DOTTORATO DI RICERCA
in
Storia e Didattica delle Matematiche, Storia e Didattica della Fisica, Storia e Didattica della Chimica
CICLO XXI 2006/2007

Consorzio tra Università Bologna,Università Catania, Università di Pavia, Università di Napoli Federico II,Università di Bratislava(Slovacchia),Università di Nitra (Slovacchia),Università di Alicante (Spagna), Università di Palermo, Università di Cipro, C.I.R.E Centro interdipartimentale ricerche educative Palermo

SEDE AMMINISTRATIVA:UNIVERSTITÀ DI PALERMO

CONVINZIONI E CAMBI DI CONVINZIONI DEGLI STUDENTI SUGLI ERRORI E SULLO SVILUPPO DELLA CONOSCENZA IN MATEMATICA

(STUDENTI DI ETÀ 14 – 18)

Schiano Paola

Tutor professor Filippo Spagnolo

TESI DI DOTTORATO DI RICERCA
Palermo, 19 marzo 2011

RINGRAZIAMENTI

Desidero esprimere i miei ringraziamenti al mio Supervisore, Professore Filippo Spagnolo, per la disponibilità, la pazienza e il supporto nella stesura di questa tesi.

Particolari ringraziamenti vanno alla Professoressa Rita Flamma e al Professor Bruno D'Amore, che hanno permesso la realizzazione della parte sperimentale della tesi.

Desidero esprimere la mia gratitudine a tutti i professori che, con spirito collaborazione e disponibilità, hanno sopportato la mia invasione in classe per la sperimentazione e la raccolta dei questionari.

Tutta la mia gratitudine va a mio marito Antonio e a mio figlio Dario che hanno sopportato le mie assenze e sostenuto i momenti di difficoltà.

Indice

Introduzione

Il difficile rapporto degli allievi con la matematica è una questione ormai radicata nelle nostre scuole e negli ultimi anni è stato oggetto di molti studi e ricerche, nel tentativo di avanzare spiegazioni e analisi per migliorare il processo di insegnamento/apprendimento. Tale processo, si sa, è molto complesso, in quanto coinvolge molteplici aspetti e, quindi, richiede uno studio da diverse angolazioni. Fattori metacognitivi, linguistici e affettivi hanno un ruolo cruciale nell'apprendimento della matematica e concorrono, nella stessa misura dei fattori strettamente cognitivi, nel processo della costruzione della conoscenza.

Queste considerazioni sono alla base del presente studio, che affronta il problema del rapporto degli allievi con la matematica, analizzandone le convinzioni, le loro origini e la loro influenza sulle difficoltà in matematica.

E' noto che la matematica, spesso, provoca stati d'animo negativi. Ciò accade perché molte volte essa è associata alla paura di sbagliare: in matematica l'errore emerge in maniera netta e sembra che non si possa metterlo in discussione. Uno dei miti più diffusi relativi alla matematica è la convinzione che la matematica sia perfetta, esatta, assoluta. In matematica non c'è posto per l'errore: esso deve essere rimosso, corretto e la verità matematica deve trionfare.

Molti studiosi, d'altra parte, segnalano la positività dell'errore. Alan Turing sosteneva che l'errore è un segno di intelligenza; Bachelard ha dichiarato *«bisogna errare per riuscire»*. La ricerca didattica ha ampiamente discusso la valenza educativa dell'errore (Bachelard, Baldini, Mollo, Parkinson, Popper).

Un'attenta analisi delle convinzioni degli studenti in materia di errore può offrire indicazioni sui loro schemi mentali e sul loro modo di porsi nei confronti della disciplina, ma anche importanti spunti per l'interazione allievo-insegnante segnalando possibili fraintendimenti o evidenziando scelte didattiche inopportune, tutti aspetti che nella pratica didattica quotidiana possono non emergere e quindi sfuggire all'insegnante. L'idea alla base del presente lavoro è che l'analisi degli errori commessi dagli studenti e delle loro convinzioni a riguardo può essere fonte di indicazioni e suggerimenti molto interessanti.

Più in particolare, l'ipotesi a monte del mio studio è che, spesso, gli allievi non riescono ad avere un rapporto sereno ed equilibrato con la matematica, perché ritengono che – affinché si riesca a studiare bene la materia in questione – sia necessario evitare ogni tipo di errore e di approssimazione della conoscenza.

Partendo da questa ipotesi, ho delineato il mio quadro di ricerca, cercando di capire cosa rappresenta *«l'errore»* per uno studente di matematica.

Lo studio ha cercato di evidenziare le convinzioni e i cambi di convinzione degli allievi in materia di errore e conoscenza matematica, intendendo per convinzione *«un'opinione, un insieme di giudizi/attese, quel che si pensa a proposito di qualcosa»* (D'Amore B. e Fandiño M.I., 2004), sia nella loro componente cognitiva, che in quella affettiva.

Il *«pretesto»* da cui sono partita è il concetto di angolo, un argomento geometrico ritenuto semplice, ma spesso potenzialmente pregno di misconcezioni e fraintendimenti. La scelta dell'argomento è scaturita sia dal lungo iter storico per la definizione di tale concetto, sia dalla precoce presentazione di tale concetto nel programma d'insegnamento (elementari).

Al fine di meglio delineare il campo di ricerca, la prima sperimentazione si è limitata allo studio degli angoli nel piano, prescindendo completamente dalle problematiche relative agli angoli curvilinei e agli angoli di contingenza e prescindendo dalle riflessioni in merito all'ampiezza e alla misurazione degli angoli.

Due idee sono basilari nelle considerazioni del presente lavoro:

- l' impostazione bachelardiana, secondo cui il sapere procede per *«rotture epistemologiche»*;
- l'ipotesi secondo la quale è possibile ripercorrere la linea evolutiva del pensiero umano, parallelamente, sia sul lungo periodo (filogenesi) che su scala individuale (ontogenesi).

Alla luce dei risultati emersi dalla prima sperimentazione, è stata inoltre preparata una seconda sperimentazione, avente come focus i cambi di convinzioni rilevati nella prima sperimentazione. La ricerca, che ha per titolo C*onvinzioni e cambi di convinzioni degli studenti sugli errori e sullo sviluppo della conoscenza matematica*, scaturisce da queste premesse.

Per la prima sperimentazione didattica ho fatto uso dello strumento questionario con domande di tipo aperto, in quanto esse sono particolarmente utili per far emergere, di volta in volta, le idee dell'allievo (attraverso risposte che solitamente sono ricche di informazioni).

Le variabili prese in considerazione sono state diverse e sono stati raccolti 609 questionari; di conseguenza, l'elaborazione dei dati è stata complessa e la fase di individuazione delle linee di tendenza ha richiesto molto impegno. Pur non essendo lo studio di un campione statistico (nel senso strettamente tecnico del termine), si tratta di un numero rilevante di dati (82000 occorrenze), fonte di interessanti osservazioni.

La seconda sperimentazione, tendente a dimostrare - attraverso una proposta didattica innovativa - la possibilità di modificare le convinzioni degli allievi in materia di errore e conoscenza matematica, è stata rivolta a un campione di 106 allievi. E' stato preparato un «*percorso*» di formazione - relativo alle geometrie non euclidee - che intendeva far riflettere gli allievi sul ruolo della conoscenza matematica. E' stato poi somministrato un questionario al campione di ricerca, prima e dopo la sperimentazione; si è quindi svolta un'analisi qualitativa e quantitativa dei risultati emersi. Dunque, questa parte sperimentale si basa su una comparazione tra le convinzioni degli allievi prima e dopo il percorso sperimentato.

La tesi è composta di quattro capitoli.

Il primo capitolo presenta un percorso storico-critico relativo al XX secolo, sul significato e sul ruolo dell'errore nella conoscenza matematica. In particolare, tale problematica è stata riletta, alla luce dell'avvento delle geometrie non euclidee. Il secondo capitolo propone un breve excursus storico, relativo alla conoscenza matematica sottostante alla formazione del concetto di angolo. Il terzo capitolo analizza alcuni problemi didattici, relativi alla formazione del concetto di angolo. Il capitolo 4 rappresenta il lavoro di ricerca vero e proprio; in esso presento la metodologia della ricerca, il quadro teorico di riferimento e l'analisi a-priori della prima sperimentazione. Viene inoltre sviluppata l'analisi quantitativa e qualitativa dei dati (prima sperimentazione e seconda sperimentazione) e sono messe in evidenza le convinzioni e i cambi di convinzioni degli allievi di scuola secondaria relative all'errore e all'evoluzione della conoscenza matematica. Infine, si presentano le conclusioni finali della tesi.

1

Conoscenza matematica e errore

Introduzione

Questo capitolo presenta il dibattito sui fondamenti della matematica (crisi dei fondamenti) che – a partire dalla fine Ottocento – scaturisce dalla discussione sul significato della matematica e della scienza.

Alla fine del secolo scorso il problema della verità o della convenzionalità delle leggi scientifiche determina un profondo ripensamento sul significato del sapere che coinvolge la maggior parte degli ambiti disciplinari.

In quest'ambito, la costruzione delle geometrie non euclidee ha imposto la necessità di dedurre risultati che non fossero in contraddizione con i teoremi dimostrati in precedenza. Inizialmente fu molto forte lo scetticismo nei confronti delle nuove geometrie ed esse assursero allo status di teoria matematica solo dopo che ne fu dimostrata la non contraddittorietà.

Le peculiarità delle geometrie non euclidee sono profondamente contrarie alle nostre intuitive idee geometriche. Mentre la geometria euclidea non poneva alcun problema di coerenza, data la sua semplicità e l'evidente corrispondenza con la realtà oggettiva, le geometrie non euclidee non presentavano alcun riferimento concreto. Quindi, solo la correttezza dal punto di vista logico avrebbe potuto consentire di accettarla.

Una delle conseguenze più importanti del riconoscimento delle geometrie non euclidee fu il venir meno dell'esigenza di corrispondenza di una teoria matematica con una realtà esterna o con un concetto astratto di verità.

Confutata l'esistenza platonica di una realtà matematica distinta dalla realtà fenomenica, la matematica non sembrava più essere una scoperta ma un'invenzione; l'arbitrarietà di nuove creazioni della mente richiedeva però la ricerca di una loro coerenza.

Per provare la non contraddittorietà o coerenza di una teoria matematica bisognava analizzare a fondo il sistema considerato: dalla fine del XIX secolo i matematici avviarono un'opera di risanamento e di riflessione critica in merito agli stessi strumenti che erano sempre stati usati per produrre conoscenza.

Assistiamo, in questo periodo, ad un processo di crisi dato da nuove scoperte che, apparentemente, urtano con ipotesi consolidate, nel un tentativo di porre ordine all'insieme delle conoscenze acquisite.

Questo nuovo approccio metateorico relativo alle scienze matematiche determinò una grossa evoluzione nel campo epistemologico che, di seguito, tenteremo di delineare.

1.1 Uno sguardo al novecento

Lo studio delle convinzioni sugli errori richiede competenze assai diversificate: da quelle di carattere storico-epistemologico, a quelle di carattere cognitivo e psico-pedagogico, a quelle più specificamente relative ai principi e alle tecniche della disciplina. In particolare, dal punto di vista storico-epistemologico, l'errore come elemento attivo della conoscenza è stato oggetto di diverse riflessioni a partire dal XIX secolo, soprattutto in Francia e in Italia (ricordiamo Enriques, Bachelard, Rey, Brunnschvieg e Meyerson).

L'importanza epistemologica che investe la nozione di errore permette di aprire la riflessione sul secolare problema del rapporto fra reale e razionale, fra esperienza e teoria, fra dati di fatto e ipotesi.

Agli inizi del Novecento, anche se le matematiche erano evolute, hanno subito non pochi cambiamenti epistemologici. Infatti, il pensiero occidentale - dalle origini fino alla metà dell'Ottocento circa - è coinciso nella costruzione di sistemi logici capaci di indicare quali fossero i criteri discrezionali per distinguere il vero dal falso, il corretto e l'erroneo e, in ultima o prima istanza, per traslato, il bene e il male.

La proibizione biblica di mescolare il Vero col Falso, il bene col male, unita ad un importante contributo della cultura greca, ha determinato - in Europa - l'esaltazione di distinzioni dualiste e trascendenti[1].

Sin dalla fine dell'Ottocento, tuttavia, il vero e il falso non avevano più la loro usuale collocazione, l'ordine e il disordine non si conformavano più ai classici criteri di stabilità.

Le geometrie non euclidee e la topologia cominciavano a porre dubbi di legittimità su cosa potesse essere concepito come spazio vero o persino come spazio reale.

Nel corso del Novecento vari colpi sono stati inferti al mito della certezza matematica: i lavori di Gödel sull'inconsistenza della matematica, l'instabilità del concetto di rigore matematico (pre-

[1] Tale dualismo è, tra l'altro, alla base della profonda diversità tra le scienze orientali e quelle occidentali.

Bourbaki e post-Bourbaki), dimostrazioni così complicate da costringere i referee a rifiutarsi di portare a termine l'esame e dichiarare ufficialmente la dimostrazione : *«giusta»o «sbagliata»*.

La verità, quindi, cambiava il proprio statuto epistemologico e le verità matematiche non sembravano affatto essere superiori alle certezze fornite dalle leggi naturali, perché avevano *esse stesse* un senso in divenire. Difendere una verità sostenendo che si trattava di *«una verità matematica»* non era più così scontato; il matematico svizzero F. Gonseth, in un intervento al CIS di Berr del 1933, spiegava che bisognava aprire: *« una breccia nell'idea di verità»*. Il tema dell'apertura dinamica della conoscenza divenne - grazie a Bachelard - la parola d'ordine della conoscenza approssimata: « *Scientificamente, si pensa il vero come correzione storica di un lungo errore, si pensa l'esperienza come correzione della comune e prima illusione* ».

In questo senso la nozione di errore acquisiva un nuovo statuto epistemologico: *«Abbiamo pur veduto il pensiero matematico svolgersi da problemi che sono posti alla nostra intuizione, inseguendo una verità che ci appare come qualcosa di dato, e che si chiarisce a poco a poco al nostro spirito anche attraverso l'errore»* (Enriques, 1938 p. 142).

Una conoscenza falsa, un pensiero errato, avevano lo stesso valore epistemologico di quello che perseguiva una verità, perché entrambi ragionevoli. E' sempre la ragione che produce sia la verità che l'errore; verità ed errore non erano idonei a distinguere razionale e irrazionale poiché l'errore, nelle scienze, altro non è che una vecchia verità superata dalle nuove conoscenze. La conoscenza, in quanto conoscenza, si fondava sull'errore.

«La corrispondenza fra i concetti scientifici e la realtà sensibile rimane sempre una corrispondenza approssimata, ma il valore obiettivo della razionalità del sapere consiste in ciò, che il processo della scienza è un processo di approssimazioni successive illimitatamente proseguibile» (Enriques, 1912, pp. 114-115).

Si trattava, chiaramente, di una posizione fortemente in antitesi con la teoria quella gentiliana della conoscenza che, riprendendo l'interpretazione megarica e storica, considerava l'errore l'indefinibile, l'insensato: *«la conoscenza se è falsa non è conoscenza»* (Gentile, 1917, p. 103).

All'opposto, scriveva Enriques, *«niente è vero in quel senso assoluto che sarebbe quello di Parmenide; ma c'è del vero relativo, ossia che nell'evoluzione delle scienze la verità si mescola con l'errore: l'errore racchiude una parte di verità; la verità, se ci si sforza di estenderla, di comprenderla in senso assoluto, ci porta al di là di essa stessa, il che vuol dire che conduce all'errore»* (Enriques, 1934).

La scienza, quindi, acquista significato nella sua concezione storica, in quanto la ricerca della verità prosegue per approssimazioni successive, dove il concetto di approssimazione perde il suo senso negativo. Ciò contribuisce a rendere più umana la matematica, disciplina in cui il più piccolo errore di calcolo può avere gravi ripercussioni. In tal modo, la verità matematica, lungi dall'essere qualcosa di astratto e rarefatto che esiste nel mondo delle *«idee»*, sembrava basarsi innanzitutto su un processo sociale.

1.2 Le geometrie non euclidee

Fino all'inizio del secolo XIX, la matematica e le sue branche (geometria, aritmetica, algebra, analisi) apparivano come un unico e obbligato modo di conoscenza. Ciò, in particolare, era valido per la geometria, che s'identificava con quella di Euclide; tuttavia anche l'aritmetica, l'algebra, l'analisi sembravano avere *«senso unico»*.

Nella prima meta del secolo XIX, tuttavia, qualcosa era destinata a cambiare: Nicolaj Ivanovic Lobacevskij, Janos Bolyai, Karl Friedrich Gauss, Bernhard Riemann ed Eugenio Beltrami chiarirono l'esistenza, similmente fondata, di nuove geometrie differenti da quella euclidea, mentre Benjamin Peirce iniziò la costruzione di ben 162 algebre (Bell 2001, p. 78). Inoltre, le geometrie non archimedee, nelle quali non e accettato il postulato di Archimede-Eudosso, andarono ad aggiungersi nel firmamento matematico. Un' ulteriore frattura della matematica fu originata dal postulato del continuo: da un lato esisteva la matematica cantoriana (in onore del grande matematico tedesco Georg Cantor) in cui il postulato era accettato e, dall'altro, quella non cantoriana, in cui esso era respinto.

Dal XX secolo in poi, si è affermata quindi l'idea che - almeno teoricamente - è possibile costruire infinite matematiche, ognuna delle quali si conforma a un sistema ipotetico-deduttivo, cioè un insieme di asserzioni fondamentali, dette assiomi, aventi il valore di semplici ipotesi, da cui dedurre logicamente altre proposizioni.

Ma, proprio agli inizi del XX secolo, la caratteristica più importante della matematica - il rigore logico - appare anch'essa in pericolo.

Nel 1937, infatti, il matematico e logico austriaco Kurt Gödel dimostra il principio di indecidibilità: qualsiasi sistema ipotetico - deduttivo o assiomatico contiene almeno un teorema che non può essere dimostrato come vero o come falso.

1.2.1 La fine dell'assolutismo euclideo

Per quasi due secoli la geometria del grande matematico greco Euclide, contenuta nei suoi *Elementi*, è stata la sola e indiscussa forma di conoscenza geometrica. Si riteneva, infatti, che l'opera euclidea fosse un modello ineguagliabile di rigore logico. Ciò nonostante, il quinto postulato euclideo, essendo meno evidente rispetto agli altri, ha sempre dato adito a dubbi circa il fatto che fosse un vero postulato.

Quest'unico *«neo»* dell'opera di Euclide era emerso con maggiore evidenza nel 1733, quando il padre gesuita italiano Giovanni Gerolamo Saccheri scrisse un'opera dal titolo *«Euclides ab omni naevo vindicatus»* (*«Euclide liberato da ogni difetto»*). Saccheri, seguendo con rigore il ragionamento logico, giunse – con qualche disappunto – all'inaspettata conclusione che anche le negazioni del quinto postulato erano accettabili e, quindi, erano logicamente valide anche geometrie diverse da quella degli *Elementi* di Euclide.

Saccheri, sostituendo separatamente il postulato con nuove ipotesi, creò due nuove geometrie, dette *«geometria dell'angolo acuto» e «geometria dell'angolo ottuso»*, con lo scopo di mostrare la loro contraddittorietà e quindi la falsità di ciascuna di esse. Tuttavia, da grande logico quale egli era, non riuscì a trovare alcuna contraddizione. Fatto degno di nota è che, da un certo punto, le irreprensibili argomentazioni della sua opera cambiano connotazione e diventano oscure e inconcludenti; ciò proprio quando avrebbe dovuto essere evidente a Saccheri la coerenza di ciascuna delle due nuove geometrie. Eugenio Beltrami, riscopritore dell'*«Euclides ab omni naevo vindicatus»*, espresse le sue perplessità davanti ad una così evidente inversione di direzione. Si trattava, infatti, di un' arbitraria capitolazione dinanzi alla sorprendente verità di nuovi mondi geometrici, troppo diversi da quello euclideo, ritenuto l'unico possibile.

«O Saccheri era ben risoluto a sacrificare la propria ragione sull'altare della fede in Euclide, oppure non osava confessare la sua fede in una geometria eretica. Questo repentino ripudio di ogni elementare principio di logica colpì il laico Beltrami come un'offesa all'ordine naturale delle cose. Un logico dell'acutezza di Saccheri, egli si disse, non poteva assolutamente essere giunto a quella conclusione, non avrebbe mai potuto, fintanto che la sua mente fosse in grado di funzionare. Perché dunque fingeva di averla accettata?La risposta è immediata: paura. Saccheri non osava insinuare che la nuova geometria era vera. Euclide, il geometra senza menda, era sacro quasi quanto Aristotile, il logico infallibile. Negare Euclide sarebbe stato lo stesso che mettere in dubbio la logica classica, grazie alla quale erano stati fissati per tutta l'eternità i dogmi fondamentali della teologia ufficiale. Sostenere che un sistema non euclideo potesse essere vero al pari di quello d'Euclide, sarebbe stato un invito temerario alle repressioni e ai provvedimenti disciplinari. Per questo il Copernico della geometria ricorse al sotterfugio:denunciò egli stesso la falsità della sua scoperta, sperando che questo pio tradimento gli valesse l'indulgenza della censura e quindi il permesso di stampare il libro» (Bell E. T., 2001, capitolo XXV).

L'accettazione di nuove verità geometriche, infatti, avrebbe fatto perdere alla geometria d'Euclide la sua esclusività millenaria ed ogni carattere di perfezione e unicità. Saccheri avrebbe dovuto prendere posizioni dense di gravi ripercussioni, demolendo l'ottuso conservatorismo intellettuale, basato sull'assoluto.

«L'Euclide poteva si essere falso, e falso l'aveva definito Saccheri, forse nella disperata speranza che la sua storica scoperta non perisse con lui, ma restava pur sempre un libro troppo carico di significati e di suggestioni perché si potesse lasciarlo circolare liberamente. Così chiaro e convincente era il ragionamento del Saccheri nell'esposizione delle nuove geometrie, che ogni mente razionale, nel seguire quelle dimostrazioni seducenti, poteva soggiacere a pensieri illeciti. Pur lasciando impregiudicata la questione se il libro sia stato deliberatamente soppresso, è certo che una politica conservativa, per essere coerente con se stessa, avrebbe dovuto procedere alla sua soppressione per ragioni di sicurezza. I suoi insegnamenti erano antitetici a quelli di coloro che ne avevano autorizzato la stampa ed è noto che quando un organismo si divide in due parti contrastanti, le sue probabilità di sopravvivenza sono minime» (Bell, 2001, capitolo XXV).

Malgrado ciò, gli *Elementi* di Euclide sono rimasti il testo di geometria elementare tradizionalmente usato nelle scuole occidentali, fino a quando – XX secolo - le obiezioni delle scuole formalista e logicista dei matematici inglesi, tedeschi, francesi e italiani portarono alla definitiva confutazione del valore logico dell'opera euclidea, con la richiesta della relativa messa al bando.

Fra le diverse obiezioni alla struttura logica degli *Elementi*, ricordiamo il pesante giudizio di Eric Temple Bell: *«Se ne valesse la pena, si potrebbe sottoporre l'intera struttura logica della geometria degli Elementi a un'analisi, che si concluderebbe con un elenco di dimostrazioni difettose e di premesse occulte, cioè con una condanna senza appello»*. E.T. Bell allude a quei postulati contenuti nelle dimostrazioni di Euclide che non sono prima esplicitamente menzionati dall'autore. Anche Bertrand Russell, logico e matematico, evidenziò che un'analisi delle prime ventisei proposizioni del 1° libro degli *Elementi* di Euclide avrebbe potuto evidenziare *«i non pochi errori presenti»* in esse (Russell, *I principi della matematica*, cap. 47°).

1.2.2 Il problema dei fondamenti

L'espressione *«crisi dei fondamenti della matematica»* sta ad indicare un forte dibattito relativo a tutta la comunità matematica, nato nel primo trentennio del XX secolo, che ha posto l'attenzione sulla natura della matematica e sugli enti primitivi alla base di questa disciplina. Si cercava, in buona sostanza, una risposta alla domanda: *Che cos'è la matematica?*

Nel presente paragrafo – per meglio delineare il quadro storico-epistemologico - si illustrano le tappe fondamentali della crisi, le cause e le diverse scuole di pensiero, senza alcuna pretesa di completezza.

La crisi dei fondamenti può considerarsi innescata da una lettera che il giovane Bertrand Russell spedì a Frege il 16 giugno 1902, periodo in cui stava ultimando la stampa del II volume dei *«Grudgesetze der Arithmetik»*. Russell gli comunicava un'antinomia derivabile dal sistema logico della sua opera, antinomia radicata nei fondamenti della teoria degli insiemi. Dal 1902 agli anni trenta la storia della matematica è la storia dei tentativi fatti per eliminare i paradossi e, in generale, per costituire fondamenti solidi alla matematica.

Ovviamente, non si è trattato dell'unica crisi che abbia conosciuto il pensiero matematico dell'uomo. Infatti, già infatti intorno al 410 a.C., in seno alla Scuola Pitagorica, la scoperta delle grandezze incommensurabili sconvolse la mentalità greca del tempo, fondata sulla *«ratio»* delle misure delle figure geometriche. Essa, da un lato, in aritmetica, comportò la nascita della consapevolezza, perennemente respinta dai greci, dell'esistenza di numeri non razionali, detti dai greci αλογοσ *(alogos)* = non esprimibili; d'altro canto, in geometria, comportò la rinuncia alla concezione materialistica degli enti geometrici e l'apertura all'idea astratta di punto, retta, piano e di tutte le altre figure geometriche che divennero entità immateriali e astratte, essendo la loro idea *«astratta»* da oggetti del mondo fisico.

Ma quali idee primitive e assiomi scegliere?

Si tratta dell'eterno problema della conoscenza dell'uomo legata alla *«verità»* e, di conseguenza, nacque il problema di considerare soltanto le idee primitive e gli assiomi ritenuti veri. Inoltre, si poneva la seguente questione: possiamo essere certi della loro verità, essendo essi non definibili e dimostrabili?

Nel corso dello sviluppo del pensiero matematico, intuizionisti, formalisti e logicisti, hanno cercato di affrontare il problema dei fondamenti della matematica. Prima del 1902, non era mai stata messa in dubbio la validità dei risultati classici, basati su verità eterne e immutabili. Ma ormai, l'evidenza inconfutabile lasciava il posto all'opinabilità che, lentamente, compariva sulla soglia della matematica.

Dal punto di vista storico l'intuizionismo si affermò per primo e per moltissimo tempo, poiché aderente all'idea generalmente diffusa di *«vero»*, intesa come confermato dalla realtà fisica; formalismo e logicismo invece, emersero in epoca più recente (secoli XIX e XX), successivamente al lavoro di analisi critica dei fondamenti della matematica, al profondo mutamento del concetto di vero in matematica derivante dall'avvento delle geometrie non euclidee e all'affermarsi del concetto di struttura.

Il problema d'essere o meno intuizionista, ovviamente, non esisteva prima dell'avvento delle geometrie non euclidee, poiché tutti i matematici erano, più o meno consapevolmente, intuizionisti. Con la nascita delle geometrie non euclidee, tuttavia, si generarono dispute sui fondamenti della matematica, e tra il secolo XIX (G. Boole, B. Peirce, J.WR.. Dedekind, G. Cantor) e gli inizi del secolo XX, in contrapposizione ad altri modi di concepire il significato delle matematiche, prende coscienza una vera e propria scuola intuizionista per opera di L.E.J. Brouwer (1881-1966), di cui Hermann Weyl (1885-1955) è stato il più autorevole seguace.

Per gli intuizionisti (Henry Poincarè, L.E.J. Brouwer ed Hermann Weyl) **gli assiomi** sono veri se derivano dalla realtà fisica. In effetti, fino all'avvento delle geometrie non euclidee, l'uomo ha considerato *«vero»* solo ciò che era conforme alla realtà fisica. Ma, giacché la realtà fisica è complessa, alla base dell'edificio geometrico ci saranno enti suggeriti dall'esperienza quotidiana, privati di qualsiasi attributo materiale.

Dopo la scoperta dei paradossi, nacque la tendenza per il rifiuto verso qualsiasi fondazione logica della matematica. Henri Poincaré sosteneva che gli enti matematici primitivi derivano direttamente dall'intuizione, piuttosto che da elaborazioni logiche dei dati fenomenici. *«In questo senso, la logica non è che una veste che per scopi di comunicazione viene imposta a contenuti che ne sono del tutto indipendenti. La logica rimane quindi una pura forma, irrimediabilmente vincolata a strutture linguistiche e come tale niente affatto normativa nei riguardi di contenuti che provengono da ben altra fonte, l'intuizione appunto. […] Per Poincaré, i paradossi non colpiscono minimamente la matematica "vera"* » (Mangione-Bozzi, 1993, p. 386).

Per edificare una geometria che possa far conoscere il mondo fisico, quindi, gli enti fondamentali hanno significato e valore soltanto se astraggono i dati sensoriali del mondo fisico. In tal senso, essi (punto, retta e piano) possono essere concepiti per astrazione dalle corrispondenti immagini, o rappresentazioni sensibili, facilmente rintracciabili nel mondo fisico. In sostanza, si tratta di modelli astratti corrispondenti a modelli concreti.

Quindi, il processo mentale di creazione dei modelli astratti degli enti fondamentali lascia sopravvivere le caratteristiche immateriali intrinseche: il punto, privato di ogni sua propria dimensione, rappresenta semplicemente una posizione nello spazio; la retta, con la sua unica dimensione, descrive una direzione nello spazio; il piano, con le sue infinite direzioni, indica la disposizione nello spazio. Ovviamente, anche gli assiomi sono ricavati dall'osservazione tangibile delle proprietà fondamentali di cui godono i modelli concreti di esse. In definitiva, per gli intuizionisti, i fondamenti della geometria sono evocati dalla realtà fisica ed hanno in essa la loro radice.

L'assiomatismo - A cavallo dei secoli XIX e XX l'aspirazione a stabilire una sistemazione rigorosamente logica della matematica raggiunse l'apice. Sia le geometrie non euclidee che l'indirizzo formale iniziato da Boole ne furono un incentivo. In particolare, le geometrie non euclidee e i lavori di Benjamin Peirce sulla creazione di ben 162 algebre avevano posto chiaramente in luce la possibilità di costruire *«matematiche differenti»* e altrettanto valide dal punto di vista logico. I matematici, che finora avevano concentrato i loro sforzi creativi unicamente verso i

contenuti della loro disciplina, già alla fine secolo XIX e agli inizi del successivo, cominciarono a spostare l'attenzione verso gli aspetti logici. Diventa fondamentale essere sicuri della non contradditorietà della matematica e si cerca di riorganizzarne i contenuti, che vanno presentati come un sistema logico perfetto. Con queste premesse nasce l'assiomatismo, con la finalità di ridurre tutta la matematica al minimo numero di concetti indefiniti e di proposizioni indimostrate. Si indaga sulla *«compatibilità o coerenza»* , sull'*«indipendenza»* e *«completezza»* degli assiomi, ovvero si cerca il metodo per dimostrare che non vi sia contraddizione fra gli assiomi, che nessun assioma sia deducibile dagli altri e che nessun altro postulato occorra per dimostrare i teoremi.
Giuseppe Peano, nel 1889, nei suoi *«Arithmetices principia nova metodo exposita»*, realizza la prima sistemazione assiomatica dell'intera matematica, riducendo tutta l'analisi e l'aritmetica al sistema dei numeri naturali, a sua volta ridotto a tre idee primitive e cinque assiomi. Nel suo Formulario Matematico espose una sistemazione assiomatica della matematica in maniera rigorosamente formale, totalmente priva di parole del linguaggio ordinario, utilizzando soltanto un linguaggio formale.
Inoltre, nel 1899 David Hilbert nei suoi *«Grundlagen der Geometrie»* (*«Fondamenti della geometria»*) presentò la prima e più celebre sistemazione assiomatica delle geometrie euclidee, derivando questa da cinque idee primitive e ventuno assiomi.
Un'altra impostazione assiomatica della geometria degli *Elementi* di Euclide fu successivamente realizzata dal matematico americano Oswald Veblen.
I logicisti – capiscuola Gottlob Frege e Bertrand Russel poi A.N. Whitehead – rifiutano l'idea formalista della geometria come applicazione di regole arbitrarie. Per essi la validità degli assiomi va ricercata nei principi della logica, a cui dovrebbe ridursi non solo la geometria, ma l'intera matematica.
La geometria, come qualsiasi altro ramo della matematica, è la manifestazione dei procedimenti logici che caratterizzano il pensiero dell'uomo, e – quindi - i fondamenti della geometria vanno ricercati esclusivamente nella logica: *«Tutta la matematica pura (aritmetica, analisi, geometria) è costruita mediante varie combinazioni delle idee iniziali della logica, e i suoi enunciati sono dedotti dagli assiomi generali della logica, come il sillogismo e le altre regole deduttive»* (Russel, 1980). In tal modo, logica e matematica non sono altro che sviluppi successivi di una sola disciplina, tant'è che *«la logica è la gioventù della matematica, e la matematica è la maturità della logica»* (Russel, 1919).
Già George Boole (1815-1864), che nel 1854, in *«Investigation of the Laws of Thought»* (*«Analisi delle leggi del pensiero»*), aveva gettato le basi della logica formale. Fu, però, F.L. Gottlob Frege (1848-1925), con *«Die Grundgesetze der Arithmetik»* (*«Le leggi fondamentali dell'Aritmetica»*),

che tentò per la prima volta di derivare tutta l'aritmetica dalla logica. Successivamente, all'inizio del XX secolo, fu Bertrand Russell che la divulgò negli ambienti scientifici del tempo.

Per i formalisti (J.W.R. Dedekind, Giuseppe Peano e David Hilbert) gli enti e le proposizioni fondamentali non hanno necessariamente un legame con il mondo fisico, ma sono liberamente create dall'intelletto umano. Di conseguenza, le idee primitive sono pure ipotesi, la cui validità è garantita unicamente dalla non contraddittorietà degli assiomi. La geometria, quindi, sarebbe la manipolazione di simboli e regole arbitrari che, qualche volta, può rispecchiare la realtà fisica e quindi consentire la conoscenza del mondo esterno.

I sistemi assiomatici realizzati da Peano, Hilbert, Veblen, A.V. Huntington e le considerazioni sull'assetto logico della geometria euclidea e delle geometrie non euclidee avevano mostrato che, per la costruzione di una qualunque ambito della matematica, in definitiva, è necessario e sufficiente iniziare da un insieme di assiomi che soddisfino le condizioni di coerenza (o compatibilità o non contraddittorietà, indipendenza e completezza).

La concezione formalista della matematica capovolge il punto di vista affermato da Kant: *«Ogni conoscenza umana parte da intuizioni, procede attraverso concetti, e culmina in idee»*. Secondo i formalisti, difatti, gli assiomi sono ipotesi, senza alcun riferimento intuitivo, con la funzione di fornire la base su cui viene costruito il sistema di proposizioni e definizioni della geometria. In tal senso, il concetto di vero, secondo i formalisti, non ha più un significato assoluto, ma soltanto relativo al sistema ipotetico-deduttivo a cui si riferisce. Un'affermazione è vera soltanto se all'interno del sistema ipotetico-deduttivo a cui appartiene, non contraddice gli assiomi e le affermazioni dello stesso sistema. In tal senso Bertrand Russell scrisse *«la matematica (pura) può essere definita come la materia nella quale non sappiamo di che cosa stiamo parlando, né se ciò che stiamo dicendo è vero»* (Russell, 1918). Quindi, le affermazioni che si fanno in matematica non sono né vere né false, poiché la questione della loro verità è ricondotta alle proposizioni primitive. Queste ultime non sono né vere né false - nel senso tradizionale dato a questi termini - ma sono pure e semplici ipotesi.

I formalisti contestano agli intuizionisti l'impossibilità di stabilire la verità degli assiomi - così come questi ultimi la intendono - poiché i metodi sperimentali sono sempre approssimativi e contengono errori di misura. *«Se gli assiomi di Euclide siano veri, è una domanda alla quale il matematico puro è indifferente; e, per di più, è una domanda alla quale è impossibile, da un punto di vista teorico, dare con certezza una risposta affermativa. Si potrebbe forse dimostrare, mediante misure molto accurate, che gli assiomi di Euclide sono falsi; ma nessuna misura potrebbe mai garantirci (a causa degli errori di osservazione) che sono esattamente veri. Quindi il geometra lascia decidere all'uomo di scienza, meglio che può, quali assiomi siano più vicini alla realtà nel* *mondo reale. Il geometra prende una serie di assiomi che gli sembrano interessanti, e ne deduce le conseguenze»*. (Russell, 1918).

Tuttavia i matematici assumono gli assiomi in vista di specifici obiettivi da conseguire con le relative geometrie: *«Gli enti matematici vengono presentati dai matematici come strutture puramente formali. In verità (e qui è l'indagine storico-genetica che ci sorregge!) la matematica non si occupa di sistemi formali qualunque (arbitrari) pur che coerenti; la matematica si occupa di quei sistemi formali che traducono, in termini di pura struttura, parecchi sistemi concreti (concreti, almeno, rispetto alla nuova formalizzazione;l'astrazione conosce diversi gradi, astratto e concreto sono sempre dei relativi, mai degli assoluti). Lo scopo fondamentale è quello di lavorare in modo semplice e sintetico con deduzioni nelle quali entrano in gioco solo proprietà formali, in modo da potere tradurre un teorema (risultato della deduzione formale) in molti, a priori in infiniti, risultati relativi a tutti quei concreti che sono suscettibili della formalizzazione compiuta completezza»* (Radice, 1974).

1.2.3 Evoluzione nel tempo del significato della matematica

Prima che nascessero le geometrie non euclidee, esisteva un unico punto di vista sui fondamenti della matematica, l'intuizionismo, secondo il quale *«vero»* significava in accordo con la realtà fisica. E' interessante notare che la nascita delle geometrie non euclidee è avvenuta sotto la spinta della convinzione che la geometria di Euclide fosse l'unica possibile. Infatti, diversi tentativi di rendere perfetta la costruzione fatta da Euclide nei suoi *Elementi*, indussero vari matematici a cimentarsi nella dimostrazione del quinto postulato euclideo, in quanto esso non aveva l'evidenza – tipica degli assiomi - fornita dalla intuizione della realtà fisica.

Applicando il ragionamento logico deduttivo, i matematici furono indotti – loro malgrado - a dover ammettere la possibilità, dapprima dal punto di vista logico e in seguito, anche dal punto di vista fisico, dell'esistenza di geometrie diverse da quella euclidea. La convinzione che l'unico significato della geometria dovesse essere legata alla realtà fisica ha fatto sì che le geometrie non euclidee, pur riconosciute logicamente valide, fossero considerate soltanto il frutto dell'immaginazione dell'intelletto umano.

La nuova convinzione che altre geometrie possono esistere con pari dignità di quella euclidea, fu uno stimolo importante per i matematici dei secoli XIX e XX ad approfondire il problema dei fondamenti della geometria e della matematica tutta. Infatti, fino al secolo XIX i matematici si erano dedicati soprattutto a nuove scoperte e non si erano curati della perfetta correttezza logica dell'assetto della loro disciplina.

Questo nuovo atteggiamento mentale verso i fondamenti portò a una diversa valutazione sul significato della geometria e di tutta la matematica.

La concezione formalista della matematica è stata accolta pienamente dai neo-positivisti che, estendendola alla logica, giungono ad affermare che non soltanto le idee e proposizioni primitive della matematica sono arbitrari, ma anche i principi della logica possono essere scelti liberamente dando luogo a *«più logiche»*. La contestazione all'idea di un solo tipo di logica, quella classica aristotelica a due valori (vero, falso), nacque dagli intuizionisti, in contrapposizione ai logicisti e ai formalisti, in merito alla validità del principio del terzo escluso (*tertium non datur*) della logica aristotelica, secondo il quale A è B o non-B, in altre parole una proposizione è vera o falsa, senza altre alternative. Tale principio, infatti, dava luogo a vari paradossi (l'antiniomia di Russel, Epimenide di Creta) nella sua applicazione sia a taluni insiemi sia a talune proposizioni.

Inoltre, esistono casi in cui non è possibile decidere se qualcosa è vera o falsa. Nel 1931, il matematico e logico austriaco Kurt Gödel, partendo dal paradosso di Epimenide, dimostrò che alcune proposizioni sono vere se e solo se sono false. Di conseguenza, il principio del terzo escluso non è sempre valido, in quanto esistono casi in cui un'affermazione non è né vera né falsa. Gödel dimostrò, attraverso i teoremi sull'indecidibilità e sull'incompletezza, che entro ogni sistema rigidamente assiomatico, esiste almeno una proposizione per la quale non possiamo stabilire se è vera o falsa.

Venuta meno la logica a due valori di Aristotele, sono stati creati sistemi di logica a più valori e a valori della probabilità, in cui una proposizione può assumere vari valori, eventualmente infiniti, compresi fra i due estremi vero e falso.

Con il neo-positivismo o positivismo logico, il concetto di vero non è assoluto, in quanto:

- relativo all'insieme di assiomi adottati;
- relativo sistema di logica applicato.

1.2.4 Evoluzione del significato della geometria

Le geometrie non euclidee ebbero maggiore risonanza a partire dal 1854, anno di pubblicazione di *«Uber die Hypotesen welche der Geometrie zu Grunde liegen» («Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria»)* di Georg Friedrich Bernhard Riemann.

Tale lavoro *«sosteneva [...] una visione globale della geometria come studio di varietà di un numero qualsiasi di dimensioni»; «secondo la concezione di Riemann la geometria non dovrebbe neppure necessariamente trattare di punti o di rette o di spazio nel senso ordinario, ma di insiemi di ennuple ordinate che vengono raggruppate secondo certe regole»* (Boyer, 1976).

Per questo motivo *«La memoria di Riemann […] va indubbiamente considerata come un punto nodale per la ricerca matematica - e filosofica - sul concetto di spazio. In essa, in particolare, raggiunsero un alto grado di riorganizzazione e organicità le considerazioni di geometria differenziale iniziate qualche decennio prima da Gauss […] che impostano il problema dei fondamenti della geometria in modo nuovo, originale e profondo»* (Mangione e Bozzi, 1993).

Inoltre: *« Il pensare che la geometria parli di oggetti le cui proprietà debbono dedursi principalmente dagli* ***assiomi*** *(così, dopo Riemann, sentenziò Hilbert nelle sue Grundlagen der Geometrie, 1899) offrì sicuramente un ulteriore apporto all'idea di una matematica che sceglie* ***da sé****, fuori dall'imperativo di presunte* ***essenze*** *precostituite, le basi della propria edificazione. I "punti" e le "linee" cominciano a essere non più cose chiare in sé, ma oggetti descritti da proposizioni atte a specificarne l'****uso****, e quindi, in buona misura, prodotti di scelte volontarie, di assiomi revocabili o di convenzioni "prestabilite"»* (Zellini, 1985).

La matematica classica aveva concepito i propri principi senza alcuna giustificazione, in quanto *verità rivelate* che, quindi, non si dimostrano, ma si vedono e basta. I matematici classici avevano usato il postulato delle parallele per dimostrare le proprietà delle figure. L'avvento delle geometrie non euclidee, invece, diede una scossa alle ordinarie concezioni base sul rapporto tra l'uomo e la conoscenza matematica:

«Hilbert intuiva che quella libertà di creare, che trasformava gli uomini in dei (e liberavano l'uomo da Dio), i matematici dovevano guadagnarsela con delle prove inconfutabili. Per l'affrancamento dell'uomo dalle "catene" dell'intuizione era necessario compiere un ultimo sforzo, il più difficile: dimostrare che le creazioni umane sono armoniose e perfette quanto quelle della Natura» (Di Saverio, 2003).

1.2.5 Dopo la crisi

Un interessante posizione filosofica si ritrova in Reuben Hersh, fondatore dell'Umanesimo Matematico, ovvero sostenitore di una concezione umanistica della matematica.

Nel libro «*Ma che cos'è la matematica veramente?*» egli propone una risposta radicalmente diversa da quelle tradizionali.

Hersh ripudia il platonismo e il formalismo e, pur riconoscendo le ragioni che possono farli sembrare plausibili, cerca di mostrare che, da un punto di vista filosofico, la matematica deve essere considerata un'attività umana, un fenomeno sociale che fa parte della cultura umana.

Secondo Hersh la matematica è *«un fenomeno sociale che fa parte della cultura umana e, in quanto tale, evoluta storicamente e intelligibile solo in un determinato contesto sociale»* (Hersh R. e Davis P. J, 1985).

Scheda riassuntiva del capitolo 1

Il problema del rapporto fra dati di fatto e ipotesi è stato oggetto di diverse riflessioni a partire dal XIX secolo, soprattutto in Francia e in Italia, quando l'errore come elemento attivo della conoscenza è stato oggetto di diverse riflessioni a partire dal XIX secolo, soprattutto in Francia e in Italia (ricordiamo Enriques, Bachelard, Rey, Brunnschvieg e Meyerson

Storicamente, in Europa, abbiamo assistito all'esaltazione di distinzioni dualiste e trascendenti della conoscenza che però, sin dalla fine dell'Ottocento, non risultavano più idonee per distinguere il vero dal falso, il corretto e l'erroneo e, in ultima o prima istanza, per traslato, il bene e il male.

Nella prima meta del secolo XIX, tuttavia, qualcosa era destinata a cambiare: Nicolaj Ivanovic Lobacevskij, Janos Bolyai, Karl Friedrich Gauss, Bernhard Riemann ed Eugenio Beltrami chiarirono l'esistenza, similmente fondata, di nuove geometrie differenti da quella euclidea.

Le geometrie non euclidee e la topologia cominciavano a porre dubbi di legittimità su cosa potesse essere concepito come spazio vero o persino come spazio reale.

Inoltre, vari colpi sono stati inferti al mito della certezza matematica: i lavori di Gödel sull'inconsistenza della matematica, l'instabilità del concetto di rigore matematico (pre-Bourbaki e post-Bourbaki), dimostrazioni così complicate da costringere i referee a rifiutarsi di portare a termine l'esame e dichiarare ufficialmente la dimostrazione : *«giusta» o «sbagliata»*.

La verità, quindi, cambiava il proprio statuto epistemologico e le verità matematiche non sembravano affatto essere superiori alle certezze fornite dalle leggi naturali. In questo senso la nozione di errore acquisiva un nuovo statuto epistemologico. Una conoscenza falsa, un pensiero errato, avevano lo stesso valore epistemologico di quello che perseguiva una verità, perché entrambi ragionevoli. Verità ed errore non erano idonei a distinguere razionale e irrazionale poiché l'errore nelle scienze altro non è che una vecchia verità superata dalle nuove conoscenze.

Si trattava, chiaramente, di una posizione fortemente in antitesi con la teoria gentiliana della conoscenza che, riprendendo l'interpretazione megarica e storica, considerava l'errore come qualcosa d'insensato: *«la conoscenza se è falsa non è conoscenza»* (Gentile, 1917).

Dal XX secolo in poi, si è affermata quindi l'idea che - almeno teoricamente - è possibile costruire infinite matematiche, ognuna delle quali si conforma a un sistema ipotetico-deduttivo, cioè un insieme di asserzioni fondamentali, dette assiomi, aventi il valore di semplici ipotesi, da cui dedurre logicamente altre proposizioni.

Un forte dibattito relativo a tutta la comunità matematica, nato nel primo trentennio del XX secolo, ha posto l'attenzione sulla natura della matematica e degli enti primitivi: la crisi dei fondamenti della matematica era cominciata. Bisognava risolvere l'eterno problema della conoscenza dell'uomo legata alla *«verità»* e, di conseguenza, nacque il problema di considerare soltanto le idee primitive e gli assiomi ritenuti veri. Si poneva la seguente questione: possiamo essere certi della loro verità, essendo essi non definibili e dimostrabili? Intuizionisti, formalisti e logicisti, hanno cercato di affrontare il problema dei fondamenti della matematica. Prima che nascessero le geometrie non euclidee, esisteva un unico punto di vista sui fondamenti della matematica, l'intuizionismo, secondo il quale *«vero»* significava in accordo con la realtà fisica. La nuova convinzione che altre geometrie possono esistere con pari dignità di quella euclidea, fu uno stimolo importante per i matematici dei secoli XIX e XX ad approfondire il problema dei fondamenti della geometria e della matematica tutta. Infatti, fino al secolo XIX i matematici si erano dedicati soprattutto a nuove scoperte e non si erano curati della perfetta correttezza logica dell'assetto della loro disciplina.

Questo nuovo atteggiamento mentale verso i fondamenti portò a una diversa valutazione sul significato della geometria e di tutta la matematica. L'avvento delle geometrie non euclidee, diede una scossa alle ordinarie concezioni base sul rapporto tra l'uomo e la conoscenza matematica.

2

Analisi storica del concetto di angolo

Introduzione

La riflessione sul ruolo degli errori nell'ambito della teoria della conoscenza, comporta il riconoscimento della storia come forma complementare della conoscenza matematica.

Nel presente paragrafo, alla luce delle precedenti considerazioni, si tenta delineare lo sviluppo del concetto di angolo, dal punto di vista storico.

Tale analisi sarà basilare per le riflessioni sulle concezioni degli allievi che saranno evidenziate nei capitoli successivi.

Infatti*, « Come l'umanità, si dice, ha dovuto percorrere numerose tappe per giungere al possesso di una dottrina scientifica, attraverso errori, deviazioni, scoperte, così nella mente del discente tali tappe devono essere ripercorse, con analoghi errori, analoghe deviazioni, analoghe scoperte»* (Frajese, 1950, p. 338).

La definizione geometrica dell'angolo non è stata storicamente semplice, soprattutto per l'esistenza di angoli mistilinei. Sembra che i babilonesi trattassero soli gli angoli retti (considerati angoli «giusti») e l'argomento di studio *«angolo»* mancasse nella matematica babilonese ed egiziana (Borzacchini, 2005); eventuali riferimenti all'angolo si limitavano alla sua *«forma»* (Hoyrup, 2002). E' certo però che i babilonesi si sono occupati della misura degli angoli e alcune testimonianze mostrano che gli egiziani, invece, lavoravano sia nella ricostituzione periodica della forma dei loro campi che nel calcolo accurato di inclinazioni. Infatti, il problema 56 del papiro di Rhind chiede di calcolare il *«seqt»* della faccia di una piramide, ovvero la misura egiziana della pendenza di una linea. L'esistenza del concetto di *«seqt»* ci rivela la conoscenza del legame tra la costanza della direzione e la costanza della forma. In sostanza, l'inclinazione della faccia della piramide è pensata come una qualità comune a ogni parte di essa.

All'opposto, la geometria greca è invece caratterizzata nettamente dallo studio degli angoli, fino a Talete. Anche per i greci gli angoli sono sostanzialmente *«qualitativi»*, ricondotti a figure o forme. In particolare Proclo riferisce (Comm. 251) che la dimostrazione del teorema dell'uguaglianza degli angoli di un triangolo isoscele è dovuto a Talete, che chiamava *«simili»* gli angoli uguali. Inoltre, già in Platone (V- IV sec. a. C.) si rintracciano le idee di angolo acuto e angolo ottuso, nei suoi *Dialoghi* (D'Amore, 1985).

2.1 La definizione euclidea di angolo (III sec. a.C.)

La definizione presente negli Elementi di Euclide, che risale al 300 a.C., è il punto di arrivo di una pratica storica con gli angoli durata alcuni millenni.[2] Euclide dichiara:

«VIII. Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee in un piano, che si toccano e non giacciono in linea retta»

«IX. E quando le linee che contengono l'angolo sono rette, l'angolo è chiamato rettilineo». Euclide arriva all'angolo passando per l'inclinazione (concetto che non definisce) ed introduce di fatto due tipi di angoli, quelli rettilinei (che sono gli angoli *«ufficiali»* della scuola) e quelli formati da linee.

