

L'USO DEI SIMBOLI
DALL'ANTICHITÀ
AL MONDO CONTEMPORANEO

A CURA DI
SALVATORE GERUZZI

ACCADEMIA SPERELLIANA · GUBBIO

BIBLIOTECA · 6.



PISA · ROMA
FABRIZIO SERRA EDITORE
MMXIV

LA LOGICA E IL MITO DEL LINGUAGGIO PERFETTO

MARCO CARAPEZZA · MARCELLO D'AGOSTINO

IL MITO DEL LINGUAGGIO LOGICAMENTE PERFETTO

È possibile [...] che una volta costruita da un essere pensante la lingua simbolica della matematica, essa – come suol dirsi – pensi per noi.¹

IN queste parole di Gottlob Frege è espresso, in modo chiaro e conciso, il mito del 'linguaggio logicamente perfetto' che costituisce il tema del presente saggio.

La riflessione sul linguaggio perfetto (o originario) è un tema ricorrente nella riflessione scientifico-filosofica a partire dall'antichità greca.² Con questa locuzione si sono però intese molte cose tra loro abbastanza differenti. Chiariamo subito, dunque, che qui non ci occuperemo di progetti basati sull'idea che i nomi esprimano l'essenza profonda delle cose o che diano informazioni sulla semantica lessicale, risultando così 'semanticamente trasparenti'. Ci occuperemo invece del 'linguaggio logicamente perfetto', intendendo con questa accezione un linguaggio che garantisca la correttezza dei ragionamenti e nel quale si possano immediatamente riconoscere le relazioni che sussistono fra le proposizioni facendo ricorso alla semplice *percezione sensoriale*. Un'accezione di perfezione, dunque, nella quale la trasparenza semantica riguarda le 'parole logiche' e non i termini lessicali. A questi ultimi è richiesta solamente l'univocità referenziale: ad ogni contenuto concettuale deve corrispondere un solo termine – un *real character*, per usare la fortunata espressione di Francis Bacon.

Come molti altri inventori di lingue filosofiche, Gottfried Wilhelm Leibniz ritiene che la possibilità di un linguaggio perfetto poggia sull'identificazione delle nozioni primitive che formano lo scibile. Ad ogni nozione primitiva si dovrebbe attribuire un numero e questi numeri dovrebbero combinarsi tra loro, generando tutte le nozioni possibili. Un sistema di traduzione di questi numeri in consonanti e vocali consentirebbe poi di assegnare ad ogni nozione un *carattere*³ che si riferisca univocamente alla nozione da esso designata. Sulle regole combinatorie di questi caratteri, infine, si dovrebbe fondare l'*ars iudicandi*:

Giunti a questa mirabile osservazione: che si poteva certamente escogitare un alfabeto dei pensieri umani e che dalla combinazione delle lettere di quest'alfabeto e dall'analisi dei vocaboli formati da quelle lettere si potevano scoprire e giudicare tutte le cose.⁴

¹ G. FREGE, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl* (Breslau, Koebner 1884), trad. it. in Id., *Logica e aritmetica*, a cura di C. Mangione, prefazione di L. Geymonat, Torino, Boringhieri, 1965, p. 214.

² Tra i numerosi testi che si potrebbero citare, ne indichiamo due che a distanza di molti anni hanno riportato l'interesse su questo tema: L. COUTURAT, L. LEAU, *Histoire de la langue universelle*, Paris, Hachette, 1903; U. ECO, *La ricerca della lingua perfetta nella cultura europea*, Roma-Bari, Laterza, 1993.

³ Per una spiegazione su come costruire i 'caratteri', cfr. G. W. LEIBNIZ, *Elementa characteristicae universalis*, 1679, trad. it. in Id., *Scritti di logica*, a cura di F. Barone, Bologna, Zanichelli, 1968, pp. 288-296. In particolare sulle similitudini e le differenze tra il progetto di Leibniz e quello di George Dalgarno e John Wilkins, cfr. P. ROSSI, *Clavis universalis. Arti della memoria e logica combinatoria da Lullo a Leibniz*, Bologna, il Mulino, 1983², pp. 259-281.

⁴ G. W. LEIBNIZ, *Historia et commendatio linguae charactericae universalis quae simul sit ars inveniendi et iudicando* (1679-80 ca.), trad. it. in Id., *Scritti di logica*, cit., pp. 207-215: 210.

Benché per Leibniz tutto il sapere fosse potenzialmente traducibile nella *Characteristica*, tale strumento avrebbe potuto funzionare anche *in ambiti circoscritti* e, dunque, essere utilizzato anche *prima* di aver completato l'individuazione di tutto l'alfabeto del pensiero umano. Unica sarebbe, infatti, la grammatica di questo linguaggio e indifferente all'ambito di applicazione. Una grammatica che non sarebbe diversa dalla logica, intesa come: «l'arte di usare l'intelletto, non solo per giudicare ciò che è proposto, bensì per scoprire ciò che è celato». ¹ Dunque, allo stesso tempo, un metodo di scoperta (*ars inveniendi*) e un metodo di decisione (*ars iudicandi*). Così, una volta identificate le nozioni fondamentali, si potrebbe dar luogo a un *calculus ratiocinator* che vanifichi dispute e polemiche, e dal quale risulti che:

ogni paralogismo sia nient'altro che un errore di calcolo, e che ogni sofisma, espresso in questo genere di nuova scrittura, nient'altro sia che un solecismo o un barbarismo, da sciogliere facilmente mediante le stesse leggi di questa grammatica filosofica.

Una volta fatto ciò, quando sorgeranno delle controversie, non ci sarà maggior bisogno di discussione tra due filosofi di quanto ce ne sia tra due calcolatori. Sarà sufficiente, infatti, che prendano la penna in mano si siedano a tavolino, e si dicano reciprocamente [...] *calcoliamo*. ²

Un tale sistema non sarebbe applicabile alla lingua storico-naturale, ³ ma ad una lingua ideografica, la *characteristica universalis*, nella quale vi sia una rigorosa corrispondenza biunivoca tra segni semplici e idee semplici e, conseguentemente, tra segni composti e idee composte. Solo una simile lingua artificiale garantirebbe questa possibilità, e non le lingue ordinarie; queste ultime infatti:

sebbene servano al ragionamento, tuttavia sono soggette ad innumerevoli equivoci, né possono essere impiegate per il calcolo, in maniera cioè che si possano scoprire gli errori di ragionamento. ⁴

La *characteristica* non renderà perciò stesso tutti gli uomini allo stesso modo capaci di ottenere prodigiosi risultati nella scoperta, ma metterà tutti in grado di non commettere errori ed eventualmente di riconoscerli da sé, siano essi errori propri o commessi da altri. Come scrive Leibniz in una lettera a Enrico Oldenburg:

In verità, tuttavia, come gli uomini si distingueranno per inventiva, così saranno tutti uguali per il giudizio. ⁵

Da un lato dunque sistema di scoperta, che rimane legato alla capacità individuale, dall'altro sistema di controllo che diverrebbe meccanico, addirittura *immediato*:

Questa è dunque la nostra prerogativa, che immediatamente [*statim*], di fronte a delle proposizioni che vengano proposte, possiamo giudicare mediante i numeri se esse siano provate; e che con la sola guida dei caratteri e con un metodo certo e veramente analitico forniamo ciò che

¹ G. W. LEIBNIZ, *Lettera a Gabriel Wagner* [1696], in ID., in *Scritti di logica*, cit., pp. 492-510: 496.

² G. W. LEIBNIZ, *De scientia universali seu calcolo philosophico* (1684 ca.), trad. it. in ID., *Scritti di logica*, cit., pp. 233-240: 237. Sul tema della *characteristica* e sul suo rapporto con le lingue naturali, si veda M. MUGNAI, *Astrazione e realtà. Saggio su Leibniz*, Milano, Feltrinelli, 1976.

³ La consapevolezza del carattere storico delle lingue è al centro della riflessione teorica di Leibniz, e non è in contraddizione con opere logico-combinatorie come la *Dissertatio de arte combinatoria*; cfr.: MUGNAI, *Astrazione e realtà*, cit.; S. GENSINI, *Il naturale ed il simbolico. Saggio su Leibniz*, Roma, Bulzoni, 1991.

⁴ LEIBNIZ, *De Scientia universali*, trad. it. cit., p. 241.

⁵ G. W. LEIBNIZ, *Lettere allo Oldenburg*, I [s.l., s.d.], in ID., *Scritti di logica*, cit., pp. 450-454: 453.

altri avevano a stento raggiunto con il più grande sforzo della mente e per caso, e perciò noi siamo in grado di presentare entro il nostro secolo dei risultati che a stento molte migliaia di anni fornirebbero all'umanità.¹

Così la *characteristica universalis* dovrebbe metterci in grado di giudicare immediatamente la correttezza del ragionamento e tale immediatezza sarebbe resa possibile dalla riduzione del controllo alla semplice percezione sensoriale. E come per Leibniz, anche negli autori più tardi quest'idea forte di una *razionalità istantanea* caratterizzerà i progetti di linguaggi logicamente perfetti.

