

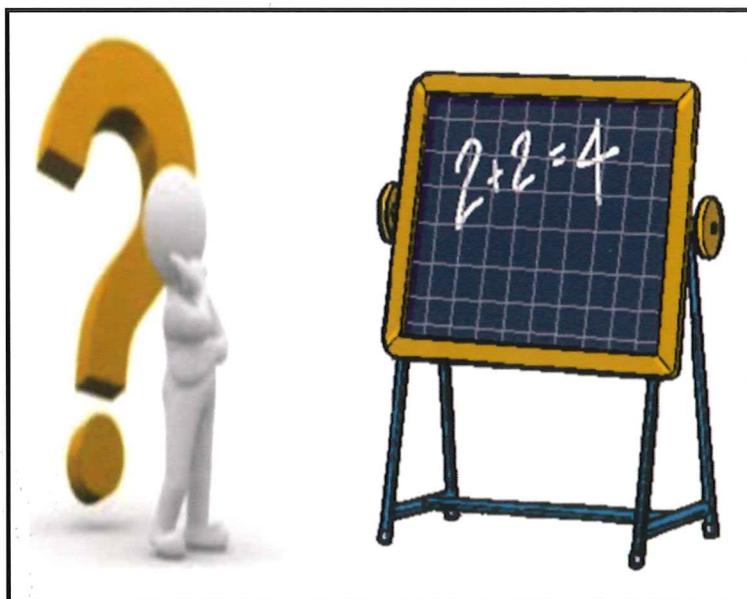
*Atti del Convegno Nazionale*

# **LA DIDATTICA DELLA MATEMATICA: STRUMENTI PER CAPIRE E PER INTERVENIRE**

A cura di Bruno D'Amore

Testi di:

Giorgio Bolondi • Bruno D'Amore • Benedetto Di Paola  
Martha Isabel Fandiño Pinilla • Annarita Monaco • Rosetta Zan



Pitagora Editrice Bologna

---

"(...) Formare menti ben fatte, far emergere le propensioni naturali, far amare la cultura in ogni sua espressione, sviluppare opportuno ed acuto senso critico, capacità dialogica e capacità di ascolto, dare senso alle competenze, ... Se uno ci pensa, la responsabilità sociale ed etica del docente è infinitamente superiore a quella del chirurgo, dell'ingegnere, dell'avvocato e del politico. (...)

Dalla Prefazione

**Giorgio Bolondi** è docente presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna, membro del NRD di Bologna

**Bruno D'Amore** è docente presso l'Università Distrital Francisco José de Caldas di Bogotà, membro del NRD di Bologna e del Mescud di Bogotà

**Benedetto Di Paola** è docente presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Palermo, membro del Grim di Palermo

**Martha Isabel Fandiño Pinilla** è stata docente a contratto presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna, membro del NRD di Bologna e del Mescud di Bogotà

**Annarita Monaco** è docente di scuola primaria a Roma e membro del RSDDM di Bologna

**Rosetta Zan** è docente presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa, presidente della CIIM (Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica) dell'UMI (Unione Matematica Italiana)

Con il Patrocinio  
della Città di Tricase



€12,00



ISBN 88-371-1892-9



9 788837 118921

## Indice

<i>B. D'Amore</i> • Prefazione .....	VII
--------------------------------------	-----

### CONFERENZE

<i>Giorgio Bolondi</i> • Le valutazioni esterne in matematica (prove Invalsi, TIMSS, OCSE-Pisa): utilità, limiti, ricadute .....	3
<i>Bruno D'Amore</i> • La ricerca in didattica della matematica e la sua applicazione concreta in aula .....	9
<i>Benedetto Di Paola</i> • I libri di matematica che circolano nella scuola, italiana e non: ricadute nella pratica d'aula .....	15
<i>Martha Isabel Fandiño Pinilla</i> • Che cosa si intende per apprendimento concettuale in matematica .....	19
<i>Annarita Monaco</i> • Apprendimento matematico: la forza della didattica .....	25
<i>Rosetta Zan</i> • La comprensione di un problema .....	31

### SEMINARI

#### *Per la scuola secondaria:*

<i>Giorgio Bolondi</i> • Dalle Indicazioni Nazionali alla pratica d'aula. 1- Gli obiettivi e i traguardi. 2- Le criticità degli apprendimenti. 3- La progettazione dei percorsi .....	39
---	----

