



Dottorato di Ricerca in Ingegneria delle Strutture  
Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Aerospaziale  
Università degli Studi di Palermo  
Viale delle Scienze, 90128 Palermo

## **Formulazione simmetrica del BEM nell'analisi elastica di sistemi lastre-piastre**

Tesi di Dottorato di

**Alessandro La Mantia**

Relatore: Prof. Teotista Panzeca

Coordinatore: Prof. Lidia La Mendola

---

*Dottorato di Ricerca in Ingegneria delle Strutture – XXII Ciclo  
Settore disciplinare ICAR/08  
Palermo, 15 Febbraio 2011*

*Al termine del corso di dottorato di ricerca desidero ringraziare:*

*Il mio tutor Prof. Teotista Panzeca, che ha indirizzato la mia attività di studio e di ricerca.*

*Il Collegio dei Docenti del Dottorato di ricerca in Ingegneria delle Strutture di Palermo per l'attenzione e la disponibilità con cui hanno curato il mio percorso di formazione.*

*Il Prof. Maria Salerno, che mi ha assistito con preziosi consigli e che ha curato questo periodo di formazione.*

*Il Prof. Filippo Cucco, l'Arch. Liborio Zito e l'Arch. Silvio Terravecchia, per la preziosa ed indispensabile collaborazione.*

<b>Indice</b>	
<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
Contenuto della tesi	2
<b>1 Il metodo simmetrico degli Elementi di Contorno applicato alle piastre.</b>	<b>5</b>
1.1 Posizione del problema	6
1.2 Le Soluzioni Fondamentali nelle Piastre.	14
1.2.1 Prima colonna della Matrice $\mathbf{G}$ .	16
Matrice $\mathbf{G}_{uu}$	18
Teorema di Maxwell.	20
Matrice $\mathbf{G}_{qu}$	22
Matrice $\mathbf{G}_{tu}$	24
1.2.2 La seconda colonna della Matrice $\mathbf{G}$	26
Teorema di Colonnetti	27
La Matrice $\mathbf{G}_{qt}$	30
La Matrice $\mathbf{G}_{tt}$	31
Teorema di Volterra	32
1.3 Le Identità di Somigliana	36
1.4 La discretizzazione e l'introduzione delle grandezze nodali	46
1.4.1 Prima Identità di Somigliana	48
1.4.2 Seconda Identità di Somigliana	50
<b>2 La matrice caratteristica <math>\mathbf{B}</math></b>	<b>53</b>
2.1 Generazione della matrice $\mathbf{B}$	53
2.2 Significato ed aspetti computazionali della matrice $\mathbf{A}_{uu}$ .	64
2.3 Significato ed aspetti computazionali della matrice $\mathbf{A}_{ut}$ .	67
2.4 Significato ed aspetti computazionali della matrice $\mathbf{A}_{tt}$ .	70
2.5 I Sistemi di riferimento	73

2.6	Significato fisico delle distorsioni.	74
2.6.1	La distorsione verticale $\Delta U$ .	74
2.6.2	La distorsione rotazionale $\Delta \Phi_x$ .	75
2.6.3	La distorsione rotazionale $\Delta \Phi_y$ .	76
2.6.4	Aspetti computazionali per il calcolo analitico dei coefficienti	78
2.7	Verifica dei blocchi della matrice $\mathbf{B}$ .	79
2.7.1	Moto rigido di semplice traslazione	80
2.7.2	Moto rigido di rotazione	80
2.7.3	Moto rigido di rotazione attorno ad una diagonale	82
2.8	Coefficienti in forma chiusa	83
2.8.1	Calcolo di un coefficiente in forma chiusa della matrice $\mathbf{A}_{ut}$ , per una piastra rettangolare	83
2.8.2	Calcolo di un coefficiente in forma chiusa della matrice $\mathbf{A}_{tt}$ , per una piastra rettangolare.	86
2.8.3	Calcolo di un coefficiente in forma chiusa della matrice $\mathbf{A}_{tt}$ per una piastra triangolare.	89
2.9	Termini di carico dovuti ad azioni di dominio	93
2.10	Condensazione della matrice Caratteristica $\mathbf{B}$	93
2.11	Impiego della matrice caratteristica nell'analisi delle piastre	97
<b>3</b>	<b>Multidomini.</b>	<b>101</b>
3.1	Analisi per sottostrutture via SBEM	101
3.2	Metodo degli spostamenti	105
3.3	Soluzione di analisi del sistema assemblato	109
3.4	Sistema spaziale formato da elementi di tipo lastra-piastra analizzato tramite il SBEM	111
3.5	Matrice caratteristica nell'analisi degli elementi lastra-piastra	112
3.6	Equazione risolvente di sistemi spaziali	112
<b>4</b>	<b>Applicazioni numeriche.</b>	<b>113</b>
4.1	Esempio 1: Piastra appoggiata su quattro lati	114
4.2	Esempio 2: Piastra incastrata su quattro lati	115
4.3	Esempio 3: Piastra ad L appoggiata.	116

4.4	<b>Esempio 4: Piastra appoggiata su due lati.</b>	118
4.5	Esempio 5: Piastra quadrata appoggiata su quattro lati.	120
4.6	Esempio 6: Studio di un sistema spaziale.	122
	<b>Appendice I</b>	<b>125</b>
	<b>Appendice II</b>	<b>129</b>
	<b>Conclusioni</b>	<b>140</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>142</b>

<b>Indice</b>	
<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
Contenuto della tesi	2
<b>1 Il metodo simmetrico degli Elementi di Contorno applicato alle piastre.</b>	<b>5</b>
1.1 Posizione del problema	6
1.2 Le Soluzioni Fondamentali nelle Piastre.	14
1.2.1 Prima colonna della Matrice $\mathbf{G}$ .	16
Matrice $\mathbf{G}_{uu}$	18
Teorema di Maxwell.	20
Matrice $\mathbf{G}_{qu}$	22
Matrice $\mathbf{G}_{tu}$	24
1.2.2 La seconda colonna della Matrice $\mathbf{G}$	26
Teorema di Colonnetti	27
La Matrice $\mathbf{G}_{qt}$	30
La Matrice $\mathbf{G}_{tt}$	31
Teorema di Volterra	32
1.3 Le Identità di Somigliana	36
1.4 La discretizzazione e l'introduzione delle grandezze nodali	46
1.4.1 Prima Identità di Somigliana	48
1.4.2 Seconda Identità di Somigliana	50
<b>2 La matrice caratteristica <math>\mathbf{B}</math></b>	<b>53</b>
2.1 Generazione della matrice $\mathbf{B}$	53
2.2 Significato ed aspetti computazionali della matrice $\mathbf{A}_{uu}$ .	64
2.3 Significato ed aspetti computazionali della matrice $\mathbf{A}_{ut}$ .	67
2.4 Significato ed aspetti computazionali della matrice $\mathbf{A}_{tt}$ .	70
2.5 I Sistemi di riferimento	73

2.6	Significato fisico delle distorsioni.	74
2.6.1	La distorsione verticale $\Delta U$ .	74
2.6.2	La distorsione rotazionale $\Delta \Phi_x$ .	75
2.6.3	La distorsione rotazionale $\Delta \Phi_y$ .	76
2.6.4	Aspetti computazionali per il calcolo analitico dei coefficienti	78
2.7	Verifica dei blocchi della matrice $\mathbf{B}$ .	79
2.7.1	Moto rigido di semplice traslazione	80
2.7.2	Moto rigido di rotazione	80
2.7.3	Moto rigido di rotazione attorno ad una diagonale	82
2.8	Coefficienti in forma chiusa	83
2.8.1	Calcolo di un coefficiente in forma chiusa della matrice $\mathbf{A}_{ut}$ , per una piastra rettangolare	83
2.8.2	Calcolo di un coefficiente in forma chiusa della matrice $\mathbf{A}_{tt}$ , per una piastra rettangolare.	86
2.8.3	Calcolo di un coefficiente in forma chiusa della matrice $\mathbf{A}_{tt}$ per una piastra triangolare.	89
2.9	Termini di carico dovuti ad azioni di dominio	93
2.10	Condensazione della matrice Caratteristica $\mathbf{B}$	93
2.11	Impiego della matrice caratteristica nell'analisi delle piastre	97
<b>3</b>	<b>Multidomini.</b>	<b>101</b>
3.1	Analisi per sottostrutture via SBEM	101
3.2	Metodo degli spostamenti	105
3.3	Soluzione di analisi del sistema assemblato	109
3.4	Sistema spaziale formato da elementi di tipo lastra-piastra analizzato tramite il SBEM	111
3.5	Matrice caratteristica nell'analisi degli elementi lastra-piastra	112
3.6	Equazione risolvente di sistemi spaziali	112
<b>4</b>	<b>Applicazioni numeriche.</b>	<b>113</b>
4.1	Esempio 1: Piastra appoggiata su quattro lati	114
4.2	Esempio 2: Piastra incastrata su quattro lati	115
4.3	Esempio 3: Piastra ad L appoggiata.	116

4.4	<b>Esempio 4: Piastra appoggiata su due lati.</b>	118
4.5	Esempio 5: Piastra quadrata appoggiata su quattro lati.	120
4.6	Esempio 6: Studio di un sistema spaziale.	122
	<b>Appendice I</b>	<b>125</b>
	<b>Appendice II</b>	<b>129</b>
	<b>Conclusioni</b>	<b>140</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>142</b>



## Capitolo 1

### **Il Metodo simmetrico degli Elementi di Contorno applicato alle piastre.**

In questo capitolo vengono introdotti i concetti fondamentali della formulazione simmetrica alla Galerkin del Metodo degli Elementi di Contorno (SGBEM) nell'ambito dell'elasticità lineare applicato alle piastre.

Si presenta il passaggio dal modello continuo reale, governato da equazioni differenziali di campo e da condizioni al contorno, al modello continuo immerso nel dominio illimitato governato da equazioni integrali al contorno dove le grandezze incognite sono gli spostamenti (spostamenti e rotazioni) nella porzione di contorno originariamente libera e le trazioni (forze e momenti) nella porzione di contorno originariamente vincolata. Nel dominio illimitato le forze sul contorno del solido originario assumono il significato di forze stratificate mentre gli spostamenti sul contorno assumono il significato di spostamenti relativi stratificati.

La scrittura delle equazioni integrali attraverso l'impiego delle Identità di Somigliana (I.S.) è basata sulle cosiddette Soluzioni Fondamentali (S.F.) che descrivono la risposta in un punto del dominio illimitato quando in esso sono applicate singolarità meccaniche o distorcenti.

Introdotta il modello discreto attraverso una discretizzazione del contorno, si assumono come variabili primali le grandezze valutate sui nodi del contorno del corpo. Tali grandezze, forze e spostamenti, possono essere considerate come dei parametri che definiscono l'andamento delle forze agenti sul contorno vincolato del corpo e degli spostamenti sul contorno libero attraverso una modellazione di tali

grandezze introdotta con funzioni di forma appropriate. La risposta del solido viene ottenuta attraverso un processo di pesatura degli effetti secondo l'approccio alla Galerkin imponendo le condizioni al contorno di Dirichlet e Neumann sulle quantità pesate (o generalizzate).

### 1.1 Posizione del problema

Scopo di questo paragrafo è quello di introdurre alcuni aspetti teorici fondamentali della formulazione simmetrica alla Galerkin del Metodo degli Elementi di Contorno (SGBEM) applicato alle piastre.

Si consideri una piastra  $S$  di materiale omogeneo ed isotropo avente spessore  $h$ , riferita ad un sistema di assi cartesiani  $(0, x, y, z)$ , occupante una regione  $\Omega$  dello spazio tridimensionale delimitato dal contorno  $\Gamma$ .

Tale contorno è distinto in un contorno vincolato  $\Gamma_1$  ed in un contorno complementare  $\Gamma_2 = \Gamma - \Gamma_1$  libero.

Si definiscono sul contorno i vettori delle forze  $\mathbf{f}(x)$  e degli spostamenti  $\mathbf{u}(x)$ .

$$\mathbf{f} = \left[ f \quad c_n \quad c_{sn} \right]^T \quad (1.1.1)$$

$$\mathbf{u} = \left[ u \quad \varphi_n \quad \varphi_{sn} \right]^T \quad (1.1.2)$$

dove con  $f$ ,  $c_n$  e  $c_{sn}$  si indicano rispettivamente le forze verticali, le coppie flettenti e le coppie torcenti agenti su un elemento di normale uscente  $\mathbf{n}$ , mentre con  $u$ ,  $\varphi_n$  e  $\varphi_{sn}$  si indicano rispettivamente lo spostamento verticale, la rotazione flessionale e la rotazione torsionale di un elemento avente normale uscente  $\mathbf{n}$ .

Si immagini il solido in esame sottoposto ad azioni meccaniche e cinematiche note (Fig. 1.1.1), quali:

- Forze di volume  $\bar{\mathbf{p}}(x)$  verticali applicate nel dominio  $\Omega$

- Distorsioni volumetriche  $\bar{\vartheta}(\mathbf{x})$  applicate nel dominio  $\Omega$
- Spostamenti  $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$  imposti sul contorno  $\Gamma_1$
- Forze  $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$  assegnate sulla porzione di contorno libera  $\Gamma_2$

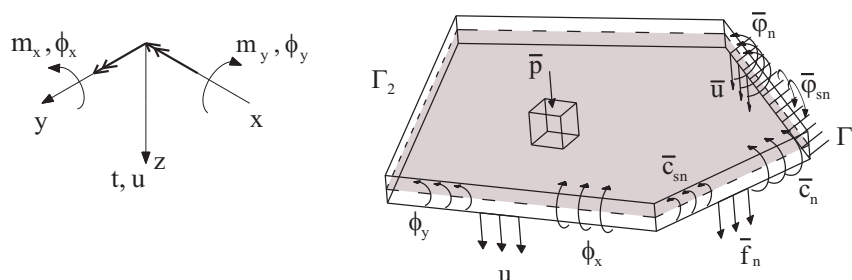


Fig. 1.1.1 Grandezze di contorno e di dominio note applicate su di una piastra di spessore costante  $h$ .

Il problema elastostatico che si intende risolvere, nel caso del solido  $S$  in esame, è quello di determinare, nell'ipotesi di spostamenti infinitesimi, la risposta del solido alle azioni applicate in modo quasi statico, in termini di:

- Spostamenti  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  nel dominio  $\Omega$  e sulla parte di contorno libero  $\Gamma_2$
- Forze reattive  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  sulla porzione di contorno vincolato  $\Gamma_1$
- Sforzi e deformazioni nel dominio  $\Omega$

Tale problema elastico può essere regolato da un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali e dalle relative condizioni al contorno. Se si considera nullo il contributo delle deformazioni taglianti trasversali, come ipotizza Kirchhoff, il sistema di equazioni che regola il problema elastico, in forma matriciale può essere così espresso:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{M} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \text{equazione di equilibrio in } \Omega \quad (1.1.3)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{E} \mathbf{I} \mathbf{K} \quad \text{legame momenti-curvature in } \Omega \quad (1.1.4)$$

$$\mathbf{K} = -\mathbf{C} \mathbf{u} \quad \text{equazione di compatibilità} \quad (1.1.5)$$

dove  $\mathbf{E}$  rappresenta la matrice di rigidezza del materiale, mentre

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{pmatrix} \quad (1.1.6)$$

sono rispettivamente un operatore differenziale, il vettore degli sforzi ed il vettore delle deformazioni (una scrittura più dettagliata delle equazioni che governano la piastra è riportata in appendice).

Per risolvere il problema strutturale posto, è necessario imporre le condizioni al contorno, che sono di tipo continuo:

- equazioni di compatibilità su  $\Gamma_1$

$$u(x) = \bar{u}(x) \quad (1.1.7 \text{ a})$$

$$\varphi_n(x) = \bar{\varphi}_n(x) \quad (1.1.7 \text{ b})$$

$$\varphi_{sn}(x) = \bar{\varphi}_{sn}(x) \quad (1.1.7 \text{ c})$$

- equazioni di equilibrio su  $\Gamma_2$

$$t_n(x) = \bar{t}_n(x) \tag{1.1.8 a}$$

$$m_n(x) = \bar{m}_n(x) \tag{1.1.8 b}$$

$$m_{sn}(x) = \bar{m}_{sn}(x) \tag{1.1.8 c}$$

La soluzione analitica del problema elastostatico non è facilmente ottenibile, eccetto che per particolari geometrie e condizioni di carico. Si ricorre quindi a metodi approssimati ed il Metodo degli Elementi di Contorno è uno di questi; in esso le equazioni differenziali vengono sostituite da equazioni integrali al contorno.

Per effettuare questa trasformazione è opportuno considerare il solido  $S$  come parte del dominio illimitato  $\Omega_\infty$ .

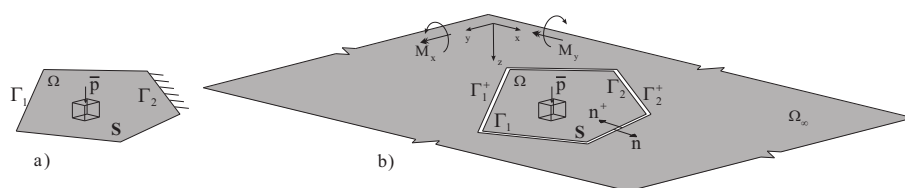


Fig.1.1.2 a) Piastra  $S$ , b) Piastra  $S$  immersa nel dominio illimitato  $\Omega_\infty$ .

Il contorno della piastra immersa nel dominio illimitato può essere pensato come formato da due frontiere:

- $\Gamma$  relativa al dominio  $\Omega$  della piastra caratterizzato dalla normale uscente  $\mathbf{n}$
- $\Gamma^+$  relativa al dominio  $\Omega_\infty \setminus \Omega$  della piastra caratterizzato dalla normale uscente  $\mathbf{n}^+ = -\mathbf{n}$

Dopo aver immerso la piastra nel dominio illimitato  $\Omega_\infty$ , è necessario ridefinire le grandezze meccaniche e cinematiche, assegnate ed incognite, riferite al contorno  $\Gamma$  del solido.

Nello specifico le forze  $\mathbf{f}$  o  $\bar{\mathbf{f}}$  sul contorno assumono il significato di forze stratificate e riguardano la frontiera  $\Gamma$  di  $\Omega$ .

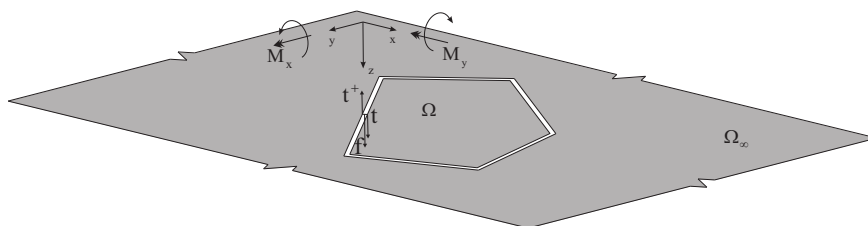


Fig. 1.1.3 Equilibrio delle forze superficiali.

In Fig.1.2.2. è stata considerata una porzione di contorno  $\Gamma$  del solido, in un punto è applicata una forza concentrata  $\mathbf{f}$ , affinché venga rispettato l'equilibrio del cubetto infinitesimo è necessario che vi sia equilibrio tra la forza  $\mathbf{f}$  e le trazioni  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{t}^+$  che nascono tra le due frontiere  $\Gamma$  e  $\Gamma^+$ , e cioè:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\mathbf{t}^+(\mathbf{x}) + \mathbf{t}(\mathbf{x}) \quad \text{su } \Gamma_1 \quad (1.1.9)$$

$$\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = -\bar{\mathbf{t}}^+(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) \quad \text{su } \Gamma_2 \quad (1.1.10)$$

dove  $\mathbf{t}^+$  e  $\mathbf{t}$  rappresentano in  $\Omega_\infty$  le trazioni valutate in un punto  $\mathbf{x}$ , rispettivamente sulla frontiera  $\Gamma^+$  e  $\Gamma$ .

Precisamente a soluzione ottenuta, le trazioni  $\mathbf{t}$ , applicate sulla porzione di contorno originariamente vincolato  $\Gamma_1$ , sono incognite e rappresentano le reazioni vincolari (forze reattive verticali e coppie reattive) della piastra originaria, mentre le

trazioni  $\bar{\mathbf{t}}$  applicate sulla porzione di contorno originariamente libera  $\Gamma_2$ , sono note e rappresentano le forze superficiali (forze verticali, coppie flettenti e coppie torcenti) agenti sul contorno della piastra.

Gli spostamenti  $\mathbf{u}$  (spostamenti verticali e rotazioni) applicati sul contorno, nel dominio illimitato si traducono in distorsioni stratificate.

La distorsione è per definizione la differenza tra lo spostamento assoluto di un punto della frontiera  $\Gamma^+$ , appartenente al dominio  $\Omega_\infty \setminus \Omega$  e lo spostamento assoluto dello stesso punto pensato appartenente alla frontiera  $\Gamma$ , del dominio  $\Omega$  del corpo (Fig. 1.1.4).

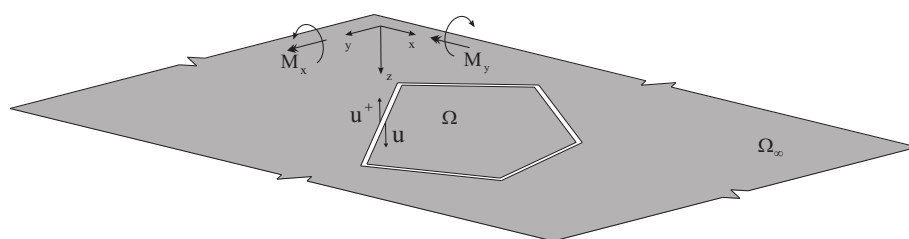


Fig.1.1.4 Spostamento relativo superficiale.

Pertanto gli spostamenti  $\mathbf{u}$  considerati sul contorno  $\Gamma$  e quelli  $\mathbf{u}^+$  sul contorno  $\Gamma^+$ , nell'ambito del dominio illimitato, danno luogo a spostamenti relativi superficiali tra le due frontiere  $\Gamma$  e  $\Gamma^+$ , cioè:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^+(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \text{su } \Gamma_2 \quad (1.1.11)$$

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}^+(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \quad \text{su } \Gamma_1 \quad (1.1.12)$$

dove  $\mathbf{u}^+$  e  $\mathbf{u}$  rappresentano in  $\Omega_\infty$  gli spostamenti (spostamenti verticali e rotazioni) valutati in un punto  $\mathbf{x}$  del contorno, valutati rispettivamente sulla frontiera  $\Gamma^+$  e  $\Gamma$ .

Precisamente, gli spostamenti  $\bar{\mathbf{u}}$ , valutati sulla porzione di contorno originariamente vincolata  $\Gamma_1$ , sono noti e rappresentano spostamenti imposti (cedimenti), mentre gli spostamenti  $\mathbf{u}$  valutati sulla porzione di contorno originariamente libero  $\Gamma_2$  sono incogniti e rappresentano gli spostamenti del contorno della piastra originaria.

La soluzione del problema si ottiene imponendo che il dominio complementare  $\Omega_\infty \setminus \Omega$  risulti indeformato e ciò comporta che tutti i punti della frontiera  $\Gamma^+$  devono rispettare le seguenti condizioni:

$$\mathbf{u}^+(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{su } \Gamma_1 \text{ e } \Gamma_2 \quad (1.1.13)$$

$$\mathbf{t}^+(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{su } \Gamma_1 \text{ e } \Gamma_2 \quad (1.1.14)$$

Sostituendo le eq.ni (1.1.13) e (1.2.14) nelle eq.ni (1.1.8-12) si ottiene che:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}(\mathbf{x}) \quad \text{su } \Gamma_1 \quad (1.1.15)$$

$$\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) \quad \text{su } \Gamma_2 \quad (1.1.16)$$

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = -\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \quad \text{su } \Gamma_1 \quad (1.1.17)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \text{su } \Gamma_2 \quad (1.1.18)$$



L'equazione (1.1.17), in considerazione del fatto che  $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = -\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ , dà luogo alla condizione  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x})$  sul contorno  $\Gamma_1$  che risulta equivalente alle eq.ni (1.1.7) del problema originario.

Pertanto la soluzione comporta che:

- sulla porzione di contorno originariamente vincolata  $\Gamma_1$  le forze reattive incognite  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  sono date dalle trazioni  $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ , mentre gli spostamenti relativi imposti  $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$  devono essere uguali a  $-\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$
- sulla porzione di contorno originariamente libera  $\Gamma_2$  le forze stratificate note  $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$  devono essere uguali alle  $\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$ , mentre gli spostamenti relativi incogniti  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  sono dati da  $-\mathbf{u}(\mathbf{x})$

Alla luce di queste considerazioni la piastra  $\mathbf{S}$  immersa in  $\Omega_\infty$  è sottoposta alle seguenti azioni cinematiche e meccaniche note:

- forze verticali di volume  $\bar{\mathbf{p}}$  applicate in  $\Omega$
- distorsioni volumetriche  $\bar{\vartheta}(\mathbf{x})$  applicate in  $\Omega$
- spostamenti relativi superficiali  $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = -\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$  imposti su  $\Gamma_1$
- forze  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  agenti su  $\Gamma_2$

La soluzione del problema fornisce la risposta del solido  $\mathbf{S}$ , in termini di:

- spostamenti  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\mathbf{u}(\mathbf{x})$  su  $\Gamma_2$
- forze reattive  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}(\mathbf{x})$  su  $\Gamma_1$
- sforzi  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ , spostamenti  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  e deformazioni  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$  nel dominio  $\Omega$

Per affrontare il problema posto, con il Metodo degli Elementi al Contorno, è necessario conoscere la risposta di  $\Omega_\infty$  alle azioni meccaniche e distorcenti concentrate unitarie. Queste sono così dette Soluzioni Fondamentali.

## 1.2 Le Soluzioni Fondamentali nelle Piastre.

Con riferimento al dominio illimitato  $\Omega_\infty$ , le Soluzioni Fondamentali rappresentano la risposta di campo in un punto effetto ( $\mathbf{x}$ ), quando in un punto causa ( $\mathbf{x}'$ ) sono applicate singolarità meccaniche e cinematiche concentrate.

Nel caso delle piastre l'effetto, valutato in  $\mathbf{x}$ , riguarda lo spostamento (e le rotazioni flessionali e torsionali)  $\mathbf{u}$ , lo sforzo  $\mathbf{t}$  su un elemento di giacitura definita dalla normale  $\mathbf{n}$  e lo sforzo  $\mathbf{q}$  sull'elemento infinitesimo, mentre la causa, applicata in  $\mathbf{x}'$ , riguarda la forza (o coppia flettente e torcente) unitaria  $\mathbf{f}$ , la distorsione superficiale unitaria  $\Delta\mathbf{U}$  su un elemento avente giacitura definita dalla normale uscente  $\mathbf{n}'$ , e la distorsione volumetrica unitaria  $\Delta\vartheta$  applicata sull'elemento infinitesimo. La matrice delle Soluzioni Fondamentali per le piastre assume la seguente forma:

$$\mathbf{G} = \begin{matrix} & \mathbf{f} & \Delta\mathbf{u} & \Delta\vartheta \\ \mathbf{u} & \mathbf{G}_{uu}(\mathbf{x},;,\mathbf{x}',/) & \mathbf{G}_{ut}(\mathbf{x},;,\mathbf{x}',\mathbf{n}') & \mathbf{G}_{uq}(\mathbf{x},;,\mathbf{x}',/) \\ \mathbf{t} & \mathbf{G}_{tu}(\mathbf{x},\mathbf{n};,\mathbf{x}',/) & \mathbf{G}_{tt}(\mathbf{x},\mathbf{n};,\mathbf{x}',\mathbf{n}') & \mathbf{G}_{tq}(\mathbf{x},\mathbf{n};,\mathbf{x}',/) \\ \mathbf{q} & \mathbf{G}_{qu}(\mathbf{x},;,\mathbf{x}',/) & \mathbf{G}_{qt}(\mathbf{x},;,\mathbf{x}',\mathbf{n}') & \mathbf{G}_{qq}(\mathbf{x},;,\mathbf{x}',/) \end{matrix} \quad (1.2.1)$$

Come è stato detto precedentemente le risposte, cioè gli effetti, sono rappresentate dalle quantità  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{q}$ :

- $\mathbf{u} = |u \ \varphi_n \ \varphi_{sn}|^T$  raccoglie il vettore delle grandezze cinematiche quali lo spostamento trasversale al piano medio  $u$ , la rotazione flessionale  $\varphi_n$  e la rotazione torsionale  $\varphi_{sn}$ ;

- $\mathbf{t} = |t_n \ m_n \ m_{sn}|^T$  raccoglie il vettore delle trazioni su una giacitura assegnata di normale  $\mathbf{n}$ , e in particolare la forza di taglio  $t_n$  il momento flettente  $m_n$  e il momento torcente  $m_{sn}$  ;
- $\mathbf{q} = |t_x \ t_y \ m_x \ m_y \ m_{xy} \ m_{yx}|^T$  raccoglie il vettore degli sforzi sul cubetto infinitesimo in particolare i due tagli  $t_x$  ,  $t_y$  lungo gli assi  $x$ ,  $y$  e i due momenti  $m_x$  ed  $m_y$  lungo gli assi  $x$ ,  $y$  e i due momenti torcenti  $m_{xy}$  ed  $m_{yx}$  .

Le cause in un punto generico  $\mathbf{x}'$ ,  $\mathbf{n}'$  di  $\Omega_\infty$  invece sono rappresentate da:

- $\mathbf{f} = |f \ c_n \ c_{sn}|^T$  raccoglie il vettore delle grandezze meccaniche quali forza  $f$  , coppia flettente  $c_n$  e coppia torcente  $c_{sn}$  ;
- $\Delta\mathbf{u} = |\Delta u \ \Delta\phi_n \ \Delta\phi_{sn}|^T$  raccoglie il vettore delle distorsioni superficiali che esprimono la distorsione verticale  $\Delta u$  , rotazionale di tipo flessionale  $\Delta\phi_n$  e tipo torsionale  $\Delta\phi_{sn}$  applicati in una sezione di giacitura  $\mathbf{n}'$  posta in  $(x')$  ;
- $\Delta\boldsymbol{\phi} = |\Delta u_x \ \Delta u_y \ \Delta\phi_x \ \Delta\phi_y \ \Delta\phi_{xy} \ \Delta\phi_{yx}|^T$  raccoglie il vettore delle distorsioni volumetriche che esprimono una distorsione verticale  $\Delta u_x$  ,  $\Delta u_y$  e rotazionale di tipo flessionale  $\Delta\phi_x$  ,  $\Delta\phi_y$  e di tipo torsionale  $\Delta\phi_{xy}$  ,  $\Delta\phi_{yx}$  applicata sulla faccia di normale  $\mathbf{n}_x$  ,  $\mathbf{n}_y$  di un prisma elementare.

### 1.2.1 Prima colonna della Matrice $G$ . Coefficiente capostipite $uu_{11}$ della Matrice $G$ .

Le Soluzioni Fondamentali si determinano, attraverso l'impiego delle equazioni differenziali che governano le piastre di Kirchhoff, a partire dalla soluzione capostipite  $uu_{11}$ , questa esprime lo **spostamento trasversale** al piano medio  $w(x)$  dovuto ad una **forza esterna concentrata unitaria**  $f(x') = 1$ , che sarà pari a:

$$uu_{11} = \frac{1}{8 \pi A} r^2 \log r \quad (1.2.2)$$

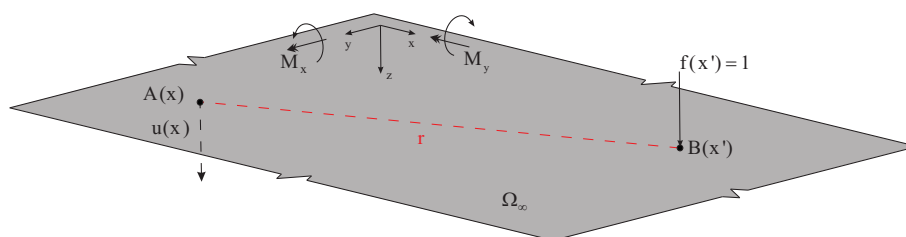


Fig. 1.2.1. Spostamento Verticale  $u(x)$  dovuta ad una Forza  $f(x')$ .

Questa dipende da una costante:

$$A = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} \quad (1.2.3)$$

che esprime la rigidità flessionale della piastra e dal logaritmo della distanza  $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$  tra punto causa e punto effetto. A partire da questa soluzione fondamentale si trovano tutte le altre soluzioni fondamentali.

Le Soluzioni Fondamentali possono essere calcolate in tutti i punti del dominio illimitato, a condizione che il punto dove si è applicata la causa e il punto dove si valuta l'effetto non coincidono, poiché essendo in tal caso  $r=0$  si possono manifestare diversi tipi di singolarità: nuclei debolmente singolari ( $\log r$ ), nuclei fortemente singolari ( $1/r$ ), ipersingolari ( $1/r^2$ ,  $1/r^3$ ) e supersingolari ( $1/r^4$ ).

Si nota che la soluzione fondamentale che esprime taglio dovuto a distorsione verticale è nulla. Ciò comporta che la singolarità  $1/r^4$  realmente non si manifesta, facilitando il calcolo dei vari coefficienti in forma chiusa.

Qui si riporta il quadro riassuntivo delle singolarità dei principali blocchi della  $\mathbf{G}$ .

$$\mathbf{G} = \begin{matrix} & \mathbf{f} & \Delta\mathbf{u} \\ \mathbf{u} & \mathbf{G}_{uu}(\mathbf{x},/\mathbf{x}',/) & \mathbf{G}_{ut}(\mathbf{x},/\mathbf{x}',\mathbf{n}') \\ \mathbf{t} & \mathbf{G}_{tu}(\mathbf{x},\mathbf{n};\mathbf{x}',/) & \mathbf{G}_{tt}(\mathbf{x},\mathbf{n};\mathbf{x}',\mathbf{n}') \end{matrix} \quad (1.2.4)$$

		$f = 1$	$c_n = 1$	$c_{sn} = 1$	$\Delta u = 1$	$\Delta\phi_n = 1$	$\Delta\phi_{sn} = 1$	
$\mathbf{G} =$	$u$	$uu_{11}$ ( $r^2 \log r$ )	$uu_{12}$ ( $r \log r$ )	$uu_{13}$ ( $r \log r$ )	$ut_{11}$ ( $1/r$ )	$ut_{12}$ ( $\log r$ )	$ut_{13}$ ( $\log r$ )	(1.2.5)
	$\phi_n$	$uu_{21}$ ( $r \log r$ )	$uu_{22}$ ( $\log r$ )	$uu_{23}$ ( $\log r$ )	$ut_{21}$ ( $1/r^2$ )	$ut_{22}$ ( $1/r$ )	$ut_{23}$ ( $1/r$ )	
	$\phi_{sn}$	$uu_{31}$ ( $r \log r$ )	$uu_{32}$ ( $\log r$ )	$uu_{33}$ ( $\log r$ )	$ut_{31}$ ( $1/r^2$ )	$ut_{32}$ ( $1/r$ )	$ut_{33}$ ( $1/r$ )	
	$t_n$	$tu_{11}$ ( $1/r$ )	$tu_{12}$ ( $1/r^2$ )	$tu_{13}$ ( $1/r^2$ )	$tt_{11}$ ( $1/r^4$ )	$tt_{12}$ ( $1/r^3$ )	$tt_{13}$ ( $1/r^3$ )	
	$m_n$	$tu_{21}$ ( $\log r$ )	$tu_{22}$ ( $1/r$ )	$tu_{23}$ ( $1/r$ )	$tt_{21}$ ( $1/r^3$ )	$tt_{22}$ ( $1/r^2$ )	$tt_{23}$ ( $1/r^2$ )	
	$m_{sn}$	$tu_{31}$ ( $\log r$ )	$tu_{32}$ ( $1/r$ )	$tu_{33}$ ( $1/r$ )	$tt_{31}$ ( $1/r^3$ )	$tt_{32}$ ( $1/r^2$ )	$tt_{33}$ ( $1/r^2$ )	

Proseguiamo descrivendo le caratteristiche delle varie sottomatrici che compongono la matrice delle Soluzioni Fondamentali.

**Matrice  $G_{uu}$ .**

Il primo blocco della matrice  $G$  è una matrice simmetrica di ordine (3x3). Secondo una notazione ormai consolidata in  $G_{uu}$  il primo indice rappresenta l'effetto, il secondo indice il duale in senso energetico della causa. La matrice  $G_{uu}$  esprime gli spostamenti  $u$ , le rotazioni flessionali  $\varphi_n$  e le rotazioni torsionali  $\varphi_{sn}$  in un punto  $(x)$  causati da una forza  $f$ , da una coppia flettente  $c_n$  o da una coppia torcente  $c_{sn}$  esterna concentrata applicata in un punto causa  $(x')$ .

$$G_{uu}(x, n; x', n') = \begin{matrix} & f & c_n & c_{sn} \\ \begin{matrix} u \\ \varphi_n \\ \varphi_{sn} \end{matrix} & \begin{vmatrix} uu_{11} & uu_{12} & uu_{13} \\ uu_{21} & uu_{22} & uu_{23} \\ uu_{31} & uu_{32} & uu_{33} \end{vmatrix} \end{matrix} \quad (1.2.6)$$

	f	$\Delta u$	$\Delta \vartheta$
u	$G_{uu}$		
t			
q			

$G =$

Fig. 1.2.2. Tabella delle Soluzioni fondamentali.

