivo*) i risultati di tali misure in un costrutto teorico (concetti, proposizioni, equazioni ...) finalizzato a rappresentare e spiegare l'andamento e le proprietà salienti del fenomeno in esame.

Il *significato* del termine energia *proviene* invece da un *modo di analizzare* il fenomeno (ad esempio, il moto di un corpo macroscopico) nell'ambito del quale la grandezza osservata (l'energia, appunto) viene definita con il preciso *scopo* di individuare un *invariante* del fenomeno stesso, dotato di alcune proprietà essenziali per *spiegare* e *prevedere* aspetti di fondamentale importanza (del fenomeno) come i profili temporali di posizione e velocità o le relazioni dinamiche tra le forze in gioco e le grandezze cinematiche implicate.

Ciò che viene misurato (e dunque *osservato*) dipende, nella sua descrizione in termini di linguaggio scientifico (in questo caso il linguaggio della Meccanica classica), dall'uso di termini e concetti che sono funzionali allo specifico *metodo di analisi* adottato per il fenomeno, metodo che è fornito, nella fattispecie, dall'applicazione del modello *teorico* della dinamica newtoniana.

Ed infatti il *metodo di analisi* che segue dai principi e dalle equazioni di Newton, ovviamente, *non può non* ricorrere ad alcuni importanti termini e concetti *teorici*, senza i quali non sarebbe in grado di utilizzare la descrizione dell'*osservazione* al fine di produrre spiegazioni e previsioni.

In realtà, la descrizione osservativa ha senso soltanto all'interno del metodo di analisi newtoniano (con il suo consistente portato teorico). Senza i concetti del modello teorico newtoniano non potremmo nemmeno formulare una descrizione osservativa di qualche utilità scientifica.

La possibilità di utilizzare tale descrizione (il wittgensteiniano *uso*) per i nostri fini esplicativi e predittivi è conseguenza del fatto che l'osservato *non* viene descritto in un modo *neutro* rispetto a successivi e distinti momenti di analisi teorica, ma, al contrario, viene *raccontato* secondo un linguaggio e dei concetti che sono, di fatto, del tutto interni alla teoria.

Il *significato* della descrizione osservativa è dunque pensabile soltanto alla luce del suo *uso* nell'ambito dell'applicazione del modello teorico ("Il significato è l'uso").

Il *gioco linguistico* della Meccanica newtoniana, in altre parole, è una forma *unitaria* di pensiero-espressione finalizzata all'*uso* concreto consistente nella risoluzione di specifici problemi esplicativi e predittivi. In tale *unitarietà* linguaggio teorico e linguaggio osservativo costituiscono un *intero* inestricabile, la cui *unica* fonte di significato è proprio la possibilità della sua *utilizzazione*.

E' chiaro che, in quest'ottica, separare termini osservativi e termini teorici è del tutto impossibile.

Si potrà obiettare che le considerazioni fin qui svolte dipendono dall'idea wittgensteiniana di gioco linguistico e dalla particolare concezione, interna a tale idea, del significato come risulta dalle *Ricerche filosofiche*.

Ma, in realtà, gli aspetti qui utilizzati della filosofia di Wittgenstein (*via* Hanson) sono elementi interni alla stessa visione epistemologica sostenuta in questa tesi per come scaturisce dall'analisi dei diversi casi di studio presentati.

Si pensi, come esempio a scopo illustrativo, al fenomeno della *quantizzazione* (o *discretizzazione*) dei livelli energetici di un sistema quantistico (un atomo, un oscillatore armonico, il campo elettromagnetico, ...), di cui si è discusso in precedenza.

Per osservare (e descrivere in modo scientificamente significativo ed utile) la quantizzazione dei livelli energetici, dobbiamo disporre dei seguenti concetti: energia, accoppiamento campo-materia, stato quantistico del sistema (per elencare soltanto i principali).

Se, infatti, vogliamo descrivere l'osservazione di una transizione atomica (tra due livelli energetici che differiscono per una quantità finita) dovuta all'assorbimento di un fotone, dobbiamo affermare che:

1. prima della transizione, l'atomo in oggetto si trovava in un certo *stato quantistico* s_1, mentre dopo la transizione si trova nello *stato quantistico* s_2;

2. la transizione è accompagnata dall'assorbimento del fotone, ovvero l'atomo e il campo elettromagnetico interagiscono (*accoppiamento campo-materia*);

3. ad ognuno dei due stati s_1 ed s_2 è associato un diverso valore (reale) di una grandezza fisica (l'*energia*), in modo tale che la differenza tra questi due valori costituisca a sua volta un ammontare di energia associato al fotone assorbito (cioé al campo elettromagnetico).

I *concetti* utilizzati per costruire la descrizione di cui sopra (l'unica da cui si possa realmente evincere il fenomeno della quantizzazione dei livelli energetici) sono senz'altro concetti che traggono il loro contenuto da ben determinate *teorie* scientifiche (la Meccanica quantistica e la QED, *in primis*), così come, parallelamente, i termini che impieghiamo per fare riferimento a tali concetti traggono il loro significato da termini utilizzati (e definiti) nelle stesse teorie.

Un'ulteriore considerazione ispirata proprio alla concezione popperiana della falsificabilità delle teorie scientifiche sarà utile per comprendere a pieno il legame stringente tra contenuto empirico e contenuto teorico nella scienza moderna.

Se il ricercatore, nel compiere le sue osservazioni sperimentali, mira esattamente a sottoporre a controllo empirico una data teoria, è chiaro che il tipo di descrizione che darà di ciò che ha osservato sarà finalizzato proprio a mettere in rilievo quegli aspetti del fenomeno in osservazione su cui la teoria formula delle previsioni significative. Lo scienziato *non* esprimerà *tutto* ciò che cade sotto i suoi sensi durante la realizzazione dell'esperimento e, cosa ancora più importante, ciò che esprimerà nella sua descrizione dell'osservazione sarà formulato mediante un linguaggio capace di *intercettare* i concetti e i termini di cui sono costituite le previsioni elaborate in sede *teorica*. Concetti e termini della descrizione osservativa non potranno essere del tutto *sganciati* dalla struttura linguistica e di pensiero della teoria che si vuole controllare, altrimenti l'osservazione risulterebbe inutilizzabile ai fini della corroborazione/falsificazione della teoria. Nel descrivere ciò che è avvenuto nell'esperimento, il ricercatore dovrà necessariamente impiegare dei termini il cui *significato* sia *logicamente legato* ai concetti della teoria; viceversa rimarrebbe sempre uno *iato* incolmabile tra risultati dell'osservazione e previsioni teoriche, e, conseguentemente, il lavoro sperimentale non avrebbe *nulla da dire* sull'adeguatezza o meno della teoria.

Pretendere dunque che ci sia (o possa esserci) una netta separazione del linguaggio osservativo da quello teorico significherebbe rendere l'osservazione, per così dire, *chiusa in sé stessa* e pertanto del tutto inservibile ai fini del controllo empirico delle teorie scientifiche.

Anche riguardo a questo genere di considerazioni, va sottolineato che le conclusioni raggiunte non sono strettamente dipendenti dal criterio di falsificabilità di matrice segnatamente popperiana.

Tutti i passaggi logici dell'argomentazione appena svolta, infatti, possono essere ugualmente effettuati anche facendo riferimento a diversi (e più deboli) criteri di controllo empirico, come quello di confermabilità *à la Gillies* (per fare un esempio).
Un'analoga riduzione dei significati di molti dei termini necessariamente utilizzati nelle descrizioni osservative a concetti teorici (in un certo senso, il procedimento opposto a quello che si proponevano di realizzare i neopositivisti) costituisce la fondamentale linea argomentativa seguita da Paul Feyerabend per sostenere la sua visione realista del contenuto delle teorie scientifiche.
Feyerabend sviluppa la sua analisi a partire da due importanti premesse:

a. l'idea del *vedere come* inteso nei termini di una *interpretazione immediata* dei dati sensoriali basata sulla teoria più o meno inconsapevolmente assunta dal *vedente*;

b. la concezione delle teorie scientifiche come *unità di significato* ognuna delle quali è *isolata* dalle altre teorie e dalle forme di conoscenza prescientifica.

Quanto al *vedere come* (di cui alla premessa *a*), il modo di procedere di Feyerabend è molto simile a quello di Hanson, a sua volta riconducibile, come abbiamo visto, all'idea-madre di Wittgenstein.
La premessa *b* fa invece riferimento ad una concezione dell'*isolamento* linguistico e concettuale delle teorie scientifiche che, se da un lato è simile a quella di Hanson (per il quale abbiamo parlato di *incommensurabilità*), dall'altro ne costituisce una versione *molto più forte*, in quanto per Feyerabend la differenza, sostanziale e profonda, di significati e concetti (su cui si basano le teorie scientifiche) alla quale è dovuto il detto isolamento è una differenza che si estende a *tutti* i significati e i concetti utilizzati da due diverse teorie.
Accade così che, per il filosofo austriaco dell'*anarchismo metodologico*, ogni teoria (con il suo portato *irriducibile* di idee, principi e linguaggio, irriducibile in quanto non confrontabile con concetti e termini di altre teorie, e nemmeno spiegabile, in tutto o in parte, a partire appunto da altri bagagli teorici) *determina* il modo di *interpretare* i dati osservativi che si ottengono dagli esperimenti.
E' chiaro che, sulla base di tale impostazione, il criterio di falsificabilità *à la Popper* è

completamente rigettato, e il risultato finale è appunto una concezione *anarchica* radicale relativa al metodo che la scienza segue per costruire le sue conoscenze, concezione che dà un valore assolutamente preminente alle idee e alle conseguenti strutture teoriche.

Per Feyerabend, sono le idee e i concetti a *plasmare* il modo di procedere dello scienziato (anche dello scienziato sperimentale), dove, in tale modo di procedere, è compresa anche la stessa attività di osservazione empirica volta al controllo e alla corroborazione della teoria.

Non vi è vera e significativa osservazione senza concetti, e la scienza *va* dove la *portano* i concetti e le teorie che su di essi sono costruite, senza alcun riguardo per un criterio di razionalità che possa essere in qualche modo sovraimposto alla *libera* attività plasmatrice dei concetti e delle idee.

Questa visione del modo di *avanzare* della conoscenza scientifica (e della dipendenza, in tale forma di conoscenza, dell'osservazione dalla teoria) è particolarmente rafforzata dall'idea che le teorie scientifiche sono *isolate* non soltanto tra di loro, ma anche dalla *conoscenza prescientifica*. Non esiste dunque la possibilità di *ricondurre* i concetti e il vocabolario che usiamo quando descriviamo i risultati di un'osservazione a idee e termini che appartengano ad una visione prescientifica del mondo o al *linguaggio* e al *senso comuni*. L'*osservato* non può essere *dato* in termini comuni o comunque non scientifici.

Ciò *taglia* definitivamente *la strada* alla possibilità di *ancorare* la descrizione di un'osservazione a significati (e dunque a concetti) che non facciano parte del contesto teorico nell'ambito del quale ci si sta muovendo (e che magari si intende controllare proprio mediante quell'osservazione). Anzi, per essere più chiari, termini e concetti utilizzati *dovranno necessariamente essere* termini e concetti della scienza (in particolare, ovviamente, di quella teoria che costituisce l'*elemento* in cui si muove la mente dello sperimentatore).

Senza seguire Feyerabend fino all'esito estremo dell'anarchismo epistemologico in materia di metodo scientifico, si può, a parere dello scrivente, condividere proprio l'idea di un sostanziale *isolamento* delle teorie scientifiche dalla conoscenza prescientifica.

Gli elementi *salienti* della descrizione scientifica (anche osservativa) di un fenomeno sono in generale termini *già* tecnici, dotati di significati che devono in ultima analisi essere ricondotti a concetti teorici (per essere adeguatamente compresi).

Come anche ho messo in evidenza precedentemente discutendo la descrizione del fenomeno della quantizzazione dell'energia, aspetti *essenziali* del fenomeno descritto non possono non essere *nominati* in termini di fondamentali idee della teoria di riferimento.

Personalmente, non ritengo si possa affermare che *tutti* i termini e i concetti utilizzati in una descrizione scientifica siano teorici (o comunque da ricondurre a concetti teorici). Ritengo però che ciò che rende *scientifica* una data descrizione (di un fenomeno naturale) sia proprio un insieme di concetti (di carattere, in ultima analisi, teorico) che *individuano*, proprio *dal punto di vista* della teoria di riferimento, quegli *aspetti* del fenomeno osservato che sono *essenziali* per la comprensione scientifica del fenomeno stesso.

Descrizione osservativa e costrutto teorico (ovvero, se si preferisce, linguaggio osservativo e linguaggio teorico) non sono dunque mai indipendenti (*in scienza*), e, conseguentemente, i rispettivi termini e concetti *non* hanno, in generale, una natura differente.

E' chiaro, se si tiene presente la rilevanza dei concetti matematici nell'ambito delle teorie scientifiche, che le conclusioni di questo paragrafo sulla non separabilità del linguaggio osservativo da quello teorico sono estremamente importanti proprio in riferimento alla questione dell'*indispensabilità* della matematica.

Le teorie scientifiche utilizzano in modo fondamentale la categoria della *quantità* e, per elaborare e connettere in una rete concettuale esplicativa (e predittiva) gli aspetti quantitativi dei fenomeni, ricorrono alle teorie matematiche.

Concetti ed enti matematici sono dunque *pervasivamente* all'interno dell'*intera* struttura della scienza, sia teorica che osservativa (dal momento che i concetti su cui è basato il linguaggio osservativo sono in ultima analisi concetti teorici).

Gran parte dell'attuale dibattito sull'indispensabilità *non fa*, a parere dello scrivente, *i dovuti conti* con il grande (e certamente non nuovo) problema della distinzione teorico-osservativo (o teorico-empirico).

Ritengo, pertanto, che un adeguato approfondimento di tale problema, come quello che ho cercato di delineare in questo paragrafo, possa chiarire in modo opportuno l'impossibilità di fondare su basi certe la *dispensabilità* delle teorie matematiche per le scienze della natura.

Capitolo 5. Matematica e similarità sistemiche nelle scienze della natura. Enti matematici e concetti scientifici.

5.1 I *concetti sistemici*.

Altro grande nodo teorico dell'attuale dibattito filosofico sull'esistenza degli enti matematici alla luce dell'*indispensabilità* della matematica è dato dalla questione della natura dei concetti scientifici in relazione alle teorie matematiche che, nella versione corrente delle scienze fisiche e naturali, vengono ordinariamente utilizzate per definire quei concetti.

E' ben noto che la scienza (e in particolare la fisica) ha spesso ottenuto grandi successi descrittivi ed esplicativi costruendo ed utilizzando alcuni concetti di carattere, potremmo dire, *trasversale* ed *astratto*, atti ad individuare proprietà molto *generali* dei sistemi fisici che *prescindono* dal particolare campo di indagine.