#### *Per la scuola dell'infanzia:*

<i>Bruno D'Amore</i> • Insegnamento/Apprendimento significativo della matematica nella scuola dell'infanzia .....	47
---	----

#### *Per la scuola dell'infanzia:*

<i>Benedetto Di Paola</i> • Gli insegnanti si raccontano ... Matematica in Sezione .....	63
--	----

#### *Per la scuola primaria:*

<i>Martha Isabel Fandiño Pinilla</i> • Diverse componenti dell'apprendimento della matematica .....	71
---	----

#### *Per la scuola primaria:*

<i>Annarita Monaco</i> • Mondi matematici in aula: tra creazione, comunicazione e discussione .....	81
---	----

#### *Per la scuola secondaria:*

<i>Rosetta Zan</i> • Difficoltà in matematica; 1 <sup>a</sup> puntata: Osservare; 2 <sup>a</sup> : Interpretare; 3 <sup>a</sup> : Intervenire .....	87
---	----

ISBN 88-371-1892-9

© Copyright 2014 by Associazione Asfodelo, Tricase (Lecce)

Tutti i diritti sono riservati, nessuna parte di questa pubblicazione può essere riprodotta, memorizzata o trasmessa per mezzo elettronico, elettrostatico, fotocopia, ciclostile, senza il permesso dell'Associazione Asfodelo.

Stampa: Pitagora Editrice S.r.l., Via del Legatore 3, Bologna, Italy.

Codice: 49/15

<http://www.pitagoragroup.it>

e-mail: [pited@pitagoragroup.it](mailto:pited@pitagoragroup.it)

l'appesantire di inutili formalismi qualche cosa che di per sé sarebbe naturale, e perdendo di vista il lato concettuale.

Esempio 5: Il bambino ha varie idee sulla misura e sul processo di misurazione, in vari contesti

Barlumi abbastanza buoni di uso del denaro (o, almeno, di quel che significa, da un punto di vista matematico, anche se talvolta tende a dare maggior valore alle monete più grandi o a mucchi più numerosi di monete). Idee piuttosto buone su misure di lunghezza, larghezza e profondità. Poca o nessuna dimestichezza con il concetto di estensione superficiale, ma idee abbastanza fondate di equiestensione (specie se ha giocato con il tangram ed ha accostato piastrelle o se ha piegato carta per il gioco della simmetria).

Esempio 6: Il bambino ha discrete competenze su varie questioni di natura topologica.

Esempio 7: Il bambino ha una discreta competenza sul fatto che vi siano regole nella formazione delle frasi e delle singole parole.

Questo lo porta a costruzioni sintattiche delle frasi.

È ovvio che si potrebbe continuare a lungo, con chissà quanti altri esempi, oppure raffinando notevolmente gli esempi precedenti (gli esempi 5 e 6 potrebbero fornire ampi spunti per indagini). Non si può non tenere conto di queste competenze di base già acquisite, né nella didattica all'interno della scuola dell'infanzia, né nel momento del passaggio alla scuola elementare.

L'assurda stupidaggine del bambino-tabula-rasa è morta e sepolta. Così come sembra ribaltata la tendenza a valutare fasi o stadi su quel che Pierino non sa fare: Pierino sa e sa fare molto. Ed è assai più produttivo, per i futuri processi di apprendimento/insegnamento, che l'educatore sappia riconoscere e sfruttare, in positivo, le capacità di Pierino.

#### Bibliografia.

Angeli A., D'Amore B., Di Nunzio M., Fascinelli E. (2011). *La matematica dalla scuola dell'infanzia alla scuola primaria*. Progetto: *Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere*. Vol. 5. Bologna: Pitagora.