Tenendo conto che nelle piastre di Kirchhoff la rotazione flessionale è data dalla derivata direzionale dello spostamento in direzione n:

$$\varphi_n = -\frac{\partial u}{\partial n} \quad (1.2.7)$$

si ha:

$$\begin{aligned} uu_{21} &= -\frac{\partial uu_{11}}{\partial x} n_x - \frac{\partial uu_{11}}{\partial y} n_y = \\ &= -\frac{1}{8 \pi A} (n_x (x - x') + n_y (y - y')) (1 + \log r^2) \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

E considerando che la rotazione torsionale è data dalla derivata direzionale dello spostamento in direzione sn:

$$\varphi_{sn} = -\frac{\partial u}{\partial sn} \quad (1.2.9)$$

si ha:

$$\begin{aligned} uu_{31} &= -\frac{\partial uu_{11}}{\partial x} n_y + \frac{\partial uu_{11}}{\partial y} n_x = \\ &= -\frac{1}{8 \pi A} (n_y (x - x') + n_x (-y + y')) (1 + \log r^2) \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Si utilizza il teorema di Betti generalizzato per studiare la simmetria della matrice  $\mathbf{G}_{uu}$  in particolare i coefficienti  $uu_{12}$  e  $uu_{13}$  si ottengono per simmetria applicando il teorema di Maxwell:

$$uu_{2n} = -\frac{\partial uu_{1n}}{\partial x} n_x - \frac{\partial uu_{1n}}{\partial y} n_y \quad \text{con} \quad (n=1, 2, 3) \quad (1.2.11)$$

$$uu_{3n} = -\frac{\partial uu_{1n}}{\partial x} n_y + \frac{\partial uu_{1n}}{\partial y} n_x \quad \text{con} \quad (n=1, 2, 3) \quad (1.2.12)$$

**Teorema di Maxwell simmetria dei coefficienti  $G_{uu21} = G_{uu12}$ .**

A tal scopo si considera il dominio illimitato  $\Omega_\infty$  sottoposto a due diverse condizioni di carico. Nello schema (1) la causa è una forza unitaria  $\hat{f}_1(x') = 1$  applicata in  $B(x')$ , nello schema (2) la causa è una coppia flettente  $\hat{c}_{2n'}(x') = 1$  applicata in  $A(x)$ ; si passa a valutare la risposta a tali azioni, ed in particolare la rotazione flessionale  $\varphi_{1n}(x)$  in  $A(x)$  nello schema (1) e lo spostamento  $u_2(x')$  in  $B(x')$  nel secondo schema (2). Per fare ciò si applica due volte il Principio dei Lavori Virtuali:

Si considera la **prima volta** come schema virtuale lo schema (1) dove si valutano le forze  $\hat{f}_1(x') = 1$  e gli sforzi  $\hat{q}_1$ , e come schema reale lo schema (2) dove si valutano gli spostamenti  $u_2(x')$  e le deformazioni  $\vartheta_2 = F q_2$ . Quindi si ha:

$$0 = m_{1n}(x) + \int_{\Omega_\infty} \hat{q}_1^T \vartheta_2 d\Omega_\infty \quad (1.2.13)$$

con

$$m_{1n}(x) = G(x, n; x') \quad (1.2.14)$$

Si considera la **seconda volta** come schema virtuale lo schema (2) dove si valuta una coppia flettente unitaria  $\hat{c}_{2n'}(x') = 1$  e gli sforzi  $\hat{q}_2$ , e come schema reale lo schema (1) dove si valuta la rotazione flessionale  $\varphi_{1n}(x)$  e le deformazioni  $\vartheta_1 = F q_1$ . Quindi si ha:

$$0 = t_{2n'}(x') + \int_{\Omega_\infty} \hat{q}_2^T \vartheta_1 d\Omega_\infty \quad (1.2.15)$$

con:

$$t_{2n'}(x') = G(x'; x, n) \quad (1.2.16)$$



E' noto che l'energia di deformazione risulta uguale così è dimostrato la simmetria della matrice  $\mathbf{G}_{uu}$  con  $\mathbf{G}_{uu21} = \mathbf{G}_{uu12}$ .

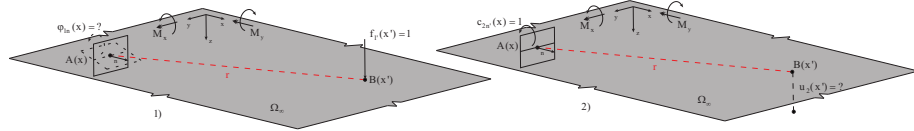


Fig. 1.2.3 (1) Rotazione Flessionale  $\varphi_{1n}$  dovuta ad una Forza  $f_1$ , (2) Spostamento Verticale  $u_2$  dovuto ad una Coppia Flettente  $c_{2n}$

Si dimostra che lo spostamento verticale  $u_2(x')$  in  $B(x')$  e la rotazione flessionale  $\varphi_{1n}(x)$  in  $A(x)$  vengono calcolati in funzione del lavoro interno esteso a  $\Omega_\infty$ , ma nei due casi il lavoro interno risulta essere uguale  $\mathbf{q}_1^T \vartheta_2 = \mathbf{q}_1^T \mathbf{A} \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_2^T \mathbf{A} \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2^T \vartheta_1$  (1.2.17)

e quindi si può concludere che:

$$u_2(x') = \varphi_{1n}(x) \tag{1.2.18}$$

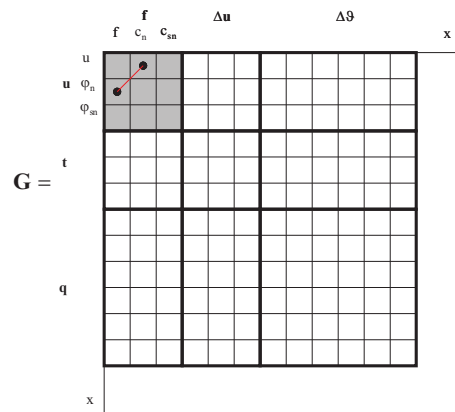


Fig.1.2.4 Schema della simmetria dei coefficienti  $\mathbf{G}_{uu21} = \mathbf{G}_{uu12}$ .

Poiché nella matrice si vogliono esprimere tutte le colonne in funzione di  $\mathbf{x}'$  e tutte le righe in funzione di  $\mathbf{x}$  è necessario effettuare un cambio tra il punto  $\mathbf{x}$  e il punto  $\mathbf{x}'$ , così si ha: per  $G(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}') = G(\mathbf{x}'; \mathbf{x}, \mathbf{n})$  si ha  $u_2(\mathbf{x}) = \varphi_{1n}(\mathbf{x})$ .

La rotazione flessionale  $\varphi_{1n}(\mathbf{x})$  in  $A(\mathbf{x})$  provocata dalla forza unitaria  $\hat{f}_1(\mathbf{x}') = 1$  applicata in  $B(\mathbf{x}')$  secondo la direzione perpendicolare al piano medio è numericamente uguale allo spostamento  $u_2(\mathbf{x}')$  in  $B(\mathbf{x}')$  secondo la direzione perpendicolare al piano medio provocato dalla coppia flettente unitaria  $\hat{c}_{2n'}(\mathbf{x}') = 1$  applicata in  $A(\mathbf{x})$ :  $u_2(\mathbf{x}) = \varphi_{1n}(\mathbf{x})$ .

**Matrice  $G_{qu}$ .**

Passiamo adesso a parlare delle caratteristiche della Matrice  $G_{qu}$ . Si tratta di una matrice di ordine (6x3) che esprime gli sforzi taglienti  $t_x, t_y$ , e i momenti flettenti  $m_x, m_y$  ed i momenti torcenti  $m_{xy}$  ed  $m_{yx}$  (gli sforzi  $q$ ) in un prisma elementare posto in (x) causati da una forza  $f$ , da una coppia flettente  $c_n$  o da una coppia torcente  $c_{sn}$  (grandezze meccaniche  $f$ ) esterna concentrata applicata in un punto causa (x').

$$G_{qu} = \begin{matrix} & f & c_n & c_{sn} \\ \begin{matrix} t_x \\ t_y \\ m_x \\ m_y \\ m_{xy} \\ m_{yx} \end{matrix} & \begin{bmatrix} qu_{11} & qu_{12} & qu_{13} \\ qu_{21} & qu_{22} & qu_{23} \\ qu_{31} & qu_{32} & qu_{33} \\ qu_{41} & qu_{42} & qu_{43} \\ qu_{51} & qu_{52} & qu_{53} \\ qu_{61} & qu_{62} & qu_{63} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1.2.19)$$

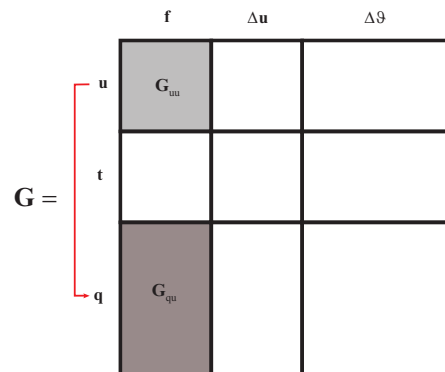


Fig.1.4.5 Schema del passaggio dalla Matrice  $G_{uu}$  alla Matrice  $G_{qu}$ .

Questa matrice deriva dalla prima riga della  $G_{uu}$  attraverso l'impiego dei seguenti operatori differenziali  $D_2$  e  $D_3$ .

$$\mathbf{G}_{qu}(1,1) = \mathbf{qu}_{11} = -A \left( \frac{\partial^3 \mathbf{uu}_{11}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \mathbf{uu}_{11}}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (1.2.20)$$

$$\mathbf{G}_{qu}(2,1) = \mathbf{qu}_{21} = -A \left( \frac{\partial^3 \mathbf{uu}_{11}}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \mathbf{uu}_{11}}{\partial y^3} \right) \quad (1.2.21)$$

$$\mathbf{G}_{qu}(3,1) = \mathbf{qu}_{31} = -A \left( \frac{\partial^2 \mathbf{uu}_{11}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{uu}_{11}}{\partial y^2} \right) \quad (1.2.22)$$

$$\mathbf{G}_{qu}(4,1) = \mathbf{qu}_{41} = -A \left( \frac{\partial^2 \mathbf{uu}_{11}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{uu}_{11}}{\partial x^2} \right) \quad (1.2.23)$$

$$\mathbf{G}_{qu}(5,1) = \mathbf{qu}_{51} = -A(1-\nu) \frac{\partial^2 \mathbf{uu}_{11}}{\partial x \partial y} \quad (1.2.24)$$

$$\mathbf{G}_{qu}(6,1) = \mathbf{qu}_{61} = A(1-\nu) \frac{\partial^2 \mathbf{uu}_{11}}{\partial x \partial y} \quad (1.2.25)$$

schematizzando si può scrivere:

$$\mathbf{G}_{qu} = \begin{Bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = -A \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{D}_3 \end{Bmatrix} \mathbf{uu}_{ii} = -A \mathbf{D} \mathbf{G}_{uu}^{(1)}, \quad i = 1, 2 \quad (1.2.26)$$

dove  $\mathbf{G}_{uu}^{(1)}$  indica che solo gli elementi della prima riga della matrice  $\mathbf{G}_{uu}$  vengono derivati,  $\mathbf{D}_2$  e  $\mathbf{D}_3$  sono dei vettori

di operatori differenziali che assumono la seguente forma:

$$\mathbf{D}_2 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \\ \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3}{\partial y^3} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{D}_3 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (1.2.27 \text{ a-b})$$

**Matrice  $G_{tu}$ .**

Dalla matrice  $G_{qu}$  si può passare alla matrice  $G_{tu}$  che è una matrice di ordine (3x3) che esprime lo sforzo tagliante  $t_n$ , il momento flettente  $m_n$  ed il momento torcente  $m_{sn}$  (le trazioni  $\mathbf{t}$ ) che nascono in una sezione di normale  $n$  posta in  $(x)$  causati da una forza  $f$ , da una coppia flettente  $c_n$  e da una coppia torcente  $c_{sn}$  (grandezze meccaniche  $\mathbf{f}$ ) esterna concentrata applicata in un punto causa  $(x')$ .

$$G_{tu} = m_n \begin{matrix} & f & c_n & c_{sn} \\ \begin{matrix} t_n \\ m_n \\ m_{sn} \end{matrix} & \begin{bmatrix} tu_{11} & tu_{12} & tu_{13} \\ tu_{21} & tu_{22} & tu_{23} \\ tu_{31} & tu_{32} & tu_{33} \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{1.2.28}$$

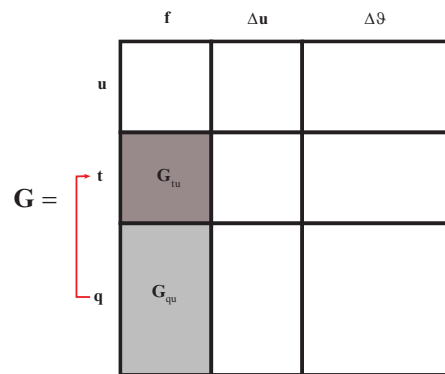


Fig.1.2.6 Schema del passaggio dalla Matrice  $G_{qu}$  alla Matrice  $G_{tu}$ .

$$tu_{11} = A (qu_{11} n_x + qu_{21} n_y) = \tag{1.2.29}$$

$$tu_{21} = A (qu_{31} n_x^2 + qu_{41} n_y^2 + qu_{51} n_x n_y - qu_{61} n_x n_y) = \tag{1.2.30}$$

$$tu_{31} = A ((qu_{31} - qu_{41}) n_x n_y + qu_{51} n_y^2 + qu_{61} n_x^2) = \tag{1.2.31}$$

La matrice  $G_{tu}$  si ottiene applicando alla  $G_{qu}$  la matrice dei coseni direttori  $N$

$$G_{tu} = N G_{qu} = -A N D G_{uu}^{(1)} \tag{1.2.32}$$

$\mathbf{N}$  la matrice dei coseni direttori del versore  $\mathbf{n}$  di seguito riportata:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_x^2 & n_y^2 & n_x n_y & -n_x n_y \\ 0 & 0 & n_x n_y & -n_x n_y & n_y^2 & n_x^2 \end{bmatrix} \quad (1.2.33)$$

### 1.2.2 Seconda colonna della Matrice $\mathbf{G}$ .

La seconda colonna della Matrice  $\mathbf{G}$  differisce dalla prima perché la causa è diversa, infatti anziché trattarsi di grandezze meccaniche  $\mathbf{f}$  si tratta di distorsioni verticali  $\Delta u$ , distorsioni rotazionali di tipo flessionale  $\Delta\phi_n$  e di tipo torsionale  $\Delta\phi_{sn}$  (distorsioni superficiali  $\Delta\mathbf{u}$ ). Le soluzioni della seconda e terza colonna della Matrice  $\mathbf{G}$  si ottengono in maniera analoga a quelle della prima colonna.

#### La matrice $\mathbf{G}_{ut}$ .

Si tratta di una matrice di ordine (3x3), essa risulta simmetrica rispetto alla matrice  $\mathbf{G}_{tu}$ , ed esprime gli spostamenti  $u$ , le rotazioni flessionali  $\phi_n$  e le rotazioni torsionali  $\phi_{sn}$  (grandezze cinematiche  $\mathbf{u}$ ) in un punto (x) causati da una distorsione verticale  $\Delta u$ , distorsioni rotazionali di tipo flessionale  $\Delta\phi_n$  e tipo torsionale  $\Delta\phi_{sn}$  (distorsioni superficiali  $\Delta\mathbf{u}$ ) applicati in una sezione di giacitura  $\mathbf{n}'$  posta in ( $\mathbf{x}'$ ).

$$\mathbf{G}_{ut} = \begin{matrix} & \Delta u & \Delta\phi_n & \Delta\phi_{sn} \\ \mathbf{u} & \begin{bmatrix} ut_{11} & ut_{12} & ut_{13} \\ ut_{21} & ut_{22} & ut_{23} \\ ut_{31} & ut_{32} & ut_{33} \end{bmatrix} \\ \phi_n & & & \\ \phi_{sn} & & & \end{matrix} \quad (1.2.34)$$

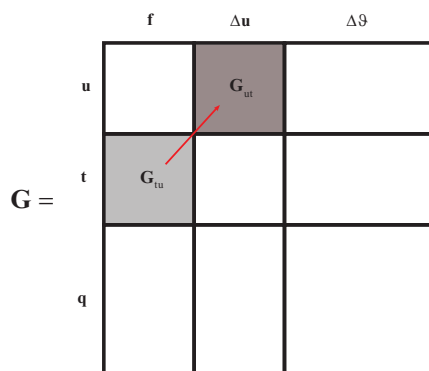


Fig.1.4.7 Schema del passaggio dalla Matrice  $G_{tu}$  alla Matrice  $G_{ut}$ .

Nel rispetto dei teoremi energetici, la matrice delle **Soluzioni Fondamentali**  $G$  deve obbedire a regole di simmetria, pertanto si ha che:

$$G_{ut}(x, /; x', n') = G_{tu}^T(x, n; x', /) \tag{1.2.35}$$

**Teorema di Colonnetti simmetria dei coefficienti  $G_{tu21} = G_{ut12}$ .**

Procedendo in modo analogo come fatto nel teorema di Maxwell si applica due volte il Principio dei Lavori Virtuali:

A tal scopo si considera il dominio illimitato  $\Omega_\infty$  sottoposto a due diverse condizioni di carico. Nello schema (1) la causa è una **forza unitaria**  $\hat{f}_1(x') = 1$  applicata in  $B(x')$ , nello schema (2) la causa è una **distorsione rotazionale di tipo flessionale**  $\Delta\phi_{2n}(x) = 1$  applicata in  $A(x)$ ; si passa a valutare la risposta a tali azioni, ed in particolare il momento flettente  $\hat{m}_{1n}(x)$  in  $A(x)$  nello schema (1) e lo spostamento  $u_2(x')$  in  $B(x')$  nel secondo schema (2).

Per fare ciò si applica due volte il Principio dei Lavori Virtuali:

Si considera la **prima volta** come schema virtuale lo schema (1) dove si valutano le forze  $\hat{f}_1(x') = 1$ , gli sforzi  $\hat{q}_1$  e il momento flettente  $\hat{m}_{1n}(x)$ , e come schema reale lo schema (2) dove si valutano gli spostamenti  $u_2(x')$ , le deformazioni  $\vartheta_2 = F q_2$  e le distorsioni rotazionali di tipo flessionale  $\Delta\phi_{2n}(x) = 1$ . Quindi si ha

$$1 u_2(x') = \hat{m}_{1n}(x) 1 + \int_{\Omega_\infty} \hat{q}_1^T \vartheta_2 d\Omega_\infty \quad (1.2.36)$$

con:

$$u_2(x') = G(x'; x, n') \text{ e } \hat{m}_{1n}(x) = G(x, n; x') \quad (1.2.37a-b)$$

Si considera la **seconda volta** come schema virtuale lo schema (2) dove si valutano gli sforzi  $\hat{q}_2$ , e come schema reale lo schema (1) dove si valutano le deformazioni  $\vartheta_1 = F q_1$ . Quindi si ha:

$$0 = \int_{\Omega_\infty} \hat{q}_2^T \vartheta_1 d\Omega_\infty \quad (1.2.38)$$

Come nel caso precedente l'energia di deformazione risulta uguale così è dimostrato la simmetria dei coefficienti  $G_{tu21} = G_{ut12}$ .

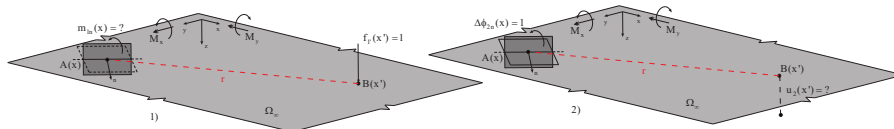


Fig. 1.4.8. (1) Momento Flettente  $m_{1n}$  dovuta ad una Forza  $f_1$ . (2) Spostamento Verticale  $u_2$  dovuta ad una Distorsione Rotazionale di tipo Flessionale  $\Delta\phi_{2n}$ .

Si dimostra che lo spostamento verticale  $u_2(x')$  in  $B(x')$  e il momento flettente  $\hat{m}_{1n}(x)$  in  $A(x)$  vengono calcolati in funzione del lavoro interno esteso a  $\Omega_\infty$ , ma nei due casi il lavoro interno risulta essere uguale:

$$q_1^T \vartheta_2 = q_1^T A q_2 = q_2^T A q_1 = q_2^T \vartheta_1 \quad (1.2.39)$$



e quindi si può concludere che:

$$\hat{m}_{1n}(\mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x}') \tag{1.2.40}$$

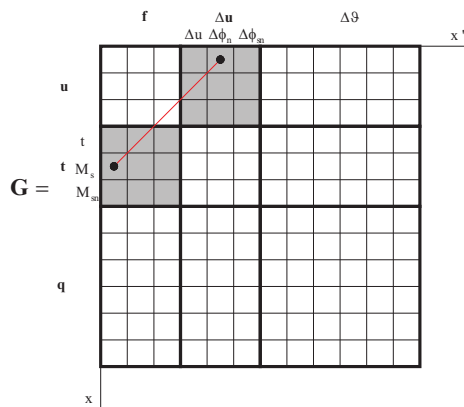


Fig.1.2.9 Schema della simmetria dei coefficienti  $G_{tu21} = G_{ut12}$ .

Poiché nella matrice si vogliono esprimere tutte le colonne in funzione di  $\mathbf{x}'$  e tutte le righe in funzione di  $\mathbf{x}$  è necessario effettuare un cambio tra il punto  $\mathbf{x}$  e il punto  $\mathbf{x}'$ , così per  $G(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}') = G(\mathbf{x}'; \mathbf{x}, \mathbf{n}')$  si ha:

$$\hat{m}_{1n}(\mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x}) \tag{1.2.41}$$

Lo spostamento  $u_2(\mathbf{x}')$  di un punto in  $B(\mathbf{x}')$  secondo la direzione perpendicolare al piano medio causato da una distorsione rotazionale di tipo flessionale  $\Delta\phi_{2n}(\mathbf{x}) = 1$  su un elemento di giacitura definita dalla normale  $\mathbf{n}$  applicata in  $A(\mathbf{x})$  è numericamente uguale al momento flettente  $\hat{m}_{1n}(\mathbf{x})$  su un elemento di giacitura definita dalla normale  $\mathbf{n}$  in  $A(\mathbf{x})$  causata da una forza unitaria  $\hat{f}_1(\mathbf{x}') = 1$  applicata in  $B(\mathbf{x}')$ :

$$\hat{m}_{1n}(\mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x}) \tag{1.2.42}$$

### La Matrice $G_{qt}$

Si tratta di una matrice di ordine (6x3) che esprime gli **sforzi taglianti**  $t_x$ ,  $t_y$ , e i **momenti flettenti**  $m_x$ ,  $m_y$  ed i **momenti torcenti**  $m_{xy}$ ,  $m_{yx}$  (gli **sforzi q**) in un prisma elementare posto in (x) causati da una **distorsione verticale**  $\Delta u$ , **rotazionale di tipo flessionale**  $\Delta \phi_n$  e di tipo **torsionale**  $\Delta \phi_{sn}$  (**distorsioni superficiali**  $\Delta u$ ) applicati in una sezione di giacitura  $n'$  posta in (x').

$$G_{qt} = \begin{matrix} & \Delta u & \Delta \phi_n & \Delta \phi_{sn} \\ \begin{matrix} t_x \\ t_y \\ m_x \\ m_y \\ m_{xy} \\ m_{yx} \end{matrix} & \begin{bmatrix} qt_{11} & qt_{12} & qt_{13} \\ qt_{21} & qt_{22} & qt_{23} \\ qt_{31} & qt_{32} & qt_{33} \\ qt_{41} & qt_{42} & qt_{43} \\ qt_{51} & qt_{52} & qt_{53} \\ qt_{61} & qt_{62} & qt_{63} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1.2.43)$$

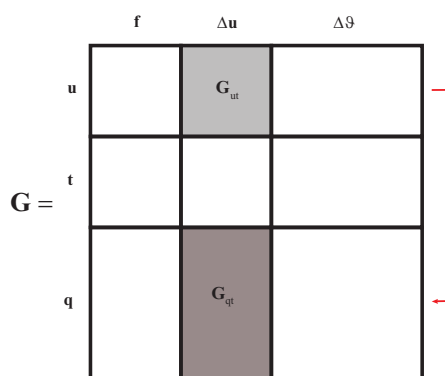


Fig.1.4.10 Schema del passaggio dalla Matrice  $G_{ut}$  alla Matrice  $G_{qt}$ .

Schematizzando si può scrivere:

$$G_{qt} = -A D G_{ut}^{(1)} \quad (1.2.44)$$

dove  $G_{ut}^{(1)}$  si riferisce ai soli elementi della prima riga della matrice  $G_{ut}$ .

$$ut_{11} = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{4n_x(x-x') + 4n_y(y-y')}{r^2} \right) \quad (1.2.45)$$

$$qt_{11} = -A \left( \frac{\partial^3 ut_{11}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 ut_{11}}{\partial x \partial y^2} \right) = 0 \quad (1.2.46)$$

$$qt_{21} = -A \left( \frac{\partial^3 ut_{11}}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 ut_{11}}{\partial y^3} \right) = 0 \quad (1.2.47)$$

$$qt_{31} = -A \left( \frac{\partial^2 ut_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 ut_{11}}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (1.2.48)$$

$$qt_{41} = -A \left( \frac{\partial^2 ut_{11}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 ut_{11}}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (1.2.49)$$

$$qt_{51} = -A(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 ut_{11}}{\partial x \partial y} \right) = 0 \quad (1.2.50)$$

$$qt_{61} = A(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 ut_{11}}{\partial x \partial y} \right) = 0 \quad (1.2.51)$$

**La Matrice  $G_{tt}$**

È una matrice di ordine (3x3) che esprime lo **sforzo tagliante**  $t_n$ , il **momento flettente**  $m_n$  ed il **momento torcente**  $m_{sn}$  (le **trazioni**  $t$ ) che nascono in una sezione di giacitura  $n$  posta in  $(x)$  causati da una **distorsione verticale**  $\Delta u$ , **rotazionale di tipo flessionale**  $\Delta\phi_n$  e di tipo **torsionale**  $\Delta\phi_{sn}$  (**distorsioni superficiali**  $\Delta u$ ) applicati in una sezione di giacitura  $n'$  posta in  $(x')$ .

$$G_{tt} = m_n \begin{matrix} t_n \\ m_n \\ m_{sn} \end{matrix} \begin{bmatrix} tt_{11} & | & tt_{12} & | & tt_{13} \\ \hline tt_{21} & | & tt_{22} & | & tt_{23} \\ \hline tt_{31} & | & tt_{32} & | & tt_{33} \end{bmatrix} \quad (1.2.52)$$

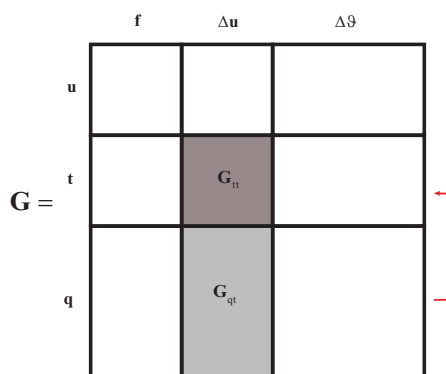


Fig.1.4.11 Schema del passaggio dalla Matrice  $G_{qt}$  alla Matrice  $G_{tt}$ .

Schematizzando si può scrivere:

$$G_{tt} = N G_{qt} = -A N D G_{ut}^{(1)} \quad (1.2.53)$$

$$tt_{11} = A (qt_{11} n_x + qt_{21} n_y) \quad (1.2.54)$$

$$tt_{21} = A (qt_{31} n_x^2 + qt_{41} n_y^2 + qt_{51} n_x n_y - qt_{61} n_x n_y) \quad (1.2.55)$$

$$tt_{31} = A ((qt_{31} - qt_{41}) n_x n_y + qt_{51} n_y^2 + qt_{61} n_x^2) \quad (1.2.56)$$

**Teorema di Volterra simmetria dei coefficienti**  $G_{tt21} = G_{tt12}$ .

A tal scopo si considera il dominio illimitato  $\Omega_\infty$  sottoposto a due diverse condizioni di carico. Nello schema (1) la causa è una distorsione verticale unitaria  $\Delta \mathbf{u}_{1n'}(\mathbf{x}') = 1$  applicata in  $B(\mathbf{x}')$ , nello schema (2) la causa è una distorsione rotazionale di tipo flessionale unitaria  $\Delta \phi_{2n}(\mathbf{x}) = 1$  applicata in  $A(\mathbf{x})$ ;

si passa a valutare la risposta a tali azioni, ed in particolare il momento flettente  $m_{1n}(\mathbf{x})$  in  $A(\mathbf{x})$  nello schema (1) e lo sforzo tagliante  $t_{2n}(\mathbf{x}')$  in  $B(\mathbf{x}')$  nel secondo schema (2). Per fare ciò si applica due volte il Principio dei Lavori Virtuali:

si considera la **prima volta** come schema virtuale lo schema (1) dove si valutano gli sforzi  $\hat{q}_1$  e il momento flettente  $m_{1n}(\mathbf{x})$  e come schema reale lo schema (2) dove si valutano la distorsione rotazionale di tipo flessionale unitaria  $\Delta \phi_{2n}(\mathbf{x}) = 1$  e le deformazioni  $\vartheta_2 = F q_2$ . Quindi si ha:

$$0 = m_{1n}(\mathbf{x}) + \int_{\Omega_\infty} \hat{q}_1^T \vartheta_2 d\Omega_\infty \quad (1.2.57)$$

con:

$$m_{1n}(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}') \quad (1.2.58)$$

si considera la **seconda volta** come schema virtuale lo schema (2) dove si valutano lo sforzo tagliante  $t_{2n}(\mathbf{x})$  e gli sforzi  $\hat{q}_2$  e come schema reale lo schema (1) dove si valutano la distorsione verticale unitaria  $\Delta \mathbf{u}_{1n'}(\mathbf{x}') = 1$  e le deformazioni  $\vartheta_1 = F q_1$ .

Quindi si ha:

$$0 = t_{2n'}(\mathbf{x}') + \int_{\Omega_\infty} \hat{q}_2^T \vartheta_1 d\Omega_\infty \quad (1.2.59)$$

con

$$t_{2n'}(\mathbf{x}') = G(\mathbf{x}'; \mathbf{x}, \mathbf{n}) \quad (1.2.60)$$

E' noto che l'energia di deformazione risulta uguale così è dimostrato la simmetria della matrice  $\mathbf{G}_{tt}$  con  $\mathbf{G}_{tt21} = \mathbf{G}_{tt12}$ .

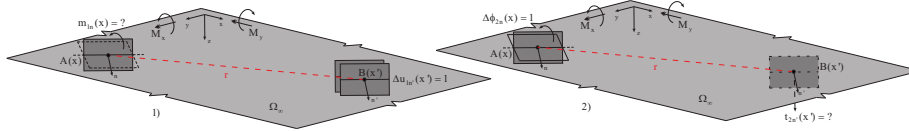


Fig. 1.4.12. (1) Momento Flettente  $m_{1n}$  dovuto ad una Distorsione Verticale  $\Delta u_{1n}$ .  
(2) Sforzo Tagliante  $t_{2n}$  dovuto ad una Distorsione Rotazionale di tipo Flessionale  $\Delta \phi_{2n}$ .

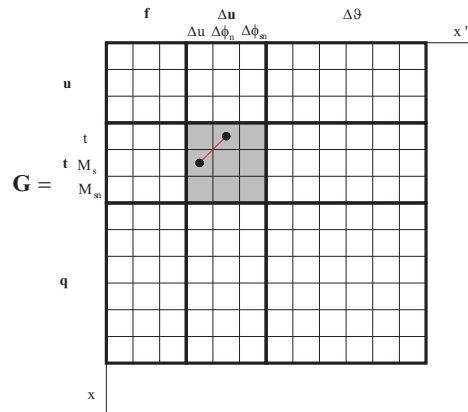


Fig.1.2.13 Schema della simmetria dei coefficienti  $\mathbf{G}_{tt21} = \mathbf{G}_{tt12}$ .

Si dimostra che lo sforzo tagliante  $t_{2n}(x')$  in  $B(x')$  e il momento flettente  $m_{1n}(x)$  in  $A(x)$  vengono calcolati in funzione del lavoro interno esteso a  $\Omega_\infty$ , ma nei due casi il lavoro interno risulta essere uguale

$$\mathbf{q}_1^T \vartheta_2 = \mathbf{q}_1^T \mathbf{A} \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_2^T \mathbf{A} \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2^T \vartheta_1 \quad (1.2.61)$$

e quindi si può concludere che:

$$m_{1n}(x) = t_{2n}(x') \quad (1.2.62)$$

Poiché nella matrice si vogliono esprimere tutte le colonne in funzione di  $\mathbf{x}'$  e tutte le righe in funzione di  $\mathbf{x}$  è necessario effettuare un cambio tra il punto  $\mathbf{x}$  e il punto  $\mathbf{x}'$ , così si ha: per  $G(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}') = G(\mathbf{x}'; \mathbf{x}, \mathbf{n})$  e si ha  $m_{1n}(\mathbf{x}) = t_{2n}(\mathbf{x})$ .

Il momento flettente  $m_{1n}(\mathbf{x})$  sull'elemento di giacitura definita dalla normale  $\mathbf{n}$  valutato in  $A(\mathbf{x})$  causata da una distorsione verticale unitaria  $\Delta u_{1n'}(\mathbf{x}') = 1$  sull'elemento di giacitura definita dalla normale  $\mathbf{n}'$  applicata in  $B(\mathbf{x}')$  è numericamente uguale allo sforzo tagliante  $t_{2n}(\mathbf{x})$  di un punto in  $B(\mathbf{x}')$  causato da una distorsione rotazionale di tipo flessionale unitaria  $\Delta \phi_{2n}(\mathbf{x}) = 1$  applicata in  $A(\mathbf{x})$ :

$$m_{1n}(\mathbf{x}) = t_{2n}(\mathbf{x}) \quad (1.2.63)$$

### 1.3 Le Identità di Somigliana.

Le Soluzioni fondamentali vengono utilizzate nel B.E.M. nell'Identità di Somigliana (forme di integrali al contorno) e rappresentano la risposta ad azioni meccaniche e distorcenti concentrate.

Le Identità di Somigliana (I.S.) attraverso l'impiego delle Soluzioni Fondamentali, esprimono gli spostamenti (spostamenti, rotazioni flessionale e torsionali)  $\mathbf{u}$ , gli sforzi (taglio, momento flettente e momento torcente)  $\mathbf{t}$  su un elemento di normale  $\mathbf{n}$  e gli sforzi  $\mathbf{q}$  agenti sull'elemento infinitesimo di spessore  $\mathbf{h}$ .

Se si prova ad immaginare una distribuzione di cause, forze, coppie, distorsioni verticali e flessionali, tutte distribuite, agenti su una linea, si possono valutare spostamenti, tazioni in  $\mathbf{x}$  utilizzando le Identità di Somigliana.

$$u_1(x) = \int_{\Gamma_1} G_{uu}(x, /; x', /) f(x') d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} G_{ut}(x, /; x', n') (-u_n(x')) d\Gamma_2 + u^1(x) \quad (1.3.1)$$

$$u^1(x) = \int_{\Gamma_2} G_{uu}(x, /; x', /) \bar{f}(x') d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_1} G_{ut}(x, /; x', n') (-\bar{u}_n(x')) d\Gamma_1 \quad \text{su } \Omega \quad (1.3.1 \text{ a})$$

$$t_2(x) = \int_{\Gamma_1} G_{tu}(x, n; x', /) f(x') d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} G_{tt}(x, n; x', n') (-u_n(x')) d\Gamma_2 + t_n^1(x) \quad (1.3.2)$$

$$t_n^1(x) = \int_{\Gamma_2} G_{tu}(x, n; x', /) \bar{f}(x') d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_1} G_{tt}(x, n; x', n') (-\bar{u}_n(x')) d\Gamma_1 \quad \text{su } \Omega \quad (1.3.2 \text{ a})$$

La prima Identità di Somigliana (1.3.1) dà spostamenti, la seconda Identità di Somigliana (1.3.2) dà trazioni, tutte e due le equazioni vengono utilizzate per la determinazione del BEM simmetrico.



Quando la distribuzione della causa agisce lungo una linea che non contiene il punto effetto (Fig. 1.3.1) non nascono singolarità ( $r \neq 0$ ).

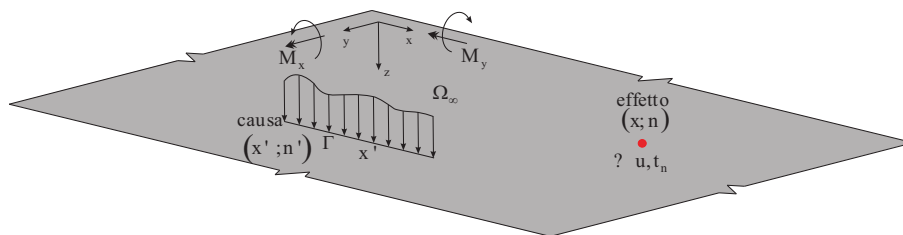


Fig. 1.3.1: Distribuzione della causa che agisce lungo una linea che non contiene il punto effetto

Quando il punto effetto giace lungo la linea (Fig. 1.3.2) dove è definita la causa, nasce la singolarità, in questo caso la (1.3.1) e la (1.3.2) diventano:

$$u^I(x) = \int_{\Gamma_2} G_{uu}(x, /; x', /) \bar{f}(x') d\Gamma_2 + \oint_{\Gamma_1} G_{ut}(x, /; x', n') (-\bar{u}_n(x')) d\Gamma_1 + \frac{1}{2} (-\bar{u}_n(x')) \quad \text{su } \Gamma \quad (1.3.3)$$

$$t_n^I(x) = \oint_{\Gamma_2} G_{tu}(x, n; x', /) \bar{f}_2(x') d\Gamma_2 + \frac{1}{2} \bar{f}_2(x') + \int_{\Gamma_1} G_{tt}(x, n; x', n') (-\bar{u}_n(x')) d\Gamma_1 \quad \text{su } \Gamma \quad (1.3.4)$$

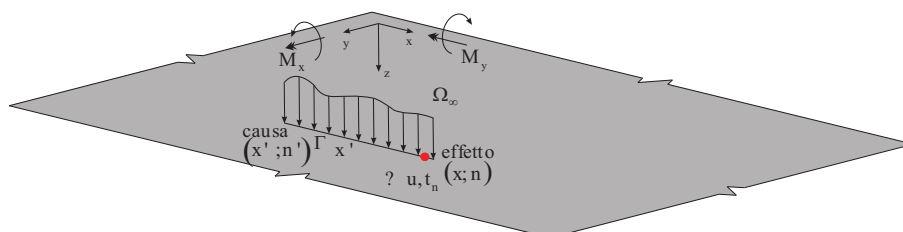


Fig. 1.3.2: Distribuzione di forze e punto effetto che giace lungo la linea

Le quantità  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{q}$ , trattandosi di piastre, sono grandezze vettoriali, infatti:

$$\mathbf{u} = \left| \mathbf{u} \quad \varphi_n \quad \varphi_{sn} \right|^T \quad (1.3.5)$$

$$\mathbf{t} = \left| \mathbf{t}_n \quad \mathbf{m}_n \quad \mathbf{m}_{sn} \right|^T \quad (1.3.6)$$

$$\mathbf{q} = \left| \mathbf{t}_x \quad \mathbf{t}_y \quad \mathbf{m}_x \quad \mathbf{m}_y \quad \mathbf{m}_{xy} \quad \mathbf{m}_{yx} \right|^T \quad (1.3.7)$$

Esse vengono espresse in funzione di:

forze stratificate assegnate  $\bar{\mathbf{f}}$  sul contorno  $\Gamma_2$

forze stratificate incognite  $\mathbf{f}$  sul contorno  $\Gamma_1$

distorsioni generalizzate assegnate  $(-\bar{\mathbf{u}})$  sul contorno  $\Gamma_1$

distorsioni generalizzate incognite  $(-\mathbf{u})$  sul contorno  $\Gamma_2$

forze di volume assegnate  $\bar{\mathbf{p}}$  sul dominio  $\Omega$

variazioni termiche assegnate  $\bar{\vartheta}$  sul dominio  $\Omega$

Le quantità  $\bar{\mathbf{f}}$ ,  $\mathbf{f}$ ,  $\bar{\mathbf{u}}$  e  $\mathbf{u}$ , trattandosi di piastre, sono anch'esse grandezze vettoriali, infatti:

$$\bar{\mathbf{f}} = \left| \bar{\mathbf{f}} \quad \bar{\mathbf{c}}_n \quad \bar{\mathbf{c}}_{sn} \right|^T \quad (1.3.8)$$

$$\mathbf{f} = \left| \mathbf{f} \quad \mathbf{c}_n \quad \mathbf{c}_{sn} \right|^T \quad (1.3.9)$$

$$\bar{\mathbf{u}} = \left| \bar{\mathbf{u}} \quad \bar{\varphi}_n \quad \bar{\varphi}_{sn} \right|^T \quad (1.3.10)$$

$$\mathbf{u} = \left| \mathbf{u} \quad \varphi_n \quad \varphi_{sn} \right|^T \quad (1.3.11)$$

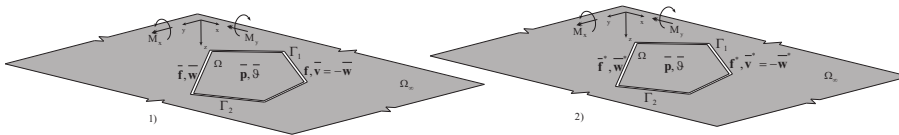


Fig.1.3.3 a) Sistema materiale (1) con azioni esterne effettive, b) Sistema materiale (2) con azioni esterne fittizie.

