

UN'EFFICIENTE PROCEDURA DI CALCOLO PER L'ANALISI DI FATICA MULTIASSIALE MEDIANTE I CRITERI BASATI SULL'APPROCCIO DI PIANO CRITICO

G. Petrucci^a

^a *Università degli Studi di Palermo - Dipartimento di Ingegneria Chimica, Informatica, Gestionale, Meccanica - Viale delle Scienze, 90128 Palermo, e-mail: giovanni.petrucci@unipa.it*

Sommario

Nell'analisi di fatica multiassiale mediante l'approccio di piano critico, l'ampiezza dei cicli della tensione tangenziale alternata τ_a deve essere calcolata mediante apposite procedure che elaborano i punti della curva Ψ descritta dalla punta del vettore della tensione tangenziale agente sulla giacitura. Il calcolo deve essere effettuato in numerose giaciture centrate nel punto da analizzare e, nell'analisi di un componente strutturale, deve essere ripetuto in numerosi punti. In questo lavoro viene proposta una procedura che consente di ridurre notevolmente il numero di giaciture e il numero di punti della struttura nei quali è necessario determinare il valore di τ_a mediante le onerose procedure computazionali relative ai vari metodi, con notevole riduzione dei tempi di calcolo.

Abstract

In multiaxial fatigue analysis using the critical plane approach, the shear stress amplitude τ_a has to be evaluate using proper numerical procedures that elaborate the points of the curve Ψ described by the tip of the shear stress vector acting in the analyzed plane. The calculation has to be carried out in several planes centred in the analyzed material plane; furthermore, in the analysis of a component, it has to be repeated in several points. In this paper a procedure that allows to noticeably reduce both the number of planes and the number of points in which it is necessary to evaluate τ_a by means of the onerous procedures, with a considerable reduction of the computational times.

Parole chiave: fatica multiassiale, cerchio circoscritto, rettangolo circoscritto

1. INTRODUZIONE

Siano $\sigma_n(t)$ e $\tau_n(t)$ le componenti normale e tangenziale del vettore rappresentativo della tensione agente in un punto O del materiale sul generico piano Δ , nel generico istante t (fig.1a). I criteri di fatica multiassiale ad alto numero di cicli basati sull'approccio di piano critico [1-7] sono espressi da un'equazione del tipo

$$\tau_{a,c} + k \Sigma \leq f \quad (1)$$

nella quale $\tau_{a,c}$ è l'ampiezza della tensione tangenziale alternata agente sul piano critico nel punto considerato, legata alla variazione nel tempo di $\tau_n(t)$, Σ è un valore dipendente dalle tensioni normali $\sigma_n(t)$ agenti nel punto considerato, spesso coincidente con la tensione normale massima o alternata agente sul piano critico, f è una costante legata ai limiti di fatica del materiale, k è una costante legata alla differente risposta del materiale alle tensioni normali e tangenziali dal punto di vista della

propagazione della frattura. Il piano critico viene determinato come il piano su cui si determina il massimo valore di tensione tangenziale alternata [2,4-6] τ_a , definito $\tau_{a_{max}}$, oppure il massimo valore di una combinazione tra τ_a e Σ [1,3].

Nel caso più generale di sollecitazioni di tipo non proporzionale, la punta del vettore τ_n al variare del tempo effettua un percorso costituito da una curva piana Ψ , definita *percorso di carico*, come nell'esempio di fig.1a,b [4,5,8]. In questo caso, a causa della variazione di direzione del vettore τ_n , l'identificazione e la conseguente valutazione di τ_a e τ_m è tutt'altro che banale ed in letteratura ne sono state proposte diverse definizioni; nell'analisi proposta in questo lavoro sono state considerate quelle relative al Minimo Cerchio Circoscritto (MCC) alla curva Ψ (fig.1c) [4,5, 8, 9, 12-15] e al Massimo Rettangolo Circoscritto (MRC) alla curva Ψ [16,17] (fig.1d).

Si deve notare che, in generale, l'analisi di fatica multiassiale di un componente strutturale richiede che la valutazione di $\tau_{a,c}$ sia effettuata per numerosi punti del componente stesso e che, nel caso dei criteri di piano critico, la valutazione di $\tau_{a,c}$ in un punto della struttura richiede che la determinazione di τ_a sia effettuata, in linea teorica, in tutte le giaciture passanti per il punto stesso [1-8]; inoltre, la determinazione del valore di τ_a agente in una giacitura in base alle definizioni MCC ed MRC, deve essere effettuata elaborando i valori delle coordinate dei punti della curva Ψ descritta dalla punta del vettore τ_n con apposite procedure [4, 9-17].

In base a ciò, al fine di ridurre i tempi complessivi di calcolo, l'applicazione pratica della (1) richiede che sia effettuata un'opportuna discretizzazione della geometria del componente, dei piani passanti per ciascun punto e dell'intervallo temporale della sollecitazione e che siano applicate procedure di calcolo numerico caratterizzate da elevata velocità di esecuzione [9, 12 19].

In questo lavoro viene proposta una procedura (definita procedura di *analisi semplificata*) che permette di ridurre notevolmente i tempi di calcolo nell'analisi a fatica multiassiale di strutture. In particolare essa consente di ridurre notevolmente il numero di giaciture e il numero di punti della struttura nei quali è necessario determinare il valore di τ_a mediante le onerose procedure computazionali relative ai vari metodi. La procedura è proposta in una variante utile per il metodo MCC e una utile per il metodo MRC, ma il principio su cui si basa è probabilmente adattabile ad altre definizioni di τ_a .

