

Eugenia Parlavecchio

Eugenia Parlavecchio

Analisi elastoplastica ed a shakedown via SBEM

**Analisi elastoplastica ed a shakedown
via SBEM**



Dottorato in Ingegneria delle Strutture - XXII Ciclo
Settore disciplinare: ICAR08
Università degli Studi di Palermo



Dottorato di Ricerca in Ingegneria delle Strutture
Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Aerospaziale Università
degli Studi di Palermo
Viale delle Scienze, 90128 Palermo

Analisi elastoplastica ed a shakedown via SBEM

Tesi di Dottorato di

Eugenia Parlavecchio

Relatore: Prof. Teotista Panzeca

Coordinatore: Prof. Lidia La Mendola

Dottorato di Ricerca in Ingegneria delle Strutture – XXII Ciclo
Settore disciplinare ICAR/08
Palermo, 15 Febbraio 2011

Indice

Introduzione	1
Contenuto della tesi	3
Rassegna della letteratura disponibile	5
1 Il Metodo simmetrico degli Elementi di Contorno	9
1.1 Il problema elastostatico	11
1.2 Le Soluzioni Fondamentali	16
1.3 Le Identità di Somigliana	18
1.4 La discretizzazione del contorno	19
1.5 Il sistema risolvete	21
2 Analisi Multidomain via SBEM	29
2.1 Posizione del problema	31
2.2 Equazione delle auto-tensioni mediante l'approccio agli spostamenti	34
2.2.1 Equazioni caratteristiche dell'e-bem	35
2.2.2 Sistema assemblato	40
2.3 Equazione delle auto-tensioni mediante l'approccio misto	43
2.3.1 Equazioni caratteristiche dell'e-bem	43
2.3.2 Sistema assemblato	46
3 Aspetti computazionali del metodo delle equazioni integrali di contorno in presenza di azioni anelastiche di dominio	54
3.1 Le Identità di Somigliana delle tensioni	56
3.1.1 Approccio alla Gao	59

3.1.2	Approccio alla Dallner e Kuhn	61
3.1.3	Presente approccio	62
3.2	Identità di somiglianza delle trazioni valutata sul contorno	65
3.2.1	Punto interno al dominio	66
3.2.2	Punto sul contorno	68
3.3	Valutazione in forma chiusa dei coefficienti del termine di carico	72
3.4	Applicazioni	76
3.4.1	Esempio 1	76
3.4.2	Esempio 2	80
	Appendice 3.1	85
4	Teoria classica della plasticità	87
4.1	Generalità sul comportamento elasto-plastico	88
4.2	Analisi elastoplastica incrementale	91
4.2.1	Algoritmo di return mapping in elastoplasticità	92
4.3	Analisi a Shakedown	96
4.4	Teoria classica dello shakedown	97
4.4.1	Teorema del Convex Hull	97
4.1.2	Posizione del problema	99
4.4.3	Teorema statico dello shakedown (Teorema di Melan)	100
4.4.4	Approccio statico classico	101
4.4.5	Teorema cinematico dello shakedown (Teorema di Koiter)	102
4.4.6	Approccio cinematica classico	103
4.5	Considerazioni	104
5	Analisi elastoplastica per macro-zone attive	106
5.1	Algoritmo elasto-plastico per macro-zone attive	107
5.1.1	Fase di Elastic Predictor	107

5.1.2 Fase di Plastic Corrector	108
5.1.3 Semplificazioni computazionali nella procedura N-R	112
5.2 Analisi per singoli elementi bem	114
5.3 La procedura elastoplastica	117
5.4 Risultati numerici	119
5.4.1 Esempio 1. Cubo soggetto a spostamenti imposti	119
5.4.2 Esempio 2. Piastra sottile con foro circolare	120
5.4.3 Esempio 3. Piastre sottili con foro circolare e quadrato	123
5.4.4 Esempio 4. Cilindro cavo soggetto a pressione idrostatica	126
5.4.5 Esempio 5. Punch test su un anello a sezione a T	128
5.4.6 Esempio 6. Telaio piano su suolo non omogeneo	132
5.5 Considerazioni	136
6 Analisi limite ed a shakedown	139
6.1 Teorema di Melan e approccio statico mediante SGBEM	140
6.2 Ottimizzazione Conica Quadratica (CQO)	142
6.3 La Programmazione Semi-Definita (SDP)	144
6.3.1 Dal CQO al SDP	145
6.3.2 Implementazione mediante SeDuMi	149
6.4 Risultati numerici	150
6.4.1 Esempio 1. Analisi limite. Piastra sottile quadrata con foro circolare	153
6.5 Conclusioni	
Conclusioni	154
Bibliografia	156

Introduzione

Le strategie e i metodi numerici in grado di descrivere il fenomeno elasto-plastico mediante il Metodo degli Elementi di Contorno (BEM) sono diversi, ma molti di questi richiedono oneri computazionali notevoli oppure risultano basati su ipotesi troppo restrittive che rendono il modello valido esclusivamente sotto particolari condizioni geometriche e di carico, pertanto difficilmente generalizzabili. Il Metodo degli Elementi di Contorno, nella sua formulazione Simmetrica (SBEM), risulta particolarmente adatto alle analisi non lineari ed in generale a quei problemi che presentano grandi concentrazioni di tensioni e di deformazioni in alcune porzioni del corpo.