**Benedetto Di Paola (G.R.I.M., Università di Palermo)**

*I libri di matematica che circolano nella scuola italiana e non: ricadute nella pratica d'aula*

#### **Capire ed intervenire: classi multiculturali e processi cognitivi, cosa possiamo imparare dagli "altri"?**

Molte ricerche internazionali sulle competenze matematiche discutono le performance degli studenti dei diversi gradi scolastici in relazione al contesto nel quale il fenomeno di insegnamento/apprendimento si sviluppa e quindi in connessione con il contesto sociale/culturale, le scelte curriculari, i libri di testo in adozione etc. (Love, Pimm, 1996). In sintesi, in accordo con molti ricercatori, potremmo dire che tutto il complesso sistema sociale ed educativo collabora alla formazione globale degli alunni e allo sviluppo specifico della disciplina in oggetto. Discutere questa problematica in modo globale e quanto più non eurocentrico (necessità posta dalla natura stessa delle classi in cui oggi gli insegnanti si trovano a lavorare) è complesso e richiede diversi strumenti di osservazione e di analisi che fanno capo ai valori generali di riferimento, alle tradizioni e ai modelli culturali di un determinato Paese.

Se ci riflettiamo, il curriculum di Matematica, che ha il compito di tramandare il patrimonio culturale in relazione a questa disciplina è strutturato in modo da integrare tutte queste prospettive. *Ma oggi, in presenza di studenti provenienti da culture diverse, inseriti nelle nostre classi, quale curriculum proporre?*

La domanda provocatoria sottolinea uno dei problemi che pian piano la Scuola sta cercando di affrontare e cioè la presenza in classe di studenti non italiani, di differente cultura quindi che, nella maggior parte dei casi, provengono da contesti scolastici precedenti molto diversi dal nostro, che quindi veicolano esplicitamente o implicitamente tradizioni ed approcci culturali diversi che intervengono nell'apprendimento della Matematica del singolo soggetto interessato ma anche, in modo implicito, nella vita dell'intera classe in cui il soggetto apprendente è inserito.

In poche battute potremmo dire che uno dei problemi chiave dell'insegnamento/apprendimento della Matematica in situazione di multiculturalità è certamente quello di affrontare lo studio della disciplina e delle problematiche riferite al suo processo di insegnamento/apprendimento attraverso considerazioni di carattere sociale, culturale, antropologico, geografico etc., trattando in maniera diretta non soltanto la complessità dei contenuti disciplinari ma anche quelli che in molti casi possono definirsi come gli aspetti storico-epistemologici della disciplina discussa in aula con gli allievi.

La ricerca nazionale ed internazionale in Didattica della Matematica, negli ultimi anni si è sempre più interessata a questo tema; gli studi condotti in Italia e all'estero hanno posto l'accento sulla necessità di riflettere sulle questioni riguardanti le *Matematiche Elementari* in una visione quanto più ampia possibile, alla luce di una Scuola sempre più "diversificata", multiculturale e globalizzata.

*Quale didattica disciplinare nella classe del terzo millennio? Quale formazione matematica? Quali saperi? E quindi ... Quale matematica trasmettere agli allievi?*

*Quali contenuti ritenere più utili per un apprendimento condiviso? Come relazionare questi alle culture presenti in classe?*

Come detto prima, queste domande sottolineano la complessità della tematica trattata e la necessità di restringere l'ambito di analisi per facilitare una possibile riflessione su alcune considerazioni di Didattica della Matematica in ambiti multiculturali per, come recita il titolo di questo corso/seminario, *capire e intervenire* in modo consapevole come insegnanti e come ricercatori.

Il mio intervento vuole proporre una riflessione su questo tema, a partire da possibili analisi di tipo semiotico/culturale di uno degli strumenti più utilizzati dagli insegnanti in classe: il libro di testo. L'approccio utilizzato sarà di tipo non eurocentrico e prenderà in considerazione, come controparte di alcuni libri di testo italiani, quelli cinesi (principalmente di Scuola Primaria) analizzandone analogie e differenze in reazione ad un possibile studio epistemologico delle culture sottese: filosofia, logica, lingua, storia dello sviluppo del pensiero matematico etc.

Volendo schematizzare, potremmo riassumere il framework culturale preso in esame per studiare la struttura dei libri di testo e parallelamente il sistema scolastico dei due paesi e il curricolo didattico relativo, riferendoci da un lato alla terna Confucio/Tao/Buddha e dall'altro a Socrate/Platone/Aristotele.

Per quanto riguarda il sistema scolastico cinese, la figura sottostante evidenzia la strutturazione dei cicli scolastici e il programma di studio della scuola primaria.