Definiremo tali concetti, con linguaggio più moderno (e che fa riferimento alla contemporanea teoria dei sistemi), *concetti sistemici*.

Esempio tipico di uno di tali concetti è quello di *sistema dissipativo*.

Illustrerò brevemente questo esempio in modo da dare un'idea più precisa e concreta di cosa intendo per concetto sistemico.

Sia in Meccanica che nello studio dei fenomeni elettromagnetici, grande attenzione è stata posta sull'aspetto della conservazione (o della non conservazione) della grandezza fisica energia. Si è potuto dimostrare, infatti, che, sotto opportune condizioni e per particolari campi di forza, l'energia (definita in vari modi, come energia meccanica, elettromagnetica, etc.) è una costante rispetto all'evoluzione (nel tempo) di un sistema fisico.

Si è visto altresì che molti sistemi (ripeto: *a prescindere* dall'ambito specifico dei fenomeni a cui ci riferiamo, sia esso quello della meccanica, dell'elettromagnetismo, o quant'altro) hanno invece l'importante caratteristica di *dissipare* l'energia. Gli effetti dissipativi sono in generale legati a determinate forme (matematiche) della legge della forza in gioco (si pensi, ad esempio, alla legge della forza d'attrito viscoso in meccanica) e si risolvono nella diminuzione progressiva dell'energia del sistema in esame. Pur essendo vero (in molti casi)

che tale perdita dissipativa di energia può essere ricondotta al prodursi di un uguale ammontare energetico *sotto altra forma* e (anche) al di fuori del sistema studiato (ovvero *nell'ambiente*), come si vede proprio nel caso dell'attrito (in cui l'energia meccanica perduta dal corpo che si muove su di un piano con attrito si ritrova *esattamente* nella quantità di calore prodotto dalla frizione, calore che si traduce in un aumento dell'energia termica del corpo ma che si disperde anche nell'ambiente, determinando il riscaldamento del piano di scorrimento e anche dell'aria circostante), resta il fatto che *dal punto di vista* del ben delimitato sistema fisico esaminato (il corpo in moto, nell'esempio dell'attrito) si ha una *dissipazione* di quella che avevamo precedentemente definito *energia totale* del sistema.
Il fenomeno della dissipazione non si limita, come si è già accennato, all'ambito della Meccanica, ma possiamo facilmente ritrovarlo in altre branche della fisica.
Anche nello studio dell'elettromagnetismo si rilevano processi del tutto analoghi.
Caso tipico è quello della dissipazione di energia elettrica in un conduttore ohmico in cui scorra una corrente elettrica, il cosiddetto *effetto Joule*. In tale fenomeno, gli elettroni della corrente scorrono nel conduttore, sotto la spinta di una forza elettrica (e quindi di una differenza di potenziale applicata ai capi del conduttore), urtando contro gli atomi del conduttore stesso. Questi urti determinano, per l'*insieme* della corrente elettrica, un effetto simile a quello della *resistenza* di un mezzo al passaggio di un corpo macroscopico (un oggetto che si muove nell'acqua, per esempio), dando luogo, da un punto di vista *macroscopico*, ad una forza di resistenza al passaggio della corrente elettrica che si può pensare (soprattutto per via della sua *legge matematica*) come una vera e propria *forza d'attrito*.
L'effetto di tale forza è proprio quello di trasformare una parte dell'energia cinetica degli elettroni della corrente in calore. Poiché l'energia cinetica degli elettroni è, in ultima analisi, erogata dal generatore che produce la forza elettrica (quella che spinge gli elettroni attraverso il conduttore), in definitiva si ha la trasformazione di una parte dell'energia elettrica fornita dal generatore in calore.
Il sistema generatore-corrente elettrica *perde* dunque energia (*energia elettrica*, come abbiamo detto) e la quantità perduta (o *dissipata*) di energia si ritrova (come nel caso dell'attrito meccanico) in una uguale quantità di calore, che produce il riscaldamento del conduttore e si disperde nell'ambiente.

Come si vede, sostituendo l'energia meccanica con quella elettrica, un sistema di natura molto diversa (un circuito elettrico invece di un corpo in moto su di un piano con attrito) presenta lo stesso carattere di *sistema dissipativo* del sistema meccanico precedentemente esaminato.

Pur non entrando in una descrizione matematicamente molto formalizzata dei due sistemi discussi, si può facilmente vedere, già da questa semplice esposizione, che il concetto di sistema dissipativo dipende in modo *intrinseco* e logicamente stringente da un *aspetto* eminentemente quantitativo e dunque *matematico* dei due fenomeni presentati.

E' evidente, infatti, che, senza la possibilità di definire la *grandezza* energia e di valutarne la sua *diminuzione* (dunque senza la possibilità di utilizzare *concetti* specificamente *matematici*), non avrebbe alcun senso parlare di dissipazione e di sistemi dissipativi.

Il ruolo dei concetti matematici è assolutamente essenziale in tutta la costruzione della teoria qui discussa. Essi non hanno soltanto il compito di consentire delle previsioni quantitative, ma (cosa ben più importante e filosoficamente ricca di conseguenze) forniscono la *struttura concettuale e teorica* di riferimento per *individuare* un aspetto di fondamentale importanza di tutta una *classe* di sistemi fisici.

Il *framework* linguistico e categoriale messo a disposizione dalla matematica ha, in questo caso, il ruolo di indurre la costruzione di un concetto (quello di sistema dissipativo) che, consentendo di *cogliere* un'importante *similarità* tra sistemi di differente natura fisica, si colloca ad un livello molto astratto e *generale*, in quanto svolge proprio la funzione di *individuare* e descrivere una *forma comune* a fenomeni peraltro molto diversi gli uni dagli altri, forma comune che, in qualche modo, spieghi e *chiarisca* la similarità colta.

Il *concetto sistemico* analizzato di dissipazione (o di sistema dissipativo) si costituisce come possibilità attualizzata di *pensare la similarità* e, con essa, il fondamento di una descrizione che ha un elevato potere eplicativo, poiché è capace di *far emergere* allo *sguardo* dello scienziato-ricercatore un *aspetto* (o *proprietà*) di *alto livello* (dei fenomeni) che, senza l'individuazione della similarità e la sua concettualizzazione (attraverso l'idea di sistema dissipativo), sarebbe rimasto del tutto *non visto* e ignorato.

In verità, il ruolo dei concetti sistemici è in generale proprio quello fin qui discusso in riferimento ai sistemi dissipativi e alla loro epistemologia.

E, come si è messo in evidenza analizzando l'esempio specifico di cui sopra, la possibilità

attualizzata di *pensare le similarità*, su cui – abbiamo detto – si costituisce l'essenza e la struttura logica e linguistica dei concetti sistemici, è a sua volta fondata sulle teorie matematiche. Ciò in ragione del fatto che le similarità più importanti (in quanto più feconde di sviluppi teorici ulteriori, talvolta anche molto ampi e di grande rilevanza conoscitiva) di cui si occupano le scienze fisiche sono similarità che attengono ad aspetti quantitativi.
Nell'esempio già discusso dei sistemi dissipativi il ruolo della categoria di quantità, e quindi della matematica, nella costruzione del concetto sistemico pertinente è di livello non estremamente alto e formalmente raffinato. Basta, in definitiva, la matematica dei numeri reali e la teoria delle equazioni differenziali ordinarie per dimostrare l'esistenza di un invariante come l'energia (invariante, evidentemente, solo nel caso in cui siano appunto assenti le forze dissipative) e valutare poi, in presenza di meccanismi di dissipazione (forze d'attrito, etc.), la variazione di tale grandezza fisica (l'energia) dovuta a quei meccanismi.
In questo capitolo presenterò un approccio teorico, molto utilizzato nella fisica delle interazioni fondamentali (branca in cui ha portato ad importantissime conquiste scientifiche, come il cosiddetto *modello standard* della forza elettrodebole), che basa la propria struttura concettuale e di calcolo sulla *teoria dei gruppi*, ovvero su di una teoria matematica di livello piuttosto alto ed astratto e formalmente sofisticata.
La disamina filosofica di tale approccio ci consentirà di comprendere il ruolo, per la fondazione dei concetti sistemici, di importanti e raffinate idee (e dunque enti) della moderna Algebra astratta, ben al di là del ruolo svolto dai concetti e dagli enti della Teoria dei numeri e dell'Analisi.
Si tratta dell'approccio delle cosiddette *teorie di gauge*. Esso consiste in un metodo di unificazione teorica di interazioni di campo fondamentali (si pensi all'unificazione delle forze elettromagnetiche con la forza debole, che ha trovato un esito di elegante e feconda compiutezza appunto nel modello standard), basato sull'individuazione di alcune *simmetrie* molto generali di fondamentali funzioni (le *lagrangiane*) che governano la dinamica di alcuni sistemi fisici. Si è detto *alcuni*, ma in realtà la dinamica di praticamente *tutti* i sistemi fisici, se si individuano le opportune coordinate mediante le quali caratterizzare il sistema, può essere descritta in termini di una lagrangiana e delle equazioni (che governano appunto la dinamica del sistema) che da essa conseguono, le cosiddette *equazioni di Eulero-Lagrange*.

Il cuore concettuale e metodologico di questo approccio consiste in due passi principali: la scrittura della lagrangiana del sistema e l'utilizzazione di determinate sue simmetrie per *dedurre* tutti gli aspetti fondamentali delle interazioni in gioco.
Lo spirito del metodo in questione si trova dunque nel carattere eminentemente *sintetico* dell'approccio metodologico seguito, secondo cui le caratteristiche e le leggi peculiari delle interazioni (quindi dei *campi* di forza) non sono *poste* come mera traduzione matematica di risultati *osservativi*, ma sono *dedotte* da *proprietà formali* di alcune funzioni matematiche fondamentali, le lagrangiane.
Ciò significa che l'*intero* bagaglio di informazioni necessario per ottenere *tutti* gli aspetti salienti e le leggi dinamiche del sistema studiato è *contenuto* in un certo tipo di *proprietà formali* della lagrangiana del sistema medesimo.
Sistemi molto diversi tra loro (un corpo macroscopico rigido in Meccanica classica, un punto materiale in Relatività ristretta, un campo, ...) possono essere *tutti* descritti tramite l'approccio lagrangiano, che pertanto risulta *capace di individuare* delle *similarità,* ad un livello molto *alto* ed *astratto,* tra realtà fisiche apparentemente diverse in tutto tra loro.
Il tipo di similarità che dà luogo all'approccio lagrangiano si rivela poi ancora più utile e cognitivamente fecondo se si pensa che, spostando il *focus* della descrizione teorica su alcune particolari proprietà della lagrangiana (le *simmetrie* cui si è accennato sopra), si possono ottenere alcune importantissime teorie di unificazione di campo, con grandi e sorprendenti ricadute anche in termini di previsioni teoriche di aspetti e fenomeni ancora non rivelati sperimentalmente (è quello che è accaduto nel caso del modello standard, che, oltre a conseguire l'unificazione tra forze elettromagnetiche e forza debole, ha portato anche alla previsione delle particelle W^+, W^- e Z^0 e del bosone di Higgs, le prime rivelate sperimentalmente, molto tempo dopo, dai celebri esperimenti condotti da Carlo Rubbia nel 1983, che l'anno successivo gli valsero il Nobel per la Fisica, il secondo rivelato soltanto nel 2012 grazie al lavoro svolto dai fisici Fabiola Gianotti e Guido Tonelli; si tenga presente che il modello standard è del ... 1967!).
L'uso di un certo *gruppo di simmetrie* per costruire importanti modelli fisici come il modello standard della forza elettrodebole è tutto interno all'approccio lagrangiano, essendo le simmetrie in oggetto proprietà formali proprio delle funzioni lagrangiane, e dunque è fondato anch'esso su quelle *similarità* molto generali ed astratte che consentono

l'applicazione dell'approccio lagrangiano.
Ma a ciò va aggiunto il fatto che l'idea di *simmetria* ha in fisica una lunga storia, proprio per la sua capacità di *catturare* aspetti molto importanti dei sistemi fisici sempre *prescindendo* dalla natura specifica del sistema singolo. Attraverso il concetto di *simmetria* fa ingresso in fisica un potente approccio basato sulla *similarità*, che trova poi nei *modelli lagrangiani* un ambito in cui esprimere tutta la sua fruttuosità epistemica, sinteticità e compattezza formale. In effetti, l'interazione virtuosa tra idea di *simmetria* e *modello lagrangiano* sta nel fatto che il carattere astratto di quest'ultimo mette a disposizione dell'approccio basato sulla simmetria la possibilità di individuare importanti proprietà (appunto di simmetria) dei sistemi fisici *ad un livello molto alto e formale*. E, come abbiamo detto, tale possibilità si è rivelata *decisiva* per trovare la *chiave* concettuale e teorica adatta alla costruzione di una descrizione unificata di alcuni campi di forza fondamentali.
La centralità dell'idea di similarità formale tra sistemi per la costruzione di quella categoria di concetti che abbiamo chiamato *concetti sistemici* rende ineludibile la disamina filosofica del problema del concetto e, in particolare, della connessione logica ed epistemologica di *concetti* e *similarità*.
La questione del concetto è stata affrontata nella tradizione filosofica occidentale sin dagli albori della nostra civiltà (si pensi alla filosofia greca e a Platone in particolare con la sua dottrina delle idee).
In generale possiamo dire che, nel dibattito sulla natura dei concetti, due grandi correnti di massima si sono sempre confrontate (e tuttora si confrontano): la teoria classica, basata sulle *definizioni* e risolventesi essenzialmente in una forma di *platonismo* dei concetti, e la teoria dei concetti come *concetti cognitivi*, ovvero esclusivamente come *rappresentazioni mentali* (dunque una forma di *antirealismo* dei concetti).
Per la teoria classica concetto e *categoria* di oggetti concreti cui il concetto si riferisce non si identificano, né si identificano concetto e processo di categorizzazione (o *rappresentazione* mediante un *oggetto mentale* che consenta di riconoscere determinati oggetti concreti come membri di una categoria). Per questa teoria il concetto è un *oggetto astratto*, la cui esistenza è *indipendente* dai soggetti (singoli o collettivi), che può essere conosciuto (o *scoperto*) oppure no, ma in ogni caso non si risolve in 'qualcosa che è nella testa' (una rappresentazione). La natura intrinseca del concetto è data invece dalla

definizione, che esplicita le *condizioni oggettive* (dunque appunto indipendenti da un eventuale soggetto conoscente) perché un dato ente possa essere sussunto sotto quel concetto.
Ha scritto Georges Rey nel 1983:

la definizione corretta di un concetto è quella che corrisponde alla sua descrizione ottimale, che non è necessariamente nota a chi usa il concetto in modo competente.