Alcuni autori (Heath, 1956) hanno giustamente osservato che la frase *«non giacciono in una linea »* è strana, in quanto la definizione si propone di applicarsi sia agli angoli formati da linee curve che da linee rette. Forse avremmo dovuto aspettarci *«continue l'una con l'altra »*; e infatti, osserva Heath, che Erone di Alessandria prende proprio questo come significato, in quanto egli aggiunge una spiegazione a ciò che si intende per le linee che non sono continue.

E' probabile che Euclide pensasse di definire un angolo rettilineo, ma con una riflessione successiva, includendo anche gli angoli curvilinei, ha alterato *«linee rette»* in *«linee»* e ha separato la definizione in due.

L'idea di angolo ai tempi di Euclide era relativa a rottura, flessione di linee e la definizione di Euclide come inclinazione era – di fatto - una novità.

E' stato osservato che tale definizione sarebbe tautologica, in quanto ripropone in termini solo formalmente diversi l'enunciazione di quanto dovrebbe costituire oggetto di spiegazione. Inoltre, la definizione sarebbe più completa se si spiegasse il significato del termine inclinazione: di fatto Euclide sostituisce al concetto di angolo quello non definito di inclinazione.

Tuttavia, la parola inclinazione - ai tempi di Euclide – era diffusa nel linguaggio comune e, quindi, Euclide dava per certo che essa fosse compresa da tutti.

Ciò rispecchia la caratteristica descrittiva delle definizioni euclidee, che non intendono costruire concetti definiti, quanto piuttosto assegnargli un nome. La parola greca usata nell'elencazione dei termini degli Elementi è infatti *«oroi»*, che lascia pensare ad una elenco commentato di termini

[2] L'edizione a cui faremo riferimento è quella di Frajese-Maccioni (1970) che si rifà a Heiberg. Sarà usata anche l'edizione di Heath (1956) .

tecnici, utilizzati negli Elementi. La quasi totalità di studiosi di storia della matematica[3] ritiene che Euclide intendesse non tanto *definire* tali termini, quanto piuttosto *evocarli*, o semplicemente *descriverli* : *«Le definizioni iniziali di Euclide hanno solo il sembiante di definizioni, poiché si riducono a semplici descrizioni empiriche, paragonabili a quelle che può dare un dizionario, avendo lo scopo di dirigere la mente verso la nozione di cui si tratta»* (Blanche, 1968, p. 186).

2.1.1 L'angolo acuto, l'angolo ottuso e l'angolo retto secondo la definizione euclidea

La definizione euclidea si richiama alla disposizione spaziale delle linee, relazione tra l'una e l'altra, conferendo all'angolo un aspetto di relazione, piuttosto che di oggetto (si veda paragrafo 2.4.3); esse sono *«reciprocamente inclinate »* e attraverso il riferimento all' *«inclinazione »* si soddisfa un compito *«descrittivo»,* fortemente presente agli albori della geometria, quando essa era soprattutto pratica empirica, piuttosto che metodo teorico basato su presupposti.

L'inclinazione, va sottolineato, è un concetto intuitivo: dal punto di vista fisiologico un sofisticato apparato sensoriale rileva informazioni relative alla posizione ed al movimento della testa e del corpo nello spazio (il sistema vestibolare). Tale sistema fa sì che la verticale non è vissuta psicologicamente come una *«inclinazione»,* ma qualcosa di diverso da essa.

La medesima definizione riunisce in un unico termine angoli acuti, ottusi, retti e classifica l'angolo rispetto alla verticale in tre tipi, l'acuto, il retto e l'ottuso.

« IX. L'angolo si dice rettilineo se le linee che lo comprendono sono rette».

«X. Quando due rette, l'una innalzata sull'altra, formano angoli adiacenti uguali, ciascuno dei due angoli si dice retto e la retta innalzata si dice perpendicolare all'altra».

«XI. Angolo ottuso è quello maggiore di uno retto».

«XII. Angolo acuto è quello minore di uno retto».

In tal senso, Proclo - autore di un commentario agli Elementi di Euclide - osserva *al I libro degli Elementi di Euclide*:

«Queste sono le tre specie di angoli, di cui parla anche Socrate nella Repubblica, ammessi dai geometri nell'ipotesi che una linea retta formi questi angoli secondo una distinzione in specie, cioè la specie retta, l'acuta, l'ottusa [...]»

Il legame ai vincoli intuitivi è evidente in Euclide, tra l'altro, nell'incapacità di vedere una continuità di specie tra gli angoli compresi tra 0 e 180 gradi. La definizione euclidea, infatti, esclude l'angolo piatto, che viene nominato come due angoli retti; tuttavia, la considerazione di angoli piatti e angoli giri nasce dalla visione dell'angolo realizzato come rotazione di una semiretta: idea che richiede una concezione di continuità. Potremmo dire che per Euclide l'angolo piatto non fosse un vero angolo. Egli, di fatto, lo esclude, utilizzando l'espressione *«non giacciano in linea retta»*.

[3] Una voce fuori dal coro, in tal senso, è espressa da Renato Migliorato, in quanto lo stesso ritiene che altre definizioni *« chiariscono il significato di parole nuove mediante parole già note»*. (Corso Epistemologia 1)

L'angolo piatto nasce come configurazione possibile più astratta e generale, non legato ad una spazialità concreta. Bisogna, però, che ci allontaniamo da una nozione di formazione concettuale a partire dall'aspetto caratteristico: una linea retta ed un angolo acuto hanno, in effetti, un aspetto molto differente. E' innegabile che una classificazione fondata unicamente sull'aspetto visivo non accomunerebbe gli angoli piatti sotto l' unico *«concetto di angolo»*. Se, però, facciamo notare che è possibile ottenere una retta dall'angolo acuto, il discorso cambia.

Si tratta, in effetti, di una modificazione nel modo di guardare la nozione: da un lato angolo sperimentato, dall'altro angolo come idea concezione astratta-geometrica, in un processo di allontanamento dal mondo dell'esperienza. Da oggetti già fatti e concreti ad oggetti come risultati di pensiero (Piana, 1999).

2.2 La definizione di angolo nella cultura greca

Apollonio (III sec a.C.) ed **Erone** (100 a.C.) definiscono l'angolo: *«la contrazione di una superficie o di un solido in un sol punto sotto una linea spezzata o una superficie»*. Non è facile immaginare cosa avessero in mente i due matematici.

Tuttavia, la loro definizione richiama l'idea di irregolarità dell'andamento di un fenomeno, alla stessa maniera della definizione di **Eudemo** di Pergamo (II sec. d.C.) che, 300 anni dopo, definì l'angolo come *«rottura di una linea»*.

Carpo di Antiochia (II sec.) definisce *«l'angolo l'intervallo (distanza) delle linee o delle superfici che lo comprendono»*. Questa definizione non chiarisce, però, a che distanza dal vertice va fatta tale misura.

Plutarco di Nestorio (III – IV sec.) afferma che l'angolo *«è la prima distanza sotto il punto»*. Anche in questo caso ci sono alcune incertezze sull'uso della parola *«distanza»*.

Heath individua nelle definizioni di Plutarco, Carpo e Apollonio il germe di un concetto apprezzabile in analisi infinitesimale, mettendo inoltre in evidenza due nozioni complementari – convergenza e divergenza - direttamente riconducibili a quella di angolo. Apollonio avrebbe evidenziato come caratteristica fondamentale dell'angolo la convergenza di linee (i suoi lati) ad un punto (il suo vertice). Infatti la *«contrazione in un sol punto»* è da intendersi in senso dinamico, altrimenti – se diversamente intesa - si produrrebbe il punto.

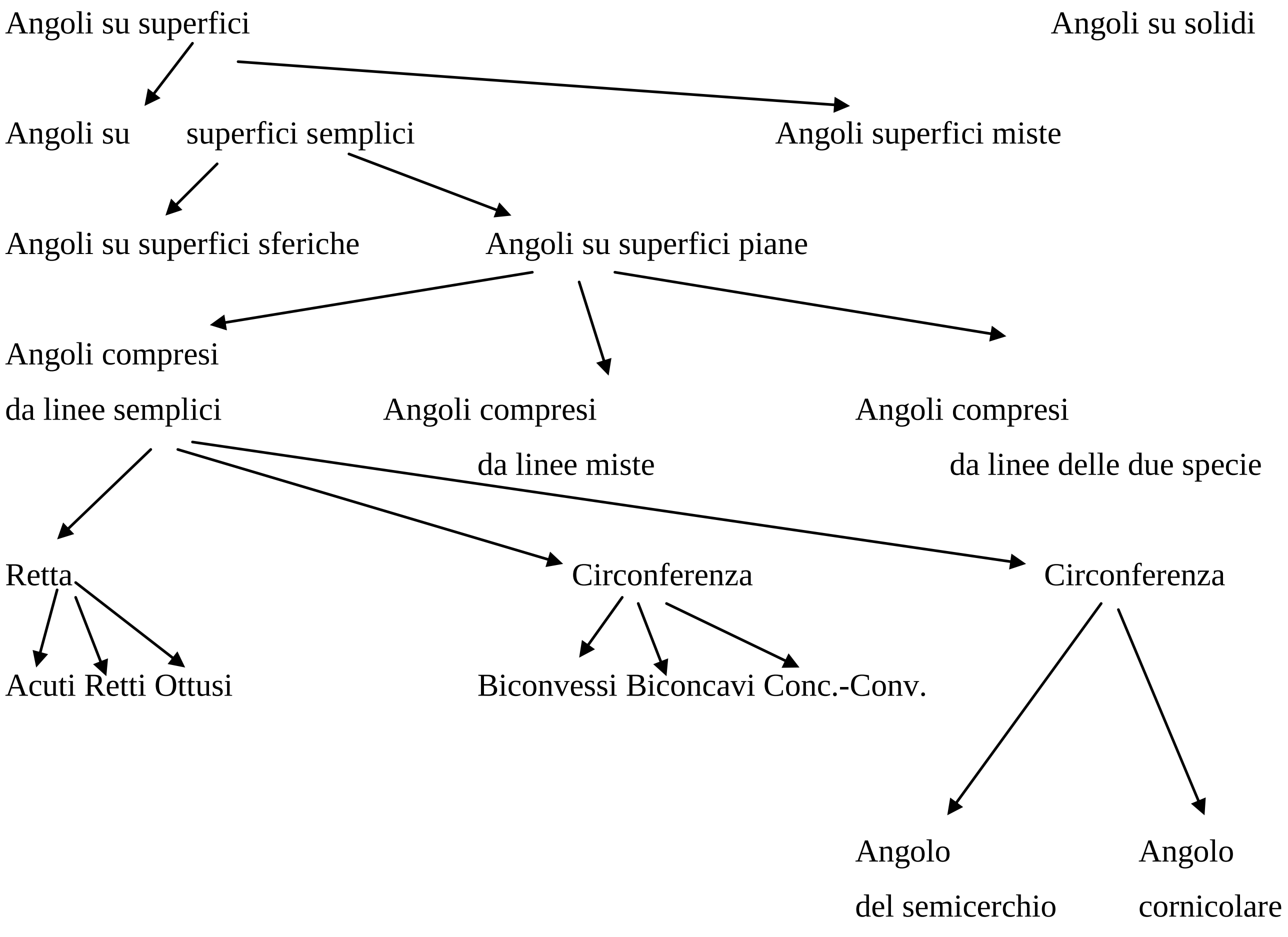
Carpo e Plutarco, invece, avrebbero inteso l'angolo tipicamente come divergenza di linee dal loro punto d'incontro.

In particolare, la definizione di Carpo avrebbe fatto uso del termine *«distanza»* nel senso rotazionale, piuttosto che in una dimensione, generando difficoltà di definizione riconducibili alla volontà di definire un *«diverso termine tecnico per esprimere un'idea nuova»*.

Plutarco avrebbe tentato *«di definire la velocità di divergenza, fra linee al loro punto d'incontro, come misura dell'ampiezza dell'angolo da esse individuato»* (Heath, 1956, p. 177).

Relativamente alla trattazione degli angoli, **Pappo** (III sec.) dimostra la validità del seguente teorema: *«Non è vero che un angolo uguale ad uno retto sia a sua volta un angolo retto»*. Egli nota, però, che il suo teorema non vale se si esclude la considerazione di angoli curvilinei: di qui la sua apparente propensione all'abbandono degli angoli curvilinei nella trattazione relativa agli angoli. **Proclo** (412 – 486), autore di un commentario agli Elementi di Euclide, definisce l'angolo in maniera seguente: *«Angolo piano è l'inclinazione di due linee che hanno un estremo in comune in un piano e che non giacciono in direzione l'una dell'altra»*.

Interessante è la dettagliata classificazione elaborata da Proclo nel suo Commentario, relativamente agli angoli, che si riporta in basso.



2.3 L'angolo negli schemi aristotelici

Aristotele non era un matematico e non nutriva grande interesse per la matematica, tuttavia le sue opere presentano numerosi riferimenti relativi la geometria pre-euclidea dalle origini sino al IV secolo a.C (Ferrari e Pizzetti, 1999). Aristotele approfondisce lo studio delle categorie *«qualità», «quantità», «relazione»* oltre a quella di *«sostanza»* . Aristotele sottolinea i diversi significati della qualità (ποιοτησ), *«quella secondo cui alcuni sono detti quali»*. Secondo Aristotele alcune classi della qualità (le prime tre) *«l'abito e la disposizione»*, la *«capacità od ... incapacità naturale»*, le *«affezioni»* - sono suscettibili di ammettere *«il più o il meno»*. La quarta classe della categoria qualità è costituita *«dalla figura e dalla forma che sussiste intorno ad ogni cosa, ed inoltre dalla dirittura e dalla curvatura, e da ciò che è simile a queste. Infatti in conformità a ciascuna di queste una cosa è detta qualificata [...] (ad esempio) per il fatto di essere diritta o curva»*. Quindi, secondo Aristotele, la caratteristica di ammettere *«il più e il meno»* non compete alle figure (Zanatta, 1989). Tuttavia la qualità, in tutte le sue classi, è soggetta a *«somiglianza»* e di *«dissomiglianza»*: caratteristica che denota l'identità e la non identità nella qualità. Aristotele, infatti, in alcuni passi del ***De Caelo*** usa il termine *«simili»* (ομοιοι) per indicare angoli uguali.

Ci fu un gran dibattito tra i filosofi riguardo a quale particolare categoria (secondo lo schema di Aristotele) l'angolo può essere collocato. Il dibattito si inserisce nello spirito della scuola pitagorica, secondo cui la matematica è :

a) scienza delle qualità (in sé stesse o in relazione ad altre);

b) scienza delle quantità (in riposo o in movimento) (D'Amore, 1985).

Secondo Erone i Pitagorici - orientati nel senso della qualità - diedero una prima definizione di angolo, anticipatoria del pensiero aristotelico. Dice l'Autore che *« [...] i Pitagorici chiamavano gli angoli punte di frecce, identificandoli con la frattura di una linea [...] in un punto»:* si tratta di una concezione basata sulla *«forma»(* J. L. Heiberg, Stuttgart, Teubner, 1976)

Il problema della collocazione dell'angolo nella categoria di quantità, qualità o relazione prende origine in un passo dell'*Organon* di Aristotele, in cui il filosofo greco afferma che una specie della qualità è costituita dalle determinazioni geometriche, cioè dalle figure e dalle forme.

Una prima concezione di angolo, delineata dal filosofo è legata alla quarta classe della qualità. Aristotele, in Categorie, 8 10-11 definisce come varietà di una qualità *«figura e la forma sottostante in ogni cosa, e, ancora, rettilineità, curvatura, e simili»*. Egli afferma che ogni singola cosa è descritta in relazione alla sua forma. Anche in Fisica I ,5 188 25 l'angolo, la retta, la circonferenza sono chiamati tipi di figure. Aristotele non aveva dubbio riguardo al fatto che la deflessione fosse della stessa categoria di rettilinearità e curvatura. Giacché l'angolo assume i connotati di *«forma»* di una linea, possiamo senza dubbio affermare che il filosofo intenda inserirlo nella quarta classe della qualità. A sostegno di tale ipotesi, inoltre, Aristotele – nell'ambito della discussione dei *«generi dei contrari»* - afferma che quelli inerenti alla figura sono *«l'angolare e il non angolare, il retto e il circolare»* (Russo, 1973): quindi l'angolo – per il filosofo - non è solo *«forma»*, ma anche *«figura»*, in un'ottica di descrizione assolutamente qualitativa. Si badi bene che la linea, che costituisce la forma dell'angolo, non è necessariamente una retta: nella geometria pre-euclidea, abbiamo già visto, era presente una teoria degli angoli curvilinei.

Inoltre, in M***etafisica***, *riconduce* la nozione di unità (εν) a due significati base:

- quello accidentale (κατα συμβηβεκόσ) e
- quello essenziale (καθ'αυτό) in tal senso *«sono dette tali perché sono un continuo»*, cioè formate da elementi caratterizzati da moto simultaneo: tali elementi non possono essere, nel medesimo tempo, alcuni in movimento ed altri in riposo (Ferrari e Pizzetti, 1999).

Esistono, quindi, cose continue in senso essenziale e quelle che lo sono per *«puro contatto»*. Nello specifico *«una linea è detta una anche se spezzata (κεκαμμενη) purché sia continua»*, in quanto *«le cose che in generale sono continue sono dette unità, anche se hanno una piegatura(καμψισ), però ancor di più quelle che non (l') hanno»*. Si delinea, quindi, una scala gerarchica: la linea retta è *«una»* in misura maggiore rispetto alla spezzata; infatti *«la linea che ha una spezzatura ed un angolo è una ed anche non-una, perché il suo movimento può essere simultaneo o anche non simultaneo»*, mentre il movimento della linea retta è sempre e solo simultaneo (Reale, 1993). E' evidente, quindi, che al tempo di Aristotele l'angolo fosse comunemente associato alla frattura (κλασις) od alla piegatura o curvatura(καμψις) di una linea, tutti sinonimi nella lingua greca.

In quanto all'angolo come relazione, riconducendoci ancora alle parole di Aristotele, riportiamo due differenti nozioni di *«relativo»*. Dapprima egli afferma che *«sono dette relative le cose di questo genere: tutte quelle che, ciò che sono, son dette esserlo di altre cose, o, qualunque altro ne sia il modo, in relazione ad un'altra cosa».* Successivamente, nell'intento di restringere l'eccessiva ampiezza di tale definizione, il filosofo definisce le cose relative come *«quelle per le quali l'essere coincide con lo stare in un certo modo in relazione ad alcunché»*; e loro proprietà essenziale è l'essere *«dette in rapporto a cose correlative»*, che *«esprime la natura stessa di questo genere di determinazioni»* (Zanatta, 1989).

2.3.1 L'angolo come quantità Proclo pone il seguente quesito nel commento 125 del suo Commentario: se gli angoli sono da considerare come qualità, frattura di una linea (secondo Eudemo), oppure come una relazione di inclinazione tra linee o piani (secondo Euclide) o come quantità in quanto divisibili (secondo Apollonio, Carpo, Plutarco). Riportiamo le sue parole:

«Quelli fra gli antichi che posero l'angolo nella categoria di ciò che è in relazione con qualche cosa dicono che esso è un'inclinazione di linee o di piani inclinati l'un verso l'altro, altri invece che intendono questo anche nella sua qualità come ciò che è retto o ciò che è curvo chiamano questo un modo di essere della superficie o del solido, quelli infine che si riferiscono alla quantità ammettono che esso è una superficie o un solido. Quello [l'angolo] infatti sulla superficie è diviso da una linea e in un solido da una superficie. Ma ciò che è diviso da queste cose, dicono, non è altro che una grandezza e questa non è lineare [non è una linea, dato che la linea è divisa in due parti da un punto]: rimane dunque che essa è una superficie o un solido» .

All'epoca esistevano, infatti, tre filoni di pensiero: 1 – Una prima corrente di pensiero poneva l'angolo nella categoria della quantità; in particolare, ritornando alle categorie aristoteliche, quantità era *«ciò che è divisibile in parti immanenti e delle quali ciascuna è per propria natura un alcunché di uno e di determinato»* (Reale, 1993). La quantità appare come *«il genere delle determinazioni che indicano la divisibilità di una cosa»* (Zanatta, 1989). Coloro che collocavano l'angolo nella categoria della quantità giustificavano ciò affermando che un angolo piano è diviso da una linea e un angolo solido da un piano. Plutarco e Carpo sono classificati tra quelli che, in un modo o in un altro, ponevano l'angolo tra le quantità; Plutarco, in particolare, chiamò Apollonio a supporto del proprio punto di vista, nonostante la parola contrazione (di piano o solido) utilizzata da parte di quest'ultimo non suggerisca l'idea di grandezza, quanto – piuttosto - quella di inclinazione euclidea. E' stata questa ultima considerazione che senza dubbio ha portato Aganis, l'amico di Simplicio[4], a sostituire alla formulazione di Apollonio *«una quantità che ha dimensioni e le estremità che si incontrano in un punto»* (Heath, 1956).

Proclo usa le seguenti riflessioni circa l'angolo di contingenza, per respingere l'idea che l'angolo appartiene alla categoria quantità: *«Ma se [l' angolo] è una grandezza, tutte le grandezze finite della stessa natura hanno rapporto tra loro, e anche tutti gli angoli dello stesso genere, dunque, avranno rapporto tra loro cosicché anche l'angolo compreso tra un arco [di circonferenza] e la sua tangente ad un' estremità del diametro rispetto all' angolo rettilineo [avranno rapporto tra loro]. Ma le cose che hanno rapporto tra loro, moltiplicate, possono superarsi a vicenda. Dunque,*

Heath si riferisce al *Commento* arabo di Al-Nirizi (IX secolo), pervenutoci attraverso la traduzione latina di Gherardo da Cremona (XII secolo). La parte di questo commento, relativa alle definizioni, postulati, assiomi, contiene frequenti riferimenti al nome di Sambelichius, che s'identifica facilmente con Simplicius, il celebre commentatore di Aristotele, vissuto nel VI secolo. Aganis, l'amico di Simplicio, è identificato da Curtze ed Heiberg con Gemino (matematico del I secolo AC nominato da Proclo), mentre Tannery rigetta tale identificazione (si veda anche Bonola 1906, rist. 1975 pagg 6-11).

qualche volta l'angolo compreso tra un arco e la tangente ad un' estremità del diametro supererà l'angolo rettilineo: il che è impossibile; si dimostra infatti che [l'angolo di **contingenza]** *è inferiore ad ogni angolo rettilineo».*

2.3.2 L'angolo come qualità Eudemo il peripatetico, che scrisse un intero lavoro sull'angolo, afferma che esso appartiene alla categoria di qualità. Abbiamo visto che Eudemo ha assunto l'angolo come avente la sua origine nella rottura o deflessione di linee. Deflessione, argomentò, era qualità in quanto lo era rettilinearità, e quello che origina da qualità è esso stesso qualità.

Coloro che obiettano a questa posizione affermano: se un angolo è una qualità (come l'essere caldo o freddo) allora come può essere bisecato? Esso infatti può essere diviso; ma le cose che hanno come attributo principale la divisibilità sono una varietà di quantità e non di una qualità: un angolo, quindi, non può essere una qualità. Inoltre, il più e il meno non sono attributi di uguale e disuguale; se dunque un angolo fosse una qualità, parlando di esso dovremmo dire che uno è più e uno è meno angolo, non di uno più grande e uno più piccolo, che due angoli non sono disuguali ma dissimili (abbiamo visto che Aristotele stesso parla di similarità di angoli in *De caelo* 296 b 20 , 311 b 34- in questo senso). In tal senso riportiamo direttamente le parole di Proclo: *«E se è soltanto una qualità come il caldo e il freddo, come è divisibile in parti uguali? Infatti non meno agli angoli si addice l'uguaglianza e la disuguaglianza che alle grandezze e la divisibilità avviene per gli uni e per le altre in modo assolutamente analogo. Se dunque le cose alle quali ciò avviene in modo assolutamente analogo sono quantità e non qualità, è evidente che anche gli angoli non possono essere qualità; infatti un modo di essere naturale della qualità è il più e il meno e non l'uguaglianza e la disuguaglianza. Bisognerebbe dunque non dire angoli disuguali e uno più grande e uno più piccolo ma che sono diversi e che uno è più angolo e l'altro meno angolo. Ma è chiaro a tutti che questo [modo di dire] è contrario all'essenza della matematica. Infatti ogni angolo riceve la stessa definizione e non è l'uno più angolo e l'altro meno».*

2.3.3 L'angolo come relazione Giacché Aristotele include la posizione tra i relativi e viste le definizioni aristoteliche di relativo, *«l'inclinazione reciproca di due linee»* rientra nella categoria dei relativi. Infatti, Euclide - e tutti quelli che chiamano un angolo *« inclinazione »* - sono collocati da Siriano tra coloro che classificano esso l'angolo come relazione. Tuttavia Euclide certamente riguardò gli angoli come grandezze; ciò è chiaro dalle successive proposizioni che trattano gli angoli, e laddove di essi si può predicare l'uguaglianza e la disuguaglianza. Abbiamo visto che Euclide fa seguire la Def. I, VIII con le Def. I, IX, X,XI,XII. La Def. I, IX fa riferimento all'angolo come ad una figura contenuta da linee, esplicitandone l'aspetto qualitativo. Tuttavia le Def. I, X-XII, parlando di angoli uguali e disuguali (maggiori o minori), si riferiscono agli angoli grandezze: compare, allora, un aspetto quantitativo. La posizione di Euclide, quindi, è duplice e – gradatamente

- tende a privilegiare l'aspetto quantitativo. In tal senso è da leggere anche la Def. 1 dei ***Data***, in cui Euclide afferma che *« si dicono dati in grandezza le parti di piano e le linee e gli angoli di cui possiamo trovare degli uguali »*. Tale caratterizzazione sarà ancora più netta nella matematica più tarda. Relativamente all'angolo come relazione Proclo dirà*: «se l'angolo è inclinazione e riguarda completamente le cose che hanno relazione con altre cose, ne deriverà che, essendo una sola l'inclinazione, sia uno solo l'angolo e non parecchi. Se infatti l'angolo non è altro che una disposizione di linee e di piani quale stoltezza è che vi sia una sola disposizione e più angoli? Se immagini un cono tagliato attraverso il vertice fino alla base da un triangolo, nel semicono verso il vertice vedrai una sola inclinazione delle linee del triangolo, e due angoli distinti, uno piano, quello stesso del triangolo, e l'altro sulla superficie mista del cono, contenuti entrambi dalle suddette linee».*

Proclo, riconoscendo la complessità del concetto di angolo, sottolinea le limitazioni derivanti dall'inserimento di tale concetto in una singola categoria. L'Autore afferma come né la quantità, né la qualità, né la relazione siano in grado di caratterizzare compiutamente l'angolo; adottando la soluzione del suo maestro Siriano, Proclo, conclude *«Essendo dunque incerte queste cose e mentre Euclide chiama l'angolo inclinazione e Apollonio una contrazione di una superficie o di un solido in un sol punto sotto una linea spezzata o una superficie, e ciò sembra definire ogni angolo in generale, noi che seguiamo il nostro maestro dobbiamo dire che l'angolo di per se stesso non è nessuna delle cose dette, ma che dal concorso di tutte queste cose ha la sua esistenza e per questo ha portato all'incertezza quelli che sono tentati di dare una sola soluzione. Così l'angolo ha bisogno assolutamente della quantità insita nella grandezza e ha bisogno della qualità secondo la quale possiede, per così dire, la sua forma propria ed il carattere della sua essenza: ma ha bisogno infine anche della disposizione delle linee che lo definiscono e dei piani che lo contengono. L'angolo è qualcosa formato da tutte queste cose e non da una sola di esse: è divisibile, suscettibile di uguaglianza e di disuguaglianza secondo la quantità che gli è propria, né è costretto ad accettare il rapporto delle grandezze dello stesso genere per il solo fatto di possedere anche una qualità particolare secondo la quale spesso gli angoli non sono paragonabili gli uni con gli altri, né a formare un solo angolo se c'è una sola inclinazione, perché anche la quantità interposta tra le inclinazioni completa la sua sostanza».*

2.4 La definizione di angolo secondo le assiomatiche del '900

Hilbert definisce il concetto di angolo su di un piano orientato come sistema di lati e vertice: *«Con il nome di angolo < (s1, s2) si intende la coppia ordinata di due semirette s1 ed s2 (non necessariamente distinte) aventi l'origine in comune. s1, s2 si dicono lati, S si dice vertice* *dell'angolo. Un angolo con lati coincidenti si dice angolo nullo, se come lati ha delle rette si dice angolo piatto».*

Da questa definizione ne sono scaturite delle altre basate tutte sul concetto di angolo visto dalla prospettiva spaziale.

Interessante è la posizione di **Choquet**, che dichiara *«La nozione di angolo è senza dubbio quella che solleva la maggior discussione e difficoltà nell'insegnamento della geometria. Le difficoltà sono dovute, in parte ad una terminologia mal precisata, in parte alla grande confusione di più nozioni matematiche in esso coinvolte, ed anche alla vera difficoltà matematica di questa nozione»* (Choquet ,1969, p. 91).

Choquet definisce l'angolo come rotazione di centro P, riconducendosi alle isometrie che lasciano fisso il solo punto P. La definizione del francese Choquet si inserisce in un lavoro nato con finalità didattiche, a metà fra l'idea di geometria intesa come struttura algebrica (spazio vettoriale su R, a due o tre dimensioni, munito di prodotto scalare) e quella classica.

Possiamo affermare che se da un lato le assiomatizzazioni alternative a quelle di Hilbert hanno escluso l'intuizione spaziale, dall'altro - specie quella di Choquet - hanno ripreso elementi dell'intuizione spaziale (legati al concetto di simmetria e di similitudine) che l'impostazione Hilbertiana aveva reso secondarie.

Per completare questa breve panoramica ricordiamo la posizione del matematico Jean Alexander **Dieudonné.** Fautore della sostituzione della geometria classica con la geometria vettoriale, nel 1959 lanciò - nel corso di un convegno sull'insegnamento della matematica tenutosi a Royaumont - il provocatorio grido: *«abbasso Euclide»*.

Diedounnè - per convincere i lettori della superiorità dell'algebra lineare rispetto la geometria tradizionale - cita specificamente in un'introduzione:

« le confusioni inverosimili e i paralogismi ai quali dà luogo una nozione così semplice come quella di angolo quando si considera dal punto di vista tradizionale, mentre dal punto di vista dell'algebra lineare non è altro che lo studio del gruppo di rotazioni nel piano».

Jean Dieudonné riconduce lo studio della geometria allo studio delle strutture algebriche e presenta R2 e R3 in termini di spazi vettoriali, sottospazi, matrici, forme lineari, ...

In tal modo, la geometria confluisce nell'algebra e perde la sua autonomia; inoltre, alcune abilità – ad esempio la percezione spaziale - vengono estromesse dall'impostazione didattica.

Per introdurre l'angolo, si riconduce al *«coseno dell'angolo»* formato da due vettori v, w, mediante la formula vettoriale $\mathrm{Cos}\ (v,w) = \langle v,w\rangle/\|v\|.\|w\|$. L'ampiezza dell'angolo vw viene ad essere semplicemente il numero reale arcos (cos (v w)).

L'impatto didattico di questo progetto, che voleva dare impulso al movimento della cosiddetta

matematica moderna (bourbakista) è stato molto discusso. Tra gli altri, ricordiamo René Thom, che nel 1979 sostenne che l'uso esagerato del linguaggio insiemistico portava ad una eccessiva astrazione, a scapito dell'intuizione e del collegamento tra matematica e realtà:
«Non si è ricavata, credo, dall'assiomatica di Hilbert (della geometria euclidea) la vera lezione in essa contenuta: si accede al rigore assoluto solo eliminando il significato; il rigore assoluto è possibile soltanto e per mezzo di tale abbandono di significato. Ma se si deve scegliere tra rigore e significato, scelgo quest'ultimo senza esitare» (Ottaviani).
Nel panorama italiano, Ugo **Amaldi**, distingue due punti di vista della definizione di angolo: il genetico e l'attuale. Il punto di vista genetico considera il fascio di rette o di raggi (insieme di tutte le rette d un piano passanti per un punto, o, rispettivamente, di tutti i raggi del piano aventi l'estremo in quel punto) mediante il movimento di una retta o di un raggio, nel piano, attorno ad un punto. Il punto di vista attuale, si basa sulla definizione dell'angolo come divisione del piano in due parti per mezzo della retta. Le due linee rette (a, b) nel piano, si intersecano in un punto O, dividendo il piano in quattro regioni chiamate settori angolari (convessi); l'angolo (ab) (ba) può essere definito come l'insieme dei raggi concorrenti da O e appartenenti al settore angolare che ha a e b per lati (Amaldi, 1924-27, pp. 62-66).

Ricordiamo, infine, la posizione di **Freudenthal**, relativa al concetto di angolo: *« Esiste più di un concetto di angolo. Alcuni didattici affermano che uno solo tra questi è corretto. L'amore per l'ordine delle cose va bene, purché non giunga al punto di proibire l'uso di concetti importanti perché questi non rientrano nel sistema. Sarebbe un atteggiamento matematico sbagliato. E' costata molta fatica far accettare ai matematici il fatto che esistono vari concetti di numero, che ora sono attentamente distinti tra loro. Se, invece di distinguerli, tutti i concetti di angolo salvo uno fossero vietati, gli allievi non imparerebbero mai a distinguerli»* (Freudental, 1973).

2.5 La definizione dell'angolo nelle geometrie non euclidee

Nei diversi modelli delle geometrie non euclidee, l'angolo viene definito in maniera opportuna, secondo gli assiomi di riferimento.

Nella geometria ellittica un semplice modello è costituito dalla superficie sferica; in questo modello l'angolo tra due rette (cerchi massimi) è costituito mediante l'angolo formato dai due piani cui appartengono i cerchi massimi che contengono i suoi lati.
Nella geometria iperbolica sono a disposizione diversi modelli, ciascuno dei quali con sue proprie caratteristiche, riconducibile agli altri, adatto per certi scopi, meno adatti per altri.
Tra i modelli disponibili riportiamo:

• il Disco di Klein

• il Disco di Poincaré

• il Semipiano Superiore di Poincaré

Il modello di Klein presenta un punto debole: la difficoltà di misurare gli angoli tra due rette; per questo, si ricorre al fatto che, il disco di Klein è isomorfo al disco di Poincaré (in cui è semplice definire l'angolo tra due rette). Quindi, l'angolo tra due rette nel Disco di Klein è definito come l'angolo tra le rette ad esse corrispondenti nel disco di Poincarè mediante l'isometria canonica.

Nel modello di Poincaré possiamo misurare gli angoli tra due rette semplicemente misurando gli angoli tra le tangenti nel punto di intersezione tra le circonferenze che rappresentano le rette.

Il Semipiano Superiore di Poincarè è un modello alternativo al Disco di Poincarè ed è costituito dal metà superiore del piano euclideo. E' possibile definire una trasformazione conforme (che conserva distanze ed angoli) tra il semipiano superiore ed il Disco di Poincaré.

2.5.1. L'angolo di parallelismo euclideo e non euclideo: una questione di distanze

Ai fini della nostra trattazione è utile rilevare che la nozione di parallelismo, nelle geometrie non euclidee, differisce molto da quella presente nella geometria euclidea. Ad esempio, in geometria iperbolica, esistono due tipi di parallelismo: due rette (o oggetti più generali) in uno spazio iperbolico possono essere

- *asintoticamente paralleli* se sono paralleli ma *«si incontrano all'infinito»;*
- *iperparalleli* se sono paralleli e divergono all'infinito.

Quindi, data una retta r e un punto P esterno ad essa esistono

- rette secanti
- rette non secanti (*iperparallele)*
- rette non secanti che separano le rette secanti da quelle non secanti (*parallele)*

Esistono, inoltre, esattamente *due* rette m e n parallele a r nei suoi due versi

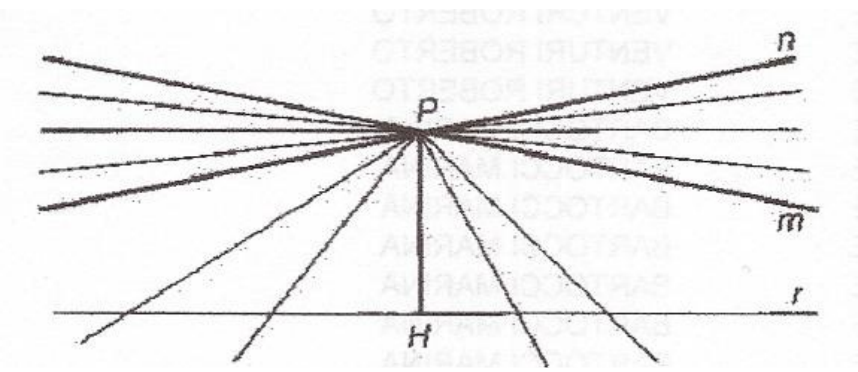


Fig.1

Sia *r* una retta nel piano iperbolico e P un punto esterno ad essa. Sia *p* la retta perpendicolare a *r* passante per P. Siano *m e n* due rette passanti per P e asintoticamente parallele a *r*. L' angolo acuto α formato dalle rette *m e n* e la retta *p* è l'**angolo di parallelismo** di *r* e *P*.

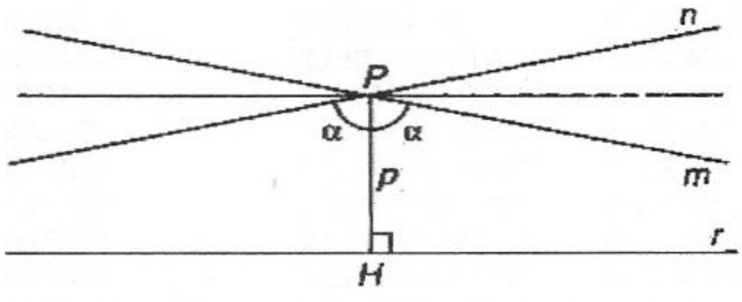


Fig.2

In basso, si riporta la figura dell'angolo *Φ* di parallelismo nel modello del semipiano. In questo caso le rette sono asintoticamente parallele: convergono entrambe al punto all'infinito 1.

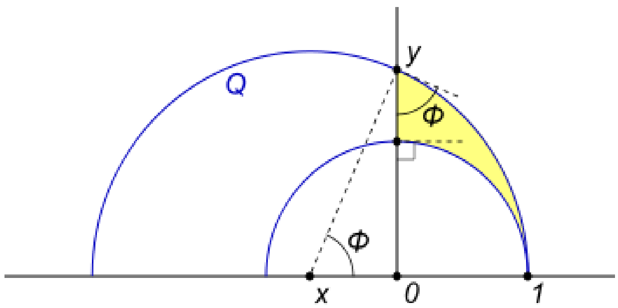


Fig.3

L'ampiezza α dell'angolo di parallelismo è funzione della lunghezza *p* del segmento *PH:* al diminuire di *p*, l'angolo di parallelismo cresce tendendo all'angolo retto se *p* tende a zero, mentre, al crescere di *p*, l'angolo di parallelismo diminuisce tendendo a zero al tendere di *p* all'infinito (figura 3). In uno spazio iperbolico con curvatura negativa arbitraria $k < 0$, le due quantità α e PH (*d*) sono in relazione secondo la formula seguente:

$\tan \alpha/2 = e^{-d/k}$

L'angolo α assume quindi tutti i valori compresi (strettamente) fra zero e l'angolo retto.

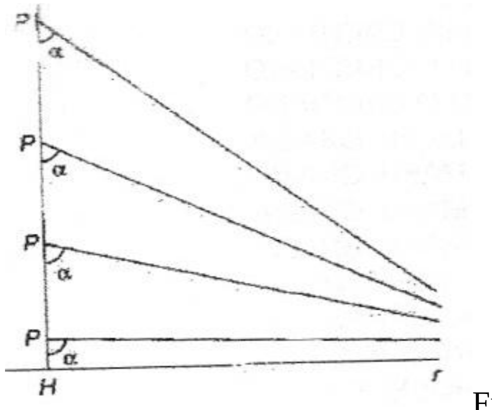


Fig.4

Si noti che l'angolo di parallelismo può essere definito in modo analogo anche in geometria euclidea: in questa geometria, risulta sempre essere un angolo retto ed è quindi meno interessante.

Si noti che, se *P* tende ad *H*, l'angolo di parallelismo α tende proprio all'angolo retto *R*. Ciò significa che la differenza fra *R* e α diviene minore di un qualsiasi valore prefissato, piccolo a piacere. Ciò avviene perché *«in zone piccole del piano iperbolico vale la geometria euclidea»*. Diminuendo le distanze, le figure della geometria iperbolica tendono a coincidere con quelle della geometria euclidea. Nella nostra esperienza quotidiana sembra valida la geometria euclidea, tuttavia possiamo ipotizzare che nel nostro spazio valga la geometria iperbolica, e che le figure con le quali abbiamo a che fare siano talmente *«piccole»* da non potersi sperimentalmente registrare una differenza fra le due geometrie. Infatti, quando tracciamo un angolo non retto non possiamo percepire o misurare una differenza di, ad esempio, un milionesimo di grado. Tale angolo potrebbe essere acuto, ma indistinguibile sperimentalmente da angoli retti. In sostanza, la geometria delle grandi distanze potrebbe essere diversa da quella che ci appare nelle piccole.

Scheda riassuntiva del capitolo 2

La riflessione sul ruolo degli errori e dell'approssimazione della conoscenza emerge in maniera evidente nel caso dello sviluppo storico del concetto di angolo,la cui definizione geometrica non è stata storicamente semplice.

La definizione negli *Elementi* di Euclide, che risale al 300 a.C., è il punto di arrivo di una pratica storica con gli angoli durata alcuni millenni. L'idea di angolo ai tempi di Euclide era relativa alla *«rottura»* e alla *« flessione»* di linee. **Apollonio** (III sec a.C.) ed **Erone** (100 a.C.) danno anch'essi una definizione che richiama all'idea di irregolarità dell'andamento di un fenomeno; analogamente, **Eudemo** di Pergamo (II sec. d.C.) , 300 anni dopo, definisce l'angolo come *«rottura di una linea».*

Carpo di Antiochia (II sec.) definisce *«l'angolo l'intervallo (distanza) delle linee o delle superfici che lo comprendono».* **Plutarco di Nestorio** (III – IV sec) afferma che l'angolo *«è la prima distanza sotto il punto».*

Euclide ne dà una definizione che oggi risulta molto oscura: *«VIII. Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee in un piano, che si toccano e non giacciono in linea retta»;«IX. E quando le linee che contengono l'angolo sono rette, l'angolo è chiamato rettilineo»* .

Heath individua nelle definizioni di Plutarco, Carpo e Apollonio il germe di un concetto apprezzabile in analisi infinitesimale, mettendo inoltre in evidenza due nozioni complementari – convergenza e divergenza - direttamente riconducibili a quella di angolo. Apollonio avrebbe evidenziato come caratteristica fondamentale dell'angolo la convergenza di linee (i suoi lati) ad un punto (il suo vertice). Carpo e Plutarco, invece, avrebbero inteso l'angolo tipicamente come divergenza di linee dal loro punto d'incontro.

Ci fu un gran dibattito tra i filosofi riguardo a quale particolare categoria (secondo lo schema di Aristotele) l'angolo può essere collocato.

Il problema della collocazione dell'angolo nella categoria di quantità, qualità o relazione prende origine Aristotele approfondisce lo studio delle categorie *«qualità», «quantità», «relazione»* oltre a quella di *«sostanza».* Proclo, riconoscendo la complessità del concetto di angolo, sottolinea le limitazioni derivanti dall'inserimento di tale concetto in una singola categoria. L'Autore afferma come né la quantità, né la qualità, né la relazione siano in grado di caratterizzare compiutamente l'angolo; adottando la soluzione del suo maestro Siriano, Proclo, conclude *« l'angolo di per se stesso non è nessuna delle cose dette, ma che dal concorso di tutte queste cose ha la sua esistenza e per questo ha portato all'incertezza quelli che sono tentati di dare una sola soluzione».*

Saltando al Novecento, Hilbert, nei *«Fondamenti della geometria»* definisce l'angolo come l'insieme di due semirette che non giacciono sulla stessa retta, con origine comune. Nei più di due millenni tra Euclide e Hilbert ci furono numerosissime discussioni sulla definizione di angolo. Ai primi del Novecento, ci fu una discussione sulla definizione di angolo in cui furono discusse diverse possibilità classificate come: differenza tra direzioni (alla Euclide); misura della rotazione necessaria a far coincidere i due lati dell'angolo; porzione di piano inclusa tra due semirette. Un problema sollevato all'epoca era che il concetto intuitivo d'angolo comprenderebbe sia caratteristiche di entità uni-dimensionale (l'aspetto rotazione) sia bi-dimensionale (l'aspetto superficie).Una mediazione tra i due aspetti è stata quella di definire l'angolo a partire dall'insieme di semirette appartenenti ad uno dei settori in cui il piano viene diviso da due rette incidenti.

Nei diversi modelli delle geometrie non euclidee, l'angolo viene definito in maniera opportuna, secondo gli assiomi di riferimento. Nella geometria ellittica l'angolo tra due rette (cerchi massimi) è costituito mediante l'angolo formato dai due piani cui appartengono i cerchi massimi che contengono i suoi lati. Nella geometria iperbolica sono a disposizione diversi modelli, ciascuno dei quali con sue proprie caratteristiche, riconducibile agli altri, adatto per certi scopi, meno adatti per altri. In particolare, nel modello di Poincaré possiamo misurare gli angoli tra due rette semplicemente misurando gli angoli tra le tangenti nel punto di intersezione tra le circonferenze che rappresentano le rette. Il Semipiano Superiore di Poincarè è un modello alternativo al disco di Poincarè ed è costituito dal metà superiore del piano euclideo. E' possibile definire una trasformazione conforme (che conserva distanze ed angoli) tra il semipiano superiore ed il disco di Poincaré.

Va precisato che la nozione di angolo di parallelismo permette di evidenziare la continuità esistente tra sapere euclideo e sapere non euclideo: *«in zone piccole del piano iperbolico vale la geometria euclidea»*. Infatti, l'angolo di parallelismo può essere definito in modo analogo anche in geometria euclidea: in questa geometria, risulta sempre essere un angolo retto ed è quindi meno interessante.

3
Questioni didattiche sull'angolo

Introduzione

La risposta alla domanda:

« Che cosa è un angolo? »

è di apparente semplicità, in quanto sembrerebbe richiedere soltanto di descrivere un concetto geometrico.

Richiederebbe, però, il richiamo al processo dell'evoluzione dei significati, delle esperienze, dei modi di indagine, delle tecniche, dei linguaggi adottati per riferirsi al concetto.

Richiederebbe, inoltre, il richiamo all'organizzazione delle esperienze, dei significati. Ulteriore richiamo sarebbe quello relativo al segno, al nome del concetto. Come in altri definizioni matematiche, non c'è coincidenza tra nome e concetto: lo stesso nome può essere utilizzato per parlare di due concetti diversi.

In realtà, come vedremo, il concetto di angolo più che un concetto è un campo concettuale, uno schema che consente di visualizzare le relazioni tra diversi concetti che lo caratterizzano, ove le relazioni tra i singoli concetti sono tanto importanti quanto (se non più importanti) degli stessi concetti.

Un campo concettuale può rivelarsi utile per mettere in evidenza convinzioni personali degli studenti, relativamente a un certo concetto che é oggetto di indagine clinica. Diversi alunni possono avere diverse mappe concettuali, che quindi suggeriscono diversi punti di vista, diversi modi di affrontare un concetto. Si tratta, come è ovvio, di una realtà che determina opportunità didattiche che non conviene nascondere agli studenti: prestando attenzione agli aspetti convergenti e a quelli divergenti del concetto è possibile fare emergere la complessità di cui ogni sapere è pervaso. L'attenzione deve, quindi, essere rivolta anche a eventuali ostacoli epistemologici o cognitivi e, eventualmente, ad azioni didattiche tendenti a mettere in crisi eventuali convinzioni personali in contrasto con il sapere istituzionale posto come obiettivo.

3.1 Angolo: origini etimologiche

Alcuni testi riportano che il termine angolo il termine angolo (dal Latino *angulus,*che vuol dire spigolo e dal greco ανκύλος (ankýlos, ankon) – gomito, derivazione dalla radice indoeuropea ank che vuol dire *«piegare, curvare»)* è probabilmente nato dall'osservazione dell'angolo formato dalle parti inferiore e superiore della gamba o del braccio umani; infatti, in molte lingue, la parola che indica il lato di un angolo coincide con quella che indica la gamba o il braccio. In italiano, ad esempio, parliamo dei bracci di una croce (Kline, 1999).

«Si tengano presenti le seguenti parole germaniche:

ata. *ango* 'aculeo', 'perno' ata. *ancha*, *enka* 'nuca', coscia'
ags. *onga* 'punta', 'aculeo' norr. *ekkja* 'tallone', calcagno'
norr. *-angr* 'insenatura', 'baia' (<*aŋ*kjon*)
ata. *anchal* (diminutivo di *ancha*)
ags. *ancleow* 'collo del piede'
norr. *ǫkkla* 'collo del piede'
(<*aŋ*kulan*)[…].

*La radice da ricostruire è, per quanto riguarda il vocalismo, indubbiamente*ank-/*ang-, come mostrano i confronti col sscr. añcati 'curvare', col gr. ἀγκών 'gomito', 'insenatura' (cfr.ὄγκος 'curvatura', da cui 'uncino', 'punta'). Dal punto di vista semantico il significato della radice esprime il concetto di 'essere arcuato', 'formare un angolo'. Si noti che le forme germaniche […] presentano una specificazione semantica orientata verso le parti 'snodabili' o arrotondate del corpo umano»* (Meli, 2004).

Inoltre, l'indice lessicale del Dizionario Greco-Italiano di Bonazzi, (pp. 82-86) riporta:

«- Anghe, *plurale di* Anca (= coscia; gamba), non nel senso di arti che sostengono o che si muovono, ma nel senso che tengono stretto quel che è tra di loro. Infatti, Anghe < Gr. Agkho^ [detto Ankho^] (= stringo). Invece i greci classici adoperavano l'etimo del verbo per "*il braccio ripiegato in atto di abbracciare"* (= Agkale^). Data la piegatura o curvatura delle braccia, Agkale^ = *anche* gomito; Agkos = curvatura, gola di monte; e Agkulos = curvo, ricurvo, che > Lat. Angulus.

- Anculu *o leggermente* Angulu (= angolo [esteriore o interiore di casa, ecc.]; Ing. Corner) < Lat.Angulus o Gr.Agkulos. L'angolo acuto [non tondeggiante o di svolta] = Gr. Go^nia, Gr. Gonu (= ginocchio), non attestato nel longobardese, dove "*anculu"* e` di qualsiasi genere. Mentre,

- Jinuoqqhiu (=ginocchio) It. Ginocchio Lat. Genus Gr. Gonu. Alcune altre voci greche affini al verbo principale, Agkho^, che e` un concetto implicito in “*abbracciare, circondare, cingere, congiungere, ecc.”*:Agkistron (= amo, uncinetto, gancio del fuso); Agkste^r (cio` che stringe: fibbia, fermaglio); agkule^ (= corda dell’arco; guinzaglio; cordone dei calzari); agkura (=a`ncora; presidio); Agko^n (= curvatura, angolo, svolta di monte); Agktikos (= che stringe, che strangola). Il verbo principale puo` anche significare “*essere vicino”*, il che è ovvio nell’avverbio affine, Agkhi (= vicino, da presso), per cui, ad esempio, Agkhiste^r = vicino parente; causa prossima [autore, origine]. Poi ci sono variazioni locali come Ogkos (= Agko^n; = curvatura, ripiegatura; uncino della punta della freccia) e Ogkinos (= uncino, amo).[...]
- Gr. Agkho^/Agkulos > Sancr. Ank-ami (= curvo, piego); e Ankas (= seno; uncino: curvatura)./ > Ted. Hanke (= anca o coscia di un cavallo) ».