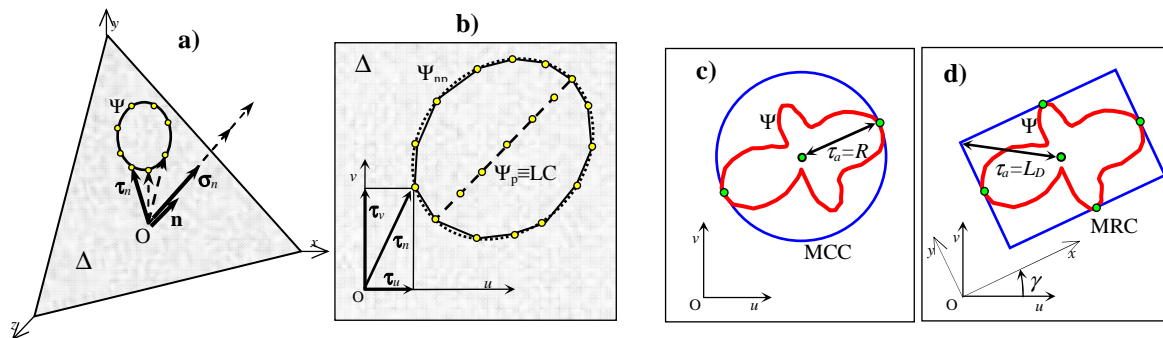


Figura 1: a) Componenti σ_n e τ_n del vettore tensione agente su un generico piano Δ ; b) la curva Ψ nei casi di sollecitazione proporzionale (Ψ_p) e non proporzionale (Ψ_{np}); c) la definizione di τ_a basata sul MCC, d) la definizione di τ_a basata sul MRC.

2. DETERMINAZIONE DELLA CURVA DI CARICO E DELLA TENSIONE ALTERNATA

In fig.1a è mostrato un generico piano Δ passante per un punto O del materiale. Sul piano agisce una tensione rappresentata dal vettore \mathbf{p}_n del quale in figura sono mostrate le componenti normale e parallela al piano, σ_n e τ_n . La giacitura del piano può essere identificata mediante il versore della direzione ad esso ortogonale $\mathbf{n}=[n_x, n_y, n_z]^T$ oppure mediante le coordinate sferiche ϕ, θ (con $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2, 0 \leq \theta \leq \pi$). Noto il tensore degli sforzi nel punto $\sigma(t)$ ed assegnata la direzione \mathbf{n} , i vettori \mathbf{p}_n, σ_n e τ_n possono essere ottenute mediante le seguenti, note, relazioni:

$$\mathbf{p}_n(t) = \boldsymbol{\sigma}(t) \mathbf{n} \quad \boldsymbol{\sigma}_n(t) = \mathbf{n}^T \mathbf{p}_n(t) \mathbf{n} \quad \boldsymbol{\tau}_n(t) = \mathbf{p}_n(t) - \boldsymbol{\sigma}_n(t) \quad (2-4)$$

Come detto, nel caso di tensioni variabili nel tempo, in generale $\boldsymbol{\tau}_n(t)$ risulta variabile sia in modulo che in direzione (fig.1a,b). La sua posizione nel piano Δ in istanti differenti può essere identificata mediante le componenti in un sistema di riferimento cartesiano con assi $u-v$ ortogonali, disposti parallelamente a Δ , centrati in O. I versori delle direzioni u e v possono essere ottenuti a partire dalle coordinate sferiche ϕ e θ della direzione \mathbf{n} come

$$\mathbf{n}_u = \begin{bmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{n}_v = \begin{bmatrix} -\cos(\theta) \cos(\phi) \\ -\cos(\theta) \sin(\phi) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (5,6)$$

Infine, le componenti τ_u e τ_v (fig.1b) possono essere ottenute con le seguenti relazioni

$$\tau_u(t) = \mathbf{n}_u^T \mathbf{p}_n(t) \quad \tau_v(t) = \mathbf{n}_v^T \mathbf{p}_n(t) \quad (7,8)$$

Tipicamente la curva Ψ deve essere determinata in forma discreta, valutando le componenti di tensione τ_u e τ_v in istanti discreti t_i e viene ottenuta come una sequenza di punti τ_i , con $i=1,2,\dots,N$, le cui coordinate u_i e v_i sono date dalle componenti del vettore $\boldsymbol{\tau}_n$ nel sistema di riferimento $u-v$. I punti τ_i possono essere considerati i vertici di un poligono inscritto alla curva Ψ , come quello visualizzato in fig.1b, avente un numero di punti $N=14$.

In base alla definizione relativa al MCC (fig.1c), τ_a è pari al raggio del MCC, cioè $\tau_a=R$. Il raggio del MCC deve essere determinato mediante opportuni algoritmi che elaborano le coordinate dei punti della curva [4,5, 8, 9, 12-15].