Naturalmente la necessità di assumere l'esistenza di entità come i concetti della teoria classica, oggettivi, *mind-independent* e tuttavia imprescindibili per una grande (e importante) parte della cognizione umana, va adeguatamente supportata e dimostrata.
Per i sostenitori del platonismo dei concetti, in effetti, tali entità astratte assolvono a due funzioni principali: la funzione *metafisica* e quella *semantica*.
La prima fa riferimento ad una nozione *forte* di concetto secondo la quale un concetto individua il *modo di essere* di una cosa. In altri termini, la definizione (su cui il concetto è fondato) esprime ciò che l'oggetto *è* nelle sue *caratteristiche essenziali*, in quello, cioé, che *lo fa essere esattamente quella cosa* e non un'altra. I concetti si riferiscono dunque alle *tassonomie reali* e non sono legati, di per sé, all'aspetto prettamente *epistemologico* concernente ciò che mi è effettivamente *noto* di quell'oggetto. La categorizzazione (con i suoi connessi criteri e procedure) non coincide con la distinzione reale tra i concetti, per cui è possibile che gli strumenti (concreti e di rappresentazione mentale) da noi adottati per operare una distinzione tra gli oggetti del mondo portino a situazioni di *vaghezza* e comunque di *difficoltà tassonomica*, laddove la natura intrinseca delle cose è invece in sé ben determinata e non coincide pienamente con ciò che le *nostre* tassonomie (*diverse* da quelle *reali* fornite dai concetti) riescono a mettere in evidenza riguardo ai caratteri essenziali delle cose stesse.
Quanto alla funzione semantica, il punto di partenza è la connessione tra concetti e significati. Se dico: “Isaac Newton è lo scopritore dei tre principi fondamentali della dinamica classica”, sto certamente definendo il significato del termine singolare “Isaac Newton”, ma, ad un tempo, sto anche stabilendo in cosa consiste il concetto di “Isaac Newton”.

Anche per la funzione semantica, come per quella metafisica, occorre (per molti autori) individuare una chiara distinzione dagli aspetti prettamente epistemologici. Per riprendere l'esempio sopra riportato, "Isaac Newton" non designa una nostra rappresentazione, ma si riferisce ad un ben preciso essere umano, a prescindere da come noi possiamo concretamente apprendere della sua esistenza, da come (e se) siamo in grado di sapere di lui e da ciò che effettivamente conosciamo della sua persona, di quello che ha scritto o delle vicende della sua vita. In altre parole, il concetto di "Isaac Newton" non consiste né nelle nostre procedure di conoscenza del grande scienziato inglese, né nell'immagine che ognuno di noi può costruirsi (nella propria rappresentazione soggettiva) riguardo a tale importante personaggio.

Hilary Putnam ha scritto la frase, divenuta poi celebre, "Il significato non è nella testa", proprio per sintetizzare, quasi in uno *slogan*, il fatto che il riferimento dei nostri termini linguistici coincide con una realtà esterna, oggettiva, *nel mondo* e non con un costrutto della nostra vita mentale. Una frase simile, per i sostenitori del platonismo dei concetti, potrebbe essere pronunciata riguardo appunto al concetto ("Il concetto non è nella testa"), con l'obiettivo di chiarire il fatto che un concetto, non risolvendosi in una rappresentazione, determina un significato inteso come riferimento oggettivo ad un aspetto o struttura del mondo. Se l'espressione "Isaac Newton è lo scopritore dei tre principi fondamentali della dinamica classica" potrebbe essere il modo di definire il concetto di "Isaac Newton" per impostazioni non platoniste, dal momento che nella frase riportata il concetto in questione viene fatto coincidere con una descrizione (una *descrizione definita*, secondo la nomenclatura utilizzata, per esempio, da Russell) e dunque con un dato insieme di conoscenze sull'uomo Isaac Newton, il platonista richiederebbe invece di esplicitare la natura del concetto in termini che non sono fondati su conoscenze specifiche intorno al grande fisico britannico, ma, al contrario, sono oggettivamente corrispondenti all'ente effettivo Isaac Newton esistente nel mondo e alla sua natura.

La teoria dei concetti cognitivi fa invece assegnamento, per raggiungere una comprensione dell'idea di concetto, sui risultati degli studi sulla cognizione, che conferiscono ai processi di categorizzazione (e alle conseguenti rappresentazioni mentali) il ruolo di costruttori dei concetti e del modo in cui essi vengono impiegati nei diversi compiti cognitivi. E poiché la ricerca sperimentale in psicologia ha messo in evidenza che la categorizzazione avviene sulla base di *similarità*, e *tipicità*, che vengono valutate dai soggetti umani (su base percettiva) secondo *gradi* e *intensità* diversi, questa teoria dei concetti non dà alcuna importanza alle definizioni, che non ammettono gradi, ma soltanto un'appartenenza sì/no ad un certo insieme, e non sono basate su alcuna valutazione di *similarità* tra oggetti concreti (o di maggiore o minore *distanza* di un oggetto concreto da un rappresentante *tipico* della categoria che corrisponde al concetto).

La teoria dei concetti cognitivi risolve dunque il concetto in un processo di raggruppamento di oggetti secondo la loro più o meno spinta assimilabilità rispetto ad una certa proprietà, e pertanto ritiene che il concetto coincida con un compito cognitivo ed una rappresentazione mentale, giungendo alla conclusione che *non esiste* il concetto come *oggetto astratto indipendente dalla mente* e dall'attività rappresentativa umana.

L'esempio forse più importante (in quanto più influente nel dibattito filosofico e psicologico sui concetti) di teoria cognitiva sulla natura e il ruolo dei concetti dal punto vista sia metafisico che epistemico è dato dall'approccio in termini di *prototipi*.

Le similarità tra oggetti su cui la concezione dei prototipi è basata sono similarità di carattere complesso, nel senso che i fondatori di tale concezione non hanno pensato ad un genere di concetti che corrispondano a categorie di oggetti aventi tutti in comune una proprietà o un insieme comunque ben definito di proprietà.

Diversi autori che hanno sostenuto (e/o sostengono) questa teoria (si pensi, ad esempio, a Rosch e Mervis) hanno basato la loro visione e il loro programma di ricerca sul concetto di *somiglianze di famiglia* di L. Wittgenstein, introdotto in alcuni ben noti passi delle *Ricerche filosofiche*, come il seguente:

Non dire: "Deve esserci qualcosa di comune a tutti, altrimenti non si chiamerebbero 'giuochi'", ma guarda se ci sia qualcosa di comune a tutti. - Infatti, se li osservi, non vedrai certamente qualche cosa che sia comune a tutti, ma vedrai somiglianze, parentele, e anzi ne vedrai tutta una serie. [...] E il risultato di questo esame suona: Vediamo una rete complicata di somiglianze che si sovrappongono e si incrociano a vicenda. Somiglianze in grande e in piccolo.

Il filosofo austriaco mette in evidenza, nel celebre brano sopra riportato, come il concetto di *giuoco linguistico* non possa poggiare sull'idea di un elemento, proprietà o aspetto condiviso da tutti gli oggetti che possono essere sussunti sotto, appunto, quel concetto. Vi sono piuttosto molti aspetti in comune, ma non tra tutti i membri della categoria corrispondente al concetto, bensì tra i membri di ognuno di diversi sottoinsiemi della categoria, tenendo inoltre presente che, in generale, tali sottoinsiemi possono sovrapporsi parzialmente e che ogni sottoinsieme ha un suo specifico gruppo di proprietà comuni ai suoi membri. La rete delle somiglianze può essere dunque anche molto complessa e in generale non implica, per usare le parole di Wittgenstein, *qualcosa di comune a tutti* gli oggetti che si vogliono categorizzare. Essa è pertanto più vicina alla metafora della *famiglia* che all'idea di categoria nel senso classico del termine, come lo stesso Wittgenstein dichiara nel seguito dello stesso paragrafo delle *Ricerche*:

Non posso caratterizzare queste somiglianze meglio che con l'espressione "somiglianze di famiglia", infatti le somiglianze che sussistono tra i vari membri di una famiglia si sovrappongono e s'incrociano allo stesso modo: corporatura, tratti del volto, colore degli occhi, modo di camminare, temperamento, ecc. ecc. - E dirò: i 'giuochi' formano una famiglia.

La teoria dei prototipi è – possiamo dire – il modello psicologico più vicino alla concezione che si basa sulle somiglianze di famiglia wittgensteiniane.

Il prototipo, nella definizione che ne dà questa teoria, è l'esemplare più tipico di una categoria. Secondo l'approccio prototipista, dunque, la mente umana si rappresenta un concetto mediante la rappresentazione di un prototipo, ovvero dell'esemplare più tipico della categoria che corrisponde a quel concetto. Ovviamente, ciò significa che questa teoria deve dare una descrizione convincente di come viene valutata (dalle nostre facoltà cognitive di alto livello) la tipicità. In linea molto generale, i modelli prototipisti si distinguono, in ordine a questo aspetto, in tre tipologie: modelli basati sulle *proprietà più frequenti*, sulle *proprietà diagnostiche* e sulla rappresentazione delle proprietà tipiche in *dimensioni*.

Particolarmente interessanti per gli scopi di questo lavoro sono le cosiddette *teorie della teoria*. Tali modelli si basano sull'idea che i concetti siano essenzialmente *mini-teorie*. Sinteticamente parlando, se ci chiediamo in che cosa consista il concetto di una data categoria C di oggetti, la risposta di una teoria della teoria sarà che esso consiste in una *teoria* su C.

Tutte le conoscenze che abbiamo su C (la categoria data di oggetti) intervengono a formare il concetto di C, facendo di questo un insieme più o meno strutturato di asserti sugli oggetti di C. Naturalmente tale definizione pone il problema della scelta delle proposizioni che, per così dire, partecipano alla costituzione del concetto. Relativamente a questo aspetto, esistono opzioni più o meno olistiche nella delimitazione dell'area di conoscenze o proposizioni che individua il concetto. Un olismo radicale o comunque molto spinto intende un concetto come una vera e propria teoria sul mondo, dal momento che, essendo la rete complessiva delle conoscenze globalmente interdipendente, non è possibile stabilire dove finisce l'area di asserti relativa al concetto A e inizia quella relativa al concetto B, per cui, cercando di definire l'insieme delle proposizioni che costituisce un dato concetto, si arriva alla fine a coinvolgere l'intero spettro degli asserti che siamo in grado di formulare sul mondo. Altri approcci (cosiddetti molecolaristi) sono meno olistici, nel senso che limitano l'insieme delle conoscenze che definisce un concetto ad una parte di una teoria su di un certo ambito o dominio problematico.

Vi sono poi differenze nel livello di strutturazione della teoria con cui il concetto, secondo i modelli in questione, va identificato. Per alcuni autori si tratta di qualcosa di molto vicino ad una vera e propria teoria scientifica (dunque con un alto livello di strutturazione), per altri potrebbe essere anche un insieme di conoscenze molto più frammentario e pertanto molto meno strutturato.

Le teorie della teoria sono state sviluppate prevalentemente da psicologi cognitivi (Gopnik, Meltzoff, per dire solo due nomi dei principali), dando poi lo spunto per interpretazioni ed ulteriori articolazioni di carattere filosofico.

Vi è però un approccio nato e sviluppatosi in un ambito prettamente filosofico che si avvicina molto all'idea di fondo delle teorie della teoria; è l'*inferenzialismo* del filosofo americano Robert Brandom.

Secondo Brandom, il *possesso* di un concetto è dato dalla capacità di comprendere e formulare un certo numero di inferenze tra proposizioni che utilizzano quel concetto. Maggiore è tale numero di inferenze, migliore è il possesso del concetto.

Tutte le inferenze che coinvolgono un dato concetto sono valide ai fini del consolidamento del possesso di quel concetto; non vi sono inferenze particolari che hanno un carattere definitorio in relazione al concetto, di contro ad inferenze, diciamo così, secondarie. *Qualunque* inferenza che si basi su di un certo concetto ha esattamente lo stesso *diritto* di tutte le altre di partecipare alla definizione del possesso del concetto medesimo.

L'idea di Brandom ha una radice in una nobile tradizione filosofica novecentesca, quella wittgensteiniana. All'inizio delle *Ricerche filosofiche*, Wittgenstein traccia un'interessante distinzione tra il mero addestramento ostensivo all'uso di una determinata parola e l'effettivo *intendere* il senso di ciò che è stato ostensivamente definito (la *comprensione* della definizione ostensiva). Il vero *afferrare* il concetto che la definizione ostensiva delinea (passando, *inizialmente*, attraverso un processo di addestramento di tipo *meccanico*) si ha quando il soggetto è in grado di giocare un gioco molto più complesso del semplice associare una parola ad una data proprietà percettiva, per esempio quando riesce a stabilire che, *poiché* un certo oggetto è x (la parola-concetto a cui è stato addestrato ostensivamente), *allora* non può essere – poniamo – y (es.: ho il concetto di blu non soltanto se so riconoscere un oggetto blu, ma se ho anche ben chiaro il fatto che, *poiché* un dato oggetto è blu, *allora* non può essere giallo), ovvero quando riesce a compiere delle *inferenze* valide che si basano su quel concetto.

Per Brandom, analogamente a ciò cui accenna Wittgenstein nel passo sopra richiamato delle Ricerche filosofiche, il ruolo dell'abilità a costruire inferenze nel possesso dei concetti è un ruolo assolutamente centrale e parimenti centrale è, per conseguenza, il ruolo delle capacità logiche (*in primis* quello dell'abilità nell'uso del condizionale). La logica consente di esplicitare le inferenze implicitamente contenute nello *stadio*, per così dire, *non logico* del concetto e pertanto assicura al soggetto il vero possesso epistemico del concetto stesso.

La visione di Brandom si distanzia invece da quella di Wittgenstein per ciò che riguarda il ruolo della capacità di fornire ragioni a sostegno delle proprie affermazioni contenenti un dato concetto. Non basta, secondo Brandom, per possedere un concetto, conoscere e saper usare la *grammatica* che lo riguarda (come era per Wittgenstein), ma bisogna anche saper *dare ragioni*, produrre argomentazioni a favore della verità di quanto si afferma, giocare, insomma, il gioco ben più complesso del *fornire giustificazioni* e sostenerle (ed anche per questo scopo, anzi *a fortiori* per questo scopo, le abilità logiche hanno un ruolo essenziale).

Va inoltre sottolineata un'altra caratteristica affatto precipua (e, a parere di chi scrive, di fondamentale importanza) dell'approccio di Brandom: la distinzione netta tra concetto e riferimento (ovvero, ad un livello più ampio e più generale, tra filosofia del concetto e teoria del significato).