3.2 Angolo: una parola per diversi significati

In matematica col termine angolo ci si riferisce a nozioni di geometria e dell’analisi infinitesimale, che possono essere considerate a diversi livelli di generalità.

I termini che si usano in senso matematico sono spesso parole di per sé significative anche nella lingua comune. Anzi, ciascun individuo sperimenta dapprima il significato comune e, successivamente, quello matematico. L’abitudine al significato specificatamente matematico di un termine può offuscare il significato del linguaggio comune, sottovalutando possibili equivoci per gli studenti. La parola *«angolo»* nella lingua italiana ha molti significati, non tutti perfettamente coincidenti con quello geometrico:

- incontriamoci all’angolo di via Togliatti con via De Gasperi;
- la squadra ha tirato un calcio d’angolo;
- questa spiaggia è un angolo di paradiso;
- nel soggiorno c’è l’angolo di cottura;
- mangerò un angolo di pizza;
- cosa c’è dietro l’angolo?
- sollevare gli angoli della bocca;
- scegliere un angolo di visuale.

In tal senso già, nel 1829, Vincenzo Monti nel testo *«Proposta di alcune correzioni ed aggiunte al Vocabolario della Crusca (vol II. I part. I) »* riporta che l’Accademia spagnola, dopo la definizione di angolo ne riporta altre 65, tutte necessarie a stabilire l’uso che si fa di questa voce cardinale nell’architettura, nella statica, nella fortificazione, nell’ ottica, nell’astronomia, nella scherma, …

Interessanti riflessioni sul contesto d'uso e sul significato della parola angolo, nelle diverse lingue europee, sono stati riportati da D'amore - Marazzani (2008), evidenziando la duplice nominalizzazione del termine (didattica e quotidiana)[5].

3.3 Come presentare la definizione di angolo?

L'angolo assume nell'uso tecnico una connotazione specifica particolare, anche se non perde completamente il legame con i significati originari. Gli allievi devono essere resi coscienti di questa diversità, affinché le sovrapposizioni inconsapevoli non generino misconoscenze. Certamente *« ... non è ancora stato trovato – e forse non esiste affatto - un cammino semplice, pulito, lineare,"gerarchico" dai primi elementi ai risultati più avanzati della geometria. Diversamente da quello che accade in aritmetica ed algebra, perfino i concetti di base in geometria, come le nozioni* ***di angolo*** *e di distanza, debbono essere ripresi in considerazione a stadi differenti da differenti punti di vista»* (Villani e altri**,** 1994).

Nella pratica didattica si danno una o più definizioni del termine angolo, senza tener conto del fatto che la nascita del concetto *«angolo»* nasce da esperienze di partenza diverse tra loro e, quindi, tale termine acquista significati diversi l'uno dall'altro. Da un lato è molto difficile precisare in un sol modo il significato del termine, d'altra parte non sembra opportuno scegliere un'unica teorizzazione, escludendo le altre, onde evitare confusione nella pratica didattica.

Tra gli studi sull'apprendimento del concetto di angolo ricordiamo quelli di Krainer (1991), Mitchelmore (1989), Magina e Hoyles (1991), Matos (1994) che hanno messo in evidenza diversi aspetti dell'insegnamento/apprendimento del concetto di angolo.

Differenti punti di vista della nozione di angolo sono sintetizzati a p.99 di *Planimetria comparata* - II volume - in cui Schotten afferma che la definizione di angolo può essere classificata secondo tre gruppi (Amaldi, 1924):

1. L'angolo è la differenza di direzione delle rette (a questo gruppo appartiene la definizione di angolo di Euclide come inclinazione);

[5] Nella ricerca a cui si fa riferimento si legge *« dall'analisi delle risposte date da bambini di quattro-cinque anni è possibile dedurre che le espressioni della lingua familiare possono creare immagini che facilmente si traducono in rappresentazioni non solo nel registro della parola, ma anche in quello dei segni; se ad esempio, un individuo si crea un'immagine dell'angolo riferita al cantuccio sicuro,traduce questa immagine nel registro dei segni con un qualcosa di limitato, di chiuso, di finito di "avvolgente"; se, invece sta a significare un posto scomodo, dove per qualche motivo* ***non*** *si vuol stare, nella traduzione nel registro scritto viene proposto qualche cosa di"pungente", qualche cosa che "ha una punta"».*

2. L’angolo è la grandezza o la misura della rotazione di un lato sull’altro nel piano;
3. Angolo è la parte di piano inclusa tra due raggi uscenti da un punto.

La definizione del primo gruppo può essere considerata tautologica o circolare, perché presuppone il concetto di angolo.

Schotten afferma che la direzione (tra due punti) può senza dubbio riguardare una nozione primaria, definita come «*l’immediata relazione di due punti che un raggio ci permette di realizzare*» . Ma «*una direzione non è una grandezza intensiva, e quindi due direzioni non possono avere alcuna differenza quantitativa (Burklen)*» (Heath, 1956, p. 180). La direzione non è suscettibile di differenza come tra qualità, ad esempio i colori. La direzione è un’entità singolare: non ci può essere differenza di tipo o grado di direzione. Se noi parliamo di « *una diversa direzione*» noi usiamo parole inequivocabili; quello che noi vogliamo significare è semplicemente «*un’altra*» direzione. Il fatto è che queste definizioni di un angolo, come differenza di direzione, inconsapevolmente, fanno appello a qualcosa al di fuori alla nozione di direzione, a qualche concezione equivalente a quella dell’angolo stesso.

Tuttavia, altri autori, hanno evidenziato che «*l’inclinazione è una circostanza locale, circoscritta al loro (due linee) punto di intersezione, che può essere affrontata in maniera abbastanza elementare per mezzo delle tangenti alle curve stesse [...].Indagare sull’inclinazione dei lati di un angolo curvilineo porta ad affrontare, se pur in maniera intuitiva, argomenti di analisi infinitesimale. Quanto vicino al vertice devo mettermi per poter valutare l’inclinazione?[...]Queste definizioni [di Plutarco e Apollonio] enigmatiche e molto suggestive ci riconciliano con la “punta” dell’angolo levando di torno ingombranti e inutili parti di piano, suggerendo l’idea di identificare l’inclinazione delle linee curve con quella delle loro tangenti condotte nel punto di intersezione. Tra le diverse possibilità di definire correttamente l’idea di angolo è da privilegiare, secondo noi, quella che sviluppando i primi modelli intuitivi che si formano spontaneamente nel pensiero, riesce a conciliarsi con gli sviluppi a cui è pervenuta la matematica nel suo corso storico fino ai nostri giorni. Nella geometria differenziale per esempio l’idea di angolo tra due curve è un concetto fondante e di grande utilità. Si tratta di un concetto locale concentrato nel punto dove si avverte una discontinuità della derivata prima, dove la direzione tangente alla linea cambia bruscamente con un “salto”.. Quel punto con quel salto che percettivamente cogliamo come se lì “accadesse qualcosa” diventa un fatto infinitesimale dato dal mutamento discontinuo di direzione dei due vettori tangenti ai due rami della linea*» (Catastini).

Le definizioni del secondo gruppo, invece, si basano sull’idea della rotazione di una retta o raggio del piano attorno ad un punto. «*Il dinamismo di una semiretta che ruota nel piano intorno ad un’altra avente la stessa origine, occupando tutte le posizioni successive di varie semirette uscenti* *da uno stesso punto, fino a tornare a coincidere con quella fissata dopo una rotazione completa, induce molto meglio la comprensione di che cosa sia un angolo giro e un angolo nullo (rotazione di angolo nullo). Ci troviamo quindi di fronte ad un tipo di definizione (quella data all'inizio), che è di tipo dichiarativo, ma che necessita didatticamente di altre definizioni, complementari o alternative ad essa, perché sia adeguatamente chiara ed esaustiva. A riguardo, come esemplificato, è importante un approccio costruttivo alla definizione di angolo»* (Iaderosa).

Si noti che *«la rotazione coincide spesso, sia nelle definizioni sia negli usi didattici, con la misura dell'ampiezza, per cui la sottile distinzione tra angolo e la sua ampiezza, che presenta qualche complicazione nei casi precedenti, non si presenta»*.(D'Amore e Marazzani, 2008).

Secondo Heath è notevole rilevare tuttavia, che quasi tutti i libri di testo che danno definizioni diverse dal secondo gruppo aggiungano qualcosa relativa al un collegamento tra un angolo e la rotazione: l'autore sostiene che ciò indica una sorprendente indicazione che la natura essenziale degli angoli è strettamente connessa con la rotazione, e che una buona definizione deve tenere in conto di quella connessione.

Il terzo gruppo di definizioni non include concezioni metriche, ma – a detta di alcuni - non corrisponde alla concezione intuitiva di un angolo. Infatti, *«quando si danno due raggi a e b, uscenti da un punto 0, si definiscono due figure geometriche distinte:*

- *la parte di piano limitata dai due raggi, o insieme dei punti che giacciono fra a e b (entità in due dimensioni riferendoci ai punti come elementi, che può essere chiamata settore angolare);*
- *la parte del fascio di raggi di centro 0, limitata da a e b o insieme dei raggi uscenti da e compresi fra a e b (a cui noi attribuiamo il carattere di una entità in una dimensione con rispetto al raggio come elemento*) » (Amaldi, 1924).

In tal senso, Veronese (Heath, 1956) afferma che il nostro concetto intuitivo di angolo si identifica piuttosto con quest'ultimo ente ad una dimensione, che non con la ragione piana compresa fra i due raggi, così che il difetto è comunque facilmente rimediabile considerando che l'angolo come *« l'aggregato dei raggi di emissione dal vertice e composto nel settore angolare»*.

Per fini di completezza, ricordiamo che, oltre alle tre gruppi di definizione, nel XX secolo si è affermata la seguente definizione: *« Un angolo di vertice O è l'intersezione di due semipiani chiusi le cui rette di frontiera sono distinte e si intersecano in O»*. Essa è immediatamente traducibile a livello grafico e fa intervenire esclusivamente operazioni di natura insiemistica. Tuttavia l'angolo non è riconducibile ad un sottoinsieme del piano, perché esiste un punto privilegiato di tale sottoinsieme: il vertice dell'angolo (Porcaro, 1993).

3.4 L'angolo come campo concettuale

Didatticamente, dalla geometria elementare fino all'introduzione della trigonometria e delle funzioni trascendenti, le definizioni di angolo mutano e si ampliano. Generalmente, in una prima fase, gli angoli hanno ampiezze ancora solo positive, ma con valori fino a 360 gradi. In una fase successiva si introducono gli angoli con segno, entità meno intuitive, ma che consentono di definire funzioni trigonometriche con argomenti reali qualsiasi. Gli angoli con segno si ricollegano al problema della rettificazione degli archi di circonferenza dotati di verso, alla natura del numero π e alle questioni relative alle aree con segno. *« Generalmente si tende a procedere per ampliamenti, in modo da recuperare le vecchie nozioni relative all'angolo come casi particolari delle nuove definizioni. Non sempre ciò è possibile, ed allora ci si trova di fronte a vere e proprie fratture con quanto affermato in precedenza»* (Porcaro, 1993). Secondo Porcaro il concetto di angolo non è un singolo concetto ma un *« campo concettuale»*, cioè *« un insieme di problemi e di situazioni per trattare i quali sono necessari concetti, procedure e rappresentazioni, differenti ma strettamente connessi» (Vergnaud*[6]*).*

Mappa concettuale dell'angolo (relativa alle problematiche trattate)

ANGOLO PIANO

Concetto relativo a diverse rappresentazioni

Coppia di semirette
con origine in comune
(aspetto statico)

Rotazione di una semiretta
attorno alla sua origine
(aspetto dinamico)

Cambiamento di direzione

Regione piana

Insieme di semirette
comprese tra le due date

Concavo, convesso

Classificazione

Retto, acuto, ottuso

Nullo, piatto , giro

---

[6] In B. D'Amore, *Elementi di didattica della matematica*, Pitagora, 1999, cap. 12: Campi concettuali, campi di esperienza, campi semantici.

A livello elementare esistono diverse misconcezioni ed ostacoli (relative al concetto di angolo in sé ed alla didattica dell'angolo) , spesso sottaciute, ma fondamentali da chiarire, al fine di evitare errori sia di didattica che di utilizzo del concetto in questione.[7]

1) L'angolo è una figura che si presenta chiusa da una parte e aperta dall'altra. Dove bisogna mettersi per essere nell'angolo?

2) L'angolo non dipende dalla lunghezza dei lati; un errore frequente porta alla seguente convinzione *« a lati corti corrisponde un angolo piccolo, a lati lunghi un grande angolo»*.

3) Il vertice non è posto a priori, ma è il risultato del fatto che si incontrano due rette. L'idea di angolo derivante dall'esperienza concreta porta ad identificare l'angolo con il suo vertice.

4) Nell'esperienza concreta e nelle usuali modalità didattiche non viene associato il concetto di angolo a quello di porzione infinita di piano. Nel tracciare i lati dell'angolo si stabilisce una possibilità che è del tutto indipendente dagli ostacoli e dagli impedimenti pratico-concreti. *Prolungare* significa *concepire (pensare)* la retta con la *possibilità essenziale che essa prosegua nella stessa direzione.*

5) La posizione ha influenza sul riconoscimento di angoli di stessa ampiezza.

6) Le semirette fanno parte dell'angolo oppure no? Gli angoli sono da considerare chiusi o aperti? Osservano, in tal senso, D'Amore Fandiño (2005) *«Se l'angolo contiene i suoi lati, allora l'angolo giro è un piano e l'angolo nullo una semiretta. Se l'angolo non contiene i suoi lati, allora l'angolo giro è un piano privato di una semiretta mentre l'angolo nullo è il vuoto. Il cambiamento è concettuale non di misura»*.

7) Differenza tra angoli, grandezze angolari e numeri che misurano le grandezze.

8) L'angolo è formato da una parte di piano o da due semirette nel piano? Tale ambiguità è tipica anche dei poligono e si parla, quindi, di spezzata poligonale. Ciò non accade nel caso degli angoli.

9) L'angolo è un oggetto da definire in maniera statica o dinamico (con verso di rotazione)?

10) Quando tracciamo un angolo nel piano, stiamo considerando l' angolo concavo oppure l'angolo convesso?

11) L' angolo è orientato oppure no?

12) Come otteniamo l'angolo: da una inclinazione reciproca di rette, da una rotazione di una retta in un punto, oppure delimitando il piano con due semirette (questo punto è già stato trattato nei paragrafi precedenti)?

13) Come trattare i casi limite (angolo nullo, piatto, giro)?

[7] Per un'analisi del termine misconcezione si veda D'Amore B., Sbaragli S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*. 2, 139-163.

3.5 La nozione di angolo: una possibile conciliazione di saperi

Abbiamo visto che il concetto di angolo ha avuto – storicamente – diverse definizioni che lo hanno caratterizzato in modo più preciso e che tali definizioni non sono tutte equivalenti. E' evidente che uno stesso concetto può essere definito in modi diversi: la definizione scelta dipende dall'organizzazione dell'esposizione degli argomenti o, più in generale, dal gusto personale. Non esiste *«la»* definizione; quando si affronta un argomento di matematica occorre tener presente, per capire le dimostrazioni o le argomentazioni svolte, quali sono le definizioni adottate. I concetti matematici (e delle altre discipline) vengono spesso definiti prendendo a prestito parole tratte dal linguaggio comune, che vengono però usate con un significato diverso. Ad esempio, in matematica, con angolo si intende una parte illimitata di piano, mentre nel linguaggio comune con questa parola si indica una zona dell'angolo vicina al vertice: quando si dice *«la sedia che sta in quell'angolo»* ci si riferisce a quella che è vicina al vertice di esso.
E' da tener presente che, in ambito scolastico, la trasposizione didattica deve, in tal senso, distinguere:

- il sapere (l'angolo, nelle sue diverse accezioni) da un punto di vista matematico vero e proprio;
- il sapere come sapere da insegnare;
- il sapere di ogni singolo allievo basato su precedenti esperienze.

Data questa distinzione di saperi, è necessario distinguere quelle *«filosofie implicite»*, che spesso sono inconsciamente presenti e che possono essere veicolate da certi termini. Se, ad esempio, parliamo di *«scoprire il teorema dell'angolo esterno ad un triangolo»* ammettiamo che esso esista già, e quindi ci poniamo, con Platone, nel *«mondo delle idee»*. Tale questione è strettamente connessa al problema dei fondamenti. Abbiamo visto che fino all'Ottocento, era proprio questo il modo di concepire la matematica e che la crisi dei fondamenti ha delineato altri approcci matematici (formalista, logicista e altri).
Chi apprende la matematica, quindi, può trovarsi a volte in un ambiente formalista, altre volte intuizionista; questo può essere fonte di conflitti e di fraintendimenti. Tali filosofie non devono restare implicite: è importante analizzare la propria concezione della matematica nelle situazioni che si affrontano, esplicitando ciò che è implicito.
Un'ulteriore considerazione va fatta sullo stato della nostra cultura, della nostra scienza e del nostro sistema educativo. *«Nessuno può essere, oggi, così cieco da non rendersi conto che l'esistenza di due culture, tanto diverse e lontane una dall'altra quanto la cultura letterario-umanistica e quella scientifico-tecnica, costituisce un grave motivo di crisi della nostra civiltà»*. Già nel 1964 Ludovico Geymonat, in un breve articolo, ravvedeva segni di *«inquinamento»* nell'Accademia, riconducibili

al pregiudizio idealistico e crociano. Geymonat rilevava l'eccessiva e precoce specializzazione dei programmi scolastici come causa della perdita dell'orizzonte complessivo del sapere.

Sin dalla tassonomia platonica dei saperi fino alla separazione tra sapere scientifico e sapere umanistico, nella storia dell'Occidente si è sempre dato per acquisito che esistesse una frattura tra conoscere i fatti della scienza e le attività creative dell'uomo. Come evidenziato nel primo capitolo, ciò ha giustificato le opposizioni costitutive del mondo occidentale, come anima e corpo, mente e natura, soggetto e oggetto e così via dicendo. Questa dicotomia tra le due anime del sapere, tipica della cultura dell'Occidente, è divenuta sempre più evidente quando, a partire dall'Ottocento, lo Scienziato e l'Umanista erano attributi di vere e proprie professioni. Il discorso è tutt'oggi di grande attualità, in questi anni di riforma del sistema scolastico e universitario.

La possibilità di integrazione fra scienze matematiche e umanistiche può manifestarsi anche in relazione al concetto di angolo, nella constatazione della sostanziale convergenza di metodi e contenuti fra le due culture, al di là delle loro apparenti opposizioni.

«Questo ci permetterà di dare alcune indicazioni per la didattica; e ci porterà al nodo dei rapporti fra le "due culture", la cui separazione è stata tanto deprecata: ma molti restano al livello di una generica deplorazione, perché mancano loro gli strumenti per superarla.[…] Analizzare i loro rapporti significa gettare (o riaprire) un ponte fra le due culture; anzi, riscoprire una regione che appartiene a entrambe» (Speranza, 1996, pp. 35-46).

Ad esempio, evidenziando la pluralità dell'esistenza di nozioni di angolo, si può riuscire a:

1) destabilizzare l'idea che gli enti matematici siano univocamente definiti;
2) indurre l'idea di scelta didattica alla base di alcune definizioni matematiche;
3) abituare ad analizzare in modo critico la definizione proposta da un libro di testo.

In questo senso, la conoscenza storica della nascita e dello sviluppo di tale concetto, nonché la consapevolezza dell'esistenza di una pluralità di aspetti legati alla nozione di angolo, possono essere un valido strumento per influire sulle convinzioni degli alunni.

In tal modo, sarà più evidente manifestare la conoscenza matematica come appartenente ad un *corpus unico* proprio dell'uomo, così come unica è la radice etimologica (dal latino *computare)* sia del *contare* dei matematici che del *raccontare* dei letterati.

Scheda riassuntiva del capitolo 3

Alcuni testi riportano che il concetto di angolo il termine angolo (dal Latino *angulus,* che vuol dire spigolo - e dal greco ανκύλος (ankýlos, ankon) – gomito - derivazione dalla radice indoeuropea ank che vuol dire *«piegare, curvare»)* è probabilmente nato dall'osservazione dell'angolo formato dalle parti inferiore e superiore della gamba o del braccio umani (Kline, 1999).

I termini che si usano in senso matematico sono spesso parole di per sé significative anche nella lingua comune. Anzi, ciascun individuo sperimenta dapprima il significato comune e, successivamente, quello matematico. La parola *«angolo»* nella lingua italiana ha molti significati, non tutti perfettamente coincidenti con quello geometrico.

Differenti punti di vista della nozione di angolo sono sintetizzati a pag. 99 di *Planimetria comparata* - II volume - in cui Schotten afferma che la definizione di angolo può essere classificata secondo tre gruppi (Amaldi, 1924):

1. L'angolo è la differenza di direzione delle rette (a questo gruppo appartiene la definizione di angolo di Euclide come inclinazione);
2. L'angolo è la grandezza o la misura della rotazione di un lato sull'altro nel piano;
3. Angolo è la parte di piano inclusa tra due raggi uscenti da un punto.

Inoltre, nel XX secolo, si è affermata la seguente definizione: *« Un angolo di vertice O è l'intersezione di due semipiani chiusi le cui rette di frontiera sono distinte e si intersecano in O»*.

Secondo Porcaro il concetto di angolo non è un singolo concetto ma un *« campo concettuale»,* cioè *« un insieme di problemi e di situazioni per trattare i quali sono necessari concetti, procedure e rappresentazioni, differenti ma strettamente connessi».*

La possibilità di integrazione fra scienze matematiche e umanistiche – che, come già visto, sono state tipicamente agli antipodi nella cultura occidentale - può manifestarsi in relazione al concetto di angolo, nella constatazione della sostanziale convergenza di metodi e contenuti fra fatti della scienza e le attività creative dell'uomo, al di là delle loro apparenti opposizioni.

Ad esempio, evidenziando la pluralità dell'esistenza di nozioni di angolo, si può riuscire a:

1) destabilizzare l'idea che gli enti matematici siano univocamente definiti;

2) indurre l'idea di scelta didattica alla base di alcune definizioni matematiche;

3) abituare ad analizzare in modo critico la definizione proposta da un libro di testo.

In tal modo, sarà più evidente manifestare la conoscenza matematica come appartenente ad un *corpus unico* proprio dell'uomo.

4
Indagine sperimentale

Introduzione: quadro di riferimento teorico

L'indagine che ci accingiamo a descrivere è incentrata sullo studio delle interazioni tra le convinzioni e l'apprendimento della matematica, assumendo come convinzione *«un'opinione, un insieme di giudizi/attese, quel che si pensa a proposito di qualcosa»* (D'Amore e Fandiño, 2004) sia nella loro componente cognitiva, che in quella affettiva.
La presente ricerca si è ispirata a diversi campi di ricerca interconnessi ed assume come quadro di riferimento – tra l'ampia letteratura esistente - le seguenti teorie, basilari chiavi di lettura di tutto il lavoro svolto:

- la teoria delle interrelazione tra i fattori affettivi e i fattori cognitivi che regolano il comportamento degli studenti, con il riconoscimento dell'importanza delle convinzioni e dell'immagine della matematica che lo studente ha elaborato durante i suoi studi e la constatazione che le prestazioni degli alunni dipendono dal loro sistema di convinzioni e atteggiamenti (Di Martino, 2001; Di Martino & Zan, 2001a e 2001b; Di Martino & Zan, 2002; Zan 2000a, 2000b e 2000c, McLeod, 1992; Cornoldi, 1995). Più propriamente, ci si riferisce a sistemi di convinzioni (anziché alle singole convinzioni) per mettere in rilievo che le convinzioni interagiscono e si organizzano in strutture stabili, incidendo sul comportamento (Green 1971; Di Martino 2004).

Nell'ambito del quadro teorico sulle convinzioni, alcuni autori (Furinghetti F. e Pehkonen E., 2000) hanno evidenziato che esse hanno un carattere predittivo nell'apprendimento matematico e che sono implicate nella direzione delle risorse cognitive da attivare (Silver 1985; Schoenfeld 1983). In particolare, le convinzioni su di sé (Zan, 2007) - riguardo alle proprie capacità di organizzare ed eseguire azioni necessarie al raggiungimento dei propri scopi - e sulle proprie attitudini (Di Martino e Zan 2001) conformano il *senso di autoefficacia* (Bandura 1977; 1986; 1996; 1999; 2000) e dirigono le azioni suggerendo e/o inibendo, mediante vere e proprie *barriere affettive*, accedendo alle risorse più adeguate (Shaughnessy 1985). In letteratura si è indagato sulle convinzioni relative alla disciplina (Silver 1994), al compito, alla matematica; si distinguono, inoltre, convinzioni degli studenti, degli insegnanti e della società più in generale (McLeod, 1992).
Diversi studi sulle convinzioni sulla matematica come disciplina, (Schoenfeld 1992; Cattabrini e Di Paola 1997; Demattè e Furinghetti 1999; Demattè 2000; Zan 2007) hanno messo in luce che alcune

convinzioni sulla matematica possono essere considerate ricorrenti (la matematica è per i geni, la matematica è una materia arida,…).

- la teoria secondo cui la matematica deve essere vista come una costruzione umana, problematica e in evoluzione. Una significativa raccolta di articoli su questo tema è contenuta nel volume *«Scritti di Epistemologia della Matematica»* di Speranza Francesco (1997);
- a questa teoria, aggiungiamo la visone culturale *«umanistica»* della matematica esposta in Demattè (2010) e Hersh (2001), secondo i quali gli *«oggetti matematici»* sono creazioni umane, non arbitrarie, legate alle quotidiane attività della vita dell'uomo;
- la teoria bachelardiana di rottura epistemologica, rottura metodologica, cambiamento di teorie e metodi all'interno di una scienza riassumibile nella citazione: *«Si conosce contro una conoscenza anteriore distruggendo ciò che è mal fatto»* (Bachelard**,** 1938). Tale teoria pone particolare attenzione alla continuità e alla gestione delle necessarie discontinuità, epistemologiche e cognitive, nei percorsi di insegnamento apprendimento;
- la teoria di un possibile parallelismo tra lo sviluppo storico e la crescita cognitiva, come indicato nel modello di Sfard (1991) e di diversi altri autori (Swetz, 1995 e Furinghetti, 1993), secondo cui l'ontogenesi ricapitola la filogenesi; questa teoria spiega come le difficoltà incontrate dagli studenti nel processo di apprendimento delle discipline scientifiche non hanno carattere solo personale e non sono specifiche dei processi cognitivi, delle doti naturali, delle conoscenze a priori, del singolo, ma sono legate a ostacoli epistemologici, presenti anche ad alcune collettività. Di conseguenza gli studenti riscontrano gli stessi ostacoli e ricadono negli stessi errori commessi da altri nel passato.

Un'ulteriore problematica della presente ricerca è la riflessione sui fondamenti dei contenuti matematici e l'analisi del loro costituirsi nel corso della storia, ritenuti necessari per un corretto inquadramento culturale del lavoro in classe e utili per individuare ostacoli cognitivi ed affettivi. Per tale riflessione, analizzata anche nel capitolo 1 della presente tesi, segnaliamo come possibili approfondimenti l'articolo di Gabriele Lolli *« La questione dei fondamenti tra matematica e filosofia- Panorama introduttivo»*, - e il Capitolo 1 del Supplemento al n.19/09 dei Quaderni di ricerca in didattica (Scienze Matematiche) del G.R.I.M – Palermo di Filippo *Spagnolo «Quale Matematica comunicare?Uno sguardo sui fondamenti delle Matematiche»*.

4.1 L'obiettivo del lavoro, il focus, le ipotesi di ricerca

Da un punto di vista generale, questa ricerca intende contribuire a chiarire questioni relative alle concezioni degli allievi in materia di errore, focalizzando l'attenzione sulle convinzioni relative allo sviluppo della conoscenza matematica e, più in particolare, relativamente al concetto «angolo».

Si ribadisce che lo studio riguarda il concetto di angolo definito nella geometria piana, escludendo tutta la problematica relativa agli angoli curvilinei e agli angoli di contingenza e alle questioni relative alla misurazione degli angoli.

Le fasi della sperimentazione sono:

• Formulazione del problema didattico: l'apprendimento matematico deve tendere a favorire una visione positiva dell'errore, utilizzandolo come risorsa didattica e fonte di conoscenza.

• Formulazione dell'obiettivo della ricerca: favorire negli allievi l'apprendimento e il rapporto con la matematica attraverso la giusta valutazione degli errori e dell'idea di rigore matematico.

• Analisi a priori del problema-situazione che tenga conto

- della rappresentazione epistemologica della concezione dell' errore e del concetto geometrico angolo;
- della rappresentazione storico-epistemologica della concezione dell' errore e del concetto geometrico angolo;
- dei comportamenti prevedibili degli allievi rispetto alla situazione – problema.

• Ipotesi di ricerca

Le considerazioni sul quadro teorico presentato hanno portato alle seguenti domande di ricerca:

- *Gli studenti hanno consapevolezza del ruolo svolto dall'errore nell'apprendimento matematico?*
- *Gli studenti sono in grado di immaginare che lo sviluppo dei concetti matematici ha presentato eventuali momenti di approssimazioni e/o lacune della conoscenza?*
- *Esiste una relazione tra l'approssimazione della conoscenza avvenuta nella storia della matematica e le convinzioni degli allievi sulla matematica?*

Le domande elencate sopra sono state applicate relativamente alla matematica in generale ed alla nozione di angolo. Tale scelta nasce dall'interesse matematico, relativo alla varietà delle questioni storico-epistemologiche ad esso collegate. Riconducendoci all'idea che esista un'analogia tra filogenesi (sviluppo della specie) ed ontogenesi (sviluppo dell'individuo), ove lo sviluppo storico ripropone in grande lo sviluppo del pensiero nell'individuo, abbiamo formulato le seguenti due ipotesi di ricerca:

H 1. Le convinzioni sugli errori in matematica e sull'evoluzione della conoscenza matematica interferiscono con l'apprendimento della matematica.

H1.1 Le differenze e le analogie riscontrabili tra gli alunni con buon rendimento e scarso rendimento in matematica, si ritrovano:

- *nell'analisi delle convinzioni relative agli errori e dell'approssimazione della conoscenza;*

- *nell'attribuzione di gravità agli errori;*
- *nella corretta comprensione dei propri errori;*
- *nei ricordi relativi agli errori della propria storia scolastica;*
- *nella capacità di riflessione «metamatematica»;*
- *nella capacità di «rischiare intellettualmente»,ovvero di mettere in gioco le proprie conoscenze.*

H 2. In assenza di contesto scolastico, gli alunni evocano concetti matematici diversi da quelli appresi; tali concetti si riconducono alle approssimazioni riscontrate nell'evoluzione del concetto matematico.

• Costruzione degli strumenti per la falsificazione delle ipotesi (consistente nella messa a punto di un apparato sperimentale attraverso la preparazione di questionari);
• Analisi dei dati sperimentali: studio delle relazioni riscontrate tra i dati sperimentali alla luce dell'analisi a priori svolta, tramite

  • Analisi quantitativa sui problemi dei questionari. Applicazione della:
  - statistica descrittiva,
  - analisi di statistica implicativa di R. Gras con l'aiuto del software CHIC (versione 4.2).
  • Analisi qualitativa dei questionari

• Documentazione e comunicazione dei risultati della ricerca.

4.2 Prima indagine sperimentale

Per verificare le due ipotesi abbiamo realizzato una sperimentazione didattica, rivolta - durante l'anno scolastico 2008/2009 - ad un campione di 609 allievi delle classi I, II, III, IV, V delle seguenti scuole secondarie di secondo grado:

- Istituto Tecnico Nautico Statale "C.Colombo" Torre Del Greco (NA) – 137 allievi;
- Liceo (pedagogico e scienze sociali) Statale "Regina margherita" di Palermo – 78 allievi;
- Liceo (classico, pedagogico e scienze sociali) Statale "Forteguerri -Vannucci" di Pistoia – 200 allievi;
- Liceo Scientifico Statale "Amedeo di Savoia Duca d'Aosta" di Pistoia - 80 allievi;
- Liceo Scientifico Statale "B. Rambaldi - L. Valeriani" di Imola (BO) – 86 allievi;
- Liceo Scientifico Statale "Aldo Moro" di Reggio Emilia – 34 allievi.

Lo strumento di indagine utilizzato è stato un questionario aperto, che ha permesso di raccogliere un numero consistente di elaborati molto ricchi di informazioni. In una prima fase, un campione pilota è stato chiamato a rispondere e commentare diverse versioni del questionario, circa le difficoltà e le ambiguità incontrate. I questionari definitivi sono stati consegnati agli alunni, esplicitando che la ricerca non era in alcun modo collegata a finalità scolastico - valutative. I protocolli sono stati compilati anonimamente, ma ogni elaborato è stato individuato con un numero, per isolare sia l'analisi dei comportamenti del singolo, sia l'analisi delle reazioni globali a una certa domanda. Alcune domande presentavano controlli incrociati sulle risposte. Come già chiarito, le domande pur essendo legate a difficoltà interne alla matematica, intendono far emergere problemi e convinzioni degli allievi in materia di errore, intendendo per convinzione *«un'opinione, un insieme di giudizi/attese, quel che si pensa a proposito di qualcosa»* (D'Amore e Fandiño, 2004) sia nella loro componente cognitiva, che in quella affettiva.

Il questionario – riportato nel presente capitolo – è composto da 22 domande (11 domande per la matematica in generale e 11 per il concetto di angolo) [8]. Nella prima parte si è inteso conoscere le convinzioni relative al piacere di fare matematica, alle modalità di correzione preferite, ai propri ricordi, alle convinzioni sugli errori commessi in matematica[9]. Nella seconda parte, a partire dal concetto di angolo, si sono indagate le concezioni sull'errore relativo a definizioni, all'evoluzione dei concetti matematici, alla considerazione degli errori nel contesto specifico *«angolo»*.

L'idea di base del presente lavoro è stata quella di capire se e quali convinzioni, eventualmente non esplicite, lo studente possiede sugli errori (in matematica in generale e nel caso specifico dell'angolo), cercando di far emergere il più possibile un quadro informativo sulla concezione degli errori aderente al pensiero degli allievi. Un'altra idea è quella che dietro la difficoltà, c'è spesso una determinata e vitale domanda di senso, difficilmente interpretabile dall'insegnante, che indica un'intelligenza desiderosa di padroneggiare e capire a fondo le cose.

Con queste premesse è stato proposto un questionario aperto e con domande scritte in un linguaggio non formale e il più semplice possibile.

L'elaborazione qualitativa dei dati ha permesso di individuare alcune linee di tendenza, relative al tema della ricerca. L'elaborazione quantitativa ha fatto uso del software CHIC, attraverso l'analisi implicativa delle variabili di Regis Gras, fornendo informazioni sulle implicazioni tra le variabili (attraverso aggregazioni successive di classi d'implicazione). Il principio é quello di mettere insieme, ad ogni stadio di aggregazione, la coppia di variabili o la coppia di classi di variabili che presentano la massima coesione nella tappa considerata. In tal modo, si ricava un'informazione per stabilire quali classi di variabili implicano altre classi di variabili ed a quale livello.

---

[8] Alcuni questionari compilati dagli allievi sono riportati in appendice al presente lavoro.

[9] Alcune domande della parte A sono tratte dal "Questionario sull'errore nel distretto di Ciriè" in Matematica e difficoltà Chi ha paura della matematica? Atti del Convegno Nazionale n. 7.La domanda 10 parte A è stata tratta da INSEGNAMENTO/APPRENDIMENTO DELLA GEOMETRIA NELLASCUOLA SECONDARIA SUPERIORE. RIFLESSIONI SU STRUMENTI EPRESCRIZIONI A DISPOSIZIONE DEGLI INSEGNANTI Fulvia Furinghetti Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova

4.2.1 Il questionario e l'analisi a – priori

In una tabella a doppia entrata *«alunni/strategie»* è stato indicato - per ogni alunno - il valore 1 , in caso di strategie utilizzate e il valore 0, per le strategie non applicate. I dati rilevati sono stati analizzati quantitativamente, utilizzando l'analisi implicativa delle variabili di Regis Gras mediante il software CHIC .

Questionario – parte A

	? 1 .Ti piace la matematica
A1	Si - Risposta riconducibile a si
A2	Abbastanza - Risposta riconducibile a abbastanza
A3	Poco - Risposta riconducibile a poco
A4	A volte - Risposta riconducibile a volte
A5	Dipende dall'argomento
A6	Dipende dal professore
A7	No - Risposta riconducibile a no
A8	Non risponde
	2. Capisci sempre le correzioni dei tuoi errori?
B1	Si, sempre
B2	Quasi sempre
B3	A volte
B4	Quasi mai
B5	Mai
B6	Dipende dal professore
B7	Non risponde
	3.Ti aiutano ad imparare?
C1	Si, sempre
C2	Quasi sempre
C3	A volte
C4	Quasi mai
C5	Mai
C6	Dipende dal professore
C7	Con un amico
C8	Non risponde
	4.Cosa suggeriresti all'insegnante per la correzione degli errori a casa e in classe?
D1	correggere insieme, discutendo;
D2	correggere insieme;
D3	correggere individualmente, in classe;
D4	correggere tutto quello che si fa, sia a casa che a scuola;
D5	correggere quaderno per quaderno;
D6	spiegarmi meglio;
D7	correggere durante l'intervallo;
D8	dire le correzioni ad alta voce;
D9	dire le correzioni a bassa voce;
D10	dire gli errori, così lo capisco;

D11 niente correzioni, spiegarmi l'errore a voce e poi farmi rifare sul foglio.
D12 stare attento mentre lavoro così mi controlla;
D13 riprendere un argomento già spiegato;
D14 utilizzare un libro che spieghi benissimo:
D15 metter i voti;
D16 correggere bene a casa;
D17 lasciarmi provare a correggere da solo e poi spiegarmi;
D18 correggere a piccoli gruppi;
D19 altro (specificare)
D20 non risponde

5. **E' meglio la correzione fatta davanti alla classe o personale? Perché?**

E1 In classe – Più chiara, per favorire la classe
E2 Personale - Per timidezza
E3 Personale - Più mirata
E4 Indifferente , entrambe
E5 Dipende dall'errore, dai casi
E6 Non risponde
E7 In classe, nessuna motivazione
E8 Personale, nessuna motivazione

6.Hai un ricordo particolarmente negativo circa una correzione di un errore in matematica (dalle elementari ad oggi)? In caso affermativo descrivi dettagliatamente l'esperienza

F1 Si- Descrive l'esperienza
F2 Si- Non descrive l'esperienza
F3 No
F4 Non risponde

7. **Hai un ricordo particolarmente positivo circa una correzione di un errore in matematica (dalle elementari ad oggi)? In caso affermativo descrivi dettagliatamente l'esperienza**

G1 Si- Descrive l'esperienza
G2 Si- Non descrive l'esperienza
G3 No
G4 Non risponde

8. **A tuo parere è vero che l'errore in matematica ha un ruolo più importante che in altre materie? Perchè?**

H1 Si
H2 Si, Per la riuscita dell'esercizio
H3 Si, la matematica è più importante, è diversa dalle altre materi, l'errore ha un ruolo importante
H4 Si, motivazioni varie
H5 No
H6 No, tutte le materie sono uguali
H7 Non risponde

9.Dai una tua definizione di errore

J1 Definisce l'errore riconducendosi allo sbaglio
J2 Definisce l'errore riconducendosi a ignoranza

J3 Definisce l’errore riconducendosi a distrazione
J4 Definisce l’errore riconducendosi a svista
J5 Definisce l’errore riconducendosi a evidenziatore di non comprensione/studio
J6 Definisce l’errore riconducendosi a lacuna
J7 Definisce l’errore riconducendosi a salto logico/mancanza motivazioni
J8 Definisce l’errore riconducendosi a confusione
J9 Definisce l’errore riconducendosi a equivoco
J10 Definisce l’errore riconducendosi a tentativo positivo di conoscenza
J11 Definisce l’errore riconducendosi a ostacolo alla conoscenza
J12 Definisce l’errore riconducendosi a ostacolo epistemologico
J13 Definisce l’errore riconducendosi a un esempio
J14 Definisce l’errore riconducendosi a un esempio calcolo errato
J15 Definisce l’errore riconducendosi a calcolo/esercizio errato
J16 Definisce l’errore riconducendosi a qualcosa di negativo
J17 Definisce l’errore riconducendosi a qualcosa di ingiusta, scorretto, impreciso, inesatto, lontano dalla normale
J18 Non risponde, risponde non so, altro

10. Leggi le seguenti affermazioni sulla matematica e dici quale condividi. Se nessuna si adatta alla tua scrivine una personale:

A Gli oggetti matematici – e dunque tutta la matematica – esistono sempre, al di là di ogni contesto temporale e indipendentemente dall’essere umano. Il compito del matematico è decifrarli e investigare queste verità. Il matematico è uno scopritore più che un inventore.

B La matematica è una collezione di sistemi formali i cui elementi sono manipolati e combinati secondo specifiche regole del gioco. Queste regole del gioco, le definizioni e le dimostrazioni di teoremi, sono il solo interesse del matematico. Il formalista è un inventore più che uno scopritore. Per lui la questione degli oggetti matematici non si presenta. Per lui basta provare che le sue regole del gioco non portano a contraddizione.

C La matematica è ammessa nella misura in cui i suoi oggetti sono costruiti a partire da certi oggetti di base primitivi in un numero finito di passi.

D La conoscenza matematica non è assoluta, ma fallibile e correggibile.

I1 Indica la prima affermazione
I2 Indica la seconda affermazione
I3 Indica la terza affermazione
I4 Indica la quarta affermazione
I5 Scrive una nuova affermazione
I6 Non risponde

11. Nel corso della storia, pensi che i matematici abbiano commesso alcuni errori nei loro studi? Credi che ciò abbia influenzato positivamente o negativamente il progresso della conoscenza matematica?

L1 Risponde affermativamente. Risponde affermativamente
L2 Risponde affermativamente. Risponde negativamente
L3 Risponde affermativamente. Risponde non so
L4 Risponde affermativamente. Nessuna influenza, non risponde
L5 Risponde negativamente. Risponde negativamente
L6 Risponde negativamente. Risponde affermativamente

L7 Risponde negativamente. Risponde non so
L8 Risponde negativamente. Nessuna influenza, non risponde
L9 Risponde non so. Risponde affermativamente
L10 Risponde non so. Risponde negativamente
L11 Risponde non so. Risponde non so, non risponde
L12 Non risponde

Quale è il tuo voto in matematica?

M1 Insufficiente
M2 Sufficiente
M3 Più che sufficiente
M4 Non risponde

parte B

1. Cosa è una definizione geometrica? A tuo parere quale scopo ha?

N1 Non risponde
N2 Risponde non so
N3 Risposta totalmente scorretta
N4 Risposta corretta
N5 Indica una vaga idea o risposta tautologica

2. In basso sono riportate alcune definizioni del concetto di angolo. Sono tutte corrette? Quale/i preferisci e perché?

A un angolo *ABC* è una coppia di semirette *BA, BC* (dette *lati*) non appartenenti alla stessa retta, aventi la stessa origine *B* (*vertice*).

B è la differenza di direzione tra due semirette *BA*, *BC* non appartenenti alla stessa retta, aventi la stessa origine *B* (*vertice*).

C è una parte di piano delimitata da una coppia di semirette non allineate, aventi la stessa origine

D è la regione di piano spazzata da una semiretta che ruota, *in un verso* prefissato, attorno alla sua origine,dalla posizione iniziale *a* alla posizione finale *b*

O1 Affermativamente - Indica la A
O2 Affermativamente - Indica la B
O3 Affermativamente - Indica la C
O4 affermativamente - Indica la D
O5 Negativamente - Indica la A
O6 Negativamente - Indica la B
O7 Negativamente - Indica la C
O8 Negativamente - Indica la D
O9 Non risponde - Indica la A
O10 Non risponde - Indica la B
O11 Non risponde - Indica la C
O12 Non risponde - Indica la D
O13 Non risponde - Non risponde
O14 Non so - Indica la A
O15 Non so - Indica la B
O16 Non so - Indica la C
O17 Non so - Indica la D
O18 Non so, nessuna preferenza,altro
O19 Negativamente - Nessuna

3. Quale delle definizioni si avvicina maggiormente a quella che tu conosci?

A un angolo *ABC* è una coppia di semirette *BA*, *BC* (dette *lati*) non appartenenti alla stessa retta, aventi la stessa origine *B* (*vertice*).

B è la differenza di direzione tra due semirette *BA*, *BC* non appartenenti alla stessa retta, aventi la stessa origine *B* (*vertice*).

C è una parte di piano delimitata da una coppia di semirette non allineate, aventi la stessa origine

D è la regione di piano spazzata da una semiretta che ruota, *in un verso* prefissato, attorno alla sua origine,dalla posizione iniziale *a* alla posizione finale *b*

P1 Indica la A
P2 Indica la B
P3 Indica la C
P4 Indica la D
P5 Nessuna
P6 Non risponde, risponde non so
P7 Tutte

4. Le definizioni riportate sopra, permettono di identificare l'angolo piatto, l'angolo nullo e l'angolo giro? Perché?

Q1 Si, indica una motivazione giusta, ma non valida
Q2 Si, indica una motivazione errata
Q3 Si, senza motivazione
Q4 No, indica una motivazione giusta
Q5 No, indica una motivazione parzialmente giusta
Q6 No, indica una motivazione errata, insensata
Q7 No, senza motivazione
Q8 Non so
Q9 Non Risponde

5. Pensi che la definizione di angolo - in geometria - ha avuto una storia semplice e breve? Perché?

R1 Si, fornisce motivazione
R2 Si, senza motivazione
R3 No, fornisce motivazione
R4 No, senza motivazione
R5 Non so
R6 Non risponde

6. **Tre studenti stanno discutendo tra loro su come classificare l'angolo da un punto di vista filosofico.**

- Antonio afferma che l'angolo appartiene alla categoria **quantità** (di piano compreso tra due semirette);
- Biagio sostiene che l'angolo appartiene alla categoria **qualità** (angolo curvilineo, rettilineo, misto oppure acuto, ottuso retto);
- Carlo afferma che l'angolo appartiene alla categoria **relazione** (riferendosi all'inclinazione reciproca delle semirette dell'angolo).

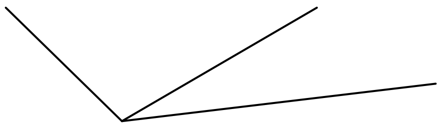
Chi ha ragione e chi ha torto? Perché?

S1 Risponde con Antonio
S2 Risponde con Biagio
S3 Risponde con Carlo
S4 Risponde non so

S5 Non risponde
S6 Risponde con tutti
S7 Altro

7. E' possibile disegnare un angolo di 765°? Giustifica la risposta.
T1 Si,ne ammette almeno l'esistenza
T2 No, non ne ammette l'esistenza
T3 Non so
T4 Non risponde

8. Uno studente afferma che la figura in basso individua 3 angoli.

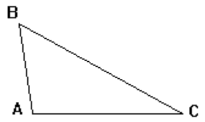


Si sbaglia oppure no?
U1 Si
U2 No
U3 Non so, non risponde

Perché?
V1 Motivazione (o disegno) giusta
V2 Motivazione errata
V3 Non so, non risponde

L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?
W1 Si
W2 No
W3 Non so, non risponde

9. Uno studente afferma che il triangolo ABC è l'intersezione dei tre angoli BAC, ACB, ABC.

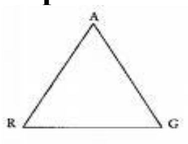


Si sbaglia oppure no?
X1 Si
X2 No
X3 Non so, non risponde

Perché?
Y1 Motivazione inerente
Y2 Motivazione non inerente
Y3 Non so, non risponde

L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?
Z1 Si
Z2 No
Z3 Non so, non risponde

10 Uno studente afferma che gli angoli del triangolo ARG sono uguali perché comprendono la stessa parte di piano.

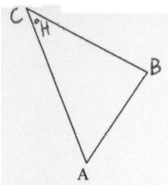


Si sbaglia oppure no?
AA1 Si
AA2 No
AA3 Non so, non risponde

Perché?
AB1 Motivazione inerente
AB2 Motivazione non inerente
AB3 Non so, non risponde

L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?
AC1 Si
AC2 No
AC3 Non so, non risponde

11 Uno studente afferma che i punti A e H appartengono a tutti gli angoli del triangolo.



Si sbaglia oppure no?
AD1 Si
AD2 No
AD3 Non so, non risponde

Perché?
AE 1 Motivazione inerente
AE 2 Motivazione non inerente
AE3 Non so, non risponde

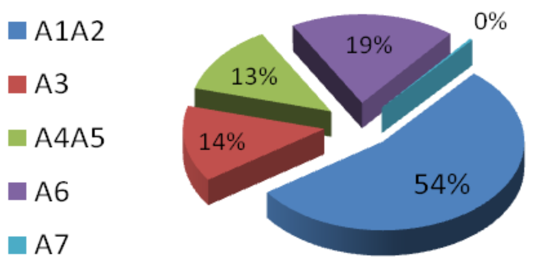
L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?
AF1 Si
AF 2 No
AF3 Non so, non risponde

4.2.2 Analisi quantitativa dei dati

PARTE A

DOMANDA N. 1 – TI PIACE LA MATEMATICA?

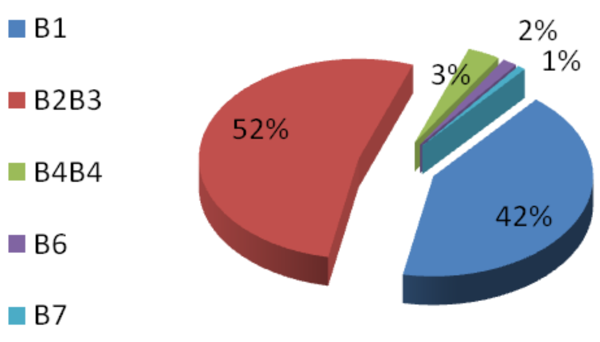
A1	Si - Risposta riconducibile a si
A2	Abbastanza - Risposta riconducibile a abbastanza
A3	Poco - Risposta riconducibile a poco
A4	A volte - Risposta riconducibile a volte
A5	Dipende dall'argomento
A6	Dipende dal professore
A7	No - Risposta riconducibile a no
A8	Non risponde



OSSERVAZIONI
Il grafico mostra che oltre la metà del campione, gradisce lo studio della matematica. L'avversione e l'odio risulta inesistente (A7). Questo dato è in stridente contrasto con la supposta avversione generalizzata verso la matematica.

DOMANDA N. 2 – CAPISCI SEMPRE LE CORREZONI DEI TUOI ERRORI?