La definizione relativa al MRC è più recente ed apparentemente più efficace (fig.1d) [16,17]. Il MRC è il rettangolo avente la diagonale maggiore tra tutti quelli i cui 4 lati sono in contatto con la curva stessa in almeno un punto e contengono tutti i punti della curva. In base alla definizione del MRC τ_a è pari alla semilunghezza della diagonale del MRC, cioè $\tau_a=L_D$. Da un punto di vista pratico, la determinazione di L_D può essere effettuata ruotando la curva di N_γ angoli discreti γ_k (positivi se antiorari) nel campo $0 \leq \gamma_k \leq \pi/2$ (fig.2a), valutando le lunghezze delle proiezioni della curva lungo assi $u-v$ per ciascuna configurazione ed elaborandone opportunamente i valori. Le semi-lunghezze delle proiezioni lungo gli assi $u-v$ della curva ruotata (fig.2a) sono date dalle seguenti espressioni

$$L_u(\gamma_k) = \frac{\max_{i=1,\dots,N} \{u_i(\gamma_k)\} - \min_{i=1,\dots,N} \{u_i(\gamma_k)\}}{2} \quad L_v(\gamma_k) = \frac{\max_{i=1,\dots,N} \{v_i(\gamma_k)\} - \min_{i=1,\dots,N} \{v_i(\gamma_k)\}}{2} \quad (9a,b)$$

essendo $u_i(\gamma_k)$ e $v_i(\gamma_k)$ le coordinate della curva ruotata dell'angolo γ_k negli assi u e v :

$$u_i(\gamma_k) = u_i \cos \gamma_k - v_i \sin \gamma_k \quad v_i(\gamma_k) = u_i \sin \gamma_k + v_i \cos \gamma_k \quad (10a,b)$$

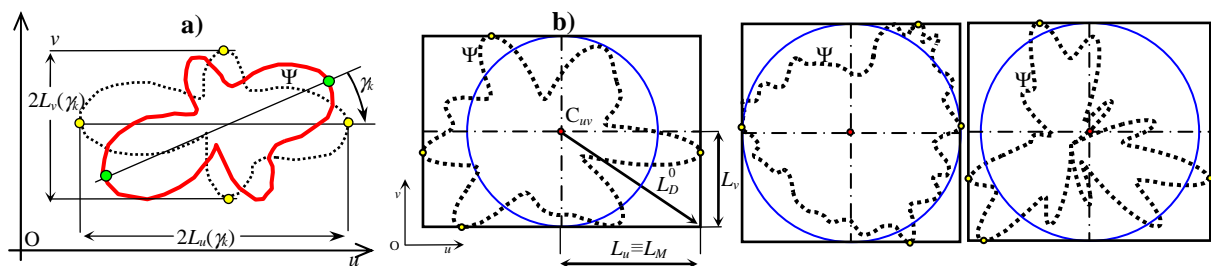


Figura 2: a) determinazione di L_D ; b) esempi di curve Ψ , rettangoli uv e cerchi di raggio pari a L_m .

Le semi-lunghezze delle diagonali dei rettangoli circoscritti al variare di γ_k sono date da

$$L_D(\gamma_k) = \sqrt{L_u(\gamma_k)^2 + L_v(\gamma_k)^2} \quad (11)$$

e il valore massimo può essere determinato come

$$\tau_a = L_D = L_D(\gamma_M) = \max_{k=1, \dots, N_\gamma} \{L_D(\gamma_k)\} \quad (12)$$

Come detto l'applicazione dei criteri di fatica multiassiale basati sul piano critico richiede che, per ciascun punto analizzato, τ_a venga determinata su un insieme discreto di piani Δ_k , con $k=1, 2, \dots, N_\Delta$, centrati nel punto ed è opportuno che il numero di giaciture N_Δ sia elevato al fine di ottenere una stima sufficientemente precisa [12].

3. LA PROCEDURA DI ANALISI SEMPLIFICATA

In questo paragrafo viene descritta una procedura di *analisi semplificata* che deve essere effettuata per analizzare tutte le giaciture e tutti i punti della struttura, la fine di ridurre il numero di giaciture e il numero di punti della struttura nei quali è necessario determinare il valore di τ_a mediante le onerose procedure computazionali.

L'analisi semplificata delle curve Ψ ha un'elevata velocità di esecuzione in quanto considera le sole proiezioni della curva lungo gli assi di riferimento u e v , le cui lunghezze coincidono con quelle dei lati del rettangolo circoscritto alla curva avente i lati paralleli agli assi u e v stessi, come mostrato nei 3 esempi di fig.2b, definito nel seguito *rettangolo uv*.

In particolare, essa consiste nel determinare in ciascuna giacitura le semi-lunghezze delle proiezioni della curva Ψ lungo gli assi u - v (fig.2b)

$$L_u = \frac{u_{\max} - u_{\min}}{2} \quad L_v = \frac{v_{\max} - v_{\min}}{2} \quad (13a,b)$$

la lunghezza della semidiagonale del rettangolo uv (fig.2b) utilizzando le (13):

$$L_D^0 = \sqrt{L_u^2 + L_v^2} \quad (14)$$

e un ulteriore parametro a seconda del metodo da utilizzare per la determinazione di τ_a . In particolare, per il metodo MCC deve essere determinato il *lato più lungo* del rettangolo uv semplicemente come

$$L_M = \max(L_u, L_v) \quad (15)$$

Il parametro relativo al metodo MRC sarà introdotto nel paragrafo successivo.