Non-formal/Lifelong				
Tertiary				
Senior Secondary (3 years)	General	Specialised	Vocational	Crafts
Junior Secondary (3 years)				
Primary (6 years)				
Pre-School (3-4 years)				

Discipline	Numero di ore settimanali					
	1° anno	2° anno	3° anno	4° anno	5° anno	6° anno
Ideologia e morale	1	1	1	1	1	1
Lingua cinese	10	10	9	8	7	7
Matematica	4	5	5	5	5	5
Società	-	-	-	2	2	2
Natura	1	1	1	1	2	2
Ed. fisica	2	2	3	3	3	3
Ed. musicale	3	3	2	2	2	2
Pittura	2	2	2	2	2	2
Lavoro	-	-	1	1	1	1
Attività di gruppo	1	1	1	1	1	1
Scienza, tecnologia e attività culturali	4	4	4	4	4	4
<b>Subtotale</b>	<b>28</b>	<b>29</b>	<b>29</b>	<b>30</b>	<b>30</b>	<b>30</b>
Variazioni locali di programma	2	2	3	3	3	3
<b>Totale</b>	<b>30</b>	<b>31</b>	<b>33</b>	<b>33</b>	<b>33</b>	<b>33</b>

Fig. Cicli scolastici e programma di studio della Scuola Primaria in Cina

Il programma di studio nel corso della vita scolastica cinese prevede da 25 a 30 ore di lezione settimanali, a seconda della classe, più 5 ore di attività extracurricolari non sempre previste. Ogni ora di lezione comprende 45 minuti di insegnamento e dieci minuti di pausa. Nelle scuole a tempo pieno, le lezioni iniziano alle 8:00 e riprendono alle 13:30 (inverno) o 14:00 (estate), dopo la pausa per il pranzo. Agli studenti vengono generalmente assegnati compiti a casa.

### **I libri di testo: i problemi con variazione e i problemi a parole nella tradizione italiana e cinese.**

Per quanto attiene ai libri di testo, uno degli aspetti più interessanti che saranno oggetto di discussione durante il corso/seminario e che sottolineano le differenze di approccio fra i libri di testo che circolano in Italia e in Cina, fa riferimento ai *problemi con variazione*, tipici della Didattica della Matematica cinese. L'attenzione sarà rivolta particolarmente ai problemi a parole.

La scelta di porre attenzione proprio a questo aspetto e quindi all'analisi semiotica di presentazione proposta da diversi autori di libri di testo cinesi è dettata dalla possibilità di rileggere, attraverso i manuali utilizzati dagli insegnanti in classe, alcuni aspetti relativi alle performance degli allievi cinesi di scuola primaria e non solo sul pensiero aritmetico e pre-algebrico, messi in evidenza da molti degli insegnanti che hanno in classe allievi di cultura cinese (alcune interviste saranno mostrate durante il corso/seminario).

In accordo con Xuhua Sun (2011), la prospettiva cinese della variazione connota il loro sistema educativo. (Sun, 2011). Per rendersi conto dei diversi contesti in cui è utilizzata sin dai primi giorni della scuola primaria è sufficiente osservare le due immagini riportate di seguito tratte da due differenti libri di testo di matematica della Rep. Pop. Cinese.