«Il sogno di Leibniz», come Giuseppe Peano chiamerà questo grandioso programma del filosofo tedesco,² è stato ripreso tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento, intrecciandosi con i progetti di rifondazione della logica. Espliciti riferimenti al programma di Leibniz si ritrovano in Boole e, ancora più forti, in Frege che all'inizio dell'ideografia (*Begriffsschrift*, 1879) si rifà proprio al «calculus philosophicus o ratiocinator». In quest'opera, Frege, dopo aver indicato nei sistemi simbolici di aritmetica, geometria e chimica delle parziali realizzazioni del progetto leibniziano, sia pure relativamente a particolari campi del sapere, rivendica alla propria ideografia il merito di aver aggiunto un nuovo campo «e precisamente quello che è situato in posizione centrale».³ Addirittura in un articolo dedicato a chiarire la differenza tra l'ideografia di Peano e la sua, Frege scrive: «essa [la *Begriffsschrift*] è, per usare un'espressione di Leibniz, una *lingua characterica*».⁴

Un'implicazione importante del programma di Leibniz è che, se si riuscisse a portarlo a compimento, *non ci sarebbe più bisogno della logica in quanto tale*: una corretta formulazione sintattica costituirebbe, di per sé, la garanzia di un corretto ragionamento logico. Che la 'fine della logica' sia l'esito inevitabile della realizzazione del sogno di Leibniz è particolarmente chiaro nelle parole di Frege:

se avessimo una lingua logicamente perfetta forse non avremmo più bisogno della logica o potremmo leggerla dalla lingua. Ma da ciò siamo ben lontani. Il lavoro logico è proprio in gran parte una lotta contro i difetti logici della lingua, che però, a sua volta, è uno strumento indispensabile per noi. Solo dopo aver portato a termine il nostro lavoro logico avremo a disposizione uno strumento più perfetto.⁵

WITTGENSTEIN, LA 'NOTAZIONE ADEGUATA' E L'INUTILITÀ DELLA LOGICA

Benché nell'opera di Wittgenstein non ci siano riferimenti espliciti a Leibniz, e sia impresa assai ardua ricostruire la sua biblioteca, appare assai probabile che l'opera del

¹ ID., *Elementa calculi* (1679), § 6, trad. it. in ID. *Scritti di logica*, cit., pp. 296-306: 298-299.

² G. PEANO, *Formulario mathematico* [1895-1908], introduzione e note di U. Cassina Roma, Cremonese, 1960, p. ??? II, 2 (fac-simile dell'ed. Torino, Bocca, 1908); l'espressione è ripresa da B. RUSSELL, *Mathematicians and the Metaphysicians* (1901), trad. it. in ID., *Misticismo e logica e altri saggi*, Milano, TEA, 2010, pp. ??-??: 76. Cfr. anche M. MONDADORI, *Il sogno di Leibniz* [1986], in *Logica e politica. Per Marco Mondadori*, a cura di M. D'Agostino, G. Giorello, S. Veca, Milano, Il Saggiatore / Fondazione Arnoldo e Alberto Mondadori, 2001, pp.15-25.

³ G. FREGE, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen Nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* [1879]; trad. it. in ID., *Logica e aritmetica*, cit., pp. 105-106.

⁴ G. FREGE, *Über die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene* [1897], trad. it. in ID., *Scritti postumi*, a cura di H. Hermes, F. Kambartel, F. Kaulbach, con la collaborazione di G. Gabriel, W. Rödding, ed. it. a cura di E. Picardi, Napoli, Bibliopolis, 1986, p. 95. Un concetto analogo si trova in G. FREGE, *Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift* [1880-81], trad. it. in ID., *Scritti postumi*, cit., p. 82.

⁵ G. FREGE, *Meine Grundlegenden logischen Einsichten* [1915], in ID., *Scritti postumi*, cit., p. 395.

filosofo tedesco, magari attraverso la mediazione di Frege e Russell, fosse ben presente all'autore del *Tractatus*. Molteplici (benché poco indagate) sono infatti, nei suoi scritti, le assonanze leibniziane.¹

Nel *Tractatus*² Wittgenstein pone la questione di una 'notazione adeguata', intendendo con questa espressione una notazione nella quale la struttura grammaticale e la struttura logica degli enunciati coincidano, e attraverso la quale ciascun enunciato mostri il proprio senso. Per Wittgenstein il senso di una proposizione s'identifica con la sua possibilità di essere vera o falsa: «Il senso della proposizione è la sua concordanza e non concordanza con le possibilità del sussistere, e non sussistere degli stati di cose» (T. 4.2).³ Egli distingue due tipi di proposizioni, le proposizioni elementari (*Elementarsätze*) e le proposizioni che hanno una struttura complessa, essendo formate da proposizioni elementari. Mentre la verità della proposizione elementare consiste nel sussistere o meno di un fatto del mondo, la verità delle altre proposizioni dipende dalle relazioni che legano le proposizioni elementari in essa contenute: le proposizioni sono funzioni di verità delle proposizioni elementari. Come scrive Wittgenstein: «La proposizione è l'espressione della concordanza e non concordanza con le possibilità di verità delle proposizioni elementari» (T. 4.4).

Dunque, se il senso di una proposizione consiste nelle condizioni in cui essa è vera o falsa, una notazione adeguata dovrebbe essere in grado di mostrare esplicitamente queste condizioni. Wittgenstein non nutre alcun dubbio sul fatto che ciò sia possibile. Adirittura nel *Tractatus* c'è una certa tensione rispetto all'idea che la proposizione mostri il proprio senso già nel linguaggio ordinario – «La proposizione mostra il suo senso» (T. 4.022) – e non soltanto in presenza di un simbolismo adeguato. Tuttavia, con Frege e Russell, Wittgenstein⁴ condivide l'idea che: «[nel linguaggio comune] è umanamente impossibile dedurre la logica del linguaggio» (T. 4.002), perché la struttura grammaticale non rispecchia la struttura logica dell'enunciato stesso. La logica sottesa agli enunciati linguistici potrebbe, invece, essere resa evidente da un simbolismo più appropriato che la renda addirittura *visibile*,⁵ senza fare ricorso ad alcun 'processo deduttivo'.

Abbiamo visto come l'obiettivo di un linguaggio logicamente perfetto, che potesse rendere superflua la logica, fosse anche un obiettivo di Frege. Mentre nel caso di Frege il superamento della logica è un obiettivo di sfondo, per Wittgenstein è il risultato praticabile della sua proposta di un nuovo simbolismo nel quale il riconoscimento delle

¹ Cfr., oltre alle sporadiche notazioni di F. BARONE nella *Introduzione* a LEIBNIZ, *Scritti di logica*, cit., p. 33, il volume di R. FABBRICHI LEO, *I corpi del significato. Lingua, scrittura e conoscenza in Leibniz e Wittgenstein*, Milano, Jaca Book, 2000.

² L. WITTGENSTEIN, *Logisch-philosophische Abhandlung/Tractatus logico-philosophicus*, hrsg. B. McGuinness, J. Schulte, Frankfurt a. M., Suhrkamp, 2001. Le traduzioni utilizzate, talvolta con piccole modifiche, sono tratte dalla nuova edizione italiana: *Tractatus logico-philosophicus e Quaderni 1914-1916*, a cura di A. G. Conte, Torino, Einaudi, 1998.

³ Non prenderemo qui in considerazione le conseguenze di una notazione adeguata nell'ambito della distinzione tra la mancanza di senso (*simloss*) delle proposizioni logiche, che comunque rappresentano l'armatura del mondo (cfr. T. 6.124) e l'insensatezza (*Unsinn*) delle proposizioni non logiche (cfr. T. 4.003). Vedi l'ormai classico C. DIAMOND, *The Realistic Spirit: Wittgenstein, Philosophy, and the Mind*, Cambridge, Mass., MIT Press, 1991 e J. CONANT, *Elucidation and Nonsense in Frege and Early Wittgenstein*, in *The New Wittgenstein*, eds. A. Crary, R. Read, London-New York, Routledge, 2000, pp. 174-217.

⁴ Ovviamente differenti sono per ognuno di questi filosofi le posizioni rispetto al linguaggio comune.

⁵ Wittgenstein è il filosofo che più esplicitamente ha utilizzato metafore visive, e sulla centralità della visione nei processi cognitivi ha costruito buona parte del *Tractatus*: «Che la proposizione sia un ritratto [*Abbild*] logico del suo significato, riesce evidente all'occhio non prevenuto» (L. WITTGENSTEIN, *Taghebücher 1914-1916*, trad. it. A. G. Conte in *Tractatus logico-philosophicus e Quaderni 1914-1916*, Torino, Einaudi, 1998).

tautologie possa essere *immediato*. Dato che la deducibilità di Q da P (dove P indica la congiunzione delle premesse e Q la conclusione di un ragionamento deduttivo) è equivalente alla tautologicità di $P \rightarrow Q$, la correttezza dell'inferenza di Q da P risulterebbe, in un simbolismo del genere, immediatamente visibile.

Frege e Russell avevano mostrato come fosse possibile, sebbene estremamente complicato, dimostrare in modo puramente formale il carattere tautologico di una proposizione attraverso la creazione di un sistema di dimostrazione basato su assiomi logici autoevidenti (proposizioni il cui carattere tautologico sia immediatamente riconoscibile) a partire dai quali fosse possibile derivare tutte le altre tautologie mediante regole di inferenza valide (che conservano la tautologicità).