Possiamo illustrare tale distinzione esaminando un'obiezione sollevata da più parti all'impostazione di Brandom e la risposta che, dal punto di vista di questa impostazione, può essere data. L'obiezione utilizza il celebre 'esperimento mentale' (ideato da Hilary Putnam) di *Oscar e il suo gemello su Terra gemella*. Se Oscar e il suo gemello sul pianeta chiamato Terra gemella (in tutto e per tutto simile alla Terra, tranne che per una diversa molecola dell'acqua, H_2O sulla Terra, XYZ su Terra gemella) chiamano *acqua* due liquidi chimicamente diversi (anche se con proprietà del tutto identiche sotto ogni punto di vista), potremo dire che hanno lo stesso concetto di acqua? Secondo l'approccio di Brandom, dovremmo poterlo affermare, in quanto, avendo i due liquidi le stesse proprietà, le condizioni di possesso non possono che essere le stesse. D'altra parte, il riferimento del termine *acqua*, per Oscar e per il suo gemello su Terra gemella, è diverso: H_2O per Oscar, XYZ per il suo gemello. Dunque sembra proprio che lo stesso concetto possa avere due riferimenti diversi, quello valido sulla Terra e quello valido su Terra gemella.

Per i detrattori dell'approccio brandomiano, ciò non è possibile: non ha alcun senso che un dato concetto non individui univocamente il proprio riferimento.

In realtà la risposta (in spirito brandomiano) a questo apparente paradosso è molto semplice: non è affatto un problema che Oscar e il suo gemello abbiano lo stesso concetto in riferimento a due liquidi diversi. Il problema delle *proprietà semantiche* del vocabolo *acqua* e il problema del *concetto* di acqua sono due questioni completamente distinte. Riferimento e concetto non sono necessariamente legati da una corrispondenza uno-a-uno. Questo, almeno, nell'ottica inferenzialista della filosofia di Brandom, in quanto, in tale ottica, il concetto è individuato da certe condizioni (le condizioni di possesso) che si risolvono in comportamenti di natura sia verbale che non verbale. Se tali comportamenti sono perfettamente sovrapponibili (nel caso di Oscar e in quello del suo gemello), il concetto *è* lo stesso, e il problema semantico del riferimento di *acqua* è semplicemente un *altro* problema.

In conclusione dell'esposizione che riguarda l'inferenzialismo di Brandom (ed anche di questo paragrafo) possiamo dire che, per il Nostro, ciò che va chiaramente e lucidamente definito (in sede filosofica) non è tanto la *natura* in sé stessa del concetto, quanto il *modo* in

cui *possediamo* i concetti.
Tale modalità di possesso (per come la intende Brandom) ha, come vedremo, un'inequivocabile capacità di descrivere e rendere conto filosoficamente del modo in cui si formano i concetti sistemici delle scienze moderne e del ruolo che tali concetti hanno nell'impianto generale del *discorso* scientifico contemporaneo (compresa la connessione di tale *discorso* con le teorie matematiche).

5.2 Le leggi nelle scienze della natura e i procedimenti di generalizzazione.

Si è già accennato al fatto che il rilevamento di *similarità formali* (essenzialmente di tipo dinamico) tra diversi sistemi fisici è alla base della formulazione delle leggi del mondo naturale che la scienza moderna pone a fondamento della propria descrizione di oggetti, fenomeni e proprietà degli enti in essi coinvolti.
L'individuazione di una certa similarità, o di un certo insieme di similarità, relative ad un dato oggetto o fenomeno permette infatti di elaborare proposizioni (e formule matematiche) che abbiano *validità generale*, fatto evidentemente essenziale perché tali proposizioni e formule matematiche possano assurgere al rango di *leggi* e non rimangano soltanto mere descrizioni (più o meno convincenti) di *casi particolari*.
Lo strumento fondamentale per la costituzione in legge generale ed universale della definizione di una certa similarità è, a parere di chi scrive, il concetto.
Senza l'elaborazione di opportuni concetti che consentano di strutturare sul piano linguistico e di pensiero la descrizione generale del fenomeno in esame non sarebbe infatti possibile articolare ed enunciare alcuna legge universale della natura.
Il concetto si presenta in effetti come il principale *ponte cognitivo* tra il rilevamento, puramente constatativo, della similarità e la sua descrizione, comprensione e spiegazione in termini di legge. Su di esso si incardina la struttura conoscitiva similarità-generalizzazione-legge, di cui il procedimento di concettualizzazione costituisce, a ben guardare, il vero *motore* costruttivo e formativo (la stessa individuazione della similarità e la possibilità di pensarla in termini di generalità e quindi di legalità naturale dipendono, ovviamente, dall'elaborazione di adeguati concetti descrittivi, senza i quali la stessa similarità non

potrebbe essere *vista* e cognitivamente *colta* come proprietà saliente del fenomeno studiato).
E' in virtù di tale aspetto del problema che la teoria filosofica del concetto ha un'importanza certamente non trascurabile in riferimento alla questione del ruolo degli enti matematici nell'elaborazione di quelle leggi delle scienze della natura che sono fondate sull'individuazione di similarità tra sistemi fisici.
La domanda essenziale cui bisogna rispondere a tal proposito è: qual è il rapporto tra concetto e similarità nelle leggi della natura?
Per articolare un'adeguata risposta a questo fondamentale interrogativo, dobbiamo innanzitutto chiarire il carattere *formale* delle similarità cui si fa riferimento in questo lavoro.
Riprendendo l'esempio già citato dell'oscillatore armonico, possiamo renderci conto in modo sufficientemente esaustivo di tale carattere formale delle similarità qui in gioco. Oscillatori sono, per fare alcuni esempi, i sistemi massa-molla, i pendoli, certi circuiti elettrici (in corrente alternata), etc.
E' chiaro che l'esame delle caratteristiche intrinseche degli oggetti che costituiscono tali sistemi (gravi, molle, fili, conduttori elettrici, ...) non rivela alcuna proprietà comune ai sistemi sopra elencati. Cosa vi può essere di *simile* (in modo inerente agli oggetti stessi) tra una molla, un conduttore, il filo di un pendolo? Evidentemente nulla (se non aspetti del tutto ininfluenti in ordine al problema della determinazione delle leggi dell'oscillatore armonico).
Il punto della questione è che la similarità che stiamo ricercando non riguarda aspetti di immediata percezione sensoriale (forma, colore, ...), ma piuttosto alcuni aspetti essenziali della *dinamica* di questi sistemi *una volta che* tale dinamica sia stata descritta secondo un determinato linguaggio e determinati strumenti e concetti matematici.
Ciò che oscilla, in un pendolo, è la grandezza fisica posizione (del grave), mentre, in un circuito, ad oscillare sono tutt'altre grandezze, per la precisione quelle variabili fisiche (differenza di potenziale, intensità di corrente, campi elettrico e magnetico) che descrivono l'elettrodinamica del sistema.
Non vi è dunque una similarità tra elementi o aspetti *concreti* specifici dei due sistemi, bensì una similarità *formale* tra gli andamenti temporali di grandezze fisiche del tutto diverse e che descrivono, *nel concreto*, realtà fisiche del tutto diverse.
Ma tale similarità formale può essere individuata soltanto grazie alla *descrizione*

matematica adottata (in termini di specifiche grandezze fisiche viste come funzioni del tempo e delle equazioni che governano tali grandezze) e non emerge certo solo *guardando* in modo *ingenuo* i due sistemi in oggetto, come se la similarità in questione fosse un fatto percettivo *immediato* e non risultasse invece dal confronto di rappresentazioni *sofisticate*, costituite da concetti, linguaggi ed enti astratti (*in primis* gli enti matematici) che devono già preesistere, in modo da fornire i termini fondamentali mediante i quali definire la similarità.
Nel panorama generale della fisica (sin dalle sue origini galileiano-newtoniane fino, ancor più, ai giorni nostri) il ruolo di tale linguaggio strutturato e matematizzato nella produzione di quei concetti (dai classici oscillatori meccanici ed elettrici ai sistemi dissipativi ai concetti di ordine, caos ed organizzazione impiegati non soltanto in fisica, ma anche nell'ambito delle altre scienze della natura) che hanno permesso alla scienza di raggiungere un alto livello di generalità ed unità descrittiva, è senz'altro un ruolo di grande importanza, che difficilmente può essere ritenuto non strettamente necessario e dunque dispensabile.
Un esempio molto istruttivo che possiamo discutere per facilitare la comprensione del ruolo giocato da enti ed enunciati matematici nelle procedure conoscitive della scienza che portano a cogliere importanti *similarità* tra fenomeni naturali e, per conseguenza, a costruire *concetti* fondamentali per le moderne teorie scientifiche è proprio l'esempio dell'*organizzazione* di sistemi *complessi*, quali alcuni sistemi caotici in fisica o gli organismi viventi in biologia o ancora le menti e le società umane in psicologia e in sociologia.
E' noto che lo studio di tali sistemi, se condotto nel contesto della teoria generale dei sistemi, può dare dei risultati, in termini di *performance* sia *esplicative* che *predittive*, altrimenti non raggiungibili nell'ambito delle cornici concettuali standard della fisica, della biologia e delle scienze umane convenzionali.
All'origine di tale particolare capacità delle scienze sistemiche di descrivere e prevedere efficacemente le proprietà e il comportamento dei suddetti sistemi vi è molto verosimilmente l'abilità, esibita appunto dai modelli sistemici, di *catturare* l'essenziale aspetto dell'*organizzazione*.
Per *organizzazione* di un sistema complesso si intende quell'insieme di proprietà *collettive*, e dunque *emergenti* rispetto al livello dei costituenti elementari del sistema stesso, che si danno proprio in quanto proprietà dell'*insieme* e pertanto sono il risultato non soltanto delle proprietà *individuali* dei costituenti elementari, ma anche di una specifica configurazione di

connessioni e *relazioni* tra tali costituenti, dunque di una specifica *struttura ordinata* che si forma e permane stabilmente nel tempo grazie alle particolari interazioni sussistenti all'interno del sistema stesso.

Il concetto di organizzazione, per come è stato testé definito, è quindi fondamentalmente imperniato sul concetto di relazione. In concreto, però, il genere di relazioni che hanno effettivamente rilevanza per poter *pensare* (e anche, successivamente, precisare in termini formali) l'organizzazione tipica della complessità sistemica è quello delle *relazioni matematiche*.

Ovviamente, nel caso delle scienze della natura rapporti e relazioni di carattere matematico intervengono sempre tra grandezze che misurano proprietà di enti e processi *fisici* in gioco nella dinamica del sistema considerato (le cosiddette grandezze *fisiche*, appunto), ma è proprio il fatto che tali proprietà siano *quantitativamente* misurabili a consentire, grazie all'utilizzo di metodi e concetti della matematica atti ad elaborare e *connettere* tra di loro siffatte misure, l'articolazione di modelli teorici in grado di spiegare i comportamenti più salienti del sistema che è oggetto di studio. Quando il grande pisano Galileo Galilei ha dichiarato che Dio ha scritto il libro della Natura nella lingua della Matematica, intendeva proprio dire, ritengo, che il *framework* matematico che elabora ed interconnette le *misure* delle grandezze fisiche ha una potenza esplicativa che nessun altro schema teorico meramente *qualitativo* (come quello della precedente fisica aristotelica) è capace di raggiungere. I concetti matematici non sono soltanto mezzi per *precisare* sul piano quantitativo strutture teoriche già sostanzialmente stabilite, ma *sono essi stessi* il fondamento di quelle strutture teoriche. Tale idea, che costituisce in definitiva il *leitmotiv* principale di questo lavoro, si presenta, alla luce di quanto si sta sviluppando in questo capitolo riguardo ai concetti sistemici, come la naturale conseguenza dell'abilità delle teorie matematiche ad *intercettare* e descrivere compiutamente similarità formali di grande importanza e salienza tra svariati sistemi e processi fisici.

E se in biologia e in ecologia (ed anche in alcune scienze umane) i concetti sistemici (con il loro necessario contenuto di idee ed enti matematici) permettono di comprendere proprietà e fenomeni di un *macrolivello* non riducibile alla semplice *somma concettuale* di proprietà e fenomeni dei singoli costituenti elementari del sistema (*microlivello*), nella fisica teorica (e in particolare nella fisica delle particelle, nella teoria dei campi e in Relatività, sia speciale che generale) il procedimento di astrazione per *cattura di similarità* ha consentito, e probabilmente può ancora consentire, di trovare *leggi fondamentali*.

Bisogna considerare, comunque, che, *a loro modo*, anche le leggi sistemiche che caratterizzano ambiti come le scienze biologiche o l'ecologia (o economia e sociologia) sono spesso leggi fondamentali di quegli stessi ambiti. Per un biologo, infatti, è assolutamente fondamentale comprendere la termodinamica di un sistema aperto e come le leggi di questa scienza consentano di giustificare il mantenimento di uno stato stazionario lontano dall'equilibrio in un organismo vivente, quanto (e probabilmente ancor più di quanto) è per lui fondamentale conoscere l'esatta struttura di un mitocondrio o di un tessuto cartilagineo animale. Così come per un economista è assolutamente fondamentale avere almeno una qualche cognizione di quali possano essere le leggi che determinano un certo equilibrio di scambi commerciali e produzioni di beni di consumo, quanto (e probabilmente ancor più di quanto) è per lui fondamentale conoscere l'esatta natura dei beni prodotti e scambiati.

Leggi e concetti sistemici si collocano ad un livello di grande generalità (le stesse leggi e gli stessi concetti possono essere applicati a campi molto differenti tra loro), ma non per questo sono meno fondamentali delle leggi e dei concetti specifici delle singole discipline.

Inoltre l'approccio sistemico, proprio in virtù della sua capacità di affrontare questioni di carattere molto *generale* (trasversale alle diverse discipline particolari) mettendo a tema proprio l'*essenza* di tali questioni (al di là dei caratteri specifici che le stesse questioni assumono nei contesti delle discipline particolari), può indirizzare verso la giusta risposta ad alcuni classici interrogativi filosofici (che, per loro natura, sono sempre molto *generali* e poco legati allo specifico contesto applicativo).

Esempio tipico, a tal proposito, è il caso dell'antichissima questione dell'ordine e del disordine (si pensi già ai miti greci su Caos e Cosmo e a tutta la successiva riflessione filosofica, dall'Età classica fino ai giorni nostri, sulla natura dell'ordine e su come esso possa emergere dal disordine). Il concetto di *entropia* in Termodinamica e nella Teoria dell'Informazione fornisce in effetti uno strumento molto importante (e del tutto trasversale e generale) per affrontare il problema dell'ordine/disordine da un punto di vista strettamente scientifico e, nello stesso tempo, offre stimolanti spunti di riflessione alle discipline filosofiche, a cominciare proprio dalla Metafisica e dall'Epistemologia.