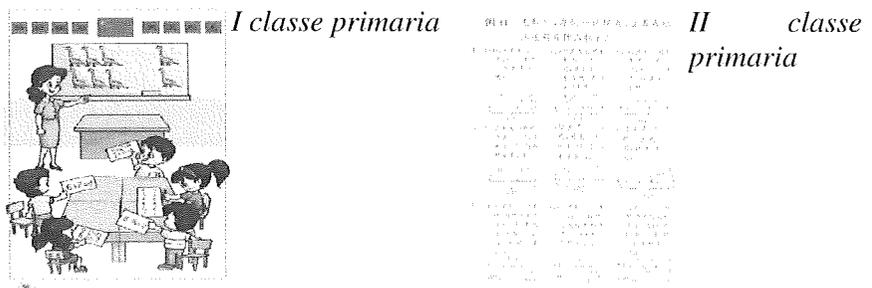


Fig. Libri di testo cinesi di Scuola Primaria

In esse troviamo l'approccio per variazione ai problemi additivi in contesti differenti e formulati in modalità differente (lettura d'immagine a sinistra; problema a parole a destra). Se comparate con le situazioni problematiche ed i problemi a parole rintracciabili nei libri di testo della scuola primaria italiana (Zan, Poli, 2010), si nota che in questi ultimi non si riscontra l'interazione di un problema, più soluzioni o più problemi con una soluzione tipico della didattica cinese (Sun, 2011). Essi infatti sono costruiti per la maggior parte con problemi a parole con addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni, in una prospettiva di sviluppo progressivo, ma fortemente segmentato e scisso. La variazione non si limita ai problemi additivi, ma è riscontrabile anche nei problemi moltiplicativi (Sun, 2011). Questi elementi, a nostro avviso, evidenziano lo scarto rispetto alla pratica didattica tipica italiana che seppur in una prima approssimazione si può ricondurre a quella espressa nel documento standard NCTM del 2000. La tabella sottostante evidenzia le differenze di approccio che possono riscontrarsi in modo esplicito o implicito nel curriculum didattico dei due Paesi.

USA - standard NCTM (2000)	Cina - programmi MOE (2004)
Attività prevalentemente individuali o di piccolo gruppo	Attività prevalentemente individuali o di grande gruppo (classe)
Apprendimento per scoperta	Apprendimento per imitazione (insegnamento diretto)
Uso continuo dei materiali (anche nelle scuole secondarie)	Uso dei materiali solo nei primi anni della scuola primaria come accesso all'astrazione
Importanza limitata del calcolo mentale	Grande importanza del calcolo mentale
Importanza limitata di schemi e formule	Enfasi sull'insegnamento di schemi risolutivi di situazioni problematiche

Fig. Comparazione NCTM e MOE

Tralasciando opportunamente l'evoluzione storica dei libri di testo italiani, nota ai più, è interessante invece ricordare come nel 1949, dopo la fondazione della repubblica popolare cinese, il ministero dell'istruzione iniziò a interessarsi della

pubblicazione dei libri di testo che portò dal 1950 al 1986 alla comparsa di un'unica serie di testi scolastici, usati nello stesso tempo, in tutte le scuole del Paese. Oggi in Cina esistono pochi libri di testo pubblicati da autori diversi e esaminati in modo diretto in termini di qualità e rigore da una commissione ministeriale che ne studia la conformità con il MOE. Questo aspetto può destare qualche perplessità in termini di autonomia e libertà scolastica degli insegnanti ma ha anche molte ricadute positive sulla formazione e sul valore dei libri di testo utilizzati in classe.

I libri cinesi che si esamineranno durante il corso/semiario, confrontandoli ad alcuni testi in circolazione nella Scuola primaria italiana, sono tra i più diffusi in Cina e fanno parte della collezione intitolata *Shuxue* e identificabili con il codice ISBN 7-107-14632-7/G, 7-107-15032-4/G, 7-107-15696-9/G, 7-107-16205-5/G.

Le immagini sotto riportate vengono qui proposte come stimolo che permetterà, durante il corso/seminario in oggetto, di osservare alcuni aspetti tipici della variazione cinese nelle operazioni di addizione e sottrazione, tra loro fortemente connesse fin dai primi anni di scuola. Questo approccio che si ritrova in tutti i testi cinesi in circolazione sottolinea, in prima battuta, una possibile differenza con l'approccio tipico occidentale che ad esempio si ritrova nella scelta editoriale della casa Editrice Erickson, che pubblica due testi separati per affrontare lo studio dell'addizione e della sottrazione nei quaderni operativi numero 4 e numero 5. Sebbene i quaderni presentino delle analogie, poiché fanno parte della stessa collana, sono presenti numerose differenze dovute al fatto che sono stati redatti da due autrici diverse coordinate da Clotilde Pontecorvo. In Cina questo sarebbe impossibile!