Per determinare la prima Identità di Somigliana relativa allo spostamento (rotazione flessionale e torsionale)  $\mathbf{u}$  si considerino i due sistemi materiali (1) ed (2) di Fig.(1.3.3) e si facciano le seguenti posizioni riguardo al sistema materiale (2):

$$\bar{\mathbf{p}}^*(\mathbf{x}') = \mathbf{I} \Delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.3.12)$$

$$\bar{\vartheta}^*(\mathbf{x}') = 0 \quad (1.3.13)$$

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}') = \mathbf{G}_{uu}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', /) \quad (1.3.14)$$

$$\mathbf{t}^*(\mathbf{x}', \mathbf{n}') = \mathbf{G}_{tu}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', /) \quad (1.3.15)$$

$$\mathbf{q}^*(\mathbf{x}') = \mathbf{G}_{qu}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', /) \quad (1.3.16)$$

dove, nel caso in esame  $\mathbf{u}^*$ ,  $\mathbf{t}^*$  e  $\mathbf{q}^*$  rappresentano Soluzioni Fondamentali dovute a sola forza concentrata.

Sostituendo nella (1.2.17) le eq.ni (1.3.12-16) si ottiene:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \Delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\Omega + \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{tu}^T(\mathbf{x}', \mathbf{n}'; \mathbf{x}, /) \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}') d\Gamma_1 + \\ & + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{tu}^T(\mathbf{x}', \mathbf{n}'; \mathbf{x}, /) \mathbf{u}(\mathbf{x}') d\Gamma_2 = \\ & \int_{\Omega} \mathbf{G}_{uu}^T(\mathbf{x}', /; \mathbf{x}, /) \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}') d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{qu}^T(\mathbf{x}', /; \mathbf{x}, /) \bar{\vartheta}(\mathbf{x}') d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{uu}^T(\mathbf{x}', /; \mathbf{x}, /) \mathbf{f}(\mathbf{x}') d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{uu}^T(\mathbf{x}', /; \mathbf{x}, /) \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}') d\Gamma_2 \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

La (1.3.17) per la proprietà di simmetria della matrice  $\mathbf{G}$  delle Soluzioni Fondamentali e per le proprietà della  $\Delta$  di Dirac, si può scrivere come segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = & \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{uu}(\mathbf{x}', /; \mathbf{x}, /) \mathbf{f}(\mathbf{x}') d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{ut}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', \mathbf{n}') (-\mathbf{u}(\mathbf{x}')) d\Gamma_2 + \\ & + \mathbf{u}^1(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1.3.18)$$

dove:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^l(\mathbf{x}') = & \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{ut}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', \mathbf{n}') (-\bar{u}(\mathbf{x}')) d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{uu}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', /) \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}') d\Gamma_2 + \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{uu}(\mathbf{x}', /; \mathbf{x}, /) \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}') d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{uq}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', /) \bar{\vartheta}(\mathbf{x}') d\Omega \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

Per la determinazione della terza Identità di Somigliana, si pone:

$$\bar{\mathbf{p}}^*(\mathbf{x}') = 0 \quad (1.3.20)$$

$$\bar{\vartheta}^*(\mathbf{x}') = \mathbf{I} \Delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.3.21)$$

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}') = \mathbf{G}_{uq}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', /) \quad (1.3.22)$$

$$\mathbf{t}^*(\mathbf{x}') = \mathbf{G}_{tq}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', /) \quad (1.3.23)$$

$$\mathbf{q}^*(\mathbf{x}') = \mathbf{G}_{qq}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', /) \quad (1.3.24)$$

dove, nel caso in esame  $\mathbf{u}^*$ ,  $\mathbf{t}^*$  e  $\mathbf{q}^*$  rappresentano Soluzioni Fondamentali dovute a sola distorsione volumetrica concentrata.

Sostituendo nella (1.2.39) le eq.ni (1.3.20-24) si ottiene:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{q}(\mathbf{x}) \Delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\Omega + \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{tq}^T(\mathbf{x}', \mathbf{n}'; \mathbf{x}, /) \bar{u}(\mathbf{x}') d\Gamma_1 + \\ & + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{tq}^T(\mathbf{x}', \mathbf{n}'; \mathbf{x}, /) u(\mathbf{x}') d\Gamma_2 = \\ & \int_{\Omega} \mathbf{G}_{uq}^T(\mathbf{x}', /; \mathbf{x}, /) \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}') d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{qq}^T(\mathbf{x}', /; \mathbf{x}, /) \bar{\vartheta}(\mathbf{x}') d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{uq}^T(\mathbf{x}', /; \mathbf{x}, /) \mathbf{f}(\mathbf{x}') d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{uq}^T(\mathbf{x}', /; \mathbf{x}, /) \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}') d\Gamma_2 \end{aligned} \quad (1.3.25)$$

La (1.3.25) per la proprietà di simmetria della matrice  $\mathbf{G}$  delle Soluzioni Fondamentali e per le proprietà della  $\Delta$  di Dirac, si può scrivere come segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(\mathbf{x}) = & \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{qu}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', /) \mathbf{f}(\mathbf{x}') d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{qt}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', \mathbf{n}') (-u(\mathbf{x}')) d\Gamma_2 + \\ & + \mathbf{q}^l(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1.3.26)$$

dove:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^I(\mathbf{x}') = & \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{qt}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', \mathbf{n}') (-\bar{u}(\mathbf{x}')) d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{qu}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', /) \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}') d\Gamma_2 + \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{qu}(\mathbf{x}', /; \mathbf{x}, /) \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}') d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{qq}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', /) \bar{\vartheta}(\mathbf{x}') d\Omega \end{aligned} \quad (1.3.27)$$

Per la determinazione della seconda Identità di Somigliana, si pone:

$$\bar{\mathbf{p}}^*(\mathbf{x}') = 0 \quad (1.3.28)$$

$$\bar{\vartheta}^*(\mathbf{x}') = \mathbf{N}^T \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.3.29)$$

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}') = \mathbf{G}_{ut}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', \mathbf{n}') \quad (1.3.30)$$

$$\mathbf{t}^*(\mathbf{x}', \mathbf{n}') = \mathbf{G}_{tt}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', \mathbf{n}') \quad (1.3.31)$$

$$\mathbf{q}^*(\mathbf{x}') = \mathbf{G}_{qt}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', \mathbf{n}') \quad (1.3.32)$$

dove, nel caso in esame  $\mathbf{u}^*$ ,  $\mathbf{t}^*$  e  $\mathbf{q}^*$  rappresentano Soluzioni Fondamentali dovute a sola distorsione stratificata concentrata.

Sostituendo nella (1.2.61) le eq.ni (1.3.28-32) si ottiene:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{N} \mathbf{q}(\mathbf{x}) \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\Omega + \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{tt}^T(\mathbf{x}', \mathbf{n}'; \mathbf{x}, \mathbf{n}) \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}') d\Gamma_1 + \\ & + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{tt}^T(\mathbf{x}', \mathbf{n}'; \mathbf{x}, \mathbf{n}) u(\mathbf{x}') d\Gamma_2 = \\ & \int_{\Omega} \mathbf{G}_{ut}^T(\mathbf{x}', /; \mathbf{x}, \mathbf{n}) \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}') d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{qt}^T(\mathbf{x}', /; \mathbf{x}, \mathbf{n}) \bar{\vartheta}(\mathbf{x}') d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{ut}^T(\mathbf{x}', /; \mathbf{x}, \mathbf{n}) \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}') d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{ut}^T(\mathbf{x}', /; \mathbf{x}, \mathbf{n}) \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}') d\Gamma_2 \end{aligned} \quad (1.3.33)$$

La (1.3.33) per la proprietà di simmetria della matrice  $\mathbf{G}$  delle Soluzioni Fondamentali e per le proprietà della  $\Delta$  di Dirac, si può scrivere come segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = & \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{tu}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', /) \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}') d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{tt}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', \mathbf{n}') (-u(\mathbf{x}')) d\Gamma_2 + \\ & + \mathbf{t}^I(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (1.3.34)$$

dove:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^1(\mathbf{x}') = & \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{tt}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', \mathbf{n}') (-\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}')) d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{tw}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', /) \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}') d\Gamma_2 + \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{tw}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', /) \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}') d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{tq}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', /) \bar{\vartheta}(\mathbf{x}') d\Omega \end{aligned} \quad (1.3.35)$$

Le Identità di Somigliana (1.3.18), (1.3.26) e (1.3.34) rappresentano la risposta in tutti i punti del dominio illimitato a distribuzioni di azioni sul dominio o lungo linee. Data la natura del nucleo degli integrali, si possono verificare singolarità allorquando il punto dove è applicata la causa ed il punto dove è valutato l'effetto coincidono.

Sulla base di quanto è stato detto, nel caso in cui si vuole determinare la risposta spostamento su  $\Gamma_1$ , e con riferimento alla prima Identità di Somigliana (1.3.19), la quantità:

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{ut}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', \mathbf{n}') (-\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}')) d\Gamma_1 \quad (1.3.36)$$

presente nella (1.3.21) deve essere interpretata come Valore Principale di Cauchy (CPV), cioè:

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{ut}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', \mathbf{n}') (-\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}')) d\Gamma_1 = \oint_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{ut}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', \mathbf{n}') (-\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}')) d\Gamma_1 + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}') \quad (1.3.37)$$

Nel caso in cui si vuole determinare la risposta trazione su  $\Gamma_2$ , e con riferimento alla seconda Identità di Somigliana (1.3.35), la quantità:

$$\int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{tw}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', \mathbf{n}') \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}') d\Gamma_2 \quad (1.3.38)$$

presente nella (1.3.35) deve essere reinterpretata come Valore Principale di Cauchy (CPV), cioè:

$$\int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{tw}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', /) \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}') d\Gamma_2 = \oint_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{tw}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', /) \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}') d\Gamma_2 + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}') \quad (1.3.39)$$

Nelle (1.3.35) e (1.3.37) la quantità 1/2 rappresenta il termine libero associato al Valore Principale di Cauchy ed ha validità per contorni regolari.

La (1.3.17) e la (1.3.33) scritte rispettivamente su  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  in virtù della (1.3.35) e della (1.3.37) quindi diventano:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^I(\mathbf{x}) = & \oint_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{ut}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', \mathbf{n}') (-\bar{u}(\mathbf{x}')) d\Gamma_1 + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}} \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{uu}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', /) \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}') d\Gamma_2 + \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{uu}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', /) \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}') d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{uq}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', /) \bar{\vartheta}(\mathbf{x}') d\Omega \end{aligned} \quad (1.3.40)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^I(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = & \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{tt}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', \mathbf{n}') (-\bar{u}(\mathbf{x}')) d\Gamma_1 + \oint_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{tu}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', /) \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}') d\Gamma_2 + \\ & + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{f}} \int_{\Omega} \mathbf{G}_{tu}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', /) \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}') d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{tq}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', /) \bar{\vartheta}(\mathbf{x}') d\Omega \end{aligned} \quad (1.3.41)$$

Le equazioni integrali al contorno (1.3.18) insieme alle (1.3.40), (1.3.34) insieme alle (1.3.41) permettono di esprimere la risposta sul contorno  $\Gamma$  del solido di dominio  $\Omega$  sottoposto ad azioni note ed incognite.

Ricordando le posizioni (1.3.5) e (1.3.9) la prima Identità di Somigliana (1.3.18) si può scomporre secondo le tre componenti dello spostamento  $\mathbf{u}$ , cioè  $u$ ,  $\varphi_n$  e  $\varphi_{sn}$ .

Lo spostamento verticale  $u$  è dato da:

$$\begin{aligned} u^I(\mathbf{x}) = & \int_{\Gamma_1} uu_{11}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', \mathbf{n}') f(\mathbf{x}') d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_1} uu_{12}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', \mathbf{n}') c_n(\mathbf{x}') d\Gamma_1 + \\ & + \int_{\Gamma_1} uu_{13}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', \mathbf{n}') c_{sn}(\mathbf{x}') d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} ut_{11}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', \mathbf{n}') (-u(\mathbf{x}')) d\Gamma_2 + \\ & + \int_{\Gamma_2} ut_{12}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', \mathbf{n}') (-\varphi_n(\mathbf{x}')) d\Gamma_2 + \\ & + \int_{\Gamma_2} ut_{13}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', \mathbf{n}') (-\varphi_{sn}(\mathbf{x}')) d\Gamma_2 + \bar{u}^{-1}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1.3.42)$$

La rotazione flessionale  $\varphi_n$  è data da:

$$\begin{aligned} \varphi_n(\mathbf{x}) = & \int_{\Gamma_1} uu_{21}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', \mathbf{n}') f(\mathbf{x}') d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_1} uu_{22}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', \mathbf{n}') c_n(\mathbf{x}') d\Gamma_1 + \\ & + \int_{\Gamma_1} uu_{23}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', \mathbf{n}') c_{sn}(\mathbf{x}') d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} ut_{21}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', \mathbf{n}') (-u(\mathbf{x}')) d\Gamma_2 + \\ & + \int_{\Gamma_2} ut_{22}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', \mathbf{n}') (-\varphi_n(\mathbf{x}')) d\Gamma_2 + \\ & + \int_{\Gamma_2} ut_{23}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', \mathbf{n}') (-\phi_{sn}(\mathbf{x}')) d\Gamma_2 + \varphi_n^I(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1.3.43)$$

La rotazione torsionale  $\varphi_{sn}$  è data da:

$$\begin{aligned} \varphi_{sn}(\mathbf{x}) = & \int_{\Gamma_1} uu_{31}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', \mathbf{n}') f(\mathbf{x}') d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_1} uu_{32}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', \mathbf{n}') c_n(\mathbf{x}') d\Gamma_1 + \\ & + \int_{\Gamma_1} uu_{33}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', \mathbf{n}') c_{sn}(\mathbf{x}') d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} ut_{31}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', \mathbf{n}') (-u(\mathbf{x}')) d\Gamma_2 + \\ & + \int_{\Gamma_2} ut_{32}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', \mathbf{n}') (-\varphi_n(\mathbf{x}')) d\Gamma_2 + \\ & + \int_{\Gamma_2} ut_{33}(\mathbf{x}, /; \mathbf{x}', \mathbf{n}') (-\phi_{sn}(\mathbf{x}')) d\Gamma_2 + \varphi_{sn}^I(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1.3.44)$$

Le eq.ni (1.3.42), (1.3.43) e (1.3.44) rappresentano quindi le componenti della prima Identità di Somigliana.

Ricordando la posizione (1.3.6) la seconda Identità di Somigliana (1.3.34) si può scomporre secondo le tre componenti del vettore degli sforzi  $t$ , cioè  $t_n$ ,  $m_n$  e  $m_{sn}$ . Il taglio  $t_n$  è dato da:

$$\begin{aligned} t_n(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = & \int_{\Gamma_1} tu_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', /) f(\mathbf{x}') d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_1} tu_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', /) c_n(\mathbf{x}') d\Gamma_1 + \\ & + \int_{\Gamma_1} tu_{13}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', /) c_{sn}(\mathbf{x}') d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} tt_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', \mathbf{n}') (-u(\mathbf{x}')) d\Gamma_2 + \\ & + \int_{\Gamma_2} tt_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', \mathbf{n}') (-\varphi_n(\mathbf{x}')) d\Gamma_2 + \\ & + \int_{\Gamma_2} tt_{13}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', \mathbf{n}') (-\phi_{sn}(\mathbf{x}')) d\Gamma_2 + \bar{t}_n^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (1.3.45)$$



Il momento  $m_n$  è dato dalla seguente equazione:

$$\begin{aligned}
m_n(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = & \int_{\Gamma_1} tu_{21}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', /) f(\mathbf{x}') d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_1} tu_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', /) c_n(\mathbf{x}') d\Gamma_1 + \\
& + \int_{\Gamma_1} tu_{23}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', /) c_{sn}(\mathbf{x}') d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} tt_{21}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', \mathbf{n}') (-u(\mathbf{x}')) d\Gamma_2 + \\
& + \int_{\Gamma_2} tt_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', \mathbf{n}') (-\phi_n(\mathbf{x}')) d\Gamma_2 + \\
& + \int_{\Gamma_2} tt_{23}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', \mathbf{n}') (-\phi_{sn}(\mathbf{x}')) d\Gamma_2 + \bar{m}_n^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{n})
\end{aligned} \tag{1.3.46}$$

Il momento  $m_{sn}$  è dato dalla seguente equazione:

$$\begin{aligned}
m_{sn}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = & \int_{\Gamma_1} tu_{31}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', /) f(\mathbf{x}') d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_1} tu_{32}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', /) c_n(\mathbf{x}') d\Gamma_1 + \\
& + \int_{\Gamma_1} tu_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', /) c_{sn}(\mathbf{x}') d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} tt_{31}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', \mathbf{n}') (-u(\mathbf{x}')) d\Gamma_2 + \\
& + \int_{\Gamma_2} tt_{32}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', \mathbf{n}') (-\phi_n(\mathbf{x}')) d\Gamma_2 + \\
& + \int_{\Gamma_2} tt_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', \mathbf{n}') (-\phi_{sn}(\mathbf{x}')) d\Gamma_2 + \bar{m}_{sn}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{n})
\end{aligned} \tag{1.3.47}$$

#### 1.4 La discretizzazione e l'introduzione delle grandezze nodali.

Al fine di ottenere la risposta del solido  $S$  con l'impiego di operatori algebrici è necessario operare una discretizzazione di  $\Gamma$  in elementi di contorno. Sia  $B$  il solido e  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$  il suo contorno poligonale.

Si introduca un sistema cartesiano ortogonale  $(0, x, y, z)$  a cui possono essere riferite le forze stratificate agenti sui nodi del contorno  $\Gamma_1$  e gli spostamenti dei nodi del contorno  $\Gamma_2$ .

Si introducano su ciascun elemento del contorno  $\Gamma_1$  le funzioni di forma  $\Psi(x)$  al fine di modellare le forze. La loro distribuzione quindi può essere ottenuta attraverso la relazione:

$$\mathbf{f}(x) = \Psi(x)\mathbf{F} \quad (1.4.1)$$

ovvero in virtù della (1.3.3):

$$f(x) = \Psi(x)F \quad (1.4.2)$$

$$c_n(x) = \Psi(x)C_n \quad (1.4.3)$$

$$c_{sn}(x) = \Psi(x)C_{sn} \quad (1.4.4)$$

Si introducano su ciascun elemento del contorno  $\Gamma_2$  le funzioni di forma  $\Psi(x)$  al fine di modellare gli spostamenti. La loro distribuzione quindi può essere ottenuta attraverso la relazione:

$$\mathbf{u}(x) = \Psi(x)\mathbf{U} \quad (1.4.5)$$

ovvero in virtù della (1.3.5):

$$u(x) = \Psi(x)U \quad (1.4.6)$$

$$\phi_n(x) = \Psi(x)\Phi_n \quad (1.4.7)$$

$$\phi_{sn}(x) = \Psi(x)\Phi_{sn} \quad (1.4.8)$$

Avvenuta la discretizzazione del contorno e, con l'introduzione delle funzioni di forma, la modellazione delle cause, si analizzano, alla luce di queste considerazioni, le Identità di Somigliana.

Nelle relazioni successive si introduce l'apice nei termini che sono riconducibili a grandezze che definiscono la causa: funzioni di forma, integrali, differenziali.

#### 1.4.1 Prima Identità di Somigliana.

Se la risposta viene valutata sul contorno  $\Gamma^+$ , ovvero sul contorno del dominio complementare  $\Omega_\infty \setminus \Omega$ , attraverso la (1.4.1) e la (1.4.5) la prima componente della prima Identità di Somigliana (1.3.36) si può scrivere:

$$\begin{aligned} u^+ = & \left( \int_{\Gamma_1'} uu_{11} \Psi' d\Gamma_1' \right) \bar{F} + \left( \int_{\Gamma_1'} uu_{12} \Psi' d\Gamma_1' \right) \bar{C}_n + \\ & + \left( \int_{\Gamma_1'} uu_{13} \Psi' d\Gamma_1' \right) \bar{C}_{sn} + \left( \int_{\Gamma_2'} ut_{11} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\bar{U}) + \\ & + \left( \int_{\Gamma_2'} ut_{12} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\bar{\Phi}_n) + \left( \int_{\Gamma_2'} ut_{13} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\bar{\Phi}_{sn}) + \bar{u}^+ \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

dove:

$$\begin{aligned} \bar{u}^+ = & \left( \int_{\Gamma_1'} uu_{11} \Psi' d\Gamma_1' \right) \bar{F} + \left( \int_{\Gamma_1'} uu_{12} \Psi' d\Gamma_1' \right) \bar{C}_n + \\ & + \left( \int_{\Gamma_1'} uu_{13} \Psi' d\Gamma_1' \right) \bar{C}_{sn} + \frac{1}{2} \Psi' (-\bar{U}) + \\ & + \left( \int_{\Gamma_2'} ut_{11} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\bar{U}) + \left( \int_{\Gamma_2'} ut_{12} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\bar{\Phi}_n) + \\ & + \left( \int_{\Gamma_2'} ut_{13} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\bar{\Phi}_{sn}) + \int_{\Omega'} uu_{11} \bar{p} d\Omega' \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

Attraverso la (1.4.1) e la (1.4.5) la seconda componente della prima Identità di Somigliana (1.3.37) si può scrivere:

$$\begin{aligned}
 \Phi_n^+ &= \left( \int_{\Gamma_1'} \mathbf{u} \mathbf{u}_{21} \Psi' d\Gamma_1' \right) \mathbf{F} + \left( \int_{\Gamma_1'} \mathbf{u} \mathbf{u}_{22} \Psi' d\Gamma_1' \right) \mathbf{C}_n + \\
 &+ \left( \int_{\Gamma_1'} \mathbf{u} \mathbf{u}_{23} \Psi' d\Gamma_1' \right) \mathbf{C}_{sn} + \left( \int_{\Gamma_2'} \mathbf{u} \mathbf{t}_{21} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\mathbf{U}) + \\
 &+ \left( \int_{\Gamma_2'} \mathbf{u} \mathbf{t}_{22} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\Phi_n) + \left( \int_{\Gamma_2'} \mathbf{u} \mathbf{t}_{23} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\Phi_{sn}) + \bar{\Phi}_n^+
 \end{aligned} \tag{1.4.11}$$

dove:

$$\begin{aligned}
 \bar{\Phi}_n^+ &= \left( \int_{\Gamma_1'} \mathbf{u} \mathbf{u}_{21} \Psi' d\Gamma_1' \right) \bar{\mathbf{F}} + \left( \int_{\Gamma_1'} \mathbf{u} \mathbf{u}_{22} \Psi' d\Gamma_1' \right) \bar{\mathbf{C}}_n + \\
 &+ \left( \int_{\Gamma_1'} \mathbf{u} \mathbf{u}_{23} \Psi' d\Gamma_1' \right) \bar{\mathbf{C}}_{sn} + \frac{1}{2} \Psi' (-\bar{\Phi}_n) + \\
 &+ \left( \int_{\Gamma_2'} \mathbf{u} \mathbf{t}_{21} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\bar{\mathbf{U}}) + \left( \int_{\Gamma_2'} \mathbf{u} \mathbf{t}_{22} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\bar{\Phi}_n) + \\
 &+ \left( \int_{\Gamma_2'} \mathbf{u} \mathbf{t}_{23} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\bar{\Phi}_{sn}) + \int_{\Omega'} \mathbf{u} \mathbf{u}_{12} \bar{p} d\Omega'
 \end{aligned} \tag{1.4.12}$$

Attraverso la (1.4.1) e la (1.4.5) la terza componente della prima Identità di Somigliana (1.3.38) si può scrivere:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{sn}^+ &= \left( \int_{\Gamma_1'} \mathbf{u} \mathbf{u}_{31} \Psi' d\Gamma_1' \right) \mathbf{F} + \left( \int_{\Gamma_1'} \mathbf{u} \mathbf{u}_{32} \Psi' d\Gamma_1' \right) \mathbf{C}_n + \\
 &+ \left( \int_{\Gamma_1'} \mathbf{u} \mathbf{u}_{33} \Psi' d\Gamma_1' \right) \mathbf{C}_{sn} + \left( \int_{\Gamma_2'} \mathbf{u} \mathbf{t}_{31} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\mathbf{U}) + \\
 &+ \left( \int_{\Gamma_2'} \mathbf{u} \mathbf{t}_{32} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\Phi_n) + \left( \int_{\Gamma_2'} \mathbf{u} \mathbf{t}_{33} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\Phi_{sn}) + \bar{\Phi}_{sn}^+
 \end{aligned} \tag{1.4.13}$$

dove:

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}_{sn}^+ &= \left( \int_{\Gamma_1'} uu_{31} \Psi' d\Gamma_1' \right) \bar{F} + \left( \int_{\Gamma_1'} uu_{32} \Psi' d\Gamma_1' \right) \bar{C}_n + \\
&+ \left( \int_{\Gamma_1'} uu_{33} \Psi' d\Gamma_1' \right) \bar{C}_{sn} + \frac{1}{2} \Psi' (-\bar{\Phi}_{sn}) + \\
&+ \left( \int_{\Gamma_2'} ut_{31} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\bar{U}) + \left( \int_{\Gamma_2'} ut_{32} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\bar{\Phi}_n) + \\
&+ \left( \int_{\Gamma_2'} ut_{33} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\bar{\Phi}_{sn}) + \int_{\Omega'} uu_{13} \bar{p} d\Omega'
\end{aligned} \tag{1.4.14}$$

### 1.4.2 Seconda Identità di Somigliana.

Attraverso la (1.4.1) e la (1.4.5) la prima componente della Seconda Identità di Somigliana (1.4.41) si può scrivere:

$$\begin{aligned}
t_n^+ &= \left( \int_{\Gamma_1'} tu_{11} \Psi' d\Gamma_1' \right) F + \left( \int_{\Gamma_1'} tu_{12} \Psi' d\Gamma_1' \right) C_n + \\
&+ \left( \int_{\Gamma_1'} tu_{13} \Psi' d\Gamma_1' \right) C_{sn} + \left( \int_{\Gamma_2'} tt_{11} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-U) + \\
&+ \left( \int_{\Gamma_2'} tt_{12} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\bar{\Phi}_n) + \left( \int_{\Gamma_2'} tt_{13} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\bar{\Phi}_{sn}) + \bar{t}_n^+
\end{aligned} \tag{1.4.15}$$

dove:

$$\begin{aligned}
\bar{t}_n^+ &= \left( \int_{\Gamma_1'} tu_{11} \Psi' d\Gamma_1' \right) \bar{F} + \left( \int_{\Gamma_1'} tu_{12} \Psi' d\Gamma_1' \right) \bar{C}_n + \\
&+ \left( \int_{\Gamma_1'} tu_{13} \Psi' d\Gamma_1' \right) \bar{C}_{sn} - \frac{1}{2} \Psi' \bar{F} + \\
&+ \left( \int_{\Gamma_2'} tt_{11} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\bar{U}) + \left( \int_{\Gamma_2'} tt_{12} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\bar{\Phi}_n) + \\
&+ \left( \int_{\Gamma_2'} tt_{13} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\bar{\Phi}_{sn}) + \int_{\Omega'} tu_{11} \bar{p} d\Omega'
\end{aligned} \tag{1.4.16}$$

Attraverso la (1.4.1) e la (1.4.5) la seconda componente della Seconda Identità di Somigliana (1.3.40) si può scrivere:

$$\begin{aligned}
 m_n^+ &= \left( \int_{\Gamma_1} tu_{21} \Psi' d\Gamma_1' \right) F + \left( \int_{\Gamma_1} tu_{22} \Psi' d\Gamma_1' \right) C_n + \\
 &+ \left( \int_{\Gamma_1} tu_{23} \Psi' d\Gamma_1' \right) C_{sn} + \left( \int_{\Gamma_2} tt_{21} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-U) + \\
 &+ \left( \int_{\Gamma_2} tt_{22} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\Phi_n) + \left( \int_{\Gamma_2} tt_{23} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\Phi_{sn}) + \bar{m}_n^+
 \end{aligned} \tag{1.4.17}$$

dove:

$$\begin{aligned}
 \bar{m}_n^+ &= \left( \int_{\Gamma_1} tu_{21} \Psi' d\Gamma_1' \right) \bar{F} + \left( \int_{\Gamma_1} tu_{22} \Psi' d\Gamma_1' \right) \bar{C}_n + \\
 &+ \left( \int_{\Gamma_1} tu_{23} \Psi' d\Gamma_1' \right) \bar{C}_{sn} - \frac{1}{2} \Psi' \bar{C}_n + \\
 &+ \left( \int_{\Gamma_2} tt_{21} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\bar{U}) + \left( \int_{\Gamma_2} tt_{22} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\bar{\Phi}_n) + \\
 &+ \left( \int_{\Gamma_2} tt_{23} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\bar{\Phi}_{sn}) + \int_{\Omega} tu_{21} \bar{p} d\Omega'
 \end{aligned} \tag{1.4.18}$$

Attraverso la (1.4.1) e la (1.4.5) la terza componente della Seconda Identità di Somigliana (1.3.41) si può scrivere:

$$\begin{aligned}
 m_{sn}^+ &= \left( \int_{\Gamma_1} tu_{31} \Psi' d\Gamma_1' \right) F + \left( \int_{\Gamma_1} tu_{32} \Psi' d\Gamma_1' \right) C_n + \\
 &+ \left( \int_{\Gamma_1} tu_{33} \Psi' d\Gamma_1' \right) C_{sn} + \left( \int_{\Gamma_2} tt_{31} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-U) + \\
 &+ \left( \int_{\Gamma_2} tt_{32} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\Phi_n) + \left( \int_{\Gamma_2} tt_{33} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\Phi_{sn}) + \bar{m}_{sn}^+
 \end{aligned} \tag{1.4.19}$$

dove:

$$\begin{aligned}
\bar{m}_{sn}^+ &= \left( \int_{\Gamma_1'} tu_{31} \Psi' d\Gamma_1' \right) \bar{F} + \left( \int_{\Gamma_1'} tu_{32} \Psi' d\Gamma_1' \right) \bar{C}_n + \\
&+ \left( \int_{\Gamma_1'} tu_{33} \Psi' d\Gamma_1' \right) \bar{C}_{sn} - \frac{1}{2} \Psi' \bar{C}_{sn} + \\
&+ \left( \int_{\Gamma_2'} tt_{31} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\bar{U}) + \left( \int_{\Gamma_2'} tt_{32} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\bar{\Phi}_n) + \\
&+ \left( \int_{\Gamma_2'} tt_{33} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\bar{\Phi}_{sn}) + \int_{\Omega'} tu_{31} \bar{p} d\Omega'
\end{aligned} \tag{1.4.20}$$

## Capitolo 2

### La matrice caratteristica $\mathbf{B}$ .

Scopo di questo capitolo è quello di introdurre una matrice  $\mathbf{B}$  associata a tutte le grandezze di contorno, note ed incognite. Viene così attuata una distinzione tra coefficienti della matrice del sistema risolvete e tra i coefficienti che definiscono il vettore di carico associato alle grandezze di contorno (forze e cedimenti assegnati).

L'eventuale presenza di carichi quali azioni di dominio, siano esse forze di massa o distorsioni volumetriche, impone la determinazione di vettori, anch'essi caratteristici del solido in esame, che rappresentano i relativi termini di carico.

La determinazione della matrice caratteristica  $\mathbf{B}$  e dei vettori delle azioni di dominio verrà effettuata attraverso una riformulazione del problema elastico relativamente al dominio illimitato. Si analizzeranno gli aspetti computazionali delle matrici e dei vettori generati.

I termini di carico dovuti a forze distribuite sul contorno ed ad eventuali cedimenti vincolari così come i coefficienti della matrice del sistema risolvete saranno generati a partire dalla matrice caratteristica (o capostipite)  $\mathbf{B}$ .

#### 2.1 Generazione della matrice $\mathbf{B}$

Si consideri un solido omogeneo  $\mathbf{B}$  di dominio  $\Omega$  e contorno  $\Gamma$  riferito ad un sistema di riferimento cartesiano  $(0, x, y, z)$ . Il solido sia soggetto a spostamenti imposti  $\bar{\mathbf{u}}$  sulla porzione di contorno vincolato  $\Gamma_1$ , a forze note  $\bar{\mathbf{f}}$  sulla porzione di contorno  $\Gamma_2$ , a forze di volume  $\bar{\mathbf{p}}$  e distorsioni volumetriche  $\bar{\vartheta}$  in  $\Omega$ .

Nell'ipotesi di spostamenti infinitesimi, la risposta elastica alle azioni esterne note può essere ottenuta in termini di spostamenti  $\mathbf{u}$  sul contorno  $\Gamma_2$ , di forze  $\mathbf{f}$  sul



contorno  $\Gamma_1$ , di spostamenti  $\mathbf{u}$ , sforzi  $\mathbf{q}$  e deformazioni  $\boldsymbol{\varepsilon}$  in  $\Omega$ , utilizzando il Metodo Simmetrico alla Galerkin degli Elementi di Contorno (SGBEM).

Per trovare la soluzione del problema di analisi riguardante le grandezze  $\mathbf{u}$ ,  $\bar{\mathbf{u}}$ ,  $\mathbf{f}$ ,  $\bar{\mathbf{f}}$  (parte note, parte incognite) definite sul contorno si segue una particolare strategia che conduce alla scrittura di una matrice caratteristica  $\mathbf{B}$ .

Si immagini di immergere il solido  $S$ , di date caratteristiche elastiche  $(\mathbf{E}, \nu)$  e di spessore  $h$ , nel dominio illimitato  $\Omega_\infty$  avente le stesse caratteristiche.

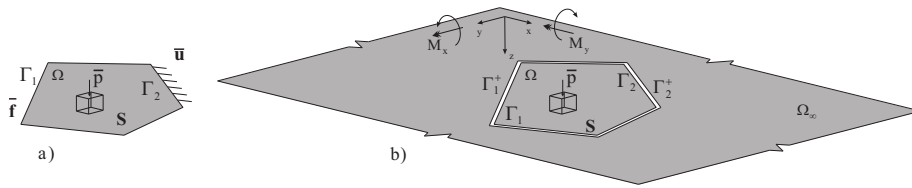


Fig. 2.1.1 a) Solido in esame, b) Solido immerso nel dominio illimitato  $\Omega_\infty$ .

Il contorno del solido  $S$  può essere pensato sia come contorno  $\Gamma$  di  $\Omega$  che come contorno  $\Gamma^+$  del dominio complementare  $\Omega_\infty \setminus \Omega$ .

È importante evidenziare che in questa fase non vengono in alcun modo considerate le reali condizioni imposte sul contorno del solido  $\Gamma$ . Ciò si traduce nella mancata distinzione dei tipi di contorno presenti in un problema di analisi e nella conseguente arbitraria definizione delle grandezze di contorno  $(\mathbf{f}, -\mathbf{u})$ . In aggiunta sono agenti sul solido le azioni di dominio  $\bar{\mathbf{p}}, \bar{\boldsymbol{\vartheta}}$ .

È noto che la risposta in termini di spostamenti  $\mathbf{u}$  e trazioni  $\mathbf{t}$  in un punto qualsiasi del dominio  $\Omega_\infty$  è data dalle Identità di Somigliana (1.3.18) (1.3.34), ovvero:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}[\mathbf{f}] + \mathbf{u}[-\mathbf{u}] + \hat{\mathbf{u}}[\bar{\mathbf{p}}] = \mathbf{0} \quad (2.1.1)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}[\mathbf{f}] + \mathbf{t}[-\mathbf{u}] + \hat{\mathbf{t}}[\bar{\mathbf{p}}] = \mathbf{0} \quad (2.1.2)$$

dove sono valide le seguenti posizioni:

$$\mathbf{u}[\mathbf{f}] = \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{uu} \mathbf{f} d\Gamma \quad (2.1.3)$$

$$\mathbf{u}_{pV}[-\mathbf{u}] = \oint_{\Gamma} \mathbf{G}_{ut} (-\mathbf{u}) d\Gamma \quad (2.1.4)$$

$$\hat{\mathbf{u}}[\bar{p}] = \int_{\Omega} \mathbf{G}_{uu} \bar{p} d\Omega \quad (2.1.5)$$

$$\mathbf{t}_{pV}[\mathbf{f}] = \oint_{\Gamma} \mathbf{G}_{tu} \mathbf{f} d\Gamma \quad (2.1.6)$$

$$\mathbf{t}[\mathbf{u}] = \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{tt} (-\mathbf{u}) d\Gamma \quad (2.1.7)$$

$$\hat{\mathbf{t}}[\bar{p}] = \int_{\Omega} \mathbf{G}_{tu} \bar{p} d\Omega \quad (2.1.8)$$

Nelle precedenti relazioni le quantità sopra segnate sono note.