Ancora una volta, i caratteri della proprietà d'ordine misurata dalla grandezza entropia (per rimanere all'esempio del problema, scientifico e filosofico, dell'ordine) sono deducibili *soltanto* grazie ad un ben preciso *apparato matematico*, costituito da enti, concetti e relazioni definiti nel contesto della Teoria degli Insiemi e in quello della Teoria della Probabilità.

E' certamente vero che le scienze sistemiche contengono anche alcuni concetti di carattere qualitativo, ma è assolutamente chiaro, a parere di chi scrive, che tali concetti qualitativi *necessitano*, per poter essere declinati e configurati in modo scientificamente utile ed efficace, di venire strutturati secondo idee, teorie ed apparati concettuali e formali di carattere matematico.

Quanto detto finora (in questo paragrafo) mostra la rilevanza dell'individuazione di similarità di carattere strutturale e formale tra sistemi diversi (nelle scienze della natura ma anche in alcune scienze umane) ai fini della formulazione di alcuni importanti principi e leggi.

La *similarità* viene, per così dire, 'catturata' attraverso l'elaborazione di un *concetto*, il quale, a sua volta, almeno nella maggior parte dei casi, è imperniato sull'impiego di uno o più *enti matematici*.

Il concetto è dunque il cardine, epistemicamente parlando, su cui è fondato l'utilizzo, *indispensabile*, dell'ente matematico, utilizzo che è a sua volta finalizzato alla definizione della similarità.

E' dunque importante, dal punto di vista filosofico, capire *come* il concetto, attraverso l'impiego dell'ente matematico (e, con esso, di una intera teoria matematica), *coglie* la similarità e la rende fruibile per il lavoro descrittivo ed esplicativo della scienza.

La questione della natura del concetto è ovviamente, in riferimento a tale problema, di grande rilevanza.

Si è già accennato al legame (sia metafisico che epistemologico) tra concetti e similarità. Proprio in dipendenza da come viene concepito tale legame si hanno diverse opzioni sulla natura del concetto.

Ciò che qui interessa della questione del legame tra concetti e similarità è l'aspetto dell'emergenza della similarità (e del concetto ad essa associato) all'interno di un certo *sistema di rappresentazione*. Come già accennato, con l'espressione *sistema di rappresentazione* intendiamo un insieme strutturato di definizioni, concetti e connessioni (dimostrativamente) stabilite tra concetti, in altre parole una *teoria*.

All'interno di un tale sistema o struttura teorica, la specifica considerazione di un dato aspetto o problema può rendere *visibile* la *salienza* di una certa classe di similarità, portando, in modo tanto naturale quanto necessario, alla costruzione del concetto che corrisponde alla similarità *vista* (o, se si preferisce, *emersa* al nostro *sguardo*).

Si noti che è *soltanto all'interno* della teoria o sistema di rappresentazione adottato che la similarità considerata diventa visibile e individuabile. Dobbiamo, cioè, già avere tutta una serie di concetti e modi di rappresentazione della realtà naturale oggetto del nostro studio per potere *cogliere* un certo tipo (scientificamente saliente, importante sul piano teorico e tecnicamente utile) di similarità.

Nei casi qui di interesse il sistema di rappresentazione contiene necessariamente alcuni concetti fondamentali che sono di natura matematica. L'*indispensabilità* degli oggetti matematici che tali concetti implicano è dunque una diretta conseguenza del tipo di concetti che costituiscono il sistema di rappresentazione.

Nel contesto in cui ci stiamo muovendo delle teorie sistemiche (o che, comunque, utilizzano concetti sistemici) l'indispensabilità degli enti matematici è evidente proprio in relazione alla similarità che viene colta e descritta nel concetto sistemico, dal momento che, come si è già sottolineato, un certo genere di similarità (di grandissima importanza in fisica e nelle scienze naturali in generale) può essere rivelato soltanto mediante uno *sguardo* fortemente *nutrito* di idee e teorie matematiche. Il concetto sistemico è infatti per sua natura un concetto trasversale alla natura particolare dei singoli sistemi che lo esemplificano (che possono anche essere sistemi appartenenti addirittura a scienze diverse!) e dunque il suo contenuto *cattura* una similarità che si presenta ad un livello molto *astratto* e formale.

E' proprio tale livello altamente *astratto* della similarità coinvolta che richiede l'utilizzo della matematica per essere colto e descritto (nel concetto sistemico).

La questione del livello di astrazione delle strutture concettuali costruite attraverso l'approccio sistemico alle similarità è, ovviamente, parte integrante del problema della natura stessa dei concetti.

E' chiaro, per esempio, che i concetti cui si sta fecendo qui riferimento non possono essere fondati sul criterio della *distanza* (in un opportuno *spazio concettuale*) da un certo esemplare tipico. Il procedimento che consente di accostare tra di loro sistemi, per altri versi del tutto eterogenei, sulla base di una similarità formale non è rappresentabile mediante la valutazione di una maggiore o minore vicinanza ad uno o più esemplari dati, dal momento che il carattere su cui è fondato tale accostamento non è misurabile *analogicamente* su di una scala *continua* di intensità. La sussunzione di un certo insieme di sistemi sotto lo stesso concetto è basata sul riconoscimento di una *ben determinata* caratteristica, come un certo tipo di andamento temporale per alcune variabili fisiche che descrivono i sistemi considerati, o la conservazione (nel tempo) di una data grandezza, o ancora certe proprietà di stabilità (o instabilità) dipendenti da ben precise condizioni (anch'esse definibili in modo trasversale rispetto agli ambiti particolari dei singoli sistemi considerati) a cui i sistemi in oggetto sono sottoposti.

Tale *ben determinata* caratteristica è pensabile, formalmente definibile e concretamente riconoscibile soltanto, abbiamo detto, *all'interno di una teoria*.

Un concetto sistemico sembra quindi dipendere strettamente da molto di ciò che noi *sappiamo* dei sistemi che costituiscono l'estensione del concetto medesimo.

In molti casi tale dipendenza è così forte e profonda da spingere a pensare che, in realtà, il concetto *si riduca completamente* al contenuto teorico rilevante nei casi considerati. Siamo qui molto vicini alla tesi fondamentale di quelle filosofie del concetto che si fondano sull'idea del *concetto come teoria* (come le *teorie della teoria* e, secondo una certa interpretazione, l'inferenzialismo di Brandom).

Chi scrive ritiene che, in certi (e molto importanti) casi, sia in fisica che nelle scienze sistemiche in generale, tale tesi sia filosoficamente attendibile, e ciò proprio in virtù della rilevanza, ai fini della fondazione dei concetti in questione, delle teorie matematiche nella costruzione dei concetti stessi. Il contenuto teorico di carattere matematico si rivela assolutamente indispensabile nell'ambito dell'intero contenuto teorico rilevante per la definizione del concetto. Il riconoscimento della similarità formale, infatti, non avviene sulla base di una ingenua *individuazione di rassomiglianza*, bensì utilizzando ben precisi asserti, conoscenze e riferimenti ad enti astratti che fanno parte integrante del tessuto epistemico e linguistico di profonde teorie matematiche.

L'uso del riferimento ad enti astratti (gli oggetti matematici, nel nostro caso) è essenziale all'interno di una tale genesi del concetto, proprio in quanto, per giungere al rilevamento della *similarità* formale, non basta *notare* una generica *somiglianza* sotto un certo aspetto (per esempio quello dell'andamento temporale di una o più grandezze fisiche). Bisogna, in realtà, utilizzare un dato oggetto matematico (per rimanere all'esempio citato poco più sopra, una certa funzione che descriva quell'andamento temporale: quadratica, polinomiale, esponenziale, ...) a cui le proposizioni della teoria possano far riferimento per definire un dato concetto (alla crescita esponenziale di una certa grandezza nel tempo corrisponderà, ad esempio, una ben precisa tipologia di sistema fisico e dunque un ben preciso concetto).

In relazione allo statuto epistemologico dei concetti sistemici e, in particolare, in relazione al ruolo conoscitivo del loro contenuto matematico formale va inoltre rilevata, a parere di chi scrive, l'importanza della visione del concetto che scaturisce dalle teorie della teoria e dall'inferenzialismo di Brandom riguardo alla ben nota questione (sopra accennata) della distinzione tra concetto e riferimento.

Come si è già messo in evidenza, i concetti sistemici *catturano* proprietà di carattere molto generale ed astratto (matematico formale, nella stragrande parte dei casi). Ciò significa che il riferimento che corrisponde ad un dato concetto sistemico non è univocamente fissato come, ad esempio, è fissato il riferimento che può essere associato al concetto di elettrone. Riprendendo, sempre a titolo di esempio, il caso dell'*oscillatore*, possiamo porre la seguente domanda: qual è il riferimento corrispondente al concetto di oscillatore? Un sistema massa-molla? Un circuito elettrico? Un atomo che vibra in risonanza con un'onda elettromagnetica? In realtà, tutte queste risposte (e diverse altre) sono valide. Si ha dunque una corrispondenza tra concetto e riferimento che non è uno-a-uno, in modo molto simile al genere di corrispondenza che si ha tra il concetto di acqua sulla Terra e su Terra gemella (che può essere considerato identico) e i suoi riferimenti sui due pianeti (le molecole, tra di loro ben distinte, H_2O e XYZ). Nel caso che stiamo qui discutendo dei concetti sistemici, questo tipo di corrispondenza tra concetto e riferimento è dovuto al carattere astratto e, in particolare, matematico formale delle proprietà *catturate* dal concetto, laddove, nell'esperimento mentale di Putnam, il concetto di acqua *cattura* proprietà di un livello certamente molto meno astratto (proprietà organolettiche, capacità di disciogliere varie sostanze, etc., insomma tutte quelle proprietà per le quali l'acqua è concretamente importante nella nostra vita e che, per essere rilevate e definite, non richiedono la conoscenza della struttura chimica del composto acqua), ma comunque – ed è ciò che qui interessa – *seleziona* determinate proprietà e ne *ignora altre*.

Naturalmente, a noi, in questa discussione, interessa anche il fatto che l'*effetto selettivo* della formazione del concetto sia tale da far sì che vengano *ritenute* le proprietà più astratte (matematiche, nel nostro caso) e allo stesso tempo vengano, per così dire, *scartate* le proprietà concrete e particolari dei sistemi fisici che esemplificano il concetto medesimo. Ma il punto, per ciò che riguarda il rapporto tra concetto e riferimento, è proprio quello che scaturisce dall'analisi dell'esperimento di Terra gemella in relazione alla visione inferenzialista del concetto: tale visione risulta appropriata per rendere conto filosoficamente del ruolo svolto dai concetti sistemici nelle scienze moderne e contemporanee e per spiegare la funzione essenziale delle teorie, e degli enti, matematici nella costruzione di questa particolare tipologia di concetti.

Altra (non secondaria) questione che concerne lo statuto epistemologico dei concetti sistemici è il problema del rapporto tra *concetto* e *rappresentazione*. Anche relativamente a questo aspetto, possiamo entrare nel vivo della questione discutendo un'obiezione che è stata rivolta nei confronti dell'approccio inferenzialista.

L'obiezione è la seguente. Supponiamo che due soggetti siano in grado di svolgere le stesse inferenze tra asserti che utilizzano un dato concetto, pur associando (e questo è il punto critico della circostanza qui immaginata) rappresentazioni diverse a quel concetto. Per esempio, possiamo supporre che uno dei due soggetti, ogni volta che l'altro percepisce il colore giallo, percepisca invece il blu, mentre, ogni volta che l'altro percepisce il colore blu, percepisca, viceversa, il giallo (in sostanza, le rappresentazioni percettive che i due soggetti hanno dei colori blu e giallo sono esattamente *scambiate*). E d'altra parte – sempre supponiamo - i due soggetti compiono inferenze del tutto identiche con i loro concetti di blu e giallo, per esempio entrambi sostengono che, se un oggetto è blu, non può essere giallo, oppure che, se un oggetto è giallo, allora è colorato, e via continuando con tutte le tipiche inferenze che i soggetti umani possono articolare sui colori. E' chiaro che un caso del genere è perfettamente concepibile (per quanto possa apparire strano ed essere neurologicamente alquanto improbabile), dal momento che lo scambio delle rappresentazioni percettive dei due colori è *completo* (avviene cioè in *tutti* i casi di oggetti blu e in *tutti* i casi di oggetti gialli).

A questo punto, per i detrattori di Brandom, l'approccio inferenzialista rivela un problema molto grave. Come può il concetto (di blu o di giallo) dell'esempio citato essere lo *stesso* nei due soggetti (per l'inferenzialismo *deve* esserlo, in quanto i due individui compiono le *stesse* inferenze con i due concetti) se il contenuto rappresentativo (di ognuno dei due concetti) è evidentemente *diverso* negli stessi soggetti (dove uno vede blu, l'altro vede giallo e viceversa)?

La risposta in stile inferenzialista può essere basata (abbastanza facilmente, in definitiva) sulla messa in discussione del legame concetto-rappresentazione. Se, ancora una volta, il comportamento (sia verbale che non verbale) del soggetto umano che consegue all'avere o al non avere determinati concetti non è influenzato dalla rappresentazione, che ruolo può avere questa nell'indagine filosofica sul concetto? Chiaramente, nessuno.

E' ovvio che l'esempio dell'obiezione, costruito tramite concetti percettivi (i colori), è facilmente utilizzabile per giungere a questa conclusione.

Nel caso di un concetto sistemico la questione è, a parere di chi scrive, un po' diversa. Vediamo in che senso e sotto quale aspetto.

Innanzitutto, qual è la rappresentazione che possiamo appropriatamente associare ad un concetto sistemico? Dobbiamo, per prima cosa, escludere le rappresentazioni percettive (come quelle relative al caso dei colori). L'idea di sistema dissipativo, ad esempio, non è legata ad una specifica rappresentazione percettiva. Possiamo senz'altro pensare ad un corpo che si muove su di un piano con attrito, o ad un circuito elettrico resistivo, o ad altri casi concreti in cui viene dissipata energia sotto forma di calore, ma nessuna di queste rappresentazioni (che hanno di per sé un contenuto percettivo) esprime adeguatamente ciò che vi è di precipuo ed epistemologicamente individuante nel concetto di sistema dissipativo. Ciò risulta evidente anche dal fatto che, se ammettessimo le rappresentazioni sopra elencate, non vi sarebbe una sola rappresentazione in corrispondenza al nostro concetto sistemico, ma molte (cosa ovviamente assurda per le rappresentazioni percettive; si pensi di nuovo al caso dei colori: non esistono, almeno in un singolo soggetto, diverse rappresentazioni del blu).