Superate molte delle difficoltà numeriche e computazionali, caratteristiche del metodo, la formulazione SBEM ha avuto di recente un rapido sviluppo per l'analisi di strutture continue. Di seguito sono riportati solo alcuni dei vantaggi nell'utilizzo di tale formulazione:

- Il modello discreto è definito attraverso i residui pesati con funzioni di forma e funzioni peso correlati nel senso di Galerkin. Ciò attribuisce alla formulazione delle equazioni integrali sul contorno un significato energetico.
- I sistemi algebrici sono costituiti da operatori simmetrici e definiti in segno, requisiti di fondamentale importanza in quanto consentono di dimostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione. Tale aspetto comporta inoltre la possibilità di impiegare tutti i teoremi della meccanica validi, appunto, per sistemi che godono della proprietà di simmetria e di definitezza.
- Consente di valutare tutti i coefficienti in forma chiusa cioè senza la necessità di utilizzare integrazioni numeriche approssimate. Ne deriva una notevole riduzione dei tempi computazionali ed una soluzione estremamente precisa.

Inoltre con tale approccio è possibile eliminare tutte le singolarità degli integrali che definiscono i coefficienti, utilizzando strategie già consolidate in letteratura.

- Impiega una strategia di tipo *multidomain* in cui le condizioni di compatibilità ed equilibrio sono garantite puntualmente nel dominio di ciascuna cella ed in termini di variabili discrete (nodali e pesate) solamente sul contorno.
- Fornisce risultati di notevole accuratezza per problemi caratterizzati da alto gradiente di sforzo non solo nella zona interessata dal fenomeno, ma in tutto il dominio grazie al rispetto puntuale delle equazioni di campo (Identità di Somigliana).

Questa tesi ha pertanto come obiettivo quello di fornire algoritmi numerici robusti capaci di descrivere il fenomeno elato-plastico in presenza di *hardening* cinematico e di valutare il moltiplicatore limite ed a shakedown, partendo dalle nozioni teorico-numeriche proprie della teoria classica della plasticità e sfruttando le potenzialità del SBEM. Infatti, nell'ambito della plasticità l'utilizzo della formulazione *multidomain* SBEM presenta notevoli vantaggi computazionali legati alla riduzione del numero delle iterazioni plastiche e delle variabili mediante semplici operazioni:

- La parzializzazione del dominio. Confinando la discretizzazione nelle zone interessate dal fenomeno di accumulo delle deformazioni plastiche è possibile trattare le restanti zone come macroelementi a comportamento elastico, governati da variabili associate al solo contorno.
- L'utilizzo dell'equazione delle autotensioni. Tale equazione lega le tensioni alle deformazioni plastiche in tutte le sottostrutture in cui risulta suddiviso il dominio e ciò consente di ottenere direttamente una soluzione non locale e indipendente dal percorso di accumulo delle deformazioni plastiche.
- L'aggiornamento delle variabili nodali solamente a fine passo di carico.

Di seguito sono riportati i contenuti della ricerca e una rassegna sui riferimenti disponibili in letteratura.

Contenuto della tesi

Sulla base di concetti ormai consolidati nell'ambito del Metodo Simmetrico degli Elementi di Contorno in elasticità e termoelasticità (Panzeca et al., 1999; 2002a-b; 2010) e dai risultati conseguiti e riportati in letteratura nell'ambito della teoria classica della plasticità, la tesi è impostata sulla estensione della formulazione SBEM all'analisi elastoplastica ed a shakedown. Si compone di 6 capitoli, la cui disposizione cerca di seguire le linee principali di ricerca sviluppate durante il dottorato.

Il **Capitolo 1** è dedicato alla definizione dei principi che sono alla base della formulazione Simmetrica alla Galerkin del Metodo degli Elementi di Contorno. Partendo dalle definizioni delle Soluzioni Fondamentali e delle Identità di Somigliana si considera il solido immerso in un dominio illimitato ridefinendo così le classiche condizioni al contorno di Dirichlet e Neumann per il corpo in esame. Si opera la discretizzazione del contorno e si introducono le funzioni di forma, per la modellazione delle cause e per la pesatura degli effetti, necessarie per la valutazione dei coefficienti degli operatori algebrici presenti nel sistema risolvete per il corpo in esame.

Il **Capitolo 2** riguarda gli approcci agli spostamenti e misto, sviluppati nell'ambito del *multidomain* SBEM, i quali vengono utilizzati come strumento di analisi per il problema elasto-plastico, mediante la determinazione dell'equazione delle autotensioni. La strategia che si presenta è di carattere generale e definisce operatori algebrici che dipendono esclusivamente dalla geometria e dalla tipologia di ciascun e-bem. Si mostra come la possibilità di ottenere un sistema risolvete con grandezze associate al contorno di interfaccia rende il metodo molto vantaggioso dal punto di vista computazionale rispetto ad altre formulazioni che operano sia in ambiente FEM che BEM.