Se la risposta è valutata sul contorno  $\Gamma^+$ , ovvero sul contorno del dominio complementare  $\Omega_{\infty} \setminus \Omega$  le Identità di Somigliana (2.1.1-2) si particularizzano nelle seguenti espressioni:

$$\mathbf{u}^+ = \mathbf{u}[\mathbf{f}] + \mathbf{u}_{pV}[\Delta\mathbf{u}] - \frac{1}{2}\mathbf{u} + \hat{\mathbf{u}}[\bar{p}] = \mathbf{0} \quad (2.1.9)$$

$$\mathbf{t}^+ = \mathbf{t}_{pV}[\mathbf{f}] - \frac{1}{2}\mathbf{f} + \mathbf{t}[\Delta\mathbf{u}] + \hat{\mathbf{t}}[\bar{p}] = \mathbf{0} \quad (2.1.10)$$

In queste espressioni le quantità con apice PV stanno ad indicare che gli integrali sono calcolati come Valore Principale di Cauchy, mentre i termini preceduti da 1/2 rappresentano i termini liberi in presenza di contorno liscio. Sono valide le seguenti posizioni:

$$\mathbf{u}_{pV}[-\mathbf{u}] = \oint_{\Gamma} \mathbf{G}_{ut} (-\mathbf{u}) d\Gamma \quad (2.1.11)$$

$$\mathbf{t}_{pV}[\mathbf{f}] = \oint_{\Gamma} \mathbf{G}_{tu} \mathbf{f} d\Gamma \quad (2.1.12)$$

Imponendo le condizioni puntuali sul contorno  $\Gamma^+$

$$\mathbf{u}^+ = \mathbf{0} \quad \text{su} \quad \Gamma_1^+ \quad (2.1.13)$$

$$\mathbf{t}^+ = \mathbf{0} \quad \text{su} \quad \Gamma_2^+ \quad (2.1.14)$$

si ha che a soluzione ottenuta, il dominio complementare  $\Omega_\infty \setminus \Omega$  risulta non deformato e non soggetto a stato di sforzo. Si ha pertanto

$$\mathbf{u}^+ = \mathbf{u}[\mathbf{f}] + \mathbf{u}_{pV}[-\mathbf{u}] - \frac{1}{2}\mathbf{u} + \hat{\mathbf{u}}[\bar{\mathbf{p}}] = \mathbf{0} \quad (2.1.15)$$

$$\mathbf{t}^+ = \mathbf{t}_{pV}[\mathbf{f}] - \frac{1}{2}\mathbf{f} + \mathbf{t}[-\mathbf{u}] + \hat{\mathbf{t}}[\bar{\mathbf{p}}] = \mathbf{0} \quad (2.1.16)$$

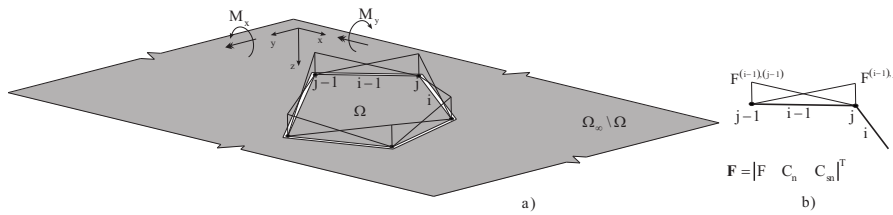


Fig. 2.1.2 Modellazione delle forze di contorno: a) Intera struttura, b) Particolare.

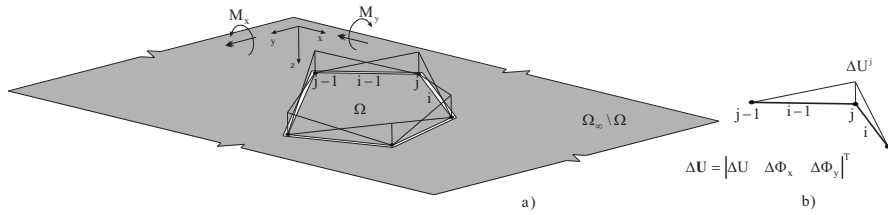


Fig. 2.1.3 Modellazione delle distorsioni di contorno: a) Intera struttura, b) Particolare

dove  $\mathbf{f}$  ed  $(-\mathbf{u}_n)$  sono vettori di funzioni incognite definite sull'intero contorno del solido.

Si esegua la discretizzazione del contorno  $\Gamma$  in elementi di contorno e si introducano delle appropriate funzioni di forma  $\Psi$  per modellare le forze stratificate e le distorsioni stratificate Fig. (2.1.2) e Fig. (2.1.3):

$$\mathbf{f} = \Psi \mathbf{F} \quad (2.1.17)$$

$$\mathbf{u} = \Psi \mathbf{U} \quad (2.1.18)$$

dove  $\mathbf{F}$  e  $\Delta \mathbf{U}$  sono vettori di valori nodali incogniti.

Il vettore delle forze  $\mathbf{F}$  associato agli estremi di ciascun elemento di contorno  $i$  è definito attraverso sei componenti che modellano su di esso le forze  $f$  sullo stesso contorno:

$$\mathbf{F}^i = \left| \mathbf{F}^{i,j} \quad \mathbf{F}^{i,(j+1)} \quad \mathbf{C}_n^{i,j} \quad \mathbf{C}_n^{i,(j+1)} \quad \mathbf{C}_{sn}^{i,j} \quad \mathbf{C}_{sn}^{i,(j+1)} \right|^T \quad (2.1.19)$$

Il vettore delle distorsioni ( $\Delta \mathbf{U}$ ) è definito nel nodo  $j$  attraverso tre componenti che modellano sugli elementi di contorno adiacenti ad esso gli spostamenti puntuali  $\mathbf{u}$ :

$$\Delta \mathbf{U}^j = \left| \Delta U^j \quad \Delta \Phi_x^j \quad \Delta \Phi_y^j \right|^T \quad (2.1.20)$$

Se adesso si introduce la modellazione (2.1.17-18) nelle Identità di Somigliana (2.1.15-16) e si opera, in accordo con il metodo alla Galerkin la pesatura del sistema dei coefficienti utilizzando come funzioni di pesatura le stesse funzioni di forma della modellazione, si ottengono le seguenti equazioni scritte in forma pesata o generalizzata:

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{\Gamma^+} \Psi^T \mathbf{u}^+ d\Gamma^+}_{\mathbf{W}^+} &= \underbrace{\int_{\Gamma^+} \Psi^T \left[ \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{uu} \Psi^i d\Gamma \right] d\Gamma^+}_{\mathbf{A}_{uu}} \mathbf{F} + \\ &+ \underbrace{\int_{\Gamma^+} \Psi^T \left[ \oint_{\Gamma} \mathbf{G}_{ut} \Psi^i d\Gamma \right] d\Gamma^+}_{\mathbf{A}_{ut}} (-\mathbf{U}) + \frac{1}{2} \underbrace{\left[ \int_{\Gamma^+} \Psi^T \Psi d\Gamma^+ \right]}_{\mathbf{C}_{ut}} (-\mathbf{U}) + \\ &+ \underbrace{\int_{\Gamma^+} \Psi^T \left[ \int_{\Omega} \mathbf{G}_{uu} \bar{\mathbf{p}} d\Omega \right] d\Gamma^+}_{\hat{\mathbf{W}}_p} + \underbrace{\int_{\Gamma^+} \Psi^T \left[ \int_{\Omega} \mathbf{G}_{uq} \bar{\vartheta} d\Omega \right] d\Gamma^+}_{\hat{\mathbf{W}}_{\vartheta}} = 0 \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\int_{\Gamma^+} \Psi^T \mathbf{t}^+ d\Gamma^+}_{\mathbf{P}^+} &= \underbrace{\int_{\Gamma^+} \Psi^T [\oint_{\Gamma} \mathbf{G}_{tu} \Psi' d\Gamma]}_{\mathbf{A}_{tu}} \mathbf{F} + \\
 -\frac{1}{2} \underbrace{[\int_{\Gamma^+} \Psi^T \Psi d\Gamma^+]}_{\mathbf{C}_{tu}} \mathbf{F} &+ \underbrace{\int_{\Gamma^+} \Psi^T [\int_{\Gamma} \mathbf{G}_{tt} \Psi' d\Gamma]}_{\mathbf{A}_{tt}} d\Gamma^+ (-\mathbf{U}) + \\
 + \underbrace{\int_{\Gamma^+} \Psi^T [\int_{\Omega} \mathbf{G}_{tu} \bar{\mathbf{p}} d\Omega]}_{\hat{\mathbf{P}}_p} d\Gamma^+ &+ \underbrace{\int_{\Gamma^+} \Psi^T [\int_{\Omega} \mathbf{G}_{tq} \bar{\vartheta} d\Omega]}_{\hat{\mathbf{P}}_o} d\Gamma^+ = 0
 \end{aligned} \tag{2.1.22}$$

Queste equazioni scritte in forma compatta e con ovvio significato dei simboli diventano:

$$\mathbf{W}^+ = \mathbf{A}_{uu} \mathbf{F} + \mathbf{A}_{ut} (-\mathbf{U}) + \frac{1}{2} \mathbf{C}_{tu} (-\mathbf{U}) + \hat{\mathbf{W}}_p = \mathbf{0} \tag{2.1.23}$$

$$\mathbf{P}^+ = \mathbf{A}_{tu} \mathbf{F} + \mathbf{A}_{tt} (-\mathbf{U}) - \frac{1}{2} \mathbf{C}_{tu} \mathbf{F} + \hat{\mathbf{P}}_p = \mathbf{0} \tag{2.1.24}$$

dove:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}^+ \\ \mathbf{P}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{uu} & \mathbf{A}_{ut} + \mathbf{C}_{ut} \\ \mathbf{A}_{tu} - \mathbf{C}_{tu} & \mathbf{A}_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ -\mathbf{U} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{W}} \\ \hat{\mathbf{P}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{2.1.25}$$

o anche:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{C}) \mathbf{X} + \hat{\mathbf{L}} = \mathbf{0} \tag{2.1.26}$$

dove si è posto:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{uu} & \mathbf{A}_{ut} \\ \mathbf{A}_{tu} & \mathbf{A}_{tt} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_{ut} \\ -\mathbf{C}_{tu} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ -\mathbf{U} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{W}} \\ \hat{\mathbf{P}} \end{bmatrix} \tag{2.1.27 a-d}$$

La matrice del sistema risolvete  $\mathbf{B}$  è data dalla somma della matrice  $\mathbf{A}$  e della matrice  $\mathbf{C}$ .

La matrice  $\mathbf{A}$  è una matrice simmetrica costituita da quattro blocchi con una diversa struttura matematica e per essa sono valide le seguenti posizioni:

$$\mathbf{A}_{uu} = \mathbf{A}_{uu}^T \quad \mathbf{A}_{tu} = \mathbf{A}_{ut}^T \quad \mathbf{A}_{tt} = \mathbf{A}_{tt}^T \tag{2.1.28}$$

La matrice **C** contiene i termini liberi è una matrice diagonale a blocchi emissimmetrica e quindi per essa vale la proprietà:

$$\mathbf{C}_{uu} = \mathbf{C}_{ut}^T \quad (2.1.29)$$

Il primo blocco sulla diagonale principale della matrice **A** è costituito dalla matrice  $\mathbf{A}_{uu}$  la quale relaziona grandezze cinematiche (spostamenti pesati  $\mathbf{W}^+$ ) sul contorno  $\Gamma_1^+$  a grandezze meccaniche (forze **F**) valutati nei nodi dello stesso contorno  $\Gamma_1$ .

La matrice  $\mathbf{A}_{uu}$  è quadrata definita positiva e gode della seguente proprietà:

$$\mathbf{A}_{uu} = \mathbf{A}_{uu}^T \quad (2.1.30)$$

Per contorni regolari totalmente vincolati, le dimensioni della matrice  $\mathbf{A}_{uu}$  sono  $6p \times 6p$ , dove  $p$  rappresenta il numero dei nodi del contorno  $\Gamma_1$ .

Nel caso di piastra di Kirchhoff, la matrice  $\mathbf{A}_{uu}$ , in virtù delle eq.ni (A.2.2.14) - (A.2.2.16) si può così schematizzare:

$$\mathbf{A}_{uu} = \int_{\Gamma_1^+} \begin{vmatrix} \int_{\Gamma_1} uu_{11} \Psi' d\Gamma'_1 & \int_{\Gamma_1} uu_{12} \Psi' d\Gamma'_1 & \int_{\Gamma_1} uu_{13} \Psi' d\Gamma'_1 \\ \int_{\Gamma_1} uu_{21} \Psi' d\Gamma'_1 & \int_{\Gamma_1} uu_{22} \Psi' d\Gamma'_1 & \int_{\Gamma_1} uu_{23} \Psi' d\Gamma'_1 \\ \int_{\Gamma_1} uu_{31} \Psi' d\Gamma'_1 & \int_{\Gamma_1} uu_{32} \Psi' d\Gamma'_1 & \int_{\Gamma_1} uu_{33} \Psi' d\Gamma'_1 \end{vmatrix} \Psi d\Gamma_1^+ \quad (2.1.31)$$

Il secondo blocco sulla diagonale principale della matrice **A** è costituito dalla matrice  $\mathbf{A}_{tt}$ , la quale relaziona grandezze meccaniche (trazioni pesate  $\mathbf{P}^+$ ) sul contorno  $\Gamma_2^+$  a grandezze cinematiche (spostamenti relativi  $-\mathbf{U}$ ) valutate tra i lati  $\Gamma_2$  dello stesso contorno.

La matrice  $\mathbf{A}_{tt}$  è quadrata semidefinita negativa. Soltanto nel caso in cui  $\Gamma_1 \neq 0$  tale matrice è definita negativa. La matrice  $\mathbf{A}_{tt}$  gode della seguente proprietà:

$$\mathbf{A}_{tt} = \mathbf{A}_{tt}^T \quad (2.1.32)$$

Le dimensioni della matrice  $\mathbf{A}_{tt}$  sono  $3q \times 3q$ , dove  $q$  rappresenta il numero dei nodi del contorno  $\Gamma_2$ .

Nel caso di piastra di Kirchhoff, la matrice  $\mathbf{A}_{tt}$ , in virtù delle eq.ni (A.2.2.21)-(A.2.2.23) si può così schematizzare:

$$\mathbf{A}_{tt} = \int_{\Gamma_2^+} \begin{vmatrix} \int_{\Gamma_2} tt_{11} \Psi' d\Gamma'_2 & \int_{\Gamma_2} tt_{12} \Psi' d\Gamma'_2 & \int_{\Gamma_2} tt_{13} \Psi' d\Gamma'_2 \\ \int_{\Gamma_2} tt_{21} \Psi' d\Gamma'_2 & \int_{\Gamma_2} tt_{22} \Psi' d\Gamma'_2 & \int_{\Gamma_2} tt_{23} \Psi' d\Gamma'_2 \\ \int_{\Gamma_2} tt_{31} \Psi' d\Gamma'_2 & \int_{\Gamma_2} tt_{32} \Psi' d\Gamma'_2 & \int_{\Gamma_2} tt_{33} \Psi' d\Gamma'_2 \end{vmatrix} \Psi d\Gamma_2^+ \quad (2.1.33)$$

Gli altri blocchi della matrice  $\mathbf{A}$  sono costituiti dalle matrici  $\mathbf{A}_{ut}$  e  $\mathbf{A}_{tu}$ . La matrice  $\mathbf{A}_{ut}$  relaziona grandezze cinematiche (spostamenti pesati  $\mathbf{W}^+$ ) sul contorno  $\Gamma_1^+$  a grandezze cinematiche (spostamenti relativi  $-\mathbf{U}$ ) sul contorno  $\Gamma_2$  mentre la matrice  $\mathbf{A}_{tu}$  relaziona grandezze meccaniche (trazioni pesate  $\mathbf{P}^+$ ) sul contorno  $\Gamma_2^+$  a grandezze meccaniche (forze generalizzate  $\mathbf{F}$ ) sul contorno  $\Gamma_1$ .

Nel caso di piastra di Kirchhoff, la matrice  $\mathbf{A}_{ut}$ , in virtù delle eq.ni (A.2.2.14)-(A.2.2.16) si può così schematizzare:

$$\mathbf{A}_{ut} = \int_{\Gamma_1^+} \begin{vmatrix} \int_{\Gamma_2} ut_{11} \Psi' d\Gamma'_2 & \int_{\Gamma_2} ut_{12} \Psi' d\Gamma'_2 & \int_{\Gamma_2} ut_{13} \Psi' d\Gamma'_2 \\ \int_{\Gamma_2} ut_{21} \Psi' d\Gamma'_2 & \int_{\Gamma_2} ut_{22} \Psi' d\Gamma'_2 & \int_{\Gamma_2} ut_{23} \Psi' d\Gamma'_2 \\ \int_{\Gamma_2} ut_{31} \Psi' d\Gamma'_2 & \int_{\Gamma_2} ut_{32} \Psi' d\Gamma'_2 & \int_{\Gamma_2} ut_{33} \Psi' d\Gamma'_2 \end{vmatrix} \Psi d\Gamma_1^+ \quad (2.1.34)$$

invece la matrice  $\mathbf{A}_{tu}$ , in virtù delle eq.ni (A.2.2.21)-(A.2.2.23) risulta:

$$\mathbf{A}_{tu} = \int_{\Gamma_2^+} \begin{vmatrix} \int_{\Gamma_1} tu_{11} \Psi' d\Gamma_1 & \int_{\Gamma_1} tu_{12} \Psi' d\Gamma_1 & \int_{\Gamma_1} tu_{13} \Psi' d\Gamma_1 \\ \int_{\Gamma_1} tu_{21} \Psi' d\Gamma_1 & \int_{\Gamma_1} tu_{22} \Psi' d\Gamma_1 & \int_{\Gamma_1} tu_{23} \Psi' d\Gamma_1 \\ \int_{\Gamma_1} tu_{31} \Psi' d\Gamma_1 & \int_{\Gamma_1} tu_{32} \Psi' d\Gamma_1 & \int_{\Gamma_1} tu_{33} \Psi' d\Gamma_1 \end{vmatrix} \Psi d\Gamma_2^+ \quad (2.1.35)$$

Si può osservare dalle (2.1.34) e (2.1.35) che le suddette matrici godono della seguente proprietà:

$$\mathbf{A}_{ut} = \mathbf{A}_{tu}^T \quad (2.1.36)$$

Nel caso di problemi bidimensionali, le dimensioni della matrice  $\mathbf{A}_{ut}$  sono (6p x 3q).

In base alle osservazioni fatte e considerando le equazioni (2.1.30) (2.1.32) e (2.1.36) si osserva che la matrice dei coefficienti del sistema risolvete **B** è semidefinita e gode della seguente proprietà:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^T \quad (2.1.37)$$

Tale matrice contiene tutti i coefficienti del sistema risolvete. Essa è semidefinita se il vettore  $\bar{v}(x) = -\bar{u}_n(x)$  assegnato su  $\Gamma_2$  ed il vettore  $-U$  definito su  $\Gamma_2$  caratterizzano un moto rigido di  $\Omega$  rispetto a  $\Omega_\infty \setminus \Omega$ .

La simmetria della matrice **B** è dovuta al fatto che la matrice dei coefficienti è ottenuta utilizzando le soluzioni fondamentali  $\mathbf{G}_{hk}$  con h,k=u,t che godono della proprietà di simmetria e che le funzioni di forma impiegate per la pesatura sono in accordo con l'approccio alla Galerkin.

Questa verrà utilizzata per risolvere i problemi di analisi elastica in quanto permette la generazione della matrice dei coefficienti del sistema risolvete nonché i vettori dei carichi dovuti alle forze sul contorno originariamente libero e ai cedimenti imposti sul contorno originariamente vincolato.



La matrice  $\mathbf{B}$  è singolare: la singolarità risiede nel fatto che nei blocchi colonna associati al vettore  $(\Delta\mathbf{U})$  le colonne sono combinazioni lineari in quanto il solido può essere soggetto ad un moto rigido nel proprio piano.

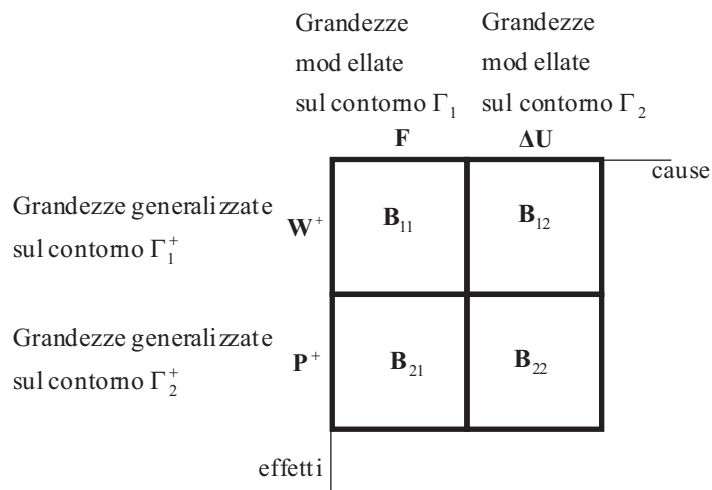


Fig. 2.1.4 Schema rappresentativo delle grandezze del sistema risolvete.

Il vettore  $\mathbf{L}$  contiene le grandezze assegnate, in particolare

$$\hat{\mathbf{W}} = \begin{pmatrix} \int_{\Gamma_1^+} \Psi \bar{u}^+ d\Gamma_1^+ \\ \int_{\Gamma_1^+} \Psi \bar{\varphi}_n^+ d\Gamma_1^+ \\ \int_{\Gamma_1^+} \Psi \bar{\varphi}_{sn}^+ d\Gamma_1^+ \end{pmatrix} \quad (2.1.38)$$

traduce in termini di spostamenti pesati sul contorno  $\Gamma_1$  tutte le azioni note meccaniche e distorcenti applicate sul solido S, mentre

$$\hat{\mathbf{P}} = \left| \begin{array}{c} \int_{\Gamma_2^+} \Psi \bar{t}_n^+ d\Gamma_2^+ \\ \int_{\Gamma_2^+} \Psi \bar{m}_n^+ d\Gamma_2^+ \\ \int_{\Gamma_2^+} \Psi \bar{m}_{sn}^+ d\Gamma_2^+ \end{array} \right| \quad (2.1.39)$$

traduce in termini di trazioni pesate sul contorno  $\Gamma_2$  tutte le azioni note meccaniche e distorcenti applicate sul solido S.

**2.2 Significato ed aspetti computazionali della matrice  $A_{uu}$ .**

Il generico coefficiente della matrice  $A_{uu}$  valuta spostamenti pesati sull'elemento di contorno  $i$ , dovuti a forze stratificate distribuite agenti sull'elemento di contorno  $i'$ . La causa, rappresentata da forze stratificate distribuite sull'elemento di contorno  $i'$ , viene modellata con le funzioni di forma lineari  $\Psi_{i'}$  particolarizzate in  $\Psi_{i',j'}$  e  $\Psi_{i',(j'+1)}$  estremi all'elemento  $j'$  su cui sono imposte le forze nodali  $F_{i',j'}$  e  $F_{i',(j'+1)}$ .

L'effetto rappresenta gli spostamenti generalizzati (o pesati) sull'elemento di contorno  $i$ , la cui pesatura viene effettuata sempre con le funzioni di forma lineari  $\Psi^i$  particolarizzate in  $\Psi^{i,j}$  e  $\Psi^{i,(j+1)}$  per i nodi di contorno, estremi dell'elemento  $i$ , dove sono valutati gli spostamenti generalizzati  $W^{i,j}$  e  $W^{i,(j+1)}$ .

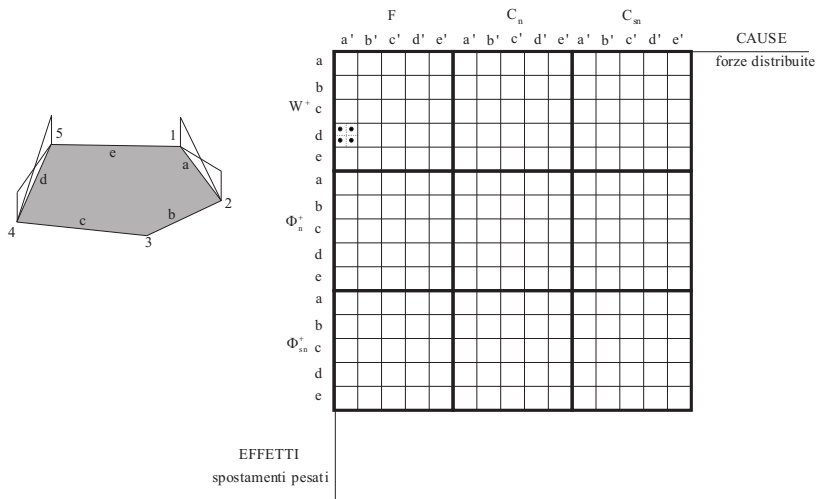


Fig. 2.2.1 Schema di riferimento della matrice  $A_{uu}$ .

Si nota che nella definizione del blocco dei coefficienti intervengono le funzioni di forma lineari  $\Psi_{i'}$  delle forze stratificate sull'elemento di contorno  $i'$  che servono a modellare la causa. Le stesse funzioni di forma anch'esse lineari  $\Psi^i$  delle forze stratificate sull'elemento di contorno  $i$  hanno lo scopo di pesare gli effetti rappresentati dagli spostamenti.

La matrice dei coefficienti  $\mathbf{A}_{uu}$  è quadrata ed ha dimensioni  $(6 \times n)(6 \times n)$  con  $n$  numero degli elementi di contorno.

I due coefficienti della prima colonna associati all'elemento di contorno  $d$  si ottengono attraverso una doppia integrazione che, nel caso particolare della Fig. (2.2.1), risulta:

$$\mathbf{W}_{a'}^d = \int_{\Gamma^d} \underbrace{\left( \int_{\Gamma_{a'}} \mathbf{G}_{uu} \Psi_{a'} d\Gamma_{a'} \right)}_{\mathbf{u}_{a'}^d} \Psi^d d\Gamma^d \mathbf{F}_{a'} \quad (2.2.1)$$

dove

$$\Psi_{a'} = \begin{vmatrix} \Psi_{a',1} & 0 \\ 0 & \Psi_{a',2} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{F}_{a'} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (2.2.2 \text{ a-b})$$

$$\Psi^d = \begin{vmatrix} \Psi^{d,1} & 0 \\ 0 & \Psi^{d,2} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{W}_{a'}^d = \begin{vmatrix} \mathbf{W}^{d,4} \\ \mathbf{W}^{d,5} \end{vmatrix} \quad (2.2.3 \text{ a-b})$$

$$\mathbf{G}_{uu} = \begin{vmatrix} uu_{11} & uu_{12} & uu_{13} \\ uu_{21} & uu_{22} & uu_{23} \\ uu_{31} & uu_{32} & uu_{33} \end{vmatrix} \quad (2.2.4)$$

Volendo calcolare ad esempio lo spostamento generalizzato in direzione verticale sull'elemento di contorno  $d$ , pesato secondo la funzione di forma della forza verticale associata al nodo 4, causato da una distribuzione di forze stratificate verticali agenti sull'elemento  $a'$ , si ottiene:

$$\mathbf{W}_{a'}^{d,4} = \mathbf{W}_{a',1}^{d,4} + \mathbf{W}_{a',2}^{d,4} = \int_{\Gamma^d} \left( \underbrace{\int_{\Gamma_{a'}} uu_{11} \Psi_{a',1} d\Gamma_{a'}}_{\mathbf{u}_{a',1}^d} \right) \Psi^d d\Gamma^d + \int_{\Gamma^d} \left( \underbrace{\int_{\Gamma_{a'}} uu_{11} \Psi_{a',2} d\Gamma_{a'}}_{\mathbf{u}_{a',2}^d} \right) \Psi^d d\Gamma^d \quad (2.2.5)$$

A causa della presenza del termine  $(\log r)$  nella soluzione fondamentale  $\mathbf{G}_{uu}$  i nuclei degli integrali possono presentare delle singolarità.

Per capire come si manifestano bisogna distinguere i seguenti casi:

- l'elemento di contorno su cui si valuta l'effetto e quello su cui si impone la causa sono coincidenti ( $i = i'$ ) e pertanto le forze stratificate e gli spostamenti generalizzati riguardano gli stessi elementi;
- l'elemento di contorno su cui si valuta l'effetto e quello dove si impone la causa sono separati da un nodo ( $i = i' \pm 1$ ) e pertanto le forze stratificate e gli spostamenti generalizzati riguardano elementi di contorno diversi ma che hanno un solo punto di contatto;
- l'elemento di contorno su cui si valuta l'effetto e quello su cui si impone la causa sono separati da almeno due nodi cioè tali che ( $i \geq i' + 2$ ) ovvero ( $i \leq i' - 2$ ), pertanto le forze stratificate e gli spostamenti generalizzati riguardano elementi di contorno diversi che non hanno punti di contatto.

Nel caso a) la singolarità logaritmica si manifesta su tutto l'elemento di contorno. L'integrale è definito come improprio e può essere calcolato tramite l'integrazione per parti.

Nel caso b) la singolarità logaritmica si manifesta nel punto di contatto. L'integrale è definito come improprio e può essere calcolato tramite l'integrazione per parti.

Nel caso c) gli integrali sono tutti definiti e possono essere calcolati anche con normali tecniche di integrazione numerica o in forma chiusa.

### 2.3 Significato ed aspetti computazionali della matrice $A_{ut}$ .

Il generico coefficiente della matrice  $A_{ut}$  valuta spostamenti pesati sull'elemento di contorno  $i$ , dovuti a distorsioni stratificate distribuite imposte sugli elementi di contorno adiacenti al nodo  $j'$ .

La causa, rappresentata da distorsioni stratificate distribuite sugli elementi di contorno adiacenti al nodo  $j'$ , viene modellata con le funzioni di forma  $\Psi_j$  particolarizzate in  $\Psi_{j,(i'-1)}$  e  $\Psi_{j,i'}$  per gli elementi di contorno associati al nodo  $j'$  dove è imposta la distorsione nodale ( $\Delta U_j$ ).

L'effetto rappresenta gli spostamenti generalizzati (o pesati) sull'elemento di contorno  $i$ , la cui pesatura viene effettuata con le stesse funzioni di forma  $\Psi^i$  particolarizzate in  $\Psi^{i,j}$  e  $\Psi^{i,(j+1)}$  per i nodi di contorno, estremi dell'elemento  $i$ , dove sono valutati gli spostamenti generalizzati  $W^{i,j}$  e  $W^{i,(j+1)}$ .

Si nota, che nella definizione del blocco dei coefficienti vengono utilizzate funzioni di forma lineari  $\Psi_{j,(i'-1)}$  ed  $\Psi_{j,i'}$  per modellare le distorsioni sugli elementi di contorno  $i'-1$  e  $i'$  adiacenti al nodo  $j'$ , le stesse funzioni di forma  $\Psi^i$  delle forze stratificate vengono utilizzate per pesare gli spostamenti sull'elemento di contorno  $i$ . La matrice dei coefficienti  $A_{ut}$  è rettangolare ed ha dimensioni  $(6 \times n)(3 \times m)$  con  $n$  numero degli elementi di contorno ed  $m$  numero nodi di contorno.

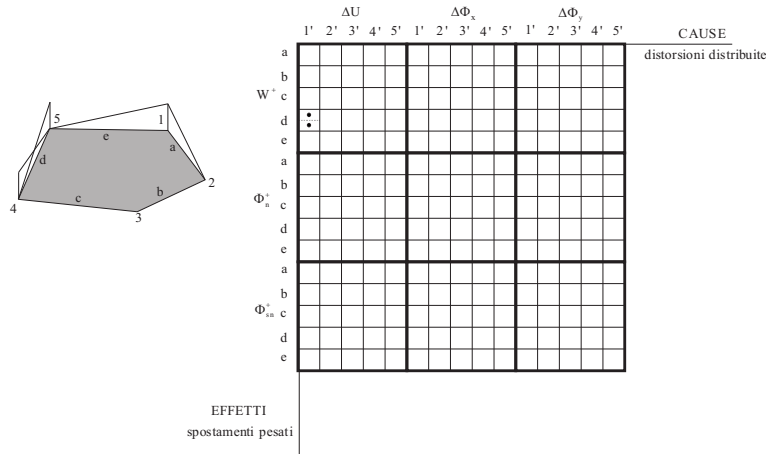


Fig. 2.3.1 schema di riferimento della matrice  $A_{ut}$ .

I due coefficienti della prima colonna associati all'elemento di contorno d si ottengono attraverso una doppia integrazione che, nel caso particolare della Fig. 2.3.1, risulta:

$$W_{1'}^d = \int_{\Gamma^d} \underbrace{\left( \int_{\Gamma_{a'}} \mathbf{G}_{ut} \Psi_{a',1} d\Gamma_{a'} + \int_{\Gamma_{e'}} \mathbf{G}_{ut} \Psi_{e',1} d\Gamma_{e'} \right)}_{\mathbf{u}_{1'}^d} (\Psi^d) d\Gamma^d \quad (2.3.1)$$

dove:

$$\Psi^d = \begin{vmatrix} \Psi^{d,1} & 0 \\ 0 & \Psi^{d,2} \end{vmatrix} \quad (2.3.2)$$

$$\mathbf{G}_{ut} = \begin{vmatrix} ut_{11} & ut_{12} & ut_{13} \\ ut_{21} & ut_{22} & ut_{23} \\ ut_{31} & ut_{32} & ut_{33} \end{vmatrix} \quad (2.3.3)$$

e dove  $\Psi_{a',1}$  e  $\Psi_{e',1}$  sono funzioni scalari.

Volendo calcolare ad esempio lo spostamento generalizzato in direzione verticale sull'elemento di contorno  $d$ , pesato secondo la funzione di forma della forza verticale associata al nodo 4, causato da una distribuzione di distorsioni stratificate verticali applicata sugli elementi di contorno adiacenti al nodo  $1'$ , si ottiene:

$$\mathbf{W}_{1'}^{d,4w} = \mathbf{W}_{a',1'}^{d,4} + \mathbf{W}_{e',1'}^{d,4} = \int_{\Gamma^d} \underbrace{\left( \int_{\Gamma_{a'}} ut_{11} \Psi_{a',1'} d\Gamma_{a'} \right)}_{\mathbf{u}_{a',1'}^d} \Psi^d d\Gamma^d + \int_{\Gamma^d} \underbrace{\left( \int_{\Gamma_{e'}} ut_{11} \Psi_{e',1'} d\Gamma_{e'} \right)}_{\mathbf{u}_{e',1'}^d} \Psi^d d\Gamma^d \quad (2.3.4)$$

A causa della presenza del termine  $0 (R^{-1})$  ed  $0 (R^{-2})$  nella soluzione fondamentale  $\mathbf{G}_{ut}$  i nuclei degli integrali possono presentare delle singolarità.

Per capire come si manifestano bisogna distinguere i seguenti casi:

- l'elemento di contorno  $i$  su cui si valuta l'effetto ed il nodo  $j'$  su cui si impone la causa sono tali ( $i = j'-1$ ) oppure ( $i = j'$ ), pertanto le distorsioni stratificate e gli spostamenti generalizzati riguardano sia elementi di contorno coincidenti che elementi che hanno in comune un punto;
- l'elemento di contorno  $i$  su cui si valuta l'effetto ed il nodo  $j'$  su cui si impone la causa sono tali ( $i = j'+1$ ) oppure ( $i = j'-2$ ), pertanto le distorsioni stratificate e gli spostamenti generalizzati riguardano elementi di contorno che hanno un solo punto di contatto;
- l'elemento di contorno  $i$  su cui si valuta l'effetto ed il nodo  $j'$  su cui si impone la causa sono tali ( $i \geq j'+2$ ) oppure ( $i \leq j'-3$ ), pertanto le distorsioni stratificate e gli spostamenti generalizzati riguardano elementi di contorno lontani.



Nel caso a) l'integrale è definito come Valore Principale di Cauchy sugli elementi di contorno su cui le distribuzioni di causa ed effetto coincidono, mentre sugli elementi di contorno che presentano un punto di contatto l'integrale è definito ad eccezione del punto di contatto dove risulta come improprio e la singolarità viene eliminata attraverso una doppia integrazione per parti.

Nel caso b) l'integrale è definito ad eccezione del punto di contatto dove risulta come improprio e la singolarità viene eliminata tramite l'integrazione per parti.

Nel caso c) gli integrali sono tutti definiti e possono essere calcolati con normali tecniche di integrazione numerica o in forma chiusa.

#### 2.4 Significato ed aspetti computazionali della matrice $\mathbf{A}_{tt}$ .

Il generico coefficiente della matrice  $\mathbf{A}_{tt}$  valuta trazioni pesate sugli elementi di contorno adiacenti al nodo  $j$ , dovute a distorsioni stratificate distribuite imposte sugli elementi di contorno adiacenti al nodo  $j'$ .

La causa, rappresentata da distorsioni stratificate distribuite sugli elementi di contorno adiacenti al nodo  $j'$ , viene modellata con le funzioni di forma lineari  $\Psi_{j'}$  particolarizzate in  $\Psi_{j',i'-1}$  e  $\Psi_{j',i'}$  per gli elementi di contorno associati al nodo  $j'$  dove è imposta la distorsione nodale  $\Delta \mathbf{U}_{j'}$ .

L'effetto rappresenta gli sforzi generalizzati (o pesati) sugli elementi di contorno adiacenti al nodo  $j$ , la cui pesatura viene effettuata sempre con le funzioni di forma lineari  $\Psi^j$  particolarizzate in  $\Psi^{j,i-1}$  e  $\Psi^{j,i}$  per gli elementi di contorno associati al nodo  $j$ , dove è valutata la trazione generalizzata  $\mathbf{P}^j$ .

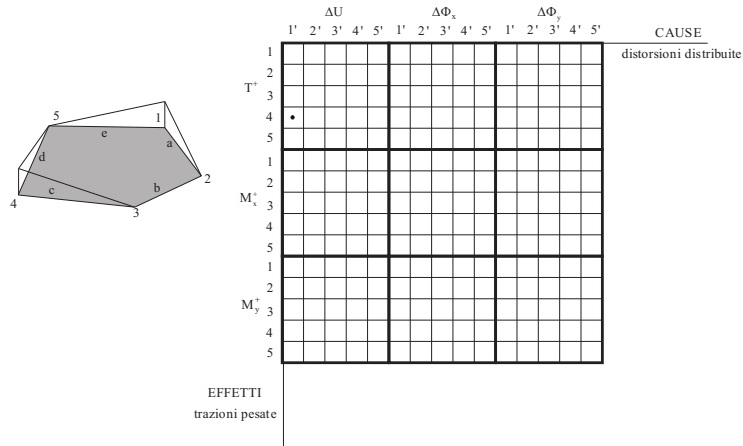


Fig. 2.4.1 Schema di riferimento della matrice  $\mathbf{A}_{tt}$ .