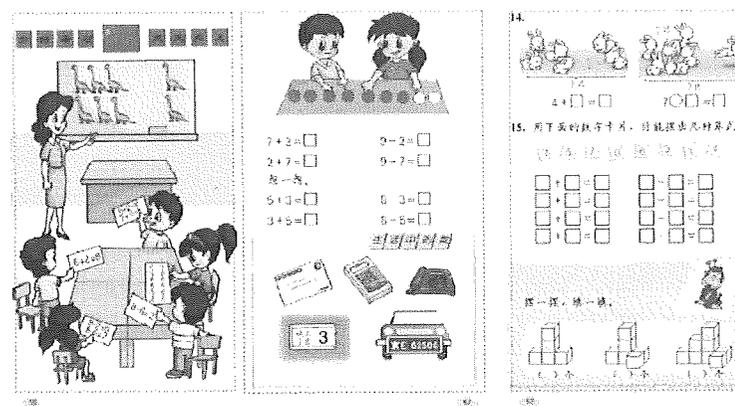


Fig. L'uso della variazione nei libri di testo di Scuola Primaria cinese

L'approccio alla variazione si ritrova in Cina già dalla Scuola dell'Infanzia: l'immagine sotto riportata si riferisce ad una pagina di un testo cinese per bambini di 3, 4 e 5 anni.

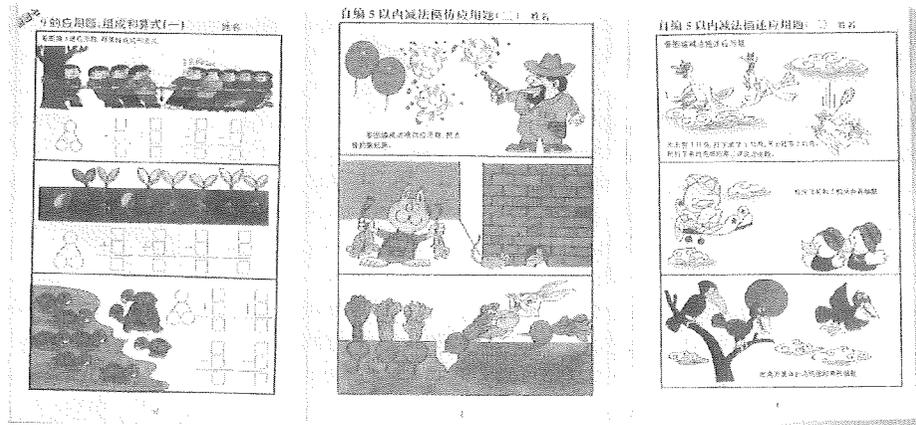


Fig. L'uso della variazione nei libri di testo di Scuola dell'infanzia cinese

Altro aspetto interessante in fase di comparazione tra i libri di testo in circolazione in Italia e in Cina è il peso che nei libri di testo di cultura orientale viene data all'uso delle immagini e degli artefatti (come le bacchette da calcolo) e quindi alla struttura semiotica relativa ai diversi registri utilizzati nelle rappresentazioni che si ritrovano nei testi (*lingua-figura-artefatto*):

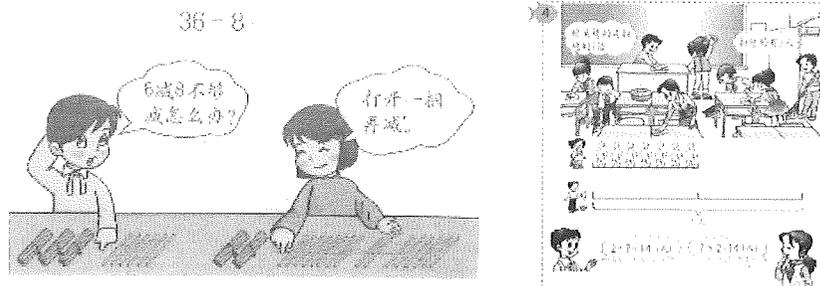


Fig. L'uso di artefatti in un testo di Scuola Primaria cinese

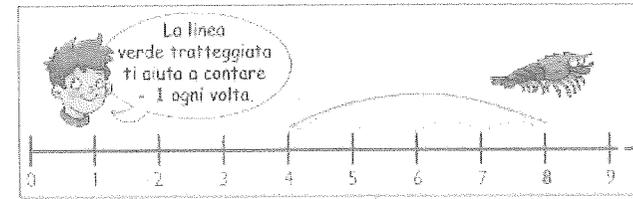
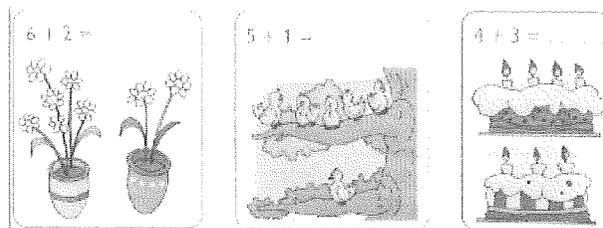