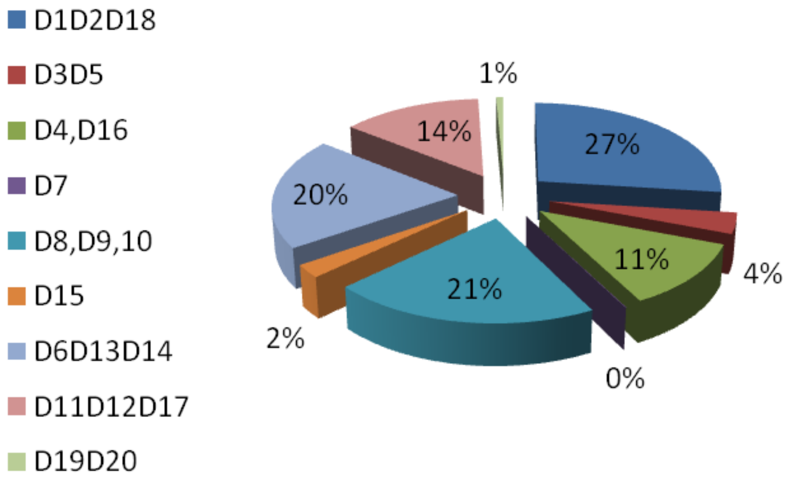
B1	Si,sempre
B2	Quasi sempre
B3	A volte
B4	Quasi mai
B5	Mai
B6	Dipende dal professore
B7	Non risponde



OSSERVAZIONI
Il grafico mostra che oltre la metà del campione (52%), non sempre capisce la correzione degli errori in matematica (B2 B3). La percentuale di coloro che sempre "capisce le correzioni" (B1) è inferiore rispetto a quella di chi "non capisce sempre" (B2 –B6). Emerge, quindi, un problema di incomprensione, piuttosto che di avversione verso la matematica.

DOMANDA N. 4 – COSA SUGGERIRESTI ALL'INSEGNANTE PER LA CORREZIONE DEGLI ERRORI A CASA E IN CLASSE?

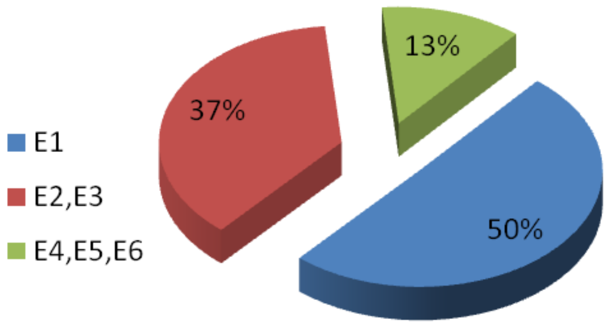
D1	correggere insieme, discutendo;
D2	correggere insieme;
D3	correggere individualmente, in classe;
D4	correggere tutto quello che si fa, sia a casa che a scuola;
D5	correggere quaderno per quaderno;
D6	spiegarmi meglio;
D7	correggere durante l'intervallo;
D8	dire le correzioni ad alta voce;
D9	dire le correzioni a bassa voce;
D10	dire gli errori, così lo capisco;
D11	niente correzioni, spiegarmi l'errore a voce e poi farmi rifare sul foglio;
D12	stare attento mentre lavoro così mi controlla;
D13	riprendere un argomento già spiegato;
D14	utilizzare un libro che spieghi benissimo;
D15	metter i voti;
D16	correggere bene a casa;
D17	lasciarmi provare a correggere da solo e poi spiegarmi;
D18	correggere a piccoli gruppi;
D19	altro (specificare)
D20	non risponde



OSSERVAZIONI
Il grafico mostra che il 27% degli allievi preferisce che le correzioni siano svolte in maniera collettiva (D1,D2,D18). Il 21% del campione, preferirebbe che gli errori fossero soltanto comunicati verbalmente (D8,D9,D10), mentre il 20 % dichiara di avere bisogno di ulteriori spiegazioni (D6 D13,D14).

DOMANDA N. 5 – È MEGLIO LA CORREZIONE FATTA DAVANTI LA CLASSE O PERSONALE? PERCHÉ?

E1	In classe, per favorire la classe
E2	Personale, per timidezza
E3	Personale, è più mirata
E4	Entrambe, indifferente
E5	Dipende dall'errore, dai casi
E6	Non risponde

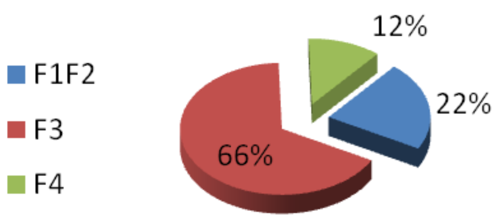


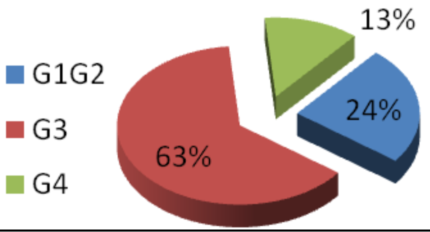
OSSERVAZIONI
Il grafico mostra una netta prevalenza per forme di correzione collettiva (E1). Questo dato, unito al precedente, mostra l'importanza del cooperative learning. Anche il momento di correzione personale riveste una certa importanza (E2,E3).

DOMANDA N. 6 – HAI UN RICORDO PARTICOLARMENTE NEGATIVO CIRCA UNA CORREZZIONE D' UN ERRORE IN MATEMATICA? (DALLE ELEMENTARI AD OGGI)

DOMANDA N. 7 – HAI UN RICORDO PARTICOLARMENTE POSITIVO CIRCA UNA CORREZZIONE D' UN ERRORE IN MATEMATICA? (DALLE ELEMENTARI AD OGGI)

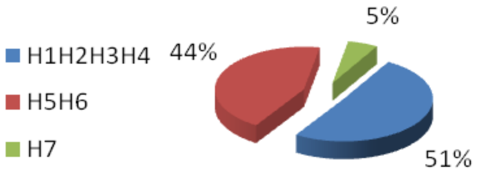
F1- G1	Si, descrive l'esperienza
F2 – G2	Si, non descrive l'esperienza
F3 – G3	No
F4 – G4	Non risponde





OSSERVAZIONI
I due grafici mostrano che i ricordi - siano essi positivi o negativi – hanno stessa incidenza, non particolarmente rilevante (23% in media). Tuttavia, in entrambi i casi, non risultano essere innocui e, spesso, si tratta di ricordi anche di lunga data (vedi analisi successiva).

DOMANDA N. 8 – A TUO PARERE, È VERO CHE L'ERRORE IN MATEMATICA HA UN RUOLO PIÙ IMPORTANTE CHE IN ALTRE MATERIE? PERCHÉ?

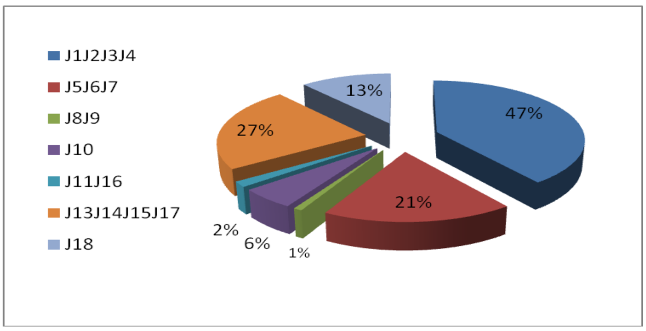


H1	Si
H2	Si, per la riuscita dell'esercizio
H3	Si, la matematica è più importante
H4	Si, motivazioni varie
H5	No
H6	No, tutte le materie sono uguali
H7	Non risponde

OSSERVAZIONI
Il grafico mostra una prevalenza di coloro che ritengono che l'errore, in matematica, rivesta un ruolo più importante rispetto alle altre materie (H1–H4). Tale dato, tuttavia, risulta essere eterogeneo, rispetto alla tipologia di appartenenza scolastica (vedi analisi qualitativa).

DOMANDA N. 9 – DAI UNA TUA DEFINIZIONE D' ERRORE

J1	Definisce l'errore riconducendosi allo sbaglio
J2	Definisce l'errore riconducendosi alla ignoranza
J3	Definisce l'errore riconducendosi alla distrazione
J4	Definisce l'errore riconducendosi alla svista
J5	Definisce l'errore riconducendosi alla non comprensione/studio
J6	Definisce l'errore riconducendosi alla lacuna
J7	Definisce l'errore riconducendosi al salto logico/mancanza motivazioni
J8	Definisce l'errore riconducendosi alla confusione
J9	Definisce l'errore riconducendosi all' equivoco
J10	Definisce l'errore riconducendosi al tentativo positivo di conoscenza
J11	Definisce l'errore riconducendosi all' ostacolo alla conoscenza
J12	Definisce l'errore riconducendosi all' ostacolo epistemologico
J13	Definisce l'errore riconducendosi ad un esempio
J14	Definisce l'errore riconducendosi ad un esempio calcolo errato
J15	Definisce l'errore riconducendosi al calcolo/esercizio errato
J16	Definisce l'errore riconducendosi a qualcosa di negativo
J17	Definisce l'errore riconducendosi a qualcosa di ingiusto, scorretto, impreciso, inesatto, lontano dalla normalità
J18	Non risponde



OSSERVAZIONI
Il grafico mostra che solo una piccola percentuale di allievi - 6% - intravede nell'errore un tentativo positivo di conoscenza (J10). L'accezione più diffusa si riconduce allo sbaglio (e simili)(J1-J4).

DOMANDA N. 10 – LEGGI LE SEGUENTI AFFERMAZIONI SULLA MATEMATICA E DICI QUALE CONDIVIDI. SE NESSUNA SI ADATTA ALLA TUA, SCRIVINE UNA PERSONALE.

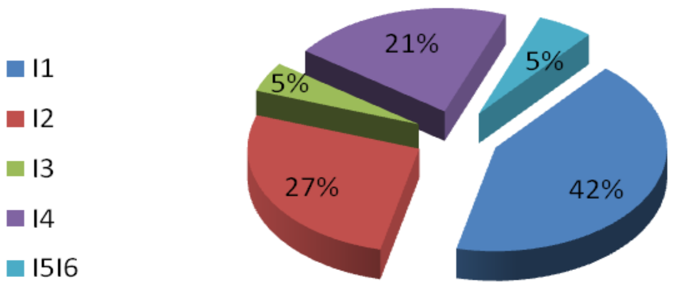
A Gli oggetti matematici – e dunque tutta la matematica – esistono sempre, al di là di ogni contesto temporale e indipendentemente dall'essere umano. Il compito del matematico è decifrarli e investigare queste verità. Il matematico è uno scopritore più che un inventore.

B La matematica è una collezione di sistemi formali i cui elementi sono manipolati e combinati secondo specifiche regole del gioco. Queste regole del gioco, le definizioni e le dimostrazioni di teoremi, sono il solo interesse del matematico. Il formalista è un inventore più che uno scopritore. Per lui la questione degli oggetti matematici non si presenta. Per lui basta provare che le sue regole del gioco non portano a contraddizione.

C La matematica è ammessa nella misura in cui i suoi oggetti sono costruiti a partire da certi oggetti di base primitivi in un numero finito di passi.

D La conoscenza matematica non è assoluta, ma fallibile e correggibile.

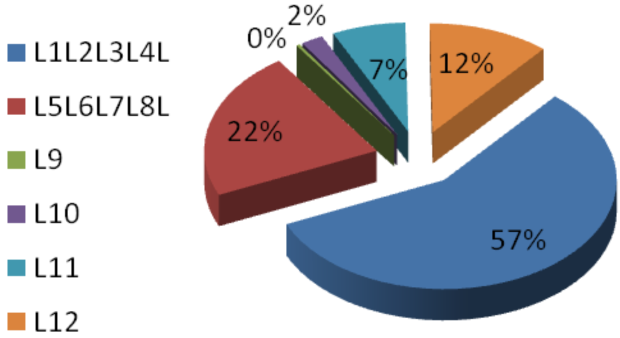
I1	Indica la prima affermazione
I2	Indica la seconda affermazione
I3	Indica la terza affermazione
I4	Indica la quarta affermazione
I5	Scrive una nuova affermazione
I6	Non risponde



OSSERVAZIONI
Il grafico mostra una prevalenza della visione platonista della matematica - (I1) 42% - a scapito della una visione costruttivista - (I3) 5%.

DOMANDA N. 10 – NEL CORSO DELLA STORIA, PENSI CHE I MATEMATICI ABBIANO COMMESSO ALCUNI ERRORI NEI LORO STUDI? CREDI CHE CIÒ ABBIA INFLUENZATO POSITIVAMENTE O NEGATIVAMENTE IL PROGRESSO DELLA CONOSCENZA MATEMATICA?

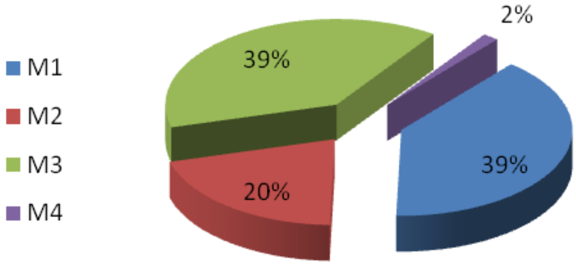
L1	Risponde affermativamente. Risponde affermativamente
L2	Risponde affermativamente. Risponde negativamente
L3	Risponde affermativamente. Risponde non so
L4	Risponde affermativamente. Non risponde, risponde nessuna influenza
L5	Risponde negativamente. Risponde negativamente
L6	Risponde negativamente. Risponde affermativamente
L7	Risponde negativamente. Risponde non so
L8	Risponde negativamente. Non risponde, risponde nessuna influenza
L9	Risponde non so. Risponde affermativamente
L10	Risponde non so. Risponde negativamente
L11	Risponde non so. Risponde non so
L12	Non risponde



OSSERVAZIONI
Il 43% degli allievi pensa che non siano stati commessi errori (L5-L8) o non ha idee a riguardo (L9-L12).

QUAL È IL TUO VOTO IN MATEMATICA?

M1	Insufficiente
M2	Sufficiente
M3	Più che sufficiente
M4	Non risponde

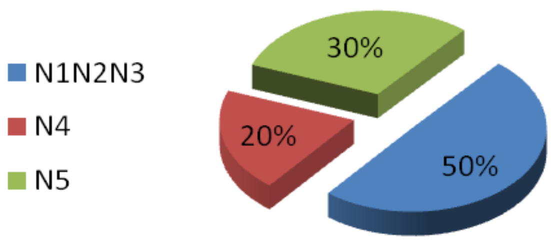


OSSERVAZIONI
Il grafico mostra che il campione esaminato, mediamente, raggiunge una votazione "sufficiente" in matematica.

PARTE B

DOMANDA 1 – COSA È UNA DEFNIZIONE GEOMETRICA? A TUO PARERE QUALE SCOPO HA?

N1	Non risponde
N2	Risponde non so
N3	Risposta totalmente scorretta
N4	Risposta corretta
N5	Indica una vaga idea o risposta tautologica



OSSERVAZIONI
Il grafico mostra che il 50% del campione esaminato non ha la minima idea di cosa sia una definizione geometrica (N1-N3) il 30% ne ha solo un'idea vaga (N5).

DOMANDA 2 – IN BASSO SONO RIPORTATE ALCUNE DEFINIZIONI DEL CONCETTO D' ANGOLO. SONO TUTTE CORRETTE? QUALE PREFERISCI E PERCHÈ?

A Un angolo *ABC* è una coppia di semirette *BA*, *BC* (dette *lati*) non appartenenti alla stessa retta, aventi la stessa origine *B* (*vertice*).

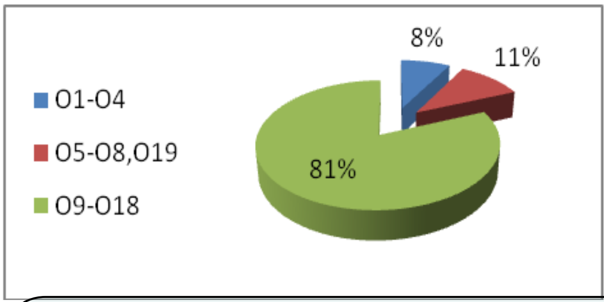
B È la differenza di direzione tra due semirette *BA*, *BC* non appartenenti alla stessa retta, aventi la stessa origine *B* (*vertice*).

C È una parte di piano delimitata da una coppia di semirette non allineate, aventi la stessa origine.

D È la regione di piano spazzata da una semiretta che ruota, *in un verso* prefissato, attorno alla sua origine, dalla posizione iniziale *a* alla posizione finale *b*.

O1	Affermativamente - Indica la A
O2	Affermativamente - Indica la B
O3	Affermativamente - Indica la C
O4	Affermativamente - Indica la D
O5	Negativamente - Indica la A
O6	Negativamente - Indica la B
O7	Negativamente - Indica la C
O8	Negativamente - Indica la D
O9	Non risponde - Indica la A
O10	Non risponde - Indica la B

O11	Non risponde - Indica la C
O12	Non risponde - Indica la D
O13	Non risponde, non risponde
O14	Non so. Indica la A
O15	Non so. Indica la B
O16	Non so. Indica la C
O17	Non so. Indica la D
O18	Non so. Nessuna preferenza
O19	Negativamente. Nessuna



OSSERVAZIONI

Il grafico mostra che l'81% del campione esaminato non riesce a stabilire la correttezza o meno delle definizioni sottoposte (O9-O18). Soltanto il 8% è in grado di stabilire la loro correttezza (O1-O4).

OSSERVAZIONI

I grafici – distinti per convinzione (definizione corretta, scorretta, non si esprimono, non so) - mostrano che, qualsiasi sia la convinzione in merito alla correttezza della definizione, prevale la definizione di angolo come parte di piano. Fa eccezione il caso degli studenti indecisi, dove c'è una prevalenza di "nessuna preferenza".

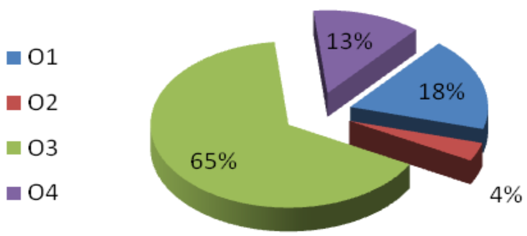


Figura 1- Risposta: le definizioni sono tutte corrette

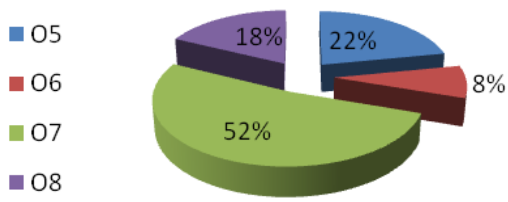


Figura 2- Risposta: le definizioni non sono tutte corrette

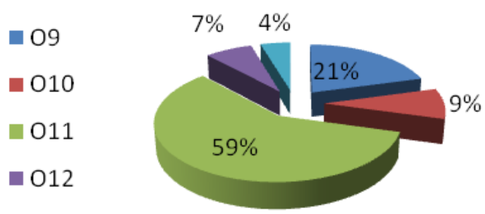


Figura 3 - Non risponde

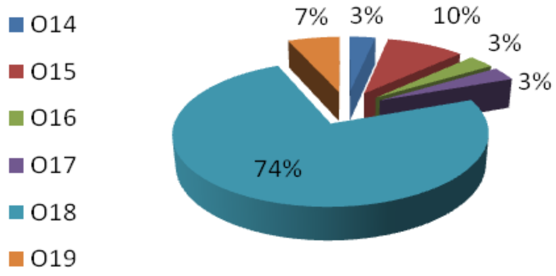
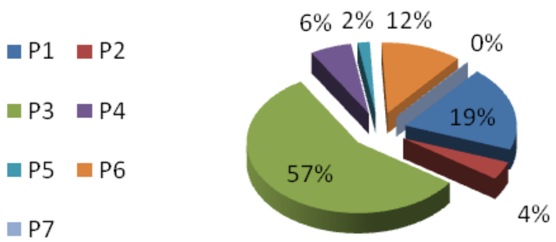


Figura 4 - Risposta: non so

DOMANDA 3 – QUALE DELLE DEFINIZIONI SI AVVICINA MAGGIORMENTE A QUELLA CHE TU CONOSCI?

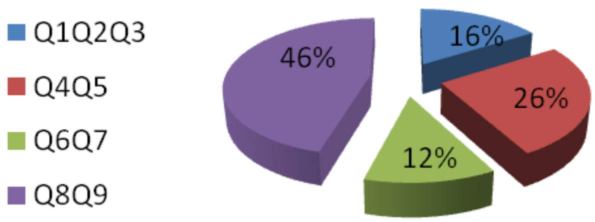
P1	Indica la A
P2	Indica la B
P3	Indica la C
P4	Indica la D
P5	Nessuna
P6	Non risponde, risponde non so
P7	Tutte



OSSERVAZIONI Buona parte del campione (57%) riconosce nella definizione come parte di piano, quella studiata a scuola (P3).

DOMANDA 4 – LE DEFINIZIONI RIPORTATE SOPRA PERMETTONO D' IDENTIFICARE L'ANGOLO PIATTO, L'ANGOLO NULLO E L'ANGOLO GIRO? PERCHÉ?

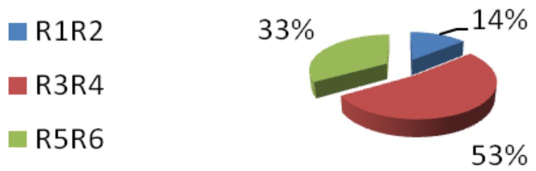
Q1	Si, indica una motivazione giusta, ma non valida
Q2	Si, indica una motivazione errata
Q3	Si, senza motivazione
Q4	No, indica una motivazione giusta
Q5	No, indica una motivazione parzialmente giusta
Q6	No, indica una motivazione errata, insensata
Q7	No, senza motivazione
Q8	Non so
Q9	Non Risponde



OSSERVAZIONI
Soltanto il 26% (Q4-Q5) è in grado di stabilire e motivare perché le definizioni sottoposte non sono idonee a definire angoli particolari.

DOMANDA 5 – PENSI CHE LA DEFINZIONE D' ANGOLO – IN GEOMETRIA – HA AVUTO STORIA SEMPLICE E BREVE? PERCHÈ?

R1	Si, fornisce motivazione
R2	Si, senza motivazione
R3	No, fornisce motivazione
R4	No, senza motivazione
R5	Non so
R6	Non risponde

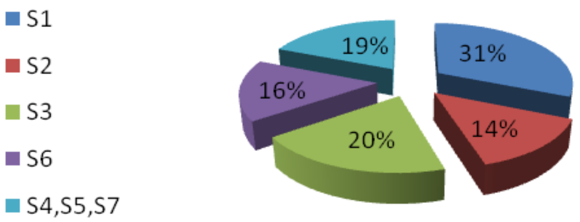


OSSERVAZIONI
Una buona percentuale (47%) non si esprime o ritiene che il concetto d'angolo non abbia avuto una storia (R1-R2, R5-R6).

DOMANDA 6 – TRE STUDENTI STANNO DISCUTENDO TRA LORO SU COME CLASSIFICARE L'ANGOLO, DA UN PUNTO DI VISTA FILOSOFICO. CHI HA RAGIONE E CHI HA TORTO? PERCHE'?

- Antonio afferma che l'angolo appartiene alla categoria **quantità** (di piano compreso tra due semirette);
- Biagio sostiene che l'angolo appartiene alla categoria **qualità** (angolo curvilineo, rettilineo, misto oppure acuto, ottuso, retto);
- Carlo afferma che l'angolo appartiene alla categoria **relazione** (riferendosi all'inclinazione reciproca delle semirette dell'angolo).

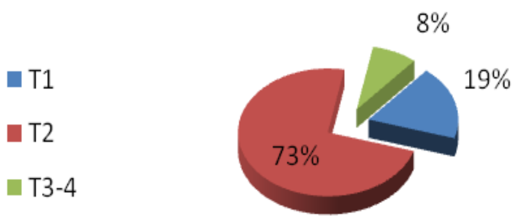
S1	Risponde Antonio (quantità)
S2	Risponde Biagio (qualità)
S3	Risponde Carlo (relazione)
S4	Risponde non so
S5	Non risponde
S6	Risponde con tutti
S7	Altro



OSSERVAZIONI
Soltanto il 16% del campione ritiene che l'angolo possa essere definito secondo più aspetti (S6). Una percentuale non trascurabile (20+14%) si riconduce alla categoria "relazione" o alla "qualità"(S3, S2), evidenziando una risposta nettamente diversa dalla definizione scolastica.

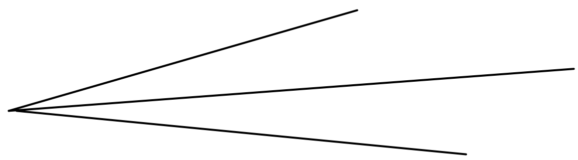
DOMANDA 7 –E' POSSIBILE DISEGNARE UN ANGOLO DI 765°?GIUSTIFICA LA RISPOSTA

T1	Si, ne ammette almeno l'esistenza
T2	No, non ne ammette l'esistenza
T3	Non so
T4	Non risponde

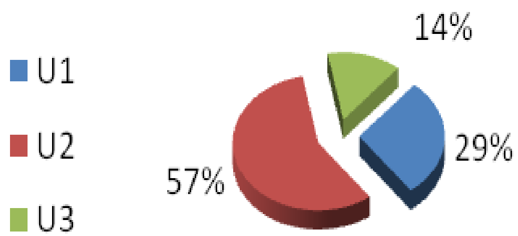


OSSERVAZIONI
Una grossa percentuale del campione (81%) non è in grado di immaginare l'esistenza grafica di un angolo maggiore di 360 gradi (T2-T4).

DOMANDA 8 –UNO STUDENTE AFFERMA CHE LA FIGURA IN BASSO INDIVIDUA 3 ANGOLI. SI SBAGLIA OPPURE NO?



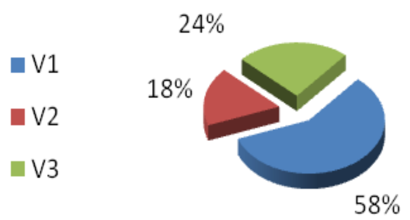
U1	Si
U2	No
U3	Non so



OSSERVAZIONI
Più della metà del campione (57%) è in grado di scorgere la presenza di tre angoli (U2).

DOMANDA 8 – PERCHÉ (SI SBAGLIA)?

V1	Motivazione inerente
V2	Motivazione non inerente
V3	Non so, non risponde

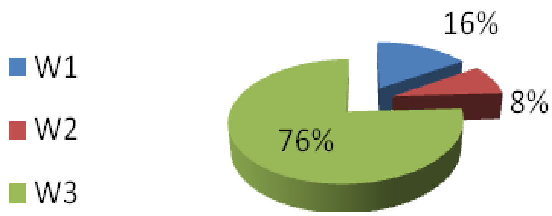


OSSERVAZIONI

Una simile percentuale (58%) riesce a motivare bene la risposta (V1), contro il 42%, che non riesce a farlo (V2-V3).

DOMANDA 8 – L'ERRORE CHE EVENTUALMENTE COMMETTE È GRAVE OPPURE NO?

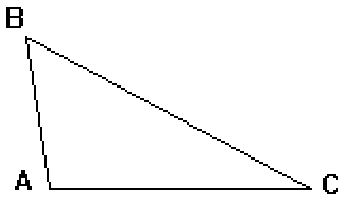
W1	Si
W2	No
W3	Non so, non risponde



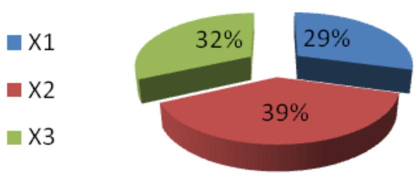
OSSERVAZIONI

Una larga percentuale (76%) non riesce ad esprimersi riguardo l'eventuale gravità dell'errore (W3). Tra coloro che esprimono il proprio parere a riguardo, la percentuale di chi ritiene che l'errore sia "grave"(W1) è doppia (16%) rispetto a coloro che ritengono l'errore "non grave" (8% - W2).

DOMANDA 9 –UNO STUDENTE AFFERMA CHE IL TRIANGOLO ABC è L'INTERSEZIONE DEI TRE ANGOLI BAC,ACB,ABC. SI SBAGLIA OPPURE NO?[8]



X1	Si
X2	No
X3	Non so

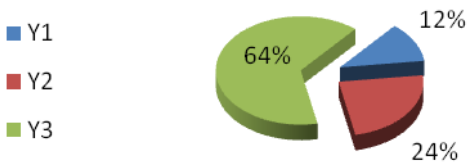


OSSERVAZIONI

Le risposte risultano quasi equamente distribuite tra coloro che pensano che l'affermazione sia esatta (29% - X1), sbagliata (39% - X2), o non si esprimono (32% - X3).

DOMANDA 9 – PERCHÉ (SI SBAGLIA)?

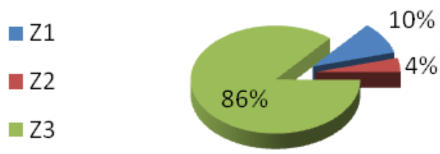
Y1	Motivazione inerente
Y2	Motivazione non inerente
Y3	Non so, non risponde



OSSERVAZIONI
Soltanto il 12% del campione riesce a motivare adeguatamente la propria risposta (Y1).

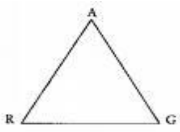
DOMANDA 9– L'ERRORE CHE EVENTUALMENTE COMMETTE È GRAVE OPPURE NO?

Z1	Si
Z2	No
Z3	Non so, non risponde

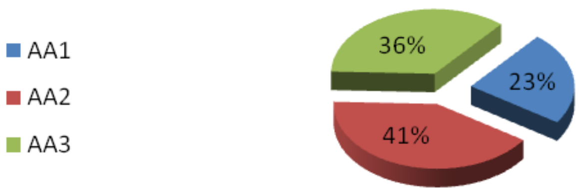


OSSERVAZIONI
Gran parte del campione – 86% - non è in grado di esprimere il proprio parere, in merito alla gravità o meno dell'errore(Z3). Coloro che ritengono l'errore "grave" (10% - Z1) sono più del doppio di coloro che lo classificano "non grave"(4%- Z2).

DOMANDA 10 –UNO STUDENTE AFFERMA CHE GLI ANGOLI DEL TRIANGOLO ARG SONO UGUALI PERCHÉ COMPRENDONO LA STESSA PARTE DI PIANO. SI SBAGLIA OPPURE NO?



AA1	Si
AA2	No
AA3	Non so

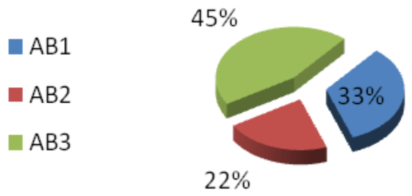


OSSERVAZIONI
Il 77% non riesce a stabilire l'erroneità della affermazione (AA1 – AA2).

[10] Le domande 9,10,11 hanno come sottintesa la visione dell'angolo come parte di piano. Quindi, alcuni allievi potevano – teoricamente - segnalare la presenza di errori nelle affermazioni sottoposte a loro giudizio per una discordanza tra la definizione conosciuta e la definizione implicitamente proposta nella domanda. Tale possibilità è stata esclusa dall'analisi successiva (si veda analisi con CHIC e analisi qualitativa).

DOMANDA 10 – PERCHÉ (SI SBAGLIA)?

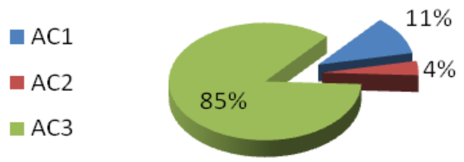
AB1	Motivazione inerente
AB2	Motivazione non inerente
AB3	Non so, non risponde



OSSERVAZIONI
Inoltre, il 67% del campione non riesce a dare una motivazione valida alla propria risposta (AB2 – AB3).

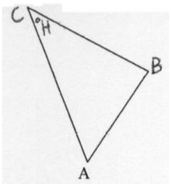
DOMANDA 10 – L'ERRORE CHE EVENTUALMENTE COMMETTE È GRAVE OPPURE NO?

AC1	Si
AC2	No
AC3	Non so, non risponde

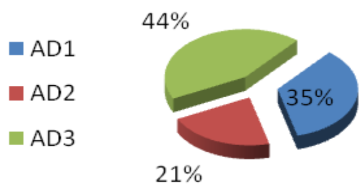


OSSERVAZIONI
Un'alta percentuale (85%) non si esprime in tal senso (AC3). Coloro che ritengono l'errore "grave" (11% - AC1) sono quasi il triplo di coloro che lo classificano come "non grave" (4% - AC2).

DOMANDA 11 – UNO STUDENTE AFFERMA CHE I PUNTI A E H APPARTENGONO A TUTTI GLI ANGOLI DEL TRIANGOLO. SI SBAGLIA OPPURE NO?



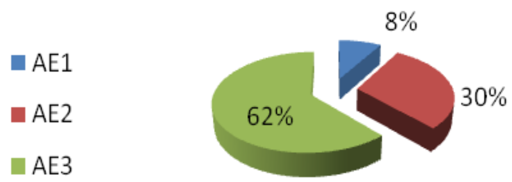
AD1	Si
AD2	No
AD3	Non so



OSSERVAZIONI
Il 79% (44% e 35%) non è in grado di rispondere in maniera corretta (AD1, AD3).

DOMANDA 11 – PERCHÉ (SI SBAGLIA)?

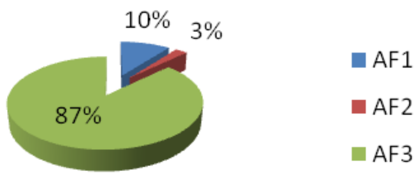
AE1	Motivazione inerente
AE2	Motivazione non inerente
AE3	Non so, non risponde



OSSERVAZIONI
Il 92% del campione non riesce a dare una buona motivazione (AE2 – AE3).

DOMANDA 11 – L'ERRORE CHE EVENTUALMENTE COMMETTE È GRAVE OPPURE NO?

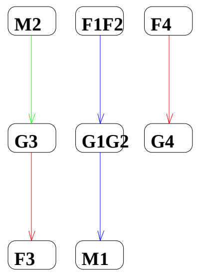
AF1	Si
AF2	No
AF3	Non so, non risponde



OSSERVAZIONI
L'87% non riesce a dare un proprio parere (AF3). Coloro che classificano l'errore come "grave" (10% - AF1) sono più del triplo di coloro che lo classificano come non grave (3% - AF2).

E' interessante conoscere in maniera più approfondita le convinzioni degli studenti e cercare di isolare quelle convinzioni che sembrano essere determinanti nelle affermazioni del campione esaminato. Di seguito, mostriamo l'analisi delle implicazioni rilevate con l'ausilio del software CHIC, procedendo per gruppi di variabili. Si precisa che le correlazioni descritte di seguito, concordemente con le potenzialità offerte dal software utilizzato, sono riportate nella forma causa/effetto (con espressioni del tipo "se…allora"); tuttavia, le medesime correlazioni nascono da un lavoro interpretativo, che è stato basilare e propedeutico nell'esposizione dei risultati.

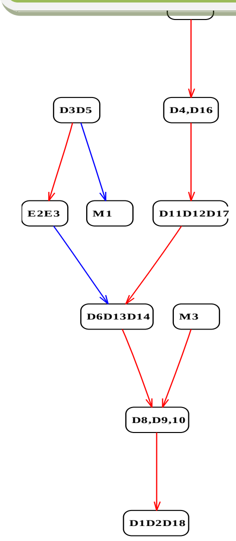
MATEMATICA E RICORDI: UN BINOMIO DIFFICILE



Il grafico mostra implicazioni tra una votazione sufficiente (M2) e l'inesistenza di ricordi (negativi e positivi) (F3 – G3). Quindi, alla luce dei dati disponibili, possiamo affermare che se gli alunni conseguono una votazione sufficiente, non hanno ricordi negativi (e positivi) in matematica. All'opposto, risulta che condizione necessaria per una votazione insufficiente (M1) è la presenza di ricordi sia negativi che e positivi. Inoltre, coloro che non danno risposta relativamente all'esistenza di ricordi negativi (F4), non danno analoga risposta per i ricordi positivi (G4).

Grafo implicativo : C:\Users\Paola\Desktop\dati\TUTTI\parziali\FGM.csv 99 95 90 85

LA MATEMATICA COME FORMA COLLETTIVA DI CONOSCENZA

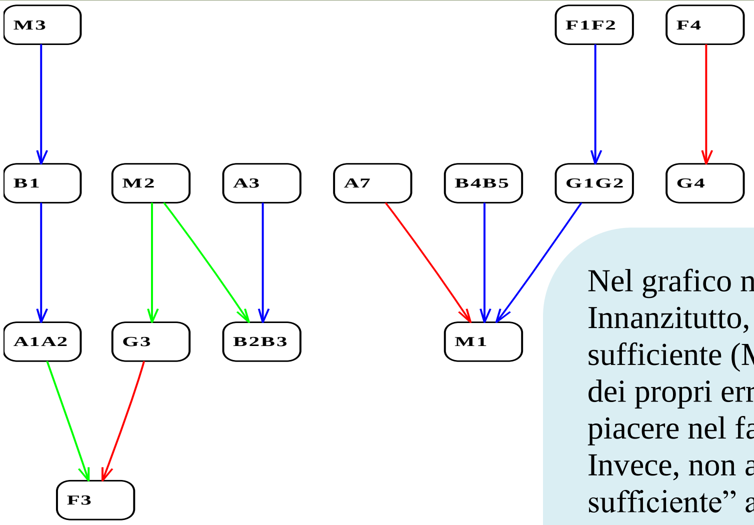


Grafo implicativo : C:\Users\Paola\Desktop\Nuovo Foglio di la… 99 95 90 85

OSSERVAZIONI

Se gli alunni chiedono una correzione molto puntuale (D3,D5), allora hanno una insufficienza (M1), oppure preferiscono una correzione personale a quella collettiva (E2,E3). In tal caso, indicano che avrebbero piacere a ricevere ulteriori spiegazioni (D6,D13,D14), che le correzioni venissero semplicemente "dette" (D8,D9,D10) e, infine, accettano volentieri anche forme di correzione collettiva (D1,D2,D18). Le due ultime preferenze appartengono anche agli alunni che hanno un rendimento più che sufficiente (M3). Il grafico mostra che la preferenza per forme collettive di correzione (D1,D2, D18) è sempre presente come implicazione di altre forme di correzione preferite (D3,D4….).

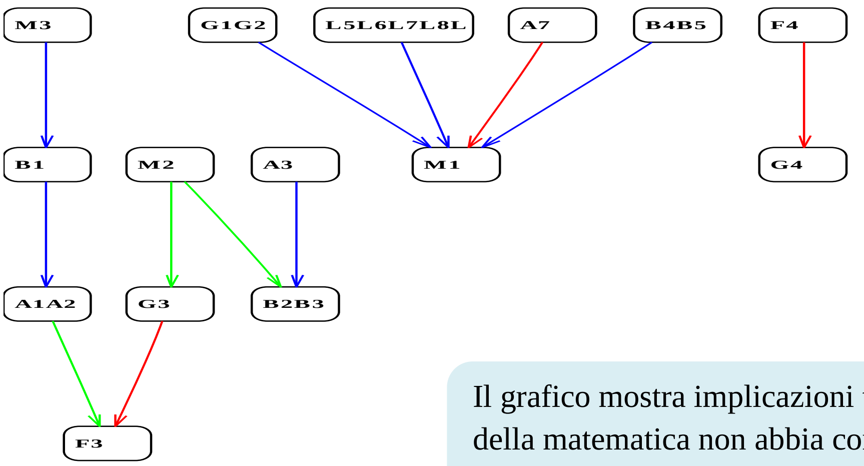
LA MATEMATICA “NON MI PIACE” OPPURE LA MATEMATICA “NON LA CAPISCO”?



Nel grafico notiamo ulteriori interessanti implicazioni. Innanzitutto, se gli alunni hanno una votazione più che sufficiente (M3), allora capiscono sempre le correzioni dei propri errori (B1), e quindi, dichiarano di aver piacere nel fare matematica (A1,A2).
Invece, non appena la votazione passa da “più che sufficiente” a “sufficiente” (M2) allora le correzioni non risultano sempre capite (B2,B3).
Inoltre, coloro che dichiarano “ non mi piace la matematica” (A7) oppure “non capisco mai o quasi le correzioni” (B4,B5) non raggiungono la sufficienza (M1).

Grafo implicativo : C:\Users\Paola\Desktop\dati\TUTTI\parziali\ABFGM.csv 99 95 90 85

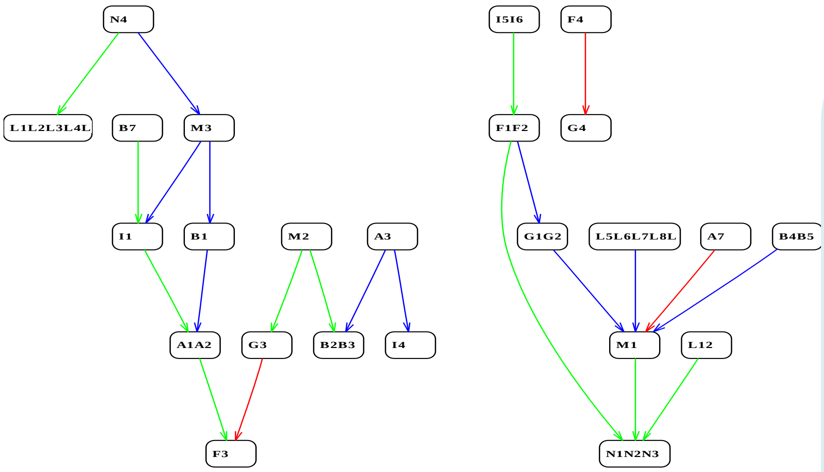
LA STORIA DELLA MATEMATICA NON PRESENTA ERRORI!



Il grafico mostra implicazioni tra la convinzione che “la storia della matematica non abbia conosciuto errori”(L5,L6,L7,L8) e un rendimento insufficiente in matematica (M1).

Grafo implicativo : C:\Users\Paola\Desktop\dati\TUTTI\parziali\ABFGML.csv 99 95 90 85

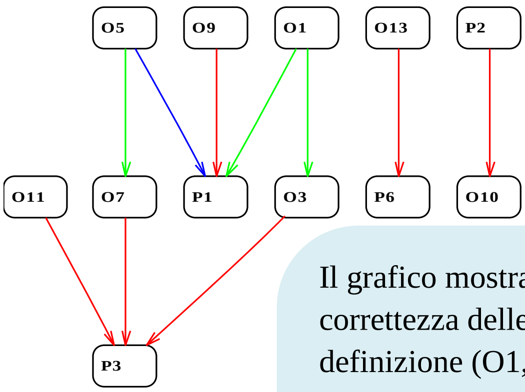
IL SIGNIFICATO DI “DEFINIZIONE”



Grafo implicativo : C:\Users\Paola\Desktop\dati\TUTTI\parziali\ABFGMLN.csv

Il grafico mostra che se gli alunni “conoscono il significato di definizione”(N4), allora posseggono la convinzione che “la storia della matematica presenti errori” (L1,L2,L3,L4) e hanno un rendimento scolastico “più che sufficiente” in matematica (M3). All’opposto risulta che, se gli alunni e presentano ricordi negativi in relazione alla matematica (F1,F2) oppure hanno un rendimento insufficiente (M1), allora non sono in grado di spiegare cosa sia una definizione (N1, N2,N3).

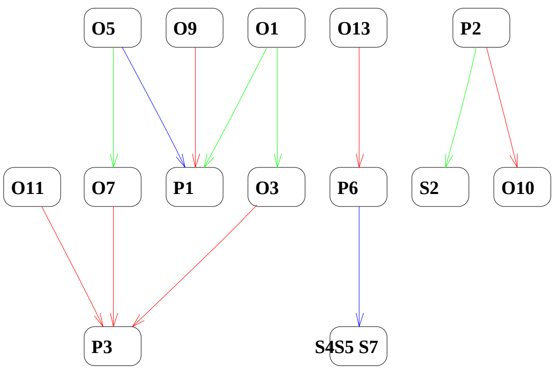
L’ANGOLO COME DEFINITO A SCUOLA E …



Grafo implicativo : C:\Users\

Il grafico mostra che gli alunni che si esprimono relativamente alla correttezza delle definizioni mostrate, se preferiscono la prima definizione (O1,05), preferiscono anche la terza definizione (O3, O7). Inoltre, buona parte di coloro che scelgono la prima e terza definizione (O3,O7,O11 – O1,O5,O9) la riconoscono come quella studiata a scuola (P3 – P1).Coloro che riconoscono la seconda definizione come quella studiata (P2), dichiarano di preferirla, pur se non si esprimono sulla correttezza (O10). Inoltre, come è ovvio, chi non è in grado né di stabilire la correttezza, né di indicare una preferenza (O13), mostra analoga incapacità di individuare la definizione studiata a scuola.

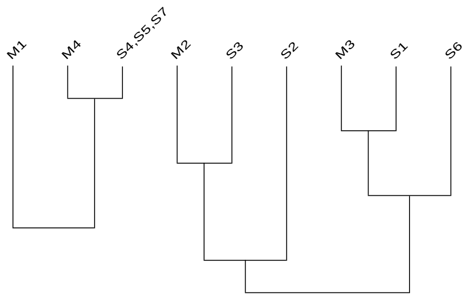
E … L’ANGOLO COME IO LO VEDO



Grafo implicativo : C:\Users\Paola\Desktop\dati\Nuovo Foglio di

Emerge uno scollamento totale tra le definizioni “scolastiche” preferite e le definizioni come “categorie filosofiche”. Non c’è alcuna relazione tra le risposte per la definizione studiata (P1-P7) e/o preferite (O1-O19) e le risposte per le definizioni, secondo categorie “filosofiche”(S1-S7). In tal senso, ci sono soltanto due implicazioni. Una prima implicazione indica che coloro che dichiarano di aver studiato l’angolo come differenza di direzione (P2), vedono l’angolo – relativamente al dibattito filosofico – come qualità (S2), piuttosto che come relazione (S3) (come, avremmo dovuto aspettarci). Una seconda implicazione mette semplicemente in evidenza la permanenza di un’ atteggiamento “non risposta” che si ripete in più domande (O13, P6, S4,S5, S7).

CHI RIESCE A VEDERE I DIVERSI ASPETTI D’ UNA DEFINIZIONE?



Albero delle similarità : C:\Users\Paola\Desktop\MS - Copia.csv

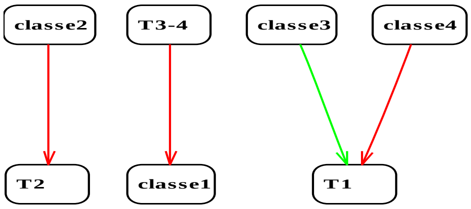
Il grafico al lato mostra alcune similarità, raggruppate secondo il rendimento in matematica. Esse si presentano

- tra coloro che hanno una valutazione più che sufficiente (M3) e coloro che sono in grado di vedere più aspetti definitori dell’angolo (S6) e/o indicano la “quantità”, come categoria a cui appartiene l’angolo (S1);

- tra coloro che non dichiarano il proprio voto (M4) e coloro che non “tentano alcuna risposta” sul proprio modo di catalogare l’angolo (S4,S5,S7); a questi si riconducono anche color che hanno rendimento insufficiente (M1);

- tra gli alunni che raggiungono la sufficienza (M2) e coloro che vedono l’angolo come qualità o relazione (ulteriori approfondimenti nell’analisi qualitativa).

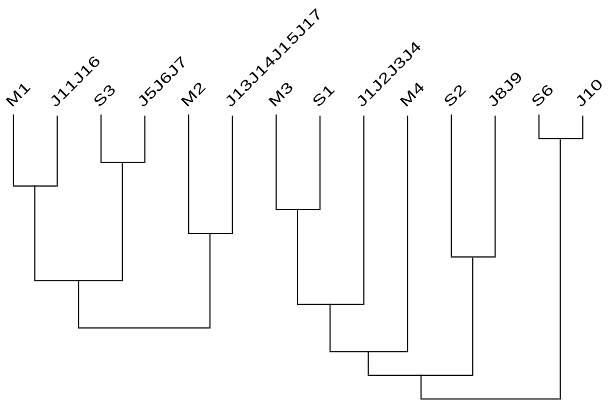
CHI RIESCE A IMMAGINARE L'ESISTENZA D' ANGOLI OLTRE I 360°?



Se gli alunni frequentano una quarta o una terza, allora sono in grado di immaginare l'esistenza di triangoli oltre i 360°(T1), ricorrendo all'idea di angolo come rotazione. Invece, se i ragazzi frequentano la classe 2, non ammettono l'esistenza di angoli di questo tipo (T2). Inoltre, se non sono in grado di rispondere (T3 e T4), allora frequentano la classe prima.

Grafo implicativo : C:\Users\Paola\Desktop\dati\T'99.'95.ti90 -85opia.csv

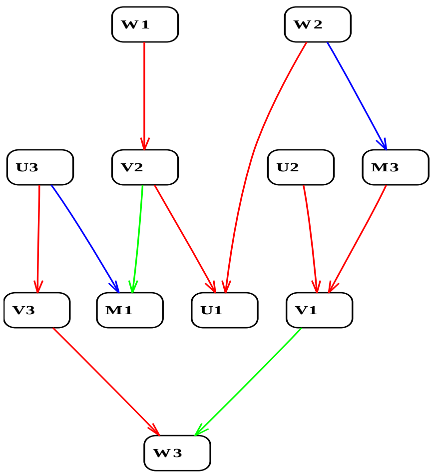
CHE COSA E' L'ERRORE?



Albero delle similarità : C:\Users\Paola\Desktop\MS - Copia.csv

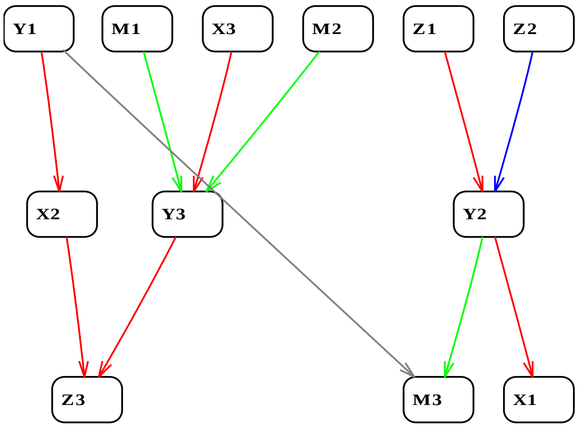
Considerando ulteriormente le definizioni degli alunni relativamente al termine "errore", emergono alcune similarità. Innanzitutto, coloro che vedono nell'errore un tentativo positivo di conoscenza (J10) riescono a vedere i diversi aspetti in cui può essere definito un angolo (S6). Si tratta di alunni che non appartengono alla categoria con rendimento insufficiente o sufficiente (M1,M2). Ulteriore similarità esiste tra coloro che hanno rendimento insufficiente (M1) e coloro che definiscono l'errore come ostacolo alla conoscenza o come qualcosa di negativo (J11, J16) ; altra similarità tra coloro che hanno un rendimento sufficiente (M2) e coloro che - per definire un errore - si riconducono semplicemente al calcolo a o un esempio (J13, J14, J15,J17).

COME L'ALUNNO STABILISCE LA GRAVITA' DELL'ERRORE



Il grafico mostra che se gli studenti che indicano l'errore come grave (W1) – alla domanda 9 - allora non sono in grado di motivare adeguatamente l'errore (V2) e hanno un rendimento insufficiente (M1). Invece, se affermano che l'errore non è grave (W2) allora ha un rendimento più che sufficiente (M3) e sono in grado di motivare le risposte (V1). Ovviamente, chi non sa esprimere il proprio parere relativamente alla presenza/assenza di un errore (U3), non riesce a darne motivazione (V3) e non riesce a esprimersi sulla gravità dell'eventuale errore (W3).