Si nota che, nella definizione del blocco dei coefficienti intervengono funzioni di forma lineari  $\Psi_j$ , che servono a modellare le distorsioni sugli elementi di contorno  $i'-1$  e  $i'$  adiacenti al nodo  $j'$ , le stesse funzioni di forma  $\Psi^j$  servono a pesare le trazioni sugli elementi di contorno adiacenti al nodo  $j$ .

La matrice dei coefficienti  $\mathbf{A}_{tt}$  è quadrata ed ha dimensioni  $(3m)(3m)$  con  $m$  numero dei nodi di contorno.

Il generico coefficiente si ottiene attraverso una doppia integrazione che, nel caso particolare della Fig. 2.4.1, risulta:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{1'}^4 = & \int_{\Gamma^c} \left( \underbrace{\int_{\Gamma_{a'}} tt_{11} \Psi_{a',1'} d\Gamma_{a'} + \int_{\Gamma_{e'}} tt_{11} \Psi_{e',1'} d\Gamma_{e'}}_{\mathbf{t}_{1'}^{c,4}} \right) (\Psi^{c,4}) d\Gamma^c + \\
 & + \int_{\Gamma^d} \left( \underbrace{\int_{\Gamma_{a'}} tt_{11} \Psi_{a',1'} d\Gamma_{a'} + \int_{\Gamma_{e'}} tt_{11} \Psi_{e',1'} d\Gamma_{e'}}_{\mathbf{t}_{1'}^{d,4}} \right) (\Psi^{d,4}) d\Gamma^d
 \end{aligned}
 \tag{2.4.1}$$

A causa della presenza del termine  $O(R^{-3})$  ed  $O(R^{-4})$  nelle soluzioni fondamentali presenti in  $\mathbf{G}_{tt}$ , il nucleo degli integrali possono presentare delle singolarità.

Per capire come si manifestano bisogna distinguere i seguenti casi:

- il nodo di contorno  $j$  su cui si valuta l'effetto ed il nodo  $j'$  su cui si impone la causa sono coincidenti ( $j = j'$ ), pertanto le distorsioni stratificate e gli sforzi generalizzati riguardano sia elementi di contorno coincidenti sia elementi che hanno in comune un punto;
- il nodo di contorno  $j$  su cui si valuta l'effetto ed il nodo  $j'$  su cui si impone la causa sono adiacenti ( $j = j' \pm 1$ ), pertanto le distorsioni stratificate e gli sforzi generalizzati riguardano sia elementi di contorno coincidenti sia elementi di contorno che si toccano in un punto;
- il nodo di contorno  $j$  su cui si valuta l'effetto ed il nodo  $j'$  su cui si impone la causa sono separati da un nodo ( $j = j' \pm 2$ ), pertanto le distorsioni stratificate e sforzi generalizzati riguardano sia elementi di contorno che si toccano in un punto sia elementi di contorno lontani.
- il nodo di contorno  $j$  su cui si valuta l'effetto ed il nodo  $j'$  su cui si impone la causa sono separati da almeno due nodi ( $j \geq j' \pm 3$ ), pertanto le distorsioni stratificate e sforzi generalizzati riguardano elementi di contorno lontani.

Nei casi a), b), c) gli integrali vengono definiti attraverso un processo di limite; questo limite esiste ed è finito pertanto i coefficienti della matrice  $\mathbf{A}_{tt}$  esistono come entità matematiche.

Nel caso d) gli integrali sono tutti regolari e possono essere calcolati con normali tecniche di integrazione numerica o anche in forma chiusa.

## 2.5 I Sistemi di riferimento.

Si illustrano i sistemi di riferimento impiegati per un e-bem generico con le relative coordinate nodali.

Nell'analisi delle piastre è stato necessario distinguere due sistemi di riferimento distinti uno locale nodo o generale e uno locale lato.

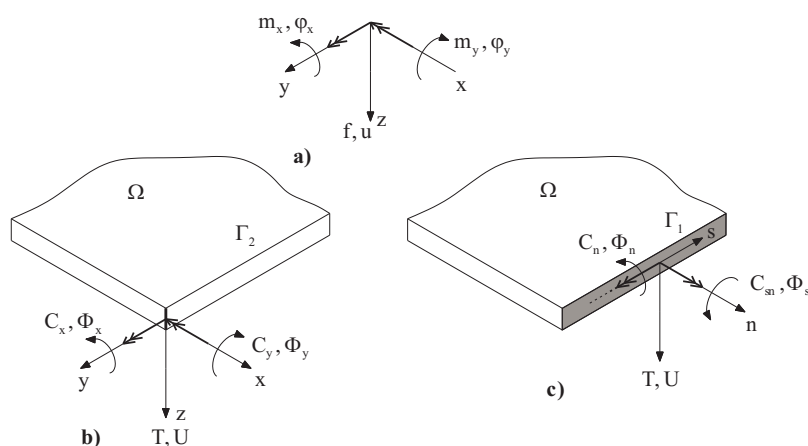


Fig. 2.5.1 Sistema di riferimento generale a), locale nodo b), e locale lato c).

Il sistema di riferimento generale è individuato da una terna cartesiana  $(0, x, y, z)$  con la quale vengono valutate tutte le grandezze nodali, sia meccaniche che cinematiche quali i vettori forza (forze verticali e coppie), i vettori che comprendono gli spostamenti (spostamento verticale e rotazione) Fig.(2.5.1 a).

Il sistema di riferimento locale occorre per valutare tutte le grandezze riferite ai lati della piastra, quali gli sforzi (taglio e momenti) e gli spostamenti (spostamenti verticali e rotazioni), distribuiti lungo i lati del contorno del solido. La convenzione adottata è quella classica ed è riportata nella Fig.(2.5.1 c). A chiarimento delle convenzioni stabilite, per le grandezze cinematiche si rende necessario in seguito definire il significato di distorsione.

## 2.6 Significato fisico delle distorsioni.

Si vuole chiarire il significato fisico delle componenti del vettore distorsione

$$\Delta \mathbf{U} = \left[ \Delta \mathbf{U}^T \quad \Delta \Phi_x^T \quad \Delta \Phi_y^T \right]^T \quad (2.6.1)$$

dove le componenti indicano rispettivamente la distorsione verticale e le due distorsioni rotazionali, una secondo l'asse x e l'altra secondo l'asse y.

### 2.6.1 La distorsione verticale $\Delta U$ .

Si intende per distorsione verticale  $\Delta U$ , associata al nodo del contorno, la differenza tra lo spostamento verticale del nodo pensato appartenere alla frontiera  $\Gamma^+$  del dominio  $\Omega_\infty \setminus \Omega$ , nullo a soluzione ottenuta, e lo spostamento dello stesso nodo pensato appartenente alla frontiera  $\Gamma$  del dominio  $\Omega$  della piastra, cioè:

$$\Delta U = U^+ - U = -U \quad (2.6.2)$$

Si ipotizzi di assegnare al nodo j, adiacente ai lati i ed (i-1), Fig. (2.6.1) della piastra in esame una distorsione verticale, valutata secondo gli spostamenti riferiti al sistema generale:

$$\Delta U = -U = 1 \quad (2.6.3)$$

Nascono sui lati i ed (i-1) delle distorsioni distribuite. Tali distorsioni distribuite vengono modellate, come si vedrà in seguito, con funzioni di forma lineari.

Il segno da attribuire a tale distorsione distribuita dipende dalla convenzione locale indicata in Fig. (2.5.1 c).

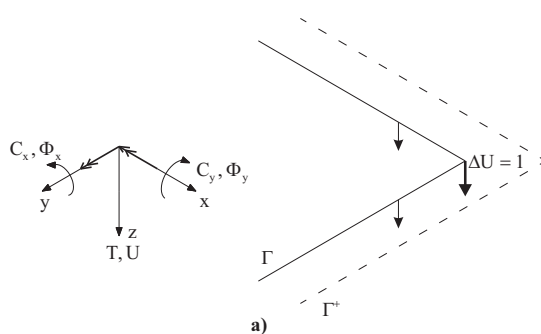


Fig. 2.6.1 Legame tra distorsioni nodali verticali e distribuzione di distorsioni lungo i lati del contorno.

### 2.6.2 La distorsione rotazionale $\Delta\Phi_x$ .

Si intende per distorsione rotazionale  $\Delta\Phi_x$ , associata al nodo del contorno, la differenza tra la rotazione flessionale assoluta del nodo pensato appartenere alla frontiera  $\Gamma^+$  del dominio  $\Omega_\infty \setminus \Omega$ , nulla a soluzione ottenuta, e la rotazione flessionale assoluta dello stesso nodo pensato appartenere alla frontiera  $\Gamma$  del dominio  $\Omega$  della piastra, cioè:

$$\Delta\Phi_x = \Phi_x^+ - \Phi_x = -\Phi_x \tag{2.6.4}$$

Si ipotizzi di assegnare, secondo il sistema di riferimento generale, al nodo  $j$ , adiacente ai lati  $i$  ed  $(i-1)$  Fig. (2.6.2), della piastra in esame una distorsione rotazionale

$$\Delta\Phi_x = -\Phi_x = 1 \tag{2.6.5}$$

Nascono sui lati  $i$  ed  $(i-1)$  concorrenti al nodo in esame delle distorsioni distribuite di tipo torsionale e di tipo flessionale rispettivamente. Tali distorsioni

distribuite vengono modellate, come si vedrà in seguito, con funzioni di forma lineari.

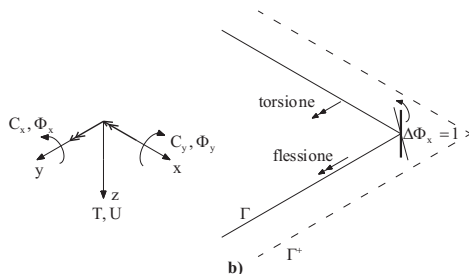


Fig. 2.6.2 Legame tra distorsioni nodali rotazionali e distribuzione di distorsioni lungo i lati del contorno.

Il segno da attribuire a tali distorsioni distribuite lungo i lati dipende dalla convenzione locale indicata in Fig. (2.6.2).

Con riferimento alla Fig. (2.6.2) si può dire che la distorsione nodale (2.6.5) fa nascere in corrispondenza dei lati  $i$  ed  $(i-1)$  rispettivamente distorsioni distribuite di tipo torsionale e distorsioni distribuite di tipo flessionale.

### 2.6.3 La distorsione rotazionale $\Delta\Phi_y$ .

Si intende per distorsione rotazionale  $\Delta\Phi_y$ , associata al nodo del contorno, la differenza tra la rotazione torsionale assoluta del nodo pensato appartenere alla frontiera  $\Gamma^+$  del dominio  $\Omega_\infty \setminus \Omega$ , nulla a soluzione ottenuta, e la rotazione torsionale assoluta dello stesso nodo pensato appartenere alla frontiera  $\Gamma$  del dominio  $\Omega$  della piastra, cioè:

$$\Delta\Phi_y = \Phi_y^+ - \Phi_y = -\Phi_y \quad (2.6.6)$$

Si ipotizzi di assegnare, secondo il sistema di riferimento generale, al nodo  $j$ , adiacente ai lati  $i$  ed  $(i-1)$  Fig. (2.6.3), della piastra in esame una distorsione rotazionale

$$\Delta\Phi_y = -\Phi_y = 1 \quad (2.6.7)$$

Nascono sui lati  $i$  ed  $(i-1)$  concorrenti al nodo in esame delle distorsioni distribuite di tipo flessionale e di tipo torsionale. Tali distorsioni distribuite vengono modellate, come si vedrà in seguito, con funzioni di forma lineari.

Il segno da attribuire a tali distorsioni distribuite lungo i lati dipende dalla convenzione locale indicata in Fig. (2.5.1).

Con riferimento alla Fig. (2.6.3) si può dire che la distorsione nodale (2.6.7) fa nascere in corrispondenza dei lati  $i$  ed  $(i-1)$  rispettivamente distorsioni distribuite di tipo flessionale e distorsioni distribuite di tipo torsionale.

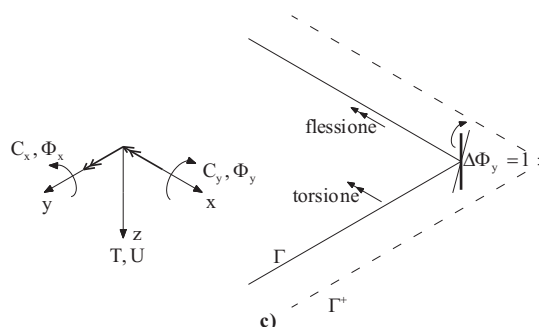


Fig. 2.6.3 Legame tra distorsioni nodali rotazionali e distribuzione di distorsioni lungo i lati del contorno.



### 2.6.4 Aspetti computazionali per il calcolo analitico dei coefficienti.

Si è studiata una piastra rettangolare di dimensioni generiche  $2r$ ,  $2s$  (riferito ad un sistema di riferimento cartesiano). La piastra è discretizzata in 8 nodi, sul suo contorno è applicata una distribuzione di spostamenti o rotazioni relative (distorsioni) e su tali lati si valutano gli effetti pesati cinematici e meccanici.

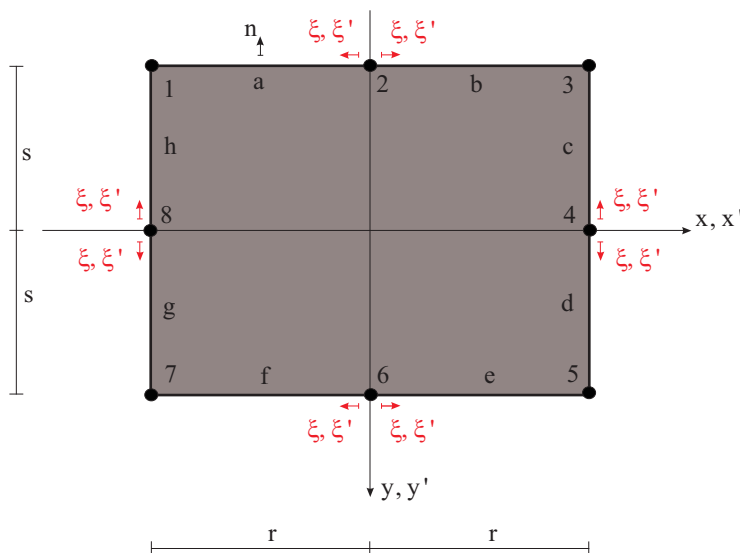


Fig. 2.6.4 Sistema in coordinate naturali relative agli effetti  $\xi'$  e sistema in coordinate naturali relative alle cause  $\xi$ .

- Sistema in coordinate naturali relative agli effetti  $\xi'$ .
- Sistema in coordinate naturali relative alle cause  $\xi$ .

Si introduce il valore Jacobiano che ci permette di trasformare gli integrali tutti da 0 a 1 indipendentemente da quanto sono lunghi i lati.

### 2.7 Verifica dei blocchi della matrice **B**. Verifica del blocco colonna attraverso l'introduzione di appropriate grandezze cinematiche $\Delta\mathbf{U}$ .

La singolarità della matrice **B** consente la verifica dei suoi coefficienti, limitatamente al blocco associato a  $(\Delta\mathbf{U})$ . Si consideri il solido immerso nel dominio illimitato e si impone su  $\Gamma$  un vettore distorsione  $(\Delta\mathbf{U})$ , tale da causare un moto rigido di dominio  $\Omega$ . Si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ut} + \mathbf{C}_{ut} \\ \mathbf{A}_{tt} \end{bmatrix} (\Delta\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.7.1)$$

Se l'uguaglianza è verificata i coefficienti della sottomatrice  $\mathbf{A}_{ut}$ ,  $\mathbf{A}_{tt}$  sono stati calcolati nel modo esatto.

Si attribuisce a tutti i nodi del contorno della piastra (2 r x2 s) un vettore distorsione:

- verticale unitario
- che comporti una rotazione rigida della piastra rispetto a un lato.
- che comporti una rotazione rigida della piastra rispetto a una diagonale passante per i nodi **1** e **5**.

Si è constatato che il prodotto tra i coefficienti di ciascuna riga ed i vettori ipotizzati nei tre casi è nullo.

$$(\mathbf{A}_{ut} + \mathbf{C}_{ut}) \Delta\mathbf{U} = 0 \quad (2.7.2)$$

Quindi i coefficienti sono stati calcolati in modo esatto.

**Moto rigido di semplice traslazione.**

Si attribuisce a tutti i nodi della piastra un vettore distorsione verticale unitario ( $\Delta U = 1$ )

$$\Delta U = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (2.7.3)$$

Si riportano gli effetti in termini di spostamento e di trazione in  $\Omega_\infty$  di un moto rigido che comporta una semplice traslazione verticale.

Pertanto si ha

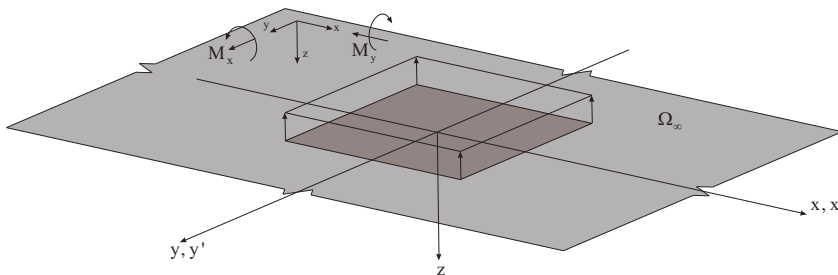


Fig 2.7.1. Moto rigido di semplice traslazione verticale

**Moto rigido di rotazione.**

Si assuma un vettore distorsione:

$$\Delta U = [0 \ -r \ -2r \ -2r \ -2r \ -r \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (2.7.4)$$

taile che comporti una rotazione rigida della piastra attorno ad uno dei suoi lati. Si precisa che al fine di ottenere il moto rigido desiderato (effetto botola) occorre associare alle distorsioni verticali nodali anche appropriate distorsioni rotazionali flessionali per alcuni lati, torsionali per altri.

Si riportano gli effetti in termini di spostamento e di trazione in  $\Omega_\infty$  di un moto rigido che comporta una rotazione (effetto botola). Pertanto si ha:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} = & \sum_{i=1}^n \left[ \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} t_{11}(-\mathbf{u})_i d\Gamma_i + \int_{\Gamma_{(i-1)}} \mathbf{u} t_{11}(-\mathbf{u})_{(i-1)} d\Gamma_{(i-1)} \right] + \\
 & + \left[ \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} t_{1K}(-\phi_x)_i d\Gamma_i + \int_{\Gamma_{(i-1)}} \mathbf{u} t_{1K}(-\phi_x)_{(i-1)} d\Gamma_{(i-1)} \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.7.5}$$

$$\begin{aligned}
 m_x = & \sum_{i=1}^n \left[ \int_{\Gamma_i} t t_{11}(-\mathbf{u})_i d\Gamma_i + \int_{\Gamma_{(i-1)}} t t_{11}(-\mathbf{u})_{(i-1)} d\Gamma_{(i-1)} \right] + \\
 & + \left[ \int_{\Gamma_i} t t_{1K}(-\phi_x)_i d\Gamma_i + \int_{\Gamma_{(i-1)}} t t_{1K}(-\phi_x)_{(i-1)} d\Gamma_{(i-1)} \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.7.6}$$

Dove l'indice **K** sta ad indicare quale Soluzione Fondamentale deve essere introdotta nel nucleo dell'integrale in funzione del tipo di distorsione distribuita agente sul contorno; per  $K = 2$  trattasi di una distorsione flessionale, per  $K = 3$  trattasi di distorsione torsionale.

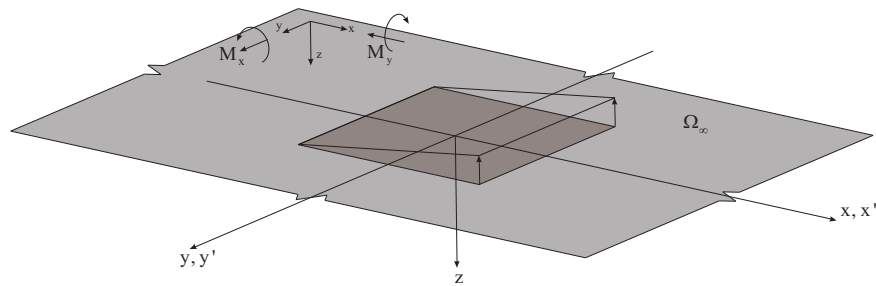


Fig. 2.7.2. Rotazione della piastra attorno ad un lato

**Moto rigido di rotazione attorno ad una diagonale.**

Anche in questo esempio si assuma un vettore distorsione:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{U}_v &= [0 \mid -r \sin \alpha \mid -2r \sin \alpha \mid -s \cos \alpha \mid 0 \mid -r \sin \alpha \mid -2r \sin \alpha \mid s \cos \alpha] \\ \Delta \mathbf{U}_{\phi_x} &= [\sin \alpha \mid \sin \alpha \mid \sin \alpha \mid \sin \alpha \mid \sin \alpha \mid \sin \alpha \mid \sin \alpha \mid \sin \alpha] \\ \Delta \mathbf{U}_{\phi_y} &= [\cos \alpha \mid \cos \alpha \mid \cos \alpha \mid \cos \alpha \mid \cos \alpha \mid \cos \alpha \mid \cos \alpha \mid \cos \alpha] \end{aligned} \quad (2.7.7)$$

tale che comporti una rotazione rigida della piastra attorno ad una diagonale. Come precedentemente detto al fine di ottenere il moto rigido desiderato (effetto botola) occorre associare alle distorsioni verticali nodali, appropriate distorsioni rotazionali flessionali per alcuni lati, torsionali per altri.

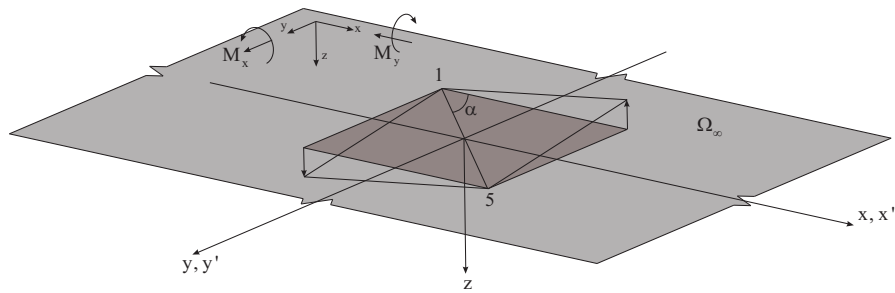


Fig 2.7.3. Rotazione della piastra attorno ad una diagonale

**2.8.1 Calcolo di un coefficiente in forma chiusa della Matrice  $A_{ut}$  per piastra rettangolare.**

Proviamo a determinare alcuni coefficienti della Matrice  $A_{ut}$  impiegando due Soluzioni Fondamentali della  $G_{ut}$ . Si supponga di voler determinare in forma chiusa una **rotazione flessionale generalizzata**  $\Phi_n^+$  al nodo 1 causata da una **distorsione verticale unitaria**  $\Delta U$  applicata allo stesso nodo, cioè si supponga di valutare un coefficiente diretto.

$$\int_{\Gamma^a} \Psi^a \underbrace{\left( \int_{\Gamma_a} ut_{21} \Psi_{a'} d\Gamma_{a'} + \int_{\Gamma_h} ut_{21} \Psi_{h'} d\Gamma_{h'} \right)}_{\text{causa in a e h}} d\Gamma^a \quad (2.8.1)$$

effetto in a

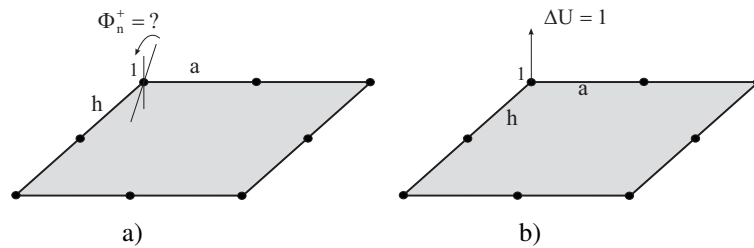


Fig. 2.6.1. Coefficiente diretto della Matrice  $A_{ut}$  a) Effetto nel nodo 1: rotazione flessionale generalizzata  $\Phi_n^+$ ; b) Causa nel nodo 1: distorsione verticale unitaria  $\Delta U = 1$ .

Per quanto riguarda la causa la distorsione al nodo 1 viene modellata sui lati in una distribuzione di **distorsione verticale** in  $a$  e  $h$ . La **rotazione flessionale generalizzata**  $\Phi$  nel nodo 1 viene ottenuta come effetto sul lato  $a$ .

Per la determinazione del coefficiente occorre fare una doppia integrazione, la prima riguardante la modellazione della causa e la seconda la pesatura dell'effetto.

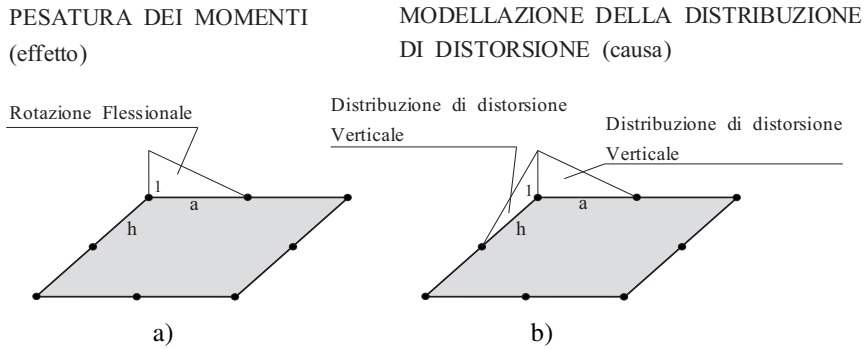


Fig. 2.8.2 a) Pesatura della rotazione flessionale generalizzata  $\Phi_n^+$  (effetto);  
b) Modellazione della distribuzione di distorsione verticale  $\Delta U$  (causa).

La tecnica della scomposizione delle cause e della ricomposizione degli effetti viene mostrata in dettaglio.

Dalla prima integrazione si ottiene un coefficiente del tipo:

$$\int_0^1 \Psi(\xi) (aa + ah) d\xi \quad (2.8.2)$$

dove:

$$aa = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{4}{r(-1+\xi)} + \frac{4\text{Log}(-1+\xi) - \text{Log}(\xi)}{r} \right) \rightarrow aa = f_1(\xi) + \left( \frac{4}{r(-1+\xi)} \right) \quad (2.8.3)$$

$$ah = \frac{1}{8\pi} \left( -\frac{4}{r(-1+\xi)} - \frac{4\text{Arc tan}\left(\frac{s}{r-r\xi}\right)}{s} \right) \rightarrow ah = f_2(\xi) + \left( -\frac{4}{r(-1+\xi)} \right) \quad (2.8.4)$$

sommando vediamo che si elidono le singolarità:

$$aa + ah = f_1(\xi) + f_2(\xi)$$

$$\int_0^1 (aa + ah) \Psi(\xi) J_a d\xi = \left( \frac{2(r^2 - s^2) \operatorname{Arctan}\left(\frac{r}{s}\right) - r(\pi r - 4s \operatorname{Log}(s) + 2s \operatorname{Log}(r^2 + s^2))}{8\pi r s} \right) \quad (2.8.6)$$



**2.8.2 Calcolo di un coefficiente in forma chiusa della Matrice  $\mathbf{A}_{tt}$  per piastra rettangolare.**

Si vuole determinare il coefficienti della Matrice  $\mathbf{A}_{tt}$  impiegando due Soluzioni Fondamentali della  $G_{tt}$ . Si supponga di voler determinare in forma chiusa un **momento generalizzato**  $M_x$  al nodo 1 causato da una **distorsione rotazionale unitaria**  $\Delta\Phi_x$  applicata allo stesso nodo.

Per quanto riguarda la distorsione imposta al nodo 1 essa si traduce sui lati in una distribuzione di distorsione flessionale in  $\mathbf{h}$  e torsionale in  $\mathbf{a}$ . Il momento generalizzato  $M_x$  al nodo 1 si ottiene come somma dell'effetto generalizzato sul lato  $\mathbf{a}$  e sul lato  $\mathbf{h}$  che sono rispettivamente momento torcente e momento flettente.

$$\mathbf{A}_{tt}(a, h; a', h') = \underbrace{J^a \int_{\Gamma^a} \Psi^a \left( J_{a'} \int_{\Gamma_{a'}} tt_{33} \Psi_{a'} d\Gamma_{a'} + J_{h'} \int_{\Gamma_{h'}} tt_{32} \Psi_{h'} d\Gamma_{h'} \right) d\Gamma^a}_{\text{effetto in a}} + \underbrace{J^h \int_{\Gamma^h} \Psi^h \left( J_{a'} \int_{\Gamma_{a'}} tt_{23} \Psi_{a'} d\Gamma_{a'} + J_{h'} \int_{\Gamma_{h'}} tt_{22} \Psi_{h'} d\Gamma_{h'} \right) d\Gamma^h}_{\text{effetto in h}} \quad (2.8.7)$$

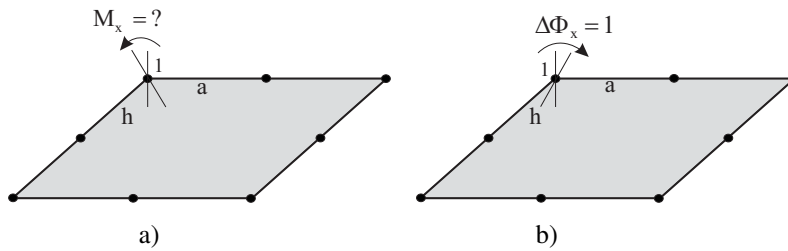


Fig. 2.6.3. Coefficiente diretto della Matrice  $\mathbf{A}_{tt}$  a) Effetto nel nodo 1: momento generalizzato  $M_x$ ; b) Causa nel nodo 1: distorsione rotazionale unitaria  $\Delta\Phi_x = 1$ .

Il coefficiente che si vuole determinare si ottiene come somma di due parti, e precisamente: “**a**” e “**h**”, che esprimono rispettivamente l’effetto sul lato **a** e l’effetto sul lato **h**.

Ogni parte a sua volta si ottiene come somma di due contributi e precisamente l’effetto in “**a**” è dato dalla somma dell’effetto causato dalla distribuzione di distorsione lungo il lato **a** (**aa**) e dall’effetto causato dalla distribuzione di distorsione lungo il lato **h** (**ah**). E così anche l’effetto in “**h**” è dato dalla somma dell’effetto causato dalla distribuzione di distorsione lungo il lato **a** (**ah**) e dall’effetto causato dalla distribuzione di distorsione lungo il lato **h** (**hh**).

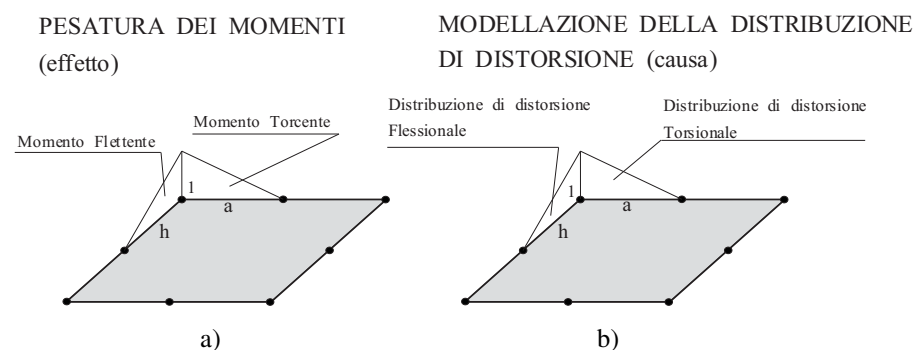


Fig. 2.6.4. a) Pesatura dei momenti (effetto); b) Modellazione della distribuzione di distorsioni (causa).

Dalla prima integrazione si ottiene un coefficiente del tipo:

Effetto in **a**, causa: distribuzione in **a** e **h**.

$$aa = \int_0^1 G_u \Psi_a(\xi') J_a' d\xi' \tag{2.8.8}$$

$$ah = \int_0^1 G_u \Psi_h(\xi') J_h' d\xi' \tag{2.8.10}$$

$$a = -(aa + ah) J^a = \frac{E h^3 (-1+\nu)}{48(1-\nu^2)\pi} \left( \begin{array}{l} \frac{(-1+\nu) r^2 (-1+\xi)}{s^2 + r^2 (-1+\xi)^2} + 2 \frac{r}{s} \text{Arc tan}\left(\frac{s}{r(-1+\xi)}\right) \\ +(-1+\nu) (\text{Log}(-1+\xi) - \text{Log}(\xi)) - \frac{2}{-1+\xi} \end{array} \right) \quad (2.8.11)$$

Effetto in **h**, causa: distribuzione in **a** e **h**.

$$ha = \int_0^1 G_{tt} \Psi_a'(\xi') J_a' d\xi' \quad (2.8.12)$$

$$hh = \int_0^1 G_{tt} \Psi_h'(\xi') J_h' d\xi' \quad (2.8.13)$$

$$h = -(ha + hh) J^h = \frac{E h^3 (-1+\nu)}{48(1-\nu^2)\pi} \left( \begin{array}{l} -\frac{(-1+\nu) s^2 (-1+\xi)}{r^2 + s^2 (-1+\xi)^2} + 2 \nu \frac{s}{r} \text{Arc tan}\left(\frac{r}{s(-1+\xi)}\right) \\ +(3+\nu) (\text{Log}(-1+\xi) - \text{Log}(\xi)) + \frac{2}{-1+\xi} \end{array} \right) \quad (2.8.14)$$

Il segno meno presente nell'equazioni  $a = -(aa + ah) J_a$  e  $h = -(ha + hh) J_h$  scaturisce dall'impiego del sistema di riferimento mostrato precedentemente.

Infine: Effetto pesato al nodo 1

$$a + h = m_x(\xi)$$

$$\int_0^1 \Psi(\xi) (m_x(\xi)) d\xi = -\frac{E h^3}{96(1+\nu)\pi r s} \left( \begin{array}{l} \pi(r^2 + vs^2) + 2(r^2 - vs^2) \left( \text{Arc tan} \frac{r}{s} - \text{Arc tan} \frac{s}{r} \right) \\ +2(1+\nu) r s (\text{Log}(r) + \text{Log}(s) - \text{Log}(r^2 + s^2)) \end{array} \right) \quad (2.8.15)$$

Si nota che sommando le due parti "a" e "h" le singolarità presenti del tipo  $1/\xi$  si eliminano consentendo, quindi di determinare il coefficiente cercato ottenuto in forma chiusa.

### 2.8.3 Calcolo di un coefficiente in forma chiusa della Matrice $\mathbf{A}_{tt}$ per una piastra triangolare.

Si esamina la scrittura della matrice caratteristica  $\mathbf{B}$  per un e-bem triangolare a sei nodi. Il calcolo dei coefficienti è stato effettuato utilizzando diverse strategie.

Si vuole determinare il coefficienti della Matrice  $\mathbf{A}_{tt}$  impiegando le Soluzioni Fondamentali della  $G_{tt}$ . Si supponga di voler determinare in forma chiusa un **momento generalizzato**  $M_x$  al nodo 4 causato da una **distorsione rotazionale unitaria**  $\Delta\Phi_x$  applicata allo stesso nodo.

Per quanto riguarda la distorsione imposta al nodo 4 essa si traduce sui lati in una distribuzione di distorsione flessionale e torsionale in  $\mathbf{c}$  e in una distribuzione di distorsione flessionale e torsionale in  $\mathbf{d}$ . Il momento generalizzato  $M_x$  al nodo 4 si ottiene come somma dell'effetto generalizzato sul lato  $\mathbf{c}$  e sul lato  $\mathbf{d}$  che sono rispettivamente momento flettente, momento torcente in  $\mathbf{c}$  e momento flettente, momento torcente in  $\mathbf{d}$ .

$$\mathbf{A}_{tt}(\mathbf{c}, \mathbf{d}; \mathbf{c}', \mathbf{d}') =$$

$$\underbrace{\frac{J^c}{\cos\delta} \int_{\Gamma^c} \Psi^c \left( \frac{J_{c'}}{\cos\delta} \int_{\Gamma_{c'}} \left( \begin{array}{l} \overbrace{tt_{22} \cos^2\delta + tt_{32} \cos\delta \sin\delta}^{\text{causa in c e d}} \\ + tt_{23} \cos\delta \sin\delta + tt_{33} \sin^2\delta \end{array} \right) \Psi_{c'} d\Gamma_{c'} + \right.}_{\text{effetto in c}}}_{\text{effetto in c}} d\Gamma^c +$$

$$+ \frac{J_{d'}}{\cos\delta} \int_{\Gamma_{d'}} \left( \begin{array}{l} \overbrace{tt_{22} \cos^2\delta + tt_{32} \cos\delta \sin\delta}^{\text{causa in c e d}} \\ + tt_{23} \cos\delta \sin\delta + tt_{33} \sin^2\delta \end{array} \right) \Psi_{d'} d\Gamma_{d'} \quad (2.8.16)$$

$$+ \frac{J^d}{\cos\delta} \int_{\Gamma^d} \Psi^d \left( \frac{J_{c'}}{\cos\delta} \int_{\Gamma_{c'}} \left( \begin{array}{l} \overbrace{tt_{22} \cos^2\delta + tt_{32} \cos\delta \sin\delta}^{\text{causa in c e d}} \\ + tt_{23} \cos\delta \sin\delta + tt_{33} \sin^2\delta \end{array} \right) \Psi_{c'} d\Gamma_{c'} + \right.}_{\text{effetto in d}}}_{\text{effetto in d}} d\Gamma^d +$$

$$+ \frac{J_{d'}}{\cos\delta} \int_{\Gamma_{d'}} \left( \begin{array}{l} \overbrace{tt_{22} \cos^2\delta + tt_{32} \cos\delta \sin\delta}^{\text{causa in c e d}} \\ + tt_{23} \cos\delta \sin\delta + tt_{33} \sin^2\delta \end{array} \right) \Psi_{d'} d\Gamma_{d'}$$

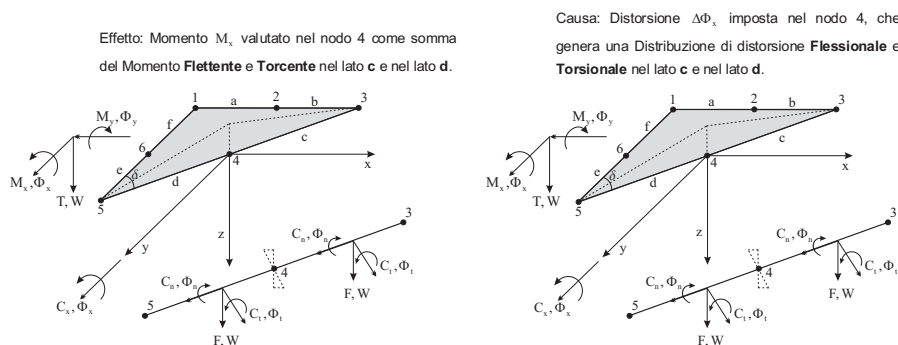


Fig. 2.8.5. Coefficiente diretto della Matrice  $\mathbf{A}_{tt}$ . a) Effetto nel nodo 4: momento generalizzato  $M_x$ ; b) Causa nel nodo 4: distorsione rotazionale unitaria  $\Delta\Phi_x = 1$ .