Il **Capitolo 3** riguarda sia l'applicazione del SBEM anche in presenza di azioni volumetriche, sia le strategie di cui si dispone per superare i problemi computazionali derivanti dalla presenza di azioni anelastiche. La strategia che si presenta consente di evitare l'impiego degli integrali di dominio dovuti a distribuzioni di azioni anelastiche e di effettuare la successiva integrazione sul contorno al fine di valutare i termini di carico, ottenuti come processo di pesatura alla Galerkin, in forma chiusa.

Il **Capitolo 4** è dedicato alla definizione delle relazioni fondamentali che governano il problema elastoplastico, le ipotesi di base ed i limiti entro cui si opera. In tale capitolo vengono richiamati alcuni concetti essenziali della teoria classica della plasticità definendo i simboli e le nozioni di riferimento. Si introduce la posizione del problema, quindi si definisce la tecnica utilizzata per la determinazione della risposta elasto-plastica di fine passo, i teoremi e gli approcci che governano le analisi a shakedown e limite.

Il **Capitolo 5** è invece dedicato all'applicazione della formulazione SBEM al problema elastoplastico al passo. Si mostra una strategia che applica l'approccio agli spostamenti precedentemente descritto nel Capitolo 2, in problemi bidimensionali elasto-plastici ad *initial strain*, nelle ipotesi di materiali stabili, funzione di snervamento di von Mises, plasticità associata, stati piani di deformazione, incrudimento cinematico. L'approccio è condotto a partire dalla discretizzazione del dominio in elementi bem nei quali viene valutato, in termini discreti, l'accumulo delle deformazioni plastiche. L'equazione delle autotensioni consente di individuare gli elementi bem attivi che necessitano della correzione della soluzione mediante tecniche di path-following. L'algoritmo di rientro sviluppato a tale scopo si avvale della equazione delle autotensioni e consente la correzione simultanea della soluzione in tutti gli elementi bem attivi all'interno di un sistema non lineare di equazioni, la cui soluzione è di tipo non locale. Infine si presentano alcuni test

numerici effettuati mediante il codice di calcolo Karnak.sGbem e confrontati con altri approcci allo scopo di mostrare l'efficienza del metodo proposto.

Il **Capitolo 6** è dedicato alla riformulazione via SBEM dell'approccio statico per la determinazione diretta del moltiplicatore limite ed a shakedown. La presente strategia unisce una formulazione di tipo *multidomain* nell'ambito del SBEM a tecniche di ottimizzazione non lineare e impiega la stessa equazione delle autotensioni, ricavata dall'approccio agli spostamenti e utilizzata nell'analisi iterativa. Il metodo numerico proposto è di tipo diretto in quanto valuta il moltiplicatore direttamente tramite il primo teorema dell'adattamento e l'approccio statico. L'analisi pertanto è stata formulata come un problema di ottimizzazione vincolata risolto mediante metodi di programmazione matematica. Nel presente approccio il problema di ottimizzazione è stato affrontato sia come classico problema di Ottimizzazione Conica Quadratica (CQO) che mediante Programmazione Semi-Sefinita (SDP). La prima procedura è stata implementata accoppiando il codice di calcolo Karnak.sGbem al toolbox di ottimizzazione di Matlab. Per la seconda ci si è serviti di Karnak.sGbem e SeDuMi (Toolbox open source di MatLab). I programmi hanno consentito di effettuare alcuni test numerici, dei quali si riporteranno quelli più significativi.

Rassegna della letteratura disponibile

Applicazioni del BEM a problemi anelastici si possono reperire nei lavori di Brebbia e Telles (1984), in Aliabadi (2002) e nei loro riferimenti bibliografici. I primi approcci impliciti, nell'ipotesi di materiali a comportamento non lineare, sono stati introdotti da Telles e Carrer (1991). Successivamente Banerjee et al. (1994) sviluppano una formulazione a rigidità variabili, mentre Bonnet and Mukherjee (1996) propongono una procedura implicita BEM per l'analisi sensibile mediante il Consistent Tangent Operator (CTO) locale. Si tratta dello stesso metodo utilizzato da Simo e Taylor (1995) nell'ambito del metodo degli elementi finiti e, come

quest'ultimo, risolve il sistema non lineare ottenuto mediante la procedura iterativa di Newton-Raphson. Paulino e Liu (2001) presentano una formulazione BEM per il problema elastoplastico utilizzando il CTO e il Continuum Tangent Operator (CNO). Più recentemente Mallardo e Alessandri (2004) sviluppano una procedura arc-length combinata con la formulazione BEM da applicare alla plasticità e al danno.