L'efficacia dell'analisi semplificata in termini di riduzione del numero di giaciture dipende dalle caratteristiche del tensore degli sforzi agente nel punto $\sigma(t)$. L'efficacia in termini di riduzione dei tempi di elaborazione risulta leggermente differente rispetto a quella in termini di numero di giaciture, poiché, come detto, la procedura di analisi semplificata richiede, a sua volta, un certo tempo di applicazione. Essa dipende anche dal numero N di punti da cui sono costituite le curve Ψ (dato dal numero N di istanti temporali t_i nei quali il tensore degli sforzi viene valutato); inoltre, per le procedure LC/MCC, dipende anche dalla forma e dall'orientazione rispetto agli assi che le curve Ψ assumono nelle varie giaciture; per le procedure LP/MRC dipende anche dal numero di angoli N_γ che vengono considerati nell'analisi.

L'efficacia della riduzione del numero di punti da analizzare dipende anche dalle caratteristiche di variazione del tensore degli sforzi rispetto alle coordinate spaziali della struttura.

3.1 Riduzione del numero di giaciture nelle quali deve essere valutata τ_a

Al fine di determinare relazioni che permettano l'utilizzazione dei dati ottenuti mediante l'analisi semplificata è necessario valutare il campo di variazione delle grandezze di interesse delle curve Ψ , R ed L_D , per fissate *dimensioni* del rettangolo uv , al variare della *forma* della curva.

Relativamente al metodo del MCC, osservando la fig.3 è facile notare che qualunque *forma* assuma la curva circoscritta da un rettangolo con i lati paralleli agli assi $u-v$, di semi-lunghezza L_u ed L_v , il più piccolo cerchio circoscritto possibile alla curva è quello avente diametro coincidente con il *lato più lungo* del rettangolo di semi-lunghezza L_M (fig.3a dove $R=L_M$), mentre il più grande è quello avente il diametro coincidente con la *diagonale* del rettangolo (fig.3b dove $R=L_D^0$).

In particolare, per entrambi i metodi, per ciascuna delle N_Δ giaciture del punto analizzato $\mathbf{P}=\{x,y,z\}$ si può scrivere:

$$L_{M_k}(\mathbf{P}) \leq \tau_{a_k}(\mathbf{P}) \leq L_{D_k}^0(\mathbf{P}) \quad k=1,2,\dots,N_\Delta \quad (16)$$

La relazione (16) può essere sfruttata determinando con le (13-15) i valori $L_{D_k}^0$ ed L_{M_k} , in ciascuna giacitura, determinando il valore massimo di L_{M_k}

$$L_{M_{\max}}(\mathbf{P}) = \max_{k=1,\dots,N_\Delta} \{L_{M_k}(\mathbf{P})\} \quad (17)$$

ed effettuando l'analisi completa *soltanto* nelle giaciture nelle quali è verificata la relazione

$$L_{D_k}^0(\mathbf{P}) \geq L_{M_{\max}}(\mathbf{P}) \quad k=1,2,\dots,N'_\Delta \quad (18)$$

con $N'_\Delta < N_\Delta$.

Come precedentemente riportato, la determinazione del MRC può essere effettuata ruotando la curva Ψ di angoli nel campo $0 \leq \gamma \leq \pi/2$, determinandone le semi-lunghezze delle proiezioni sugli assi $u-v$, $L_u(\gamma)$ ed $L_v(\gamma)$ (9a,b) e valutando L_D mediante le eq.(11,12). Ad ogni rotazione corrisponde un rettangolo circoscritto alla curva con i lati paralleli agli assi $u-v$ i cui lati hanno lunghezza pari alle proiezioni sugli assi della curva stessa. Ovviamente, il rettangolo uv costituisce il primo degli N_γ rettangoli, in particolare quello corrispondente all'angolo $\gamma=0$. Per ridurre il campo di variabilità della semidiagonale massima per fissata dimensione del rettangolo uv è opportuno effettuare l'analisi semplificata anche sulla curva Ψ ruotata di un angolo opportuno rispetto alla configurazione originale, in particolare quello intermedio del campo di variazione, cioè $\gamma=\pi/4$, ed utilizzare la *massima* tra le due semi-diagonali determinate. In particolare, definendo $L_D^{0/45}$ la semi-diagonale più grande tra quelle relative agli angoli $\gamma=0$ e $\gamma=45^\circ$, è possibile dimostrare che sussiste la seguente relazione:

$$L_{D_k}^{0/45}(\mathbf{P}) \leq \tau_{a_k}(\mathbf{P}) \leq L_{D_k}^{0/45}(\mathbf{P}) / \cos(\pi/8) \quad k=1,2,\dots,N_\Delta \quad (19)$$

essendo $\cos(\pi/8) \cong 0.9238$. La relazione (19) può essere sfruttata determinando il massimo valore di $L_{D_k}^{0/45}$ al variare delle giaciture centrate nel punto da analizzare

$$L_{D_{\max}}^{0/45}(\mathbf{P}) = \max_{k=1,\dots,N_\Delta} \{L_{D_k}^{0/45}(\mathbf{P})\} \quad (20)$$

ed effettuando la determinazione del MRC solo nelle giaciture nelle quali è verificata la relazione

$$L_{D_k}^{0/45}(\mathbf{P}) \geq 0.9238 L_{D_{\max}}^{0/45}(\mathbf{P}) \quad k=1,2,\dots,N'_\Delta \quad (21)$$