Fig. Problemi con elementi figurali disgiunti in un testo di scuola Primaria italiano

**I libri di testo come strumento per ripensare la formazione degli insegnanti di Matematica in un'ottica interculturale.**

Ripensare alla formazione degli insegnanti significa anche interrogarsi sulle nuove problematiche che oggi la Scuola pone. Il problema scientifico che si “nasconde” dietro la formazione degli insegnanti di Matematica in un'ottica interculturale ha, come detto, chiaramente proporzioni molto ampie che coinvolgono aspetti relativi alla conoscenza matematica, alla Pedagogia, alle didattiche disciplinari e alle competenze culturali in generale. Ciò che io, durante il corso/seminario, cercherò di affrontare, partendo dalle analisi discusse in precedenza sui libri di testo, sarà una riflessione sulle analogie e le differenze di processi cognitivi che possono riscontrarsi in alunni di cultura differente da quella italiana (cinese, nello specifico) ripensando in modo critico al proprio modo di fare didattica della Matematica in classe con il libro di testo in adozione e favorendo possibilmente delle contaminazioni che vengono da lontano (Jullien, 2008).

**Principali riferimenti bibliografici.**

Cai J., Nie B. (2007). Problem solving in Chinese mathematics education: research and practice. *ZDM the International Journal on Mathematics Education*. 39, 459-473.

D'Ambrosio U. (2002). *Etnomatematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Pitagora: Bologna.

D'Amore B. (2011). Alcune riflessioni su didattica, concetto, competenza, schema, situazione. *Bollettino dei docenti di matematica*. [Bellinzona, Svizzera]. 63, 19-26.

D'Amore B., Frabboni, F. (1996). *Didattica generale e didattiche disciplinari*. Milano: Angeli.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2001). Concepts et objets mathématiques. In: Gagatsis A. (ed.) (2001). *Learning in Mathematics and Sciences and Educational Technology. Vol. 1*. Nicosia: Intercollege Press. 111-130.

D'Amore B, Fandiño Pinilla M.I., Gabellini G., Marazzani I., Masi F., Sbaragli S. (2004). *Infanzia e matematica. Didattica della matematica nella scuola dell'infanzia*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2011). Frasi illuminanti di studenti e di docenti in 40 anni di ricerca. In: D'Amore B., Sbaragli S. (Eds.) (2011). *Un quarto di secolo al servizio della*

- didattica della matematica*. Atti del Convegno "Incontri con la matematica", n. 25, Castel San Pietro Terme (Bo). Bologna: Pitagora. 15-20.
- Di Paola B., Spagnolo F. (2010). European and Chinese Cognitive Styles and their impact on Teaching/Learning Mathematics. *Journal of Mathematics Education*, 3, 2, 139-153.
- Di Paola B., Spagnolo F. (2011). Quali le coordinate culturali e quali gli usi nell'insegnamento/apprendimento delle Matematiche nella relazione Cina-Europa. *Lettera Pristem*.
- Fandiño Pinilla M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Trento: Erickson. [Versione in lingua spagnola, 2010, Bogotá: Magisterio].
- Leung F.K.S., Graf K.-D., Lopez-Real F.J. (Eds.), (2006). *Mathematics Education in Different Cultural Traditions: A Comparative Study of East Asia and the West*. Berlin: Springer.
- Needham J. (1981). *Scienza e Civiltà in Cina*. Torino: Einaudi. (Original title: *Science and Civilisation in China*, Cambridge: Cambridge University Press, 1959).
- Nisbett R.E. (2003). *The Geography of Thought*. London: Nicholas Brealey Pbl.
- Nisbett R.E., Peng K., Choi I., Norenzayan A. (2001). Culture and Systems of Thought. *Psychological Review*. 108, 291.
- Ramploud A., Di Paola B. (2013). Taking a look at Chinese pedagogy in shuxue [mathematics]: a dialogue between cultures to approach arithmetic at first and second Italian primary classes. *CERME Proceedings*. (In corso di stampa).
- Spagnolo F. (1986). Sull'impostazione di certi metodi risolutivi dei problemi nella tradizione cinese. *L'insegnamento della Matematica*. 9, 8, 81-91.
- Spagnolo F., Di Paola B. (2010). *European and Chinese Cognitive Styles and their impact on Teaching Mathematics*. Berlin: Springer.
- Spagnolo F. (2011). Come mi sono interessato alle questioni cinesi? *Lettera Pristem*.
- Jullien F. (2006). *Si parler va sans dire. Du logos et d'autres ressources*. Paris: Edition du Seuil.
- Sun X. (2011). "Variation problems" and their roles in the topic of fraction division in Chinese mathematics textbook examples. *Educational Studies in Mathematics*. 76, 1, 65-85.
- Zan R., Poli, P. (2010). Winning beliefs in mathematical problem solving. *Mathematics Education*. 1, 2, 97.