Anche il BEM nella sua formulazione simmetrica è stato applicato all'analisi elastoplastica fin dagli anni ottanta, risultando particolarmente adatto ai problemi non lineari per l'utilizzo di operatori simmetrici e definiti in segno. Maier e Polizzotto (1987), per primi, svilupparono un approccio simmetrico del BEM, applicandolo all'analisi elastoplastica, utilizzando le equazioni integrali di contorno, nel senso dei residui pesati alla Galerkin. In Polizzotto (1988b) la formulazione energetica, introdotta in un lavoro precedente (Polizzotto, 1988a) per il problema elastico, viene estesa al problema elastoplastico. Egli mostra come è possibile ricavare, utilizzando per ciascuna cella una funzione di snervamento linearizzata a tratti, problemi di programmazione matematica ben noti anche nell'ambito del FEM. Maier et al. (1995) sviluppano e discutono una formulazione simmetrica agli elementi di contorno per plasticità a gradiente non locale. In Frangi e Maier (1998) si mostra una metodologia per l'analisi elastoplastica dinamica utilizzando nuclei elastostatici, ovvero funzioni di Green indipendenti dal tempo per spazi non vincolati. Polizzotto e Zito (1998), partendo dalla teoria delle deformazioni e attraverso il metodo del backward-difference, derivano due principi variazionali che caratterizzano la soluzione in problemi al passo. Liu et al. (2005), propongono un metodo detto Quasi-High Order Element Method (QHOEM) basato sulla interpolazione in due fasi per problemi elastoplastici.

Nell'ambito del SBEM, la suddivisione del dominio in macroelementi, aventi differenti caratteristiche fisico-geometriche variabili a zone, è stata introdotta da Maier et al. (1991). Successivamente Gray e Paulino (1997) applicano la

sottostrutturazione nei problemi a potenziale. Layton et al. (1997) propongono una formulazione suddividendo il corpo in macroelementi ciascuno dei quali governato da quantità di solo contorno, ottenendo, nel processo di condensazione, un sistema avente alcuni blocchi non simmetrici. In seguito Ganguly et al. (1999) presentano un approccio completamente simmetrico per corpo elastico piano suddiviso in due macroelementi discretizzati lungo il contorno e caratterizzato da un sistema risolvibile simmetrico avente come incognite tutte le grandezze di contorno, sia (libero e/o vincolato e di interfaccia tra i due macro-elementi). Perez-Gavilan and Aliabadi (2001) presentano un nuovo approccio BEM alla Galerkin per corpi multi-connessi. Panzeca et al. affrontano lo stesso problema sviluppando una strategia basata sulla formulazione variazionale introdotta da Maier e Polizzotto (1987) e Polizzotto (1991), ricavando due approcci SBEM di tipo *multidomain* definiti a variabili miste (Panzeca et al., 2000-a) e agli spostamenti (Panzeca et al., 2002-a; 2002-b), entrambi caratterizzati da una notevole condensazione di variabili. Attraverso queste strategie gli autori hanno ottenuto un sistema dipendente dalle sole variabili nodali di interfaccia tra sottostrutture contigue. Rispetto ad altri approcci il metodo presenta il vantaggio di garantire compatibilità ed equilibrio su tutti i punti del dominio ed in termini discreti sul contorno.

Per le riformulazioni del teorema statico dello shakedown, in termini di variabili discrete mediante SBEM ci si può riferire ai lavori di Zhang et al. (2001; 2002), i quali presentano una procedura che accoppia il SBEM al Complex Method ed esprime il campo delle autotensioni come combinazione lineare di una serie di campi autoequilibrati con parametri da determinare o Chen et al. (2008) la cui strategia per l'analisi a shakedown applica il metodo degli elementi liberi alla Galerkin nella programmazione non lineare. In ambito FEM ci si può riferire ai lavori di Sloan (1988) che approssimando la funzione quadratica di von Mises si avvale della programmazione lineare per l'analisi a shakedown, o Makrodimitopoulos (2006), che affronta l'analisi limite come problema di ottimizzazione conica

quadratica (CQO). In questi lavori il tentativo degli autori è stato quello di analizzare e superare le difficoltà computazionali dovute all'eccessivo numero delle variabili indipendenti e delle condizioni di vincolo.

Capitolo 1

Il Metodo Simmetrico degli Elementi di Contorno

In questo capitolo vengono introdotti i concetti fondamentali della formulazione Simmetrica alla Galerkin del Metodo degli Elementi di Contorno (SBEM).

Si chiarisce il passaggio dal modello continuo reale, governato da equazioni differenziali di campo e da condizioni al contorno, al modello continuo immerso nel dominio illimitato governato da equazioni integrali al contorno, dove le grandezze incognite sono gli spostamenti e le trazioni valutati rispettivamente sulla porzione di contorno libera e su quella vincolata. Nel dominio illimitato le forze sul contorno del solido assumono il significato di forze stratificate mentre gli spostamenti sul contorno assumono il significato di spostamenti relativi stratificati.

La scrittura delle equazioni integrali attraverso l'impiego delle Identità di Somigliana (I.S.) utilizza le cosiddette Soluzioni Fondamentali (S.F.) che descrivono la risposta in un punto del dominio illimitato quando in esso sono applicate singolarità meccaniche o cinematiche.

Introdotta il modello discreto attraverso una discretizzazione del contorno, si assumono come variabili primali le grandezze valutate sui nodi del contorno del corpo. Tali grandezze, modellate mediante l'introduzione di funzioni di forma appropriate, possono essere considerate come dei parametri che definiscono l'andamento delle forze agenti sul contorno vincolato del corpo e degli spostamenti sul contorno libero. La risposta del solido è ottenuta attraverso un processo di pesatura degli effetti secondo l'approccio alla Galerkin e imponendo le condizioni al contorno di Dirichlet e Neumann sulle quantità pesate (o generalizzate).