Al fine di determinare i valori $L_{D_k}^{0/45}$ la procedura semplificata deve essere completata con i seguenti passi: per prima cosa si determinano le coordinate della curva Ψ ruotata di 45° negli assi uv utilizzando le coordinate iniziali u_i, v_i con le seguenti relazioni ottenibili dalle (10a,b):

$$\bar{u}_i = (u_i - v_i) / \sqrt{2} \quad \bar{v}_i = (u_i + v_i) / \sqrt{2} \quad (22a,b)$$

quindi si determinano le semi-lunghezze delle proiezioni lungo gli assi $u-v$ della curva Ψ ruotata, \bar{L}_u ed \bar{L}_v , tramite le (13) introducendo le coordinate ottenute con le (22), quindi si determina la semidiagonale del rettangolo uv della curva ruotata, L_D^{45} , con la seguente relazione analoga alla (14)

$$L_D^{45} = \sqrt{\bar{L}_u^2 + \bar{L}_v^2} \quad (23)$$

e infine il massimo tra i valori delle due diagonali

$$L_D^{0/45} = \max(L_D^0, L_D^{45}) \quad (24)$$

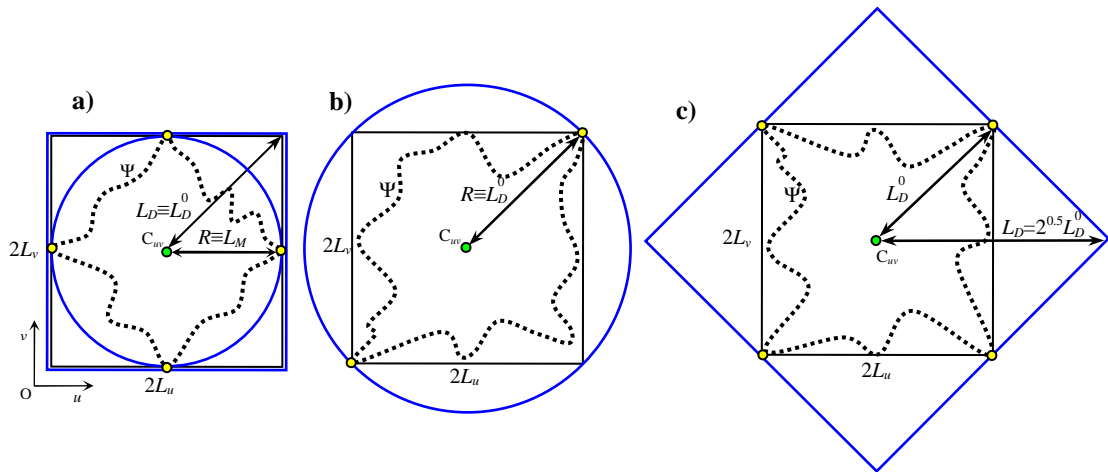


Figura 3: Curve Ψ aventi rettangolo uv di uguali dimensioni: a) curva con i valori minimi del raggio del MCC e della diagonale del MRC ($R=L_M, L_D=L_D^0$), b) curva con il valore massimo del raggio del MCC ($R=L_D^0$), c) curva con il massimo valore della diagonale del MRC ($L_D=2^{0.5}L_D^0$).

3.2 Riduzione del numero dei punti della struttura nei quali deve essere valutata τ_a

Nel caso in cui si debba verificare a fatica una struttura, il tensore degli sforzi è variabile sia rispetto al tempo che alle coordinate spaziali, cioè si ha $\sigma=\sigma(t, \mathbf{P})$. Naturalmente è opportuno effettuare la determinazione della tensione tangenziale alternata τ_a solo nei punti soggetti alle sollecitazioni più elevate. Una considerevole riduzione del numero di punti può essere ottenuta applicando l'analisi semplificata relativa alle giaciture a tutti i punti della struttura nel modo descritto nel seguito.

Nel caso del metodo MCC devono essere valutati i valori della semilunghezza del lato maggiore e della semidiagonale del rettangolo uv per ciascuna giacitura e ciascun punto \mathbf{P}_j della struttura, cioè i valori $L_{M_k}(\mathbf{P}_j)$ ed $L_{D_k}^0(\mathbf{P}_j)$, determinando il valore massimo di $L_M, L_{M_{\max}}$, come

$$L_{M_{\max}} = \max_{\substack{k=1, \dots, N_{\Delta} \\ j=1, \dots, N_P}} \{L_{M_k}(\mathbf{P}_j)\} \quad (25)$$

La determinazione di τ_a può essere effettuata solo nelle giaciture nelle quali è verificata la seguente condizione:

$$L_{D_k}^0(\mathbf{P}_j) \geq L_{M_{\max}} \quad (26)$$

Ovviamente tutti i punti per i quali il valore massimo di $L_{D_k}^0(\mathbf{P}_j)$ al variare della giacitura risulta minore di $L_{M_{\max}}$, cioè per i quali si verifica la condizione

$$L_{D_{\max}}^0(\mathbf{P}_j) = \max_{k=1,\dots,N_{\Delta}} \{L_{D_k}^0(\mathbf{P}_j)\} < L_{M_{\max}} \quad (27)$$

risultano esclusi dall'analisi; inoltre, poiché il valore di $L_{M_{\max}}$ è in genere maggiore di quello ottenibile nei singoli punti tramite la (17) - cioè in genere è $L_{M_{\max}} > L_{M_{\max}}(\mathbf{P})$ - in molti dei punti nei quali deve essere determinata τ_a il numero delle giaciture che devono essere considerate risulta ulteriormente ridotto rispetto a quello che si otterrebbe utilizzando la (18).