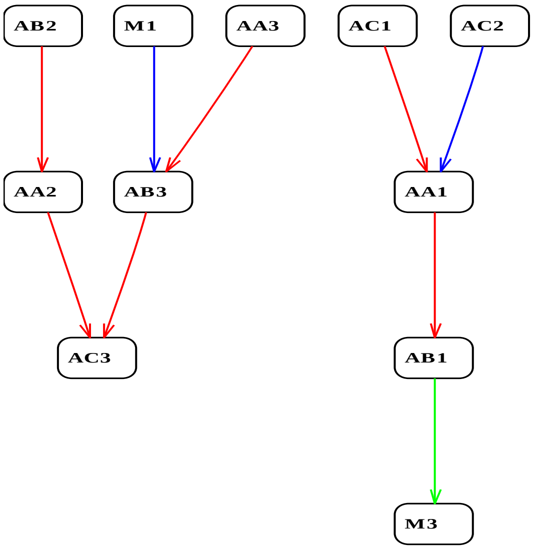
CHI RIESCE AD ESPRIMERSI SULLA GRAVITA' DELL'ERRORE



Il grafico mostra che se gli studenti hanno un rendimento insufficiente (M1) o sufficiente (M2), non sono in grado di motivare le risposte (Y3) né di esprimersi sull'eventuale gravità dell'errore (Z3) della domanda 9. Se gli studenti tentano positivamente o negativamente di motivare la risposta (Y1 e Y2), oppure se si esprimono sulla gravità o meno dell'errore (Z1 e Z2) allora essi hanno un rendimento più che sufficiente (M3).

Grafo implicativo : C:\Users\Paola\Desktop\dati\TUTTI\ulyime - Cop99c95 90 85

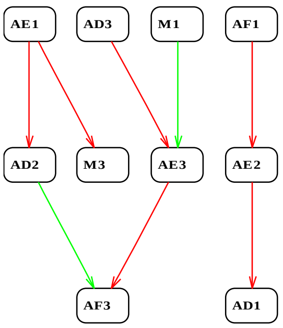
CHI RIESCE AD ESPRIMERSI SULLA GRAVITA' DELL'ERRORE?



Grafo implicativo : C:\Users\Paola\Desktop\Nuovo Foglio c99a95rc90li 85icrosoft Office Excel - Copia.csv

Analogamente al precedente grafico, abbiamo che se gli studenti hanno un rendimento insufficiente (M1), non sono in grado di motivare le risposte (AB3) – per la domanda 10 - né di esprimersi sulla gravità dell'errore (AC3). Se gli studenti si esprimono sulla gravità o meno dell'errore (AC1 e AC2) oppure sono in grado di motivare bene la risposta (AB1) allora essi hanno un rendimento più che sufficiente (M3).

MA PERCHÈ' C'E' UN ERRORE?

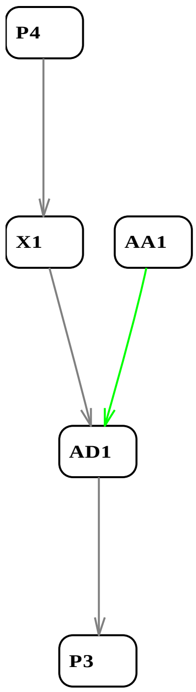


Grafo implicativo : C:\Users\Paola\Desktop\Nuo99 F95gl90d85ivoro di Microsoft Office Excel - Copia.csv

Se gli studenti affermano – nella domanda 11 - che l'errore è grave (AF1), non riescono a motivare esaurientemente la risposta relativa all'errore stesso (AE2). Come sopra, si evidenzia che se gli studenti hanno un rendimento insufficiente (M1), non sono in grado di motivare le risposte (AE3) né di esprimersi sulla gravità dell'errore (AF3). Inoltre, si ritrova che se gli alunni che sono in grado di motivare bene la risposta (AE1) allora essi hanno un rendimento più che sufficiente (M3).

MA PERCHÉ C'È UN ERRORE?

Le domande 9,10,11 hanno come sottintesa la visione dell'angolo come parte di piano. Si è quindi proceduto a mettere in relazione le variabili relative alla definizione conosciuta dall'allievo (P1-P7), con le domande 9,10,11 (ai livelli 99%, 90%, 85%). Non è emerso alcun legame tra coloro che hanno indicato l'angolo alternativamente a parte di piano (e cioè diversamente da P3 e P4) e coloro che hanno riscontrato errori nelle domande 9, 10 e 11 (X1, AA1, AD1). Quindi, possiamo escludere che gli allievi siano stati indotti a segnalare la presenza di errori, per discordanza tra definizione conosciuta e definizione proposta implicitamente.



Grafo implicativo : C:\Users\99a95\l90s85p\dati\TUTTI\tutti - Copia.csv

4.2.3 Analisi qualitativa dei dati

Nonostante la matematica sia considerata una materia astratta e inutile, la domanda n. **1** ha messo in evidenza che - contrariamente a quanto ritenuto nei luoghi comuni - molti allievi affermano di gradire lo studio della matematica (54% del campione).

La domanda **2** è stata posta con l'obiettivo di capire se l'evidenziazione degli errori raggiunge lo scopo della correzione. Il 52% dichiara che non sempre capisce le correzioni dei propri errori. Quindi, ala luce dei dati raccolti, sembra che il problema si riconduca alla comprensione degli argomenti proposti, piuttosto che ad una problematica posta in termini la matematica mi piace/non mi piace. Infatti, l'analisi delle implicazioni effettuata con il software CHIC, ha evidenziato alcuni legami tra le variabili *«la matematica non mi piace»,«non capisco le correzioni»* e il voto scolastico.

Le domande **3 e 4** si basano sulla riflessione che le modalità di correzione possono essere diverse e non tutte ugualmente accettate dagli allievi. Emerge un dato interessante: gli allievi indicano che la pratica comunicativa sociale è in grado di facilitare la comprensione dei propri errori. In particolare, con l'uso del software CHIC, è emerso che, qualsiasi siano le forme di correzione indicate come preferite, è sempre presente la correzione collettiva. Già diversi autori (Godino, Batanero, Ratford) avevano sottolineato l'importanza di interpretare in chiave sociologica l'attività in classe. Tuttavia, emerge nettamente che la richiesta di pratiche condivise, per la costruzione di conoscenza matematica, è una richiesta propria *degli allievi*. In definitiva, sembra che un approccio sociale restituisca alla disciplina il lato tipicamente umano, in quanto attività condivisa, discussa, comunicata, tramandata.

Interessante anche il dato di richiesta di correzione, limitata *«a dire le correzioni»,* piuttosto che correggere l'alunno. In sostanza, emerge il bisogno di una correzione svolta secondo modalità *«più leggere»*, che ponga più evidenza all'errore commesso piuttosto che all'alunno ha commesso l'errore. Altro dato importante è la necessità di ricevere ulteriori spiegazioni, strettamente connesso alla domanda precedente.

Le domande **5 e 6** nascono dalla riflessione che i ricordi - sia positivi che negativi – relativi a esperienze scolastiche in matematica, sembrano essere indelebili nella mente di molti allievi, incidendo sul rapporto con la disciplina. E' emerso che, pur se la percentuale di ricordi negativi non è altissima, a livello qualitativo, i danni risultano permanenti. Il più delle volte, infatti, si tratta di ricordi legati a umiliazioni e offese ricevute da alcuni docenti in presenza dei compagni di classe, anche in epoche più remote. Inoltre, dalle implicazioni emerse con CHIC, risulta evidente che coloro che hanno un ricordo negativo nella propria storia, sono spesso coloro che non raggiungono la sufficienza in matematica.

D’altro canto, la domanda **6** ha invece mostrato che molti alunni conservano per lungo tempo ricordi positivi; in particolare, la soddisfazione legata al raggiungimento di voti considerati particolarmente elevati è un’ulteriore fattore emotivo, che incide profondamente nella memoria dell’allievo. Questo dato pone importanti riflessioni sull’uso autoefficacia[11], come leva di potenziamento dell’ apprendimento e di un miglioramento del rapporto allievo-disciplina.

La domanda 7 dimostra che l’errore è vissuto in maniera più importante in matematica che in altre materie. Infatti, il 51% delle persone dichiarano di essere convinte in tal senso, fornendo come motivazione principale l’importanza dell’esecuzione di calcoli esatti.

Infatti, tra le definizioni di errore maggiormente identificate, nella domanda **8**, c’è quella di calcolo sbagliato (però meno presente rispetto a quella di sbaglio e simili). In particolare, la visione di una materia operazionale, ove l’attenzione viene concentrata sugli aspetti operazionali e procedurali che portano al risultato cercato, è concentrata nelle risposte dell’istituto tecnico e dei licei classici. Inoltre, coloro che vedono l’errore *«semplicemente»* come calcolo sbagliato e simili, sono soggetti che raggiungono solo la sufficienza. Tale percezione è nettamente inferiore presso gli istituti scientifici. Invece, coloro che riescono a vedere l’ errore come tentativo positivo di conoscenza (peraltro una percentuale bassissima del 6%) sono anche in grado di cogliere diversi aspetti legati alla definizione (si veda più avanti) di un concetto e, ovviamente, hanno un rendimento più che sufficiente.

La domanda **9** è stata posta per verificare l’assenza o la presenza della concezione fallibilista della conoscenza matematica tra le concezioni presentate (platonismo, formalismo, costruttivismo, fallibilismo). La concezione della matematica come materia fallibilista risulta essere presente al 21%; tuttavia tale percentuale è sovrastimata, in quanto molto spesso gli allievi con rendimento insufficiente hanno indicato questa risposta per sminuire l’importanza della matematica. Un dato molto interessante è la bassissima percentuale di coloro che vedono nella matematica una materia *«costruttivista»*. Tale visione, in questa fascia d’età, è quasi del tutto inesistente, mentre prevale la visione platonista. E’ molto probabile che tale prevalenza si riconduca ad una visione della matematica come materia avulsa dalla realtà umana, inaccessibile, collocata al di fuori del tempo e delle dimensioni quotidiane.

La domanda **10** aveva lo scopo di analizzare il ruolo dell’errore (secondo le convinzioni degli alunni) nella conoscenza matematica.

---

[11] *« L’autoefficacia è un processo di autovalutazione che non riguarda solo in numero delle abilità possedute, ma ciò che si crede di poter fare con i mezzi a propria disposizione in una varietà di circostanze diverse»*(Bandura A., 2000 Autoefficacia teorie e applicazioni- Edizioni Erickson Trento, pag 66).

Una buona parte del campione (43%) non ha alcuna opinione a riguardo, oppure ritiene che l'errore non sia esistito nel corso della storia matematica. In sostanza, emerge una grande ignoranza relativa alla necessità di *« rischio intellettuale»* per arrivare ad un dato traguardo. In particolare, il software CHIC ha messo in evidenza l'implicazione tra coloro che mostrano tale lacuna e gli studenti con rendimento insufficiente. Tale lacuna rischia di essere molto problematica: la matematica, infatti, da un certo livello in poi, richiede un graduale allontanamento da intuizioni spontanee per far spazio a grandezze, quantità e relazioni non immediate.

PARTE B

La domanda **1** risulta decisiva relativamente al ruolo della riflessione «metamatematica». In particolare, l'attenzione alle definizioni è importante, perché a esse è connessa la consapevolezza del ruolo e della natura della conoscenza matematica.

I risultati, invece, indicano una diffusa inconsapevolezza del ruolo centrale delle definizioni in matematica (soltanto il 20% ne dà una definizione accettabile), del loro irrinunciabile carattere di completezza e univocità. Lo studio della matematica è ridotto, in tal senso, ad una pura collezione di assiomi, definizioni, teoremi e dimostrazioni, formalmente esposti con la massima chiarezza.

Emerge un sentimento di non padronanza della propria esperienza (con convinzioni del tipo *«Se non ci penso, so cos'è.. ma appena ci penso non lo so più»* [12]) , accompagnato da uno stato di impotente passività. In particolare, con l'ausilio di CHIC è emerso che i soggetti che riescono a dare una soddisfacente risposta alla domanda *«che cosa è una definizione?»,* hanno anche la capacità di riflettere sull'esistenza di possibili errori nella storia della matematica e, ovviamente, hanno un buon rendimento scolastico; all'opposto, coloro che hanno un rendimento insufficiente non sanno affatto spiegare cosa sia una definizione (e abbiamo visto ritengono che la storia non presenti falle).

Le domande **2 e 3 e 4** tendono hanno un duplice scopo. Da un lato si vuole conoscere l'atteggiamento mentale degli allievi, di fronte alla pluralità di definizioni per un medesimo concetto. La seconda finalità è quella di evidenziare e misurare un eventuale propensione a ritenere errato – anche se di fatto corretto - una definizione di angolo, in quanto diversa da quella conosciuta.

Infatti, *« Per i matematici, una definizione vive di vita propria. A parte la sua utilità superficiale come abbreviazione che consente di risparmiare parole che dovrebbero essere ripetute ogni volta che un concetto viene citato, una definizione incorpora un concetto che emerge da molti esempi specifici in esame. Tra i compiti di un matematico ci sono quelli di formulare definizioni utili e di delineare le relazioni tra le varie definizioni. Ma per gli studenti se non viene dedicata sufficiente attenzione alle definizioni, essi considereranno una definizione come qualcosa di misterioso e*

[12] Si tratta della risposta di S.Agostino per definire il tempo.

incomprensibile, quindi, solo da memorizzare per superare l'esame. Scrisse Poincarè "Che cosa è una buona definizione'? Per il filosofo e lo scienziato è una definizione che si applica a tutti gli oggetti che vengono definiti, e solo ad essi […] in didattica non è così; è una definzione che può essere compresa dagli allievi,[…]Come possiamo trovare della logica e il nostro desiderio di comprendere il posto della nuova nozione nello schema generale della scienza, il nostro desiderio di pensare per immagini? Spesso non troveremo ciò, e questo è il motivo per cui una definizione non basta; deve essere preparata e deve essere giustificata [Poincarè, 1904] »(Man-Kneung Siu (2009)).

Innanzitutto, pochissimi affermano che le definizioni presentate per il concetto di angolo sono tutte corrette (8%). In particolare una buona parte del campione (81%) non riesce ad esprimersi in tal senso e l'11% degli alunni dichiara che le definizioni proposte non sono tutte corrette. Risulta bassissima la percentuale di coloro che mostrano un atteggiamento propenso a tentare un confronto fra le diverse definizioni, allo scopo di mettere in evidenza punti di contatto e divergenze tra le diverse proposte. Si conferma la netta presenza di un sentimento generale di non padronanza della propria esperienza di studio.

La domanda **5** è una domanda di controllo rispetto alla domanda 10 della parte A. Essa, aveva lo scopo di verificare – nel caso specifico dell'angolo - un'eventuale consapevolezza degli allievi in merito alle concezioni dell'evoluzione dei concetti matematici ed allo sviluppo della matematica. Come per la domanda 10, circa la metà del campione (47%) afferma che l'evoluzione di un concetto *«angolo»* è stata storicamente semplice o non si esprime in tal senso. Molto spesso, la motivazione a tale risposta si riconduce alla supposta semplicità del concetto in questione.

La domanda **6** vuole far emergere il concetto di angolo, senza alcun richiamo alla matematica, collocandolo nell'ambito del dibattico storico- filosofico descritto nella parte iniziale questa tesi. Con questo quesito si è inteso formulare una domanda che inducesse a risposte assolutamente extrascolastiche, facendo emergere il più possibile la rappresentazione spontanea del concetto di angolo[13]. La domanda si è rivelata particolarmente interessante, in quanto ha messo in evidenza una

[13] Ci riferiamo a «quelle rappresentazioni che l'allievo propone come sue proprie rappresentazioni dell'oggetto; tali rappresentazioni possono aver origine scolastica (rielaborazione personale di idee emerse in aula, per esempio in situazioni ludiche o non didattiche o didattiche; oppure da contesti privati extrascolastici, di vita quotidiana). Esse dovrebbero essere intese come rappresentazioni scelte non sulla base della volontà di soddisfare le richieste l'insegnante, che spingono l'allievo a basarsi su quanto stabilito all'interno della classe (comunità di pratiche) nel corso di rappresentazioni di un oggetto specifico, né sulla base di una libera scelta (in questo caso si ipotizza l'assenza di *metapratiche* dell'allievo; D'Amore, 2005) effettuata su una vasta gamma di rappresentazioni proposte sempre dall'insegnante in classe. Le rappresentazioni di questo secondo tipo sono quelle dettate dalla volontà di comunicare all'esterno modelli interni dell'oggetto in questione che lo studente possiede già al momento della loro vocazione in

eterogeneità nella scelta della categoria dell'angolo da parte degli allievi, ricorrendo a idee personali non aderenti alla precedente domanda sulla definizione scolastica di angolo. Il software CHIC ha evidenziato un dato già atteso: l'esistenza d' implicazioni solo tra le definizioni preferite e studiate (specialmente parte di piano, coppia di semirette). Non è invece emerso alcun collegamento con le *«categorie filosofiche»*. Poiché la categorizzazione filosofica dell'angolo ha avuto risposte molto eterogenee, ciò vuol dire che la definizione studiata a scuola non più è presente, quando l'angolo viene collocato in un discorso extra-matematico. Ciò a riprova del fatto che gli alunni presentano un personale modo di vedere l'angolo, distinto da quello scolastico. Ciò che possiamo dire, con l'ausilio di CHIC, ponendo anche l'attenzione al voto in matematica, è che

- coloro che hanno una votazione più che sufficiente, si sono riferiti a quella categoria (quantità) che è risultata maggiormente usata a scuola. Ciò è avvenuto, molto probabilmente, perché *hanno studiato* proprio quella definizione;
- coloro che hanno *«paura di esprimere la propria opinione»,* sono da individuare tra quelli che hanno un rendimento insufficiente;
- coloro che hanno una votazione sufficiente, pur non avendo paura di esprimersi, indicano le altre categorie - quantità e relazione – . Questi soggetti riescono a dare una propria *«visione»* del concetto angolo, perché *conoscono meno* la definizione scolastica.

I risultati della presente ricerca dimostrano il permanere – nella scuola secondaria - dell'atteggiamento rilevato con lo studio D'Amore-Marazzani (2008) nell'ambito della scuola primaria: *«Anche gli intervistati che avevano trattato l'oggetto angolo a scuola, in una prima fase dell'intervista, abbiano fatto ricorso alla definizione data dall'insegnante riproponendo le stesse parole, ma immediatamente dopo hanno oggettivato l'idea personalmente proponendo varie descrizioni.[…] Dato un oggetto matematico (come l'angolo), non è detto che vi sia di esso una sola definizione; anzi, di solito ci sono varie definizioni; anche quando una di esse si impone, per diversi motivi, le altre non spariscono. Abbiamo dimostrato che tutte le definizioni che la storia ha creato sono contemporaneamente presenti, a livello intuitivo, fra gli studenti intervistati: a fronte di un oggetto matematico unico, si vede come esistano varie interpretazioni e vari modelli che tendono a rappresentare caratteristiche di quell'oggetto»*.

---

aula, da parte dell'insegnante. Gli allievi, in questo caso, non conoscono le rappresentazioni condivise dalla comunità di pratiche (intesa in senso generale: la società, non solo la classe) e non possono riferirsi a rappresentazioni proposte dall'insegnante (quindi alla classe intesa come micro-società che condivide prassi; tuttavia essi possono fare, e naturalmente fanno, riferimento alle esperienze esterne, di vita vissuta quotidiana). Gli allievi avvertono allora la necessità di comunicare all'esterno il modello interno che si sono costruiti spontaneamente a proposito dell'oggetto matematico di riferimento».

La domanda **7** è stata impostata per studiare la capacità dei ragazzi - di fronte ad una misura per loro inusuale – di inquadrare l'angolo in maniera alternativa a quella della geometria elementare. Essa pone un evidente problema di contratto didattico: i ragazzi sono abituati a lavorare in contesti esplicitamente assegnati, portandoli a scelte obbligate. La domanda costringe il ragazzo a inquadrare l'argomento angolo in un contesto univocamente definito (geometria elementare, angolo generalizzato…). La capacità di inquadrarlo come angolo generalizzato è presente solo in allievi che hanno già affrontato l'argomento trigonometria a scuola; tale capacità è del tutto inesistente, laddove i ragazzi non hanno affrontato argomenti di trigonometria.

Le domande **8 - 11 –** appositamente formulate con risposta del tipo vero o falso - sono volte a far emergere convinzioni sugli errori, e sulla gravità di essi. Le risposte alle domande 8-11 hanno messo in evidenza risultati scadenti dal punto di vista cognitivo, a livello generalizzato, senza distinzione per rendimento scolastico. Diverse risposte non date o non giustificate lasciano pensare che esse siano casuali e indice di notevoli carenze sul concetto d'angolo.

Tuttavia, con l'ausilio di CHIC abbiamo visto che, laddove i ragazzi con rendimento insufficiente esprimono il proprio parere sulla gravità dell'errore (domanda 8) attribuiscono a quell'errore una certa gravità. Ciò non accade nelle risposte degli alunni con rendimento più che sufficiente, in quanto gli stessi non ravvisano gravità in caso di errore.

Le domande **9 e 10** – molto più dense di richieste concettuali - hanno evidenziato risultati scadenti sia tra i ragazzi con rendimento insufficiente che con rendimento più che sufficiente. Il software CHIC ha però evidenziato che, se una differenza tra le due tipologie di alunni c'è, essa non è ravvisabile nelle conoscenze possedute (scadenti anche nel caso di molti allievi ritenuti ben preparati), ma in un atteggiamento più fiducioso e pronto a fornire o a tentare una risposta da parte degli allievi *«più capaci»,* rispetto a quelli ritenuti *«meno capaci»*. E' inoltre emersa una generale tendenza a considerare un errore come grave rispetto alla catalogazione non grave.

Quest'ultimo aspetto è particolarmente rilevante nella domanda n. **11**, dove lo strumento CHIC ha evidenziato che coloro che si esprimono in merito alla gravità dell'errore, non riescono però a motivare l'errore stesso. Tale risultato conferma un atteggiamento di condanna e eccessiva importanza nei confronti degli errori, percepiti come un qualcosa di assolutamente proibito e da sanzionare[14].

Si precisa che le domande 9, 10 e 11 presupponevano come implicita la concezione dell'angolo come parte di piano. A rigore, l'evidenziazione di eventuali errori in tali domande, poteva nascere da una diversa visione di angolo dell'allievo, rispetto a quella implicitamente proposta. Per

[14] Si precisa che soltanto in rarissimi casi – 12 in totale – la motivazione dell'errore segnalato si riconduceva agli angoli considerati privati dei lati.

verificare ciò, si sono messe in relazione le variabili relative alla definizione indicata come conosciuta dall'allievo (P1-P7), con le domande in questione (ai livelli 99%, 90%, 85%). Non è emerso alcun legame tra coloro che hanno indicato l'angolo alternativamente a parte di piano (e cioè diversamente da P3 e P4) e coloro che hanno riscontrato errori nelle domande 9, 10 e 11 (X1, AA1, AD1). Possiamo quindi affermare che, se l'allievo ha ravvisato la presenza di errori (X1, AA1 e AD1) nelle affermazioni sottopostegli, ciò non è avvenuto – banalmente - per una diversa visione dell'angolo.

Un problema ricorrente nelle risposte dei ragazzi si riconduce a grosse lacune di linguaggio, con uso improprio ed errato di termini geometrici (angolo esterno, interno, ottuso, acuti, opposto), oltre a grosse difficoltà di notazione. Particolari problemi emergono per il termine *«intersezione»*.

La risposta 10 merita una riflessione ulteriore. E' infatti emersa una propensione alla lettura distratta che ha portato, ovviamente, alla perdita di particolari e ad una elevata percentuale di risposte errate. I ragazzi hanno mostrato una scarsa capacità di concentrazione, incapacità di soffermarci sul testo, una lettura veloce e superficiale.

Da ultimo, si evidenzia come la molteplicità delle relazioni tra le diverse convinzioni rilevate con CHIC comporta la conseguenza che le convinzioni degli allievi devono essere analizzate in un quadro strutturale organicamente formato (Di Martino, 2001).

4.2.4 Falsificazione ipotesi

Nel presente paragrafo si procede a falsificare le ipotesi della presente tesi, riconducendoci alle implicazioni riscontrare con il software CHIC.

H1 Le convinzioni sugli errori in matematica e sull'evoluzione della conoscenza matematica interferiscono con l'apprendimento della matematica.

H1.1 Le differenze e le analogie riscontrabili tra gli alunni con buon rendimento e scarso rendimento in matematica, si ritrovano:

- ***nell'analisi delle convinzioni relative agli errori e dell'approssimazione della conoscenza:***

Se *l'allievo ha un buon rendimento in matematica*	**allora** *riesce a vedere l'errore come una risorsa*
M3	J10
Se *l'allievo ha uno scarso rendimento in matematica*	**allora** *percepisce l'errore come qualcosa di negativo*
M1	J11 J16

Se *l'allievo ha uno scarso rendimento in matematica*	***allora*** *è incapace di immaginare lacune e/o errori nella storia della matematica*
M1	L6L7L8L9

- ***nell'attribuzione di gravità agli errori:***

Se *l'alunno – riscontrando un errore - lo giudica quasi sempre "grave"*	***allora*** *il suo rendimento è insufficiente*
W1	*M1*
Se *l'alunno – riscontrando un errore - tende a giudicarlo "non grave"*	***allora*** *il suo rendimento è più che sufficiente*
W2	*M3*

- ***nella corretta comprensione dei propri errori:***

Se *l'allievo ha rendimento più che sufficiente*	***allora*** *capisce sempre le correzioni dei propri errori*
M3	*B1*
Se *l'allievo non capisce mai o quasi le correzioni dei propri errori*	***allora*** *ha rendimento insufficiente*
B4 B5	*M1*

- ***nei ricordi relativi agli errori della propria storia scolastica:***

Se *l'allievo ha ricordi negativi nella storia personale dello studio della matematica*	***allora*** *ha un rendimento insufficiente in matematica*
G1	*M1*

Se *l'allievo ha rendimento sufficiente o più sufficiente*	***allora*** *non ha ricordi negativi nella storia personale dello studio della matematica*
M2 *M3*	*G3* *non presente G1*

- ***nella capacità di riflessione «metamatematica» (nel caso del termine definizione):***

Se *l'allievo ha rendimento insufficiente*	**allora** *non sa cosa è e a cosa serve una definizione*
M1	*N1N2N3*
Se *conosce il significato e lo scopo di una definizione*	**allora** *ha rendimento più che sufficiente*
N4	*M3*

- ***nella capacità di «rischiare intellettualmente», ovvero di mettere in gioco le proprie conoscenze:***

Se *allievo non ha difficoltà ad esprimere il proprio parere sulla gravità di un errore*	**allora** *ha rendimento più che sufficiente*
Z1 Z2 AC1 AC2	*M3*
Se *allievo ha difficoltà ad esprimere il proprio parere sulla gravità di un errore*	**allora** *ha rendimento appena sufficiente*
Z3 AC3	*M1M2*

H2 In assenza di contesto scolastico, gli alunni evocano concetti matematici diversi da quelli appresi; tali concetti si riconducono alle approssimazioni riscontrate nell'evoluzione del concetto matematico **(nel caso del concetto di angolo):**

Se *l'allievo in contesto scolastico definisce l'angolo parte di piano*	**allora** *nel contesto extra - scolastico non si riferirà all'angolo come quantità*
P3	Non ci sono implicazioni (in particolare S1)
Se *l'allievo in contesto scolastico definisce l'angolo "differenza direzione"*	**allora** *nel contesto extra - scolastico non si riferirà all'angolo come relazione*
P2	S2

4.2.5 Risposte alle domande del paragrafo 4.1

In questo paragrafo si forniscono le risposte alle domande della presente tesi:

- *Gli studenti hanno consapevolezza del ruolo svolto dall'errore nell'apprendimento matematico?*

Le convinzioni sugli errori mostrano notevoli differenze tra alunni con buon rendimento e alunni con scarso rendimento. Gli alunni con scarso rendimento hanno mostrato di percepire l'errore come qualcosa di negativo; al contrario, gli alunni con buon rendimento mostrano un approccio più positivo, essendo capaci di usare l'errore anche come risorsa. In particolare, gli alunni con difficoltà in matematica definiscono l'errore come qualcosa da censurare. Gli alunni con buon rendimento sono invece capaci di vedere l'errore come risorsa per la conoscenza. Inoltre, spesso le correzioni non vengono capite dagli alunni e tale aspetto incide nettamente sul piacere di fare matematica. In sostanza, soltanto coloro che *sempre* capiscono le correzioni dei propri errori sono in grado si studiare la materia con atteggiamento positivo. Infine, è stato riscontrato che tutti gli alunni, indipendentemente dal rendimento, preferiscono forme di correzione collettiva; gli alunni in difficoltà richiedono una correzione più puntuale, improntata ad una maggiore attenzione *personale.* Gli alunni con scarso rendimento hanno mostrato un atteggiamento di maggiore condanna degli errori, quando riescono o credono di riconoscerli. Infine, gli alunni con difficoltà in matematica hanno ricordi sia positivi che negativi rispetto agli errori in matematica. L'importanza di tali ricordi non è emersa negli allievi con buon rendimento.

- *Gli studenti sono in grado di immaginare che lo sviluppo dei concetti matematici ha presentato eventuali momenti di approssimazioni e/o lacune della conoscenza?*

Non tutti. Gli alunni con scarso rendimento non riescono a immaginare alla matematica come materia evolutasi nel tempo, con momenti di approssimazione e ostacoli della conoscenza.

- *Esiste una relazione tra l'approssimazione della conoscenza avvenuta nella storia della matematica e le convinzioni degli allievi sulla matematica?*

Si. I concetti matematici evocati in ambito extra-scolastico sono diversi da quelli evocati in ambito scolastico. In ambito extra-scolastico, gli allievi mostrano concezioni simili a quelle relative all'evoluzione del concetto in questione.

4.3 Seconda indagine sperimentale

Il paragrafo precedente si è concluso mettendo in evidenza che le convinzioni degli alunni sugli errori in matematica e sull'evoluzione della conoscenza matematica interferiscono con l'apprendimento della matematica.

Nella seconda parte di questa ricerca, ci siamo chiesti se è possibile incidere positivamente sulle convinzioni degli allievi, per favorire un'evoluzione delle convinzioni verso una visione «*significativa*» della matematica in quanto scienza. E' nata, quindi, l'ulteriori domanda di ricerca:

- *E' possibile costruire percorsi formativi, alternativi a quelli tradizionalmente offerti nella scuola secondaria, che possano incidere positivamente sulle concezioni relative alla matematica?*

Anche questa volta, riconducendoci all'idea che esista un'analogia tra filogenesi (sviluppo della specie) ed ontogenesi (sviluppo dell'individuo), ove lo sviluppo storico ripropone in grande lo sviluppo del pensiero nell'individuo, abbiamo formulato la seguente ipotesi di ricerca:

- *H1. Le convinzioni degli allievi sull'evoluzione della conoscenza matematica possono essere modificate, introducendo argomenti di particolare rilievo storico-epistemologico nel percorso curricolare degli allievi.*

Per verificare la suddetta ipotesi abbiamo realizzato una sperimentazione didattica, durante l'anno scolastico 2009/2010, rivolta ad un campione di 106 allievi delle classi III, IV, delle seguenti scuole secondarie di secondo grado:

- Liceo Scientifico Statale "Maria Montessori" di Porretta Terme (BO);
- Liceo Scientifico Statale "Tassoni" di Modena;
- Liceo Classico Statale "Dante Alighieri" Ravenna.

E' stato preparato un «*percorso*» di formazione – della durata complessiva di due ore - relativo alle geometrie non euclidee che, partendo dalla considerazione i postulati di Euclide e dalle critiche storiche mosse al quinto di tali postulati, nonché dall'applicazione alla teoria della relatività, ha analizzato criticamente tale evoluzione storica, portando gli studenti a riflettere sul ruolo della conoscenza matematica.
La scelta dell'argomento (geometrie non euclidee) è nata in funzione dell' affascinante itinerario storico e logico di tali geometrie, che hanno mutato il concetto di verità matematica, con conseguenze filosofiche di grandissima portata nel pensiero scientifico.
Abbiamo visto, nel capitolo 2, che il postulato delle parallele, è divenuto importante nella storia della matematica, e più in generale del pensiero filosofico-scientifico, per essere stato la base delle prime ipotesi non euclidee e, conseguentemente, di un radicale mutamento nella concezione della matematica. Dal punto di vista psicologico le difficoltà d'intuizione di questo postulato sono imputabili alla complessità della sua elaborazione dei sensi che ne sono coinvolti: il tatto e la vista.

Esso richiede una consapevole educazione ai concetti matematici, per le implicazioni relative all'infinito e l'impossibilità di una verifica sperimentale.

Lo strumento di indagine utilizzato è stato un questionario aperto – stilato in due versioni diverse, ma avente contenuto identico. In una prima fase, un campione pilota è stato chiamato a rispondere e commentare diverse versioni dei due questionari, circa le difficoltà e le ambiguità incontrate. I questionari definitivi sono stati consegnati agli alunni, esplicitando che la ricerca non era in alcun modo collegata a finalità scolastico-valutative. La prima versione è stata consegnata antecedentemente alla trattazione dell'argomento geometrie non euclidee, mentre la seconda versione è stata consegnata successivamente alla presentazione dell'argomento in questione. I protocolli sono stati compilati e firmati da ogni allievo, per poter mettere in relazione le risposte date da ognuno e rilevarne eventuali cambi di convinzione, successivamente alla trattazione dell'argomento. Il due questionari – che si riportano di seguito - presentavano 6 domande con risposta di tipo chiuso, con successiva richiesta di motivazione, contenenti alcune considerazioni sulle caratteristiche e il significato della conoscenza matematica.

In una tabella a doppia entrata *«alunni/risposte»* è stato indicato - per ogni alunno - il valore 1, in caso di affermazione condivisa e il valore 0, per le strategia non condivisa. I dati rilevati sono stati analizzati quantitativamente, utilizzando grafici e statistiche.

Questionario (prima versione)

1. Rispondi alla seguente domanda: *«La matematica esiste indipendentemente dall'uomo, come le montagne e i mari, oppure è una creazione interamente umana? »*

□ la matematica è una creazione umana;

□ la matematica esiste indipendentemente dall'uomo.

Motiva la risposta precedente

2. I concetti matematici sono del tipo:

□ vero/falso;

□ coerente/incoerente.

3. Leggi la seguente affermazione ed esprimi il tuo parere, esplicitando se la condividi o meno: *«La conoscenza matematica è di tipo definitivo e non è soggetta ad alcuna revisione».*

□ condivido □ non condivido

Motiva la risposta precedente

4. Leggi la seguente affermazione ed esprimi il tuo parere, esplicitando se la condividi o meno*:*
« Fattori socio-culturali e concettuali hanno influenzato da sempre lo sviluppo del sapere umano. Ciò NON accade per il sapere matematico, in quanto esso sviluppa concetti astratti e atemporali».

□ condivido □ non condivido

Motiva la risposta precedente

5. Leggi la seguente affermazione ed esprimi il tuo parere, esplicitando se la condividi o meno: *«Alcuni oggetti dello scibile umano (nuove teorie, nuovi modelli, nuovi studi) sono stati talmente rivoluzionari da costituire ostacolo nella sua accettazione da parte della comunità scientifica (si pensi, ad esempio, alla rivoluzione copernicana). Tale impedimento NON si è mai presentato per lo sviluppo delle conoscenza matematiche, in quanto esse sono sempre basate sulla totale accettazione delle conoscenze precedenti ».*

□ condivido □ non condivido

Motiva la risposta precedente

6.Leggi la seguente affermazione ed esprimi il tuo parere, esplicitando se la condividi o meno:
«Alcuni concetti sono legati solo alla nostra intuizione; in tal caso si tratta di un'intuizione di esseri limitati e condizionati dalla loro natura fisica e biologica e dalla loro situazione particolare nel mondo. Ciò NON accade per i concetti matematici, in quanto essi hanno valore universale».

□ condivido □ non condivido

Motiva la risposta precedente

Questionario (seconda versione)

1. Rispondi alla seguente domanda:

«Il lavoro del matematico è quello di uno scopritore, di chi individua e studia oggetti, fatti, proprietà già dotati di una propria esistenza, oppure il matematico introduce e crea autonomamente la matematica »

□il matematico è uno scopritore di oggetti esistenti;

□ il matematico introduce e crea la matematica.

Motiva la risposta precedente

2. La conoscenza matematica permette di evidenziare se un concetto è del tipo:

□ vero/falso; □coerente/incoerente.

3. Leggi la seguente affermazione ed esprimi il tuo parere, esplicitando se la condividi o meno: *«La conoscenza matematica è un insieme immutabile di verità ».*

□condivido □non condivido

Motiva la risposta precedente

4. Leggi la seguente affermazione ed esprimi il tuo parere, esplicitando se la condividi o meno:

«La conoscenza umana è legata alle attività degli individui e ciò si collega strettamente al contesto sociale e culturale. Ciò NON accade per il sapere matematico, in quanto esso sviluppa concetti astratti e atemporali».

□condivido □non condivido

Motiva la risposta precedente

5. Leggi la seguente affermazione ed esprimi il tuo parere, esplicitando se la condividi o meno:

« Alcuni concetti scientifici particolarmente rivoluzionari (ad esempio, la teoria della relatività) hanno segnato la comunità scientifica attraverso un mutamento radicale, salto discontinuo, rottura con il passato. Tale situazione NON si è mai presentato per lo sviluppo delle conoscenza matematiche, in quanto esse sono sempre basate sulla totale accettazione delle conoscenze precedenti » .

□condivido □non condivido

Motiva la risposta precedente

6.Leggi seguente affermazione ed esprimi il tuo parere, esplicitando se la condividi o meno:

«I concetti geometrici euclidei sono eventualmente legati solo alla nostra intuizione dello spazio; si tratta di un'intuizione di esseri limitati e condizionati dalla loro natura fisica e biologica e dalla loro situazione particolare nel mondo».

□condivido □non condivido

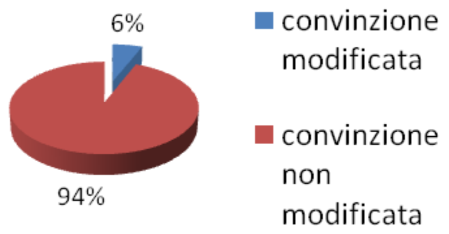
Motiva la risposta precedente

4.3.1 Analisi quantitativa dei dati

Di seguito si riportano i grafici relativi ai cambi di convinzioni rilevati successivamente alla presentazione del percorso sulle geometrie non euclidee, limitatamente ai soggetti che hanno dichiarato le seguenti convinzioni[15]:

- la matematica esiste indipendentemente dall'uomo (visione platonista della matematica);
- i concetti matematici sono del tipo vero/falso (piuttosto che coerente/non coerente);
- la conoscenza matematica non è passibile di revisioni storiche;
- i fattori socio-culturali non influenzano il sapere matematico;
- non esistono cambiamenti rivoluzionari all'interno dello sviluppo di conoscenze matematiche;
- la natura fisico-biologica umana non costituisce limite alla conoscenza matematica.

"La matematica esiste indipendentemente dall'uomo, come le montagne e i mari, oppure è una creazione interamente umana?"

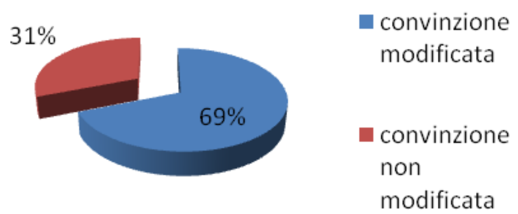


OSSERVAZIONI
Il grafico mostra che la visione platonista della matematica è fortemente radicata negli allievi e non risulta modificata in maniera rilevante. Soltanto il 6% risulta aver modificato le proprie idee in tal senso.

"I concetti matematici sono del tipo:

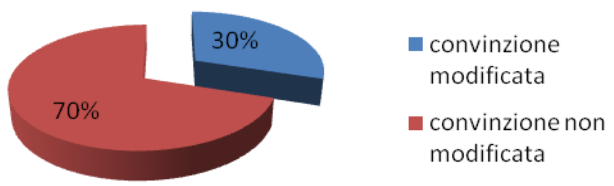
❑ vero/falso; ❑ coerente/incoerente.

OSSERVAZIONI
Il grafico mostra che il progetto didattico ha inciso positivamente sulle convinzioni degli allievi. Una buona parte del campione – 69% - ha modificato le proprie opinioni sulla natura dei concetti matematici.



[15] Per semplificare la lettura dei dati, si riportano soltanto le domande della prima versione del questionario.

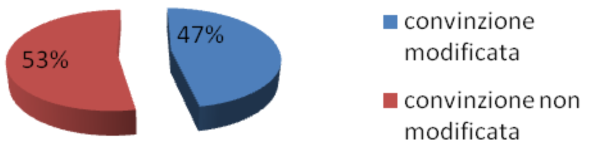
“La conoscenza matematica è di tipo definitivo e non è soggetta ad alcuna revisione”.



OSSERVAZIONI

Il cambio di convinzione non appare particolarmente rilevante. La matematica continua ad apparire una scienza “statica” e soltanto il 30% degli allievi risulta aver variato le proprie convinzioni.

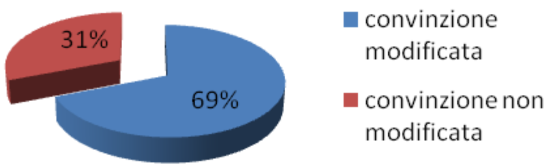
““Fattori socio-culturali e concettuali hanno influenzato da sempre lo sviluppo del sapere umano. Ciò NON accade per il sapere matematico, in quanto esso sviluppa concetti astratti e atemporali”.



OSSERVAZIONI

Il grafico mostra che quasi la metà del campione ha modificato il proprio punto di vista, riconoscendo l’influenza di fattori socio-culturali sul sapere matematico.

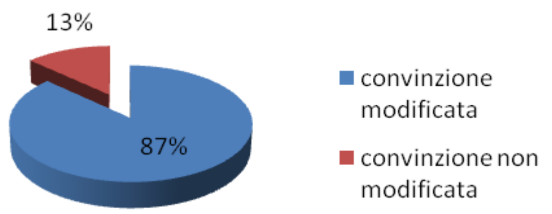
“Alcuni oggetti dello scibile umano (nuove teorie, nuovi modelli, nuovi studi) sono stati talmente rivoluzionari da costituire ostacolo nella sua accettazione da parte della comunità scientifica (si pensi, ad esempio, alla rivoluzione copernicana). Tale impedimento NON si è mai presentato per lo sviluppo delle conoscenza matematiche, in quanto esse sono sempre basate sulla totale accettazione delle conoscenze precedenti”



OSSERVAZIONI

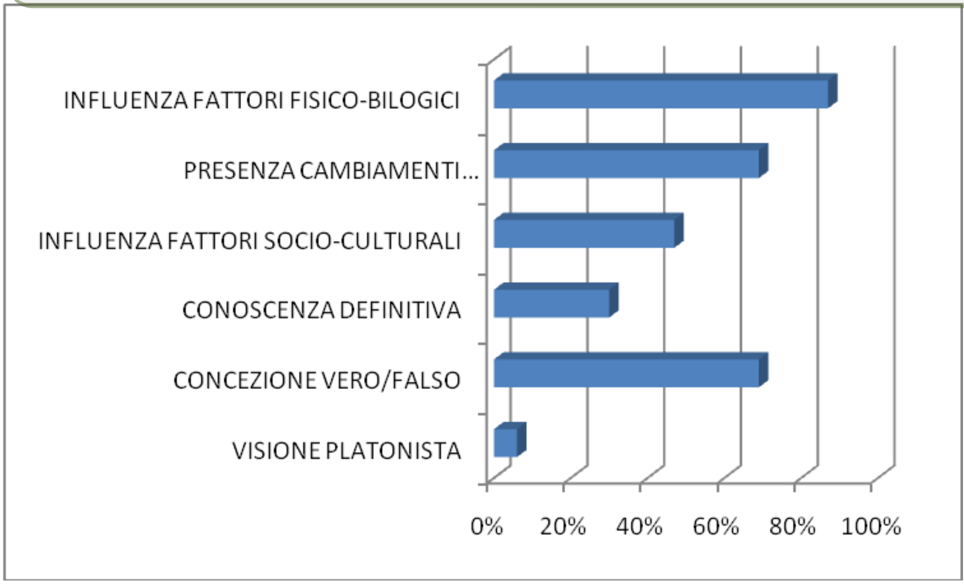
Il grafico mostra che una buona parte del campione – 69% - ha rivisto le proprie posizioni, ammettendo che alcune conoscenze matematiche possano essersi affermate con difficoltà ed ostacoli.

““Alcuni concetti sono legati solo alla nostra intuizione; in tal caso si tratta di un’intuizione di esseri limitati e condizionati dalla loro natura fisica e biologica e dalla loro situazione particolare nel mondo. Ciò NON accade per i concetti matematici, in quanto essi hanno valore universale”.



OSSERVAZIONI
Il grafico mostra un’elevata percentuale di allievi – 87% - che, modificando le proprie opinioni, arriva ad ammettere che i limiti fisico-biologici dell’uomo possono costituire un limite per la conoscenza matematica.

GRAFICO DI TUTTE LE RISPOSTE MODIFICATE



4.3.2 Analisi qualitativa dei dati

Abbiamo visto che, dal punto di vista quantitativo, fatta eccezione per la visione platonista della matematica, la trattazione delle geometrie non euclidee, generalmente, ha inciso favorevolmente sulle convinzioni degli alunni. I ragazzi, successivamente alla trattazione - mediamente nel 70% dei casi - hanno mostrato di aver preso coscienza dei seguenti fattori (in ordine decrescente):

- la natura fisico-biologica umana costituisce limite alla conoscenza matematica;

- la conoscenza matematica è passibile di revisioni storiche;
- i concetti matematici sono del tipo coerente/non coerente (piuttosto che vero/falso);
- esistono cambiamenti rivoluzionari all'interno dello sviluppo di conoscenze matematiche;
- i fattori socio-culturali influenzano il sapere matematico.

Tuttavia, la concezione della matematica platonista risulta essere fortemente radicata negli allievi, ciò in accordo con i risultati della prima parte della presente ricerca.

Dal punto di vista qualitativo, i dati di questa ricerca, hanno anche confermato che, laddove gli allievi hanno una solida preparazione matematica, sono raramente presenti convinzioni da modificare. Infatti, una delle classi del campione, formata da allievi con buona preparazione matematica, ha riportato un numero molto basso di convinzioni passibili di modifica.

Di seguito si riportano le risposte di alcuni allievi dell'intero campione, che attestano variazioni radicali di opinioni, successivamente alla trattazione delle geometrie non euclidee. Tutte le risposte denotano una iniziale diffusa idea della matematica come «*scienza morta*» con convinzioni distorte sulla materia e di conseguenza distorsioni nell'apprendimento stesso.

LA CONOSCENZA MATEMATICA NON E' PASSIBILE DI REVISIONE STORICA

DICHIARAZIONI DEGLI ALLIEVI

PRIMA DELLA SPERIMENTAZIONE	*DOPO LA SPERIMENTAZIONE*
"La conoscenza di base della matematica è rimasta invariata fin dall'antichità"	*"Da affermazioni dimostrate possono nascere altre intuizioni che portano a formulare altre ipotesi e a giungere ad altre tesi"*
"La matematica come materia scolastica prevede l'utilizzo di regole fisse e non modificabili"	*"La matematica è un dibattito continuo ed è soggetta a cambiamenti"*
"Penso che la matematica sia definitiva perché i teoremi e le leggi che ne stanno alla base non possono essere cambiati"	*"[la matematica] non è immutabile perché su un concetto matematico si possono scoprire diverse sfaccettature che smentiscono le precedenti verità"*
"La matematica è e non può essere diversa"	*"La conoscenza matematica non è di tipo definitivo perché a mio parere può essere ampliata e corretta"*
"La matematica è completa e non ha bisogno di revisioni"	*"Gli stessi teoremi che noi studiamo oggi sono sicuramente stati riveduti in passato"*
"Se una cosa matematica può essere dimostrata e dà risultati reali e plausibili significa che è definitiva, c'è e non cambia"	*"La conoscenza matematica è un insieme di verità ma mutabile. Le varie teorie possono essere modificate"*
"La conoscenza matematica è basata su concetti veri concreti e verificabili pertanto è un insieme di verità"	*"La conoscenza matematica di ogni individuo può essere sempre aggiornata e perfezionata"*

LA NATURA FISICO-BIOLOGICA UMANA NON COSTITUISCE ALLA CONOSCENZA UMANA

DICHIARAZIONI DEGLI ALLIEVI

PRIMA DELLA SPERIMENTAZIONE	*DOPO LA SPERIMENTAZIONE*
"La conoscenza di base della matematica è rimasta invariata fin dall'antichità"	*"Da affermazioni dimostrate possono nascere altre intuizioni che portano a formulare altre ipotesi e a giungere ad altre tesi"*
" I concetti matematici sono così e non possono essere altrimenti"	*"Si tratta di una intuizione causata dalla situazione diverse in cui ti trovi"*
" La matematica ha regole universali perciò è riconosciuta da tutto il mondo ed ha valore unico"	*"Tutte le scoperte sono state condizionate dalla situazione in cui si trovava l'uomo in quel momento e così è anche per la matematica"*
" La matematica è una sola per tutti è universale e quindi non è influenzata dagli aspetti fisico-biologici"	*"Ogni essere è un po' condizionato da ciò che lo circonda"*
"In qualsiasi parte del mondo 2+2 farà sempre 4 quindi è un concetto universale"	*"L'ambito culturale in cui un individuo si forma condiziona notevolmente il suo pensiero"*
"Le situazioni sono diverse culturalmente ma ciò non va ad influire sui ragionamenti matematici"	*" Euclide studiò solamente ciò che poteva vedere e verificare"*
"I concetti matematici esistono indipendentemente dall'uomo e non sono condizionati dall'intuizione di esseri limitati"	*"La geometria euclidea discende direttamente dalla nostra capacità di osservazione e non naturalmente siamo limitati"*

NON ESISTONO CAMBIAMENTI RIVOLUZIONARI ALL'INTERNO DELLO SVILUPPO DELLE CONO SCENZE MATEMATICHE

DICHIARAZIONI DEGLI ALLIEVI

PRIMA DELLA SPERIMENTAZIONE	*DOPO LA SPERIMENTAZIONE*
"La conoscenza di base della matematica è rimasta invariata fin dall'antichità"	*"Da affermazioni dimostrate possono nascere altre intuizioni che portano a formulare altre ipotesi e a giungere ad altre tesi"*
"Essendo una sola la matematica per fare nuove teorie è indispensabile conoscere le precedenti, non si può sviluppare una nuova teoria non considerando le precedenti"	*"Anche in matematica possono esserci concetti rivoluzionari che stravolgono le conoscenze precedenti ad esempio il V postulato di Euclide"*
"La verità si può affermare tramite verità che si basano su cose già dette e dimostrate prima"	*"Dal 5 postulato è cambiato tutto e la formazione della geometria no euclidea ha segnato un cambiamento radicale"*
" Nuove teorie hanno sempre alla base concetti primitivi"	*"Talvolta per la scoperta di un nuovo teorema si comincia con la negazione di una precedente"*
"Le scoperte nel campo della matematica si sono sempre basate sulla totale accettazione delle precedenti"	*"Anche le conoscenze matematiche hanno sollevato dibattiti riguardo la loro accettazione"*
"I nuovi teoremi derivano da una evoluzione di quelli precedenti che sono stati accolti in precedenza"	*"La matematica è una scienza in continuo sviluppo nella quale le conoscenze precedenti possono essere non accettate"*
"La matematica è una materia che si muove verso nuove scoperte attraverso la deduzione basandosi quindi su principi già accettati e riconosciuti come veri"	*"Ci sono state grande rivoluzioni anche per quanto riguarda la matematica e queste hanno generato forti discussioni"*

"Per formulare un nuovo teorema bisogna conoscere e accettare le teorie elaborate in precedenza" → "Le teorie precedenti possono essere sia accettate che non accettate"

"È proprio in virtù delle conoscenze precedenti che gli uomini sviluppano nuovi concetti matematici" → "Alcune concezioni matematiche proprio perché applicabili in campo differente e perché presuppongono concetti diversi, possono essere in disaccordo con altre precedenti"

"La matematica si basa su delle conoscenze comuni a da tutti accettate" → "Si basa sulle conoscenze precedenti ma si possono riconsiderarle"

"La matematica si è sviluppata partendo da concetti base e da postulati accettati da tutti" → "Non si sarebbero create la geometria non euclidea se la conoscenza matematica fosse stata basata sulla totale accettazione di concetti primitivi"

I FATTORI SOCIO-CULTURALI NON INFLUENZANO IL SAPERE MATEMATICO

DICHIARAZIONI DEGLI ALLIEVI

PRIMA DELLA SPERIMENTAZIONE	*DOPO LA SPERIMENTAZIONE*
"La conoscenza di base della matematica è rimasta invariata fin dall'antichità"	*"Da affermazioni dimostrate possono nascere altre intuizioni che portano a formulare altre ipotesi e a giungere ad altre tesi"*
"Le nozioni base possono essere perfezionate ma la matematica è atemporale"	*"La matematica si sviluppa sulle problematiche umane, che variano a seconda della cultura"*
"Fattori socio culturali non influenzano il sapere matematico perché la matematica è uguale anche se ci troviamo in ambienti socio culturali differenti"	*"Anche il sapere matematico può essere collegato a un contesto socio culturale"*
"La cultura non influenza la matematica"	*"Il matematico non sviluppa concetti astratti e atemporali"*
"Credo che cambiamenti nella società non possono cambiare il pensiero matematico"	*"Tutte le attività della conoscenza , compresa la matematica, sono influenzate dal contesto sociale e culturale"*

4.3.3 Falsificazione ipotesi e risposta alle domande del paragrafo 4.3

Nel presente paragrafo si procede a falsificare l'ipotesi del presente capitolo, riconducendoci alle implicazioni riscontrare nella sperimentazione illustrata nei precedenti paragrafi.