Nel caso di un concetto sistemico, in realtà, la rappresentazione è costituita di altri concetti (e di asserti) precedentemente introdotti e stabiliti. Si è già messo in evidenza come, per costruire concetti come quello di sistema dissipativo (o di oscillatore, o ancora di sistema organizzato, aperto, ordinato, ...), sia necessario tutto un *corpus* strutturato di definizioni, proposizioni, concetti, principi, leggi. Possiamo a buon diritto considerare l'*insieme* dei

concetti e delle loro *connessioni* su cui è fondato a sua volta il concetto sistemico come, in un certo senso, la *rappresentazione* del concetto sistemico stesso. Una tale rappresentazione, in effetti, è unica (a meno di trovare, come in taluni casi avviene, rappresentazioni logicamente equivalenti), dal momento che, a prescindere dalla natura particolare dei *mattoni* utilizzati per costruire l'*edificio* del nostro concetto sistemico (corpi macroscopici e piani con attrito? Conduttori resistivi e correnti elettriche? ...), le specifiche *connessioni* tra tali mattoni che il concetto sistemico seleziona come interessanti e scientificamente salienti sono certamente ben individuate. D'altra parte, risulta chiaro da quanto detto finora che, essendo le connessioni di cui è costituita la rappresentazione (nel senso qui definito) del concetto sistemico essenzialmente di natura logico-inferenziale, l'esistenza di questo tipo *sui generis* di rappresentazione non esclude il carattere, appunto, inferenziale del concetto medesimo, anzi, in qualche modo, lo conferma e rafforza.
Sulla natura matematica di molte delle più importanti connessioni logico-inferenziali che formano la *trama* di cui la rappresentazione del concetto sistemico è costituita si è già detto. Qui conviene soltanto sottolineare il fatto che determinate inferenze (spesso le più importanti ed essenziali per la costruzione del concetto) non sarebbero affatto possibili senza il supporto di complesse e sofisticate *assunzioni esistenziali* su fondamentali oggetti matematici come i numeri, le funzioni, gli insiemi (si pensi ai *gruppi* e alle loro applicazioni nella teoria dei campi, per dirne soltanto una ...).

5.3 *Complessità* e predicibilità.

Il problema del *calcolo* tra modelli matematici e sistemi fisici reali: una riflessione in chiave *complessa* sull'*indispensabilità*.

Se l'indispensabilità della matematica per le scienze della natura chiama in causa l'idea di poter descrivere e prevedere i fenomeni naturali attraverso teorie e modelli i cui concetti fondamentali rimandano a loro volta a teorie e concetti matematici, è necessario comprendere pienamente in che termini e in che senso la matematica è indispensabile nell'ambito di quella parte del discorso scientifico contemporaneo che adotta il punto di vista della teoria della complessità per spiegare e prevedere certe tipologie di fenomeni (che vengono appunto solitamente definiti complessi).

Il rapporto tra *complessità e predicibilità* ha infatti una natura specifica, per certi aspetti molto diversa da quella del rapporto tra *determinismo classico e predicibilità*.

Nell'analisi del rapporto tra *complessità e predicibilità* risulta infatti particolarmente rilevante il ruolo del *calcolo*, in un modo del tutto specifico e in una misura che supera di gran lunga la pur importante funzione che il calcolo stesso svolgeva nelle scienze deterministiche classiche.

Per vedere perché, dobbiamo innanzitutto ricostruire il compito assegnato dalla fisica del Sei e Settecento appunto al calcolo.

Per le scienze fisiche moderne ai loro albori il paradigma fondamentale della conoscenza scientifica era basato sull'idea che i fenomeni naturali seguissero rigorosamente delle *leggi*, esprimibili nel linguaggio della matematica, e in particolare dell'algebra, mediante *equazioni*.

Compito della conoscenza scientifica doveva essere quello di individuare tali leggi, ovvero tali equazioni, in modo da garantire una *predicibilità* dei fenomeni reali che, almeno in linea di principio, veniva assunta essere *senza limiti*. Le equazioni della meccanica newtoniana, modello fondamentale di riferimento per questa epistemologia della scienza moderna al suo stato nascente, garantivano infatti di essere *pienamente* (ovvero *a qualunque istante di tempo*, futuro o passato) risolubili alla sola condizione di conoscere i cosiddetti valori iniziali (o al contorno) di alcune grandezze fisiche.

Tra la *teoria* e l'effettivo *calcolo* relativo alle situazioni particolari di concreta e specifica applicazione non vi era *scarto* significativo.

Ovviamente, si era ben coscienti che non sempre tutti i dati concernenti appunto le condizioni iniziali potessero essere disponibili; ma questa problematicità di carattere essenzialmente pratico (cioè di calcolo) era vista (comprensibilmente) come una difficoltà non inerente al *senso* stesso della *risolubilità* del problema fisico e matematico considerato.

Per la scienza galileiano-newtoniana del Sei e Settecento il *significato* di *soluzione* di un quesito di tipo meccanico, e in generale fisico, appariva ben chiaro e privo di qualunque carattere di problematicità *interpretativa* e filosofica.

Sotto questo aspetto, è evidente che lo studio dei fenomeni complessi, e in particolare caotici, ha costituito per la fisica (e per le scienze tutte) una vera e propria *sveglia* sulla questione di cosa esattamente si *intenda* nel discorso scientifico per *soluzione* di un problema.

I fenomeni complessi, infatti, con la loro sensibilità alle condizioni iniziali e la possibilità di dar luogo a regimi di caos deterministico, sono fenomeni per i quali non si può più dire, tanto facilmente quanto inconsapevolmente, che la loro conoscenza risiede pressocché *totalmente* nella conoscenza delle equazioni che li regolano (come era per i problemi della meccanica newtoniana). E' noto infatti che, anche quando conosciamo bene tali equazioni, la natura complessa (in genere non lineare) di questo genere di fenomeni può rendere l'effettivo *calcolo* dello stato del sistema in oggetto (ad un tempo abbastanza lontano dall'istante a cui conosciamo le condizioni iniziali) *praticamente impossibile* (nel senso che un calcolo può, ovviamente, essere sempre sviluppato, ma i suoi *risultati* saranno del tutto *inaffidabili*).

Il momento del *calcolo* diventa qui assolutamente *critico*, ben lungi dall'essere soltanto un aspetto *meramente pratico* (nel senso riduttivo del termine) di una conoscenza (del fenomeno) del tutto definita e chiara nei suoi concetti fondamentali, nelle sue capacità predittive e nei suoi *significati*.

Cosa può voler dire, infatti, conoscere un fenomeno (o risolvere un problema) quando non siamo in grado di calcolare i valori esatti di tutte le variabili del sistema in oggetto (da un certo tempo in poi) a causa della dinamica complessa (e magari caotica) che caratterizza tale sistema?

Esempi tipici di una circostanza del genere sono quei fenomeni (e quei sistemi) la cui evoluzione temporale è contraddistinta dai cosiddetti *attrattori strani*. In estrema sintesi, lo stato del sistema, in una certa fase della sua storia evolutiva, non può essere previsto in tutti i dettagli (ovvero non possono essere previsti i valori precisi di tutte le grandezze che lo definiscono), ma possiamo agevolmente (e affidabilmente) prevedere che si troverà sull'attrattore strano (che rappresenta un insieme abbastanza ben delimitato di possibili stati del sistema).

Dunque non siamo in grado di determinare (in *qualunque* intervallo di tempo) la *traiettoria esatta* del sistema nel suo spazio degli stati (come avveniva nelle scienze deterministiche classiche, *in primis* la meccanica di Newton), ma possiamo con sicurezza affermare che, da un certo istante di tempo in poi, il sistema assumerà uno stato appartenente ad un certo insieme (l'attrattore). Previsione sì, ma entro certi limiti. Situazione senz'altro differente da quella considerata come paradigmatica dal determinismo classico, ovvero dal criterio fondamentale di scientificità adottato dalla fisica del Sei e Settecento. *Qualcosa* si può prevedere, ma *non tutto* (come era - o sembrava essere – nella scienza di Galileo e Newton)! La natura esatta di questo *qualcosa*, ovviamente, deve essere determinata proprio da quell'indagine scientifica che si assume il compito di analizzare i fenomeni adottando il punto di vista della teoria della complessità.

Se la questione del *calcolo* è diventata centrale, con essa è diventata altrettanto cruciale e dirimente anche la questione di *cosa* esattamente ci proponiamo (in scienza) di prevedere, e dunque di *cosa* dobbiamo poter dire del futuro di un sistema per poter affermare che abbiamo *risolto* un certo problema scientifico.

Se dal punto di vista della fisica galileiano-newtoniana non essere in grado di determinare esattamente lo stato di un sistema a tutti i possibili istanti di tempo significa *sempre* non essere in grado di *risolvere* il problema dell'evoluzione dinamica di quel sistema, per le scienze della complessità può non essere così, a condizione che (per esempio) si sia in grado di dire che lo stato del sistema, ancorché non del tutto determinabile, entrerà a far parte di un attrattore (che, ovviamente, deve essere ben definito e conosciuto).

A parere di chi scrive, va sottolineato che tale nuova concezione della *risoluzione* di un problema in scienza mette in evidenza una questione che era sempre stata profondamente e costitutivamente all'interno della definizione stessa di *indagine* e di *risposta* scientifiche, questione che la scienza classica del Sei e Settecento non aveva posto esplicitamente e consapevolmente, ma che nondimeno era *già* al centro dell'elaborazione dei suoi fondamenti, delle sue pratiche e procedure di indagine e, in generale, del suo statuto epistemico.

Da un punto di vista più ampio, infatti, la questione di *quale tipo di risposta* cerchiamo ad un certo quesito concernente un dato fenomeno (per poter definire *scientifiche* la procedura attraverso cui determiniamo la risposta e la risposta stessa) si inquadra nel vasto problema della definizione dei metodi di *calcolo esatti* e di quelli cosiddetti *numerici*.

E' noto che le equazioni differenziali non lineari che ordinariamente governano i sistemi complessi non possono, in generale, essere risolte mediante metodi esatti, ovvero non si è in grado di individuare le funzioni (delle variabili spaziali e temporale) che descrivono gli andamenti delle grandezze che caratterizzano il sistema, funzioni che sono appunto le incognite delle equazioni differenziali che regolano la dinamica del sistema. In tali circostanze (che rappresentano, per i sistemi complessi, la quasi totalità dei casi) bisogna dunque ricorrere ai cosiddetti metodi numerici. Tali metodi consistono nel calcolare *passo dopo passo* (sia nello spazio che nel tempo) il valore via via assunto dalla funzione considerata, in modo da, pur non conoscendo di quale funzione si tratti, riuscire a determinare il suo andamento *punto per punto* (in un dato dominio spaziotemporale finito) con un certo *grado di approssimazione* dipendente dal *passo* scelto per la risoluzione spaziale e per quella temporale e dal tipo di metodo utilizzato.

Il lettore attento avrà già individuato il problema epistemologico nascosto in questa descrizione (e definizione) delle metodologie matematiche numeriche (descrizione e definizione che, per altro, sono quelle correnti nel linguaggio scientifico odierno): in che senso un metodo numerico *non ci dà la conoscenza* della funzione incognita che vorremmo trovare, ma *soltanto* del suo andamento *punto per punto* (consentendoci un calcolo approssimato dei suoi valori in corrispondenza dei punti di una *griglia* spaziotemporale da noi scelta), a differenza di un metodo esatto, che, se fosse disponibile, sarebbe in grado di dirci che la funzione incognita cercata è – poniamo – una funzione algebrica, esponenziale, trigonometrica, logaritmica, o una certa funzione speciale anch'essa ben nota? Cosa sappiamo in più, *in realtà*, della nostra funzione incognita quando sappiamo che può essere espressa in termini di certe funzioni tipiche delle teorie matematiche correnti come le funzioni sopra citate? Tali funzioni tipiche, in definitiva, non sono anch'esse calcolabili soltanto in punti di un dominio discreto (una *griglia*, appunto) e con un certo grado di approssimazione? Per calcolare i valori effettivi di tali funzioni tipiche non si utilizzano, in ultima analisi, dei metodi numerici? E' pur vero che le funzioni studiate nelle diverse articolazioni teoriche della matematica (come quelle elencate prima) sono funzioni di cui si conoscono molto bene caratteri e proprietà grazie appunto all'approfondimento teorico realizzato in secoli e decenni di ricerca matematica; ma basta questo per tracciare una linea di demarcazione tanto netta (per così dire *ontologica*) tra metodi esatti e metodi numerici? In definitiva, le stesse soluzioni trovate dalle scienze deterministiche classiche non erano anch'esse (in qualche misura ...) soluzioni numeriche e dunque approssimate?

Si dirà forse che il punto è proprio quell'espressione “in qualche misura”: le soluzioni trovate nelle scienze della complessità sono approssimate in misura *maggiore* rispetto a quelle ottenute dalle scienze deterministiche classiche.

E tuttavia chi scrive ritiene che ciò sia vero solo in parte.

Quando si prevede che un sistema si troverà (ad un certo tempo *t*) in uno stato appartenente ad un dato attrattore, si sta enunciando una previsione (a suo modo) molto *precisa*. A condizione, come si è già messo in evidenza, che quel dato attrattore sia ben definito, conosciuto e descritto.

Assodato che non esistono (come abbiamo argomentato sopra) soluzioni esatte *in senso assoluto* (nemmeno nelle scienze deterministiche classiche), senso assoluto che sarebbe (a ben riflettere) impossibile da definire, la realtà delle cose è che le scienze deterministiche classiche ragionano (ed operano) su *traiettorie*, mentre le scienze della complessità pensano (ed operano) in termini di *insiemi di stati di tipo diverso* (in termini di attrattori, per esempio).

Ma non vi sono ragioni vere (a parere del sottoscritto) per affermare che la conoscenza di un'evoluzione temporale che termini in un attrattore sia (ci si passi l'espressione) “meno conoscenza” di quella di una traiettoria classica.

Diversa è la linea argomentativa (cui si è qui già accennato) sulla base della quale si può sostenere (con buone ragioni, a parere di chi scrive) che le scienze della complessità portano ad una significativa problematizzazione del rapporto tra fenomeni e teorie matematiche, in quanto individuano nel momento del *calcolo* un *nodo critico* non banale e nient'affatto scontato dell'articolazione del discorso scientifico.

E tale problematizzazione del rapporto tra fenomeni e teorie matematiche presenta (sempre secondo il sottoscritto) interessanti risvolti proprio in riferimento al tema dell'indispensabilità, che, a ben guardare, ben lungi dall'essere contrari alla necessità dell'utilizzo delle teorie e degli enti matematici nella descrizione scientifica del mondo, portano invece nuovo sostegno e nuova luce su tale importante ruolo della matematica nella scienza moderna e contemporanea.