1.1 Il problema elastostatico

I problemi della meccanica del continuo sono governati da un sistema di equazioni differenziali e da appropriate condizioni al contorno. In Fig. 1.1.1a, con $\hat{\Gamma}_1$ e $\hat{\Gamma}_2$ sono stati indicati rispettivamente i contorni, vincolato e libero, del dominio del solido \hat{B} soggetto alle seguenti azioni: forze $\bar{\mathbf{f}}$ su $\hat{\Gamma}_2$, spostamenti imposti $\bar{\mathbf{u}}$ su $\hat{\Gamma}_1$, forze di massa $\bar{\mathbf{b}}$ in Ω e deformazioni anelastiche (di natura termica e plastica) $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ in Ω . Di seguito si riportano tali equazioni:

$$\mathbf{C}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega \quad (1.1.1a)$$

$$\mathbf{N}^T \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \quad \text{su } \hat{\Gamma}_2 \quad (1.1.1b)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x})) \quad \text{in } \Omega \quad (1.1.1c)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{C} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \text{in } \Omega \quad (1.1.1d)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \quad \text{su } \hat{\Gamma}_1 \quad (1.1.1e)$$

dove \mathbf{C} è l'operatore differenziale, \mathbf{N} è la matrice dei coseni direttori di normale uscente \mathbf{n} al contorno $\hat{\Gamma}$ ed \mathbf{D} è il tensore simmetrico di elasticità. Le (1.1.1b,e) sono le condizioni di Neumann su $\hat{\Gamma}_2$ e di Dirichlet su $\hat{\Gamma}_1$, rispettivamente.

La soluzione analitica di tale problema non è facilmente ottenibile, eccetto che per particolari geometrie e condizioni di carico.

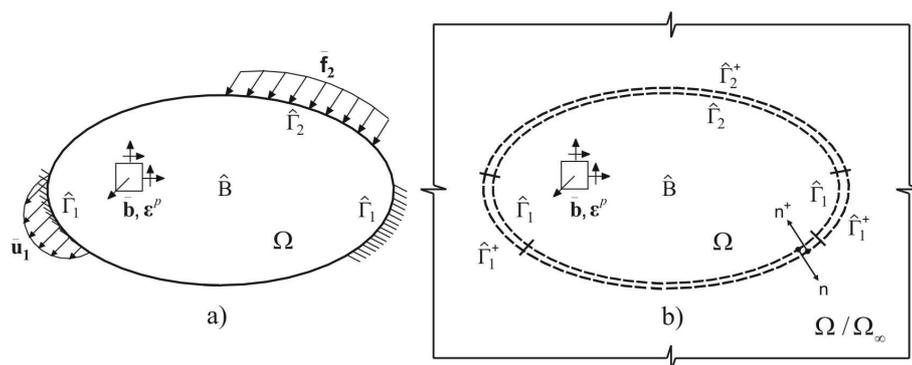


Fig. 1.1.1: Solido elastico \hat{B} : a) dominio reale, b) immerso nel dominio illimitato.

Più in generale, al fine di ottenere una soluzione approssimata sono stati sviluppati numerosi metodi che ricorrono a tecniche di discretizzazione che consentono di rendere algebrico il problema originario (Polizzotto 1988-a,b; Bonnet et al. 1998; Salerno 1998; Terravecchia 2002).

I Metodi degli Elementi di Contorno (BEM) operano sul modello continuo reale un'approssimazione basata sui seguenti aspetti:

- 1) Il solido \hat{B} è considerato parte di un dominio illimitato Ω_∞ avente le stesse caratteristiche di omogeneità ed isotropia del solido. In esso sono considerate le S. F. ottenute come risposta ad azioni esterne concentrate.
- 2) L'uso di una discretizzazione sul contorno che ne descriva la geometria.
- 3) Il calcolo della risposta in termini di grandezze definite sui lati della griglia di contorno valutata in forma pesata.

Nel dominio illimitato il contorno del solido \hat{B} può essere pensato formato da una frontiera $\hat{\Gamma}$ relativa al dominio Ω con normale uscente \mathbf{n} , e da una frontiera $\hat{\Gamma}^+$ relativa al dominio Ω_∞ / Ω con normale uscente $\mathbf{n}^+ = -\mathbf{n}$ (Fig. 1.1b). Immerso il solido nel dominio Ω_∞ , occorre ridefinire il significato delle grandezze che caratterizzano il contorno, mentre resta inalterato il significato delle grandezze

relative al dominio Ω . Le forze sul contorno assumono il significato di forze stratificate. In particolare sulle porzione di contorno originariamente vincolata $\hat{\Gamma}_1$ le forze stratificate \mathbf{f} valutate in Ω_∞ sono incognite e corrispondono alle reazioni del vincolo in Ω , mentre sul contorno originariamente libero $\hat{\Gamma}_2$ le forze stratificate $\bar{\mathbf{f}}$ sono note e rappresentano le forze agenti sul contorno.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\mathbf{t}^+(\mathbf{x}, \mathbf{n}) + \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \quad \text{su } \hat{\Gamma}_1 \text{ e } \hat{\Gamma}_1^+ \quad (1.1.2a)$$

$$\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{t}^+(\mathbf{x}, \mathbf{n}) + \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \quad \text{su } \hat{\Gamma}_2 \text{ e } \hat{\Gamma}_2^+ \quad (1.1.2b)$$

dove \mathbf{t}^+ e \mathbf{t} sono la risposta in Ω_∞ in termini di trazioni in un punto \mathbf{x} del contorno, valutate rispettivamente sulle frontiere $\hat{\Gamma}^+$ e $\hat{\Gamma}$.