Analogamente, nel caso del metodo MRC devono essere valutati i valori $L_{D_k}^{0/45}(\mathbf{P}_j)$ per ciascun punto e ciascuna giacitura, determinandone il valore massimo

$$L_{D_{\max}}^{0/45} = \max_{\substack{k=1,\dots,N_{\Delta} \\ j=1,\dots,N_p}} \{L_{D_k}^{0/45}(\mathbf{P}_j)\} \quad (28)$$

La determinazione di τ_a può essere effettuata solo nelle giaciture nelle quali è verificata la seguente condizione

$$L_{D_k}^{0/45}(\mathbf{P}_j) \geq 0.9238 L_{D_{\max}}^{0/45} \quad (29)$$

Analogamente al caso precedente, in tutti i punti per i quali si verifica la condizione

$$L_{D_{\max}}^{0/45}(\mathbf{P}_j) = \max_{k=1,\dots,N_{\Delta}} \{L_{D_k}^{0/45}(\mathbf{P}_j)\} < 0.9238 L_{D_{\max}}^{0/45} \quad (30)$$

risultano esclusi dall'analisi e in molti dei punti nei quali deve essere determinata τ_a , il numero delle giaciture che devono essere considerate risulta ulteriormente ridotto rispetto a quello che si otterrebbe utilizzando la (21).

4. VERIFICA MEDIANTE SIMULAZIONE NUMERICA

L'efficacia del metodo per la riduzione delle giaciture è stata verificata con una simulazione numerica effettuata per mezzo del linguaggio di programmazione Matlab®, applicando il metodo a tensori degli sforzi con componenti variabili nel tempo in modo opportuno. Il periodo di analisi è stato considerato di durata unitaria ($0 \leq t \leq 1$) e la discretizzazione nel tempo ha previsto $N=64$ ed $N=512$ istanti. In particolare sono state considerate due tipologie di tensori. La prima tipologia è costituita da 25000 tensori rappresentabili come

$$\boldsymbol{\sigma}(t_i) = \boldsymbol{\sigma}_i = \begin{bmatrix} \sigma_{1,i} & \sigma_{4,i} & \sigma_{5,i} \\ \sigma_{4,i} & \sigma_{2,i} & \sigma_{6,i} \\ \sigma_{5,i} & \sigma_{6,i} & \sigma_{3,i} \end{bmatrix} \quad i=1,\dots,N \quad (31)$$

essendo le 6 componenti indipendenti esprimibili nella forma

$$\sigma_{j,i} = A_j \sin(\omega_j t_i + \lambda_j) \quad j=1,\dots,6; \quad i=1,\dots,N \quad (32)$$

con: $N=64, 512$; $t_i=(i-1)/N$, $0 \leq t_i \leq 1$; $A_j=0,1,2,3,4$; $\omega_j=2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi$; $\lambda_j=0, \pi/4, \pi/2, 3/4\pi, \pi$.

Le variabili A_j sono state selezionate in modo che il numero delle componenti del tensore simultaneamente non nulle variasse da 2 a 6.

La seconda tipologia è costituita da tensori le cui componenti $\tau_{xy}(t_i)$ e $\tau_{yz}(t_i)$ sono le componenti u_i e v_i di 83 curve Ψ opportunamente generate mediante simulazione, in presenza o assenza di componenti normali $\sigma_x(t_i)$ e $\sigma_z(t_i)$ variabili in modo opportuno. In particolare i tensori considerati hanno la forma seguente

$$\sigma(t_i) = \sigma_i = \begin{bmatrix} A_1 \sin(\omega_1 t_i + \lambda_1) & u_i & v_i \\ u_i & 0 & 0 \\ v_i & 0 & A_3 \sin(\omega_3 t_i + \lambda_3) \end{bmatrix} \quad i=1, \dots, 512 \quad (33)$$

con le costanti A , ω e λ ottenute effettuando 96 combinazioni dei valori $A_j=0,1,2,2.5,5$; $\omega_j=2\pi, 4\pi$; $\lambda_j=0, \pi/2$; con $j=1,2$. In totale sono stati considerati $96 \times 83 = 7968$ tensori.

L'analisi è stata effettuata discretizzando le possibili giaciture nell'intorno del punto con il metodo proposto in [12], assegnando un numero di suddivisioni $n_\theta=30$ all'angolo θ . Il numero totale di giaciture analizzate è stato $N_\Delta=571$.

Nel caso della prima tipologia di tensore, per i metodi MCC, il numero di giaciture nelle quali è necessario determinare τ_a è stato ridotto mediamente al 14% del totale, cioè $N'_\Delta \approx 0.14 N_\Delta$, con un risultato peggiore del 97% ($N'_\Delta \approx 0.97 N_\Delta$); per il metodo MRC è stato ridotto mediamente al 9%, ($N'_\Delta \approx 0.09 N_\Delta$), con un risultato peggiore del 67%, ($N'_\Delta \approx 0.67 N_\Delta$). In fig.4 sono riportate le curve rappresentative delle percentuali di giaciture nelle quali è necessario determinare τ_a relativamente ai 25000 tensori per i 2 metodi, con il valore medio indicato mediante un cerchietto.