La dimostrazione delle proposizioni logiche consiste nel farle nascere da altre proposizioni logiche per applicazione successiva di certe operazioni, le quali, a partire dalle prime, riproducono sempre nuove tautologie (In effetti, solo tautologie seguono da tautologie). (T. 6.126)

Per Wittgenstein, i sistemi di Frege e di Russell mancavano però della necessaria perspicuità. In primo luogo, il loro approccio rendeva opache le relazioni logiche, facendo apparire come distinte proposizioni che sono in realtà identiche. Per esempio, $p \rightarrow q$ (se p allora q) e $\sim p \vee q$ (non p o q), pur essendo segni differenti, per Wittgenstein sono *la stessa* proposizione perché entrambe sono vere per tutti i valori di p e q , tranne nel caso in cui p sia vera (V) e q sia falsa (F). In secondo luogo, la posizione privilegiata delle tautologie che svolgono il ruolo di assiomi è, in tali sistemi, del tutto arbitraria. Inoltre, riconoscere che una proposizione è una tautologia, attraverso una derivazione formale, è in genere un processo estremamente complicato, e ciò appare in stridente contrasto con l'idea secondo cui «ogni tautologia mostra da sé che è una tautologia» (T. 6.127).¹ Dunque, per Wittgenstein, i sistemi di Frege e Russell non realizzano una 'notazione adeguata' ad esprimere le connessioni logiche. In una tale notazione, infatti:

che la verità di una proposizione segua dalla verità di altre proposizioni, noi lo *vediamo* dalla struttura delle proposizioni (T. 5.13 corsivo nostro)

e

possiamo riconoscere le proprietà formali delle proposizioni per mera *ispezione* delle proposizioni stesse (T. 6.122),

per cui:

'leggi d'inferenza' che – come in Frege e in Russell – giustificano le conclusioni, sono prive di senso, e sarebbero superflue (T. 5.132).

Così l'esito di questa posizione è la tesi secondo cui in una *notazione adeguata la deduzione logica sarebbe del tutto superflua!*²

Sembra plausibile che, secondo Wittgenstein, una notazione adeguata potesse essere costituita dal celebre metodo delle tavole di verità da lui introdotto nel *Tractatus*. La

¹ Su questo punto, come su altre questioni connesse al *Tractatus*, cfr. D. MARCONI, *Il Tractatus*, in *Guida a Wittgenstein*, a cura di D. Marconi, Roma-Bari, Laterza, 2002², pp. 15-58. Per una discussione sull'effettiva decidibilità delle proposizioni della logica all'interno della struttura del *Tractatus*, si veda D. MARCONI, *Frascola on Logic in the Tractatus*, «Dialectica», LVII, 2005, pp. 97-107.

² M. D'AGOSTINO, M. MONDADORI, *La logica è davvero analitica?*, in *Studi in onore di Franco Crispini*, «Bollettino filosofico dell'Università della Calabria», xv, 1999, pp. 283-306. Disponibile in rete al seguente indirizzo: <http://www.rescogitans.it>.

tavola di verità di una proposizione mostra esplicitamente le sue condizioni di verità in termini della verità e delle falsità delle proposizioni elementari in essa contenute. Inoltre, per Wittgenstein, ogni tavola di verità costituisce un segno proposizionale: «Il segno che nasce dalla coordinazione del segno V e delle possibilità di verità è un segno proposizionale» (T. 4.442):

Ad esempio

«

| p | q | |
|---|---|---|
| V | V | V |
| F | V | V |
| V | F | |
| F | F | V |

»

è un segno proposizionale.

La tavola nell'esempio fornisce le condizioni di verità (e di falsità) dell'implicazione *se p allora q* (ma anche della disgiunzione *non-p oppure q*) in termini della verità e della falsità delle proposizioni elementari *p* e *q*. Ne risulta che *se p allora q* è falsa solo nel caso in cui *p* sia vera e *q* falsa, mentre invece è vera in tutti gli altri casi. Un'abbreviazione di questo schema potrebbe essere (VV-V) (*p*, *q*) oppure, più esplicitamente, (VVFV) (*p*, *q*). Evidentemente, altre connessioni logiche tra le stesse proposizioni darebbero vita ad altre configurazioni.

Sembra così realizzarsi l'ideale di una notazione adeguata, di un sistema simbolico in cui le proposizioni mostrano esplicitamente le proprie condizioni di verità. La mossa teorica che consente questo risultato consiste nel considerare la stessa tavola di verità come un «segno proposizionale», cioè una configurazione di segni in grado di fungere da proposizione. La difficoltà del riconoscimento della tautologia che affliggeva i sistemi di Frege e Russell sembra dissolversi in un simbolismo in cui le relazioni logiche diventano immediatamente (e istantaneamente) visibili. Scrive Wittgenstein: «Se due proposizioni si contraddicono, lo mostra la loro struttura; analogamente se l'una segue dall'altra. E così via» (T. 4.1211). Potremmo dire allora che noi *vediamo* dai segni proposizionali (VVFV) (*p*, *q*) e (FFVF) (*p*, *q*) – cioè dal confronto della disposizione dei segni V e F che compaiono in essi – che le proposizioni in questione si contraddicono l'un l'altra.¹ E non abbiamo quindi alcun bisogno di dimostrazioni logiche.

A titolo di esempio, ricordando che «ogni proposizione della logica è un *modus ponens*» (T. 6.1264), consideriamo questa semplice inferenza:

Se piove metto il cappello
Piove

Allora metto il cappello

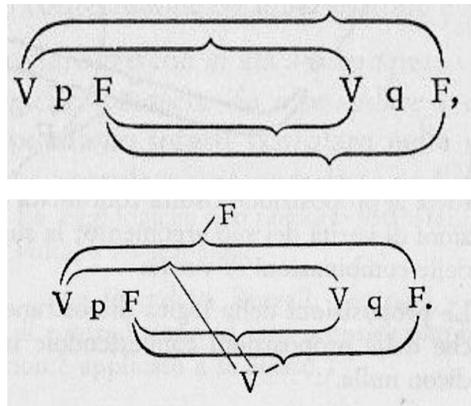
Consideriamo ora la tavola di verità che mostra come questa inferenza – che esemplifica il *modus ponens* – sia tautologica (dove *p* e *q* stanno per proposizioni arbitrarie):

¹ G. PIANA, *Interpretazione del Tractatus di Wittgenstein*, Milano, Il Saggiatore, 1973, p. 54.

| p | q | $p \rightarrow q$ | $(p \rightarrow q) \wedge p$ | $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|------------------------------|--|
| V | V | V | V | V |
| F | V | V | F | V |
| V | F | F | F | V |
| F | F | V | F | V |

Il riconoscimento del carattere tautologico della proposizione nell'ultima colonna – che garantisce la correttezza dell'inferenza in questione – non richiede qui nessuna 'dimostrazione logica' ma semplicemente l'ispezione del segno proposizionale che rappresenta la proposizione nella notazione tabulare.

Nel *Tractatus* (6.1203), Wittgenstein fornisce anche un altro esempio di notazione adeguata. Non è chiaro se questo sia un metodo alternativo a quello tabulare per riconoscere visivamente le tautologie o se si tratti invece, come sembrerebbe, essenzialmente dello stesso metodo:



Siano p e q le proposizioni elementari connesse in una proposizione complessa, ogni proposizione avrà due valori di verità V e F che saranno collegati a quelli dell'altra proposizione, fornendo gli stessi valori che avevamo ottenuto con le tavole di verità.

Come vedremo meglio nei prossimi paragrafi, il problema centrale di entrambi i metodi è che le possibili condizioni di verità di una proposizione crescono esponenzialmente al crescere delle proposizioni elementari la costituiscono la proposizione, rendendo sia la notazione tabulare sia quella grafica delineata qui sopra¹ del tutto intrattabili. Wittgenstein non considera questo problema,² e non fornisce esempi di come dovrebbero essere scritte in uno di questi simbolismi le tautologie più complesse. Mostriamo, nei prossimi paragrafi, come non si tratti affatto di un problema empirico che esula dall'austera prospettiva del *Tractatus*, ma come invece l'intrattabilità dei simboli-

¹ Max Black definisce questo sistema «rozzo ed inutilizzabile» (M. BLACK, *Manuale per il Tractatus di Wittgenstein* [1964], trad. it., Roma, Ubaldini, 1967, p. 314).

² Pasquale Frascolla avanza l'ipotesi che «il parlante in grado di vedere tutte le relazioni metalogiche non sia il parlante empirico, perché sarebbe un essere logicamente onnisciente» (P. FRASCOLLA, *Il Tractatus logico-philosophicus di Wittgenstein. Introduzione alla lettura*, Roma, Carocci, 2000, p. 250).

smi proposti da Wittgenstein sia solo un caso speciale di un problema logico generale che (con ogni probabilità) non ammette soluzione alcuna.