Se, infatti, riprendiamo l'esempio dell'attrattore strano e la discussione sviluppata su di esso poco più sopra, vediamo con chiarezza che è proprio l'utilizzo di determinate strutture matematiche (come, appunto, gli attrattori) e delle annesse teorie a consentire di articolare la descrizione dei fenomeni complessi in quella che abbiamo definito una *vera* e propria *conoscenza*, non “meno conoscenza” – si è detto – di quella sviluppata dalle scienze deterministiche classiche relativamente a fenomeni a carattere 'non complesso' (come i fenomeni meccanici descritti dalla dinamica newtoniana o quelli elettromagnetici descritti dalla teoria di Maxwell).

Se l'attrattore è ben definito e conosciuto (attraverso una ben precisa teoria matematica), abbiamo detto, la teoria della complessità ci fornisce una conoscenza *specifica e profonda* dell'evoluzione temporale del sistema, conoscenza che è articolata in termini di attrattori invece che di traiettorie classiche, ma che non per questo è meno *saliente*, importante e *descrittivamente* (ed *esplicativamente*) *potente*.

E' evidente che è proprio il pensiero matematico a rendere possibile tale operazione concettuale e formale di grande valore epistemico. Se non vi fosse l'opportuna teoria matematica degli attrattori (e di tutte le altre sofisticate strutture utilizzate dalla teoria della complessità), non vi sarebbe teoria della complessità. Un intero ambito di fenomeni, inevitabilmente, sfuggirebbe alla possibilità della descrizione scientifica.

La problematizzazione del momento del calcolo e quindi del rapporto tra fenomeni e teorie matematiche, operata dalle scienze della complessità, mette in evidenza con grande forza proprio l'altissimo livello di potenza descrittiva ed esplicativa (nei confronti dei fenomeni naturali) caratteristico del pensiero matematico: laddove la descrizione ordinaria delle scienze deterministiche classiche fallisce e, a tutta prima, sembra impossibile ritrovare una possibilità di descrizione scientifica efficace dei fenomeni di interesse, è *soltanto* lo sforzo creativo della matematica a ricreare uno spazio praticabile di comprensione scientifica per quella classe di fenomeni e sistemi. Tale *nuova* possibilità di comprensione scientifica viene *creata* dal teorizzare matematico, come in altri importanti casi discussi nell'ambito di questo lavoro, grazie all'assurgere ad un livello più alto di *astrazione*. In altre parole, se lo scienziato decide di non parlare più di una successione ordinata di stati (la traiettoria classica), in quanto scopre che (in riferimento al fenomeno che sta studiando) una successione del genere non può più essere oggetto di una previsione scientifica, allora può ancora costruire una qualche forma di conoscenza (che possa ancora essere definita scienza) del fenomeno di interesse soltanto decidendo di parlare dell'evoluzione temporale del sistema in termini più *astratti*: invece di individuare successioni di stati del sistema definiti da ben precisi valori di posizione e velocità, costruirà insiemi dalla struttura matematica

precipua che indicheranno certe regioni dello spazio degli stati in cui il sistema dovrà trovarsi. Mentre valori univocamente determinati di posizione e velocità erano più vicini al *concreto immediato* dello stato del sistema, insiemi come gli attrattori saranno strutture più sofisticate e *astratte* in rapporto *più mediato* con la realtà concreta dello stato del sistema.
Ancora una volta risulta quasi superfluo sottolineare che tale capacità di *astrazione* è uno specifico del pensiero matematico che, a parere dello scrivente, rende tale forma di pensiero assolutamente *indispensabile* al 'fare scienza'.
L'obiezione che, comunque, le nuove strutture matematiche elaborate nel contesto delle scienze della complessità non consentono, in ogni caso, una predicibilità *stretta* (ovvero dei valori precisi di posizione e velocità ad un istante di tempo arbitrario) come quella che si ha nelle scienze deterministiche classiche, è un'obiezione, pur corretta nel suo contenuto, che *non coglie nel segno*. Ciò che è predicibile e ciò che non lo è nell'ambito di una data scienza, o dello studio di una certa classe di problemi, è una questione del tutto indipendente da quella dell'utilità, o dell'*indispensabilità*, della matematica ai fini della costruzione della teoria scientifica in oggetto e dunque della formulazione delle predizioni che, nell'ambito di tale teoria, sono *possibili*.
Non vi è dubbio, per rimanere all'esempio qui analizzato, che il formalismo degli attrattori consente di individuare delle salienze e di formulare le predizioni correlate. Se ci si libera dall'idea classica che una predizione scientifica *deve* necessariamente consistere (o essere riducibile a) una predizione in termini di valori precisi di posizione e velocità, si può facilmente riconoscere che proprio le nuove strutture matematiche elaborate (gli attrattori) consentono di individuare i nuovi *standard predittivi* attraverso la *messa a fuoco* delle nuove salienze *catturate*.

Conclusioni

La matematica consente di individuare delle similarità formali, similarità che si collocano ad un livello molto alto, astratto e generale, e dunque su di un piano del tutto trasversale rispetto a temi molto diversi (per parecchi aspetti) di una data scienza e talvolta anche di scienze diverse (vedi i cosiddetti *concetti sistemici*).

Tali similarità (e i concetti che esse generano) sono di vitale importanza per le scienze empiriche moderne e (ancor più) attuali.

Ciò dà un sostegno molto forte alla tesi dell'*indispensabilità* degli enti matematici.

Ma l'Argomento di *Indispensabilità* di Quine/Putnam pretende di dedurre l'esistenza di quegli enti dal loro uso *necessario* nelle *nostre migliori teorie scientifiche*.

Tale deduzione non è affatto ovvia.

Seguendo Quine e la sua visione olistica della conoscenza (nonché il suo naturalismo), dalla proprietà di indispensabilità si giunge alla conferma empirica (nell'ambito della pratica scientifica ordinaria) delle teorie matematiche. E da questa all'asserzione dell'esistenza degli enti matematici.

Da questo punto di vista il problema epistemologico posto dal Dilemma di Benacerraf non ha motivo di sussistere: la conoscenza degli enti matematici è possibile pur in assenza di *contatto* con tali enti (essendo questi astratti) in quanto il *contatto* (nel senso di Benacerraf, ovvero fisico e spaziotemporale) è dato dal procedimento di conferma empirica delle teorie scientifiche, ed è un contatto *globale* di tali teorie con il mondo fisico e spaziotemporale della natura che lo scienziato indaga.

Poiché le conoscenze matematiche fanno parte integrante (indispensabilmente appunto) delle teorie scientifiche sottoposte al vaglio delle procedure di *testing* empirico, in un'ottica olistica il problema del contatto *diretto* con gli enti matematici non esiste.

Ma bisogna essere appunto olisti per poter concludere in questo modo.

In questo lavoro si cerca innanzitutto di far vedere come l'olismo non sia una strana ed avventata ipotesi che, venendo formulata in chissà quale altro *cielo* teorico e filosofico e giustificata (se lo è) in quella sede, si decide *poi* di *calare* nel contesto del dibattito filosofico sulla matematica e in particolare sulla sua applicabilità alla scienza empirica.

L'*integrazione olistica* tra ipotesi fisiche e teorie matematiche (nel contesto, appunto, della scienza empirica della natura) viene, al contrario, mostrata come una caratteristica evidente e di grande importanza epistemica di tutte le più notevoli e fondamentali teorie della scienza occidentale dal Seicento ad oggi.

Si è inteso in particolare far vedere come tale *integrazione olistica* sia una proprietà *profonda* del discorso scientifico moderno, ben lungi dunque dal ridursi ad una mera *utilizzazione* della matematica per eseguire calcoli (pur necessari) a partire da principi fisici *già* formulati e stabiliti, evidenziando invece come la stessa definizione di quei principi non possa in alcun modo articolarsi senza l'impiego di concetti, teorie ed enti provenienti dalla conoscenza matematica.

Tale *lavoro sul campo*, ovviamente, pur fornendo già in sé stesso una ben precisa giustificazione logica ed epistemologica dell'ipotesi olistica, ha portato in modo del tutto naturale ad una riflessione più ampia e *di principio* sulle ragioni della validità (in scienza) di siffatta ipotesi.

Le conclusioni di tale riflessione attengono fondamentalmente al nodo filosofico della *separabilità* tra contenuto empirico e contenuto teorico degli enunciati scientifici.

Utilizzando anche risultati già ottenuti dalle analisi epistemologiche condotte dal Neopositivismo logico, da Popper, Hanson e Feyerabend, si è argomentato riguardo all'impossibilità, nelle scienze della natura attuali, di definire un contenuto empirico a sé stante (rispetto ai concetti teorici utilizzati dal discorso scientifico stesso) nelle proposizioni della fisica e di tutte le scienze che su di essa sono imperniate.

La *non-separabilità empirico-teorico*, così, se da un lato suffraga in modo forte la proprietà di indispensabilità degli enti matematici per la scienza moderna, è d'altra parte essa stessa rafforzata (mentre ne viene *mostrata* la natura, per così dire, *intima* e profonda) dall'analisi del ruolo che gli enti matematici svolgono all'interno dei concetti e dei costrutti teorici della scienza empirica, mettendo in evidenza come, nel discorso scientifico moderno (ovvero nella scienza occidentale da Galileo in poi), **non vi è conoscenza empirica senza teoria e non vi è teoria senza matematica**.

Sotto questo punto di vista, la questione dell'indispensabilità si rivela essere non soltanto un problema di grande rilevanza teorica per l'ontologia della matematica, ma anche un nodo concettuale assolutamente centrale per la filosofia delle scienze empiriche.

Il presente lavoro ha inteso mostrare proprio tale profondo legame teorico tra filosofia della matematica e filosofia della scienza istituito dal tema dell'indispensabilità e, muovendosi all'interno di tale cornice concettuale, ha cercato di far emergere la proprietà di applicabilità della matematica alla scienza empirica, oltre che come aspetto di essenziale importanza per i problemi ontologici relativi alla matematica, anche come fondamento metodologico ed epistemologico dell'idea galileiana ed in generale moderna di scienza della natura.

Olismo della conferma (in riferimento agli enti matematici) ed epistemologia delle scienze, in questa prospettiva, risultano strettamente ed intimamente connessi: se da un lato le procedure di *testing* empirico della scienza confermano l'esistenza degli enti matematici, dall'altro sono proprio gli enti matematici (e le relative teorie) a rendere possibile la scienza (nel senso, lo ripetiamo, galileiano e moderno del termine).

Tale visione del ruolo degli enti matematici nell'articolazione della conoscenza della natura che la nostra civiltà ha saputo sviluppare a partire dai tempi di Galileo e Newton ha un rilevante e profondo legame concettuale con la questione ontologica concernente gli stessi enti matematici.

Dal punto di vista dell'Argomento di Indispensabilità e del Realismo matematico che ne risulta, infatti, gli enti matematici si configurano come *oggetti in senso forte*: essi non sono meri fenomeni mentali di costituzione evanescente e transitoria, ma posseggono una loro natura – obiettiva, *dura*, cioé determinata *al di fuori* e *al di là* del rapporto epistemico - non *soggettivisticamente* disponibile.

Pur essendo enti *astratti* (dunque necessitano di *menti* umane per essere posti e definiti), la loro conoscenza procede in modo del tutto *oggettivistico*, nel senso che il chiarimento e la determinazione epistemica delle loro proprietà e dei loro caratteri giunge a risultati uguali *per tutti i soggetti* (si parla infatti di genuine *scoperte* matematiche), esattamente come nel caso di oggetti fisici di cui sviluppiamo una conoscenza, appunto *universale* ed *oggettiva*, attraverso le procedure delle scienze della natura.

Ed è chiaro che proprio la loro natura di *oggetti* del pensiero – *oggetti*, lo ripetiamo, *in senso pieno e forte* - li rende di grande e fondamentale importanza per i processi conoscitivi della scienza.

In altre parole, se gli enti matematici fossero soltanto *tracce mnestiche* di *processi mentali* e non veri e propri *oggetti* (realmente e pienamente *esistenti* in quanto oggetti del pensiero, ovvero *oggetti astratti*), non potrebbe esservi indispensabilità di tali entità per le scienze empiriche.

Il problema dell'*esistenza degli oggetti matematici* è dunque profondamente all'interno di quello della *struttura fondamentale della scienza* e il Realismo oggettivistico della Matematica è intimamente connesso al tema dell'applicabilità delle teorie matematiche alla scienza della natura.

La questione dell'esistenza degli enti matematici *come oggetti* (assieme a quella del ruolo di tali oggetti nelle scienze) è d'altra parte legata, su di un ulteriore versante, al grande tema della funzione del linguaggio nel porsi, all'interno del mondo umano, degli *oggetti astratti* in generale, così importanti in tutta la gamma di espressioni di quel mondo.

Già Frege aveva messo in rilievo come il linguaggio abbia un ruolo fondamentale in relazione ad una vera e propria *esistenza oggettiva* di enti posti dal pensiero (gli oggetti astratti, appunto), evidenziando come *luogo naturale* di tale esistenza oggettiva il *discorso pubblico*, reso possibile (ovviamente) dal linguaggio e dal suo uso codificato all'interno di una determinata comunità.

Nel caso degli enti matematici, il linguaggio di cui parliamo è, chiaramente, il linguaggio specifico e formale delle teorie matematiche, piuttosto che il linguaggio cosiddetto *naturale*. Ma la sostanza del problema non cambia, tant'è che lo stesso Frege aveva incluso gli enti matematici nel suo *Terzo Regno* - il regno, appunto, degli oggetti astratti – assieme a tutti gli altri enti posti dal pensiero cui il linguaggio (naturale) conferisce realtà ed esistenza nell'ambito di un dato uso sociale condiviso.

Il problema ontologico relativo agli enti matematici si connette così al grande tema filosofico-linguistico del ruolo (e delle fondamentali ricadute) del linguaggio nella conoscenza e nell'esperienza umane, e, se si pensa al fatto che la scienza fa parte proprio di quel discorso pubblico all'interno del quale assumono realtà oggettiva gli enti posti dal pensiero (compresi quelli su cui quantificano le teorie matematiche), ci risulta aperta la strada verso il nodo concettuale dell'applicabilità e dell'indispensabilità.

Il linguaggio, così, se da una parte conferisce oggettività ed esistenza agli enti matematici, dall'altra consente di impiegarli come componenti del discorso scientifico, che, come tutte le altre aree del discorso pubblico, deve necessariamente utilizzare entità linguisticamente definite per poter esercitare la propria attività di esame, approfondimento, valutazione e giudizio (oggettivi) delle diverse congetture e posizioni in campo.