Nel caso della seconda tipologia di tensore, per il metodo MCC il numero di giaciture è stato ridotto mediamente al 14%, con un risultato peggiore del 59%, mentre per il metodo MRC è stato ridotto mediamente al 12%, con un risultato peggiore del 34%.

Per quanto concerne l'efficacia in termini di tempi di calcolo, nel caso del metodo MCC, applicando il metodo di determinazione di τ_a descritto in [12], la riduzione percentuale dei tempi è stata praticamente uguale a quella delle giaciture; applicando un metodo molto più veloce sviluppato dall'autore, il tempo di calcolo è risultato pari a circa il 30% di quello necessario per l'analisi completa. per il numero di punti $N=512$ e a circa il 24% per il numero di punti $N=64$. Per quanto concerne il metodo MRC, la riduzione dei tempi di calcolo non è risultata influenzata dal numero di punti della curva. Utilizzando un normale algoritmo per la rotazione delle curve, considerando un numero di rotazioni $N_\gamma=30$ i tempi di calcolo sono stati mediamente ridotti al 14%, mentre per $N_\gamma=12$ i tempi di calcolo sono stati mediamente ridotti al 21%. I risultati relativi agli algoritmi più efficienti sono riassunti in tabella 1.

Come detto, in questo lavoro le analisi numeriche sono state effettuate utilizzando il linguaggio di programmazione Matlab; è possibile che i risultati riguardanti i tempi di calcolo possano essere diversi utilizzando altri linguaggi di programmazione.

Per quanto concerne la riduzione del numero di punti in cui deve essere determinata τ_a , la verifica numerica è stata effettuata considerando un caso semplice che può rappresentare una situazione intermedia. In particolare sono stati utilizzati i 25000 tensori $\sigma(t_i)$ della prima tipologia, aventi la forma descritta delle eq.(31) e (32), per determinare 25000 tensori variabili linearmente rispetto all'ordinata z e costanti rispetto ad x ed y espressi come:

$$\sigma(t_i, \mathbf{P}) = \sigma_i(\mathbf{P}) = \sigma_i \frac{z}{z_0} \quad 0 \leq z \leq z_0 \quad i=1, \dots, N \quad (34)$$

In questo caso le curve Ψ hanno la stessa forma per assegnata giacitura (cioè per assegnati angoli ϕ_n e θ) e ampiezza variabile linearmente con l'ascissa z .

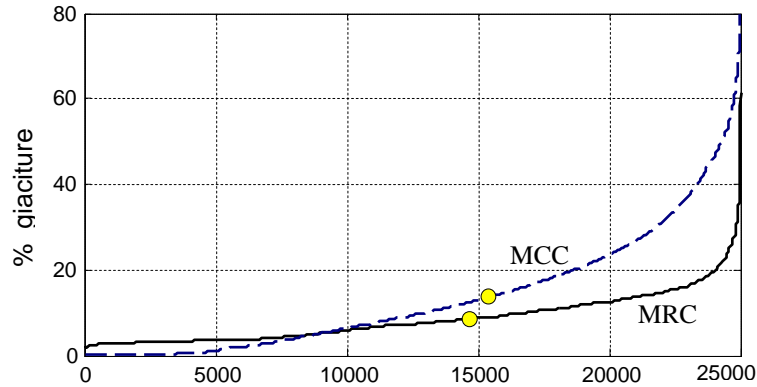


Figura 4: Curve rappresentative della percentuale di giaciture passanti per il punto nelle quali è necessario determinare τ_a per i tensori analizzati. Metodo MCC (linea tratteggiata) ed MRC (linea continua). I cerchi rappresentano il valor medio.

Nel caso del metodo MCC, utilizzando le relazioni (25) e (26), i punti sono stati ridotti a percentuali minime, medie e massime pari rispettivamente a circa 1%, 10%, 30%.

Nel caso del metodo MRC, utilizzando le relazioni (28) e (29), la riduzione è risultata costante, permettendo di ottenere una percentuale di punti nei quali deve essere valutata τ_a pari a circa l'8% del totale.

Come detto nel paragrafo precedente, se si applica la procedura di riduzione dei punti, il numero delle giaciture che devono essere considerate risulta ulteriormente ridotto rispetto a quello che si ottiene applicando separatamente la procedura di riduzione delle giaciture in ciascun punto.

Nel caso del metodo MCC le giaciture sono state ridotte complessivamente a percentuali minime, medie e massime pari rispettivamente a circa 0.001%, 1% e 8.5%, mentre per il metodo MRC sono state ridotte a percentuali minime, medie e massime pari rispettivamente a circa 0.1%, 0.35% e 2.5%.

Riassumendo si può affermare che la procedura semplificata applicata all'analisi di una struttura riduce mediamente i tempi di calcolo ad una percentuale inferiore al 2% di quelli dell'analisi completa.

Tabella 1: Percentuali dei tempi di calcolo rispetto all'analisi completa.