H1. Le convinzioni degli allievi sull'evoluzione della conoscenza matematica possono essere modificate, introducendo argomenti di particolare rilievo storico-epistemologico nel percorso curricolare degli allievi.

H1.1 Sono modificabili le seguenti convinzioni:

- ***la natura fisico-biologica umana non costituisce limite alla conoscenza matematica***

Se *si introducono argomenti di particolare rilievo storico-epistemologico nel percorso curricolare degli allievi*	**allora** *l'alunno modifica lai convinzione che la natura fisico-biologica umana non costituisce limite alla conoscenza matematica*

- ***la conoscenza matematica non è passibile di revisioni storiche***

Se *si introducono argomenti di particolare rilievo storico-epistemologico nel percorso curricolare degli allievi*	**allora** *l'alunno modifica la convinzione che la conoscenza matematica non è passibile di revisioni storiche*

- ***i concetti matematici sono del tipo vero/falso (piuttosto che coerente/non coerente);***

Se *si introducono argomenti di particolare rilievo storico-epistemologico nel percorso curricolare degli allievi*	**allora** *l'alunno modifica la convinzione che i concetti matematici sono del tipo vero/falso (piuttosto che coerente/non coerente);*

- ***non esistono cambiamenti rivoluzionari all'interno dello sviluppo di conoscenze matematiche;***

Se *si introducono argomenti di particolare rilievo storico-epistemologico nel percorso curricolare degli allievi*	**allora** *l'alunno modifica la convinzione che non esistono cambiamenti rivoluzionari all'interno dello sviluppo di conoscenze matematiche;*

- ***i fattori socio-culturali non influenzano il sapere matematico.***

Se *si introducono argomenti di particolare rilievo storico-epistemologico nel percorso curricolare degli allievi*	**allora** *l'alunno modifica la convinzione che i fattori socio-culturali non influenzano il sapere matematico*

Alla luce delle falsificazioni delle ipotesi , possiamo fornire la risposta alla domanda della presente tesi:

- *E' possibile costruire percorsi formativi, alternativi a quelli tradizionalmente offerti nella scuola secondaria, che possano incidere positivamente sulle concezioni relative alla matematica?*

Si. La trattazione di argomenti di rilievo storico epistemologico incide positivamente sulle convinzioni degli allievi. Rimane esclusa, in tal senso, la visione platonista della matematica posseduta dagli allievi, che sembra essere molto radicata in questa fascia d'età.

Scheda riassuntiva capitolo 4

Sulla base delle riflessioni precedenti è stata impostata un'indagine sperimentale con la finalità di evidenziare diverse *«tipologie»* di allievi, in relazione sia alle convinzioni sia ai cambi di convinzioni sul ruolo degli errori in matematica, sulla matematica come scienza e come disciplina. La sperimentazione è stata condotta in diversi Istituti Scolastici Secondari di Secondo grado, in alcune città italiane. Gli istituti coinvolti sono stati i seguenti:Liceo (pedagogico e scienze sociali) Statale "Regina margherita" di Palermo; Istituto Tecnico Nautico Statale "C.Colombo" Torre Del Greco (NA); Liceo (classico, pedagogico e scienze sociali) Statale "Forteguerri -Vannucci" di Pistoia;Liceo Scientifico Statale "Amedeo di Savoia Duca d'Aosta" di Pistoia;Liceo Scientifico Statale "B. Rambaldi - L. Valeriani" di Imola (BO); Liceo Scientifico Statale "A. Moro" di Reggio Emilia; Liceo Scientifico Statale "Maria Montessori" di Porretta Terme (BO); Liceo Scientifico Statale "Tassoni" di Modena; Liceo Classico Statale "Dante Alighieri" Ravenna per un totale di 715 allievi. Coerentemante con il quadro epistemologico delineato, sono da considerarsi *«chiavi di lettura»* delle indagini : l'interrelazione tra le convinzioni e i fattori cognitivi; la visione della matematica come una costruzione umana, problematica e in evoluzione; il parallelismo tra lo sviluppo storico e la crescita cognitiva; la teoria bachelardiana di rottura epistemologica del sapere. Le indagini effettuate hanno permesso di far emergere analogie e differenze in merito alle convinzioni degli studenti, in relazione alla matematica (e agli errori in matematica). Il capitolo presenta i risultati, quantitativi e qualitativi, delle due sperimentazioni. Relativamente alla prima indagine si riportano gli indici e i grafici realizzati con il software CHIC (Coesiv Hierarchical Implicative Classification) per lo studio quantitativo. In relazione alle convinzioni sul tema della ricerca risultano evidenziate differenze e analogie tra gli allievi, distinti per rendimento scolastico. Ciò emerge in particolare: nell'analisi delle convinzioni relative agli errori e dell'approssimazione della conoscenza; nell'attribuzione di gravità agli errori; nella corretta comprensione dei propri errori; nei ricordi relativi agli errori della propria storia scolastica; nella capacità di riflessione *«metamatematica»*; nella capacità di *«rischiare intellettualmente»* ovvero di mettere in gioco le proprie conoscenze. Volendo riassumere brevemente i risultati del capitolo, per la prima indagine sperimentale, secondo i dati raccolti, è emerso che le convinzioni degli allievi con uno scarso rendimento in matematica sono sostanzialmente diverse dalle convinzioni degli allievi con buon rendimento. Per i primi, gli errori in matematica risultano essere qualcosa di negativo, da evitare a tutti i costi; al contrario, gli alunni con buon rendimento sembrano essere capaci di usare l'errore anche come risorsa. Inoltre, la correzione di errori non sembra essere abbastanza efficace per i ragazzi con rendimento scarso, in quanto non viene recepita . Ciò incide anche sul piacere di fare matematica. Inoltre, gli alunni con scarso rendimento non riescono a immaginare alla matematica come materia evolutasi nel tempo, con eventuali momenti di approssimazione e ostacolo della conoscenza. Un ulteriore fattore di distinzione tra gli allievi riguarda l'importanza di ricordi in relazione all'apprendimento matematico: essa è presente solo nei casi di rendimento scarso, mentre non è emersa negli allievi con buon rendimento. Relativamente all'approssimazione di concetti matematici, va rilevata una sostanziale distinzione tra quelli evocati in ambito extra-scolastico e quelli evocati in ambito scolastico. In ambito extra-scolastico, gli allievi mostrano concezioni simili a quelle relative all'evoluzione del concetto in questione. Tuttavia, coloro che hanno uno scarso rendimento propendono per concetti non presenti nelle definizioni studiate a scuola, mentre i ragazzi con miglior rendimento, evocano quei concetti che hanno studiato in classe.

La seconda indagine si è proposta di sperimentare un intervento didattico per incidere su eventuali variazioni di tali convinzioni. E' emerso che lo studio di argomenti di grosso rilievo epistemologico (nel caso presente le geometrie non euclidee) riesce a incidere positivamente sulle seguenti convinzioni: i concetti matematici sono del tipo vero/falso (piuttosto che coerente/non coerente); la conoscenza matematica non è passibile di revisioni storiche; i fattori socio-culturali non influenzano il sapere matematico; non esistono cambiamenti rivoluzionari all'interno dello sviluppo di conoscenze matematiche; la natura fisico-biologica umana non costituisce limite alla conoscenza matematica. L'unica convinzione che non sembra essere suscettibile di cambiamenti è quella secondo cui la matematica esiste indipendentemente dall'uomo (visione platonista della matematica).

Conclusioni

Analisi dei dati raccolti – Esiti e conclusioni in relazione al quadro teorico – Alcuni quesiti aperti

Analizzare l'immagine della matematica che lo studente ha elaborato durante i suoi studi, evidenziandone convinzioni, schemi di pensiero, è un'operazione non semplice; tuttavia, tale operazioni può rivelarsi utile per una didattica improntata al recupero degli allievi con maggiori difficoltà.

Sappiamo che le ricerche didattiche sul tema dell'errore hanno fatto sì che, da una concezione esclusivamente negativa dell'errore si sia passati ad una visione positiva dell'errore, come risorsa e fonte di conoscenza.

La presente ricerca ha affrontato l'analisi delle convinzioni (sull'errore e sulla conoscenza matematica) e il loro legame con i risultati in matematica, cercando di dimostrare che i sistemi di convinzioni sono in grado di dare conto di una parte della variabilità dei risultati in matematica.

Lungo il percorso di ricerca abbiamo rintracciato convinzioni, credenze, pregiudizi frequenti sulla matematica, proponendoci di indagare contemporaneamente intorno a possibili elementi di criticità rispetto al contenuto di un particolare concetto matematico quale quello di angolo.

Abbiamo evidenziato, per quanto possibile, alcune importanti interrelazioni tra i fattori affettivi e i fattori cognitivi degli allievi, secondo uno schema legato al rendimento scolastico in matematica, attraverso l'analisi critica di alcuni riferimenti epistemologici sul tema dell'errore in matematica. A tal fine, alla luce del cambiamento epistemologico sul ruolo dell'errore in matematica del primo Novecento, si è deciso di indagare le convinzioni degli allievi sugli errori tramite la somministrazione di alcuni questionari. La scelta del tipo di tecnica d'indagine è scaturita dalla formulazione della seguente ipotesi: esistono convinzioni sottese ad eventuali lacune e difficoltà in matematica. La scelta dell' argomento di ricerca nasce dalla considerazione che le convinzioni e i sistemi di convinzioni sulla matematica sembrano essere fondamentali nello studio delle difficoltà in matematica (Zan, Di Martino, Schoenfeld).

Per molto tempo l'apprendimento della matematica è stato studiato esclusivamente come un problema cognitivo: i ricercatori hanno indagato su termini e concetti matematici, sulla costruzione di un concetto, su specifiche rappresentazioni sul processo di apprendimento. Successivamente, il

panorama scientifico si è dilatato e nell'ultimo decennio si sono sviluppati numerosi studi sull'influenza di convinzioni, credenze, atteggiamenti nell'acquisizione del sapere matematico.
Il testo di Rosetta Zan in *Problemi e convinzioni*, edito da Pitagora nel 1998, offre una panoramica molto ampia di questo quadro di ricerche.
Sin dal 1987 Schoenfeld ha incominciato a parlare di convinzioni, in riferimento ai modi e alle sensazioni con cui un individuo si rapporta rispetto al comportamento matematico. Il termine convinzione *(belief*) o credenza ha cominciato a diffondersi negli anni Ottanta per indagare, nell'ambito del problem-solving, il fallimento di individui che mostrano di possedere risorse sufficienti per riuscire in matematica. Non vi è unanimità sulla definizione delle convinzioni (Furinghetti e Pehkonen 2000), tuttavia è ormai assodato che i *sistemi di convinzioni* (Schoenfeld, 1992) incidono su come un argomento viene percepito e appreso. Furinghetti e Pehkonen (2000) descrivono in questo modo generale la funzione delle convinzioni:
«(a) le convinzioni costituiscono un sistema di sfondo che regola la nostra percezione, il nostro pensiero, le nostre azioni; e dunque
(b) le convinzioni agiscono da indicatori per l'insegnamento e l'apprendimento. Inoltre
(c) le convinzioni possono essere viste come una forza inerziale che può agire contro i cambiamenti e, come conseguenza,
(d) le convinzioni hanno un carattere predittivo».
In definitiva, le convinzioni:
- risultano essere l'esito di come viene interpretata l'esperienza con la materia;
- determinano lo sfondo per interpretare l'esperienza futura;
- dirigono le risorse cognitive da attivare (Silver 1985; Schoenfeld 1983), suggerendo e/o inibendo, mediante vere e proprie *barriere affettive*, l'accesso alle risorse più adeguate (Shaughnessy, 1985).

Più propriamente, ci si riferisce a sistemi di convinzioni (anziché alle singole convinzioni) per mettere in rilievo che le convinzioni interagiscono e si organizzano in strutture stabili, incidendo sul comportamento (Green 1971; Di Martino 2004).
In letteratura si è indagato sulle convinzioni relative alla disciplina (Silver, 1994), al *senso di autoefficacia* (Bandura, 1977; 1986; 1995; 1999; 2000). Un'ulteriore distinzione riguarda le convinzioni sul compito, le teorie del successo, le convinzioni sulla matematica, le convinzioni su di sé (Zan 2007) e sulle proprie attitudini (Di Martino e Zan 2001); si distinguono, inoltre, convinzioni degli studenti, degli insegnanti e della società più in generale (McLeod, 1992).
Alcune ricerche sulle convinzioni sulla matematica come disciplina (Schoenfeld, 1992; Cattabrini e Di Paola 1997; Demattè e Furinghetti 1999; Demattè 2000; Zan 2009) hanno evidenziato convinzioni sulla matematica che possono essere considerate peculiari:

– soltanto chi è portato in matematica può andare bene in matematica;
– non tutti hanno una mente matematica;
– matematica è sinonimo di verità e certezza;
– la matematica è arida e non richiede creatività;
– l’attività matematica è un’attività solitaria;
– la matematica è esecuzione, la poesia è lettura;
– la matematica sta alla poesia come il cervello sta al cuore;
– la matematica è puro addestramento;
– la matematica richiede l’esecuzione di esercizi e la teoria non serve;
– la matematica è per i geni;
– gli studenti normalmente dotati non possono capire la matematica e devono solo memorizzarla, applicando meccanicamente quanto hanno imparato;
– gli uomini sono più bravi delle donne in matematica.

In sostanza, gli alunni hanno una loro epistemologia, formata dal sistema di convinzioni che guida i loro processi decisionali. *« […]si svolge nella classe un sordo dissidio tra le concezioni epistemologiche degli allievi da una parte e quelle di insegnanti, ma compaiono in primo piano pure le posizioni degli autori dei testi, dei legislatori, tutti con la loro personale immagine della disciplina. Questi quesiti profondi spesso (troppo spesso) rimangono sullo sfondo e contribuiscono a creare una zona ‘grigia’ di insoddisfazione che a lungo andare produce una repulsione verso la disciplina perché ritenuta, dallo studente e talvolta anche dall’insegnante, altra e aliena. Invece di accettarla con entusiasmo, viene subita con rassegnazione»* (Marchini).

Il quadro teorico assunto si è rivelato idoneo ad identificare alcune caratteristiche salienti che hanno permesso di operare analogie e differenze tra tipologie di allievi. Gli studi relativi all’ interrelazione tra i fattori affettivi e i fattori cognitivi che regolano il comportamento degli studenti (Zan 2007 e altri), la visone culturale *«umanistica »* della matematica esposta in Demattè (2010) e Hersh (2001), il parallelismo tra lo sviluppo storico e la crescita cognitiva in Sfard (1991), la teoria sugli ostacoli epistemologici, uniti all’analisi a priori dei possibili comportamenti nelle indagini sperimentali e al software CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive) e integrati da osservazioni qualitative, hanno consentito di delineare alcune considerazioni conclusive.

Inoltre, la riflessione sui fondamenti dei contenuti matematici e l’analisi del loro costituirsi nel corso della storia sono ritenuti necessari per un corretto inquadramento culturale del lavoro svolto.

Sappiamo che la scienza si sviluppa e che cambiano anche le soluzioni, le risposte che possiamo dare ai problemi (in tal senso, la questione della natura degli enti matematici, prima e dopo la rivoluzione non euclidea e la crisi dei fondamenti ne sono un esempio). In quest'ottica si è delineato un' analisi storico epistemologica su momenti di crisi della matematica.

Il binomio matematica - errore è basilare per la definizione delle ipotesi del lavoro di ricerca e nelle convinzioni emerse attraverso l'analisi quantitativa e qualitativa.

Come tutte le altre forme di sapere, la matematica presenta diverse « anime », cioè modi diversi di viverla, di capirla, di vederla. Essa da un lato può significare *inventare* realtà esistenti solo nella nostra mente, dall'altro *scoprire* un mondo che già esiste, che può essere colto con l'uso dei concetti matematici. Quest'ultimo atteggiamento può essere definito platonista, in quanto configura la matematica come una scienza descrive oggetti già esistenti, mentre l'altro atteggiamento è detto costruttivista perché configura la matematica come scienza che costruisce i suoi oggetti, inesistenti prima che essi vengano definiti.

In tal senso, alla fine del secolo XIX e all'inizio del secolo XX sono emerse diverse contraddizioni in importanti teorie matematiche e i matematici hanno incominciato a farsi nuove domande. La matematica, per molti secoli, è stata considerata come un campo di *verità* indubitabili e indipendenti da ogni possibile esperienza. Nel corso dell'ultimo secolo, i fondamenti della matematica hanno cominciato a vacillare, facendo quindi crollare le certezze acquisite. Il riconoscimento delle geometrie non euclidee e il ruolo crescente dell'infinito (con i relativi paradossi) sono alcuni degli eventi alla base della crisi. La questione era particolarmente difficile perché c'era il rischio di un cedimento di tutto l'edificio matematico.

Molti importanti matematici si sono dedicati al lavoro di ricerca dei fondamenti solidi, indiscutibili della matematica, per eliminare le antinomie presenti e future. Sono nate alcune scuole fondazionali come il logicismo, l'intuizionismo, il formalismo: nessuna è riuscita nell'intento.

Fallito qualsiasi tentativo di una fondazione autonoma della matematica, dalla fine dell'Ottocento alla metà del Novecento, la matematica non ha più rappresentato la scienza delle certezze assolute e definitive. Essa, al pari di ogni altra scienza umana, doveva cominciare a conquistarsi sul campo e mai definitivamente i suoi significati e i suoi presupposti di validità.

Dall' integrazione dei quadri teorici precedenti abbiamo rintracciato quelle credenze che possono interpretare le diverse performance in matematica, individuando nell'insieme di alcune convinzioni uno schema concettuale idoneo a spiegare diversi rendimenti nella materia.

Le nostre domande di ricerca sono frutto di una riflessione sul quadro teorico sopra esposto ed in particolare sull'evoluzione del concetto di errore che, a partire dal primo Novecento, indica una realtà da indagare contro cui si infrangono pregiudizi e conoscente pregresse (Bachelard, Enriques, Popper, Riemann). Abbiamo visto che la matematica cambia da un'epoca all'altra e come tutti i saperi dell'uomo essa è storica, progredisce, si sviluppa, si arresta, ristagna, riprende e esplode con vere e proprie trasformazioni. A scuola, invece, essa appare immobile, sempre uguale a se stessa, indiscutibile. In quest'ottica, questa ricerca ha evidenziato che il modo in cui si pensa alla matematica fa la differenza nel modo in cui la si impara.

Inoltre, abbiamo anche considerato come l'avvento delle geometrie non euclidee determina un dibattito sul tema della conoscenza matematica. In tal senso anche la sperimentazione sulle geometrie non euclidee è stata un ottimo supporto esemplificativo per focalizzare che l'indagine del matematico non è rivolta a sapere se i postulati che egli ammette o le deduzioni che da essi trae sono veri o falsi, quanto piuttosto se tali deduzioni sono conclusioni aderenti alle ipotesi di partenza. Come affermò Russell: *« La matematica è quella scienza in cui non sappiamo di cosa stiamo parlando o se ciò che stiamo dicendo è vero».*

Se, quindi, accettiamo l'ipotesi di un possibile parallelismo tra lo sviluppo della conoscenza umana e quella del singolo, risulta interessante chiarire le connessioni tra le convinzioni degli allievi sull'errore e eventuali difficoltà in matematica. Sono quindi, emerse le seguenti domande

- *Gli studenti hanno consapevolezza del ruolo svolto dall'errore nell'apprendimento matematico?*
- *Gli studenti sono in grado di immaginare che lo sviluppo dei concetti matematici ha presentato eventuali momenti di approssimazioni e/o lacune della conoscenza?*
- *Esiste una relazione tra l'approssimazione della conoscenza avvenuta nella storia della matematica e le convinzioni degli allievi sulla matematica?*

L'ipotesi che ha guidato la nostra ricerca è stata, quindi, la seguente:

H 1. Le convinzioni sugli errori in matematica e sull'evoluzione della conoscenza matematica interferiscono con l'apprendimento della matematica.

H1.1 Le differenze e le analogie riscontrabili tra gli alunni con buon rendimento e scarso rendimento in matematica, si ritrovano:

- *nell'analisi delle convinzioni relative agli errori e dell'approssimazione della conoscenza;*
- *nell'attribuzione di gravità agli errori;*
- *nella corretta comprensione dei propri errori;*
- *nei ricordi relativi agli errori della propria storia scolastica;*
- *nella capacità di riflessione «metamatematica »;*
- *nella capacità di «rischiare intellettualmente» ovvero di mettere in gioco le proprie conoscenze.*
- *H2 In assenza di contesto scolastico, gli alunni evocano concetti matematici diversi da quelli appresi; tali concetti si riconducono alle approssimazioni riscontrate nell'evoluzione del concetto.*

La nostra ricerca è centrata sul concetto di angolo, in quanto – pur essendo apparentemente un concetto semplice – ha avuto uno sviluppo complesso e, quindi, permette un'utile riflessione metacognitiva sull'errore e sull'approssimazione della conoscenza matematica.

Le questioni relative al concetto di angolo sono molto profonde e non c'è accordo nemmeno sulla paternità della definizione euclidea: *«Euclide probabilmente non ha dato neppure una definizione di angolo: in ogni caso dovrebbe essere un'aggiunta successiva almeno nella forma attuale che definisce l'angolo anche curvilineo (Definizioni 8 - 9)[...] Una volta accettata, infatti, la non autenticità delle prime sette definizioni, non vi è alcuna ragione di ritenere autentiche le definizioni di angolo, anch'esse superflue e per altro insussistenti come definizioni. Di più non si comprende perché Euclide avrebbe dovuto definire gli angoli curvilinei, che risultano per altro concettualmente nebulosi e mai utilizzati nel testo. Per la verità un caso particolare di angolo curvilineo, quello formato dalla circonferenza con la sua tangente, si ritrova come aggiunta del tutto inutile e quindi anch'essa sospettabile di essere apocrifa, nel solo teorema 13 del terzo libro »* (Migliorato).

Nella prima indagine abbiamo ritenuto sufficiente, in accordo con il quadro teorico delineato, limitarci alla raccolta di dati e informazioni relativi alla problematica trattata. Nella seconda indagine, al fine di dimostrare che le convinzioni degli allievi possono opportunamente essere modificate, in relazione alla riflessione metacognitiva sulla conoscenza matematica, abbiamo sottoposto gli allievi ad un 'questionario di ingresso' e un 'questionario post trattamento', relativi alla trattazione delle geometrie non euclidee. Infatti, ulteriore scopo di questa ricerca è stato di mostrare che il rapporto degli alunni con la matematica può essere migliorato attraverso l'esposizione di contenuti matematici rilevanti dal punto di vista epistemologico. Le due indagini sperimentali sono risultate essere significative sia per l'analisi sulle convinzioni, sia per la ricerca di proposte didattiche innovative.

Il lavoro di ricerca è stato svolto in diverse scuole secondarie di secondo grado, coinvolgendo – totalmente in entrambe le indagini – 715 allievi.

I questionari sono stati composti di domande formulate sulla base delle ipotesi di partenza della ricerca. La stesura dei questionari ha richiesto una particolare attenzione nella scelta, nella compilazione e nella successione degli ITEMS che hanno formato lo strumento d'indagine. Per la formulazione dei questionari si è seguito un procedimento logico che, partendo dall'individuazione delle aree problematiche, è approdato alla tipologia delle domande da utilizzare.

Il primo questionario è stato composto quasi completamente con domande di tipo aperto (ad eccezione della domanda 4) perché lasciano più spazio alla soggettività dell'intervistato. In questa fase, infatti, domande di tipo chiuso avrebbero potuto escludere tutte le alternative di risposta non

previste. Inoltre, le alternative proposte dalla domanda chiusa avrebbero potuto influenzare le risposte (alimentano le pseudo-opinioni) e avrebbero potuto non avere lo stesso significato per tutti.
Nel secondo questionario si è deciso un uso parziale di domande chiuse in quanto – considerato l'argomento trattato - avrebbero facilitato la risposta e permesso all'intervistato di farsi un'idea più chiara del significato della domanda, riducendo il numero delle persone che non sono in grado di rispondere. Si sono aggiunte, comunque, domande aperte (richieste di motivazioni) per lasciare più spazio alla soggettività dell'intervistato.
Le aree problematiche definite nel primo questionario sono le seguenti:

- errori e approssimazione della conoscenza;
- gravità degli errori;
- comprensione dei propri errori;
- ricordi relativi agli errori della propria storia scolastica;
- riflessione *«metamatematica»*;
- matematica come *«rischio intellettuale»* ovvero come possibilità di mettere in gioco le proprie conoscenze;
- approssimazione concetti matematici (angolo).

Le aree problematiche definite nel secondo questionario sono le seguenti:

- visione platonista/costruttivista della matematica;
- caratteristiche dei concetti matematici: vero/falso vs coerente/non coerente ;
- revisione storica dei concetti matematici;
- rapporto tra i fattori socio-culturali e il sapere matematico;
- cambiamenti interni allo sviluppo di conoscenze matematiche;
- rapporto tra la natura fisico-biologica umana e la conoscenza matematica.

Il primo questionario conteneva esplicitamente la richiesta di indicare la classe di appartenenza dell'allievo; il secondo questionario, invece, è stato firmato da ogni allievo.
I questionari, quindi, sono stati composti e assegnati secondo i seguenti principi: coerenza fra strumento d'indagine ed ipotesi/scopi della ricerca; spiegazione chiara del tema e degli scopi della ricerca; garanzia dell'anonimato (ove indispensabile); impostazione del questionario non in forma di test; inizio con domande *«facili »*. Lo strumento di indagine utilizzato (questionario) ha permesso di raccogliere un numero consistente di elaborati molto ricchi di informazioni interessanti. Al fine di ottenere un insieme di informazioni gestibili attraverso una matrice dati, sono stati utilizzati, nella formulazione del questionario, ITEMS successivamente codificati. Terminata la stesura dei questionari e prima di procedere alla somministrazione vera e propria, sono stati testati gli strumenti

d'indagine per non incorrere in errori d'interpretazione, eventualmente dovuti a domande mal poste e/o inutilità dei dati reperiti. Corretti i questionari, la ricerca ha avuto il suo inizio.

I questionari di entrambi le sperimentazioni sono stati analizzati dal punto di vista qualitativo. Il primo questionario è stato integrato dall'analisi statistica implicativa, che ha principalmente focalizzato le risposte alle nostre domanda di ricerca.

L'analisi statistica implicativa di Gras (2000, 2008) misura le relazioni d'implicazione, stabilendo l'intensità d'implicazione tra variabili. Inoltre, attraverso il metodo di *similarità*, classifica le variabili raggruppandole secondo livelli gerarchici. Nella nostra ricerca le variabili sono costituite dai comportamenti attesi degli allievi. Questi sono stati evidenziati mediante l'*analisi a priori* (Brousseau, 1997) che anticipa eventuali reazioni degli allievi. In sostanza l'*analisi a priori è* un lavoro di ipotesi volto a individuare strategie, ragionamenti, soluzioni in risposta a situazioni problematiche proposte.

I grafici implicativi risultanti dalla ricerca hanno fornito raggruppamenti delle variabili sperimentali collegati tra loro direttamente o indirettamente. Ad ogni raggruppamento è associato un particolare comportamento messo in atto dagli alunni.

Operativamente, il presente lavoro di ricerca ha analizzato i dati sperimentali, evidenziando le implicazioni tra le *variabili-comportamento* degli studenti mediante tabelle di questo tipo:

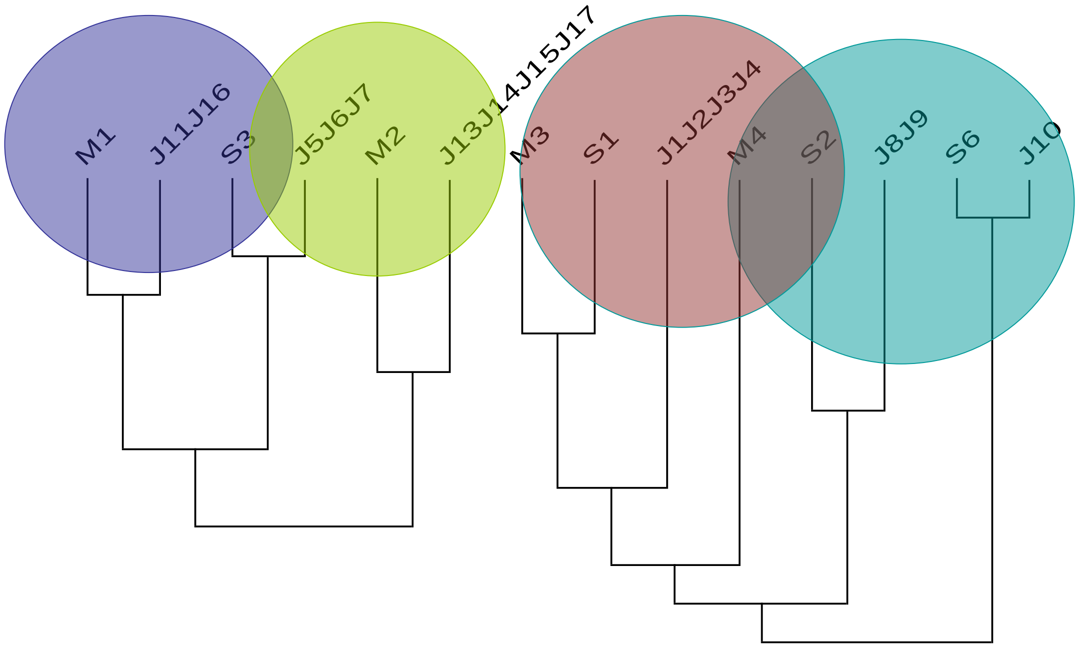
	Comportamento atteso 1	*Comportamento atteso 2*	*Comportamento atteso …*	*Comportamento atteso n*
Studente 1				
Studente 2				
Studente….				

I valori di questa tabella erano 0 o 1, a seconda se il comportamento rilevato noncoincideva o coincideva il comportamento indicato nella tabella.

Il nesso che abbiamo ipotizzato tra alcune convinzioni diffuse tra gli allievi e gli esiti in matematica appare confermato dai dati di questa ricerca. Nel dettaglio, le convinzioni emerse in questo studio risultano correlate con gli esiti in questa materia. A conferma delle ipotesi formulate, esiste una legame significativo tra il sistema di convinzioni nell'approccio alla matematica e gli esiti: in particolare, facendo proprio lo schema mentale secondo cui *«in matematica è necessario evitare ogni tipo di errore»*, definito come sistema fuorviante, è molto più difficile avere buoni risultati in questa materia. Al contrario, gli studenti con un sistema di convinzioni valido, secondo cui *«gli errori in matematica possono essere occasione di conoscenza»*, ottengono successo con maggiore probabilità. Il legame emerso in altre ricerche tra le convinzioni e l' apprendimento matematico sembra confermato anche nel nostro contesto. A tal fine, abbiamo in parte riformulato rispetto alla letteratura, e quindi controllato empiricamente, un modello classificatorio fondato sulle convinzioni che ricorrono tra gli studenti. È stato possibile rintracciare - attraverso le dichiarazioni degli studenti - convinzioni, credenze, pregiudizi, luoghi comuni diffusi sulla matematica. Dai dati raccolti sono emersi moltissimi elementi ricorrenti, relativi ad una materia associata insistentemente al concetto di certezza, verità non opinabile, staticità.

Nella prima indagine sperimentale, secondo i dati raccolti, è emerso che le convinzioni degli allievi con uno scarso rendimento in matematica sono sostanzialmente diverse dalle convinzioni degli allievi con buon rendimento. Per i primi, gli errori in matematica risultano essere qualcosa di negativo, da evitare a tutti i costi; al contrario, gli alunni con buon rendimento sembrano essere capaci di usare l'errore anche come risorsa. Inoltre, la correzione di errori non sembra essere abbastanza efficace per i ragazzi con rendimento scarso, in quanto non viene recepita . Ciò incide anche sul piacere di fare matematica. Gli alunni con scarso rendimento non riescono a immaginare alla matematica come materia evolutasi nel tempo, con eventuali momenti di approssimazione e ostacolo della conoscenza. Un ulteriore fattore di distinzione tra gli allievi, riguarda l'importanza di ricordi in relazione all'apprendimento matematico: essa è presente soli nei casi di rendimento scarso, mentre non è emersa negli allievi con buon rendimento. Relativamente all'approssimazione di concetti matematici, va rilevata una sostanziale distinzione tra quelli evocati in ambito extra-scolastico e quelli evocati in ambito scolastico. In ambito extra-scolastico, gli allievi mostrano concezioni simili a quelle relative all'evoluzione del concetto in questione. Tuttavia, coloro che hanno uno scarso rendimento propendono per concetti non presenti nelle definizioni studiate a scuola, mentre i ragazzi con miglior rendimento, evocano quei concetti che hanno studiato in classe.

L'albero di similarità relativo alla domanda *«che cosa è un errore»* e *«a quale categoria appartiene l'angolo?»* schematizza in maniera efficace, una diversa concezione dell'errore e una diversa concezione dell'angolo, a seconda del rendimento in matematica.



Albero delle similarità : C:\Users\Paola\Desktop\MS - Copia.csv

LEGENDA:

classificazione rendimento matematica

M1 = insufficiente

M2 = sufficiente

M3 = più che sufficiente

M4 = dato assente

classificazione convinzioni sull'errore

J1 –J4 : errore è sbaglio

J5 –J7 : errore è mancanza studio

J8 –J9 : errore è equivoco

J10 : errore tentativo di conoscenza

J11 –J16 : errore è qualcosa di negativo

J13 – J15,J17 : errore è calcolo errato

classificazione del concetto angolo

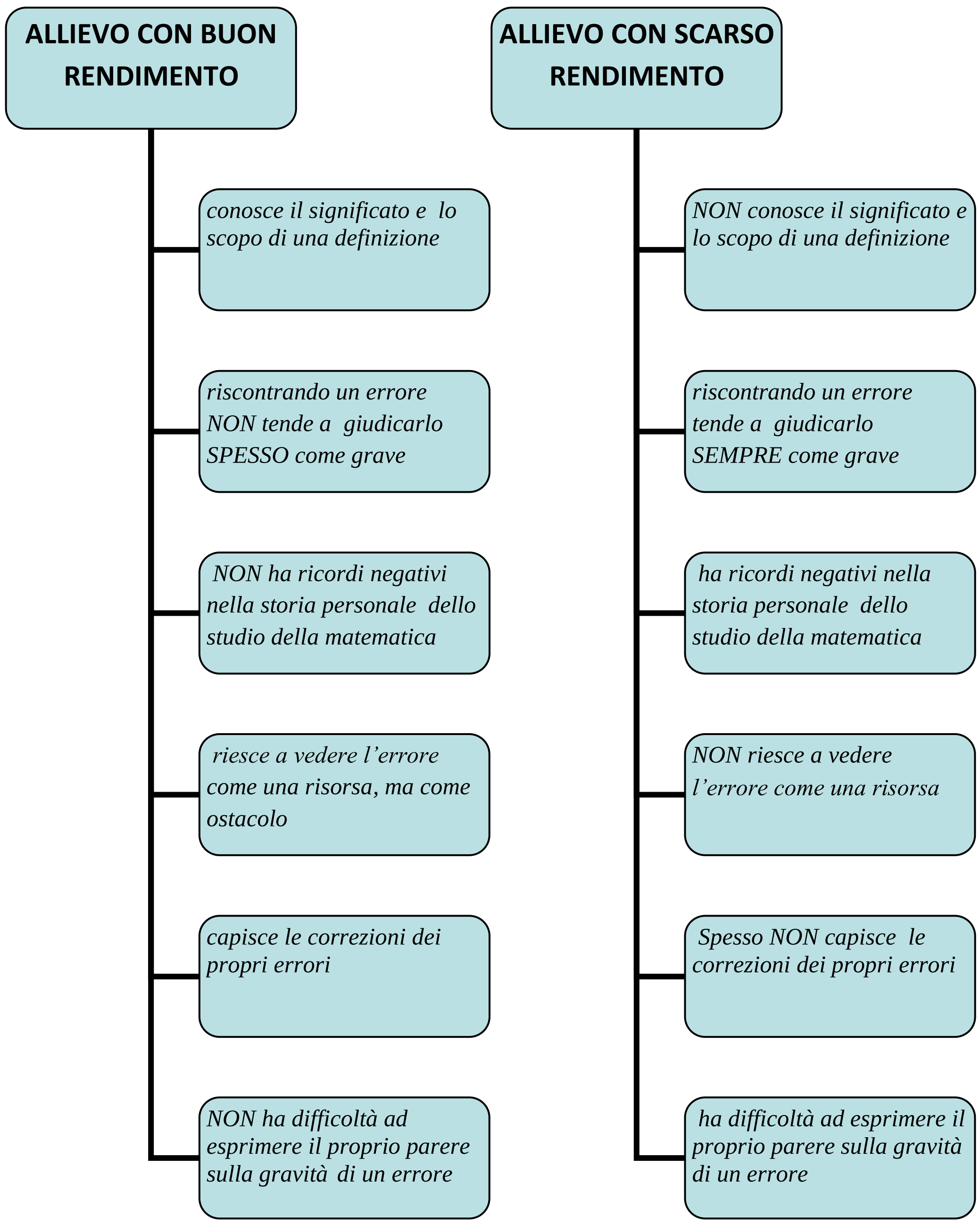
S1 : l'angolo appartiene alla categoria quantità

S2 : l'angolo appartiene alla categoria qualità

S3 : l'angolo appartiene alla categoria relazione

S6 : l'angolo appartiene a tutte le categorie

Segue uno schema che rappresenta i comportamenti degli allievi, in relazione al rendimento:



Lo studio delle convinzioni degli studenti ha, inoltre, permesso di individuare che alcuni concetti degli allievi sono gli stessi (concetti approssimati) di quelli utilizzati da matematici del passato. Particolarmente significativa è risultata la domanda sulle categorie filosofiche dell'angolo: se i concetti matematici sono presentati in ambito extrascolastico (allo stato grezzo), senza le sovrastrutture formali degli sviluppi posteriori, allora i concetti matematici evocati mostrano un legame con i concetti «*approssimati*» evolutisi nella storia della matematica. La presente ricerca, conferma - per un livello d'età diversa – quanto è emerso nello studio svolto da D'Amore Marazzani (2008) relativo alla fascia scuola primaria.

Dalla prima sperimentazione e dalle osservazioni sul comportamento degli studenti sorge l'ulteriore domanda di ricerca:

- *E' possibile costruire percorsi formativi, alternativi a quelli tradizionalmente offerti nella scuola secondaria, che possano incidere positivamente sulle concezioni relative alla matematica?*

Anche questa volta, riconducendoci all'idea che esista un'analogia tra filogenesi (sviluppo della specie) ed ontogenesi (sviluppo dell'individuo), ove lo sviluppo storico ripropone in grande lo sviluppo del pensiero nell'individuo, abbiamo formulato la seguente ipotesi di ricerca:

- *H1. Le convinzioni degli allievi sull'evoluzione della conoscenza matematica possono essere modificate, introducendo argomenti di particolare rilievo storico-epistemologico nel percorso curricolare degli allievi*

Il valore ulteriore che ci siamo proposti in questo lavoro di ricerca è stato quello di controllare empiricamente se è possibile delineare un intervento didattico, per incidere su eventuali variazioni convinzioni *«distorte»*.

L'attività didattica, svolta nella seconda indagine, ha avuto una durata complessiva di 3 ore ed è stata contrassegnata da tre momenti pratico-educativi:

1. Pre-questionario – somministrazione di un questionario costituito da sei domande con risposta motivata circa le convinzioni sulla matematica.
2. Due lezioni l (1 h – 1 h) – attività didattica in cui gli alunni, relativa allo sviluppo delle geometrie non euclidee.
3. Post-questionario – somministrazione di un questionario costituito da sei domande, con contenuto analogo al primo.

Il secondo questionario è stato analizzato quantitativamente con l'uso di tabelle e grafici. Nel post-questionario sono emersi cambiamenti importanti rispetto al pre-questionario, poiché molti alunni hanno rivisto convinzioni precedenti, mostrando una discreta flessibilità rispetto a cosa intendono per conoscenza matematica, evidenziando risposte più mature rispetto alle precedenti.

E' emerso che lo studio di argomenti di grosso rilievo epistemologico (nel caso presente le geometrie non euclidee) riesce a incidere positivamente sulle convinzioni in matematica. In particolare, i risultati della seconda indagine del nostro di lavoro di ricerca hanno mostrato un completo recupero relativo al significato della matematica e sono stati riscontrati progressi nelle convinzioni degli allievi in relazione a:

- i concetti matematici sono del tipo vero/falso (piuttosto che coerente/non coerente);
- la conoscenza matematica non è passibile di revisioni storiche;

- i fattori socio-culturali non influenzano il sapere matematico;
- non esistono cambiamenti rivoluzionari all'interno dello sviluppo di conoscenze matematiche;
- la natura fisico-biologica umana non costituisce limite alla conoscenza matematica.

L'unica convinzione che sembra non essere suscettibile di cambiamenti è quella secondo cui la matematica esiste indipendentemente dall'uomo (visione platonista della matematica). Questo dato implica, con buona probabilità, l'ammissione che l'esistenza della matematica sia garantita da qualcosa di non ulteriormente analizzato, molto vicino a entità religiose e metafisiche. In sostanza, molto spesso, l'approccio degli alunni nei confronti della matematica sembra essere animato dallo stesso atteggiamento richiesto nei confronti di una fede religiosa.

I risultati sperimentali, quindi, hanno corroborato la validità di tale tipo di didattica. In definitiva, la seconda parte della ricerca ha mostrato che la tendenza a percepire la matematica come scienza depositaria di verità assolute, indiscutibili, oggettive e immutabili, valide in qualsiasi epoca e in qualsiasi situazione, può essere modificata con adeguate proposte didattiche.

«Oggi è evidente che l'idea di un corpo di argomentazioni infallibile e universalmente accettato, la grandiosa matematica dell'Ottocento, orgoglio del genere umano, è una grande illusione. La speranza di trovare leggi e standard oggettivi e infallibili si è dissolta: l'Età della Ragione è ormai finita» (Kline, 1985).

In conclusione, a nostro avviso, un approccio che sopravvaluta gli aspetti negativi dell'errore può essere uno dei motivi di sofferenza nei confronti della disciplina; in tal modo, le difficoltà rilevate nella comprensione di concetti matematici possono essere ricondotte e/o spiegate da una visione distorta del ruolo che l'errore ha in matematica.

Dunmore affermava che l'idea di rivoluzione era un buon strumento per comprendere lo sviluppo della matematica, dove per rivoluzione si intendono le concezioni generali, i modi di pensare. E' tale rivoluzione che deve radicarsi nell'allievo e condurlo ad una diversa valutazione degli errori, una diversa valutazione dell'idea di rigore. Occorre, però, anche *«relativizzare anche la ricerca didattica e non credere dunque che eventuali risposte "errate" alle richieste che prevedono implicitamente un unico modello siano davvero "errate" e non siano invece, in modalità assai più interessante, l'evidenziazione di un conflitto tra un modello intuitivo già formato e quello che si tenta di opporre»* (D'Amore - Marazzani, 2008).

Per tentare di inibire idee che provocano chiusure mentali negli allievi, bisognerebbe promuovere una prassi didattica che accetta il confronto, la discussione, persino la polemica, su concetti e problemi matematici, perché è in un quadro di condivisione collettiva, sociale, che si creano le migliori per facilitare l'apprendimento della matematica. Questa necessità è stata anche avanzata con chiarezza, da parte di buona parte degli allievi coinvolti in questo lavoro di ricerca, richiedendo un diverso atteggiamento nei confronti della comunicazione matematica.

Un'ulteriore aspetto che emerge dalla ricerca è relativo alla dimensione emotiva della passività - dipendenza/autonomia**.** Nel senso comune la matematica ha - da un lato - il volto di una materia impenetrabile ed ermetica, dall'altro, quanto mai rigorosa. Questa duplice inaccessibilità si perpetua quando agli studenti viene chiesto di imparare in breve tempo cose che spesso, in realtà, sono frutto di ricerche matematiche lunghe e complesse. Di conseguenza, l'apparente astrattezza di alcune parti della matematica deriva dalla dimenticanza in cui sono affondate le originarie motivazioni applicative della teoria insegnata. Ad esempio, nell'uso della definizione di angolo, è il contesto in cui ci si pone che determina l'uso di una piuttosto che un'altra definizione e impone l'ampliamento o la frattura con le definizioni precedenti. In alcuni casi occorre scegliere la definizione più opportuna per ricomporre conflitti e fratture operate. Il confronto con certe entità matematiche è imposto - troppo spesso - nascondendo come una certa definizione o procedura sia frutto di molti tentativi e errori, e come sia stato necessario *«osare con l'intelletto»* per arrivare ad esse. Ciò comporta un sentimento di non padronanza della propria esperienza e accentua uno stato di impotente passività paralizzante. Tale atteggiamento è emerso in maniera netta nell'uso delle definizioni del concetto di angolo, dove è evidente la totale inconsapevolezza del ruolo centrale delle definizioni e l'assenza di un possibile confronto fra le diverse definizioni. Tuttavia, la domanda relativa alle categorie di appartenenza dell'angolo, ha invece dimostrato un' intenso desiderio di padroneggiare e capire a fondo le cose (le domande hanno avuto alta percentuale di risposte, eterogenee, spesso motivate e circostanziate). Potrebbe, quindi, rivelarsi utile attingere dalla storia della scienza, per migliorare l'efficacia didattica dell'insegnamento, ove alcuni essenziali nodi metodologici potrebbero trovare il loro posto in corsi interdisciplinari. *«Un modo in cui un insegnante può provare di rendere il suo insegnamento più chiarificatore è di integrare in esso alcuni elementi storici, in termini prudenti e ben calibrati, con ciò cercando di vivacizzare l'entusiasmo degli studenti. Lo studio dello sviluppo storico di un argomento può anche aiutare l'insegnante a identificare i passi cruciali, le difficoltà e gli ostacoli nell'apprendimento, a costruire una riserva di esempi e di problemi, insomma a programmare l'insegnamento. Può essere utile proporre all'inizio il sommario di un argomento anche l'argomento dell'intero corso. Ciò può favorire la motivazione, dando la possibilità agli studenti di sapere che cosa sono chiamati a fare e come ciò si collega al programma già svolto. In ogni caso la storia dell'argomento può essere una fonte di idee, sebbene in alcuni casi (nella maggior parte di essi) i percorsi dello sviluppo storico sono troppo tortuosi per essere proficuamente utilizzati in termini didattici»* (Siu Man Keun, 2009).

Una riflessione a parte merita il linguaggio matematico. Questa ricerca evidenzia la necessità di aiutare gli allievi all'uso di un linguaggio privo di ambiguità, aiutandolo a scoprire l'importanza delle definizioni rigorose, mostrandogli la possibilità di generalizzare procedimenti individuati in casi particolari. Questo aspetto, a nostro avviso, potrebbe essere affrontato in maniera interdisciplinare, in quanto le lacune linguistiche rilevate mostrano carenze anche di tipo logico-grammaticale. Sarebbe interessante, ad esempio, svolgere l' analisi logica non solo su un testo letterario , ma anche su un problema di geometria, oppure tradurre dall'inglese oltre i testi letterari, anche testi scientifici (che, peraltro, sono in maggioranza).

Abbiamo visto che le geometrie non euclidee avevano mostrato che le alternative derivanti dalla negazione del postulato delle parallele, potevano generare geometrie coerenti e suscettibili di applicazioni. Nell'ottica dell'interdisciplinarietà sopra richiamata, non è da escludere la possibilità di inserire tali considerazioni anche in campo letterario, ad esempio nella letteratura pirandelliana.

Infatti, come l'assiomatismo-formalismo matematico ha annullato l'assolutismo dei un'unica verità matematica, confinandola in diversi sistemi ipotetico-deduttivi, concepibili dal pensiero umano, così Pirandello – nei suoi lavori - rimpiazza una pluralità di verità soggettive degli uomini, al posto della verità unica.

«Nulla potrebbe dare una rappresentazione drammatica più perfettamente aderente al pensiero del matematico che quella dei magistrali lavori pirandelliani in cui ogni personaggio procede sino in fondo colla sua logica allucinante, strumento tagliente e perfetto che tuttavia nulla può sulla logica altrui se è diversamente impostata, a meno che non il ragionamento ma un improvviso barlume dell'anima non sconvolga tale impostazione» (De Finetti, 1937).