IL LINGUAGGIO PERFETTO
E LA 'LOGICA MATEMATICA'

Attraverso l'interpretazione della tavola di verità come segno proposizionale, il mito del linguaggio logicamente perfetto sembra dunque trovare, nel *Tractatus* di Wittgenstein, una parziale realizzazione, seppure nel dominio ristretto della logica proposizionale. La tavola di verità di una proposizione, infatti, esprime compiutamente il senso delle parole logiche che ricorrono in essa e sarebbe pertanto un esempio di quella 'notazione adeguata' che, secondo Wittgenstein, renderebbe del tutto superfluo il processo della deduzione logica. È vero che il teorema di indecidibilità di Church-Turing (1936)¹ esclude la possibilità di trovare un simile linguaggio perfetto per logiche più potenti, come la logica dei quantificatori (con predicati non-monadici). Ma è anche vero che questo risultato negativo non implica che non possa esservi, anche per la logica dei quantificatori, un linguaggio 'quasi-perfetto', che funzioni ragionevolmente bene in tutti i contesti pratici. Dopotutto, l'impatto del teorema di indecidibilità sui massicci tentativi, avviati negli anni cinquanta del xx secolo, di realizzare il sogno di Leibniz mediante la cosiddetta 'deduzione automatica' fu praticamente nullo. Prevalse, semmai, l'enorme impressione suscitata dai risultati *positivi*, resi possibili anche da contributi teorici, come il Teorema di Herbrand, che fornivano metodi effettivi di grande interesse per ridurre il ragionamento quantificazionale al ragionamento booleano.²

Considerazioni analoghe valgono anche per altri celebri risultati negativi della logica moderna, primi fra tutti i teoremi di Gödel. Questi *exploit* metamatematici colpivano al cuore il nucleo del programma filosofico di Hilbert sui fondamenti della matematica, cioè l'assunzione secondo cui è possibile una formalizzazione adeguata della matematica (primo teorema di Gödel), e quella secondo cui dovrebbe essere possibile dimostrare la coerenza di questa formalizzazione con mezzi sicuri (secondo teorema di Gödel).³ Dal punto di vista della *pratica* deduttiva e della possibilità di un linguaggio logicamente perfetto che la renda banale o addirittura superflua, è il primo teorema ad essere rilevante, ma non è per niente ovvio quale sia la sua reale portata. Come ha osservato Solomon Feferman:

Una lamentela diffusa riguardo a questo risultato [il primo teorema di Gödel] è che esso si limita ad usare il metodo diagonale per 'fabbricare' un esempio di enunciato indecidibile. Quello che ci piacerebbe davvero dimostrare, invece, è l'indecidibilità nell'aritmetica di Peano o in qualche altro sistema formale di un enunciato della teoria dei numeri o della matematica combinatoria che sia naturale e che rivesta un interesse primario. C'è qui un'analogia con l'uso del metodo diagonale da parte di Cantor per inferire l'esistenza di numeri trascendenti dalla numerabilità dell'insieme dei numeri algebrici; neppure quella dimostrazione produsse alcun esempio naturale. L'esistenza di numeri trascendenti era stata stabilita in precedenza per mezzo di esempi espli-

¹ Per una ricostruzione storica del problema della decisione e dei risultati di Church e Turing, si rinvia a C. MANGIONE, S. BOZZI, *Storia della logica. Da Boole ai nostri giorni*, Milano, Garzanti, 1993.

² Per una vivace ricostruzione degli esordi della deduzione automatica si veda G. LOLLI, *La macchina e le dimostrazioni. Matematica, logica e informatica*, Bologna, il Mulino, 1987, pp. 87-105.

³ Per una discussione dettagliata dei risultati di Gödel in relazione al programma di Hilbert, si vedano: MANGIONE, BOZZI, *Storia della logica*, cit.; C. CELLUCCI, *La filosofia della matematica del Novecento*, Roma-Bari, Laterza, 2007.

citi, ma artificiosi, da parte di Liouville. Nessuno dei due argomenti aiutò a mostrare che e e π , fra gli altri reali, sono trascendenti, ma mostrò almeno che la questione della trascendenza non è vuota. Analogamente, il primo teorema di incompletezza di Godel mostra che la questione della decidibilità degli enunciati dell'aritmetica di Peano o di qualunque sua estensione coerente, non è vuota. Questo suggerisce di andare in cerca di enunciati aritmetici che hanno resistito fino ad ora all'attacco, per vedere se ciò è dovuto al fatto che tali enunciati sono indecidibili nei sistemi che formalizzano una parte significativa della pratica matematica [...].¹

Ma la ricerca finora non ha dato alcun esito,² anzi: uno dei candidati più accreditati, l'enunciato che esprime la congettura di Fermat, è stato recentemente dimostrato e secondo alcuni logici la sua dimostrazione potrebbe essere formalizzata nell'aritmetica di Peano. Per nessuno degli altri candidati che resistono, fra cui la congettura di Goldbach e l'ipotesi di Riemann, si è mai riusciti a dimostrare l'indipendenza dall'aritmetica di Peano o da qualcuna delle sue estensioni presumibilmente coerenti.

Dunque, i celebri risultati negativi della metamatemica del xx secolo, senza ovviamente negare la loro importanza sul piano filosofico, non hanno avuto un impatto pratico tale da stabilire una volta per tutte che l'idea stessa di un linguaggio logicamente perfetto sia vuota di contenuto, non possa cioè avere un riferimento reale che corrisponda, *grosso modo*, a quello che Leibniz, Frege, Peano e Wittgenstein avevano in mente. Da questo punto di vista, forse non sono i risultati negativi a essere sorprendenti. Ciò che è davvero sorprendente è:

la scoperta di regole formali adeguate per certe branche elementari della matematica, quali il ragionamento puramente logico sulle funzioni di verità e i quantificatori, o la geometria euclidea elementare: la scoperta mostra che almeno certe parti della matematica sono, dopo tutto, meccanizzabili.³

In questa prospettiva, dunque, l'enfasi va posta semmai sui numerosi risultati *positivi*, primo fra tutti la decidibilità della geometria euclidea elementare, dimostrata da Tarski nel 1951⁴ (e c'è da chiedersi quale sarebbe stata la reazione di Leibniz di fronte a un risultato del genere!). Così, il sogno di un linguaggio logicamente perfetto sarebbe forse impossibile 'in linea di principio' – sarebbe cioè infondata la grandiosa pretesa teorica di trovare una notazione adeguata davvero *universale*, in cui la soluzione di *tutti* i problemi logici possa essere 'letta' nella loro stessa formulazione – ma potrebbe benissimo essere realizzabile 'in pratica', nella stragrande maggioranza dei casi interessanti che si presentano alla nostra attenzione e che, nel linguaggio imperfetto del ragionamento ordinario, possono essere risolti solo attraverso faticosi (e pertanto altamente fallibili) percorsi deduttivi. Il sogno di Leibniz, e il mito del linguaggio perfetto che è ad esso indissolubilmente associato, muoiono come programmi di ricerca *filosofici*, ma soprav-

¹ S. FEFERMAN, *The Impact of the Incompleteness Theorems on Mathematics*, «Notices of the American Mathematical Society», LIII, 4, 2006, pp. 434-439.

² Il risultato di Paris e Harrington secondo cui una certa modifica di un famoso teorema di Ramsey è indipendente dall'aritmetica di Peano costituisce, in un certo senso, un'eccezione. Tuttavia, come osserva lo stesso Feferman, neanche in questo caso si trattava di una proposizione indimostrabile la cui verità era stata precedentemente oggetto di congettura. Per il Teorema di Ramsey e il risultato di Paris e Harrington, si veda MANGIONE, BOZZI, *Storia della logica*, cit., pp. 516, 856-857.

³ G. KREISEL, J. L. KRIVINE, *Elements of Mathematical Logic (Model Theory)*, Amsterdam, North Holland, 1971.

⁴ A. TARSKI, *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*, prepared for publication with the assistance of J. C. C. McKinsey, Berkeley, University of California Press, 1951².

vivono come nucleo metafisico di un programma di ricerca *scientifico* che, a dispetto dei risultati negativi, appare fortemente progressivo.

Vedremo presto, tuttavia, come questo appello alla fattibilità 'in pratica' di un linguaggio logicamente perfetto sia anch'esso, con ogni probabilità, del tutto infondato. Più in particolare, vedremo come questo esito negativo sia la conseguenza di un profondo risultato ottenuto in un campo di ricerca, quello della complessità computazionale, le cui origini sono apparentemente molto distanti da problemi tipicamente filosofici, come quello del linguaggio perfetto, e sono invece legate a doppio filo a una vasta costellazione di problemi tipicamente pratici sollevati dal rapido sviluppo della tecnologia dei computer.

TAUTOLOGIE 'INTRATTABILI'

Nel suo *Giochi di aritmetica e problemi interessanti*, pubblicato per la prima volta nel 1924, Giuseppe Peano presenta una serie di problemi per «rendere più dilettevole e meno noiosa l'aritmetica». Fra i «problemi capziosi», in cui «la risposta vera non è quella che prima si presenta alla mente», vi era il seguente:

Una comitiva di 7 viaggiatori si presenta ad un albergo, e domanda un letto per ogni viaggiatore. L'oste risponde: «ho solo sei letti, distinti colle lettere A, B, C, D, E, F. Ma guarderò di aggiustarvi». Perciò destinò due viaggiatori a dormire nel letto A, poi uno nel letto B, e fa tre; poi uno in C, e conta quattro; poi uno in D, e conta cinque; poi uno in E, e conta sei; poi prende uno di quelli che erano in A e lo conduce in F, e conta sette. Così i 7 viaggiatori dormono in 6 letti, uno per letto. Come ha fatto? Chi fa il gioco, rappresenta i letti con sei carte, e procede rapido, onde l'uditore non si accorga che un viaggiatore è stato contato due volte.¹

L'impossibilità di una soluzione 'onesta' del problema dell'albergatore è sancita da un fondamentale principio combinatorio, noto anche come 'principio della piccionaia' o 'principio di Dirichlet', secondo cui $n+1$ oggetti non possono essere collocati in n caselle a meno che una delle caselle non contenga più di un oggetto. Nonostante la sua ovvietà dal punto di vista intuitivo, è sorprendente l'utilità di questo principio per dimostrare una enorme varietà di fatti matematici, da semplici curiosità, per esempio che a Milano ci sono almeno due persone che hanno lo stesso numero di capelli, a questioni numeriche tutt'altro che ovvie, per esempio che fra N numeri interi scelti a caso ve ne sono sempre due la cui differenza è divisibile per $N-1$, oppure che per qualunque numero irrazionale a esistono infiniti numeri razionali $r = p/q$ tali che $|a-r| < q^2$.