Il coefficiente che si vuole determinare si ottiene come somma di due parti, e precisamente: “**c**” e “**d**”, che esprimono rispettivamente l’effetto sul lato **c** e l’effetto sul lato **d**.

Ogni parte a sua volta si ottiene come somma di due contributi e precisamente l’effetto in “**c**” è dato dalla somma dell’effetto causato dalla distribuzione di distorsione lungo il lato **c** (**cc**) e dall’effetto causato dalla distribuzione di distorsione lungo il lato **d** (**cd**). E così anche l’effetto in “**d**” è dato dalla somma dell’effetto causato dalla distribuzione di distorsione lungo il lato **c** (**dc**) e dall’effetto causato dalla distribuzione di distorsione lungo il lato **d** (**dd**).

Dalla prima integrazione si ottiene un coefficiente del tipo:

Effetto in **c**, causa: distribuzione in **c** e **d**.

$$cc = \int_0^1 G_{tt} \Psi_c(\xi') J_c' d\xi' \quad (2.8.17)$$

$$cd = \int_0^1 G_{tt} \Psi_d(\xi') J_d' d\xi' \quad (2.8.18)$$

$$c = -(\text{cc} + \text{cd}) J^c = \frac{E h^3}{96(1+\nu^2)\pi} \left( \frac{1}{\cos^2(\delta) (r^2 + s^2)^3} \right) \left( \begin{array}{l} (-1+\nu) s^2 (\cos^2(\delta)) \left( -(1+3\nu) r^4 + 6(-1+\nu) r^2 s^2 + (3+\nu) s^4 \right) + 4 \cos(\delta) r s \\ \left( (-1+3\nu) r^2 - (-3+\nu) s^2 \right) \sin(\delta) + (-1+\nu) \left( r^4 - 6 r^2 s^2 + s^4 \right) \sin^2(\delta) \log(16) \end{array} \right) \quad (2.8.19)$$

Effetto in **d**, causa: distribuzione in **c** e **d**.

$$dc = \int_0^1 G_{tt} \Psi_{c'}(\xi') J_{c'} d\xi' \quad (2.8.20)$$

$$dd = \int_0^1 G_{tt} \Psi_{d'}(\xi') J_{d'} d\xi' \quad (2.8.21)$$

$$d = -(\text{dc} + \text{dd}) J^d = \frac{E h^3}{96(1+\nu^2)\pi} \left( \frac{1}{\cos^2(\delta) (r^2 + s^2)^3} \right) \left( \begin{array}{l} (-1+\nu) s^2 (\cos^2(\delta)) \left( -(1+3\nu) r^4 + 6(-1+\nu) r^2 s^2 + (3+\nu) s^4 \right) + 4 \cos(\delta) r s \\ \left( (-1+3\nu) r^2 - (-3+\nu) s^2 \right) \sin(\delta) + (-1+\nu) \left( r^4 - 6 r^2 s^2 + s^4 \right) \sin^2(\delta) \log(16) \end{array} \right) \quad (2.8.22)$$

Il segno meno presente nell'equazioni  $c = -(\text{cc} + \text{cd}) J^c$  e  $d = -(\text{dc} + \text{dd}) J^d$  scaturisce dall'impiego del sistema di riferimento mostrato precedentemente.

Infine: Effetto pesato al nodo 4

$$c + d = m_x(\xi) \quad (2.8.23)$$

$$\int_0^1 \Psi(\xi) (m_x(\xi)) d\xi = \frac{E h^3}{96(1+\nu^2)\pi} \left( 2(-1+\nu) (\cos^2(\delta) (3+\nu) + (-1+\nu) \sin^2(\delta)) (\log(16)) \right) \quad (2.8.24)$$

Si nota che sommando le due parti “**c**” e “**d**” le singolarità presenti del tipo  $1/\xi$  si eliminano consentendo, quindi di determinare il coefficiente cercato ottenuto in forma chiusa.

La piastra è immersa in un dominio illimitato  $\Omega_\infty$  avente le stesse caratteristiche fisiche e geometriche del corpo  $\mathbf{B}$ . Il contorno della piastra può essere considerato come costituito da  $\Gamma$  e dal contorno  $\Gamma^+$  del dominio complementare  $\Omega_\infty \setminus \Omega$ . La piastra viene discretizzata in **Elementi di Contorno**. Si perviene ad una matrice caratteristica  $\mathbf{B}$  e un'equazione di elasticità senza fare distinzione tra quantità note ed incognite.

### 2.9 Termini di carico dovuti ad azioni di dominio.

Le azioni dovute ai carichi di dominio quali forze di volume e deformazioni anelastiche sono state considerate nei vettori di carico  $\bar{\mathbf{L}}_p$  ed  $\bar{\mathbf{L}}_\vartheta$ , ovvero:

$$\bar{\mathbf{L}}_p = \left| \frac{\hat{\mathbf{W}}_p}{\hat{\mathbf{P}}_p} \right|, \quad \bar{\mathbf{L}}_\vartheta = \left| \frac{\hat{\mathbf{W}}_\vartheta}{\hat{\mathbf{P}}_\vartheta} \right| \quad (2.9.1 \text{ a-b})$$

$$\hat{\mathbf{W}}_p = \int_\Gamma \left( \int_\Omega \mathbf{G}_{uu} \bar{\mathbf{p}} d\Omega \right) \Psi d\Gamma \quad (2.9.2)$$

$$\hat{\mathbf{W}}_\vartheta = \int_\Gamma \left( \int_\Omega \mathbf{G}_{uq} \bar{\vartheta} d\Omega \right) \Psi d\Gamma \quad (2.9.3)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_p = \int_\Gamma \left( \int_\Omega \mathbf{G}_{tu} \bar{\mathbf{p}} d\Omega \right) \Psi d\Gamma \quad (2.9.4)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_\vartheta = \int_\Gamma \left( \int_\Omega \mathbf{G}_{tq} \bar{\vartheta} d\Omega \right) \Psi d\Gamma \quad (2.9.5)$$

Le espressioni degli spostamenti pesati (o generalizzati) e delle trazioni pesate (o generalizzate), comportano un primo integrale esteso al dominio  $\Omega$  del corpo, con il quale si valuta la causa (forze di volume e deformazioni anelastiche) ed un secondo integrale esteso al contorno  $\Gamma$  che ha lo scopo di pesare l'effetto sul contorno.

**2.10 Condensazione della matrice Caratteristica **B** .**

L'approccio proposto per l'analisi delle piastre con SGBEM è basato sulla scrittura della cosiddetta matrice caratteristica. Tale matrice **B** relaziona tutte le grandezze nodali e viene usata nel problema di analisi, dopo aver distinto i parametri noti da quelli incogniti.

Nei paragrafi precedenti è stata illustrata la tecnica di calcolo per la determinazione in forma analitica di tutti i coefficienti di questa matrice.

Come detto nel paragrafo (2.5) sono stati utilizzati due sistemi di riferimento:

- per il lato in cui, definita la normale  $n$ , si assumono le convenzioni per taglio, flessione e torsione, così come per spostamenti, rotazioni, flessione e torsione.
- per il nodo in cui, si assumono le convenzioni per forze secondo  $z$ , momenti secondo  $x$  e  $y$ , così come per spostamenti e rotazioni secondo  $x$  e  $y$ .

La matrice caratteristica **B** riferita a un e-bem discretizzato in otto nodi ha una dimensione di 72 righe e 72 colonne. Si prenda in esame la matrice  $B_{11}$  Fig. (2.10.1) le cause sono azioni meccaniche sui lati modellate da funzioni di forma lineari associate ai nodi e sono **Forze Verticali**, **Coppie Flettenti** e **Coppie Torcenti** quindi 6 x lato. In tutto e per un elemento BEM discretizzato in otto nodi e otto lati ci sono 48 cause.

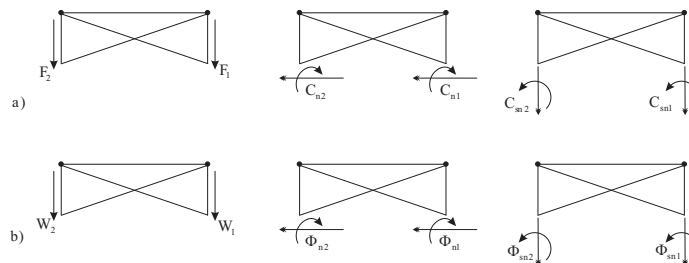


Fig. 2.10.1. a) CAUSE: Azioni meccaniche sui lati modellate da funzioni di forma lineari e associate ai nodi. b) EFFETTI: Azioni cinematiche sui lati pesate da funzioni di forma lineari e associate ai nodi.



Gli Effetti sono azioni cinematiche sui lati pesate da funzioni di forma lineari associate ai nodi e sono **Spostamenti Verticali, Rotazioni Flessionali e Rotazioni Torsionali** 6x lato. Anche in questo caso gli effetti sono 48.

Nella matrice  $\mathbf{B}_{11}$  nascono dei problemi numerici riguardante i coefficienti la cui causa sono le **Coppie Torcenti** e come effetti le **Rotazioni Torsionali**.

$$\mathbf{B}_{11} = \begin{matrix} & F & C_n & C_t \\ \begin{matrix} W^+ \\ \Phi_n^+ \\ \Phi_{sn}^+ \end{matrix} & \begin{bmatrix} | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.10.1)$$

La matrice risulta essere mal condizionata e il suo determinante è molto piccolo. È stata riscontrata una difficoltà numerica nell'inversione di questa matrice, qualora venga impiegata per risolvere una piastra, per esempio, con il contorno tutto incastrato.

Pertanto è stato necessario condensare la matrice, identificando sul nodo comune le grandezze provenienti da due lati contigui, così come accade nella  $\mathbf{B}_{22}$ .

Per esempio, nella Fig. (2.10.2) si evince come le forze agli estremi di due lati contigui vengano identificate in una forza nodale  $\mathbf{F}_i$ .

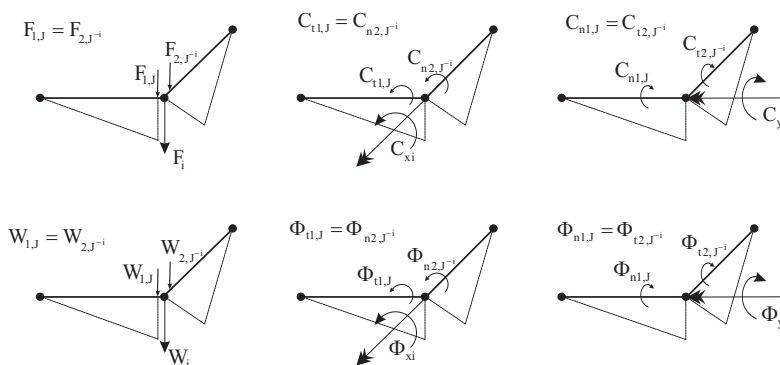


Fig. 2.10.2. Qui viene mostrata in dettaglio la condensazione delle cause e degli effetti



$$\begin{aligned} \mathbf{B} &\Rightarrow \mathbf{B}^C \\ 72 \times 72 &\Rightarrow 48 \times 48 \end{aligned} \quad (2.10.6)$$

$$\mathbf{B} = 72 \begin{array}{c} 72 \\ 48 \quad 24 \\ 24 \end{array} \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \hline \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{array} \right] \quad \mathbf{B}^C = 48 \begin{array}{c} 48 \\ 24 \quad 24 \\ 24 \end{array} \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{11}^C & \mathbf{B}_{12}^C \\ \hline \mathbf{B}_{21}^C & \mathbf{B}_{22}^C \end{array} \right] \quad (2.10.7)$$

Che viene qui riportata:

$$\mathbf{B}^C = \begin{array}{c} \mathbf{W}_z^+ \\ \mathbf{\Phi}_x^+ \\ \mathbf{\Phi}_y^+ \\ \mathbf{T}_z^+ \\ \mathbf{M}_x^+ \\ \mathbf{M}_y^+ \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{F}_z & \mathbf{C}_x & \mathbf{C}_y & -\mathbf{U}_z & -\mathbf{\Phi}_x & -\mathbf{\Phi}_y \\ \hline \mathbf{B}_{uzuz} & \mathbf{B}_{uz\phi_x} & \mathbf{B}_{uz\phi_y} & \mathbf{B}_{uztz} & \mathbf{B}_{uzm_x} & \mathbf{B}_{uzm_y} \\ \mathbf{B}_{\phi_x uz} & \mathbf{B}_{\phi_x \phi_x} & \mathbf{B}_{\phi_x \phi_y} & \mathbf{B}_{\phi_x tz} & \mathbf{B}_{\phi_x m_x} & \mathbf{B}_{\phi_x m_y} \\ \mathbf{B}_{\phi_y uz} & \mathbf{B}_{\phi_y \phi_x} & \mathbf{B}_{\phi_y \phi_y} & \mathbf{B}_{\phi_y tz} & \mathbf{B}_{\phi_y m_x} & \mathbf{B}_{\phi_y m_y} \\ \hline \mathbf{B}_{tzuz} & \mathbf{B}_{tz\phi_x} & \mathbf{B}_{tz\phi_y} & \mathbf{B}_{tztz} & \mathbf{B}_{tzm_x} & \mathbf{B}_{tzm_y} \\ \mathbf{B}_{m_x uz} & \mathbf{B}_{m_x \phi_x} & \mathbf{B}_{m_x \phi_y} & \mathbf{B}_{m_x tz} & \mathbf{B}_{m_x m_x} & \mathbf{B}_{m_x m_y} \\ \mathbf{B}_{m_y uz} & \mathbf{B}_{m_y \phi_x} & \mathbf{B}_{m_y \phi_y} & \mathbf{B}_{m_y tz} & \mathbf{B}_{m_y m_x} & \mathbf{B}_{m_y m_y} \end{array} \right] \quad (2.10.8)$$

La matrice caratteristica riferita ad un e-bem lastra discretizzato ad 8 nodi, ha le dimensioni di 56 righe e di 56 colonne. In maniera del tutto analoga a quanto fatto con le piastre si procede ad una condensazione della matrice caratteristica delle lastre e pertanto si ha una matrice di 40 righe per 40 colonne del tipo:

$$\mathbf{B}_L^C = \begin{array}{c} \mathbf{W}_x^+ \\ \mathbf{W}_y^+ \\ \mathbf{T}_x^+ \\ \mathbf{T}_y^+ \end{array} \left[ \begin{array}{cc|cc} \mathbf{F}_x & \mathbf{F}_y & -\mathbf{U}_x & -\mathbf{U}_y \\ \hline \mathbf{B}_{uxux} & \mathbf{B}_{uxuy} & \mathbf{B}_{uxtx} & \mathbf{B}_{uxty} \\ \mathbf{B}_{uyux} & \mathbf{B}_{uyuy} & \mathbf{B}_{uyxt} & \mathbf{B}_{uyty} \\ \hline \mathbf{B}_{txux} & \mathbf{B}_{txuy} & \mathbf{B}_{txtx} & \mathbf{B}_{txty} \\ \mathbf{B}_{tyux} & \mathbf{B}_{tyuy} & \mathbf{B}_{tytx} & \mathbf{B}_{tyty} \end{array} \right] \quad (2.10.9)$$

**2.11 Impiego della matrice caratteristica nell'analisi delle piastre.**

Nella generazione della matrice caratteristica **B** è stata effettuata considerando il solido piastra **S** di dominio  $\Omega$  immersa nel dominio illimitato  $\Omega_\infty$ , con le stesse caratteristiche fisiche e geometriche del corpo  $(E, \nu, h)$ . Questa operazione è stata condotta non tenendo conto delle condizioni al contorno riguardante il corpo reale. Per ottenere l'equazione risolvete del sistema si effettua la distinzione tra grandezze note ed incognite e un riordino tra le righe e le colonne della matrice caratteristica **B**.

Le condizioni generalizzate di Dirichlet e Neumann sul contorno  $\Gamma_1^+$  e  $\Gamma_2^+$  diventano:

$$\mathbf{W}_1^+ = \mathbf{W}_1 - \bar{\mathbf{W}}_1 = \mathbf{0} \quad \int_{\Gamma_1^+} \boldsymbol{\psi} \mathbf{u}_1 \, d\Gamma_1^+ = \int_{\Gamma_1^+} \boldsymbol{\psi} \bar{\mathbf{u}}_1 \, d\Gamma_1^+ \quad \text{su } \Gamma_1^+ \quad (2.11.1)$$

$$\mathbf{P}_2^+ = \mathbf{P}_2 - \bar{\mathbf{P}}_2 = \mathbf{0} \quad \int_{\Gamma_2^+} \boldsymbol{\psi} \mathbf{t}_2 \, d\Gamma_2^+ = \int_{\Gamma_2^+} \boldsymbol{\psi} \bar{\mathbf{t}}_2 \, d\Gamma_2^+ \quad \text{su } \Gamma_2^+ \quad (2.11.2)$$

dalla (2.1.26) si ha:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_1^+ \\ \mathbf{W}_2^+ \\ \mathbf{P}_1^+ \\ \mathbf{P}_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{u1u1} & \mathbf{A}_{u1u2} & \bar{\mathbf{A}}_{u1t1} & \mathbf{A}_{u1t2} \\ \mathbf{A}_{u2u1} & \mathbf{A}_{u2u2} & \mathbf{A}_{u2t1} & \bar{\mathbf{A}}_{u2t2} \\ \mathbf{A}_{t1u1} & \mathbf{A}_{t1u2} & \mathbf{A}_{t1t1} & \mathbf{A}_{t1t2} \\ \mathbf{A}_{t2u1} & \mathbf{A}_{t2u2} & \mathbf{A}_{t2t1} & \mathbf{A}_{t2t2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \bar{\mathbf{F}}_2 \\ -\bar{\mathbf{U}}_1 \\ -\mathbf{U}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{W}}_1^+ \\ \hat{\mathbf{W}}_2^+ \\ \hat{\mathbf{P}}_1^+ \\ \hat{\mathbf{P}}_2^+ \end{bmatrix} \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.11.3)$$

La matrice caratteristica ed i vettori delle azioni di volume vengono riordinati in base alle condizioni al contorno:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_2^+ \\ \mathbf{W}_1^+ \\ \mathbf{P}_2^+ \\ \mathbf{P}_1^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{u2u2} & \mathbf{A}_{u2u1} & \bar{\mathbf{A}}_{u2t2} & \mathbf{A}_{u2t1} \\ \mathbf{A}_{u1u2} & \mathbf{A}_{u1u1} & \mathbf{A}_{u1t2} & \bar{\mathbf{A}}_{u1t1} \\ \mathbf{A}_{t2u2} & \mathbf{A}_{t2u1} & \mathbf{A}_{t2t2} & \mathbf{A}_{t2t1} \\ \mathbf{A}_{t1u2} & \mathbf{A}_{t1u1} & \mathbf{A}_{t1t2} & \mathbf{A}_{t1t1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_2 \\ \mathbf{F}_1 \\ -\mathbf{U}_2 \\ -\bar{\mathbf{U}}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{W}}_2^+ \\ \hat{\mathbf{W}}_1^+ \\ \hat{\mathbf{P}}_2^+ \\ \hat{\mathbf{P}}_1^+ \end{bmatrix} \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.11.4)$$

Un'opportuna partizione della matrice consente di scrivere:

$$\mathbf{K} \mathbf{X} + \mathbf{L}_t \bar{\mathbf{F}}_2 + \mathbf{L}_u (-\bar{\mathbf{U}}_1) = 0 \quad (2.11.5)$$

$$\mathbf{K} \mathbf{X} + \hat{\mathbf{L}} = 0 \quad (2.11.6)$$

dove si pone:

$$\hat{\mathbf{L}} = \underbrace{\mathbf{L}_t \bar{\mathbf{F}}_2}_{\hat{\mathbf{L}}_t} + \underbrace{\mathbf{L}_u (-\bar{\mathbf{U}}_1)}_{\hat{\mathbf{L}}_u} = 0 \quad (2.11.7)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_1^+ \\ \mathbf{P}_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{u1u1} & \mathbf{A}_{u1t2} \\ \mathbf{A}_{t2u1} & \mathbf{A}_{t1t2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ -\mathbf{U}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{u1u2} & \bar{\mathbf{A}}_{u1t1} \\ \mathbf{A}_{t2u2} & \mathbf{A}_{t2t1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_2 \\ -\bar{\mathbf{U}}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{W}}_1^+ \\ \hat{\mathbf{P}}_2^+ \end{bmatrix} \bar{\mathbf{p}} \quad (2.11.8)$$

usando le seguenti posizioni:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{u1u1} & \mathbf{A}_{u1t2} \\ \mathbf{A}_{t2u1} & \mathbf{A}_{t1t2} \end{bmatrix} \quad (3.1.9)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ -\mathbf{U}_2 \end{bmatrix} \quad (3.11.10)$$

$$\mathbf{L}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{u1u2} \\ \mathbf{A}_{t2u2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}_u = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{u1t1} \\ \mathbf{A}_{t2t1} \end{bmatrix} \quad (3.11.11a-b)$$

$$\hat{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{W}}_1^+ \\ \hat{\mathbf{P}}_2^+ \end{bmatrix} \quad (3.11.12)$$

L'equazione (3.11.6) è l'equazione risolvibile del sistema con  $\mathbf{K}$  matrice di pseudorigidezza, definita simmetrica, non singolare ed  $\hat{\mathbf{L}}$  vettore dei termini noti. L'operazione di riordino e la partizione della matrice  $\mathbf{B}$  consentono di ottenere sia la matrice  $\mathbf{K}$  dei coefficienti del sistema risolvibile che le matrici di carico  $\hat{\mathbf{L}}_t$  ed  $\hat{\mathbf{L}}_u$  associati alle forze note sul contorno originariamente libero ed agli spostamenti sul contorno originariamente vincolato.

Nell'operazione di partizione della matrice  $\mathbf{B}$  i blocchi riga relativi agli spostamenti pesati  $\mathbf{W}_2^+$  ed alle trazioni pesate  $\mathbf{P}_1^+$  non sono stati considerati. Le relative

espressioni non sono utili al fine della determinazione del vettore soluzione. Esse sono utili per una verifica a posteriori. Infatti:

$$\mathbf{W}_2^+ = \mathbf{A}_{u_2u_2} \bar{\mathbf{F}}_2 + \mathbf{L}_t^T \mathbf{X} + \mathbf{A}_{u_2t_1} (-\bar{\mathbf{U}}_1) + \hat{\mathbf{W}}_2^+ \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad (2.11.13)$$

$$\mathbf{P}_1^+ = \mathbf{A}_{t_1u_2} \bar{\mathbf{F}}_2 + \mathbf{L}_u^T \mathbf{X} + \mathbf{A}_{t_1t_1} (-\bar{\mathbf{U}}_1) + \hat{\mathbf{P}}_1^+ \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad (2.11.14)$$

Dovendo queste espressioni essere nulle a soluzione ottenuta, esse verranno utilizzate per controllare la bontà della soluzione.

## Capitolo 3

### Multidomini

#### 3.1 Analisi per sottostrutture.

Nell'ambito del metodo simmetrico degli elementi di contorno (SBEM), l'approccio per sottodomini, introdotto da Maier et al. [30], consente l'analisi di un solido continuo mediante la suddivisione in macro-elementi, aventi ciascuno differenti caratteristiche fisiche e geometriche. Questo approccio è stato applicato con successo nell'analisi di lastre da numerosi ricercatori, come Gray e Paulino [18], Panzeca e Salerno [36], Vodicka et al. [57], i quali ne hanno evidenziato le peculiarità e i vantaggi computazionali sia per la forte riduzione delle variabili del sistema, sia per la facilità con cui la discretizzazione può essere generata e modificata. Tale metodo peraltro risulta vantaggioso nell'analisi di problemi di ingegneria quali il contatto, la frattura, il danno, la plasticità ed anche nell'analisi di sistemi strutturali dove è utile l'accoppiamento SBEM-FEM. Nell'ambito del BEM per collocazione un approccio per sottodomini di piastre comunque vincolate è stato impiegato da De Paiva e Aliabadi [9,10].

La strategia seguita consiste nella determinazione analitica di una matrice, definita caratteristica, ottenuta senza distinguere la tipologia del contorno (libero, vincolato o di interfaccia), per ciascun elemento del sistema suddiviso in macro e micro-zone, chiamate elementi BEM (e-bem). Si sono scelte le funzioni di forma lineari sia nella modellazione delle grandezze di contorno della piastra che nella pesatura della risposta al fine di effettuare l'assemblaggio con le lastre via Karnak dove tutte le grandezze impiegano funzioni di forma lineari.

Le cause (valori nodali) introdotte sui nodi sono 6 e riguardano uno spostamento e due rotazioni, una forza verticale e due momenti.

Ciascuna forza e spostamento nodale determina 2 distribuzioni per lato. Ciascuna coppia e rotazione nodale determina sui lati contigui 4 distribuzioni differenti, 2 su ciascun lato. In totale le cause (distribuzione sui lati) sono 20.

Per passare da valore nodale ad azione distribuita sui lati contigui occorre introdurre una matrice di trasformazione  $T$ .

Gli effetti sono caratterizzati su ciascun lato da 6 distribuzioni. In totale il peso computazionale per ogni lato è di  $20 \times 6 = 120$  integrali.

Per passare dalla risposta distribuita su ciascun lato al valore pesato associato al nodo, occorre introdurre una matrice di trasformazione  $\tilde{T}$ .

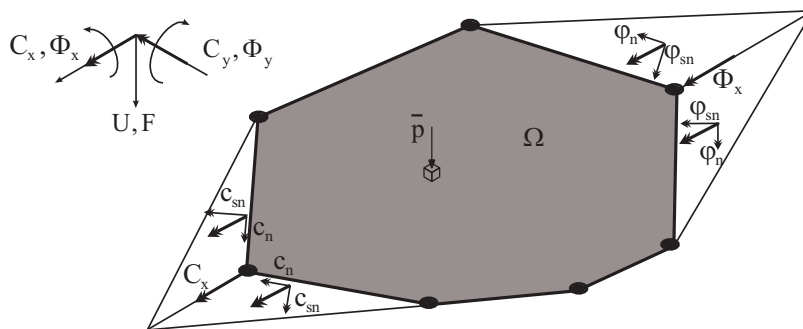


Fig. 3.1.1 Distribuzione della causa  $C_x$  (su 2 lati); distribuzione degli effetti  $\Phi_x$  (su due lati)

Si considera un e-bem di forma qualsiasi, l'ipotesi adottata è basata sul concetto di distribuzione:

- distribuzione della causa  $C_x$  (su 2 lati)
- distribuzione degli effetti  $\Phi_x$  (su due lati)

Il controllo è fatto attraverso i valori nodali, in particolare nella (Fig. 3.1.1) si hanno 4 distribuzioni delle cause.



Se si considera una distribuzione di coppie  $C_x$  lungo due lati vicini secondo il sistema generale (che coincide con il sistema di riferimento nodo) questo deve essere regolato attraverso la congruenza di una coppia nodale  $C_x$ .

Quest'ultima determina nei due lati, con riferimento al sistema locale lato, le distribuzioni (due per parte) che costituiscono per ogni lato ad una distribuzione di flessione e ad una distribuzione torsione.

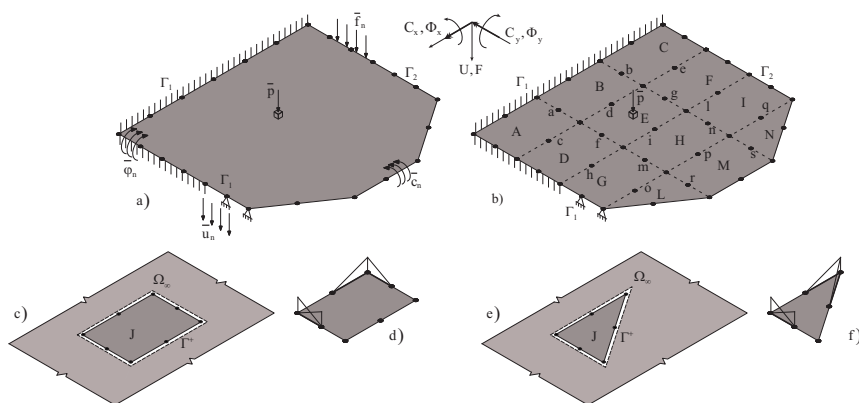
L'effetto deve essere valutato anche qui in un nodo. Quindi per conoscere la rotazione secondo  $x$  di un nodo, la si deve valutare in forma pesata attraverso la conoscenza di distribuzioni, di rotazioni, di flessione e torsione su ciascun lato e di queste distribuzioni deve essere effettuata la pesatura. Così si ottiene la  $\Phi_x$  pesata che entra in gioco nella matrice risolvete del sistema.

La precedente strategia di analisi comporta un elevato onere computazionale, pertanto per il momento si è passati ad analizzare la piastra tramite una discretizzazione in e-bem. Quindi la stessa piastra viene suddivisa in e-bem di forma rettangolare a 8 e di forma triangolare a 6, con le stesse caratteristiche fisiche.

Ogni e-bem viene immerso nel dominio illimitato e per esso viene determinata una matrice caratteristica  $\mathbf{B}$  e un'equazione di elasticità.

Un corpo continuo (Fig. 3.1.1 a) viene discretizzato in e-bem di forma rettangolare e triangolare (Fig. 3.1.1 b) ognuno dei quali è caratterizzato da un contorno del tipo  $\Gamma_1$  vincolato,  $\Gamma_2$  libero,  $\Gamma_0$  di interfaccia.

Il comportamento di ogni e-bem viene descritto in termini di sole variabili cinematiche e meccaniche di interfaccia, si ottiene così una relazione di tipo costitutivo che lega le grandezze incognite di interfaccia con le azioni esterne.



**a)** Sistema continuo. **b)** sistema suddiviso in sottodomini (macro-elementi A, B, ... E). **c)** e-bem rettangolare J. **d)** modellazione delle forze e dei momenti in un e-bem rettangolare. **e)** e-bem triangolare J. **f)** modellazione delle forze e dei momenti in un e-bem triangolare.

Poiché si opera con sole variabili di interfaccia si riesce con tale approccio a potenziare ulteriormente una caratteristica propria del metodo degli elementi di contorno che è quella di impiegare un numero ridotto di sole variabili di contorno.

Suddivisa la piastra in e-bem, vengono generate per ciascuno di esso una matrice caratteristica  $\mathbf{B}$  e un vettore di carico  $\mathbf{L}$ . L'introduzione delle condizioni meccaniche e cinematiche di contorno relative a ciascun e-bem consente di generare, attraverso la matrice caratteristica  $\mathbf{B}$  e al vettore di carico  $\mathbf{L}$ , gli operatori algebrici caratteristici del metodo di analisi adottato. Dalla matrice caratteristica e dal vettore di carico vengono estratti i coefficienti del sistema risolvete, pervenendo così alla formulazione agli spostamenti, in analogia con il FEM.

### 3.2 Metodo degli spostamenti.

Per ottenere l'equazione di elasticità si effettua la distinzione tra grandezze note ed incognite e un riordino tra le righe e le colonne della matrice caratteristica  $\mathbf{B}$ .

Nel caso in cui le proprietà fisiche e geometriche della piastra sono diverse da zona a zona, si opera una suddivisione del solido in macroelementi. Questa suddivisione conduce all'introduzione di un contorno di interfaccia  $\Gamma_0$  tra macro-elementi contigui.

Le condizioni generalizzate di Dirichlet e Neumann sul contorno  $\Gamma_1^+$ ,  $\Gamma_0^+$  e  $\Gamma_2^+$  diventano:

$$\mathbf{W}_1^+ = \mathbf{W}_1 - \bar{\mathbf{W}}_1 = \mathbf{0} \quad \int_{\Gamma_1^+} \boldsymbol{\psi} \mathbf{u}_1 \, d\Gamma_1^+ = \int_{\Gamma_1^+} \boldsymbol{\psi} \bar{\mathbf{u}}_1 \, d\Gamma_1^+ \quad \text{su } \Gamma_1^+ \quad (3.2.1)$$

$$\mathbf{W}_0^+ = \mathbf{0} \quad \int_{\Gamma_0^+} \boldsymbol{\psi} \mathbf{u}_0^+ \, d\Gamma_0^+ = \mathbf{0} \quad \text{su } \Gamma_0^+ \quad (3.2.2)$$

$$\mathbf{P}_2^+ = \mathbf{P}_2 - \bar{\mathbf{P}}_2 = \mathbf{0} \quad \int_{\Gamma_2^+} \boldsymbol{\psi} \mathbf{t}_2 \, d\Gamma_2^+ = \int_{\Gamma_2^+} \boldsymbol{\psi} \bar{\mathbf{t}}_2 \, d\Gamma_2^+ \quad \text{su } \Gamma_2^+ \quad (3.2.3)$$

$\mathbf{P}_0$  è il vettore delle trazioni e dei momenti valutati in  $\Gamma$  dalla (2.1.26) si ha:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_1^+ \\ \mathbf{W}_2^+ \\ \mathbf{W}_0^+ \\ \mathbf{P}_1^+ \\ \mathbf{P}_2^+ \\ \mathbf{P}_0^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{u1u1} & \mathbf{A}_{u1u2} & \mathbf{A}_{u1u0} & \bar{\mathbf{A}}_{u1t1} & \mathbf{A}_{u1t2} & \mathbf{A}_{u1t0} \\ \mathbf{A}_{u2u1} & \mathbf{A}_{u2u2} & \mathbf{A}_{u2u0} & \mathbf{A}_{u2t1} & \bar{\mathbf{A}}_{u2t2} & \mathbf{A}_{u2t0} \\ \mathbf{A}_{u0u1} & \mathbf{A}_{u0u2} & \mathbf{A}_{u0u0} & \mathbf{A}_{u0t1} & \mathbf{A}_{u0t2} & \bar{\mathbf{A}}_{u0t0} \\ \mathbf{A}_{t1u1} & \mathbf{A}_{t1u2} & \mathbf{A}_{t1u0} & \mathbf{A}_{t1t1} & \mathbf{A}_{t1t2} & \mathbf{A}_{t1t0} \\ \mathbf{A}_{t2u1} & \mathbf{A}_{t2u2} & \mathbf{A}_{t2u0} & \mathbf{A}_{t2t1} & \mathbf{A}_{t2t2} & \mathbf{A}_{t2t0} \\ \mathbf{A}_{t0u1} & \mathbf{A}_{t0u2} & \mathbf{A}_{t0u0} & \mathbf{A}_{t0t1} & \mathbf{A}_{t0t2} & \mathbf{A}_{t0t0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \bar{\mathbf{F}}_2 \\ \mathbf{F}_0 \\ -\bar{\mathbf{U}}_1 \\ -\mathbf{U}_2 \\ -\mathbf{U}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{W}}_1^+ \\ \hat{\mathbf{W}}_2^+ \\ \hat{\mathbf{W}}_0^+ \\ \hat{\mathbf{P}}_1^+ \\ \hat{\mathbf{P}}_2^+ \\ \hat{\mathbf{P}}_0^+ \end{bmatrix} \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.4)$$

La matrice caratteristica ed i vettori delle azioni di volume vengono riordinati in base alle condizioni al contorno:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_2^+ \\ \mathbf{W}_1^+ \\ \mathbf{W}_0^+ \\ \mathbf{P}_2^+ \\ \mathbf{P}_0^+ \\ \mathbf{P}_1^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{u2u2} & \mathbf{A}_{u2u1} & \mathbf{A}_{u2u0} & \bar{\mathbf{A}}_{u2t2} & \mathbf{A}_{u2t0} & \mathbf{A}_{u2t1} \\ \mathbf{A}_{u1u2} & \mathbf{A}_{u1u1} & \mathbf{A}_{u1u0} & \mathbf{A}_{u1t2} & \mathbf{A}_{u1t0} & \bar{\mathbf{A}}_{u1t1} \\ \mathbf{A}_{u0u2} & \mathbf{A}_{u0u1} & \mathbf{A}_{u0u0} & \mathbf{A}_{u0t2} & \bar{\mathbf{A}}_{u0t0} & \mathbf{A}_{u0t1} \\ \hline \mathbf{A}_{t2u2} & \mathbf{A}_{t2u1} & \mathbf{A}_{t2u0} & \mathbf{A}_{t2t2} & \mathbf{A}_{t2t0} & \mathbf{A}_{t2t1} \\ \hline \mathbf{A}_{t0u2} & \mathbf{A}_{t0u1} & \mathbf{A}_{t0u0} & \mathbf{A}_{t0t2} & \mathbf{A}_{t0t0} & \mathbf{A}_{t0t1} \\ \mathbf{A}_{t1u2} & \mathbf{A}_{t1u1} & \mathbf{A}_{t1u0} & \mathbf{A}_{t1t2} & \mathbf{A}_{t1t0} & \mathbf{A}_{t1t1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_2 \\ \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_0 \\ -\mathbf{U}_2 \\ -\mathbf{U}_0 \\ -\mathbf{U}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{W}}_2^+ \\ \hat{\mathbf{W}}_1^+ \\ \hat{\mathbf{W}}_0^+ \\ \hat{\mathbf{P}}_2^+ \\ \hat{\mathbf{P}}_0^+ \\ \hat{\mathbf{P}}_1^+ \end{bmatrix} \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.2.5)$$

I vettori  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{U}$  (le cause) sono definiti nel seguente modo:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_2^T & \mathbf{F}_1^T & \mathbf{F}_0^T \end{bmatrix}^T \quad \text{su} \quad \Gamma \quad (3.2.6)$$

$$(-\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} -\mathbf{U}_2^T & -\bar{\mathbf{U}}_0^T & -\mathbf{U}_1^T \end{bmatrix}^T \quad \text{su} \quad \Gamma \quad (3.2.7)$$

In modo analogo i vettori delle quantità pesate  $\mathbf{W}^+$  e  $\mathbf{P}^+$  (gli effetti) sono definiti come segue:

$$\mathbf{W}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_2^{+T} & \mathbf{W}_1^{+T} & \mathbf{W}_0^{+T} \end{bmatrix}^T \quad \text{su} \quad \Gamma^+ \quad (3.2.8)$$

$$\mathbf{P}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_2^{+T} & \mathbf{P}_0^{+T} & \mathbf{P}_1^{+T} \end{bmatrix}^T \quad \text{su} \quad \Gamma^+ \quad (3.2.9)$$

Le incognite del problema sono date dal seguente vettore:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^T & \mathbf{F}_2^T & -\mathbf{U}_2^T & -\mathbf{U}_0^T \end{bmatrix}^T \quad (3.2.10)$$

Il termine di carico è dato dal seguente vettore:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{W}}_1^{+T} & \hat{\mathbf{W}}_2^{+T} & \hat{\mathbf{P}}_2^{+T} & \hat{\mathbf{P}}_0^{+T} \end{bmatrix}^T \quad (3.2.11)$$

Tra le sei relazioni ottenibili dalla (3.2.5), la prima e l'ultima sono utilizzate a posteriori come verifica nel bilancio energetico complessivo; la quinta relativa a  $\mathbf{P}_0^+$

subisce una modifica strategica che comporta che il processo di pesatura, anziché sul contorno  $\Gamma^+$ , viene operato sul contorno  $\Gamma$ , operando con tale intervento solamente un cambio di segno sul termine libero pesato  $\overline{\mathbf{A}}_{t0u0}$ . Tutte le rimanenti relazioni rimangono inalterate.