Gli spostamenti sul contorno assumono invece il significato di spostamenti relativi superficiali tra le due frontiere di Ω_∞ e cioè $\hat{\Gamma}^+$ e $\hat{\Gamma}$. In particolare su $\hat{\Gamma}_1$ gli spostamenti relativi $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = -\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ sono noti e caratterizzati dagli spostamenti imposti su tale porzione col segno cambiato, mentre su $\hat{\Gamma}_2$ gli spostamenti relativi $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ sono incogniti e caratterizzati dagli spostamenti del contorno libero, cambiati in segno:

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = -\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^+(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \text{su } \hat{\Gamma}_1 \text{ e } \hat{\Gamma}_1^+ \quad (1.1.3a)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^+(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \text{su } \hat{\Gamma}_2 \text{ e } \hat{\Gamma}_2^+ \quad (1.1.3b)$$

dove \mathbf{u}^+ e \mathbf{u} rappresentano in Ω_∞ la risposta in termini di spostamenti valutati in un punto \mathbf{x} del contorno, rispettivamente sulle frontiere $\hat{\Gamma}^+$ e $\hat{\Gamma}$.

La risposta del sistema strutturale immerso in Ω_∞ valutata in termini spostamenti $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, tensioni $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$, trazioni $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ e deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ può essere ottenuta attraverso l'impiego di opportune espressioni legate alle azioni presenti e cioè alle forze stratificate (1.1.2a,b) e alle distorsioni (1.1.3a,b), ambedue su tutto il contorno, oltre che alle forze di volume $\bar{\mathbf{b}}$ e deformazioni anelastiche $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ in Ω .

Per ottenere la risposta effettiva è necessario che il dominio Ω_∞ / Ω risulti scarico e indeformato, e ciò si ottiene imponendo le seguenti condizioni su $\hat{\Gamma}^+$:

$$\mathbf{u}^+(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{su } \hat{\Gamma}_1^+ \cup \hat{\Gamma}_2^+ \quad (1.1.4a)$$

$$\mathbf{t}^+(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad \text{su } \hat{\Gamma}_1^+ \cup \hat{\Gamma}_2^+ \quad (1.1.4b)$$

Le (1.1.4a,b) possono essere definite come le condizioni di Dirichlet e di Neumann valutate in ogni punto di $\hat{\Gamma}_1^+$ e $\hat{\Gamma}_2^+$.

Sostituendo le eq.(1.1.4.a,b) nelle eq.(1.1.2a,b) e nelle eq.(1.1.3a,b) le grandezze stratificate di contorno assumono un preciso significato:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \quad \text{su } \hat{\Gamma}_1 \quad (1.1.5a)$$

$$\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \quad \text{su } \hat{\Gamma}_2 \quad (1.1.5b)$$

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \text{su } \hat{\Gamma}_1 \quad (1.1.5c)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \text{su } \hat{\Gamma}_2 \quad (1.1.5d)$$

Le precedenti posizioni mostrano che sul contorno vincolato $\hat{\Gamma}_1$ le forze reattive incognite $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ sono rappresentate dalle trazioni $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ in Ω_∞ , gli

spostamenti relativi imposti $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = -\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ sono uguali a $-\mathbf{u}(\mathbf{x})$, mentre sul contorno libero $\hat{\Gamma}_2$ le forze stratificate note $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ sono rappresentate dalle $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$, gli spostamenti relativi incogniti $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ sono dati da $-\mathbf{u}(\mathbf{x})$.

Alla luce di queste considerazioni il solido \hat{B} immerso in Ω_∞ è sottoposto alle seguenti azioni meccaniche e cinematiche:

- spostamenti relativi superficiali noti $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = -\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ agenti su $\hat{\Gamma}_1$
- spostamenti relativi superficiali incogniti $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\mathbf{u}(\mathbf{x})$ agenti su $\hat{\Gamma}_2$
- forze stratificate note $\bar{\mathbf{f}}$ applicate su $\hat{\Gamma}_2$
- forze stratificate incognite \mathbf{f} applicate su $\hat{\Gamma}_1$
- forze di volume $\bar{\mathbf{b}}$ applicate in Ω
- deformazioni anelastiche $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ applicate in Ω

Occorre calcolare la risposta del solido \hat{B} in termini di:

- spostamenti $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\mathbf{v}(\mathbf{x})$ su $\hat{\Gamma}_2$
- forze reattive $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ su $\hat{\Gamma}_1$
- spostamenti \mathbf{u} , deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}$ e tensioni $\boldsymbol{\sigma}$ in Ω .