A nostro avviso, la caduta dei livelli di matematica in Italia appare molto connessa alla trasformazione culturale in senso lato, non specificatamente matematica. Anche se l'apprendimento della matematica costituisce un'emergenza educativa per la scuola italiana, come risulta dalle prestazioni scadenti della media degli studenti italiani nelle rilevazioni europee, riteniamo che la questione della matematica è solo la punta di un iceberg, perché è la disciplina in cui ciò è maggiormente rilevabile, in quanto richiede maggior capacità di sintesi e di astrazione. In tal senso, i questionari hanno rilevato anche molti errori grammaticali, di lettura, comprensione del testo. La nostra società è improntata ad un stile di vita lontano dalla matematica: superficiale, priva della capacità di penetrazione intellettuale. Ma il decadimento cognitivo in matematica riguarda probabilmente *l'humus culturale* in cui tutti noi ci troviamo a vivere. La crisi della matematica è legata alla crisi culturale generale; da sempre la matematica è stata espressione dell'ambiente in cui si è sviluppata: babilonesi, greci, arabi, indiani e cinesi hanno dato grossi contributi alla disciplina grazie alla realtà culturale in cui vivevano. Questo aspetto si prospetta come un problema aperto della tesi e necessiterebbe di altre indagini sperimentali. In tal senso, il presente studio pone ulteriori domande di ricerca:

- esiste un legame tra le difficoltà in matematica e le difficoltà in altri campi del sapere?
- le difficoltà in matematica presuppongono anche altro tipo di difficoltà?
- esiste una relazione tra il successo scolastico generale e gli esiti in matematica?
- gli studenti tendenzialmente migliori in tutte le altre materie sono più brillanti anche in matematica?

Il presente studio lascia pensare che il problema matematica non può essere risolto puramente sul piano didattico e matematico. Essendo un problema culturale, esige un approccio sistemico nuovo, in cui gli aspetti di relazione prevalgono su quelli contenutistici. Con molta probabilità la crisi matematica nasce dall'isolamento e dalla frammentazione del sapere. La matematica, quindi, deve essere presentata come prodotto del pensiero umano e procedendo per indagini e problemi multipli. In tal modo, la matematica potrà essere definita cultura, influenzata dall'ambiente in cui stata creata, da chi la studia e da chi la insegna. *« La matematica deve essere considerata come un'attività umana, un fenomeno sociale che fa parte della cultura umana. E, in quanto tale, evoluta storicamente e intelligibile solo in un determinato contesto sociale» (2001);« come il denaro, la guerra o la religione - dice Hersh - non è né fisica, né mentale, ma sociale. Non è possibile affrontare la matematica in termini puramente fisici - chilogrammi e centimetri - né in termini puramente mentali - pensieri, emozioni, abitudini e riflessi. Lo si può fare solo in termini socio-storico-culturali. C'è poco da discutere. E' un fatto della vita» (1985).*

APPENDICE

In questa appendice si riportano alcuni questionari analizzati nella presente ricerca. Ne sono stati selezionati 10, con diversa fascia di rendimento matematico (dal voto 8 al voto 1). Di seguito riportiamo alcune osservazioni.

Appare evidente – negli allegati questionari - che la dichiarazione *«la matematica non mi piace»* risulta quasi assente; d'altro canto la dichiarazione *« vorrei che mi piacesse»* scritta da un allievo, lascia pensare ad un sentimento di impotenza di fronte alla materia.

Si nota con molta chiarezza la relazione tra *«la matematica mi piace»* e *«capisco la matematica »:* al calare del rendimento in matematica, assistiamo ad un calo di comprensione degli errori commessi.

Le risposte riportate, relative ai ricordi negativi, mostrano ferite emotive abbastanza profonde e di lunga data.

Tutti i questionari, inoltre, mostrano la totale mancanza del concetto di definizione geometrica, che spesso viene confusa con la geometria in quanto materia. In uno specifico caso, la definizione geometrica viene definita *«legge da rispettare»*, evocando un forte associazione a connotati prescrittivi della materia in questione.

Tra i questionari allegati, soltanto coloro che hanno rendimento più che sufficiente sono capaci di inquadrare l'angolo secondo più punti di vista.

Le domande a contenuto geometrico mostrano, generalmente, difficoltà profonde a esprimere concetti di base, confusioni terminologiche tra la parola *«stesso» e «uguale»* .

Laddove gli allievi si esprimono sulla gravità degli errori, i termini usati risultano essere pesanti: *«gravissimo» «erratissimo» «molto grave»* , ad eccezione di un solo caso in cui si dichiara *«non grave».*

QUESTIONARIO SULL'APPRENDIMENTO

I dati del presente questionario saranno elaborati ai fini di ricerca, in forma anonima. Ti preghiamo di rispondere sinceramente, motivando le risposte.

Grazie per la collaborazione!

PARTE A

1) Ti piace la matematica? Sí, molto
2) Capisci sempre le correzioni dei tuoi errori? Ti aiutano ad imparare?

Si capisco le correzioni dei miei errori; mi aiutano a non sbagliare dinuovo e a capire dove si sbaglia.

3) Cosa suggeriresti all'insegnante per la correzione degli errori a casa e in classe?

- correggere insieme, discutendo;
- correggere insieme;
- correggere individualmente, in classe;
- correggere tutto quello che si fa, sia a casa che a scuola;
- correggere quaderno per quaderno;
- spiegarmi meglio;
- correggere durante l'intervallo;
- dire le correzioni ad alta voce;
- dire le correzioni a bassa voce;
- dire gli errori, così lo capisco;
- niente correzioni, spiegarmi l'errore a voce e poi farmi rifare sul foglio.
- stare attento mentre lavoro così mi controlla;
- riprendere un argomento già spiegato;
- utilizzare un libro che spieghi benissimo:
- metter i voti;
- correggere bene a casa;
- lasciarmi provare a correggere da solo e poi spiegarmi;
- correggere a piccoli gruppi;
- altro (specificare)________

4) E' meglio la correzione fatta davanti alla classe o personale? Perché?

Meglio le correzzioni fatte davanti alla classe perché così abbiamo occasione per capire tutti senza trascurare nessun' alunno della classe.

5) Hai un ricordo particolarmente negativo circa una correzione di un errore in matematica (dalle elementari ad oggi)?

In caso affermativo descrivi dettagliatamente l'esperienza

No! non mi é mai capitato.

6) Hai un ricordo particolarmente positivo circa una correzione di un errore in matematica (dalle elementari ad oggi)?

In caso affermativo descrivi dettagliatamente l'esperienza

L'ultima volta mi é capitato alle medie che ho sbagliato un operazione me il professore spiegandomi mi fece capire.

7) A tuo parere è vero che l'errore in matematica ha un ruolo più importante che in altre materie? Perchè?

Secondo me si! perchè la matematica è importante per tutta la vita anche nei piccoli gesti quotidiani la matematica c'è sempre.

8) Dai una tua definizione di errore

Capire lo sbaglio e provare finchè non ci troviamo

9) Leggi le seguenti affermazioni sulla matematica e dici quale condividi. Se nessuna si adatta alla tua scrivine una personale:

X *A Gli oggetti matematici – e dunque tutta la matematica – esistono sempre, al di là di ogni contesto temporale e indipendentemente dall'essere umano. Il compito del matematico è decifrarli e investigare queste verità. Il matematico è uno scopritore più che un inventore.*

B La matematica è una collezione di sistemi formali i cui elementi sono manipolati e combinati secondo specifiche regole del gioco. Queste regole del gioco, le definizioni e le dimostrazioni di teoremi, sono il solo interesse del matematico. Il formalista è un inventore più che uno scopritore. Per lui la questione degli oggetti matematici non si presenta. Per lui basta provare che le sue regole del gioco non portano a contraddizione.

C La matematica è ammessa nella misura in cui i suoi oggetti sono costruiti a partire da certi oggetti di base primitivi in un numero finito di passi.

D La conoscenza matematica non è assoluta, ma fallibile e correggibile.

10) Nel corso della storia, pensi che i matematici abbiano commesso alcuni errori nei loro studi? Credi che ciò abbia influenzato positivamente o negativamente il progresso della conoscenza matematica?

Secondo me i matematici hanno commesso alcuni errori nei loro studi e hanno influenzato positivamente il progresso della conoscenza matematica

11) Quale è il tuo voto in matematica? 8

Indica, barrando la relativa casella, la classe che frequenti: | 1 | ~~2~~ | 3 | 4 | 5 |

PARTE B

1 Cosa è una definizione geometrica? A tuo parere quale scopo ha? La geometria ha lo scopo di orientarci nello spazio e di aprire la nostra visione. La geometria è la misura del mondo (geo)

N3

2 In basso sono riportate alcune definizioni del concetto di angolo. Sono tutte corrette? Quale/i preferisci e perché?

A un angolo *ABC* è una coppia di semirette *BA, BC* (dette *lati*) non appartenenti alla stessa retta, aventi la stessa origine *B* (*vertice*).

B è la differenza di direzione tra due semirette *BA, BC* non appartenenti alla stessa retta, aventi la stessa origine *B* (*vertice*).

X C è una parte di piano delimitata da una coppia di semirette non allineate, aventi la stessa origine

D è la regione di piano spazzata da una semiretta che ruota, *in un verso* prefissato, attorno alla sua origine, dalla posizione iniziale *a* alla posizione finale *b*

E L'angolo è ognuna delle 2 parti di piano delimitate da coppie di semirette non allineate, aventi la stessa origine

3 Quale delle definizioni si avvicina maggiormente a quella che tu conosci?

La C è quella che conosco

4 Le definizioni riportate sopra, permettono di identificare l'angolo piatto, l'angolo nullo e l'angolo giro? Perché?

Le informazioni precedenti non permettono di identificare quale, e che tipo di angolo è perché ha dato solo la definizione di angolo

5 Pensi che la definizione di angolo - in geometria - ha avuto una storia semplice e breve? Perché?

Secondo me la definizione di angolo ha avuto una storia lunga perché non tutti sanno ancora cos'è l'angolo.

6 Tre studenti stanno discutendo tra loro su come classificare l'angolo da un punto di vista filosofico.

- Antonio afferma che l'angolo appartiene alla categoria **quantità** (di piano compreso tra due semirette);

- Biagio sostiene che l'angolo appartiene alla categoria **qualità** (angolo curvilineo, rettilineo, misto oppure acuto, ottuso retto);

- Carlo afferma che l'angolo appartiene alla categoria **relazione** (riferendosi all'inclinazione reciproca delle semirette dell'angolo).

Chi ha ragione e chi ha torto? Perché?

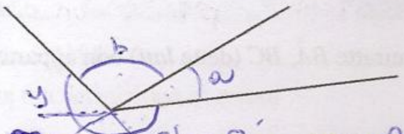
Secondo me hanno tutti e 3 (hanno) torto; per classificare l'angolo filosoficamente bisogna metterlo in tutte e 3 le categorie. No in una categoria.

7 E' possibile disegnare un angolo di 765°? Giustifica la risposta.

Nella geometria Euclidea un angolo può essere disegnato massimo fino a 360°; non lo so nelle altre geometrie se si può fare

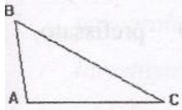
3

8 Uno studente afferma che la figura in basso individua 3 angoli. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?



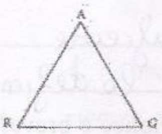
Si sbaglia perchè lui considera l'angolo a, b, y. Invece non sono 3 angoli ma 6.

9 Uno studente afferma che il triangolo ABC è l'intersezione dei tre angoli BAC, ACB, ABC. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?



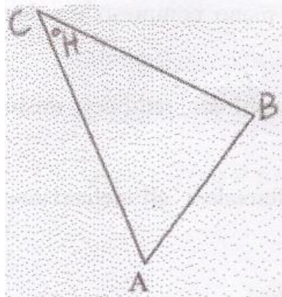
Non non si sbaglia i punti d'incontro delle semirette degli angoli sono proprio i vertici.

10 Uno studente afferma che gli angoli del triangolo ARG sono uguali perché comprendono la stessa parte di piano. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?



Dipende se il triangolo è equilatero allora è anche equiangolo

11 Uno studente afferma che i punti A e H appartengono a tutti gli angoli del triangolo. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?



Dipende a che punti A e H si riferisce. I punti A non sono specificati se stanno all'interno o all'esterno del triangolo.

94

QUESTIONARIO SULL'APPRENDIMENTO

I dati del presente questionario saranno elaborati ai fini di ricerca, in forma anonima. Ti preghiamo di rispondere sinceramente, motivando le risposte.

Grazie per la collaborazione!

PARTE A

1) Ti piace la matematica? SI
2) Capisci sempre le correzioni dei tuoi errori? Ti aiutano ad imparare?
SI

3) Cosa suggeriresti all'insegnante per la correzione degli errori a casa e in classe?

- ✓ correggere insieme, discutendo;
- correggere insieme;
- ✓ correggere individualmente, in classe;
- correggere tutto quello che si fa, sia a casa che a scuola;
- correggere quaderno per quaderno;
- spiegarmi meglio;
- correggere durante l'intervallo;
- dire le correzioni ad alta voce;
- dire le correzioni a bassa voce;
- dire gli errori, così lo capisco;
- niente correzioni, spiegarmi l'errore a voce e poi farmi rifare sul foglio.
- stare attento mentre lavoro così mi controlla;
- riprendere un argomento già spiegato;
- utilizzare un libro che spieghi benissimo:
- metter i voti;
- correggere bene a casa;
- ✓ lasciarmi provare a correggere da solo e poi spiegarmi;
- correggere a piccoli gruppi;
- altro (specificare)

4) E' meglio la correzione fatta davanti alla classe o personale? Perché?
PERSONALE, PERCHÈ HA UN CONTATTO PIÙ DIRETTO ED ELIMINA INIBIZIONI

5) Hai un ricordo particolarmente negativo circa una correzione di un errore in matematica (dalle elementari ad oggi)?

In caso affermativo descrivi dettagliatamente l'esperienza
NO

6) Hai un ricordo particolarmente positivo circa una correzione di un errore in matematica (dalle elementari ad oggi)?

In caso affermativo descrivi dettagliatamente l'esperienza
SI, MI AIUTANO A APPRENDERE MEGLIO L'ARGOMENTO (NON RICORDO BENE

IL CASO)

7) A tuo parere è vero che l'errore in matematica ha un ruolo più importante che in altre materie? Perchè?

SI, PERCHÉ SECONDO ME AIUTA A CAPIRE L'ESERCIZIO

8) Dai una tua definizione di errore

SBAGLIO COMMESSO PER DISTRAZIONE O IGNORANZA DELL'ARGOMENTO

9) Leggi le seguenti affermazioni sulla matematica e dici quale condividi. Se nessuna si adatta alla tua scrivine una personale:

X *Gli oggetti matematici – e dunque tutta la matematica – esistono sempre, al di là di ogni contesto temporale e indipendentemente dall'essere umano. Il compito del matematico è decifrarli e investigare queste verità. Il matematico è uno scopritore più che un inventore.*

X *La matematica è una collezione di sistemi formali i cui elementi sono manipolati e combinati secondo specifiche regole del gioco. Queste regole del gioco, le definizioni e le dimostrazioni di teoremi, sono il solo interesse del matematico. Il formalista è un inventore più che uno scopritore. Per lui la questione degli oggetti matematici non si presenta. Per lui basta provare che le sue regole del gioco non portano a contraddizione.*

C La matematica è ammessa nella misura in cui i suoi oggetti sono costruiti a partire da certi oggetti di base primitivi in un numero finito di passi.

D La conoscenza matematica non è assoluta, ma fallibile e correggibile.

10) Nel corso della storia, pensi che i matematici abbiano commesso alcuni errori nei loro studi? Credi che ciò abbia influenzato positivamente o negativamente il progresso della conoscenza matematica?

NON SAPREI, MA ANCHE SE SONO STATI COMMESSI COME DICE LA ~~[illegible]~~ REGOLA B DELLA DOMANDA 9 SONO ANDATI IN CONTRADDIZIONE E QUINDI RIVALUTATI

11) Quale è il tuo voto in matematica? 8

Indica, barrando la relativa casella, la classe che frequenti:

1	2	3	~~4~~	5

PARTE B

1 Cosa è una definizione geometrica? A tuo parere quale scopo ha? E UNA SPIEGAZIONE DI UNA DETERMINATA PROPIETÁ, ED HA LO SCOPO DI AIUTARCI QUANDO AVREMO A CHE FARE CON QUESTI ELEMENTI

2 In basso sono riportate alcune definizioni del concetto di angolo. Sono tutte corrette? Quale/i preferisci e perché?

A un angolo *ABC* è una coppia di semirette *BA, BC* (dette *lati*) non appartenenti alla stessa retta, aventi la stessa origine *B* (*vertice*).

B è la differenza di direzione tra due semirette *BA, BC* non appartenenti alla stessa retta, aventi la stessa origine *B* (*vertice*).

C è una parte di piano delimitata da una coppia di semirette non allineate, aventi la stessa origine

D è la regione di piano spazzata da una semiretta che ruota, *in un verso* prefissato, attorno alla sua origine, dalla posizione iniziale *a* alla posizione finale *b*

NO, ~~[illegible]~~ SONO TUTTE ~~[illegible]~~ SBAGLIATE ECCETTO LA D.

3 Quale delle definizioni si avvicina maggiormente a quella che tu conosci?

D

4 Le definizioni riportate sopra, permettono di identificare l'angolo piatto, l'angolo nullo e l'angolo giro? Perché?

~~[illegible]~~ NO, PERCHÉ DICONO DI UNA DIFFERENZA DI DIREZIONE, COSA CHE NON SIA HA IN QUESTI CASI (APPARTE LA D)

5 Pensi che la definizione di angolo - in geometria - ha avuto una storia semplice e breve? Perché?

NO, PERCHÉ È UN IMPORTANTE PUNTO PER LE FIGURE GEOMETRICHE

6 Tre studenti stanno discutendo tra loro su come classificare l'angolo da un punto di vista filosofico.

- Antonio afferma che l'angolo appartiene alla categoria **quantità** (di piano compreso tra due semirette);
- Biagio sostiene che l'angolo appartiene alla categoria **qualità** (angolo curvilineo, rettilineo, misto oppure acuto, ottuso retto);
- Carlo afferma che l'angolo appartiene alla categoria **relazione** (riferendosi all'inclinazione reciproca delle semirette dell'angolo).

Chi ha ragione e chi ha torto? Perché?

CARLO HA RAGIONE PERCHÉ QUELLO CHE SOSTIENE LUI È IN FONDO LA BASE, MA ANCHE ANTONIO NON HA TUTTI I TORTI

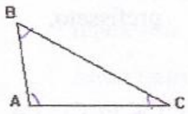
7 E' possibile disegnare un angolo di 765°? Giustifica la risposta.

T1 DISEGNARE CREDO NO, ESSENDO LA PERIODICITÀ DI 360° QUINDI VERREBBE UN ANGOLO DI 45° PIÙ 2 GIRI

8 Uno studente afferma che la figura in basso individua 3 angoli. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?

NON SI SBAGLIA, DIMOSTRAZIONE DISEGNO, CREDO DI NO

9 Uno studente afferma che il triangolo ABC è l'intersezione dei tre angoli BAC, ACB, ABC. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?

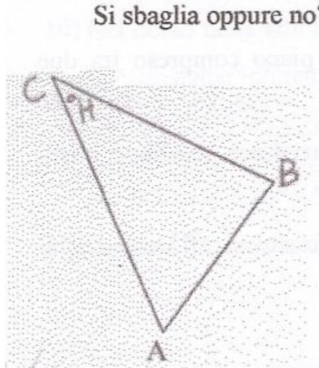


NON HO CAPITO LA DOMANDA, MI DISPIACE

10 Uno studente afferma che gli angoli del triangolo ARG sono uguali perché comprendono la stessa parte di piano. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?

DOVREBBE DIPENDERE DAL TIPO DI TRIANGOLO, QUINDI CREDO DI SI, NON SAPREI DIRE SE È GRAVE O MENO

11 Uno studente afferma che i punti A e H appartengono a tutti gli angoli del triangolo.
Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?



SOLO IL PUNTO H APPARTIENE A TUTTI ESSENDO ALL'INTERNO, CREDO DI SI

QUESTIONARIO SULL'APPRENDIMENTO

I dati del presente questionario saranno elaborati ai fini di ricerca, in forma anonima. Ti preghiamo di rispondere sinceramente, motivando le risposte.

Grazie per la collaborazione!

PARTE A

1) Ti piace la matematica? SI
2) Capisci sempre le correzioni dei tuoi errori? Ti aiutano ad imparare?

A VOLTE. CERTAMENTE

3) Cosa suggeriresti all'insegnante per la correzione degli errori a casa e in classe?

X correggere insieme, discutendo;
- correggere insieme;
X correggere individualmente, in classe;
- correggere tutto quello che si fa, sia a casa che a scuola;
- correggere quaderno per quaderno;
X spiegarmi meglio;
- correggere durante l'intervallo;
- dire le correzioni ad alta voce;
- dire le correzioni a bassa voce;
- dire gli errori, così lo capisco;
- niente correzioni, spiegarmi l'errore a voce e poi farmi rifare sul foglio.

X stare attento mentre lavoro così mi controlla;
- riprendere un argomento già spiegato;
- utilizzare un libro che spieghi benissimo:
- metter i voti;
- correggere bene a casa;
- lasciarmi provare a correggere da solo e poi spiegarmi;
- correggere a piccoli gruppi;
- altro (specificare)__________

4) E' meglio la correzione fatta davanti alla classe o personale? Perché?

QUELLA PERSONALE. PER CAPIRE MEGLIO L'ERRORE FATTO

5) Hai un ricordo particolarmente negativo circa una correzione di un errore in matematica (dalle elementari ad oggi)?

In caso affermativo descrivi dettagliatamente l'esperienza

AVEVO CHIESTO ALLA PROFESSORESSA DI CORREGGERMI UN ESERCIZIO E MI A SGRIDATO DICENDO CHE IO NON SAREI CAPACE DI CAPIRLO

6) Hai un ricordo particolarmente positivo circa una correzione di un errore in matematica (dalle elementari ad oggi)?

In caso affermativo descrivi dettagliatamente l'esperienza

NO

7) A tuo parere è vero che l'errore in matematica ha un ruolo più importante che in altre materie? Perchè?

SI. PERCHE LA MATEMATICA È UN RAMO CHE COMPRENDE ANCHE ALTRE MATERIE TECNICHE

8) Dai una tua definizione di errore

UNA COSA SBAGLIATA

9) Leggi le seguenti affermazioni sulla matematica e dici quale condividi. Se nessuna si adatta alla tua scrivine una personale:

A Gli oggetti matematici – e dunque tutta la matematica – esistono sempre, al di là di ogni contesto temporale e indipendentemente dall'essere umano. Il compito del matematico è decifrarli e investigare queste verità. Il matematico è uno scopritore più che un inventore.

B La matematica è una collezione di sistemi formali i cui elementi sono manipolati e combinati secondo specifiche regole del gioco. Queste regole del gioco, le definizioni e le dimostrazioni di teoremi, sono il solo interesse del matematico. Il formalista è un inventore più che uno scopritore. Per lui la questione degli oggetti matematici non si presenta. Per lui basta provare che le sue regole del gioco non portano a contraddizione.

C La matematica è ammessa nella misura in cui i suoi oggetti sono costruiti a partire da certi oggetti di base primitivi in un numero finito di passi.

D La conoscenza matematica non è assoluta, ma fallibile e correggibile.

10) Nel corso della storia, pensi che i matematici abbiano commesso alcuni errori nei loro studi? Credi che ciò abbia influenzato positivamente o negativamente il progresso della conoscenza matematica?

NEGATIVAMENTE

11) Quale è il tuo voto in matematica? 6/7

Indica, barrando la relativa casella, la classe che frequenti:

1	2	3	4	5

PARTE B

1 Cosa è una definizione geometrica? A tuo parere quale scopo ha?

2 In basso sono riportate alcune definizioni del concetto di angolo. Sono tutte corrette? Quale/i preferisci e perché?

A un angolo *ABC* è una coppia di semirette *BA, BC* (dette *lati*) non appartenenti alla stessa retta, aventi la stessa origine *B* (*vertice*).

B è la differenza di direzione tra due semirette *BA, BC* non appartenenti alla stessa retta, aventi la stessa origine *B* (*vertice*).

C è una parte di piano delimitata da una coppia di semirette non allineate, aventi la stessa origine

D è la regione di piano spazzata da una semiretta che ruota, *in un verso* prefissato, attorno alla sua origine,dalla posizione iniziale *a* alla posizione finale *b*

3 Quale delle definizioni si avvicina maggiormente a quella che tu conosci?

A

4 Le definizioni riportate sopra, permettono di identificare l'angolo piatto, l'angolo nullo e l'angolo giro? Perché?

NO

5 Pensi che la definizione di angolo - in geometria - ha avuto una storia semplice e breve? Perché?

PER I FILOSOFI

6 Tre studenti stanno discutendo tra loro su come classificare l'angolo da un punto di vista filosofico.

Antonio afferma che l'angolo appartiene alla categoria **quantità** (di piano compreso tra due semirette);

Biagio sostiene che l'angolo appartiene alla categoria **qualità** (angolo curvilineo, rettilineo, misto oppure acuto, ottuso retto);

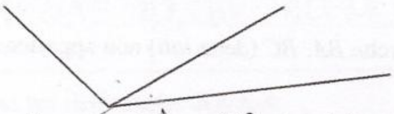
Carlo afferma che l'angolo appartiene alla categoria **relazione** (riferendosi all'inclinazione reciproca delle semirette dell'angolo).

Chi ha ragione e chi ha torto? Perché?

7 E' possibile disegnare un angolo di 765°? Giustifica la risposta.

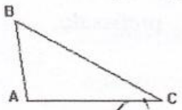
NO

8 Uno studente afferma che la figura in basso individua 3 angoli. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?



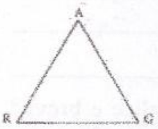
6 È GRAVISSIMO

9 Uno studente afferma che il triangolo ABC è l'intersezione dei tre angoli BAC, ACB, ABC. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?



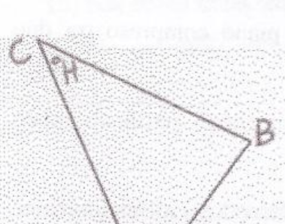
SI

10 Uno studente afferma che gli angoli del triangolo ARG sono uguali perché comprendono la stessa parte di piano. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?



GLI ANGOLI SONO UGUALI

11 Uno studente afferma che i punti A e H appartengono a tutti gli angoli del triangolo. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?



SI SBAGLIA, APPARTENGONO A 1 PARTE
E ERRATISSIMO.

QUESTIONARIO SULL'APPRENDIMENTO

I dati del presente questionario saranno elaborati ai fini di ricerca, in forma anonima. Ti preghiamo di rispondere sinceramente, motivando le risposte.

Grazie per la collaborazione!

PARTE A

1) Ti piace la matematica? A VOLTE QUANDO LA CAPISCO
2) Capisci sempre le correzioni dei tuoi errori? Ti aiutano ad imparare?

SI, SEMPRE E MI AIUTA SICURAMENTE AD APPRENDERLA MEGLIO.

3) Cosa suggeriresti all'insegnante per la correzione degli errori a casa e in classe?

- X correggere insieme, discutendo;
- correggere insieme;
- correggere individualmente, in classe;
- correggere tutto quello che si fa, sia a casa che a scuola;
- X correggere quaderno per quaderno;
- spiegarmi meglio;
- correggere durante l'intervallo;
- X dire le correzioni ad alta voce;
- dire le correzioni a bassa voce;
- dire gli errori, così lo capisco;
- niente correzioni, spiegarmi l'errore a voce e poi farmi rifare sul foglio.
- X stare attento mentre lavoro così mi controlla;
- X riprendere un argomento già spiegato;
- utilizzare un libro che spieghi benissimo:
- X metter i voti;
- correggere bene a casa;
- lasciarmi provare a correggere da solo e poi spiegarmi;
- correggere a piccoli gruppi;
- altro (specificare)______________

4) E' meglio la correzione fatta davanti alla classe o personale? Perché?

SECONDO IL MIO PUNTO DI VISTA E' MEGLIO UNA CORREZIONE PERSONALE, QUANDO GLI ERRORI SONO MIEI, MENTRE SE IN UN COMPITO LA CLASSE SBAGLIA TUTTA SULLO STESSO PUNTO ALLORA E' MEGLIO UNA COLLETTIVA.

5) Hai un ricordo particolarmente negativo circa una correzione di un errore in matematica (dalle elementari ad oggi)?

In caso affermativo descrivi dettagliatamente l'esperienza

NO, NON MI RICORDO UNA CORREZIONE PARTICOLARMENTE NEGATIVA

6) Hai un ricordo particolarmente positivo circa una correzione di un errore in matematica (dalle elementari ad oggi)?

In caso affermativo descrivi dettagliatamente l'esperienza

NO, NON MI RICORDO

7) A tuo parere è vero che l'errore in matematica ha un ruolo più importante che in altre materie? Perchè?

SI, SICURAMENTE, AIUTA A RIFLETTERE SU DI ESSA E IN PIÙ AIUTA A RICORDARSELA MEGLIO.

8) Dai una tua definizione di errore

DISTRAZIONE SU UN PARTICOLARE CASO

9) Leggi le seguenti affermazioni sulla matematica e dici quale condividi. Se nessuna si adatta alla tua scrivine una personale:

X *Gli oggetti matematici – e dunque tutta la matematica – esistono sempre, al di là di ogni contesto temporale e indipendentemente dall'essere umano. Il compito del matematico è decifrarli e investigare queste verità. Il matematico è uno scopritore più che un inventore.*

B La matematica è una collezione di sistemi formali i cui elementi sono manipolati e combinati secondo specifiche regole del gioco. Queste regole del gioco, le definizioni e le dimostrazioni di teoremi, sono il solo interesse del matematico. Il formalista è un inventore più che uno scopritore. Per lui la questione degli oggetti matematici non si presenta. Per lui basta provare che le sue regole del gioco non portano a contraddizione.

C La matematica è ammessa nella misura in cui i suoi oggetti sono costruiti a partire da certi oggetti di base primitivi in un numero finito di passi.

D La conoscenza matematica non è assoluta, ma fallibile e correggibile.

10) Nel corso della storia, pensi che i matematici abbiano commesso alcuni errori nei loro studi? Credi che ciò abbia influenzato positivamente o negativamente il progresso della conoscenza matematica?

GLI SCIENZIATI, STORICI, NON ~~COMMETTONO~~ HANNO COMMESSO MOLTI ERRORI, ~~MA~~ QUELLI COMMESSI SONO STATI CORRETTI E MODIFICATI, MA UN ERRORE SI COMMETTE SEMPRE

11) Quale è il tuo voto in matematica? 6 (SEI)

Indica, barrando la relativa casella, la classe che frequenti: | 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 |

PARTE B

1 Cosa è una definizione geometrica? A tuo parere quale scopo ha? UNA DEFINIZIONE GEOMETRICA È UNA LEGGE DA RISPETTARE, MA SERVE A RIFLETTERE E COME TUTTE LE LEGGI USARLE A PROPRIO SCOPO

2 In basso sono riportate alcune definizioni del concetto di angolo. Sono tutte corrette? Quale/i preferisci e perché?

A un angolo *ABC* è una coppia di semirette *BA, BC* (dette *lati*) non appartenenti alla stessa retta, aventi la stessa origine *B* (*vertice*).

B è la differenza di direzione tra due semirette *BA, BC* non appartenenti alla stessa retta, aventi la stessa origine *B* (*vertice*).

C è una parte di piano delimitata da una coppia di semirette non allineate, aventi la stessa origine

D è la regione di piano spazzata da una semiretta che ruota, *in un verso* prefissato, attorno alla sua origine, dalla posizione iniziale *a* alla posizione finale *b*

non sono tutte corrette, preferisco la C che è la più vera.

3 Quale delle definizioni si avvicina maggiormente a quella che tu conosci?

LA C: è una parte di piano delimitata da due semirette aventi la stessa origine

4 Le definizioni riportate sopra, permettono di identificare l'angolo piatto, l'angolo nullo e l'angolo giro? Perché?

No, perché sono definizioni generiche

5 Pensi che la definizione di angolo - in geometria - ha avuto una storia semplice e breve? Perché?

No, secondo me non ha avuto una storia semplice e breve in quanto è da millenni che l'uomo si interroga su di essa

6 Tre studenti stanno discutendo tra loro su come classificare l'angolo da un punto di vista filosofico.

- Antonio afferma che l'angolo appartiene alla categoria **quantità** (di piano compreso tra due semirette);

- Biagio sostiene che l'angolo appartiene alla categoria **qualità** (angolo curvilineo, rettilineo, misto oppure acuto, ottuso retto);

- Carlo afferma che l'angolo appartiene alla categoria **relazione** (riferendosi all'inclinazione reciproca delle semirette dell'angolo).

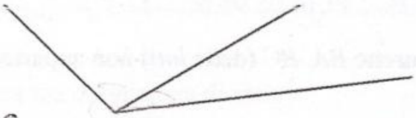
Chi ha ragione e chi ha torto? Perché?

HA TORTO ANTONIO, in quanto l'angolo come lo classifica è generico,

7 E' possibile disegnare un angolo di 765°? Giustifica la risposta.

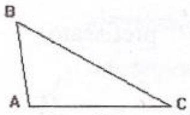
No, si possono calcolare angoli da 0° a 360°

8 Uno studente afferma che la figura in basso individua 3 angoli. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?



SI SBAGLIA, SECONDO IL MIO PUNTO DI VISTA,

9 Uno studente afferma che il triangolo ABC è l'intersezione dei tre angoli BAC, ACB, ABC. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?

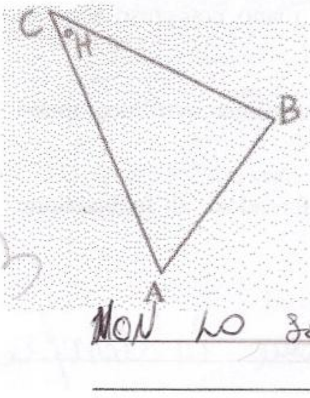


NO, SI SBAGLIA, PERCHÉ IL TRIANGOLO È UNA PARTE DI PIANO DELIMITATA DA TRE LATI, MA L'ERRORE NON È GRAVE

10 Uno studente afferma che gli angoli del triangolo ARG sono uguali perché comprendono la stessa parte di piano. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?

SBAGLIA IN QUANTO NON PUÒ ESSERE SICURO, DOVREBBE CALCOLARLO, L'ERRORE NON È GRAVE, DOVREBBE VERIFICARE LA SUA TEORIA

11 Uno studente afferma che i punti A e H appartengono a tutti gli angoli del triangolo. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?



NON LO SO, NON HO AVUTO ESPERIENZA IN QUESTO CAMPO

54

QUESTIONARIO SULL'APPRENDIMENTO

I dati del presente questionario saranno elaborati ai fini di ricerca, in forma anonima. Ti preghiamo di rispondere sinceramente, motivando le risposte.

Grazie per la collaborazione!

PARTE A

1) Ti piace la matematica? Sì anche se ci sono alcuni argomenti non piacevoli.
2) Capisci sempre le correzioni dei tuoi errori? Ti aiutano ad imparare?

Sì, spesso gli errori mi aiutano ad imparare, però se l'errore che ho commesso mi viene spiegato in maniera sufficiente dal docente.

3) Cosa suggeriresti all'insegnante per la correzione degli errori a casa e in classe?

- [X] correggere insieme, discutendo;
- correggere insieme;
- correggere individualmente, in classe;
- [X] correggere tutto quello che si fa, sia a casa che a scuola;
- correggere quaderno per quaderno;
- [X] spiegarmi meglio;
- correggere durante l'intervallo;
- dire le correzioni ad alta voce;
- dire le correzioni a bassa voce;
- dire gli errori, così lo capisco;
- niente correzioni, spiegarmi l'errore a voce e poi farmi rifare sul foglio.
- [X] stare attento mentre lavoro così mi controlla;
- [X] riprendere un argomento già spiegato;
- [X] utilizzare un libro che spieghi benissimo:
- metter i voti;
- correggere bene a casa;
- [X] lasciarmi provare a correggere da solo e poi spiegarmi;
- correggere a piccoli gruppi;
- altro (specificare)____________

4) E' meglio la correzione fatta davanti alla classe o personale? Perché?

CREDO CHE LA CORREZIONE È MEGLIO FATTA IN MANIERA PERSONALE - PERCHÉ IN MANIERA PERSONALE LO STUDENTE NON È INTIMORITO DAL GIUDIZIO DELLA CLASSE.

5) Hai un ricordo particolarmente negativo circa una correzione di un errore in matematica (dalle elementari ad oggi)?

In caso affermativo descrivi dettagliatamente l'esperienza

ERO ALLE SCUOLE ELEMENTARI QUANDO IN UNA CORREZIONE DI UN COMPITO EBBI UNA SGRIDATA SPAVENTOSA DALLA MAESTRA PER AVER SBAGLIAIO UN CALCOLO E RIMASI SPAVENTATO

6) Hai un ricordo particolarmente positivo circa una correzione di un errore in matematica (dalle elementari ad oggi)?

In caso affermativo descrivi dettagliatamente l'esperienza

ERO ALLE SCUOLE MEDIE QUANDO IN UNA CORREZIONE

DI UN ESERCIZIO SBAGLIAI UNA OPERAZIONE E L'INSEGNANTE PER FARMELO CAPIRE UTILIZZÒ UNA CANZONE

7) A tuo parere è vero che l'errore in matematica ha un ruolo più importante che in altre materie? Perchè?

NO NON CREDO - PERCHÉ NON TROVO UN PARAGONE.

8) Dai una tua definizione di errore

L'ERRORE È UNO QUALSIASI ~~ERRO~~ SBAGLIO CHE TI PORTI A SOLUZIONI ERRATE

9) Leggi le seguenti affermazioni sulla matematica e dici quale condividi. Se nessuna si adatta alla tua scrivine una personale:

A Gli oggetti matematici – e dunque tutta la matematica – esistono sempre, al di là di ogni contesto temporale e indipendentemente dall'essere umano. Il compito del matematico è decifrarli e investigare queste verità. Il matematico è uno scopritore più che un inventore.

X *B La matematica è una collezione di sistemi formali i cui elementi sono manipolati e combinati secondo specifiche regole del gioco. Queste regole del gioco, le definizioni e le dimostrazioni di teoremi, sono il solo interesse del matematico. Il formalista è un inventore più che uno scopritore. Per lui la questione degli oggetti matematici non si presenta. Per lui basta provare che le sue regole del gioco non portano a contraddizione.*

C La matematica è ammessa nella misura in cui i suoi oggetti sono costruiti a partire da certi oggetti di base primitivi in un numero finito di passi.

D La conoscenza matematica non è assoluta, ma fallibile e correggibile.

10) Nel corso della storia, pensi che i matematici abbiano commesso alcuni errori nei loro studi? Credi che ciò abbia influenzato positivamente o negativamente il progresso della conoscenza matematica?

NEL CORSO DELLA STORIA I MATEMATICI HANNO COMMESSO ERRORI INFLUENZANDO POSITIVAMENTE IL PROGRESSO PERCHÉ GLI ERRORI COMMESSI UN TEMPO NON SI COMMETTONO PIÙ

11) Quale è il tuo voto in matematica? 5½

Indica, barrando la relativa casella, la classe che frequenti: | 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~ |

PARTE B

1 Cosa è una definizione geometrica? A tuo parere quale scopo ha? UNA TEOREMA ~~DA~~ DA VERIFICARE.

2 In basso sono riportate alcune definizioni del concetto di angolo. Sono tutte corrette? Quale/i preferisci e perché?

A un angolo *ABC* è una coppia di semirette *BA, BC* (dette *lati*) non appartenenti alla stessa retta, aventi la stessa origine *B* (*vertice*).

B è la differenza di direzione tra due semirette *BA, BC* non appartenenti alla stessa retta, aventi la stessa origine *B* (*vertice*).

C è una parte di piano delimitata da una coppia di semirette non allineate, aventi la stessa origine

D è la regione di piano spazzata da una semiretta che ruota, *in un verso* prefissato, attorno alla sua origine,dalla posizione iniziale *a* alla posizione finale *b*

~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ PERCHE' DERIVA DA UNA DEFINIZIONE GEOMETRICA

3 Quale delle definizioni si avvicina maggiormente a quella che tu conosci?

LA DEFINIZIONE C.

4 Le definizioni riportate sopra, permettono di identificare l'angolo piatto, l'angolo nullo e l'angolo giro? Perché?

ANGOLO PIATTO

5 Pensi che la definizione di angolo - in geometria - ha avuto una storia semplice e breve? Perché?

NO ~~NONCREDO~~ CREDO PENSO CHE HA AVUTO UNA STORIA NORMALE.

6 Tre studenti stanno discutendo tra loro su come classificare l'angolo da un punto di vista filosofico.

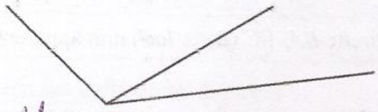
- Antonio afferma che l'angolo appartiene alla categoria **quantità** (di piano compreso tra due semirette);
- Biagio sostiene che l'angolo appartiene alla categoria **qualità** (angolo curvilineo, rettilineo, misto oppure acuto, ottuso retto);
- Carlo afferma che l'angolo appartiene alla categoria **relazione** (riferendosi all'inclinazione reciproca delle semirette dell'angolo).

Chi ha ragione e chi ha torto? Perché?

7 E' possibile disegnare un angolo di 765°? Giustifica la risposta.

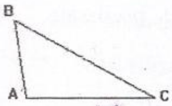
NO PERCHE NON E POSSIBILE DISEGNARE UN ANGOLO DI 765°

8 Unò studente afferma che la figura in basso individua 3 angoli. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?



L'AFFERMAZIONE E' CORRETTA PERCHÉ ~~[illegible]~~ CI SONO DELLE SEMIRETTE NON ALLINEATE AVENTE LO STESSO ORIGINE.

9 Uno studente afferma che il triangolo ABC è l'intersezione dei tre angoli BAC, ACB, ABC. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?

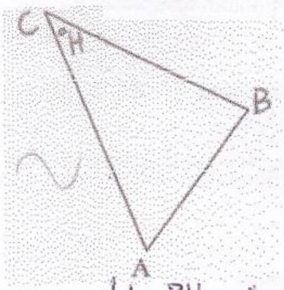


IL TRIANGOLO ABC E' L'INTERSEZIONE DEI 3 ANGOLI ABC. L'ERRORE EVENTUALMENTE COMMESSO E' ALQUANTO GRAVE.

10 Uno studente afferma che gli angoli del triangolo ARG sono uguali perché comprendono la stessa parte di piano. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?

IL TRIANGOLO ARG E' EQUILATERO QUINDI I 3 ANGOLI SONO UGUALI

11 Uno studente afferma che i punti A e H appartengono a tutti gli angoli del triangolo. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?



IL PUNTO A e H ~~[illegible]~~ APPARTIENE A L'ANGOLO e. L'ERRORE E' GRAVE

QUESTIONARIO SULL'APPRENDIMENTO

I dati del presente questionario saranno elaborati ai fini di ricerca, in forma anonima. Ti preghiamo di rispondere sinceramente, motivando le risposte.

Grazie per la collaborazione!

PARTE A

1) Ti piace la matematica? Si abbastanza
2) Capisci sempre le correzioni dei tuoi errori? Ti aiutano ad imparare?

Si la maggior parte delle volte riesco a capire le correzioni ed e questo mi aiuta ad evitare gli stessi errori nel futuro.

3) Cosa suggeriresti all'insegnante per la correzione degli errori a casa e in classe?

X correggere insieme, discutendo;
X correggere insieme;
- correggere individualmente, in classe;
X correggere tutto quello che si fa, sia a casa che a scuola;
- correggere quaderno per quaderno;
- spiegarmi meglio;
- correggere durante l'intervallo;
- dire le correzioni ad alta voce;
- dire le correzioni a bassa voce;
- dire gli errori, così lo capisco;
- niente correzioni, spiegarmi l'errore a voce e poi farmi rifare sul foglio.
- stare attento mentre lavoro così mi controlla;
- riprendere un argomento già spiegato;
- utilizzare un libro che spieghi benissimo:
- metter i voti;
- correggere bene a casa;
- lasciarmi provare a correggere da solo e poi spiegarmi;
- correggere a piccoli gruppi;
- altro (specificare)

4) E' meglio la correzione fatta davanti alla classe o personale? Perché?

E meglio QUELLA FATTA ~~[illegible]~~ A BASSA VOCE VICINO LA CATTEDRA.
PERCHÉ SE C'É UN ERRORE GRAVE CE IL RISCHIO CHE LA CLASSE RIDA DI TE

5) Hai un ricordo particolarmente negativo circa una correzione di un errore in matematica (dalle elementari ad oggi)?

In caso affermativo descrivi dettagliatamente l'esperienza

~~[illegible]~~ IN 3 MEDIA UNA PROFESSORESSA MI MORTIFICO ALLA CATTEDRA DURANTE LA CORREZIONE DI UN COMPITO.

6) Hai un ricordo particolarmente positivo circa una correzione di un errore in matematica (dalle elementari ad oggi)?

In caso affermativo descrivi dettagliatamente l'esperienza

NO NON HO NESSUN RICORDO

7) A tuo parere è vero che l'errore in matematica ha un ruolo più importante che in altre materie?

Perchè?

SI PERCHÈ BASTA ANCHE UN ERRORE CHE PUÒ SEMBRARE BANALE CHE ~~FA~~ SI CHE IL RISULTATO SIA SBAGLIATO

8) Dai una tua definizione di errore

L'ERRORE È SOLO UNO SBAGLIO COMMESSO IN UN RAGIONAMENTO LOGICO

9) Leggi le seguenti affermazioni sulla matematica e dici quale condividi. Se nessuna si adatta alla tua scrivine una personale:

X *Gli oggetti matematici – e dunque tutta la matematica – esistono sempre, al di là di ogni contesto temporale e indipendentemente dall'essere umano. Il compito del matematico è decifrarli e investigare queste verità. Il matematico è uno scopritore più che un inventore.*

B La matematica è una collezione di sistemi formali i cui elementi sono manipolati e combinati secondo specifiche regole del gioco. Queste regole del gioco, le definizioni e le dimostrazioni di teoremi, sono il solo interesse del matematico. Il formalista è un inventore più che uno scopritore. Per lui la questione degli oggetti matematici non si presenta. Per lui basta provare che le sue regole del gioco non portano a contraddizione.

C La matematica è ammessa nella misura in cui i suoi oggetti sono costruiti a partire da certi oggetti di base primitivi in un numero finito di passi.

D La conoscenza matematica non è assoluta, ma fallibile e correggibile.

10) Nel corso della storia, pensi che i matematici abbiano commesso alcuni errori nei loro studi? Credi che ciò abbia influenzato positivamente o negativamente il progresso della conoscenza matematica?

~~[illegible]~~ Secondo me sono stati commessi degli errori ma sono stati corretti e hanno influenzato positivamente il progresso

11) Quale è il tuo voto in matematica? $5\frac{1}{2}$

Indica, barrando la relativa casella, la classe che frequenti: | 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~ |

PARTE B

1 Cosa è una definizione geometrica? A tuo parere quale scopo ha? Ho una definizione riguardante la geometria

Visto che è lo studio delle definizioni fondamentali punto retta ecc

2 In basso sono riportate alcune definizioni del concetto di angolo. Sono tutte corrette? Quale/i preferisci e perché?

A un angolo *ABC* è una coppia di semirette *BA, BC* (dette *lati*) non appartenenti alla stessa retta, aventi la stessa origine *B* (*vertice*).

B è la differenza di direzione tra due semirette *BA, BC* non appartenenti alla stessa retta, aventi la stessa origine *B* (*vertice*).

C è una parte di piano delimitata da una coppia di semirette non allineate, aventi la stessa origine

D è la regione di piano spazzata da una semiretta che ruota, *in un verso* prefissato, attorno alla sua origine,dalla posizione iniziale *a* alla posizione finale *b*

La lettera C È la definizione di angolo.

3 Quale delle definizioni si avvicina maggiormente a quella che tu conosci?

Quella che si avvicina di più è la C

4 Le definizioni riportate sopra, permettono di identificare l'angolo piatto, l'angolo nullo e l'angolo giro? Perché?

L'angolo giro perché parla di due semirette allineate con le stesse origine

5 Pensi che la definizione di angolo - in geometria - ha avuto una storia semplice e breve? Perché?

No non è stato breve perchè sin dai tempi antichi c'è stato uno sviluppo sostanziale nel campo matematico.

6 Tre studenti stanno discutendo tra loro su come classificare l'angolo da un punto di vista filosofico.

- Antonio afferma che l'angolo appartiene alla categoria **quantità** (di piano compreso tra due semirette);
- Biagio sostiene che l'angolo appartiene alla categoria **qualità** (angolo curvilineo, rettilineo, misto oppure acuto, ottuso retto);
- Carlo afferma che l'angolo appartiene alla categoria **relazione** (riferendosi all'inclinazione reciproca delle semirette dell'angolo).

Chi ha ragione e chi ha torto? Perché?

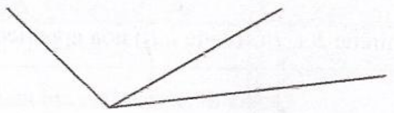
Ha ragione Antonio

7 E' possibile disegnare un angolo di 765°? Giustifica la risposta.

T2 No ~~per~~ perchè si è riusciti a disegnare un angolo di 360°

8 Uno studente afferma che la figura in basso individua 3 angoli. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?

2 (B) 13

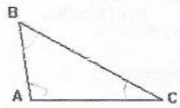


V2

CI SONO 3 ANGOLI PERCHÉ ABBIAMO UN PUNTO DI ORI

9 Uno studente afferma che il triangolo ABC è l'intersezione dei tre angoli BAC, ACB, ABC. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?

1 2 1

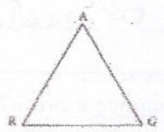


V2

Si è sbagliato perchè le rette non si intersecano.
L'errore che commette è molto grave

10 Uno studente afferma che gli angoli del triangolo ARG sono uguali perché comprendono la stessa parte di piano. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?

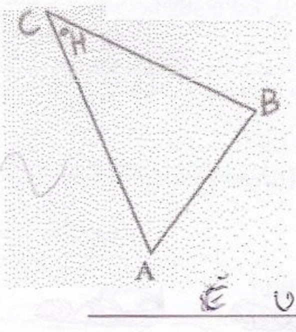
13 B2 C3



La stessa parte di piano perchè sono uguali.

11 Uno studente afferma che i punti A e H appartengono a tutti gli angoli del triangolo. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?

1 2 F3



V2

È UN'ERRORE PERCHÉ (H) APPARTIENE A(C)

QUESTIONARIO SULL'APPRENDIMENTO

I dati del presente questionario saranno elaborati ai fini di ricerca, in forma anonima. Ti preghiamo di rispondere sinceramente, motivando le risposte.

Grazie per la collaborazione!

PARTE A

1) Ti piace la matematica? Si

2) Capisci sempre le correzioni dei tuoi errori? Ti aiutano ad imparare?

No, di solito non li capisco i miei errori, però ci sta sempre l'insegnante che mi aiuta a capire i miei errori. Infatti la ringrazio sempre l'insegnante

3) Cosa suggeriresti all'insegnante per la correzione degli errori a casa e in classe?

- X correggere insieme, discutendo;
- correggere insieme;
- X correggere individualmente, in classe;
- X correggere tutto quello che si fa, sia a casa che a scuola;
- correggere quaderno per quaderno;
- X spiegarmi meglio;
- correggere durante l'intervallo;
- dire le correzioni ad alta voce;
- X dire le correzioni a bassa voce;
- X dire gli errori, così lo capisco;
- niente correzioni, spiegarmi l'errore a voce e poi farmi rifare sul foglio.
- X stare attento mentre lavoro così mi controlla;
- riprendere un argomento già spiegato;
- utilizzare un libro che spieghi benissimo:
- metter i voti;
- correggere bene a casa;
- X lasciarmi provare a correggere da solo e poi spiegarmi;
- correggere a piccoli gruppi;
- altro (specificare)______________

4) E' meglio la correzione fatta davanti alla classe o personale? Perché?