Questo riordino ci permette di pervenire alle seguenti equazioni, essendo le quantità al contorno e di dominio dentro il vettore di carico:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_1^+ = 0 \\ \mathbf{W}_0^+ = 0 \\ \mathbf{P}_2^+ = 0 \\ \mathbf{P}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{u1u1} & \mathbf{A}_{u1u0} & \mathbf{A}_{u1t2} & \mathbf{A}_{u1t0} \\ \mathbf{A}_{u0u1} & \mathbf{A}_{u0u0} & \mathbf{A}_{u0t2} & \overline{\mathbf{A}}_{u0t0} \\ \mathbf{A}_{t2u1} & \mathbf{A}_{t2u0} & \mathbf{A}_{t2t2} & \mathbf{A}_{t2t0} \\ \mathbf{A}_{t0u1} & \overline{\mathbf{A}}_{t0u0} & \mathbf{A}_{t0t2} & \mathbf{A}_{t0t0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_0 \\ -\mathbf{U}_2 \\ -\mathbf{U}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{u1u2} & \overline{\mathbf{A}}_{u1t1} \\ \mathbf{A}_{u0u2} & \mathbf{A}_{u0t1} \\ \overline{\mathbf{A}}_{t2u2} & \mathbf{A}_{t2t1} \\ \mathbf{A}_{t0u2} & \mathbf{A}_{t0t1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{F}}_2 \\ -\overline{\mathbf{U}}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{W}}_1^+ \\ \hat{\mathbf{W}}_0^+ \\ \hat{\mathbf{P}}_2^+ \\ \hat{\mathbf{P}}_0 \end{bmatrix} \overline{\mathbf{p}} \quad (3.2.12)$$

Che possiamo scrivere in forma compatta:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{H}_0 \\ \mathbf{H}_0^T & \mathbf{H}_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ -\mathbf{U}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{L}_t & \mathbf{L}_u \\ \mathbf{A}_{t0u2} & \mathbf{A}_{t0t1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{F}}_2 \\ -\overline{\mathbf{U}}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{L}_p \\ \mathbf{L}_{0p} \end{bmatrix} \overline{\mathbf{p}} \quad (3.2.13)$$

si ha:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{u1u1} & \mathbf{A}_{u1u0} & \mathbf{A}_{u1t2} \\ \mathbf{A}_{u0u1} & \mathbf{A}_{u0u0} & \mathbf{A}_{u0t2} \\ \mathbf{A}_{t2u1} & \mathbf{A}_{t2u0} & \mathbf{A}_{t2t2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_0 \\ -\mathbf{U}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{u1t0} \\ \overline{\mathbf{A}}_{u0t0} \\ \mathbf{A}_{t2t0} \end{bmatrix} [-\mathbf{U}_0] + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{u1u2} & \overline{\mathbf{A}}_{u1t1} \\ \mathbf{A}_{u0u2} & \mathbf{A}_{u0t1} \\ \overline{\mathbf{A}}_{t2u2} & \mathbf{A}_{t2t1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{F}}_2 \\ -\overline{\mathbf{U}}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{W}}_1^+ \\ \hat{\mathbf{W}}_0^+ \\ \hat{\mathbf{P}}_2^+ \end{bmatrix} \overline{\mathbf{p}} \quad (3.2.14 a)$$

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{t0u1} & \overline{\mathbf{A}}_{t0u0} & \mathbf{A}_{t0t2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_0 \\ -\mathbf{U}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{t0t0} \end{bmatrix} [-\mathbf{U}_0] + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{t0u2} & \mathbf{A}_{t0t1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{F}}_2 \\ -\overline{\mathbf{U}}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_0^+ \end{bmatrix} \overline{\mathbf{p}} \quad (3.2.14 b)$$

usando le seguenti posizioni:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{u1u1} & \mathbf{A}_{u1u0} & \mathbf{A}_{u1t2} \\ \mathbf{A}_{u0u1} & \mathbf{A}_{u0u0} & \mathbf{A}_{u0t2} \\ \mathbf{A}_{t2u1} & \mathbf{A}_{t2u0} & \mathbf{A}_{t2t2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_0 \\ -\mathbf{U}_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{u1t0} \\ \bar{\mathbf{A}}_{u0t0} \\ \mathbf{A}_{t2t0} \end{bmatrix} \quad (3.2.15 \text{ a-c})$$

$$\mathbf{L}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{u1u2} \\ \mathbf{A}_{u0u2} \\ \mathbf{A}_{t2u2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L}_u = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{u1t1} \\ \mathbf{A}_{u0t1} \\ \mathbf{A}_{t2t1} \end{bmatrix}; \quad \hat{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{W}}_1^+ \\ \hat{\mathbf{W}}_0^+ \\ \hat{\mathbf{P}}_2^+ \end{bmatrix} \quad (3.2.16 \text{ a-c})$$

$$\mathbf{H}_{00} = [\mathbf{A}_{t0t0}]; \quad \hat{\mathbf{L}}_0 = [\hat{\mathbf{P}}_0^+] \quad (3.2.17 \text{ a-b})$$

Le (3.2.14 a-b) possono essere scritte in forma compatta tralasciando le forze di volume come:

$$\mathbf{0} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{H}_0(-\mathbf{U}_0) + \mathbf{L}_t \bar{\mathbf{F}}_2 + \mathbf{L}_u(-\bar{\mathbf{U}}_1) \quad (3.2.18)$$

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{H}_0^T \mathbf{X} + \mathbf{H}_{00}(-\mathbf{U}_0) + \mathbf{A}_{t0u2} \bar{\mathbf{F}}_2 + \mathbf{A}_{t0t1}(-\bar{\mathbf{U}}_1) \quad (3.2.19)$$

da cui si ha:

$$\mathbf{X} = -\mathbf{H}^{-1} (\mathbf{H}_0(-\mathbf{U}_0) + \mathbf{L}_t \bar{\mathbf{F}}_2 + \mathbf{L}_u(-\bar{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{L}_p \bar{\mathbf{p}}) \quad (3.2.20)$$

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{H}_0^T \mathbf{X} + \mathbf{H}_{00}(-\mathbf{U}_0) + \mathbf{A}_{t0u2} \bar{\mathbf{F}}_2 + \mathbf{A}_{t0t1}(-\bar{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{L}_{0p} \bar{\mathbf{p}} \quad (3.2.21)$$

sostituendo si ha:

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{H}_0^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{H}_0 (\mathbf{U}_0) + \mathbf{H}_0^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{L}_t \bar{\mathbf{F}}_2 + \mathbf{H}_0^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{L}_u (-\bar{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{H}_0^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{L}_p \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{H}_{00}(-\mathbf{U}_0) + \mathbf{A}_{t0u2} \bar{\mathbf{F}}_2 + \mathbf{A}_{t0t1}(-\bar{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{L}_{0p} \bar{\mathbf{p}} \quad (3.1.22)$$

da cui:

$$\mathbf{P}_0 = (\mathbf{H}_0^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{H}_0 - \mathbf{H}_{00}) (\mathbf{U}_0) + \mathbf{H}_0^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{L}_t \bar{\mathbf{F}}_2 + \mathbf{H}_0^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{L}_u (-\bar{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{H}_0^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{L}_p \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{A}_{t0u2} \bar{\mathbf{F}}_2 + \mathbf{A}_{t0t1}(-\bar{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{L}_{0p} \bar{\mathbf{p}} \quad (3.2.23)$$

dove il vettore  $\mathbf{U}_0$  contiene gli spostamenti e le rotazioni dei nodi del contorno  $\Gamma_0$ .

Sostituendo il vettore  $\mathbf{X}$  ottenuto dalla relazione (3.2.20) nella (3.2.21), si ottiene la seguente equazione sforzi generalizzati-spostamenti nodali:

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{D}_{00} \mathbf{U}_0 + \hat{\mathbf{P}}_0 \quad (3.2.24)$$

### 3.3 Soluzione del problema di analisi del sistema assemblato.

L'eq. (3.2.24) relaziona le quantità meccaniche generalizzate  $\mathbf{P}_0$  associate ai nodi di  $\Gamma_0$  alle quantità cinematiche  $\mathbf{U}_0$  dei nodi dello stesso contorno e del vettore di carico  $\hat{\mathbf{P}}_0$ . L'operatore algebrico  $\mathbf{D}_{00}$  è la matrice di rigidità della sottostruttura in esame ed è simmetrica e singolare dove:

$$\mathbf{D}_{00} = \mathbf{H}_0^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{H}_0 - \mathbf{H}_{00} \quad (3.3.1)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_0 = \hat{\mathbf{L}}_0 - \mathbf{H}_0^T \mathbf{H}^{-1} \hat{\mathbf{L}} \quad (3.3.2)$$

- Si impone la compatibilità fra gli spostamenti nodali di interfaccia degli elementi e-bem contigui:

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z} \mathbf{u} \quad (3.3.3)$$

- Si considera un' equazione di tipo globale che raccoglie le precedenti equazioni scritte per ogni sottostruttura:

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} \mathbf{U} + \hat{\mathbf{P}} \quad (3.3.4)$$

- si impone la condizione di regolarità fra le forze generalizzate di interfaccia scritte nella forma:

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (3.3.5)$$

Imponendo le condizioni di regolarità riguardante i tagli e i momenti generalizzati lungo i lati di interfaccia degli elementi contigui e gli spostamenti dei nodi degli stessi contorni, si ottiene il seguente sistema risolvete:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{f}^* = \mathbf{0} \quad (3.3.6)$$

matrice di rigidezza della struttura (simmetrica e non singolare)

$$\mathbf{K} = \mathbf{Z}^T \mathbf{D} \mathbf{Z} \quad (3.3.7)$$

vettore delle trazioni generalizzate

$$\mathbf{f}^* = \mathbf{Z}^T \hat{\mathbf{P}} \quad (3.3.8)$$

dove  $\mathbf{K}$  è la matrice di rigidezza del sistema assemblato, mentre  $\hat{\mathbf{P}}$  rappresenta il termine di carico generalizzato valutato lungo i lati degli stessi elementi di contorno. Operando in questo modo, il sistema risolvete è ottenuto in termini di spostamenti e rotazioni dei nodi d'interfaccia.

In una fase post-analisi possono essere determinate le reazioni del contorno vincolato, gli spostamenti e le rotazioni dei nodi liberi, così come tutte le grandezze meccaniche e cinematiche di ciascuna sottostruttura.

I vantaggi di tale approccio sono diversi:

- una considerevole riduzione delle variabili, ottenuta attraverso un processo di condensazione che lascia solamente le variabili cinematiche d'interfaccia;
- garantisce la compatibilità e l'equilibrio in ciascun punto del dominio, grazie all'impiego delle soluzioni fondamentali;
- possiede operatori simmetrici e definiti e consente di trattare più agevolmente piastre geometricamente complesse.



### 3.4 Sistema spaziale formato da elementi di tipo lastra-piastra analizzato tramite il SBEM

Questo paragrafo ha come obiettivo quello di considerare un sistema spaziale i cui elementi bidimensionali posseggono comportamento flessionale e membranale e sono calcolati tramite il Metodo Simmetrico alla Galerkin degli Elementi di Contorno.

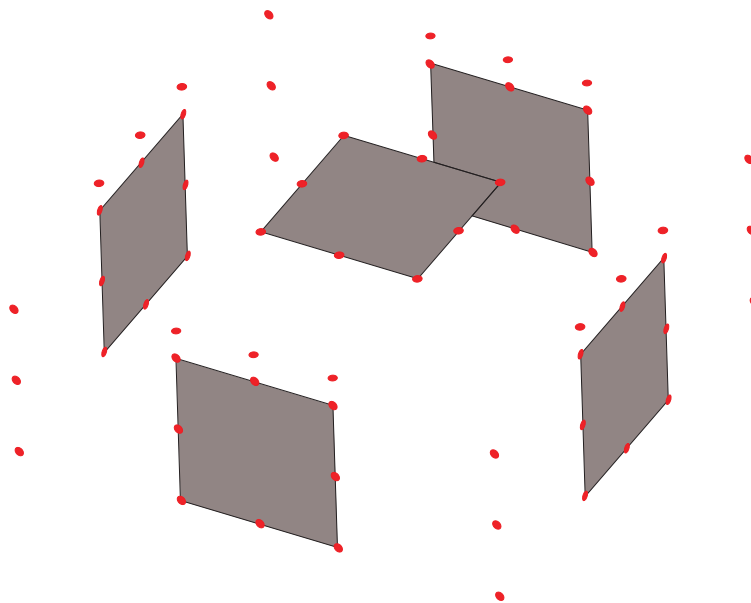


Fig. 3.4.1. Sistema spaziale.

Gli unici nodi che regolano tutto il problema di analisi sono i nodi disposti lungo le linee di connessione tra gli elementi lastra-piastra.

Lo scopo è quello di ottenere una matrice caratteristica  $\mathbf{B}_c$  valida per un elemento avente geometria qualsiasi.

$$\mathbf{B}_c = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{B}_L & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{array} \right] \quad (3.4.1)$$

$$\mathbf{B}_c = \left[ \begin{array}{cc|cc|ccc|ccc} & F_x & F_y & \Delta U_x & \Delta U_y & F_z & C_n & C_{sn} & \Delta U_z & \Delta \Phi_x & \Delta \Phi_y \\ \hline W_x^+ & B_{u1u1} & B_{u1u2} & B_{u1t1} & B_{u1t2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W_y^+ & B_{u2u1} & B_{u2u2} & B_{u2t1} & B_{u2t2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline T_x^+ & B_{t1u1} & B_{t1u2} & B_{t1t1} & B_{t1t2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_y^+ & B_{t2u1} & B_{t2u2} & B_{t2t1} & B_{t2t2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline W_z^+ & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{u1u1} & B_{u1u2} & B_{u1u3} & B_{u1t1} & B_{u1t2} & B_{u1t3} \\ \Phi_n^+ & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{u2u1} & B_{u2u2} & B_{u2u3} & B_{u2t1} & B_{u2t2} & B_{u2t3} \\ \Phi_{sn}^+ & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{u3u1} & B_{u3u2} & B_{u3u3} & B_{u3t1} & B_{u3t2} & B_{u3t3} \\ \hline T_z^+ & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{t1u1} & B_{t1u2} & B_{t1u3} & B_{t1t1} & B_{t1t2} & B_{t1t3} \\ M_x^+ & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{t2u1} & B_{t2u2} & B_{t2u3} & B_{t2t1} & B_{t2t2} & B_{t2t3} \\ M_y^+ & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{t3u1} & B_{t3u2} & B_{t3u3} & B_{t3t1} & B_{t3t2} & B_{t3t3} \end{array} \right] \quad (3.4.2)$$

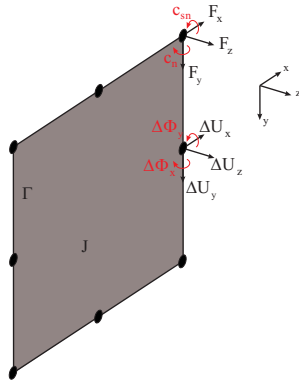


Fig. 3.4.2. Elemento Lastra-Piastra

## Capitolo 4

### **Applicazioni numeriche.**

Scopo di questo capitolo è quello di applicare il metodo presentato nei capitoli precedenti a problemi di meccanica strutturale.

Le applicazioni delle piastre sono state realizzate con un codice di calcolo per l'analisi di strutture tridimensionali, soggette a carichi uniformemente distribuiti agenti ortogonalmente al piano medio, redatto da Cucco F., Panzeca T., Salerno M., La Mantia A. chiamato Karnak. sGbem Piastre 1-Palermo.

#### **Legenda**

E = modulo di elasticità

$\nu$  = coefficiente di Poisson

h = spessore della piastra

q = carico uniformemente ripartito ortogonale al piano medio della piastra

#### 4.1 Esempio 1: Piastra appoggiata su quattro lati con due differenti spessori.

L'applicazione qui mostrata riguarda una piastra studiata da De Paiva e Aliabadi [10] nel BEM per collocazione. La piastra è suddivisa in due zone aventi caratteristiche fisiche e spessori diversi evidenziate in (Fig. 4.1) nelle due tonalità di grigio. Il rapporto tra le rigidezze delle due zone è il seguente  $D_B/D_A = 3.375$ .

La piastra esaminata presenta tutti i lati appoggiati, è suddivisa in due zone con differenti rigidezze e con un rapporto  $D_B/D_A = 3.375$ , con  $E_A = 72900 \text{ daN/cm}^2$ ,  $E_B = 10000 \text{ daN/cm}^2$ , spessori  $h_A = 0.1 \text{ cm}$ ,  $h_B = 0.135 \text{ cm}$  e  $\nu = 0.3$ , soggetta ad un carico  $q = 1 \text{ daN/cm}^2$  uniformemente ripartito.

La piastra è stata discretizzata in 6 sottostrutture. Nei diagrammi sono riportati gli spostamenti  $I$  e i momenti flettenti  $m_y$  lungo l'interfaccia tra le due zone.

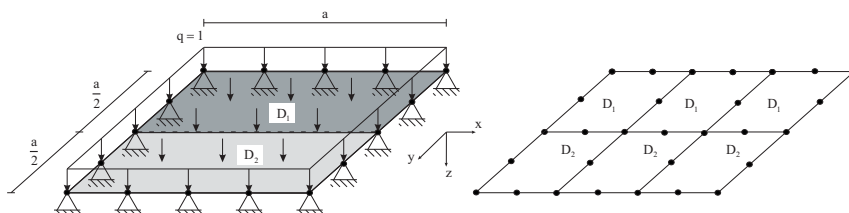


Fig. 4.2.1 Piastra appoggiata su quattro lati discretizzata con sei e-bem.

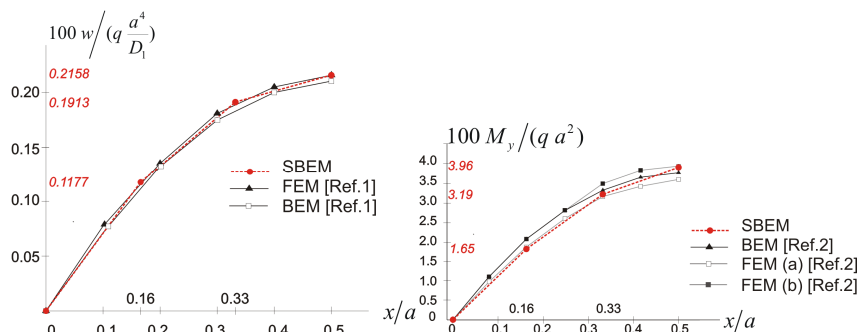


Fig. 4.2.2 a) Spostamenti lungo l'interfaccia. b) Momenti  $M_y$  lungo l'interfaccia

**4.2 Esempio 2: Piastra incastrata su quattro lati con due differenti spessori.**

In questo terzo test la piastra dell'esempio precedente viene analizzata, considerando, il contorno tutto incastrato. Nei diagrammi sono riportati gli spostamenti  $w$  e i momenti flettenti  $M_y$  lungo l'interfaccia tra le due zone, confrontati con quelli ottenuti nel riferimento.

Sebbene la discretizzazione sia meno fitta di quella impiegata nel riferimento, la congruenza dei risultati è buona, specialmente nel caso degli spostamenti.

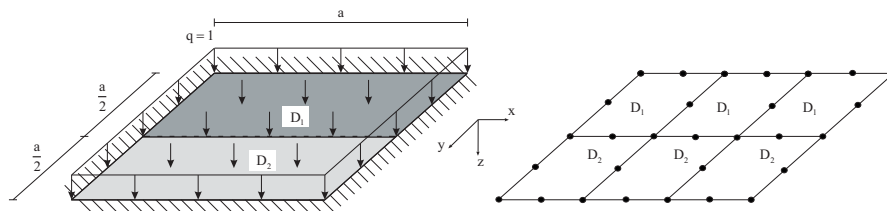


Fig. 4.2. Piastra incastrata su quattro lati discretizzata con sei e-bem.

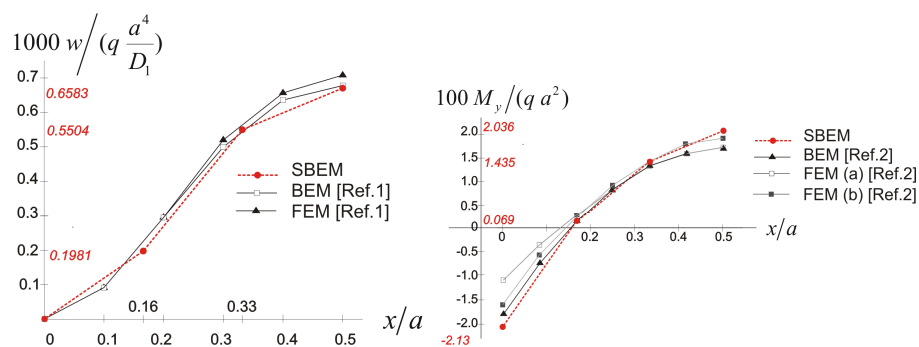


Fig. 4.2.2 a) Spostamenti lungo l'interfaccia. b) Momenti  $M_y$  lungo l'interfaccia.

### 4.3 Esempio 3: Piastra ad L appoggiata.

In questo quarto test viene studiata una piastra ad L appoggiata su quattro lati. Le dimensioni e le caratteristiche fisiche sono riportati in Fig. 4.4.1  $E = 100000 \text{ daN/cm}^2$ ,  $\nu = 0.3$ , carico  $q = 1 \text{ daN/cm}^2$ .

La piastra è stata discretizzata in 3, 12 e 48 e-bem. In Tab. 4.1 sono riportati gli spostamenti trovati nel corner indicato in Fig. 4.4.2 al variare del numero degli e-bem.

Si è fatto un confronto tra gli spostamenti ottenuti con quelli riportati in Fig. 4.4.3 tratta da Beirao da Veiga et al. Rif. [3]. Risulta chiaro che all'aumentare della discretizzazione i valori convergono.

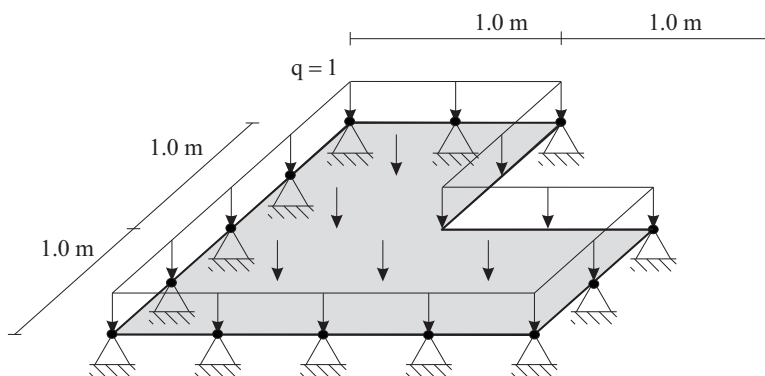


Fig. 4.3.1. Piastra ad L appoggiata.

u (corner)	
3 bems	0.30966
12 bems	0.32978
48 bems	0.33842

Tab. 4.3.1.

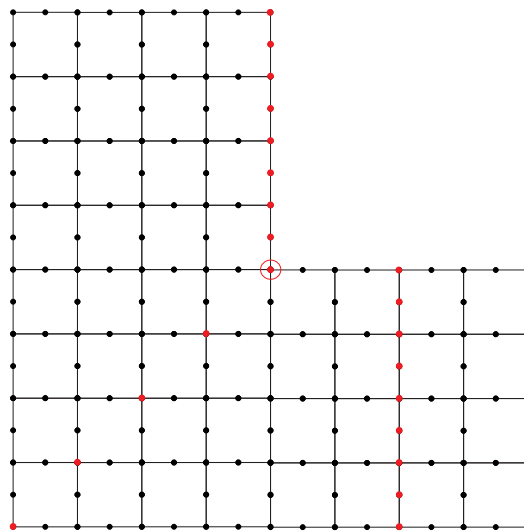


Fig. 4.3.2. Piastra ad L discretizzata in 48 e-bem.

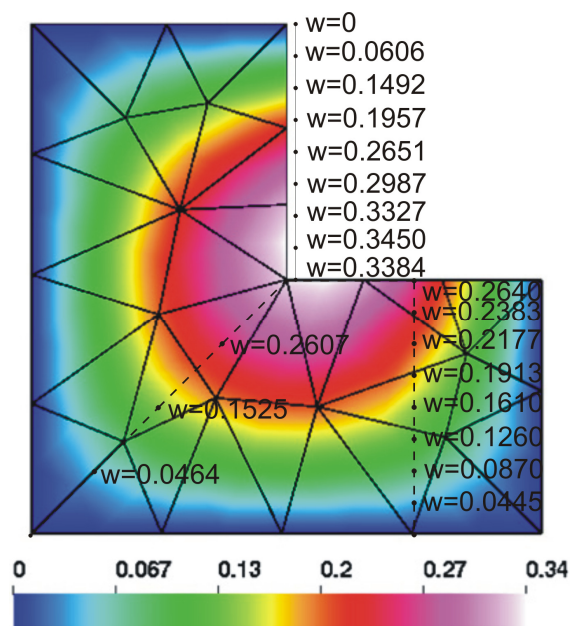


Fig. 4.3.3. Piastra ad L tratta da Rif. [3].

#### 4.4 Esempio 4. Piastra appoggiata su due lati e irrigidita da tre travi.

In questo quinto test viene studiata una piastra appoggiata su due lati e irrigidita da tre travi. Le dimensioni e le caratteristiche fisiche sono riportati in Fig. 4.5.1, con  $E = 3000000 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\nu = 0.16$  e in questa piastra vengono trovati gli spostamenti lungo la linea tratteggiata evidenziata in rosso. In Fig. 4.5.3 vengono riportati gli spostamenti tratti da Waidemam L et al. Rif. [60] e quelli ottenuti con l'SGBEM tramite una discretizzazione di una piastra suddivisa in 56 e-bem (Fig. 4.5.2).

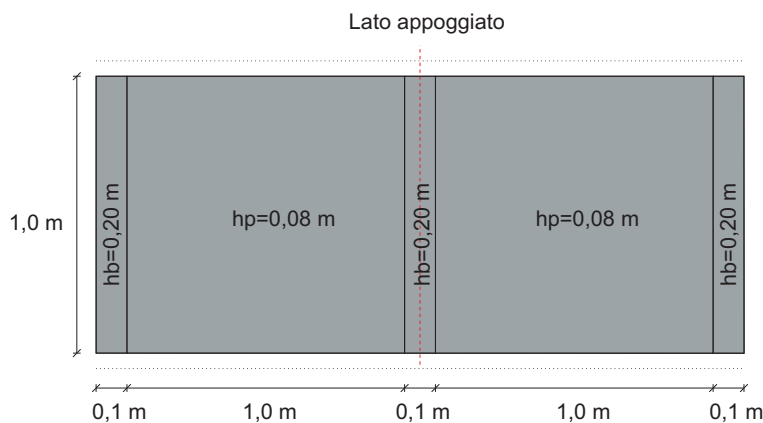


Fig. 4.4.1. Piastra appoggiata su due lati e irrigidita da tre travi, tratta da Rif. [60].

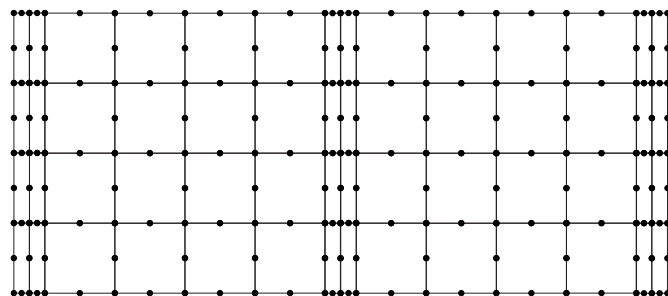


Fig. 4.4.2. Piastra appoggiata su due lati e irrigidita da tre travi studiata con SGBEM e discretizzata in 56 e-bem.



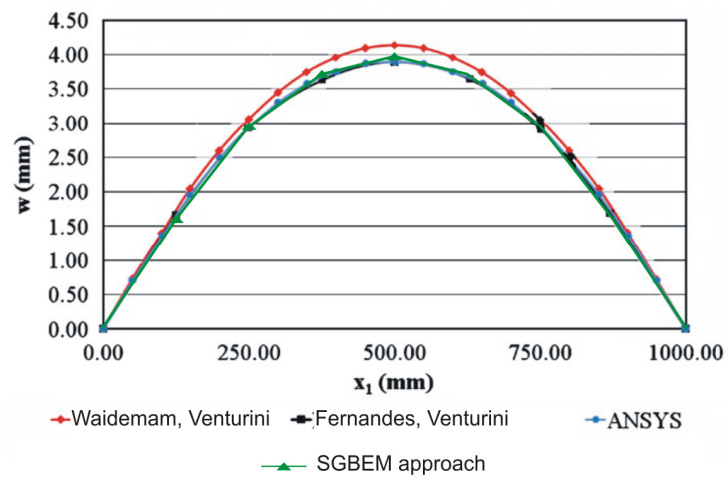


Fig. 4.4.3. Diagramma degli spostamenti tratta da Rif. [60] e confrontato con SGBEM in verde.

#### 4.5 Esempio 5. Piastra tutta appoggiata e irrigidita da 4 travi.

In questo sesto test viene studiata una piastra tutta appoggiata delimitata da 4 travi tratta da Fernandes G.R., Venturini W.S Rif. [12].

Le dimensioni e le caratteristiche fisiche sono riportati in Fig. 4.6.1, con  $E = 250000 \text{ daN/cm}^2$ ,  $\nu = 0.25$ ,  $q = 20 \text{ KN/m}^2$ ,  $h_b = 25 \text{ cm}$ ,  $h_p = 8 \text{ cm}$ , e in questa piastra vengono trovati gli spostamenti lungo la linea tratteggiata evidenziata in rosso. La piastra è stata discretizzata in 12, 16 e 36 e-bem e in Tab. 4.6.1 sono riportati gli spostamenti trovati nel centro indicato in Fig. 4.6.2 al variare del numero degli e-bem.

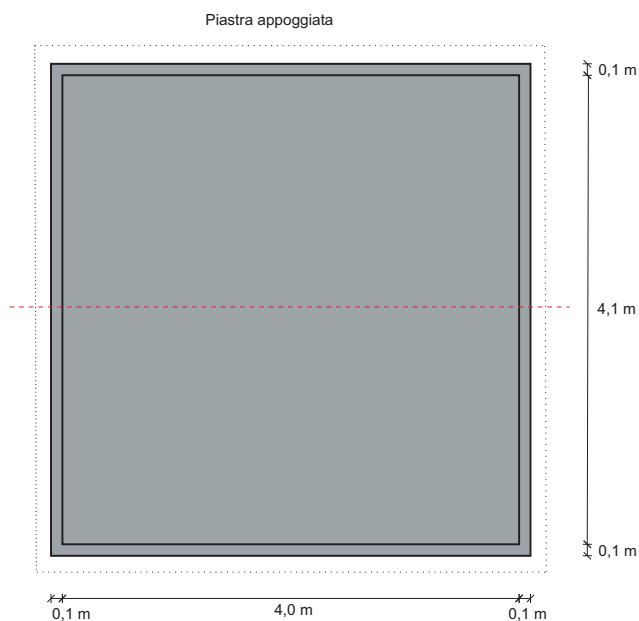


Fig. 4.5.1. Piastra appoggiata su quattro lati e irrigidita da quattro travi, tratta da Rif. [12].

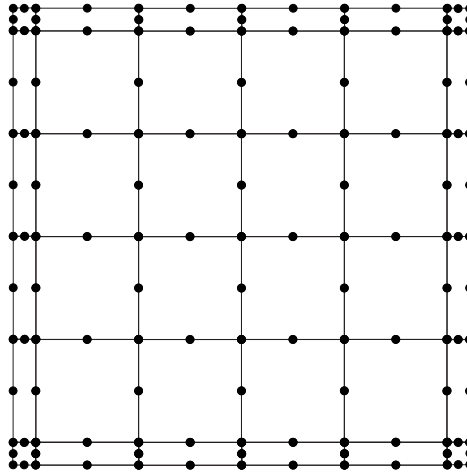


Fig. 4.5.2. Piastra appoggiata su quattro lati e irrigidita da quattro travi studiata con SGBEM e discretizzata in 36 e-bem.

u	
12 bems	1.029056
16 bems	1.063555
36 bems	1.065435

Tab. 4.6.1

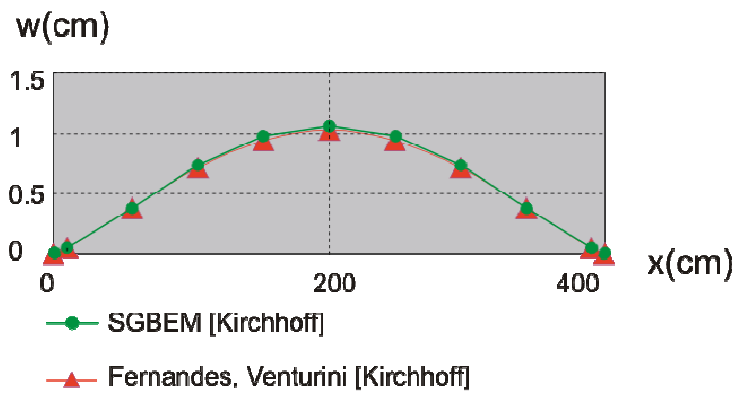


Fig. 4.5.3. Diagramma degli spostamenti tratta da Rif. [12] e confrontato con SGBEM in verde.

#### 4.6 Esempio 6.

In questo settimo test viene mostrato un sistema strutturale costituito da solidi J (con  $J=1, \dots, N$ ) bidimensionali a 8 nodi. Ogni e-bem è soggetto ad azioni esterne e mutuamente connesso nel contorno di interfaccia.

In figura vengono mostrati tre e-bem mutuamente collegati con cerniere cilindriche. I tre e-bem sono incastrati alla base, dove gli elementi 2 e 3 sono considerati come lastre l'elemento 1 è una piastra.

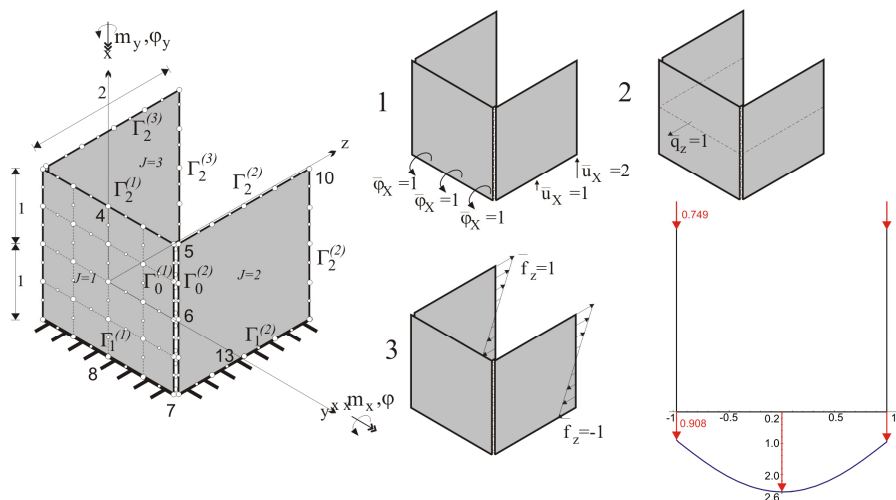


Fig.4.6.1

Vengono ipotizzate tre differenti condizioni di carico:

1. Quantità cinematiche imposte sul lato incastrato danno luogo ad una rotazione rigida attorno al lato incastrato della piastra  $J=1$  e attorno ai nodi delle lastre  $J=2,3$ ;
2. Un carico di dominio uniforme applicato alla piastra  $J=1$ ;
3. Distribuzione lineare di forze sul contorno, imposti nei due lati liberi della piastra  $J=2,3$

Sistema formato da tre e-bem dove si hanno:

- Quantità cinematiche
- Forze e momenti risultanti
- Errori nelle equazioni di equilibrio

per tre condizioni di carico.

	Load condition 1	Load condition 2	Load condition 3
$u_{z4}$	-2.000000	3.744828	1.397315
$\varphi_{x4}$	1.000000	-3.281449	-1.217794
$\varphi_{y4}$	$5.1 \times 10^{-9}$	$1.6 \times 10^{-8}$	$1.3 \times 10^{-9}$
$u_{x5}$	$1.3 \times 10^{-9}$	0.990809	0.645140
$u_{z5}$	-2.000000	2.536825	1.529249
$\varphi_{x5}$	0.999999	-0.762869	-0.655026
$\varphi_{y5}$	$1.5 \times 10^{-9}$	-1.407730	-0.832129
$u_{x6}$	$1.2 \times 10^{-9}$	0.757765	0.577442
$u_{z6}$	-0.999999	0.908269	0.494687
$\varphi_{x6}$	1.000000	5.654555	-0.528024
$\varphi_{y6}$	$-7.3 \times 10^{-9}$	0.181118	-0.181885
$u_{x10}$	1.999999	-0.678301	-0.974296
$u_{z10}$	-2.000000	1.834956	2.334935
$F_{z(7-8)}$	$-2.3 \times 10^{-8}$	-3.358452	-0.460933
$M_{x(7-8)}$	$-2.1 \times 10^{-8}$	0.851098	0.172506
$F_{x(7-13)}$	$-2.8 \times 10^{-9}$	-0.404577	-0.345508
$F_{z(7-13)}$	$1.3 \times 10^{-9}$	-0.173775	-0.060844
$\Delta F_x$	$2.2 \times 10^{-9}$	0.013	0.048
$\Delta F_z$	$3.2 \times 10^{-9}$	0.722	-0.411
$\Delta M_x$	$1.5 \times 10^{-9}$	-0.377	0.487

## Appendice I

### Le equazioni che regolano la piastra di Kirchhoff

Si fa riferimento alla piastra  $S$  di materiale omogeneo ed isotropo avente lo spessore  $h$ , riferita ad un sistema di assi cartesiani  $(0, x, y, z)$  e sottoposta ad azioni meccaniche e cinematiche note.