N	MRC		MCC/LC
	$N_{\gamma=30}$	$N_{\gamma=12}$	
512	14%	21%	30%
64	14%	21%	25%

5. CONCLUSIONI

In questo lavoro è stata proposta una procedura di analisi semplificata per l'analisi di fatica multiassiale di una struttura mediante criteri basati sull'approccio di piano critico. La procedura è di facile implementazione e veloce esecuzione e permette di ridurre sia il numero di giaciture nell'intorno di ciascun punto nelle quali è necessario determinare il valore effettivo di τ_a con le onerose procedure di calcolo, sia il numero di punti della struttura nei quali è necessario effettuare tale determinazione.

L'efficacia del metodo proposto è stata valutata mediante opportune simulazioni numeriche. La procedura per la riduzione delle giaciture è stata applicata ad oltre 30000 tensori; la procedura per la riduzione dei punti a 25000 tensori, considerando un caso di variabilità dei tensori rispetto alle coordinate spaziali poco vantaggioso per la tecnica proposta. Nonostante ciò, la riduzione dei tempi di calcolo complessivi nelle simulazioni effettuate è risultata mediamente superiore al 98%.

La procedura è proposta in una variante utile per il metodo MCC e una utile per il metodo MRC, ma il principio su cui si basa è probabilmente adattabile ad altre definizioni di τ_a .

BIBLIOGRAFIA

- [1] Findley W.N., A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending, *I. Eng. Ind.-Trans. ASME*, 81, 1959, pp.301-306.
- [2] McDiarmid DL, A general criterion for high cycle multiaxial fatigue failure, *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 14, 429-453 (1991).
- [3] McDiarmid DL. A shear stress based critical-plane criterion of multiaxial fatigue failure for design and life prediction. *Fatigue Fract Eng Mater Struct*, 17, 1994, pp.1475–84.
- [4] K. Dang Van, A. Le Douaron, H.P. Lieurade, Multiaxial fatigue limit: a new approach, in: *Proc. 6th Int. Conf. Fract. Advances in Fracture Research*, Pergamon Press, Oxford, 1984, pp.1879-1885.
- [5] K. Dang Van, B. Griveau, O. Message, On a new multiaxial fatigue limit criterion: theory and applications, in: M.W. Brown, K.J. Miller (Eds.), *Biaxial and Multiaxial Fatigue*, EGF 3, Mechanical Engineering Publications, London, 1989, pp.479-496.
- [6] Susmel L, Lazzarin P. A bi-parametric Wöhler curve for high cycle multiaxial fatigue assessment, *Fatigue Fract Eng Mater Struct*, 25, 2002, pp.63–78.
- [7] B.R.You, S.B. Lee, A critical review on multiaxial fatigue assessments of metals, *Int. J. Fatigue* 18 (4), 1996, pp.235-244.
- [8] Papadopoulos IV. A new criterion of fatigue strength for out-of phase bending and torsion of hard metals. *Int J Fatigue*,16, 1994, pp.377–84.
- [9] A. Bernasconi, I.V. Papadopoulos, Efficiency of algorithms for shear stress amplitude calculation in critical plane class fatigue criteria, *Computational Materials Science*, Vol. 34, N.4, 2005, pp.355-368.
- [10] Lemaitre J, Chaboche JL. *Mechanics of solid materials*. Cambridge: Cambridge University Press; 1990
- [11] Grubisic V, Simbürger A. Fatigue under combined out of phase multiaxial stresses. In *Proceedings of “International conference on fatigue testing and design”*. Society of Environmental Engineers, London; 1976. pp. 27.1–.8
- [12] B. Weber, B. Keunmeugne, J.C. Clement, J.L. Robert, Improvements of multiaxial fatigue criteria computation for a strong reduction of calculation duration, *Comp. Mater. Sci.*, 15, 1999, pp.381-399.
- [13] D. Elzinga, D.W. Hearn, Geometrical solutions for some minimax location problems, *Transport. Sci.*, 6, 1972, pp.96-104.
- [14] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, O. Schwarzkopf, *Computational Geometry: Algorithms and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1998.
- [15] J.L. Zhou, A.L. Tits, Nonmonotone line search for minimax problems, *J. Optimiz. Theory App*, 76, 1993, pp.455-475.
- [16] J.A. Araújo, A.P. Dantas, F.C. Castro, E.N. Mamiya, J.L.A. Ferreira, On the characterization of the critical plane with a simple and fast alternative measure of the shear stress amplitude in multiaxial fatigue, *International Journal of Fatigue*, 33, 2011, pp.1092–1100.
- [17] G. Petrucci, Considerazioni teoriche e pratiche sul metodo del massimo rettangolo circoscritto per la valutazione dell'ampiezza della tensione tangenziale nei criteri di fatica multiassiale basati sull'approccio di piano critico, 41° Convegno Nazionale AIAS, Vicenza (2012)
- [18] I.V. Papadopoulos, Critical plane approaches in high-cycle fatigue: on the definition of the amplitude and mean value of the shear stress acting on the critical plane, *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* 21, 1998, pp.269-285.
- [19] Susmel L., A simple and efficient numerical algorithm to determine the orientation of the critical plane in multiaxial fatigue problems. *Int J Fatigue*, 32, 2010, pp.1875–83.
- [20] G. Petrucci, Improvements in the algorithms for the determination of the shear stress components in critical plane class fatigue criteria, *ICMFF9*, Parma (2010).