È noto che questo importante principio combinatorio può essere espresso in modo semplice e naturale mediante una classe di tautologie della logica booleana. Indicando con p_{ij} l'enunciato secondo cui l'oggetto i occupa la casella j , la proposizione

$$(*) \quad (p_{1,1} \vee p_{1,2}) \wedge (p_{2,1} \vee p_{2,2}) \wedge (p_{3,1} \vee p_{3,2}) \wedge \neg(p_{1,1} \wedge p_{2,1}) \wedge \\ \wedge \neg(p_{1,2} \wedge p_{2,2}) \wedge \neg(p_{1,1} \wedge p_{3,1}) \wedge \neg(p_{1,2} \wedge p_{3,2}) \wedge \neg(p_{2,1} \wedge p_{3,1}) \wedge \neg(p_{2,2} \wedge p_{3,2})$$

asserisce, per esempio, che tre oggetti possono essere sistemati in due caselle in modo tale che ciascuna casella contenga al massimo un oggetto. L'impossibilità della situazione descritta da questa proposizione è dunque un caso speciale del principio della piccionaia, con $n = 2$. La cosa interessante è che questa proposizione è *logicamente* incoerente (già al livello della logica booleana) e pertanto la sua negazione è una *tautologia*. Dun-

¹ G. PEANO, *Giochi di aritmetica e problemi interessanti*, presentazione di G. C. Argan, prefazione di U. Bottazzini, Firenze, Sansoni, 1983, p. ? (ripr. facs. dell'ed. Torino, Paravia, 1925²).

que, il principio della piccionaia è espresso dalla classe di tutte le tautologie ottenute negando le proposizioni costruite sul modello della (*) per ogni intero positivo $n > 1$.

Ebbene, la tautologia che esprime il principio della piccionaia per un dato n contiene $f(n) = (n + 1) \times n$ lettere proposizionali distinte, e la lunghezza dell'espressione che la rappresenta nel linguaggio logico ancora 'imperfetto' di Frege e Russell contiene (incluse le parentesi e contando ciascun p_{ij} come un simbolo unico) un numero complessivo di simboli pari a:

$$g(n) = 7/2 n^3 + 11/2 n^2 + 4n + 3.$$

D'altra parte, il numero di righe contenute nella tavola di verità completa per tale espressione, cioè nella sua traduzione in una 'notazione adeguata', è pari a $h(n) = 2^{f(n)}$. Il problema è che, al crescere di n , la lunghezza della traduzione nel linguaggio 'logicamente perfetto' cresce *molto* più velocemente della lunghezza della proposizione espressa in un linguaggio booleano standard. Mentre $g(n)$ è una funzione *polinomiale* di n (di grado 3), $h(n)$ è una funzione *esponenziale* di n , ed è noto come la velocità di crescita delle funzioni esponenziali conduca ben presto la lunghezza della traduzione oltre i limiti della trattabilità. Per esempio, tornando al problema 'capzioso' di Peano, per esprimere il fatto che 7 viaggiatori non possono essere sistemati in 6 letti nel linguaggio logico ordinario, è 'sufficiente' una stringa contenente 981 simboli, ma la sua traduzione nel linguaggio perfetto richiederebbe la costruzione di una tavola di verità che contiene 4 398 046 511 104 righe (senza calcolare la lunghezza di ciascuna riga)! Si può facilmente verificare che, anche per valori relativamente bassi di n , il numero complessivo di simboli che ricorrerebbero nella tavola di verità necessaria per 'vedere' che l'espressione è una tautologia sarebbe superiore al numero di atomi contenuti nell'universo conosciuto, mentre la lunghezza della stessa tautologia espressa nel linguaggio perfetto è solo di qualche migliaio di simboli. Ne consegue che tradurre una proposizione dal linguaggio logico ordinario di Frege e Russell al linguaggio logicamente perfetto delle tavole di verità – in cui sarebbe possibile riconoscere che una certa espressione è una tautologia semplicemente esaminando l'espressione stessa – è un compito *praticamente impossibile*. Se un linguaggio logicamente perfetto esiste, e deve poter essere utilizzato in pratica, non può essere quello in cui i segni proposizionali sono costituiti dalle tavole di verità.

Questa *reductio ad absurdum* dell'idea che il linguaggio logicamente perfetto possa essere quello delle tavole di verità suggerito nel *Tractatus* non è ovviamente sufficiente a rendere del tutto vana la ricerca in questa direzione. Potrebbe esservi un modo più conciso di rappresentare compiutamente il senso di una proposizione, di assolvere cioè lo stesso compito che Wittgenstein assegnava alle tavole di verità, che non determini però alcuna esplosione combinatoria. Dopotutto, nel metodo delle tavole di verità vi sono evidenti inefficienze che potrebbero essere facilmente eliminate: (a) una stessa lettera proposizionale può ricorrere un gran numero di volte per cui un'espressione simbolica potrebbe essere 'compressa' ricorrendo a una rappresentazione in forma di grafo, e (b) l'enumerazione delle condizioni di verità è manifestamente ridondante: per esempio, un qualunque 'stato di cose' che renda vera P , rende vera anche la disgiunzione $P \vee Q$, e non è necessario considerare *tutte* le possibili assegnazioni relative alle proposizioni atomiche che ricorrono in Q . È legittimo chiedersi se l'eliminazione di queste inefficienze non sarebbe di per sé sufficiente a rendere davvero perfetto il linguaggio delle tavole di verità. O, in caso contrario, se non sia possibile escogitare una qualche rappresentazione delle proposizioni, anche del tutto diversa da quella proposta da Wittgen-

stein, che sia davvero in grado di soddisfare la sua richiesta di una notazione 'adeguata', in cui l'eventuale carattere tautologico di una proposizione risulti 'immediatamente' percepibile. È proprio a questo punto che entra in scena la teoria della complessità computazionale. Il suo impatto sui programmi di ricerca scientifici che discendono dal sogno di Leibniz e dal mito del linguaggio perfetto, che erano sopravvissuti senza grossi traumi ai teoremi limitativi degli anni trenta, è stato molto rilevante e ha comportato un profondo mutamento di prospettiva le cui conseguenze filosofiche non sono ancora pienamente comprese.

LINGUAGGIO PERFETTO E COMPLESSITÀ COMPUTAZIONALE

La teoria della complessità computazionale può essere considerata come un affinamento della tradizionale teoria della computabilità, che tiene conto delle *risorse* (tempo e spazio) usate dagli algoritmi.¹ La sua innovazione principale consiste nell'aver sostituito il concetto di *procedura effettiva* con quello di *procedura fattibile*. Una *procedura effettiva*, o *algoritmo*, consiste grosso modo in un 'metodo meccanico', cioè eseguibile *in linea di principio* da una macchina, per risolvere una determinata classe di problemi. Una procedura effettiva è *fattibile* quando può essere eseguita da una macchina anche *in pratica*, e non solo in linea di principio. L'espressione 'in pratica' comporta un certo grado di vaghezza che gli studiosi di complessità computazionale hanno eliminato convenendo di dichiarare *fattibili*, eseguibili in pratica, gli algoritmi che possono essere eseguiti in spazio e tempo *polinomiale*. Per chiarire il senso di questa convenzione, si osservi innanzitutto che un *problema* viene usualmente identificato con una classe di stringhe di simboli, dove ciascuna stringa identifica un particolare esempio del problema. Così, il 'problema della tautologia' (abbreviato con TAUT) può essere identificato con la classe di stringhe di simboli che rappresentano 'formule ben formate' in un linguaggio logico standard, diciamo il linguaggio dei *Principia Mathematica* di Russell e Whitehead. Una soluzione di un particolare esempio di questo problema consiste, in questo caso, in una risposta del tipo 'sì o no': 'sì' (codificata di solito tramite il simbolo '1') se la stringa in questione è una tautologia, 'no' (codificata di solito tramite il simbolo '0') se non lo è. La stringa di simboli in (*), che abbiamo utilizzato sopra per codificare un particolare esempio di 'problema della piccionaia', rappresenta una proposizione logicamente incoerente e, dato che la negazione di una proposizione incoerente è una tautologia, un algoritmo corretto che risolva TAUT deve produrre la risposta 'sì' quando riceve come input la negazione della (*). Un problema come TAUT, la cui soluzione consiste in una risposta affermativa o negativa, viene detto *problema di decisione*. Non tutti i problemi interessanti sono problemi di decisione, anzi una gran parte dei problemi che si incontrano in pratica sono descritti come *problemi di determinazione* ('qual è l'area di un cerchio di raggio r ?'), fra cui un ruolo molto importante è svolto dai *problemi di ottimizzazione*, problemi che richiedono di trovare una soluzione ottimale all'interno di un insieme di soluzioni possibili ('dato un grafo e un nodo di partenza s , trovare un cammino minimo da s a un determinato altro nodo del grafo'). Tuttavia, questi problemi possono essere trasformati in problemi di decisione equivalenti, per cui è possibile semplificare l'analisi facendo riferimento solo a problemi di decisione e alle risorse impiegate dagli algoritmi che li risolvono.