Il problema elastostatico che si intende risolvere, nel caso del solido in esame, è quello di determinare, nell'ipotesi di spostamenti infinitesimi, la risposta del solido alle azioni applicate in modo quasi statico.

Tale problema elastico può essere regolato da un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali e dalle relative condizioni al contorno. Se si considera nullo il contributo delle deformazioni taglianti trasversali, come ipotizza Kirchhoff, le equazioni di campo che regolano il problema elastico, in forma matriciale possono essere così espresse:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{M} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \text{equazione di equilibrio} \quad (\text{A.1.1})$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{E} \mathbf{I} \mathbf{K} \quad \text{legame momenti-curvature} \quad (\text{A.1.2})$$

$$\mathbf{K} = -\mathbf{C} \mathbf{u} \quad \text{equazione di compatibilità} \quad (\text{A.1.3})$$

Di seguito sarà data chiarezza su come si è pervenuti alle suddette relazioni.

### Equazioni di compatibilità

Il legame deformazioni-spostamenti per la piastra di Mindlin è dato dalle seguenti relazioni:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_x \\ \mathbf{K}_y \\ \mathbf{K}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.4 a})$$

$$\begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (\text{A.1.4 b})$$

che in forma compatta, con ovvio significato dei simboli, diventano:

$$\mathbf{K} = \mathbf{D} \phi \quad (\text{A.1.5 a})$$

$$\mathbf{g} = \phi + \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (\text{A.1.5 b})$$

dove  $\mathbf{K}$  è il vettore delle curvature e  $\mathbf{g}$  il vettore degli scorrimenti.

Accettando le ipotesi semplificative di Kirchhoff ( $g=0$ ), si ha:

$$\phi = -\mathbf{B} \mathbf{u} \quad (\text{A.1.6})$$

Sostituendo la (A.1.6) nella (A.1.5 a) si perviene alla relazione (A.1.3), che di seguito si riporta

$$\mathbf{K} = -\mathbf{C} \mathbf{u} \quad (\text{A.1.7})$$

dove:

$$\mathbf{C} = \mathbf{DB} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.8})$$

**Equazioni di equilibrio**

Si considerano le equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.9 a})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} + p = 0 \quad (\text{A.1.9 b})$$

che in forma compatta, con ovvio significato dei simboli, diventano:

$$\mathbf{T} = \mathbf{D}^T \mathbf{M} \quad (\text{A.1.10})$$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{T} + p = 0$$

Sostituendo la (A.1.10) nella (A.1.11) e ricordando la (A.1.8), si ottiene la (A.1.1), che di seguito si riporta:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{M} + p = 0 \quad (\text{A.1.12})$$

Che rappresenta il legame momenti-curvature.



Le forze interne sono legate, attraverso la legge di Hooke, alle deformazioni. Infatti, tale legame si può così esprimere:

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \quad (A.1.13)$$

essendo

$$\sigma = E_z K$$

dove E rappresenta la matrice di rigidezza del materiale, sostituendo la (A.1.14) nella (A.1.13), si ottiene la relazione (A.1.2) e cioè:

$$M = E I K \quad (A.1.15)$$

## Appendice II

### Energia Potenziale Totale nelle piastre.

Si consideri una piastra costituita da materiale elastico, isotropo ed omogeneo sottoposto ad un carico  $p$  agente in  $\Omega$  e ad azioni sul bordo. Sia  $s$  un ascissa curvilinea che percorre il contorno  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$  del corpo ed  $n$  la normale uscente al contorno stesso.

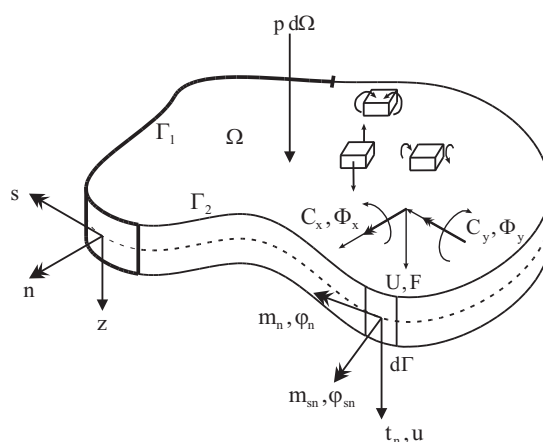


Fig. A.2.1: Forze agenti sul contorno  $\Gamma$  e sul dominio  $\Omega$ .

La distribuzione delle trazioni lungo lo spessore  $h$  della piastra dà luogo a forze trasversali  $t_n$ , momenti flettenti  $m_n$  ed a momenti torcenti  $m_{sn}$ . Le quantità cinematiche ad esse associate sono  $u$ ,  $\varphi_n = -\partial u / \partial n$ ,  $\varphi_{sn} = -\partial u / \partial s$  e rappresentano rispettivamente lo spostamento verticale, rotazione rispetto all'asse  $s$  e rotazione attorno all'asse  $n$ .

Le grandezze cinematiche vengono considerate come virtuali. L'**Energia Potenziale Totale** si può così scrivere:

$$\begin{aligned} \Pi_p = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (m_x K_x + m_y K_y + m_{xy} K_{xy}) d\Omega + \\ & - \int_{\Omega} \mathbf{p} u d\Omega - \int_{\Gamma_2} (\bar{t}_n u + \bar{m}_n \varphi_n + \bar{m}_{sn} \varphi_{sn}) d\Gamma_2 \end{aligned} \quad (\text{A.2.1.1})$$

con le seguenti condizioni:

$$u - \bar{u} = 0; \quad \varphi - \bar{\varphi}_n = 0; \quad \varphi - \bar{\varphi}_{sn} = 0 \quad \text{in } \Gamma_1 \quad (\text{A.2.1.2 a-c})$$

E dove sono valide le seguenti posizioni:

$$K_x = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} u; \quad K_y = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} u; \quad K_{xy} = -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u \quad \text{in } \Omega \quad (\text{A.2.1.3 a-c})$$

Per la piastra in esame, il **Lavoro Virtuale Interno** è dato dalla seguente relazione:

$$\delta L_i = \int_{\Omega} (m_x \delta K_x + m_y \delta K_y + m_{xy} \delta K_{xy}) d\Omega \quad (\text{A.2.1.4})$$

ricordando che nel caso di piastra di Kirchhoff il legame deformazioni-spostamenti è dato da:

$$\delta K_x = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta u; \quad \delta K_y = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \delta u; \quad \delta K_{xy} = -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \delta u \quad (\text{A.2.1.5 a-c})$$

il  $\delta L_i$  diventa:

$$\delta L_i = - \int_{\Omega} \left( m_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta u + m_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \delta u + 2m_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \delta u \right) d\Omega \quad (\text{A.2.1.6})$$

Le quantità presenti nell'equazione precedente possono essere scritte nella forma seguente:

$$m_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta u = \frac{\partial}{\partial x} \left( m_x \frac{\partial}{\partial x} \delta u - \delta u \frac{\partial}{\partial x} m_x \right) + \delta u \frac{\partial^2}{\partial x^2} m_x \quad (\text{A.2.1.7})$$

$$m_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \delta u = \frac{\partial}{\partial y} \left( m_y \frac{\partial}{\partial y} \delta u - \delta u \frac{\partial}{\partial y} m_y \right) + \delta u \frac{\partial^2}{\partial y^2} m_y \quad (\text{A.2.1.8})$$

$$\begin{aligned} m_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \delta u &= \frac{\partial}{\partial x} \left( m_{xy} \frac{\partial}{\partial y} \delta u \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \delta u \frac{\partial}{\partial x} m_{xy} \right) + \delta u \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} m_{xy} = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left( m_{xy} \frac{\partial}{\partial x} \delta u \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \delta u \frac{\partial}{\partial y} m_{xy} \right) + \delta u \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} m_{xy} \end{aligned} \quad (\text{A.2.1.9})$$

Sostituendo queste ultime nella precedente ed ordinando, si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta L_i &= - \int_{\Omega} \delta u \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} m_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} m_y + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} m_{xy} \right) d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \delta u \left( \frac{\partial}{\partial x} m_x + \frac{\partial}{\partial y} m_{xy} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \delta u \left( \frac{\partial}{\partial x} m_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} m_y \right) \right] \right\} d\Omega + (\text{A.2.1.10}) \\ &- \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( m_x \frac{\partial}{\partial x} \delta u + m_{xy} \frac{\partial}{\partial y} \delta u \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( m_{xy} \frac{\partial}{\partial x} \delta u + m_y \frac{\partial}{\partial y} \delta u \right) \right\} d\Omega \end{aligned}$$

Impiegando il lemma di Gauss è possibile trasferire gli ultimi due integrali sul contorno  $\Gamma$ , pertanto il  $\delta L_i$  diventa:

$$\begin{aligned} \delta L_i &= - \int_{\Omega} \delta u \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} m_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} m_y + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} m_{xy} \right) d\Omega + \\ &+ \int_{\Gamma} \delta u \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x} m_x + \frac{\partial}{\partial y} m_{xy} \right) n_x + \left( \frac{\partial}{\partial x} m_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} m_y \right) n_y \right\} d\Gamma + (\text{A.2.1.11}) \\ &- \int_{\Gamma} \left\{ \left( m_x \frac{\partial}{\partial x} \delta u + m_{xy} \frac{\partial}{\partial y} \delta u \right) n_x + \left( m_{xy} \frac{\partial}{\partial x} \delta u + m_y \frac{\partial}{\partial y} \delta u \right) n_y \right\} d\Gamma \end{aligned}$$

Si opera la trasformazione degli ultimi due integrali su  $\Gamma$  da assi generali (0, x, y, z) a locali (0, n, s, z).

Secondo integrale si ottiene attraverso l'impiego delle equazioni di equilibrio:

$$\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x} m_x + \frac{\partial}{\partial y} m_{xy}\right) n_x}_{t_x} + \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x} m_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} m_y\right) n_y}_{t_y} = t_n \quad (\text{A.2.1.12})$$

Il terzo integrale viene scritto nella seguente forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial n} n_x + \frac{\partial u}{\partial s} n_y \quad (\text{A.2.1.13})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial n} n_y - \frac{\partial u}{\partial s} n_x \quad (\text{A.2.1.14})$$

$$\begin{aligned} & \left( m_x \frac{\partial}{\partial x} \delta u + m_{xy} \frac{\partial}{\partial y} \delta u \right) n_x + \left( m_{xy} \frac{\partial}{\partial x} \delta u + m_y \frac{\partial}{\partial y} \delta u \right) n_y = \\ & \left( m_x n_x^2 + 2 m_{xy} n_x n_y + m_y n_y^2 \right) \frac{\partial}{\partial n} \delta u + \\ & - \left[ (m_y - m_x) n_x n_y + m_{xy} (n_x^2 - n_y^2) \right] \frac{\partial}{\partial s} \delta u \end{aligned} \quad (\text{A.2.1.15})$$

Possiamo scrivere il **Lavoro Virtuale Interno** nella seguente forma:

$$\begin{aligned} \delta L_i &= \int_{\Omega} \left( m_x \delta K_x + m_y \delta K_y + m_{xy} \delta K_{xy} \right) d\Omega = \\ & - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} m_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} m_y + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} m_{xy} \right) \delta u d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma} \left( t_n \delta u - m_n \frac{\partial}{\partial n} \delta u - m_{sn} \frac{\partial}{\partial s} \delta u \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{A.2.1.16})$$

Il **Lavoro Virtuale Esterno** è dato da:

$$\delta L_e = \int_{\Omega} \mathbf{p} \delta u d\Omega + \int_{\Gamma_2} \left( \bar{t}_n \delta u + \bar{m}_n \frac{\partial}{\partial n} \delta u + \bar{m}_{sn} \frac{\partial}{\partial s} \delta u \right) d\Gamma_2 \quad (\text{A.2.1.17})$$

dove  $\Gamma_2$  rappresenta il contorno libero della piastra, soggetto ad un carico distribuito.

Le condizioni di stazionarietà si ottengono introducendo il funzionale ampliato  $\mathcal{F}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u, \lambda, \lambda_n, \lambda_{sn}) = & \Pi_p - \int_{\Gamma_1} \lambda (u - \bar{u}) d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} \lambda_n (\varphi_n - \bar{\varphi}_n) d\Gamma_1 + \\ & - \int_{\Gamma_1} \lambda_{sn} (\varphi_{sn} - \bar{\varphi}_{sn}) d\Gamma_1 \end{aligned} \quad (\text{A.2.1.18})$$

dove  $\lambda, \lambda_n, \lambda_{sn}$  sono parametri di Lagrange.

Questi ultimi assumono il significato di grandezze meccaniche associate alle grandezze cinematiche  $u, \varphi_n, \varphi_{sn}$ .

Per determinare le condizioni di stazionarietà si opera la variazione prima del funzionale  $\mathcal{F}$  e si pone  $\delta\mathcal{F} = 0$ .

$$\begin{aligned} 0 = & - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} m_x + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} m_{xy} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} m_y \right) \delta u d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma} \left( t_n \delta u - m_n \frac{\partial}{\partial n} \delta u - m_{sn} \frac{\partial}{\partial s} \delta u \right) d\Gamma + \\ & - \int_{\Omega} (p \delta u) d\Omega - \int_{\Gamma_2} \left( \bar{t}_n \delta u - \bar{m}_n \frac{\partial}{\partial n} \delta u - \bar{m}_{sn} \frac{\partial}{\partial s} \delta u \right) d\Gamma_2 + \\ & - \int_{\Gamma_1} \left[ \delta \lambda (u - \bar{u}) + \delta \lambda_n (\varphi_n - \bar{\varphi}_n) + \delta \lambda_{sn} (\varphi_{sn} - \bar{\varphi}_{sn}) \right] d\Gamma_1 + \\ & + \int_{\Gamma_1} \left[ -\lambda \delta u + \lambda_n \frac{\partial}{\partial n} \delta u + \lambda_{sn} \frac{\partial}{\partial s} \delta u \right] d\Gamma_1 + \end{aligned} \quad (\text{A.2.1.19})$$

Alla luce di quanto detto nell'equazione precedente si può così scrivere:

$$\begin{aligned}
 0 = & - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} m_x + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} m_{xy} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} m_y + p \right) \delta u \, d\Omega + \\
 & + \int_{\Gamma_2} (t_n - \bar{t}_n) \delta u \, d\Gamma_2 - \int_{\Gamma_2} (m_n - \bar{m}_n) \frac{\partial}{\partial n} \delta u \, d\Gamma_2 - \int_{\Gamma_2} (m_{sn} - \bar{m}_{sn}) \frac{\partial}{\partial s} \delta u \, d\Gamma_2 + \\
 & - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \delta \lambda \, d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} (\varphi_n - \bar{\varphi}_n) \delta \lambda_n \, d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} (\varphi_{sn} - \bar{\varphi}_{sn}) \delta \lambda_{sn} \, d\Gamma_1 + \\
 & + \int_{\Gamma_1} (t_n - \lambda) \delta u \, d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} (m_n - \lambda_n) \frac{\partial}{\partial n} \delta u \, d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} (m_{sn} - \lambda_{sn}) \frac{\partial}{\partial s} \delta u \, d\Gamma_1
 \end{aligned} \tag{A.2.1.20}$$

Si suddivide la precedente espressione in quattro blocchi che devono essere identicamente nulli.

$$\text{I} = - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} m_x + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} m_{xy} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} m_y + p \right) \delta u \, d\Omega = 0 \tag{A.2.1.21}$$

$$\begin{aligned}
 \text{II} = & \int_{\Gamma_2} (t_n - \bar{t}_n) \delta u \, d\Gamma_2 - \int_{\Gamma_2} (m_n - \bar{m}_n) \frac{\partial}{\partial n} \delta u \, d\Gamma_2 + \\
 & - \int_{\Gamma_2} (m_{sn} - \bar{m}_{sn}) \frac{\partial}{\partial s} \delta u \, d\Gamma_2 = 0
 \end{aligned} \tag{A.2.1.22}$$

$$\text{III} = - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \delta \lambda \, d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} (\varphi_n - \bar{\varphi}_n) \delta \lambda_n \, d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} (\varphi_{sn} - \bar{\varphi}_{sn}) \delta \lambda_{sn} \, d\Gamma_1 = 0 \tag{A.2.1.23}$$

$$\begin{aligned}
 \text{IV} = & \int_{\Gamma_1} (t_n - \lambda) \delta u \, d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} (m_n - \lambda_n) \frac{\partial}{\partial n} \delta u \, d\Gamma_1 + \\
 & - \int_{\Gamma_1} (m_{sn} - \lambda_{sn}) \frac{\partial}{\partial s} \delta u \, d\Gamma_1 = 0
 \end{aligned} \tag{A.2.1.24}$$

La prima espressione si riferisce a quantità valutate nel dominio  $\Omega$ , la seconda su  $\Gamma_2$ , la terza su  $\Gamma_1$  e l'ultima identifica i parametri lagrangiani con le caratteristiche meccaniche definite su  $\Gamma_1$ .

Si ottengono quindi le seguenti equazioni

$$\text{I) } \frac{\partial^2}{\partial x^2} m_x + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} m_{xy} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} m_y = -p \quad \text{in } \Omega \quad (\text{A.2.1.25})$$

$$\text{II) } t_n^+ = 0 \quad m_n^+ = 0 \quad m_{sn}^+ = 0 \quad \text{su } \Gamma_2^+ \quad (\text{A.2.1.26 a-c})$$

$$\text{III) } u^+ = 0 \quad \varphi_n^+ = 0 \quad \varphi_{sn}^+ = 0 \quad \text{su } \Gamma_2^+ \quad (\text{A.2.1.27 a-c})$$

$$\text{IV) } \lambda = t_n \quad \lambda_n = m_n \quad \lambda_{sn} = m_{sn} \quad \text{su } \Gamma_1 \quad (\text{A.2.1.28 a-c})$$

### A.2.2 Modellazione di variabili di contorno.

Si introduce su ciascun elemento di contorno  $\Gamma_1$  le funzioni di forma lineari  $\Psi(x)$  per la modellazione delle forze di contorno e degli spostamenti.

$$\delta\lambda = \delta t_n = \Psi \delta F \quad (\text{A.2.2.1})$$

$$\delta\lambda_n = \delta m_n = \Psi \delta C_n \quad (\text{A.2.2.2})$$

$$\delta\lambda_{sn} = \delta m_{sn} = \Psi \delta C_{sn} \quad (\text{A.2.2.3})$$

Parte della variazione prima del funzionale  $\mathcal{F}$ .

$$\begin{aligned} \delta F \int_{\Gamma_1} \Psi (u - \bar{u}) d\Gamma_1 - \delta C_n \int_{\Gamma_1} \Psi (\varphi_n - \bar{\varphi}_n) d\Gamma_1 + \\ - \delta C_{sn} \int_{\Gamma_1} \Psi (\varphi_{sn} - \bar{\varphi}_{sn}) d\Gamma_1 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.2.2.4})$$

$$\delta F \int_{\Gamma_1^+} \Psi u^+ d\Gamma_1^+ - \delta C_n \int_{\Gamma_1^+} \Psi \varphi_n^+ d\Gamma_1^+ - \delta C_{sn} \int_{\Gamma_1^+} \Psi \varphi_{sn}^+ d\Gamma_1^+ = 0 \quad (\text{A.2.2.5})$$

$$\delta U \int_{\Gamma_2} \Psi (t_n - \bar{t}_n) d\Gamma_2 + \delta \Phi_n \int_{\Gamma_2} \Psi (m_n - \bar{m}_n) d\Gamma_2 + \delta \Phi_{sn} \int_{\Gamma_2} \Psi (m_{sn} - \bar{m}_{sn}) d\Gamma_2 = 0 \quad (\text{A.2.2.6})$$

$$\delta U \int_{\Gamma_2^+} \Psi t_n^+ d\Gamma_2^+ + \delta \Phi_n \int_{\Gamma_2^+} \Psi m_n^+ d\Gamma_2^+ + \delta \Phi_{sn} \int_{\Gamma_2^+} \Psi m_{sn}^+ d\Gamma_2^+ = 0 \quad (\text{A.2.2.7})$$



Forze di contorno

$$t_n = \Psi F; \quad m_n = \Psi C_n; \quad m_{sn} = \Psi C_{sn} \quad (\text{A.2.2.8 a-c})$$

Spostamenti di contorno:

$$u = \Psi U; \quad \varphi_n = \Psi \Phi_n; \quad \varphi_{sn} = \Psi \Phi_{sn} \quad (\text{A.2.2.9 a-c})$$

le stesse funzioni di forma  $\Psi$  sono utilizzate per la pesatura degli effetti.

Scrivendo in sostituzione della precedente un'equazione analoga lungo il contorno

$\Gamma_1^+$  appartenente al dominio complementare  $\Omega_\infty \setminus \Omega$  dove tutti i punti della frontiera  $\Gamma_1^+$  non devono subire alcun spostamento, rotazione flessionale e torsionale si ottiene:

$$U^+ \equiv \int_{\Gamma_1^+} \Psi u^+ d\Gamma_1^+ = 0 \quad (\text{A.2.2.10})$$

$$\Phi_n^+ \equiv \int_{\Gamma_1^+} \Psi \varphi_n^+ d\Gamma_1^+ = 0 \quad (\text{A.2.2.11})$$

$$\Phi_{sn}^+ \equiv \int_{\Gamma_1^+} \Psi \varphi_{sn}^+ d\Gamma_1^+ = 0 \quad (\text{A.2.2.12})$$

$$\mathbf{U}^+ = \begin{bmatrix} U^+ \\ \Phi_n^+ \\ \Phi_{sn}^+ \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{0}} \quad (\text{A.2.2.13})$$

Introducendo le Identità di Somigliana che tengono conto della modellazione delle cause, nelle equazioni precedenti si ottengono le seguenti relazioni espresse in termini di grandezze pesate.

$$\int_{\Gamma_1^+} \Psi \left[ \begin{aligned} & \left( \int_{\Gamma_1} uu_{11} \Psi' d\Gamma_1 \right) F + \left( \int_{\Gamma_1} uu_{12} \Psi' d\Gamma_1 \right) C_n + \\ & + \left( \int_{\Gamma_1} uu_{13} \Psi' d\Gamma_1 \right) C_{sn} + \left( \int_{\Gamma_2} ut_{11} \Psi' d\Gamma_2 \right) (-U) + \\ & + \left( \int_{\Gamma_2} ut_{12} \Psi' d\Gamma_2 \right) (-\Phi_n) + \\ & + \left( \int_{\Gamma_2} ut_{13} \Psi' d\Gamma_2 \right) (-\Phi_{sn}) + \bar{u}^+ \end{aligned} \right] d\Gamma_1^+ = 0 \quad (\text{A.2.2.14})$$

$$\int_{\Gamma_1^+} \Psi \left[ \begin{aligned} & \left( \int_{\Gamma_1} uu_{21} \Psi' d\Gamma_1 \right) F + \left( \int_{\Gamma_1} uu_{22} \Psi' d\Gamma_1 \right) C_n + \\ & + \left( \int_{\Gamma_1} uu_{23} \Psi' d\Gamma_1 \right) C_{sn} + \left( \int_{\Gamma_2} ut_{21} \Psi' d\Gamma_2 \right) (-U) + \\ & + \left( \int_{\Gamma_2} ut_{22} \Psi' d\Gamma_2 \right) (-\Phi_n) + \\ & + \left( \int_{\Gamma_2} ut_{23} \Psi' d\Gamma_2 \right) (-\Phi_{sn}) + \bar{\phi}_n^+ \end{aligned} \right] d\Gamma_1^+ = 0 \quad (\text{A.2.2.15})$$

$$\int_{\Gamma_1^+} \Psi \left[ \begin{aligned} & \left( \int_{\Gamma_1} uu_{31} \Psi' d\Gamma_1 \right) F + \left( \int_{\Gamma_1} uu_{32} \Psi' d\Gamma_1 \right) C_n + \\ & + \left( \int_{\Gamma_1} uu_{33} \Psi' d\Gamma_1 \right) C_{sn} + \left( \int_{\Gamma_2} ut_{31} \Psi' d\Gamma_2 \right) (-U) + \\ & + \left( \int_{\Gamma_2} ut_{32} \Psi' d\Gamma_2 \right) (-\Phi_n) + \\ & + \left( \int_{\Gamma_2} ut_{33} \Psi' d\Gamma_2 \right) (-\Phi_{sn}) + \bar{\phi}_{sn}^+ \end{aligned} \right] d\Gamma_1^+ = 0 \quad (\text{A.2.2.16})$$

Dovendo essere nulla la variazione prima del funzionale, sul contorno  $\Gamma_2^+$  appartenente al dominio complementare  $\Omega_\infty \setminus \Omega$  tutti i punti della frontiera  $\Gamma_2^+$  non devono subire alcuno sforzo.

Si ottiene:

$$\mathbf{T}_n^+ \equiv \int_{\Gamma_2^+} \Psi \mathbf{t}_n^+ d\Gamma_2^+ = 0 \quad (\text{A.2.2.17})$$

$$\mathbf{M}_n^+ \equiv \int_{\Gamma_2^+} \Psi m_n^+ d\Gamma_2^+ = 0 \quad (\text{A.2.2.18})$$

$$\mathbf{M}_{sn}^+ \equiv \int_{\Gamma_2^+} \Psi m_{sn}^+ d\Gamma_2^+ = 0 \quad (\text{A.2.2.19})$$

$$\mathbf{P}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^+ \\ \mathbf{M}_n^+ \\ \mathbf{M}_{sn}^+ \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{0}} \quad (\text{A.2.2.20})$$

Introducendo le Seconde Identità di Somigliana si ottengono le seguenti relazioni espresse in termini di grandezze pesate:

$$\int_{\Gamma_2^+} \Psi \left[ \begin{aligned} & \left( \int_{\Gamma_1'} tu_{11} \Psi' d\Gamma_1' \right) F + \left( \int_{\Gamma_1'} tu_{12} \Psi' d\Gamma_1' \right) C_n + \\ & + \left( \int_{\Gamma_1'} tu_{13} \Psi' d\Gamma_1' \right) C_{sn} + \left( \int_{\Gamma_2'} tt_{11} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-U) + \\ & + \left( \int_{\Gamma_2'} tt_{12} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\Phi_n) + \\ & + \left( \int_{\Gamma_2'} tt_{13} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\Phi_{sn}) + \bar{t}_n^+ \end{aligned} \right] d\Gamma_2^+ = 0 \quad (\text{A.2.2.21})$$

$$\int_{\Gamma_2^+} \Psi \left[ \begin{aligned} & \left( \int_{\Gamma_1'} tu_{21} \Psi' d\Gamma_1' \right) F + \left( \int_{\Gamma_1'} tu_{22} \Psi' d\Gamma_1' \right) C_n + \\ & + \left( \int_{\Gamma_1'} tu_{23} \Psi' d\Gamma_1' \right) C_{sn} + \left( \int_{\Gamma_2'} tt_{21} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-U) + \\ & + \left( \int_{\Gamma_2'} tt_{22} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\Phi_n) + \\ & + \left( \int_{\Gamma_2'} tt_{23} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\Phi_{sn}) + \bar{m}_n^+ \end{aligned} \right] d\Gamma_2^+ = 0 \quad (\text{A.2.2.22})$$

$$\int_{\Gamma_2^+} \Psi \left[ \begin{aligned} & \left( \int_{\Gamma_1'} tu_{31} \Psi' d\Gamma_1' \right) F + \left( \int_{\Gamma_1'} tu_{32} \Psi' d\Gamma_1' \right) C_n + \\ & + \left( \int_{\Gamma_1'} tu_{33} \Psi' d\Gamma_1' \right) C_{sn} + \left( \int_{\Gamma_2'} tt_{31} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-U) + \\ & + \left( \int_{\Gamma_2'} tt_{32} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\Phi_n) + \\ & + \left( \int_{\Gamma_2'} tt_{33} \Psi' d\Gamma_2' \right) (-\Phi_{sn}) + \bar{m}_{sn}^+ \end{aligned} \right] d\Gamma_2^+ = 0 \quad (\text{A.2.2.23})$$

## Bibliografia

- [1] Aimi A., Diligenti M., Monegato G., (1997). New numerical integrations schemes for Applications of Galerkin Bem to 2-D problems. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 40, 1977-1999.
- [2] Aristodemo M., Leone A., Mazza M., Energy Based Boundary Elements for Finite Element Analysis. *Meccanica*, 36 (2001), 463-477.
- [3] Beirao da Veiga L., Niiranen J., Stenberg R., A family of  $C^0$  finite elements for Kirchhoff plates II: Numerical results, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 197 (2008) 1850–1864.
- [4] Bonnet M., Maier G., Polizzotto C., (1998). Symmetric Galerkin boundary element method. *Appl. Mech. Rev.*, 51, 669-704.
- [5] Bonnet M., Guiggiani M., (2003). Direct evaluation of double singular integrals and new free terms in 2D (symmetric) Galerkin BEM. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 192, 2565-2595.
- [6] Brebbia C.A., (1978). The Boundary element method for engineers. Pentch Press.
- [7] Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C., (1984). Boundary element techniques. Springer-Verlag.
- [8] Carini A., Diligenti M., Maranesi P., Zannella M., (1999). Analytical integrations for two dimensional elastic analysis by the symmetric Galerkin boundary element method. *Comp. Mech.*, 23, 308-323.
- [9] De Paiva, J.B, Aliabadi M.H., (2000). Boundary element analysis of zoned plates in bending. *Comp. Mech*, 25, 560-566.
- [10] De Paiva, J.B, Aliabadi M.H., (2004). Bending moments at interfaces of thin zoned plates with discrete thickness by the boundary element method. *Engng. Anal. Bound Elem.* 28, 747-751.
- [11] Dirgantara T., Aliabadi M. H., Boundary element analysis of assembled plate structures

- [12] Fernandes G.R., Venturini W.S., Stiffened plate bending analysis by the boundary element method, *Comput. Mech.* 28 (2002) 275–281.
- [13] Fernandes G.R., Venturini W.S., Building floor analysis by the boundary element method, *Comput. Mech.* 35 (2005) 277–291.
- [14] Fernandes G.R., Konda D.H., A BEM formulation based on Reissner's theory to perform simple bending analysis of plates reinforced by rectangular beams, *Comput. Mech.* 42 (2008) 671–683.
- [15] Frangi, A., Bonnet, M. 1998, A Galerkin symmetric and direct bie method for Kirchhoff elastic plates: formulation and implementation, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 41 (1998), 337-369.
- [16] Frangi, A., Guiggiani, M. 1998, Boundary element analysis of Kirchhoff plates with direct evaluation of hypersingular integrals, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 46 (1999), 1845-1863.
- [17] Frangi A., Novati G., (1996). Symmetric BE method in two-dimensional elasticity: evaluation of double integrals for curved elements. *Comp. Mech.*, 19, 58-68.
- [18] Gray L.J., Paulino G.H., (1997). Symmetric Galerkin boundary integral formulation for interface and multi-zone problems. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 40, 3085-3101.
- [19] Gray L.J., (1998). Evaluation of singular and hypersingular Galerkin boundary integrals: direct limits and symbolic computation. In: Sladek J, Sladek V (eds), *Singular integrals in boundary element methods*. Computational Mechanics, Southampton.
- [20] Guiggiani M., (1991). Direct Evaluation of hypersingular integrals in 2D BEM. In: *Proceedings of the 7<sup>th</sup> GAMM seminar on numerical techniques for boundary element methods*, Kiel, Germany.
- [21] Guiggiani M., Krishnasamy G., Rudolphi T.J., Rizzo F.J., (1992). A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations, *ASME, J. Appl. Mech.*, 59, 604-614.
- [22] Guiggiani M., (1994). Hypersingular formulation for boundary stress evaluation, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 13, 169-179.
- [23] Guiggiani M., (1995). Hypersingular boundary integral equation have an additional free term. *Comp. Mech.*, 16, 245–248.

- [24] Hartmann F., (1989). Introduction to Boundary Elements. Springer-Verlag.
- [25] Holzer S., (1993). How to deal with hypersingular integrals in the symmetric BEM. *Communication in Numerical Methods in Engineering.*, 9, 219-232.
- [26] Kane J.H., (1994). Boundary element analysis in engineering continuum mechanics. Prentice-Hall.
- [27] Layton J.B., Ganguly S., Balakrishna C., Kane J.H., (1997). A symmetric Galerkin multi-zone boundary element formulation. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 40, 2913-2931.
- [28] Leonetti L., (2005). Forme simmetriche basate sulla discretizzazione del contorno per l'analisi di strutture elastiche bidimensionali. Tesi dottorale.
- [29] Leonetti L., Mazza M., Aristodemo M., "A symmetric boundary element model for the analysis of Kirchhoff plates" *Engng. Anal. Bound Elem.* 33 (2009), 1-11.
- [30] Maier, G., Diligenti, M., Carini, A., "A variational approach to boundary element elastodynamics analysis and extension to multidomain problems," *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **92**, 193-213 (1991).
- [31] Mallardo V., Alessandri C. (2000). Inverse problems in the presence of inclusions and unilateral constraints; a boundary element approach. *Comp. Mech.*, 26, 571-581.
- [32] Milana V., (2004). Applicazione del Metodo degli Elementi di Contorno a sistemi bidimensionali piani (piastre, lastre). Tesi dottorale.
- [33] Monegato G., (1994). The numerical evaluation of hypersingular integrals, *J. Comp. Appl. Math.*, 50, 9-31.
- [34] Marin L., Lesnic D., Mantic V., (2004). Treatment of singularities in Helmholtz-type equations using the boundary element method, *Journal of Sound and Vibration* 278, 39-62
- [35] Panzeca T., Fujita Yashima H., Salerno M., (1998). Mathematical aspects and applications of the symmetric Galerkin boundary element method. Proceedings of 4<sup>th</sup> World Congress on Computational Mechanics. Extended abstract on CD, Idelsohn SR, Onate E, Dvorkin EN (eds) Buenos Aires.

- [36] Panzeca T., Salerno M., Terravecchia S., (1999). Impiego delle sottostrutture nella formulazione simmetrica del BEM. *Congresso di Meccanica Teorica ed applicata* (AIMETA 1999), Como, Italy.
- [37] Panzeca T., Cucco F., Salerno M., Terravecchia S., (2000-a). Il metodo degli spostamenti nella formulazione simmetrica degli elementi di contorno. *XIII° Convegno Italiano di Meccanica Computazionale* (GIMC 2000), Brescia, Italy.
- [38] Panzeca T., Salerno M., (2000-b). Macroelements in the mixed boundary value problems. *Comp. Mech.*, 437-446.
- [39] Panzeca T., Fujita Yashima H., Salerno M., (2001). Direct stiffness matrices of BEs in the Galerkin BEM formulation. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 20, 277-298.
- [40] Panzeca T., Cucco F., Terravecchia S., (2002). Symmetric boundary element method versus finite element method. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 191, 3347-3367.
- [41] Panzeca T., Cucco F., Terravecchia S., (2002-a). Karnak.sGbem. Release 1.0. [www.bemsoft.it](http://www.bemsoft.it), Palermo, Italy.
- [42] Panzeca T., Salerno M., Terravecchia S., (2002-b). Domain decomposition in the symmetric boundary element method analysis. *Comp. Mech.*, 28, 191–201.
- [43] Panzeca T., Cucco F., Milana V., Terravecchia S., (2004-b). Stress field by the symmetric Galerkin boundary element method. *J. Strain Analysis.*, 39, 569-580.
- [44] Panzeca T., La Mantia A., Salerno M., Terravecchia S., Modellazione lineare delle grandezze di contorno nell'analisi per sottostrutture delle piastre inflesse via SBEM, XIXth Congresso AIMETA 2009.
- [45] Panzeca T., La Mantia A., Salerno M., Terravecchia S., A multidomain approach of the SBEM in the plate bending analysis, Xth International Conference on Boundary Element Techniques Beteq 2009.
- [46] Panzeca T., Milana V., Salerno M., (2009). A Symmetric Galerkin BEM for plate bending analysis. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 28, 62-74.
- [47] Panzeca T., Cucco F., La Mantia A., Salerno M., Interaction problems between in-plane and out-plane loaded plates by SBEM, XIth International Conference on Boundary Element Techniques Beteq 2010.



- [48] Polizzotto C., (1991). A boundary min-max principle as a tool for boundary element formulation . *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 2, 89-93.
- [49] Salerno M., Panzeca T., Cucco F., La Mantia A., SBEM multidomain analysis of plate stretching and bending problems, XVIIIth Congresso GIMC 2010.
- [50] Salerno M.G., (1998). Aspetti matematici e computazionali nella formulazione simmetrica alla Galerkin del Metodo degli Elementi di Contorno. Tesi dottorale.
- [51] Salvadori A., (2001). Analytical integration of hypersingular kernel in 3D BEM problems. *Comp. Meth. Appl. Mech. & Engng.*, 190, 3957–3975.
- [52] Sinclair G.B., (1999). Logarithmic stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *J. Appl. Mech. ASME*, 66, 556-560.
- [53] Steinbach O., Wendland W.L., (1997). Domain decomposition and preconditioning techniques in Boundary Element Methods. In: Wendland, W.L. (eds.): *Boundary Element Topics*, Proceeding of the final Conf. of the Priority Research Programme: Boundary Element Methods 1989-1995 of the German Research Foundation, Stuttgart, October 2-4, 1995. Berlin, Springer.
- [54] Takhteyev V., Brebbia C.A., (1990). Analytical integrations in boundary elements. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 30, 95–100.
- [55] Terravecchia S., (2002). Analisi per sottostrutture nel Metodo Simmetrico degli Elementi di Contorno – Lastre. Tesi dottorale.
- [56] Terravecchia S., (2006). Closed form coefficients in the Symmetric Boundary Element Approach. *Eng. Anal. Bound. Elem. Meth.*, 30, 479-488.
- [57] Timoshenko, S.P., Woinow-Sky-Krieger S. 1959. Theory of plates and shells, McGraw-Hill Book Company.
- [58] Tottenham, H. 1979. *The boundary element method for plates and shells*, in Banerjee P.K. and Butterfield R.(eds), Developments in Boundary Element Methods, vol. 1, Elsevier, Amsterdam.
- [59] Vodicka, R., Mantic, V., París, F., “Symmetric Variational Formulation of BIE for Domain Decomposition Problems in Elasticity – An SGBEM approach for Nonconforming Discretizations of curved Interfaces,” *CMES*, 4, 31-50, (2007).

- [60] Waidemam L., Venturini W.S., BEM formulation for reinforced plates, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 33 (2009) 830–836.
- [61] Wendland W.L., (1997). Boundary element topics. Springer-Verlag.
- [62] Williams M.L., (1952). Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *J. Appl. Mech.*, 19, 526-528.