La questione dell'indispensabilità si pone pertanto come fondamentale *crocevia* tematico tra Ontologia della Matematica, Epistemologia delle Scienze empiriche e Filosofia del Linguaggio, mostrando dunque l'importanza della tesi dell'esistenza degli enti matematici (che in questo lavoro si è inteso suffragare) per un chiarimento concettuale di grande rilevanza teorica ed ampia portata filosofica.

Concludo la presente dissertazione riportando un brano tratto da *I tre mondi* di Karl R. Popper, a mio parere particolarmente illuminante proprio in riferimento al *carattere oggettivo* degli enti astratti (nella stessa opera l'autore include in tale categoria di enti la serie infinita dei numeri naturali e le entità matematiche in generale), alla loro *esistenza* in quanto, appunto, *oggetti,* alla importante connessione di tale *esistenza oggettiva* con la loro utilizzabilità in scienza e al ruolo del linguaggio nel determinarsi delle suddette proprietà (esistenza oggettiva e utilizzabilità scientifica):

All'interno della prospettiva che qui difendo, il passaggio da un pensiero non linguistico a un pensiero formulato linguisticamente è molto importante. Formulando un pensiero in una qualche lingua, lo rendiamo un oggetto del Mondo 3 [il mondo dei contenuti mentali, ovvero degli oggetti astratti, N.d.r.]*; così facendo, lo rendiamo un possibile oggetto di una discussione critica. Fintanto che il pensiero rimane un semplice processo del Mondo 2* [il mondo dei processi mentali, ovvero delle esperienze, N.d.r.]*, esso è semplicemente una parte di noi stessi e non può facilmente diventare, per noi, oggetto di un confronto critico. Tuttavia, il confronto critico riguardo agli oggetti del Mondo 3 ha una grandissima importanza tanto nell'arte, quanto, soprattutto, nella scienza. La scienza può venir considerata in larga parte il risultato di un confronto critico, vale a dire dell'esame critico e della selezione di congetture e di contenuti mentali. Nelle discussioni scientifiche non facciamo che sottoporre a critica congetture concorrenti rispetto al loro poter o non poter essere vere.*

Bibliografia

Anscombe G. E. M. (1971), Causality and Determination, Cambridge University Press, Cambridge.

Azzouni J. (1994), Metaphysical Myths, Mathematical Practice: The Ontology and Epistemology of the Exact Sciences, Cambridge University Press, Cambridge.

Azzouni J. (1997a), "Applied Mathematics, Existential Commitment and the Quine-Putnam Indispensability Thesis", Philosophia Mathematica, serie III, 5, pp. 193–209.

Azzouni J. (1997b), "Thick epistemic access: distinguishing the mathematical from the empirical", Journal of Philosophy, 94(9), pp. 472–484.

Azzouni J. (1998), "On "On what there is"", Pacific Philosophical Quarterly, 79, 1, pp. 1-18.

Azzouni J. (2004), Deflating Existential Consequence. A Case for Nominalism, Oxford University Press, Oxford.

Balaguer M. (1995), "A Platonist Epistemology", Synthese, 103(3), pp. 303-325.

Balaguer M. (1996), "A Fictionalist Account of the Indispensable Applications of Mathematics", Philosophical Studies, 83, pp. 291-314.

Balaguer M. (1998), Platonism and Anti-Platonism in Mathematics, Oxford University Press, Oxford.

Balaguer M. (2009), "Fictionalism, Theft, and the Story of Mathematics", Philosophia Mathematica, III, 17, pp. 131-162.

Benacerraf P. (1973), “Mathematical Truth”, Journal of Philosophy, 70, pp. 661-680, anche in Benacerraf e Putnam (1983), pp. 403-420.

Benacerraf P., Putnam H. (1964), Philosophy of Mathematics. Selected Readings, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (N.J.); seconda edizione (1983), Cambridge University Press, Cambridge.

Brandom R. B. (2000), Articulating Reasons: An Introduction to Inferentialism, Harvard University Press, Harvard.

Burgess J., Rosen G. (1997), A Subject with No Object: Strategies for Nominalistic Interpretation of Mathematics, Clarendon Press, Oxford.

Carnap R. (1961), La sintassi logica del linguaggio, Silva, Milano.

Carnap R. (1966), La costruzione logica del mondo, Fabbri, Milano.

Carnap R. (1971), I fondamenti filosofici della fisica, Il Saggiatore, Milano.

Colyvan M. (1998), “In Defence of Indispensability”, Philosophia Mathematica, serie III, 6, 1, pp. 39-62.

Colyvan M. (1999), “Contrastive Empiricism and Indispensability”, Erkenntnis, 51(2-3), pp. 323-332.

Colyvan M. (2001), The Indispensability of Mathematics, Oxford University Press, Oxford.

Ducasse C. J. (1966), “Critique of Hume's Conception of Causality”, Journal of Philosophy, 63, pp. 141-148.

Duhem P. (1906), La theorie physique. Son object, sa structure, Chevalier & Rivière, Paris; 12ima edizione rivista, Marcel Riviere et C.ie, 1914. Tr. it. in Duhem P., La teoria fisica, Bologna, Il Mulino 1978.

Dyson F. J. (1964), "Mathematics in the Physical Sciences", Scientific American, 211(3), pp. 128-146.

Earman J., Salmon W. (1999), "The Confirmation of Scientific Hypothesis", in Salmon H. M. (a cura di) Introduction to the Philosophy of Science, Hackett Publishing Co., prima edizione 1992, Cap. 2.

Feyerabend P. K. (1973), Contro il metodo, Lampugnani Nigri, Milano.

Feyerabend P. K. (1981), Realism, Rationalism and Scientific Method, Cambridge University Press, Cambridge.

Feyerabend P. K. (1983), I limiti della ragione, Il Saggiatore, Milano.

Feynman R. P., Hibbs A. R. (1965), Quantum Mechanics and Path Integrals, McGraw-Hill, New York.

Field H. (1980), Science Without Numbers: A Defense of Nominalism, Oxford: Blackwell, Oxford.

Field H. (1989), Realism, Mathematics and Modality, Oxford: Blackwell, Oxford.

Field H. (1990), "Mathematics Without Truth (a reply to Maddy)", Pacific Philosophical Quarterly, 71(3), pp. 206-222.

Frege: Philosophy of Language, Londra, Duckworth. Tr. it. Filosofia del linguaggio: saggio su Frege, Marietti, Casale Monferrato, 1983.

Gasperini M. (2010), Relatività generale e teoria della gravitazione, Springer, Milano.

Gelman S. A., Markman E. M. (1987), "Young children's inductions from natural kinds: The role of categories and appearances", Child Development, 58, pp. 1532-1541.

Gelman S. A., Wellman H. M. (1991), "Insides and essences: Early understandings of the nonobvious", Cognition, 38, pp. 213-244.

Giusti E. (1983), Analisi matematica 2, Boringhieri, Torino.

Goldstein H. (1986), Meccanica classica, Zanichelli, Bologna.

Gopnik A., Meltzoff A. (1997), Words, thoughts and theories, MIT Press, Cambridge (Mass).

Gopnik A., Meltzoff A., Kuhl P. (1999), The scientist in the crib: Minds, brains, and how children learn, William Morrow & Co, New York, tr. it. Tuo figlio è un genio: le straordinarie scoperte sulla mente infantile, Baldini & Castoldi, Milano, 2000.

Hanson N. R. (1978), I modelli della scoperta scientifica, Feltrinelli, Milano.

Hume D. (1739), A Treatise of Human Nature, trad. it. Trattato sulla natura umana, in Opere filosofiche, vol. I, Laterza, Roma-Bari, 1987.

Kant I. (1967), Critica della ragion pura, UTET, Torino.

Kant I. (1982), Prolegomeni ad ogni futura metafisica che vorrà presentarsi come scienza, Laterza, Roma-Bari.

Kuhn T. S. (1977), The Essential Tension, The University of Chicago Press, Chicago, trad. it. La nozione di causalità nello sviluppo della fisica, in La tensione essenziale, Einaudi, Torino, 1985.

Landau L. D., Lifsits E. M. (1985), Teoria dei campi, Editori Riuniti, Roma.

Liggins D. (2007), “Quine, Putnam, and the 'Quine-Putnam' indispensability argument”, Erkenntnis, 68, 1, pp. 113-27.

Maddy P. (1990a), Realism in Mathematics, Oxford University Press, Oxford.

Maddy P. (1990b), “Physicalistic platonism”, in A. Irvine, (a cura di), Physicalism in Mathematics, Kluwer Academic Publishers, 1990, pp. 259-289, ristampato in Resnik M. (a cura di), Mathematical Objects and Mathematical Knowledge, in International Research Library of Philosophy, J. Skorupski, (a cura di), Dartmouth Publishing Company, 1995.

Maddy P. (1992), “Indispensability and practice”, The Journal of Philosophy, 89, 6, pp. 275-289.

Malament D. (1982), Review of Field's Science Without Numbers, Journal of Philosophy, 79, pp. 523-534.

Melia J. (1998), “Field’s Programme: Some Interferences”, Analysis, 58, 2, pp. 63-71.

Melia J. (2006), “The conservativeness of mathematics”, Analysis, 66, pp. 202-208.

Mill J. S. (1843), A System of Logic, Ratiocinative and Inductive, Longmans, London. Tr. it. Sistemi di logica deduttiva e induttiva, UTET, Torino, 1996.

Neurath O. (1977), Sociologia e fisicalismo, Astrolabio, Roma.

Newton I. (1687), Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, Londra, trad. it. Principi matematici di filosofia naturale, a cura di A. Pala, UTET, Torino, 1965.

Oliveri G. (2007), A Realist Philosophy of Mathematics, College Publications (King's College London), Strand, London.

Panza M., Sereni A. (2009), Il problema di Platone. Una storia della filosofia della matematica e un'introduzione al dibattito contemporaneo, Carocci, Roma, 2009.

Peacocke C. A. B. (1992), A Study of Concepts, MIT Press, Cambridge (Mass).

Peacocke C. A. B. (1996), "Can possession conditions individuate concepts?", Philosophy and Phenomenological Research, LVI, pp. 433-460.

Peacocke C. A. B. (1997), "Holism", in R. Hale e C. Wright (a cura di), A Companion to the Philosophy of Language, Blackwell, Oxford.

Popper K. R. (1969), Scienza e filosofia, Einaudi, Torino.

Popper K. R. (1970), La logica della scoperta scientifica, Einaudi, Torino.

Popper K. R. (1976), Congetture e confutazioni, Il Mulino, Bologna.

Popper K. R. (1979), "Three Worlds", Michigan Quarterly Review, 1, pp. 1-23. Tr. it. I tre mondi, Il Mulino, Bologna, 2012.

Popper K. R. (1984), Poscritto, Il Saggiatore, Milano.

Putnam, H., (1967), "Mathematics without foundations", The Journal of Philosophy, 64, 5-22, ristampato in Putnam (1975), pp. 43-59.

Putnam, H. (1971), Philosophy of logic, Harper & Row, New York, anche in Putnam (1975), cap. 20 (non presente nella trad. it di Putnam, 1975), trad. it. Filosofia della logica : nominalismo e realismo nella logica contemporanea, ISEDI, Milano, 1975.

Putnam H. (1967), "Mathematics without foundations", The Journal of Philosophy, 64. 1, pp. 5-22, anche in Putnam (1975), cap. 3, e in Benacerraf, Putnam (1963), pp. 295-311 (edizione del 1983).

Putnam H. (1975), Mathematics Matter and Method: Philosophical Papers Vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge, seconda edizione 1985. Tr. it. Matematica, Materia e Metodo, Adelphi, Milano, 1993.

Quine W. V. O. (1939), "Designation and Existence", Journal of Philosophy, 36, 26, pp. 701-709, reprinted in Feigl H., Sellars, W. (a cura di), Readings in Philosophical Analysis, Appleton-Century-Crofts, Inc, New York, 1949.

Quine W. V. O. (1948), "On What There Is", Review of Metaphisics, 2, pp. 21-38, anche in Quine (1953), cap. I.

Quine W. V. O. (1951a), "Two dogmas of empiricism", Philosophical Review, 60, 1, pp. 20-43, anche in Quine (1953), cap. II.

Quine W. V. O. (1953), From a Logical Point of View, Harper & Row, New York, seconda edizione 1961, Tr. it. Da un punto di vista logico, Raffaello Cortina Editore, Milano 2004.

Quine W. V. O. (1981), "Five Milestones of Empiricism", in Quine, W. V. O., Theories and Things, Harvard University Press, Cambridge (Mass), 1981, pp. 67-72.

Quine W. V. O. (1986), "Reply to Charles Parsons", in Hahn L., Schilpp P. (a cura di), The Philosophy of W.V. Quine, Open Court, La Salle (Ill), pp. 396-403.

Quine W. V. O. (1995), From Stimulus to Science, Harvard University Press, Cambridge (Mass), Tr. it. Dallo stimolo alla scienza, Il Saggiatore, Milano, 2001.

Resnik M. D. (1995), “Scientific Vs Mathematical Realism: The Indispensability Argument”, Philosophia Mathematica, serie III, 3, 2, pp. 166-174.

Rey G. (1997), Contemporary Philosophy of Mind, Blackwell, Oxford.

Rosch E., Mervis C. B. (1975), “Family resemblances: Studies in the internal structure of categories”, Cognitive Psychology, 7, pp. 573-605.

Salmon W. C. (1980), “Probabilistic Causality”, Pacific Philosophical Quarterly, 61, pp. 50-74.

Salmon W. C. (1981), “Causality: Production and Propagation”, in E. Sosa, M. Tooley, Causation, pp. 154-171, Oxford University Press, Oxford.

Salmon W. C. (1985), Scientific Explanation and the Causal Structure of the World, Princeton University Press, Princeton.

Salmon W. C. (1997), Causality and Explanation, Oxford University Press, New York-Oxford.

Schlick M. (1974), Fra realismo e neopositivismo, Il Mulino, Bologna.

Shapiro S. (1983), “Conservativeness and Incompleteness”, Journal of Philosophy, 80, 9, pp. 521-31.

Sober E. (1993), “Mathematics and Indispensability”, Philosophical Review, 102(1), pp. 35-57.

Vineberg S. (1996), "Confirmation and the Indispensability of Mathematics to Science", Philosophy of Science, Supplement to vol. 63, pp. 256-263.

Voltolini A. (2009), Guida alla lettura delle *Ricerche filosofiche* di Wittgenstein, Laterza, Bari.

Wittgenstein L. (1967), Ricerche filosofiche, Einaudi, Torino.

Yablo S. (1998), “Does Ontology Rest On a Mistake?”, Proceedings of the Aristotelian Society, Supp. Vol. 72, pp. 229-261.

Yablo S. (2001) “Go Figure: A Path Through Fictionalism”, Midwest Studies in Philosophy, XXV, 72.

Indice