¹ Per un'eccellente esposizione, ancora valida a trent'anni di distanza, si veda M. R. GAREY, D. S. JOHNSON, *Computers and Intractability. A Guide to the Theory of NP-Completeness*, New York, Freeman, 1979.

Il tempo di esecuzione $T(n)$ di un algoritmo misura il numero (massimo) di passi che l'algoritmo deve eseguire in funzione della complessità dell'input, cioè della lunghezza della stringa di simboli che codifica un particolare esempio del problema. Analogamente, lo spazio di esecuzione $S(n)$, può essere definito come il numero (massimo) di unità di memoria che l'algoritmo deve utilizzare in funzione della complessità dell'input. Il problema è: come crescono queste funzioni al crescere della complessità n dell'input? C'è un ampio accordo nel definire *trattabili* (cioè risolvibili in pratica) i problemi che possono essere risolti da algoritmi che funzionano in tempo polinomiale, ovvero per i quali esiste un polinomio p tale che, per qualunque input di complessità n , l'algoritmo fornisce una risposta in un numero di passi $\leq p(n)$ (la risolubilità in tempo polinomiale implica la risolubilità in spazio polinomiale, per cui il fattore tempo è privilegiato nella definizione della trattabilità di un problema.) L'idea sottostante è che gli algoritmi polinomiali non producono l'esplosione combinatoria che abbiamo osservato in riferimento alle tavole di verità.

Se, invece, l'algoritmo più efficiente possibile funziona in tempo super-polinomiale, per esempio in tempo *esponenziale* (descritto cioè da una funzione come 2^n), il problema si considera *intrattabile*. Sebbene certi algoritmi polinomiali possano anche essere altamente inefficienti, e per certi input anche molto più inefficienti di algoritmi esponenziali che risolvono lo stesso problema – per esempio quando il tempo di esecuzione è descritto da un polinomio di grado molto alto come n^{100} –, va osservato che (a) il loro comportamento *asintotico* è sempre enormemente più efficiente di quello degli algoritmi esponenziali: questo implica anche che, in pratica, il tempo reale impiegato da questi algoritmi è fortemente sensibile all'innovazione tecnologica, che si manifesta nella realizzazione di computer sempre più veloci, mentre quest'ultima è del tutto irrilevante per gli algoritmi esponenziali (FIG. 1); (b) di fatto gli algoritmi polinomiali che sono emersi dai tentativi di risolvere problemi naturali in qualunque campo di ricerca hanno un tempo di esecuzione descritto da un polinomio di grado molto basso (non superiore a tre).

| Tempo di esecuzione | Con un computer attuale | Con un computer 100 volte più veloce | Con un computer 1000 volte più veloce |
|---------------------|-------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| n | N1 | 100 N1 | 1000 N1 |
| n^2 | N2 | 10 N2 | 31.6 N2 |
| n^3 | N3 | 4.64 N3 | 10 N3 |
| n^5 | N4 | 2.5 N4 | 3.98 N4 |
| 2^n | N5 | N5+6.64 | N5+9.97 |
| 3^n | N6 | N6+4.19 | N6+6.29 |

FIG. 1. Dimensioni massime di un problema risolvibile in un'ora di elaborazione

La classe **P** è la classe di tutti i problemi di decisione trattabili, che possono essere risolti mediante una procedura fattibile, ossia mediante un algoritmo che funziona in tempo polinomiale. La brutta sorpresa è che molti dei problemi interessanti che si incontrano

nella ricerca matematica e tecnologica, e per i quali è nota una procedura di decisione, *non* appartengono a **P**. Fra questi spicca il problema di stabilire se una certa proposizione è un teorema della geometria euclidea elementare. Sebbene, come abbiamo osservato, questo problema sia stato 'risolto' dal Tarski nel 1951, ventitrè anni più tardi Fischer e Rabin hanno dimostrato che si tratta di un problema intrattabile.¹ Altri problemi decidibili di cui è stata dimostrata l'intrattabilità, sono:

– l'aritmetica dell'addizione dei numeri naturali (Fischer e Rabin, 1974; decidibilità dimostrata da Pressburger nel 1929);

– l'aritmetica della moltiplicazione dei numeri naturali (Fischer e Rabin, 1974);

– la teoria degli ordini lineari (quella che si ottiene con gli assiomi del primo ordine che esprimono transitività, totalità e antisimmetria; *lower bound* non-elementare dimostrato da A. R. Meyer nel 1975; decidibilità dimostrata da Rabin nel 1969).²

Che dire di TAUT, il nostro problema del riconoscimento delle tautologie? È lecito affermare che un 'linguaggio logicamente perfetto' dovrebbe essere un linguaggio *L* in cui:

1. all'interno di *L* il problema della tautologia può essere risolto in tempo polinomiale: se deve essere possibile riconoscere 'immediatamente' una tautologia semplicemente esaminando il segno proposizionale che la esprime, se si deve cioè 'vedere' dal segno stesso che una certa espressione è una tautologia, un requisito minimo dovrebbe essere che esista un algoritmo polinomiale che consenta di effettuare questo riconoscimento.

2. La traduzione dal linguaggio logico ordinario a *L* dovrebbe essere trattabile, dovrebbe cioè essere possibile esprimere in *L* tutto quello che può essere espresso nel linguaggio logico ordinario senza produrre alcuna esplosione combinatoria che renderebbe il linguaggio logicamente perfetto *L* 'perfettamente' inutile ai fini della pratica deduttiva.

Ebbene, il 'linguaggio logicamente perfetto' di Wittgenstein, in cui i segni proposizionali coincidono con le tavole di verità, soddisfa il primo requisito – dato un qualunque linguaggio formale in cui è possibile rappresentare le tavole di verità, è possibile riconoscere in tempo polinomiale se una stringa di simboli di questo linguaggio codifica la tavola di verità di una tautologia³ – ma non soddisfa il secondo, dal momento che la lunghezza della traduzione cresce, come abbiamo visto, in modo esponenziale rispetto alla lunghezza della proposizione tradotta. Si osservi che ciò non accade solo per esempi artificiali – per 'mostruosità logiche' costruite *ad hoc* per ottenere il risultato voluto – ma è un fenomeno generale che si manifesta al crescere del numero di proposizioni atomiche coinvolte e dunque, come abbiamo visto, riguarda anche tautologie che esprimono principi logici del tutto naturali, di grande utilità sia nel ragionamento matematico sia in quello ordinario. Così la notazione 'adeguata' proposta da Wittgenstein nel *Tractatus* non è un linguaggio logicamente perfetto. Ma esiste un altro linguaggio formale che soddisfi entrambi i nostri requisiti? Possiamo chiamare questo interrogativo 'il problema del linguaggio logicamente perfetto'.

¹ Si veda M. O. RABIN, *Decidable Theories*, in *Handbook of Mathematical Logic*, ed. J. Barwise, with the cooperation of H. J. Keisler, K. Kunen, Y. N. Moschovakis, A. S. Troelstra, Amsterdam-New York-Oxford, North-Holland, 1977, pp. 595-629.

² Per tutti questi risultati si veda RABIN, *Decidable Theories*, cit.

³ A questo scopo è sufficiente controllare che i valori di verità siano assegnati correttamente su ciascuna riga e che la colonna finale contenga solo '1'.

IL TEOREMA DI COOK
E L'INEVITABILE IMPERFEZIONE DEI LINGUAGGI LOGICI

Nel 1971 Stephen Cook ha dimostrato un risultato dal quale segue immediatamente che il problema in questione è molto probabilmente insolubile.¹ Per illustrare a grandi linee il senso di questo risultato dobbiamo prima introdurre un concetto nuovo: quello di *algoritmo non-deterministico*. Consideriamo il problema complementare a TAUT, il problema della *soddisfacibilità*, che possiamo abbreviare con SAT: data una qualsiasi stringa di simboli che esprima una proposizione (una 'formula ben formata') in un linguaggio booleano standard, determinare se esiste un'assegnazione di valori di verità (vero o falso) alle proposizioni atomiche che ricorrono in essa – ovvero, per dirla con Leibniz, se esiste un 'mondo possibile' – che renda vera questa proposizione. In tal caso si dice che la proposizione in questione è *soddisfacibile*. Dato che una tautologia è una proposizione vera per tutte le assegnazioni di questo tipo (vera in 'tutti i mondi possibili'), e che una proposizione è vera se e solo se la sua negazione è falsa, ne segue che una proposizione è soddisfacibile se e solo se la sua negazione *non* è una tautologia, per cui SAT e TAUT sono problemi complementari.