Per affrontare tale problema con il BEM simmetrico è necessario introdurre i legami tra le grandezze coinvolte nell'analisi strutturale. Allo scopo si precisa che la risposta ad azioni concentrate è rappresentata dalle S. F. mentre la risposta ad azioni distribuite è rappresentata dalle I. S..

Nelle successive sezioni si discuterà dei legami costitutivi nel dominio illimitato dovuti ad azioni concentrate e distribuite.

1.2 Le Soluzioni Fondamentali (S.F.)

Con riferimento al dominio illimitato Ω_∞ le S. F. rappresentano la risposta in un punto $p(\mathbf{x})$ espressa in termini spostamenti $\mathbf{u}(\mathbf{x}; \mathbf{x}')$, deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}; \mathbf{x}')$, tensioni $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}; \mathbf{x}')$, trazioni $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}')$ quando in un punto $q(\mathbf{x}')$ sono applicate azioni concentrate (meccaniche o cinematiche).

Le S.F. sono funzioni che possono essere scritte in forma matriciale secondo la notazione $\mathbf{G}_{hk}(\dots; \dots)$, dove l'effetto in \mathbf{x} è specificato dal primo indice h , la causa in \mathbf{x}' è specificata della grandezza duale associata al secondo indice k (Maier e Polizzotto 1987; Polizzotto 1988-a).

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} \mathbf{G}_{uu}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') & \mathbf{G}_{ut}(\mathbf{x}; \mathbf{x}', \mathbf{n}') & \mathbf{G}_{u\sigma}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') \\ \mathbf{G}_{tu}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}') & \mathbf{G}_{tt}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', \mathbf{n}') & \mathbf{G}_{t\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}') \\ \mathbf{G}_{\sigma u}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') & \mathbf{G}_{\sigma t}(\mathbf{x}; \mathbf{x}', \mathbf{n}') & \mathbf{G}_{\sigma\sigma}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') \end{vmatrix} \quad (1.2.1)$$

Le funzioni di influenza $\mathbf{G}_{hk}(\dots; \dots)$ godono delle seguenti proprietà di simmetria:

$$\mathbf{G}_{hh}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') = \mathbf{G}_{hh}(\mathbf{x}'; \mathbf{x}) \quad (1.2.2a)$$

$$\mathbf{G}_{hk}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') = \mathbf{G}_{kh}^T(\mathbf{x}'; \mathbf{x}) \quad \text{con } h, k = \mathbf{u}, \mathbf{t}, \boldsymbol{\sigma} \quad (1.2.2b)$$

Il primo termine della matrice \mathbf{G} è la \mathbf{G}_{uu} ; tutte le altre S.F. \mathbf{G}_{hk} possono essere espresse in funzione di tale termine.

Pertanto si introduce la seguente soluzione di Kelvin, scritta in forma matriciale

$$\mathbf{G}_{uu}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') = \eta \begin{vmatrix} uu_{11}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') & uu_{12}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') \\ uu_{21}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') & uu_{22}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') \end{vmatrix} \quad (1.2.3)$$

dove

$$\begin{aligned} uu_{11}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') = & \frac{(-x + x')^2}{(-x + x')^2 + (-y + y')^2} + \\ & + (-3 + 4n) \text{Log}[\sqrt{(-x + x')^2 + (-x + x')^2}] \end{aligned} \quad (1.2.4a)$$

$$uu_{12}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') = \frac{(-x + x')(-y + y')}{(-x + x')^2 + (-y + y')^2} \quad (1.2.4b)$$

$$\begin{aligned} uu_{11}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') = & \frac{(-y + y')^2}{(-x + x')^2 + (-y + y')^2} + \\ & + (-3 + 4n) \text{Log}[\sqrt{(-x + x')^2 + (-x + x')^2}] \end{aligned} \quad (1.2.4c)$$

$$uu_{21}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') = uu_{12}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') \quad (1.2.4d)$$

con

$$\eta = \frac{1}{8\pi(1-n)\mu} \quad (1.2.5)$$

dove μ è il modulo di deformazione tangenziale.

Per quanto detto prima sulla possibilità di esprimere tutti i termini della matrice \mathbf{G} in funzione del primo termine \mathbf{G}_{uu} , si ottiene che:

$$\mathbf{G}_{\sigma u}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') = \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{G}_{uu}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') \quad (1.2.6a)$$

dove \mathbf{D} è il tensore simmetrico di elasticità e \mathbf{C} è l'operatore differenziale associato al punto effetto \mathbf{x} . Inoltre si ha:

$$\mathbf{G}_{tu}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}') = \mathbf{N} \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{G}_{uu}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') \quad (1.2.6b)$$

dove \mathbf{N} è la matrice dei coseni direttori. Di conseguenza sono valide anche le seguenti relazioni:

$$\mathbf{G}_{ut}(\mathbf{x}; \mathbf{x}', \mathbf{n}') = \mathbf{G}_{tu}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}')^T \quad (1.2.6c)$$