La correzione fatta davanti alla classe è sbagliata perché essendo un ragazzo timido, ho vergogna degli errori che ho fatto, quindi è meglio personale.

5) Hai un ricordo particolarmente negativo circa una correzione di un errore in matematica (dalle elementari ad oggi)?

In caso affermativo descrivi dettagliatamente l'esperienza

Stavo alle medie e ricordo che la prof. davanti a tutti i miei amici mi chiamò "Deficiente" però la ringrazio perché grazie a lei sono crescito.

6) Hai un ricordo particolarmente positivo circa una correzione di un errore in matematica (dalle elementari ad oggi)?

In caso affermativo descrivi dettagliatamente l'esperienza

~~[illegible]~~ Si

7) **A tuo parere è vero che l'errore in matematica ha un ruolo più importante che in altre materie?**

Perchè?

Ha un ruolo importante perché è facile a concepire l'errore perché la matematica non cambia mai

8) **Dai una tua definizione di errore**

17 Lo studio della funzione.

9) **Leggi le seguenti affermazioni sulla matematica e dici quale condividi. Se nessuna si adatta alla tua scrivine una personale:**

A Gli oggetti matematici – e dunque tutta la matematica – esistono sempre, al di là di ogni contesto temporale e indipendentemente dall'essere umano. Il compito del matematico è decifrarli e investigare queste verità. Il matematico è uno scopritore più che un inventore.

~~B~~ La matematica è una collezione di sistemi formali i cui elementi sono manipolati e combinati secondo specifiche regole del gioco. Queste regole del gioco, le definizioni e le dimostrazioni di teoremi, sono il solo interesse del matematico. Il formalista è un inventore più che uno scopritore. Per lui la questione degli oggetti matematici non si presenta. Per lui basta provare che le sue regole del gioco non portano a contraddizione.

C La matematica è ammessa nella misura in cui i suoi oggetti sono costruiti a partire da certi oggetti di base primitivi in un numero finito di passi.

D La conoscenza matematica non è assoluta, ma fallibile e correggibile.

10) **Nel corso della storia, pensi che i matematici abbiano commesso alcuni errori nei loro studi? Credi che ciò abbia influenzato positivamente o negativamente il progresso della conoscenza matematica?**

Nel corso della storia tutti i matematici sono stati esseri umani quindi è ovvio che ci sono state errore. quindi hanno influenzato positivamente il progresso

11) **Quale è il tuo voto in matematica?** 5

Indica, barrando la relativa casella, la classe che frequenti: | 1 | 2 | 3 | 4 | ~~5~~ |

N3

PARTE B

1 Cosa è una definizione geometrica? A tuo parere quale scopo ha? È lo studio degli enti fondamentali: punto, retta, angolo ecc.

2 In basso sono riportate alcune definizioni del concetto di angolo. Sono tutte corrette? Quale/i preferisci e perché?

A un angolo *ABC* è una coppia di semirette *BA*, *BC* (dette *lati*) non appartenenti alla stessa retta, aventi la stessa origine *B* (*vertice*).

B è la differenza di direzione tra due semirette *BA*, *BC* non appartenenti alla stessa retta, aventi la stessa origine *B* (*vertice*).

C è una parte di piano delimitata da una coppia di semirette non allineate, aventi la stessa origine

D è la regione di piano spazzata da una semiretta che ruota, *in un verso* prefissato, attorno alla sua origine, dalla posizione iniziale *a* alla posizione finale *b*

Perché se non sbaglio è la vera definizione dell'angolo.

3 Quale delle definizioni si avvicina maggiormente a quella che tu conosci?

la B.

4 Le definizioni riportate sopra, permettono di identificare l'angolo piatto, l'angolo nullo e l'angolo giro? Perché?

L'angolo giro perché si avvicina molto alla definizione B.

5 Pensi che la definizione di angolo - in geometria - ha avuto una storia semplice e breve? Perché?

Sì, ha avuto una storia breve perché ha uno sviluppo sostanziale per i matematici.

6 Tre studenti stanno discutendo tra loro su come classificare l'angolo da un punto di vista filosofico.

- Antonio afferma che l'angolo appartiene alla categoria quantità (di piano compreso tra due semirette);

X Biagio sostiene che l'angolo appartiene alla categoria **qualità** (angolo curvilineo, rettilineo, misto oppure acuto, ottuso retto);

- Carlo afferma che l'angolo appartiene alla categoria **relazione** (riferendosi all'inclinazione reciproca delle semirette dell'angolo).

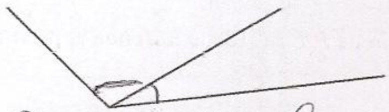
Chi ha ragione e chi ha torto? Perché?

Biagio, ha ragione perché l'angolo appartiene a una qualità ma non a una quantità o relazione.

7 E' possibile disegnare un angolo di 765°? Giustifica la risposta.

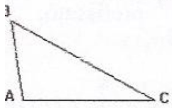
No, non è possibile perchè i matematici hanno studiato e disegnato un angolo fino a 360°

8 Uno studente afferma che la figura in basso individua 3 angoli. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?



Si, si sbaglia perchè riporta con 2 angoli

9 Uno studente afferma che il triangolo ABC è l'intersezione dei tre angoli BAC, ACB, ABC. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?

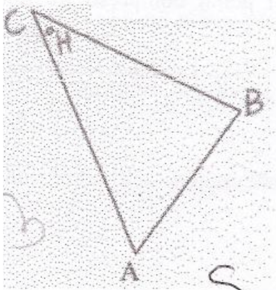


Si, ha ragione.

10 Uno studente afferma che gli angoli del triangolo ARG sono uguali perché comprendono la stessa parte di piano. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?

Si, ha ragione.

11 Uno studente afferma che i punti A e H appartengono a tutti gli angoli del triangolo.
Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?



Si, ha ragione.

QUESTIONARIO SULL'APPRENDIMENTO

I dati del presente questionario saranno elaborati ai fini di ricerca, in forma anonima. Ti preghiamo di rispondere sinceramente, motivando le risposte.

Grazie per la collaborazione!

PARTE A

1) Ti piace la matematica? ABBASTANZA

2) Capisci sempre le correzioni dei tuoi errori? Ti aiutano ad imparare?

NON sempre, in effetti se CHIEDO L'AIUTO A UN AMICO RIESCO A CAPIRE I MIEI ERRORI

3) Cosa suggeriresti all'insegnante per la correzione degli errori a casa e in classe?

X correggere insieme, discutendo;
- correggere insieme;
X correggere individualmente, in classe;
- correggere tutto quello che si fa, sia a casa che a scuola;
- correggere quaderno per quaderno;
- spiegarmi meglio;
- correggere durante l'intervallo;
- dire le correzioni ad alta voce;
- dire le correzioni a bassa voce;
- dire gli errori, così lo capisco;
- niente correzioni, spiegarmi l'errore a voce e poi farmi rifare sul foglio.
- stare attento mentre lavoro così mi controlla;
- riprendere un argomento già spiegato;
- utilizzare un libro che spieghi benissimo:
- metter i voti;
- correggere bene a casa;
- lasciarmi provare a correggere da solo e poi spiegarmi;
- correggere a piccoli gruppi;
- altro (specificare)____________

4) E' meglio la correzione fatta davanti alla classe o personale? Perché?

MEGLIO DAVANTI ALLA CLASSE, IN TAL MODO SI PUÒ RIFLETTERE SU GLI ERRORI DI OGNUNO E APPRENDERE PIÙ COSE

5) Hai un ricordo particolarmente negativo circa una correzione di un errore in matematica (dalle elementari ad oggi)?

In caso affermativo descrivi dettagliatamente l'esperienza

SI, ALLE SCUOLE MEDIE IN UN COMPITO FECI UN ERRORE BANALE E LA PROFESSORESSA LO MISE IN EVIDENZA DAVANTI ALLA CLASSE NON NASCONDO CHE MI DIEDE MOLTO FASTIDIO

6) Hai un ricordo particolarmente positivo circa una correzione di un errore in matematica (dalle elementari ad oggi)?

In caso affermativo descrivi dettagliatamente l'esperienza

SI, RICORDO DI UN PROBLEMA FATTO ALLE SCUOLE MEDIE, IO FUI UNO DEI

POCHI A RISOLVERE BENE IL PROBLEMA

7) A tuo parere è vero che l'errore in matematica ha un ruolo più importante che in altre materie? Perchè?

IN EFFETTI È VERO POICHÈ POI IN FUTURO SARÀ PIÙ DIFFICILE FARE LO STESSO ERRORE

8) Dai una tua definizione di errore

UN MODO SCORRETTO DI SVOLGERE UN'OPERAZIONE

9) Leggi le seguenti affermazioni sulla matematica e dici quale condividi. Se nessuna si adatta alla tua scrivine una personale:

A Gli oggetti matematici – e dunque tutta la matematica – esistono sempre, al di là di ogni contesto temporale e indipendentemente dall'essere umano. Il compito del matematico è decifrarli e investigare queste verità. Il matematico è uno scopritore più che un inventore.

B La matematica è una collezione di sistemi formali i cui elementi sono manipolati e combinati secondo specifiche regole del gioco. Queste regole del gioco, le definizioni e le dimostrazioni di teoremi, sono il solo interesse del matematico. Il formalista è un inventore più che uno scopritore. Per lui la questione degli oggetti matematici non si presenta. Per lui basta provare che le sue regole del gioco non portano a contraddizione.

C La matematica è ammessa nella misura in cui i suoi oggetti sono costruiti a partire da certi oggetti di base primitivi in un numero finito di passi.

D La conoscenza matematica non è assoluta, ma fallibile e correggibile.

APPARTE CHE LA MATEMATICA NON È UN OPINIONE, È UN INSIEME DI MECCANISMI CHE VANNO APPRESI GRADUALMENTE

10) Nel corso della storia, pensi che i matematici abbiano commesso alcuni errori nei loro studi? Credi che ciò abbia influenzato positivamente o negativamente il progresso della conoscenza matematica?

NO, CREDO CHE ABBIANO AIUTATO MOLTO ALLA SCOPERTA DEI TEOREMI CHE OGGI CI PERMETTONO DI FACILITARE DETERMINATE OPERAZIONI

11) Quale è il tuo voto in matematica? 5

Indica, barrando la relativa casella, la classe che frequenti:

1	2	3	~~4~~	5

PARTE B

1 Cosa è una definizione geometrica? A tuo parere quale scopo ha? LA GEOMETRIA AIUTA A SVILUPPARE LA CAPACITÀ DI PROSPETTIVA// DESCRIVE IL RAGIONAMENTO CON CUI SI ARRIVA AL TEOREMA

2 In basso sono riportate alcune definizioni del concetto di angolo. Sono tutte corrette? Quale/i preferisci e perché?

A un angolo *ABC* è una coppia di semirette *BA, BC* (dette *lati*) non appartenenti alla stessa retta, aventi la stessa origine *B* (*vertice*).

B è la differenza di direzione tra due semirette *BA, BC* non appartenenti alla stessa retta, aventi la stessa origine *B* (*vertice*).

X C è una parte di piano delimitata da una coppia di semirette non allineate, aventi la stessa origine

D è la regione di piano spazzata da una semiretta che ruota, *in un verso* prefissato, attorno alla sua origine, dalla posizione iniziale *a* alla posizione finale *b*

3 Quale delle definizioni si avvicina maggiormente a quella che tu conosci?
LA LETTERA "C"

4 Le definizioni riportate sopra, permettono di identificare l'angolo piatto, l'angolo nullo e l'angolo giro? Perché?
TUTTI I TIPI DI ANGOLI POICHÈ TUTTI HANNO LE STESSE CARATTERISTICHE

5 Pensi che la definizione di angolo - in geometria - ha avuto una storia semplice e breve? Perché?
NO, SE NON SBAGLI PITAGORA INCOMINCIÒ GLI STUDI A RIGUARDO

6 Tre studenti stanno discutendo tra loro su come classificare l'angolo da un punto di vista filosofico.

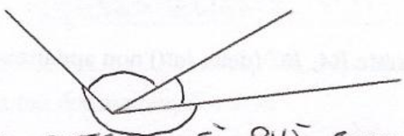
- Antonio afferma che l'angolo appartiene alla categoria **quantità** (di piano compreso tra due semirette);
- Biagio sostiene che l'angolo appartiene alla categoria **qualità** (angolo curvilineo, rettilineo, misto oppure acuto, ottuso retto);
- X Carlo afferma che l'angolo appartiene alla categoria **relazione** (riferendosi all'inclinazione reciproca delle semirette dell'angolo).

Chi ha ragione e chi ha torto? Perché?
CREDO CHE CARLO ABBIA ~~[illegible]~~ RAGIONE, POICHÈ NON CREDO SIA LA QUALITÀ POTREBBE ESSERE IN EFFETTI LA QUANTITÀ PERÒ NON PRECISA LA PROVENIENZA

7 E' possibile disegnare un angolo di 765°? Giustifica la risposta.

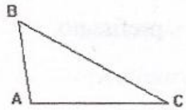
T1 CREDO DI NO POICHÈ IL MASSIMO VALORE ESPRIMIBILE SUL PIANO SI 360°, ESCLUDENDO LA PERIODICITÀ

8 Uno studente afferma che la figura in basso individua 3 angoli. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?



IN EFFETTI È PIÙ SPONTANE CONSIDERARNE 2 SE SI ESCLUDE L'ANGOLO ESTERNO

9 Uno studente afferma che il triangolo ABC è l'intersezione dei tre angoli BAC, ACB, ABC. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?

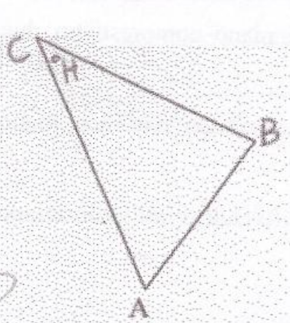


NON CREDO CHE SIA UN INTERSEZIONE

10 Uno studente afferma che gli angoli del triangolo ARG sono uguali perché comprendono la stessa parte di piano. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?

SI, POICHÈ IN FIGURA È UN TRIANGOLO EQUILATERO E AVENDO I TRE LATI UGUALI FORMA 3 ANGOLI UGUALI

11 Uno studente afferma che i punti A e H appartengono a tutti gli angoli del triangolo. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?



NON SO ESPRIMERE UN'OPINIONE

QUESTIONARIO SULL'APPRENDIMENTO

I dati del presente questionario saranno elaborati ai fini di ricerca, in forma anonima. Ti preghiamo di rispondere sinceramente, motivando le risposte.

Grazie per la collaborazione!

PARTE A

1) Ti piace la matematica? Vorrei che mi PIACESSE...
2) Capisci sempre le correzioni dei tuoi errori? Ti aiutano ad imparare?

A volte si, le capisco le correzioni dei miei errori. In molti casi si, mi aiutano ad imparare.

3) Cosa suggeriresti all'insegnante per la correzione degli errori a casa e in classe?

- correggere insieme, discutendo;
- correggere insieme;
- correggere individualmente, in classe;
- correggere tutto quello che si fa, sia a casa che a scuola;
- correggere quaderno per quaderno;
- spiegarmi meglio;
- correggere durante l'intervallo;
- dire le correzioni ad alta voce;
- dire le correzioni a bassa voce;
- dire gli errori, così lo capisco;
- niente correzioni, spiegarmi l'errore a voce e poi farmi rifare sul foglio.
- stare attento mentre lavoro così mi controlla;
- riprendere un argomento già spiegato;
- utilizzare un libro che spieghi benissimo;
- metter i voti;
- correggere bene a casa;
- lasciarmi provare a correggere da solo e poi spiegarmi;
- correggere a piccoli gruppi;
- altro (specificare)

4) E' meglio la correzione fatta davanti alla classe o personale? Perché?

Secondo me è meglio la correzione personale, perché comunque concentrata su un solo alunno la correzione è più facile da capire

5) Hai un ricordo particolarmente negativo circa una correzione di un errore in matematica (dalle elementari ad oggi)? Sì...

In caso affermativo descrivi dettagliatamente l'esperienza

In terza media, quando venni chiamato alla lavagna quando non seppi risolvere un'espressione, la professoressa mi umiliò davanti a tutta la classe.

6) Hai un ricordo particolarmente positivo circa una correzione di un errore in matematica (dalle elementari ad oggi)? NO

In caso affermativo descrivi dettagliatamente l'esperienza

7) A tuo parere è vero che l'errore in matematica ha un ruolo più importante che in altre materie? Sì

Perchè?

Si, perchè sbagliando in matematica si sbaglia tutto.

8) Dai una tua definizione di errore

Errore viene fuori, dal fatto che poi si cumpara sbagliando.

9) Leggi le seguenti affermazioni sulla matematica e dici quale condividi. Se nessuna si adatta alla tua scrivine una personale:

A Gli oggetti matematici – e dunque tutta la matematica – esistono sempre, al di là di ogni contesto temporale e indipendentemente dall'essere umano. Il compito del matematico è decifrarli e investigare queste verità. Il matematico è uno scopritore più che un inventore.

B La matematica è una collezione di sistemi formali i cui elementi sono manipolati e combinati secondo specifiche regole del gioco. Queste regole del gioco, le definizioni e le dimostrazioni di teoremi, sono il solo interesse del matematico. Il formalista è un inventore più che uno scopritore. Per lui la questione degli oggetti matematici non si presenta. Per lui basta provare che le sue regole del gioco non portano a contraddizione.

C La matematica è ammessa nella misura in cui i suoi oggetti sono costruiti a partire da certi oggetti di base primitivi in un numero finito di passi.

D La conoscenza matematica non è assoluta, ma fallibile e correggibile.

10) Nel corso della storia, pensi che i matematici abbiano commesso alcuni errori nei loro studi? Credi che ciò abbia influenzato positivamente o negativamente il progresso della conoscenza matematica?

Non penso che abbiano commesso degli errori.

11) Quale è il tuo voto in matematica? 3;4

Indica, barrando la relativa casella, la classe che frequenti:

1	2	3	4	5

PARTE B

1 Cosa è una definizione geometrica? A tuo parere quale scopo ha? Non lo so

2 In basso sono riportate alcune definizioni del concetto di angolo. Sono tutte corrette? Quale/i preferisci e perché?

A un angolo *ABC* è una coppia di semirette *BA, BC* (dette *lati*) non appartenenti alla stessa retta, aventi la stessa origine *B* (*vertice*).

B è la differenza di direzione tra due semirette *BA, BC* non appartenenti alla stessa retta, aventi la stessa origine *B* (*vertice*).

C è una parte di piano delimitata da una coppia di semirette non allineate, aventi la stessa origine

D è la regione di piano spazzata da una semiretta che ruota, *in un verso* prefissato, attorno alla sua origine,dalla posizione iniziale *a* alla posizione finale *b*

3 Quale delle definizioni si avvicina maggiormente a quella che tu conosci?

Alla B

4 Le definizioni riportate sopra, permettono di identificare l'angolo piatto, l'angolo nullo e l'angolo giro? Perché?

5 Pensi che la definizione di angolo - in geometria - ha avuto una storia semplice e breve? Perché?

No, perché comunque esiste da sempre.

6 Tre studenti stanno discutendo tra loro su come classificare l'angolo da un punto di vista filosofico.

- Antonio afferma che l'angolo appartiene alla categoria **quantità** (di piano compreso tra due semirette);
- Biagio sostiene che l'angolo appartiene alla categoria **qualità** (angolo curvilineo, rettilineo, misto oppure acuto, ottuso retto);
- Carlo afferma che l'angolo appartiene alla categoria **relazione** (riferendosi all'inclinazione reciproca delle semirette dell'angolo).

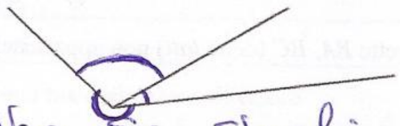
Chi ha ragione e chi ha torto? Perché?

Secondo me ha ragione BIAGIO, perché è vero quello che dice.

FIRN: VIS CLSN

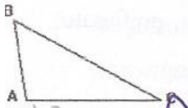
Penso di no, che io sappia un'angolo arriva a 360°.. (HAHAHA)...

8 Uno studente afferma che la figura in basso individua 3 angoli. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?



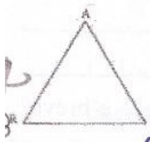
Non si sbaglia, perchè questa figura ha 3 angoli, anche se sembra che il terzo non ci sia.

9 Uno studente afferma che il triangolo ABC è l'intersezione dei tre angoli BAC, ACB, ABC. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?



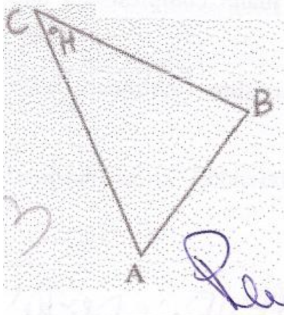
Non saprei, perchè nemmeno io lo so!

10 Uno studente afferma che gli angoli del triangolo ARG sono uguali perché comprendono la stessa parte di piano. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?



Non penso che si sbagli, penso che quello che ha detto sia vero.

11 Uno studente afferma che i punti A e H appartengono a tutti gli angoli del triangolo. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?



Penso di no.

QUESTIONARIO SULL'APPRENDIMENTO

I dati del presente questionario saranno elaborati ai fini di ricerca, in forma anonima. Ti preghiamo di rispondere sinceramente, motivando le risposte.

Grazie per la collaborazione!

PARTE A

1) Ti piace la matematica? NO perché non capisco nulla
2) Capisci sempre le correzioni dei tuoi errori? Ti aiutano ad imparare?

NO, SI

3) Cosa suggeriresti all'insegnante per la correzione degli errori a casa e in classe?

X correggere insieme, discutendo;
- correggere insieme;
- correggere individualmente, in classe;

X correggere tutto quello che si fa, sia a casa che a scuola;
- correggere quaderno per quaderno;
- spiegarmi meglio;
- correggere durante l'intervallo;
- dire le correzioni ad alta voce;
- dire le correzioni a bassa voce;
- dire gli errori, così lo capisco;
- niente correzioni, spiegarmi l'errore a voce e poi farmi rifare sul foglio.
- stare attento mentre lavoro così mi controlla;
- riprendere un argomento già spiegato;
- utilizzare un libro che spieghi benissimo:
- metter i voti;
- correggere bene a casa;

X lasciarmi provare a correggere da solo e poi spiegarmi;
- correggere a piccoli gruppi;
- altro (specificare)______________

4) E' meglio la correzione fatta davanti alla classe o personale? Perché?

PERSONALE, perché così si capisce di più

5) Hai un ricordo particolarmente negativo circa una correzione di un errore in matematica (dalle elementari ad oggi)? NO

In caso affermativo descrivi dettagliatamente l'esperienza

6) Hai un ricordo particolarmente positivo circa una correzione di un errore in matematica (dalle elementari ad oggi)? SI

In caso affermativo descrivi dettagliatamente l'esperienza

la professoressa mi spiega più di 1 volta e io faccio sempre lo stesso errore

7) A tuo parere è vero che l'errore in matematica ha un ruolo più importante che in altre materie? Perché?

si perchè in matematica sbagli un calcolo si sbaglia tutta l'espressione mentre nelle altre no.

8) Dai una tua definizione di errore

J3

Quando uno non si concentra bene e fa calcoli sbagliati.

J15

9) Leggi le seguenti affermazioni sulla matematica e dici quale condividi. Se nessuna si adatta alla tua scrivine una personale:

A Gli oggetti matematici – e dunque tutta la matematica – esistono sempre, al di là di ogni contesto temporale e indipendentemente dall'essere umano. Il compito del matematico è decifrarli e investigare queste verità. Il matematico è uno scopritore più che un inventore.

B La matematica è una collezione di sistemi formali i cui elementi sono manipolati e combinati secondo specifiche regole del gioco. Queste regole del gioco, le definizioni e le dimostrazioni di teoremi, sono il solo interesse del matematico. Il formalista è un inventore più che uno scopritore. Per lui la questione degli oggetti matematici non si presenta. Per lui basta provare che le sue regole del gioco non portano a contraddizione.

C La matematica è ammessa nella misura in cui i suoi oggetti sono costruiti a partire da certi oggetti di base primitivi in un numero finito di passi.

D La conoscenza matematica non è assoluta, ma fallibile e correggibile.

10) Nel corso della storia, pensi che i matematici abbiano commesso alcuni errori nei loro studi? Credi che ciò abbia influenzato positivamente o negativamente il progresso della conoscenza matematica?

~~[illegible]~~ Positivamente il progresso della conoscenza in matematica

11) Quale è il tuo voto in matematica? 1

Indica, barrando la relativa casella, la classe che frequenti: | 1 | ~~2~~ | 3 | 4 | 5 |

PARTE B

1 Cosa è una definizione geometrica? A tuo parere quale scopo ha?

2 In basso sono riportate alcune definizioni del concetto di angolo. Sono tutte corrette? Quale/i preferisci e perché?

A un angolo *ABC* è una coppia di semirette *BA, BC* (dette *lati*) non appartenenti alla stessa retta, aventi la stessa origine *B* (*vertice*).

B è la differenza di direzione tra due semirette *BA, BC* non appartenenti alla stessa retta, aventi la stessa origine *B* (*vertice*).

C è una parte di piano delimitata da una coppia di semirette non allineate, aventi la stessa origine

D è la regione di piano spazzata da una semiretta che ruota, *in un verso* prefissato, attorno alla sua origine,dalla posizione iniziale *a* alla posizione finale *b*

3 Quale delle definizioni si avvicina maggiormente a quella che tu conosci?

NESSUNO

4 Le definizioni riportate sopra, permettono di identificare l'angolo piatto, l'angolo nullo e l'angolo giro? Perché?

5 Pensi che la definizione di angolo - in geometria - ha avuto una storia semplice e breve? Perché?

6 Tre studenti stanno discutendo tra loro su come classificare l'angolo da un punto di vista filosofico.

- Antonio afferma che l'angolo appartiene alla categoria **quantità** (di piano compreso tra due semirette);

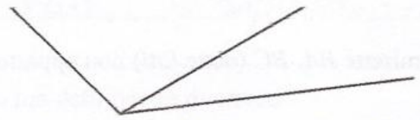
Biagio sostiene che l'angolo appartiene alla categoria **qualità** (angolo curvilineo, rettilineo, misto oppure acuto, ottuso retto);

- Carlo afferma che l'angolo appartiene alla categoria **relazione** (riferendosi all'inclinazione reciproca delle semirette dell'angolo).

Chi ha ragione e chi ha torto? Perché?

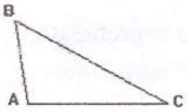
7 E' possibile disegnare un angolo di 765°? Giustifica la risposta.

8 Uno studente afferma che la figura in basso individua 3 angoli. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?



si sbaglia ed l'errore è grave

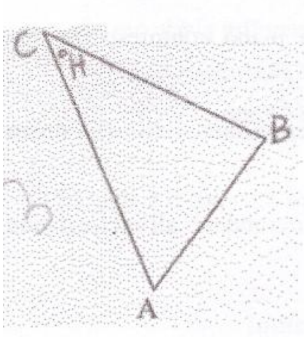
9 Uno studente afferma che il triangolo ABC è l'intersezione dei tre angoli BAC, ACB, ABC. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?



10 Uno studente afferma che gli angoli del triangolo ARG sono uguali perché comprendono la stessa parte di piano. Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?

sbaglia il triangolo solo 2 lati a uguale
l'errore è grave

11 Uno studente afferma che i punti A e H appartengono a tutti gli angoli del triangolo.
Si sbaglia oppure no? Perchè? L'errore che eventualmente commette è grave oppure no?



BIBLIOGRAFIA

AGAZZI E. PALLADINO D., 1998, *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*, La Scuola, Brescia

AMALDI U.,1924, Sui concetti di retta e piano – in Enriques, *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, Zanichelli, Bologna, vol I

ARZARELLO E ALTRI, 1992, *Matematica-Problemi*, Morano, Napoli

BAGNI G.T., Storie di concetti matematici: contesti socio-culturali e riorganizzazioni del sapere *Bollettino dei Docenti di Matematica* 50, 81-95

BACHELARD G., 1938, *La formation de l'esprit scientifique*, Librairie philosophique Paris

BALDINI M., 1986, *Pedagogia, epistemologia e didattica dell'errore*, La Scuola, Brescia

BELL E. T., 1949, *La magia dei numeri*, Longanesi, Milano

BANDURA A., 1977, Self-Efficacy: Toward Unifying Theory of Behavioral Change, *Psychological Review*

BANDURA A., 1986, *Social foundations of thought and action: A social cognitive theory*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall

BANDURA A., 1996 (a cura di), *Il senso di autoefficacia. Aspettative su di sé e azione*, Erickson, Trento

BANDURA A., 1999 Il senso di autoefficacia nel funzionamento cognitivo e nell'apprendimento, in Ianes D. Tortello M., 1999, *La qualità dell'integrazione scolastica*, Trento, Erickson

BANDURA A., 2000 (a cura di), *Autoefficacia. Teoria e applicazioni*, Trento, Erickson

BELL J. L., 2001, *The art of the intelligible An elementary Survey of Mathematics in its Conceptual* Kluwer Academic Publishers Dordrecht ;Boston ;London

BERTHELOT R., SALIN M.H., 1994, Common Spatial Representations and their Effects upon Teaching and Learning of Space and Geometry, *Proc. PME XVIII*, Lisbona

BESTHORN R.O. e HEIBERG J.- 1893-97 Codex Leidensis 399, 1. Euclidis Elementa ex interpretatione Al-Hadschdschadsch cum commentariis Al-Narizii, F. Hegel, Copenhague

BIANCHI R., PEDRAZZOLI L., 1987, La nozione di angolo - Cenni teorici, in *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol 10, Sez. A, n. 7, 637-649

BINANTI L., 2005, (a cura di) *Sbagliando s'impara. Una rivalutazione dell'errore*, Armando, Roma

BLANCHE R. ,1968, *Logica e assiomatica*, La Nuova Italia, Firenze

BONOLA R., 1906 *La geometria non euclidea- Esposizione storico-critica del suo sviluppo,* Zanichelli, Bologna

BORGA M. FURINGHETTI F., 1986, *Il problema dei fondamenti della matematica,*ECIG

BORZACCHINI L., 2005, Il computer di Platone: alle origini del pensiero logico e matematico , Dedalo Edizioni, Bari

BOTTAZZINI U ., 1990, *Il flauto di Hilbert*, UTET, Torino

BOURBAKI N., 1963, *Elementi di Storia della Matematica*, Feltrinelli, Milano

BOYER C., 1976, *Storia delle matematiche*, I.S.E.D.I., Milano

BOZZOLO C. C., (1998) Un percorso pieno di ... angoli, in *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate ,* 21A-B n.6 ,611

BRACCHI I., COSTA A., L'angolo, 1987, Un possibile itinerario didattico, in *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 10 A, n. 7, 650-674

BROUSSEAU G.,1997, *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Editorial Kluwer Academic Publishers

CANTONI M. e altri, 2000, Verso il concetto di angolo: come comunicare la complessità di una ricerca in didattica della matematica , in *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate* 23A-B, N. 6, 655-667

CASTELLI GATTINARA E., 2003, *Strane alleanze - Storici filosofi scienziati a confronto nel Novecento*, Mimesis edizioni, Milano

CATASTINI L. e GHIONE F ., 2004, *Le geometrie della visione*, Springer Verlag Italia

CATTABRINI, U., DI PAOLA V.,1997, *Matematica e poesia: un tema difficile?*, Irrsae Toscana, Firenze,

CHOUQUET G., 1969, *L'insegnamento della geometria*, Feltrinelli, Milano

CORNOLDI C., 1980, *Perché il bambino non riesce in matematica?*, Erip,Pordenone

CORNOLDI C., 2005, *Metacognizione e apprendimento*, Bologna, Il Mulino

CORNOLDI C., 2006, *Le difficoltà di apprendimento a scuola*, Bologna, Il Mulino.

CURTZE M., 1899, Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis Commentarii. Ex interpretazione Gherardi Cremonensis in codice Cracoviensi 569 servata. Teubner, Lipsia,

D'AMORE B.,1985, L'idea di "angolo" nell'antichità e la sua evoluzione, in *Le Scienze matematiche e il loro insegnamento*. 1, 6-18.

D'AMORE, 1999, *Elementi di didattica della matematica*, Pitagora, Bologna

D'AMORE B., 2001 Scritti di Epistemologia Matematica, Pitagora, Bologna.

D'AMORE B. FANDINO PINILLA M.I., 2004, Cambi di convinzione in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale, in *La matematica e la sua didattica*. 3, 27-50.

D'AMORE B. FANDINO PINILLA M.I., 2005, Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti, in *La matematica ela sua didattica.* 2, Pitagora, Bologna 165-190

D'AMORE B. FANDINO PINILLA M.I., 2006, Area e perimetro *Aspetti concettuali e didattici* Erickson,Trento

D'AMORE B., MARAZZANI I., 2008, L'angolo, oggetto matematico e modello spontaneo, in *La matematica e la sua didattica*. Vol. 22, n° 3, 285-329 , Pitagora, Bologna

D'AMORE B., MARAZZANI I., 2009 Un concetto dall'apprendimento complesso, l'angolo, in D'amore B. Sbaragli S., 2009, *Pratiche matematiche e didattiche in aula*.Atti del Convegno Nazionale "Incontri con la matematica" n. 23. Castel San Pietro Terme, 6-7-8 novembre 2009, Pitagora, Bologna

DE FINETTI B., 1937, Pirandello Maestro di Logica , in *Quadrivio* , 5 -12

DEMATTE' A. FURINGHETTI F.,1971, *The activities of teaching,* McGraw-Hill, New York

DEMATTE' A., 1999 *An exploratory study on students'beliefs about mathematics as a socio-cultural process,* in Philippou G., 1999 (a cura di), *Proceedings of the MAVI 7 Workshop (Current state of research on mathematical beliefs VII),* University of Cyprus

DEMATTE' A., 2000, Un'indagine sulle concezioni matematiche in alunni di scuola media, in *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* vol. 23, pp. 467-490.

DEMATTE' A., 2010,*Vedere la matematica. Noi con la storia* Editrice Uni Service,Trento

DIEDOUNNE' J.,1970, *Algebra lineare e geometria elementare*, Feltrinelli, Milano

DI MARTINO P., 2001 Emozioni e problem solving: un confronto tra bravi e cattivi solutori in Livorni E., Meloni G. & Pesci A. (a cura di), *Le difficoltà in matematica:da problema di pochi a risorsa per tutti.* Atti del Convegno Nazionale n.10 su Matematica e Difficoltà, Pitagora Editrice, Bologna, p. 89-96

DI MARTINO P., ZAN R., 2001a, *Attitude toward Mathematics: some theoretical issues*, 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol. 3, pp. 351-358.

DI MARTINO P., ZAN R., 2001b, The problematic relationship between beliefs and attitudes, Riita Soro (ed.), *Proceedings of the MAVI-X European Workshop,* (Kristianstad), pp.17-24

DI MARTINO P., 2002, Alcune riflessioni critiche sulla definizione di atteggiamento nei confronti della matematica, in Malara, N.A. & Marchini, C. & Navarra, G. & Tortora, R.*Processi didattici innovativi per la matematica nella scuola dell'obbligo*, Pitagora,Bologna, 71 – 81.

DI MARTINO P., ZAN R., 2002, An attempt to describe a 'negative' attitude toward mathematics, in Di Martino, P. (Ed.) *Proceedings of the MAVI-XI European Workshop*,(Pisa), 22-29

DI MARTINO P., 2004, *Difficoltà in matematica e sistemi di convinzioni*, Tesi di Dottorato, Università degli Studi di Pisa.

DI SAVERIO G., 2003, *La crisi dei fondamenti della matematica. Dal paradiso di Hilbert all'inferno di Gödel*, Tesi di Laurea, Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali, Università degli studi di Perugia

ENRIQUES F., 1912, *Scienza e razionalismo,* Zanichelli, Bologna

ENRIQUES F. 1924 *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, Zanichelli, Bologna

ENRIQUES F. col concorso di diversi collaboratori, 1925, *Gli Elementi di Euclide e la critica antica e moderna,* A. Stock Ed., , Vol. I., Roma

ENRIQUES F., 1934, *Signification de l'histore de la pensèe scientifique, Buletin de la Societè francaise de Philosophie*, XXXIV, seduta del 14 aprile 1934, pp.35-36

ENRIQUES F., 1938, *Le matematiche nella storia e nella cultura,* Zanichelli, Bologna

ENRIQUES F., 1942, L'errore nelle matematiche, *Periodico matematiche,* IV, XXII [Sotto lo pseudonimo A. Giovannini].

FERRARI M., PIZZETTI F., 1999, Il concetto di angolo nella matematica greca, *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate* 22B, n. 5, 407-431

FRAJESE A. 1950, Storia della matematica ed insegnamento medio, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, III, 337-342.

FRAJESE A. 1951, *La Matematica nel Mondo Antico*, Ed. Studium, Roma

FRAJESE A. 1969, *Attraverso la Storia della Matematica*, Ed. Le Monnier, Firenze

FRAJESE A., MACCIONI L., 1970, *Elementi di Euclide,* UTET,Torino

FREUDENTHAL H., 1973, Mathematics as an educational task, Riedel, Dodrecht

FURINGHETTI F., 1993, Insegnare matematica in una prospettiva storica, *L'educazione matematica*, III, IV, 123-134

FURINGHETTI F., PEHKONEN E., 2000, A comparative study on student's beliefs concerning their autonomy in doing mathematics, in *Nordic studies in mathematics education*, vol. 8, n. 4, pp. 7-26.

FURINGHETTI F., 2002, *Matematica come processo socioculturale. Fantasmi in classe e fuori: convinzioni, credenze, concezioni, miti*, Iprase, Trentino, Trento

GENTILE G. , 1922, *Sistemi di logica come teoria del conoscere*, Sansoni, Firenze

GIUSTI E., 1999, *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*, Boringhieri, Torino

HARDY G. H, 1989, *Apologia di un matematico*, Garzanti, Milano 1989.

HEATH T., 1956, *The Thirteen Books of the Elements,* Vol. 1 Dover Publication Inc., New York

HEATH T., 1920 *Euclid in Greek Book I,* Cambridge, University Press.

HEATH T., 1981, *A History of Greek Mathematics*, Dover Publication Inc.,Vol. I., New York

W. HEISENBERG W., 1978, *Mutamenti nelle basi della scienza*, Boringhieri, Torino

HERSH R E DAVIS P. J., 1985, *L'esperienza matematica (da Talete al computer*), Edizioni Comunità, Milano

HERSH R., 2001, *Cos'è davvero la matematica*, Baldini e Castoldi, Milano

HOYRUP J., 2002, *Lengths, Widths, Surfaces: A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*, Springer, New York

KLINE M., 1985, *Matematica: la perdita della certezza*, Mondatori, Milano

KLINE M, 1999, *Storia del pensiero matematico*, Einaudi, Torino

KRAINER K, 1991, Consequences of a Low Level of Acting and Reflecting in GeometryLearning - Findings of Interviews on the Concept of Angle, *Proc. PME XV*, vol.2, 254-261, Assisi

MAGINA S., HOYLES C., Developing a Map of Children's Conceptions of Angle, *Proc. PMEXV*, vol.2,358-364

MANGIONE C., BOZZI S., 1993, *Storia della logica. Da Boole ai nostri giorni*, Garzanti, Milano

MATOS J. M., 1994, Cognitive Models of the Concept of Angle, *Proc. PME XVIII*, vol.2,263-269

MC LEOD D. B.,1992, Research on affect in mathematics education: a reconceptualization, in Grows A., 1992 (a cura di), *Handbook of research on mathematics learining and teaching*, Macmillan,New York

MESCHKOWSKI H.,1999, *Mutamenti nel pensiero matematico*, Bollati Boringhieri, Torino

MITCHELMORE M. 1989, The Development of Children's Concepts of Angle, *Proc.PME XIII*, Parigi,vol2,304-311

MOLLO G., 1986, Il valore dell'errore nella dinamica dell'apprendimento, *Cultura e scuola*, aprile-giugno

PARKINSON, 1983, *Didattica dell'errore*, trad. it., Armando Editore, Roma

POINCARE' , 1904, Les définitions générales en mathématique, *L'Enseignement mathématique*, VI, pp. 225-283

POPPER K, 1969, Problemi, scopi e responsabilità della scienza, *Scienza e filosofia*, Torino

POPPER K, 1975, *Conoscenza oggettiva, un punto di vista evoluzionistico*, Armando, Roma

PORCARO R., 1993, Angolo: un problema didattico aperto, in *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 16, n. 8, 689-712

RADICE L. L., 1974, Il punto di vista matematico, in *Periodico di matematiche* n. 4-5 ottobre

RUSSELL B., 1918, La matematica e i metafisici, in *Misticismo e logica e altri saggi*, Longanesi, Milano

RUSSELL B., 1919, Introduzione alla filosofia matematica, in Casari E. , *La filosofia della matematica del '900* (1973), Sansoni, Firenze
RUSSELL B., 1963, *Introduzione alla filosofia matematica*, Longanesi, Milano
RUSSELL B., 1963 *I principi della matematica*,Longanesi, Milano
RUSSELL B., 1991 *Storia della filosofia occidentale*, TEA, Milano
SBARAGLI S., 2008, L'angolo: che problema! *La Vita Scolastica*16, 13-15
SCHOENFELD A. H.,1983, Episodes and executive decisions in mathematical Problem Solving, in Lesh R ., Landau M., 1983, *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Accademic Press, New York
SCHOENFELD A. H.,1987, *Cognitive Science and Mathematics Education*, Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates, NJ
SCHOENFELD A.H ,1992, Learning to think mathematically: Problem Solving, metacognition, and sense making in Mathematics, in Grows A., 1992, (a cura di), *Handbook of research on mathematics learining and teaching*, Macmillan, New York
SFARD A., 1991, On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins, in *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
SHAUGHNESSY J.M., 1985, Problem-Solving Derailers: The Influence of misconceptions on Problem-Solving performance, in Silver E. A.,1985, *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving*, Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates NJ
SILVER E.A.,1985, *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving*, Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates NJ
SILVER E.A ,1994, On mathematical problem posing, in *For the learning of mathematics*, vol. 14, n. 1, pp.19-28
SPERANZA F., 1996, I fondamenti epistemologici della matematica, in A.A.V.V., *I fondamenti della Matematica per la sua didattica e nei loro legami con la società contemporanea,* Atti del Congresso Nazionale della Mathesis, Verona 28/39 Novembre
SPERANZA F., 1997, *Scritti di epistemologia della matematica*, Pitagora, Bologna
SIU MAN KEUN, 2009, L'insegnamento e l'apprendimento dell'algebra a livello terziario (Traduzione di G.T. Bagni) VOL 32B n.4
SWETZ F.J., 1989, Using problems from the history of mathematics in classroom instruction, *In Mathematics Teacher*, 82, 370-377
TANNERY P., 1901, *Le philosophe Aganis est il identique a Geminus?* Biblioteca Math. (3), t. 2, p. 9-11

TOTH I., 1997, *Aristotele e i fondamenti della geometria – Prolegomeni alla comprensione dei frammenti non-euclidei nel "Corpus Aristotelicum", Vita e pensiero*, Milano

VAILATI G., 2003, *Gli strumenti della ragione*, a cura di M.Quaranta, Il Poligrafo,Padova

VESCOVINI G. F. , 2003, Le teorie della luce e della visione ottica dal IX al XV secolo, Morlacchi editore, Perugia

VILLANI V. e altri, 1994, Perpectives on the teaching of geometry for the 21st century, Discussion document for an ICMI Study, *L'EnseignementMathématique*, **40,** pp.345-357

VILLANI V., 2006, Cosa si intende per angolo? E perché questa nozione presenta tante difficoltà?, Pitagora, in *Cominciamo dal punto*, Pitagora, Bologna

ZAN R.,1998, *Problemi e convinzioni*, Pitagora, Bologna

ZAN R., 2000a, Le convinzioni, in *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate,* Vol. 23A, n. 2, pp.161 – 197.

ZAN R., 2000b, Emozioni e difficoltà in matematica, in *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, Vol. 23A, n. 3, 207 – 232; n. 4, pp.327 – 345.

ZAN R., 2000c, Atteggiamenti e difficoltà in matematica, in *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, Vol. 23A n. 5, pp.441 – 465

ZAN R., 2002 *Il fatalismo nell'apprendimento/insegnamento della matematica*, Convegno nazionale n. 16 sulla Didattica della Matematica e sulle sue applicazioni, vol. 1, pp. 89-103, Castel San Pietro Terme

ZAN R., 2007 *Difficoltà in matematica*, Springer-Verlag Italia, Milano

ZANATO ORLANDINI O., 1995, *Educare all'errore, educare al cambiamento. Riflessioni pedagogiche sull'errore nella prospettiva popperiana e oltre*, La Scuola ,Brescia

ZELLINI P., 1985, *La ribellione del numero*, Adelphi, Milano

ZELLINI P., 1980, *Breve storia dell'infinito*, Adelphi, Milano

Fonti per la Storia della Matematica

Aristotele, *De Caelo*, a cura di Oddone Longo, Sansoni Ed., Firenze 1961.

Aristotele, *Metafisica*, a cura di Reale G, Vita e Pensiero, Milano, 1993

Aristotele, *Le Categorie*, a cura di M. Zanatta, BUR., Milano,1989.

Aristotele, *Opere*, , Laterza Ed., Roma-Bari 1973. Vol. I: *Primi Analitici*, *Secondi Analitici*, trad. G. Colli; *Fisica*, trad. A. Russo.

Euclidis Opera Omnia . L. Heiberg e H. Menge, B. G. Teubner, Lipsia 1883-1888, Vol. VI.

Euclidis Data cum commentario Marini et Scholiis Antiquis edidit H. Menge, Lipsiae, in Aedibus B.G. Teubneri, MDCCCXCVI.

Heron Alexandrinus, *Opera quae supersunt omnia: Heronis Definitiones cum variis collectionibus*, Vol. IV, edit J. L. Heiberg, Stuttgart, Teubner, 1976.

Pitagorici, *Testimonianze e Frammenti*, a cura di M.Timpanaro Cardini, La Nuova Italia Ed., Firenze, 1962, Vol. II.

Proclo, *Commento al I Libro degli Elementi di Euclide*, a cura di M. Timpanaro Cardini, Giardini Ed., Pisa, 1978.

PAGINE WEB CONSULTATE

BERNARDO A. La pseudosfera di Beltrami

http://win.matematicamente.it/storia/la_pseudosfera_di_beltrami.html

BERNARDO A. - Bernhard Riemann: la geometria come ipotesi

www.matematicamente.it/cultura/storia_della_matematica/bernard_riemann_la_geometria_come_ip_3.html

BETTI R. Geometria non euclidea: un caso esemplare nella storia del pensiero scientifico

http://www.consiglio.regione.toscana.it/news-ed-eventi/pianeta-galileo/atti/2005/13_geometria_non_euclidea.pdf

CATASTINI L., GHIONE F ., Il sasso e la lanterna - L'angolo, una cosa strana

ww.mat.uniroma2.it/mep/Articoli/Angolo/Ang.html

D'APRILE M. (2008) Che cosa si intende per angolo?

www.mat.unical.it/~daprile/materiali/nono%20ciclo/Che%20cosa%20un%20angolo.pdf

D'APRILE M (2007) Le difficoltà del concetto di angolo. Che cosa è un angolo?

www.mat.unical.it/~daprile/materiali/ottavociclo/Angolo.pdf

D'APRILE M (2006) L'angolo, la congruenza

http://www.mat.unical.it/~daprile/materiali/settimociclo/17.Angolocongruenza.pdf

ECO U. Ecco l'angolo retto

www.espresso.repubblica.it/dettaglio-archivio/915038

GALUZZI M. – Sulla geometria non euclidea in Lezioni di storia sdella matematica

http://users.mat.unimi.it/users/galuzzi/Silsis02.pdf

IADEROSA R, Angolo solido

http://didascienze.formazione.unimib.it/set/guida/mappa/ANGOLO%20SOLIDO.htm

LAFFI GF. GIMIGLIANO A. - Le geometrie non euclidee

www.dm.unibo.it/matematica/NonEuclidea/index.htm

LOLLI G. La questione dei fondamenti della matematica - Panorama introduttivo

http://homepage.sns.it/lolli/articoli/QuestioneFondamenti.pdf

MALARA N. , 1996, L'insegnamento della geometria nella scuola media: questioni teoriche e didattico metodologiche - *L'insegnamento della geometria* - quaderno 19/1 del M.P.I.

www.liceovallisneri.it/frame_iniziali/setframe_pubblicaz.html

MARCHINI C., Analisi del contenuto dei Libri degli *Elementi*.

http://www.unipr.it/arpa/urdidmat/Amici/GeoClassCap3.pdf

MELI M. , 2004, *Linguistica e filologia,* http://dspace-unibg.cilea.it/bitstream/10446/208/1/LeF19(2004)Meli.pdf

MIGLIORATO R. , Spiegazione e predizione dalla rappresentazione mitica alla rappresentazione scientifica
http://math.unipa.it/~grim/conv_aicmgrim_05_migliorato.pdf

NASTASI P. - Recensione di I. Toth, No! Libertà e verità, creazione e negazione. Palinsesto di parole e immagini (Milano, Rusconi, 1998), "Lettera Matematica Pristem", 31 (1999), pp. 61-63

www.matematica.uni-bocconi.it/toth/toth2.htm

OTTAVIANI G. La teoria degli insiemi, da Cantor alla "matematica moderna"

web.math.unifi.it/ssis/Cantor3.doc

PIANA G.,1999, Il numero e la figurala libreria CUEM, Università degli Studi di Milano, http://www.lettere.unimi.it/Spazio_Filosofico/dodeca/piana/coperti.htm

RACITI A. Angoli e loro misura: concetto di angolo, definizioni dei libri di testo, suggerimenti didattici

www.orizzontescuola.it/didattica/Angoli%20e%20loro%20misura.pdf

RUSSO F. S. J. Gruppi e geometria La genesi del programma di Erlangen di Felix Klein

Conferenza pronunciata al "Palais de la Découverte" il 4 maggio 1968

www.matematica.uni-bocconi.it/klein/klein01.htm

SAITTA F. – Geometrie non euclidee

http://ulisse.sissa.it/biblioteca/saggio/2006/Ubib061229s002

SPAGNOLO F. Quale Matematica comunicare? Uno sguardo sui fondamenti delle Matematiche CAPITOLO 1

http://math.unipa.it/~grim/Epist_Sperim_Capitolo%201_09.pdf

SPAGNOLO F. La storia delle Matematiche e la comprensione dei fenomeni di Insegnamento/apprendimento CAPITOLO 3

http://math.unipa.it/~grim/Epist_Sperim_Capitolo%203_09.pdf

SPERANZA F. I fondamenti epistemologici della matematica

Lavoro apparso in: AA.VV., I fondamenti della Matematica per la sua didattica e nei loro legami con la società contemporanea, Atti del Congresso Nazionale della Mathesis, Verona 28/39 Novembre, 1996, pp. 35-46.

http://www.apav.it/mat/filoslette/epistemologia/lavorisperanzarota/fondamepistmatem.pdf

TOTH I. Interviste La rivoluzione non euclidea come rivoluzione etico politica

www.emsf.rai.it/scripts/interviste.asp?d=335 - 16k

VETTORELLO B. *L'angolo: un bel problema*

http://www-.unipv.it/iscr/corsi_speciali/dispense/matematica/vettorello