Immaginiamo ora un 'algoritmo' che cerchi di determinare se una data proposizione è soddisfacibile 'tirando a indovinare', assegnando cioè a caso un valore di verità a ciascuna proposizione atomica e verificando se l'assegnazione così ottenuta renda vera la proposizione data. Un algoritmo del genere è non-deterministico in quanto non vi sono istruzioni che specifichino esattamente come debbano essere scelti i valori di verità assegnati alle proposizioni elementari. La computazione non è più quindi espressa come una sequenza di passi, ma come un albero di possibili scelte. Ebbene, il 'tempo di esecuzione' di un tale algoritmo non-deterministico è il numero (massimo) $T(n)$ di passi che devono essere eseguiti per un qualunque *input* di lunghezza n , nel caso in cui le scelte effettuate siano sempre le più 'fortunate' possibili, quelle cioè che conducono a riconoscere gli esempi positivi del problema (nel nostro caso a un'assegnazione, se esiste, che renda vera la proposizione data come *input*). Nel caso di SAT, supponendo che vengano fatte sempre le scelte più fortunate di valori di verità per le proposizioni elementari, si può verificare in tempo lineare che l'assegnazione così ottenuta è effettivamente corretta, e dunque SAT può essere 'risolto' in tempo polinomiale da un algoritmo non-deterministico che consiste semplicemente nell'indovinare un'assegnazione e verificare poi che sia corretta.

La classe dei problemi analoghi a SAT, che possono cioè essere risolti in tempo polinomiale da un simile 'algoritmo' ideale, che compie sempre le scelte migliori, viene indicata con la sigla **NP** (in cui la lettera 'N' sta per 'non-deterministico' e la lettera 'P' per 'polinomiale'). La classe **NP** può anche essere caratterizzata, come emerge dalla nostra discussione, come la classe dei problemi per i quali è possibile verificare in tempo polinomiale se una presunta risposta è davvero corretta. È emerso che la soluzione di molti problemi importanti è molto difficile da trovare mediante ordinari algoritmi deterministici, ma può invece essere verificata facilmente, una volta che sia stata fortunatamente trovata. Questi problemi sono dunque in **NP**, ma sfuggono ad ogni sforzo di mostrare che sono anche in **P**. Uno di questi problemi recalcitranti è proprio SAT, il problema della soddisfacibilità.

¹ S. A. COOK, *The Complexity of Theorem-proving Procedures*, in *Proceedings of the Third Annual Association for Computing Machinery Symposium on the Theory of Computing*, New York, ACM, 1971, pp. 151-158.

È legittimo chiedersi se la fortuna sia davvero così essenziale nella soluzione dei problemi in **NP**. Dato un problema in **NP** è forse sempre possibile trovare un algoritmo deterministico che lo risolva in tempo polinomiale? Se la risposta fosse affermativa allora **P** sarebbe uguale ad **NP**, in caso contrario le due classi sarebbero diverse. Visto il suo enorme impatto scientifico e tecnologico, questo è uno dei sette 'problemi del millennio' per la cui soluzione il *Clay Mathematics Institute* ha messo in palio sette milioni di dollari (un milione per ciascun problema).¹ Il punto è che, fra i problemi in **NP**, ve ne sono alcuni che sono davvero ardui: non solo hanno sempre eluso gli sforzi dei ricercatori di trovare algoritmi deterministici che li risolvano in tempo polinomiale, ma è possibile dimostrare che se uno di questi fosse risolto in modo fattibile, allora tutti i problemi in **NP** lo sarebbero. Uno di questi è il famoso 'problema del commesso viaggiatore' usualmente abbreviato in TSP (*Travelling Salesman Problem*): data una rete di città, connesse tramite delle strade, trovare il percorso minimo che un commesso viaggiatore deve percorrere per visitare tutte le città una e una sola volta. Si può dimostrare che, per qualsiasi problema π in **NP**, esiste una procedura fattibile (i.e., con tempo di esecuzione polinomiale) in grado di tradurre qualunque esempio di π in un esempio π' di TSP in modo tale π' ammetta una risposta positiva se e solo se anche π la ammette. Dunque se TSP fosse in **P**, cioè se fosse un problema trattabile, allora **P** sarebbe uguale ad **NP**. Problemi di questo tipo si dicono **NP-completi**. Un altro esempio di problema **NP-completo** è il 'problema delle somme parziali': dato un insieme finito di numeri interi, determinare se esiste un sottoinsieme tale che la somma dei suoi elementi sia zero. È evidente che si può verificare velocemente se un dato sottoinsieme fornisce o meno una soluzione del problema, ma non è noto alcun metodo per trovare una soluzione che sia sensibilmente più efficiente di controllare, ad uno ad uno, tutti i sottoinsiemi (che sono in numero esponenziale). La lista dei problemi **NP-completi** cresce molto velocemente² e contiene centinaia di questioni interessanti, appartenenti a una varietà di campi di ricerca, che sono sempre sfuggite a qualunque tentativo di trovare una soluzione algoritmica efficiente. Recentemente anche il problema del *sudoku*, ben noto agli appassionati di rompicapo, si è aggiunto ad essa.³

Dato che tutti i problemi in **NP** sono riducibili polinomialmente a ciascuno dei problemi **NP-completi**, questi ultimi sono tutti equivalenti fra loro (cioè riducibili polinomialmente l'uno all'altro). Dunque, o sono tutti trattabili e **P** = **NP**, oppure sono tutti intrattabili e **P** ≠ **NP**. La congettura dominante fra i ricercatori è che **P** ≠ **NP** e, di conseguenza, che tutti i problemi **NP-completi** siano intrattabili. Questa congettura viene usata in numerose applicazioni (anche critiche dal punto di vista della sicurezza, come la crittografia) come se fosse dimostrata. Da questo punto di vista, il suo statuto epistemologico non è diverso da quello un'ipotesi fortemente corroborata in una teoria appartenente alle scienze empiriche: ci comportiamo come se fosse vera, pur nella consapevolezza che potrebbe un giorno o l'altro rivelarsi falsa.

¹ Si veda il sito del *Clay Institute*: <http://www.claymath.org/millennium/>.

² Per un'ampia rassegna, anche se inevitabilmente datata, si veda GAREY, JOHNSON, *Computers and Intractability*, cit.

³ Nella sua versione più generale il problema del *sudoku* richiede di inserire dei numeri fra 1 e n^2 in una matrice di $n^2 \times n^2$ elementi suddivisa in n^2 sottomatrici di dimensione n^2 , in modo tale che nessun numero compaia più di una volta in ogni riga, colonna e sottomatrice. Per una dimostrazione della sua **NP-completeness**, si veda T. YATO, *Complexity and Completeness of Finding Another Solution and its Application to Puzzles*, Master Thesis, supervisor H. Imai, Graduate School of Science, University of Tokyo, 2003, disponibile in rete al seguente indirizzo: <http://www.imai.is.s.u-tokyo.ac.jp/~yato/data2/MasterThesis.pdf>.

Il Teorema di Cook, che aprì la strada alla teoria dell'NP-completezza, consiste proprio nell'asserzione secondo cui, in un linguaggio booleano standard:

SAT è NP-completo.

È dunque fortemente plausibile (anche se non dimostrato) che in un linguaggio booleano standard, come quello di Frege e Russell, SAT sia un problema intrattabile. Poiché una proposizione è una tautologia se e solo se non è soddisfacibile, qualunque soluzione di SAT è anche una soluzione di TAUT, il problema della tautologia, e dobbiamo dunque attenderci che, sempre in un linguaggio booleano standard, anche TAUT sia un problema intrattabile.

La probabile intrattabilità del problema della tautologia in un linguaggio booleano standard implica immediatamente che i nostri due requisiti per un linguaggio logicamente perfetto non possono essere soddisfatti simultaneamente. Se in un dato linguaggio L le tautologie possono essere riconosciute immediatamente mediante la mera ispezione dei simboli (cioè in tempo lineare), allora è fortemente implausibile che vi sia una traduzione fattibile dal linguaggio logico ordinario a L . Infatti, la sua esistenza implicherebbe anche l'esistenza di un algoritmo deterministico efficiente per risolvere il problema della tautologia (nel linguaggio standard) che invece, secondo una congettura largamente condivisa, non esiste. Sembra dunque che il sogno di un linguaggio perfetto, in cui la soluzione di un problema sia contenuta nella sua stessa formulazione 'chiara e distinta', sia irrealizzabile in pratica anche nel caso di problemi apparentemente molto semplici per i quali è noto da tempo che esso può essere realizzato in linea di principio. Non vi è dunque alcuna *razionalità istantanea* (nemmeno per i problemi più elementari).