**Martha Isabel Fandiño Pinilla (NRD, Università di Bologna)**  
***Diverse componenti dell'apprendimento della matematica.***

**1. Premessa.**

Quando uno studente fallisce in matematica è troppo sbrigativo dire che non ha raggiunto gli obiettivi attesi; in realtà, in che cosa ha fallito? Non ha capito i concetti? Li ha capiti ma non sa usarli per risolvere problemi? Non sa effettuare i calcoli, o li sa effettuare ma non sa a che scopo? Ha costruito i concetti ma non li sa comunicare? Ha risolto un problema ma non sa dire come? Non sa gestire i cambi di rappresentazione semiotica che sempre la matematica richiede fin dai suoi primi passi? In generale, la presenza di *errori* sistematici e ripetuti al termine di un percorso di apprendimento è ovviamente un segno del fatto che l'apprendimento non è avvenuto come avrebbe dovuto, e l'insegnante è posto di fronte al problema del *recupero*.

Cosa fare? Si parte naturalmente esaminando quel che succede in aula durante le ore di matematica, provando a porci le domande precedenti, chiedendoci: come aiutare a risolvere il problema della valutazione in matematica, di una valutazione specifica, che sia d'aiuto a tutti, che permetta di intervenire sulle cause del fallimento? Dire di uno studente: «Bruno non risponde in matematica come io mi aspetterei di sentirmi rispondere», cioè: «Bruno sbaglia», è troppo banale. E adesso, come rimedio alle cause che hanno portato Bruno a sbagliare?

Ma come si fa ad intervenire per *recuperare*, se non si sa determinare con precisione la *causa* dell'errore? Uno stesso errore può avere cause molto diverse, ovviamente, e dipendere da problemi distinti e specifici dell'apprendimento.

Il problema per l'insegnante è quindi quello di "analizzare" (nel senso di "guardare in maniera analitica") l'apprendimento degli allievi; di disporre di categorie che gli permettano di "scomporre" i diversi fenomeni dell'apprendimento della matematica, che rimane ovviamente un fatto sostanzialmente unitario.

La nostra esperienza ci dice che gli atteggiamenti errati degli studenti possono riguardare fallimenti nell'acquisizione dei concetti, incapacità nella gestione degli algoritmi, mancanza di strategia nella risoluzione dei problemi (uno studente può aver concettualizzato, saper eseguire algoritmi, ma impantanarsi di fronte ad un problema da risolvere; è un caso piuttosto diffuso), non adeguata comunicazione (è il caso dello studente che sa ma che non sa come comunicare quel che sa) o infine una fallimentare gestione dei registri semiotici (forse il fallimento più diffuso, soprattutto nella scuola secondaria). Vi possono essere due di queste cause contemporaneamente o anche tre, ma difficilmente vi sono tutti e cinque i fallimenti contemporaneamente ...

Si può così dividere l'apprendimento della matematica virtualmente in 5 componenti, studiandole una per una come fossero tra loro separate e dando per ciascuna suggerimenti sulla valutazione specifica.

È ovvio che la matematica è una e che l'apprendimento è uno solo, lo ribadiremo più volte, e che dunque questa suddivisione in componenti è puramente di comodo, è solo uno strumento per cercare di rimediare alle cause degli errori e uno strumento per valutare in modo specifico.