LA LOGICA

IN UNA RETE DI LINGUAGGI IMPERFETTI

La conclusione che abbiamo raggiunto nel paragrafo precedente impone di rivisitare la vecchia idea del presunto carattere 'tautologico' della logica proposizionale. Come è possibile che una verità logica 'non dica nulla' (T. 6.11) se riconoscere il fatto che 'non dice nulla' è un problema talmente arduo che, con ogni probabilità, non ammette alcuna soluzione pratica? Dovremmo concludere che ciò che una proposizione 'dice' non può essere pienamente compreso, né comunicato, se non nei casi più semplici (in cui ricorrono solo pochissime proposizioni atomiche), neppure con l'aiuto dei computer più veloci che possano essere realizzati compatibilmente con le leggi di natura. Ma una tale conclusione appare certamente paradossale e costituisce una versione particolarmente forte di quello che il filosofo Jaakko Hintikka ha chiamato 'lo scandalo della deduzione':

C. D. Broad ha chiamato uno scandalo della filosofia i problemi ancora irrisolti dell'induzione. A mio parere, non c'è solo lo scandalo dell'induzione: anche la deduzione costituisce uno scandalo ugualmente inquietante. Un qualunque studente appena un po' sveglio potrebbe mostrarci il carattere impellente di questa situazione domandandoci, dopo aver sentito affermare che il ragionamento deduttivo è 'tautologico' o 'analitico' e che le verità logiche, in quanto prive di 'contenuto empirico' non possono essere usate per asserire 'enunciati fattuali', in quale altro senso allora il ragionamento deduttivo ci dà nuove informazioni. È infatti assolutamente ovvio che un tale senso esiste; che scopo avrebbero altrimenti la logica e la matematica?'

¹ J. HINTIKKA, *Logica, giochi linguistici e informazione. Temi kantiani nella filosofia della logica*, trad. it., Milano, Il Saggiatore, 1973, p. 244.

La tesi di Hintikka, in poche parole, è che l'idea del carattere 'tautologico' o 'analitico' del ragionamento deduttivo è in conflitto sia con l'intuizione sia con la scoperta, avvenuta negli anni trenta del xx secolo ad opera di Church e Turing, che la logica quantificazionale è indecidibile.¹ Hintikka propone di risolvere lo scandalo attraverso una revisione del concetto tradizionale di informazione semantica (dal quale risulterebbe che il ragionamento logico non genera alcuna informazione nuova), in base alla quale è possibile argomentare che le verità della logica quantificazionale *non* sono tautologiche. Tuttavia, questa conclusione non può essere estesa alla logica proposizionale, visto che per quest'ultima esiste una procedura meccanica di decisione. Così, secondo Hintikka, una delle ragioni della popolarità goduta dal concetto di tautologia è stato, probabilmente, il suo successo nel campo limitato della logica proposizionale dove Wittgenstein lo aveva inizialmente applicato. Qui la situazione può essere descritta in modo adeguato dicendo che le verità di questa parte della logica sono tutte tautologie.²

È proprio questa conclusione di Hintikka ad essere sfidata, secondo la nostra ricostruzione, dalle conseguenze del risultato di Cook che abbiamo discusso nei paragrafi precedenti.³

La tesi secondo cui la logica deduttiva (in generale) sarebbe 'tautologica' è stata più recentemente ripresa da Carlo Cellucci nel contesto della sua critica della «concezione del mondo chiuso», ossia il punto di vista tradizionale secondo cui le teorie matematiche sono sistemi chiusi che non possono scambiare informazioni con l'ambiente e si basano sul metodo assiomatico.⁴ Secondo questa visione ortodossa, la matematica è correttamente rappresentata da sistemi formali in cui, secondo una celebre analogia di Gottlob Frege, i teoremi sono contenuti negli assiomi «come le piante nei semi»,⁵ e le sue verità vengono stabilite per via rigorosamente deduttiva. Ma, dato che la deduzione non può accrescere l'informazione (dal momento che la logica è 'tautologica'), anzi generalmente la riduce (le conclusioni sono solitamente più deboli delle premesse), la concezione del mondo chiuso non riesce a spiegare l'utilità e la creatività del ragionamento matematico. Questa *reductio ad absurdum* della concezione del mondo chiuso mostra, secondo Cellucci, che (a) la matematica non può essere descritta completamente da sistemi formali, e (b) che i metodi della matematica non possono essere racchiusi nei confini angusti della logica deduttiva, ma vanno cercati in logiche alternative a quella tradizionale, in grado di rappresentare processi di ragionamento che aumentano il contenuto informativo. Alla «concezione del mondo chiuso» Cellucci contrappone una «concezione del mondo aperto», secondo cui la conoscenza matematica è più simile a un «ambiente distribuito» di sistemi aperti, ciascuno dei quali offre una rappresentazione parziale del domino corrispondente ed è in grado di scambiare informazioni con gli altri.

¹ Si veda MANGIONE, BOZZI, MANGIONE, *Storia della logica*, cit., pp. 635 sgg.

² HINTIKKA, *Logica, giochi linguistici e informazione*, cit., p. 168.

³ Per una critica articolata della proposta di Hintikka, che non affronta però i temi discussi in questo saggio, si veda S. SEQUOIAH-GRAYSON, *The Scandal of Deduction. Hintikka on the Information Yield of Deductive Inferences*, «Journal of Philosophical Logic», xxxvii, 2008, pp. 67-94. Una critica dettagliata del presunto carattere tautologico della logica proposizionale è contenuta in D'AGOSTINO, MONDADORI, *La logica è davvero analitica?*, cit.

⁴ Si vedano: C. CELLUCCI, *Le ragioni della logica*, Roma-Bari, Laterza, 1998; ID., *Filosofia e matematica*, Roma-Bari, Laterza, 2003².

⁵ G. FREGE, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Auf der Grundlage der Centenar Ausgabe, hrsg. von Christian Thiel, Hamburg, Meiner, 1988, § 88.

L'immagine della crescita della conoscenza matematica che emerge da questa analisi è indubbiamente più realistica e interessante di quella tradizionale. Tuttavia, una delle premesse su cui si basa, ovvero il presunto carattere 'tautologico' del ragionamento deduttivo, appare difficile da sostenere alla luce della nostra discussione. Se è vero che la matematica è una rete di sistemi aperti, ciò è in larga misura indipendente dalla tesi secondo cui il ragionamento deduttivo sarebbe tautologico, alla quale è difficile dare un senso plausibile persino nel dominio elementare della logica proposizionale. Ciò nonostante, le conseguenze della teoria della NP-completezza che abbiamo discusso qui, portano ulteriore acqua al mulino di Cellucci e della sua concezione del mondo aperto. Il teorema di Cook può infatti essere sfruttato per sostenere che la «concezione del mondo chiuso» è insostenibile persino all'interno della (tradizionale) logica deduttiva! Non è possibile – o meglio, è altamente improbabile – che vi sia un *unico* sistema formale per la logica proposizionale classica che possa essere usato *in pratica* per risolvere 'tutti' i problemi in questo dominio. Abbiamo visto come uno di questi sistemi formali, il metodo delle tavole di verità, fallisca miseramente nel tentativo di riconoscere il carattere tautologico di un principio combinatorio fondamentale, il cosiddetto 'principio della piccionaia'. Abbiamo scelto questo principio, a titolo di esempio, perché si tratta di un 'fatto' intuitivamente ovvio e largamente utilizzato nella pratica matematica, non di un problema artificioso definito appositamente al solo scopo di sfidare un particolare sistema formale. Inoltre, la classe di tautologie che lo rappresenta è ardua da dimostrare anche per la maggior parte dei sistemi formali 'completi' in uso nella deduzione automatica (nel senso tecnico che la dimostrazione più breve è di lunghezza esponenziale). Possiamo dunque sostenere che tutti questi sistemi formali sono 'praticamente incompleti' e che la loro incompletezza emerge relativamente a classi di verità logiche il cui significato matematico è fuori discussione, del tutto indipendentemente dalla dimostrazione della loro intrattabilità.

D'altra parte, non è difficile costruire sistemi formali per la logica proposizionale in cui il problema della piccionaia può essere 'facilmente' risolto (in tempo polinomiale).¹ Il teorema di Cook implica, però, che tutti questi sistemi formali devono essere, con ogni probabilità, anch'essi 'praticamente incompleti', in quanto non riusciranno a riconoscere in tempo polinomiale altre classi (infinite) di tautologie. L'unica speranza è quindi, anche in questo dominio elementare, quella di costruire un 'ambiente distribuito' di sistemi logici che siano in grado di scambiare informazioni fra loro, ciascuno dei quali fornisca una rappresentazione parziale, ma fattibile, di un frammento della logica proposizionale. Segue dal Teorema di Cook che questa 'rete' di sistemi non può essere finita,² così che la ricerca di una soluzione dei nostri problemi logici sarà necessariamente, in accordo con la concezione del mondo aperto, un processo potenzialmente infinito. Il mito del linguaggio logicamente perfetto, di una lingua caratteristica per la logica che possa eliminare la 'fatica' della deduzione, deve lasciare il posto a una visione pluralistica in cui, invece di un *unico* linguaggio 'perfetto', vi è una *varietà* (potenzialmente infinita) di linguaggi logici ciascuno dei quali è inevitabilmente 'imperfetto' e può raggiungere la perfezione solo in relazione a un dominio parziale, a un minuscolo frammento dell'universo delle relazioni logiche. È solo da questa continua interazione

¹ Per un esempio, si veda B. DUNHAM, H. WANG, *Toward Feasible Solutions of the Tautology Problem*, «Annals of Mathematical Logic», x, 1976, pp. 117-154.

² Altrimenti la congiunzione di questi sistemi fornirebbe una procedura di decisione polinomiale per il problema della tautologia.

di linguaggi imperfetti, dal pieno dispiegamento euristico dell'opposizione 'perfezione / imperfezione', che può gradualmente (e mai compiutamente) emergere una soluzione pratica del problema della tautologia, come di altri problemi generali che per secoli hanno sfidato l'abilità dei logici e dei matematici.