$$\mathbf{G}_{ct}(\mathbf{x}; \mathbf{x}', \mathbf{n}') = \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{G}_{ut}(\mathbf{x}; \mathbf{x}', \mathbf{n}') - \mathbf{D} \mathbf{N}' \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.2.6d)$$

$$\mathbf{G}_{tt}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', \mathbf{n}') = \mathbf{N} \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{G}_{ut}(\mathbf{x}; \mathbf{x}', \mathbf{n}') - \mathbf{N} \mathbf{D} \mathbf{N}' \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.2.6e)$$

$$\mathbf{G}_{u\sigma}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') = \mathbf{G}_{\sigma u}(\mathbf{x}'; \mathbf{x})^T \quad (1.2.6f)$$

$$\mathbf{G}_{\sigma\sigma}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') = \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{G}_{u\sigma}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') - \mathbf{D} \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.2.6g)$$

$$\mathbf{G}_{t\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}') = \mathbf{N} \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{G}_{u\sigma}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') - \mathbf{N} \mathbf{D} \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.2.6h)$$

dove la matrice $\nabla(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ è la delta di Dirac.

1.3 Le Identità di Somigliana (I.S.)

E' noto che per effettuare l'analisi strutturale condotta con il Metodo degli Elementi di Contorno nella sua formulazione simmetrica è necessario l'impiego di entrambe le I. S. degli spostamenti e delle trazioni, cioè:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^+(\mathbf{x}) = & \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{uu} \mathbf{f} \, d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{ut} (-\mathbf{u}) \, d\Gamma_2 + \frac{1}{2} (-\bar{\mathbf{u}}) + \oint_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{ut} (-\bar{\mathbf{u}}) \, d\Gamma_1 + \\ & + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{uu} \bar{\mathbf{f}} \, d\Gamma_2 + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{uu} \bar{\mathbf{b}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{u\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p \, d\Omega \quad \text{su } \hat{\Gamma}_1^+ \end{aligned} \quad (1.3.1a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = & \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{tt} \mathbf{f} \, d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{tt} (-\mathbf{u}) \, d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{tt} (-\bar{\mathbf{u}}) \, d\Gamma_1 - \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{f}}) + \\ & + \oint_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{tu} \bar{\mathbf{f}} \, d\Gamma_2 + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{tt} \bar{\mathbf{b}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{t\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p \, d\Omega \end{aligned} \quad \text{su } \hat{\Gamma}_2^+ \quad (1.3.1b)$$

Le eq. (1.3.1a,b) forniscono la risposta su $\hat{\Gamma}_1^+$ e $\hat{\Gamma}_2^+$ in termini di spostamenti $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ e trazioni $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ rispettivamente per effetto di distribuzioni di forze e spostamenti sia note che incognite. In queste ultime i termini contrassegnati da \oint sono da intendere come integrali interpretati come Valore Principale di Cauchy (CPV) ed i coefficienti 1/2 sono i relativi termini liberi,

1.4 La discretizzazione del contorno

Al fine di ottenere la risposta del solido \hat{B} con l'impiego di operatori algebrici è necessario operare una discretizzazione del contorno originario $\hat{\Gamma}$ in elementi di contorno Γ .

Sia B il solido discretizzato e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ il suo contorno poligonale. Se consideriamo due generici elementi di contorno e, f adiacenti, originariamente vincolati su Γ_1 caratterizzati dai due versori \mathbf{n}_e e \mathbf{n}_f . Sarà possibile modellare le forze stratificate attraverso le seguenti relazioni:

$$\mathbf{f}^e(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Psi}_f^e(\mathbf{x}) \mathbf{F}^e, \quad \mathbf{f}^f(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Psi}_f^f(\mathbf{x}) \mathbf{F}^f \quad (1.4.1a,b)$$

dove \mathbf{F}^e e \mathbf{F}^f sono i vettori di quattro componenti ciascuno delle forze agli estremi di ciascuno elemento di contorno e dove $\boldsymbol{\Psi}_f^e$ e $\boldsymbol{\Psi}_f^f$ sono le matrici (2x4) delle funzioni di forma relative agli elementi di contorno e ed f , cioè:

$$\Psi_f^e(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \Psi_{f1}^e(x) & \Psi_{f2}^e(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{f1}^e(y) & \Psi_{f2}^e(y) \end{vmatrix} \quad (1.4.2a)$$

$$\Psi_f^f(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \Psi_{f1}^f(x) & \Psi_{f2}^f(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{f1}^f(y) & \Psi_{f2}^f(y) \end{vmatrix} \quad (1.4.2b)$$

Affinché le forze $\mathbf{f}^e(\mathbf{x})$ e $\mathbf{f}^f(\mathbf{x})$ distribuite sui due elementi e ed f siano continue, le forze nodali \mathbf{F}^e e \mathbf{F}^f devono rispettare le seguenti condizioni:

$$F_{x2}^e = F_{x1}^f = F_x, \quad F_{y2}^e = F_{y1}^f = F_y \quad (1.4.3a,b)$$

dove F_x, F_y rappresentano le componenti della forza nodale agente sul nodo comune.

Stesse considerazioni valgono per il contorno originariamente libero Γ_2 . Considerando due elementi di contorno g ed h caratterizzati dai versori \mathbf{n}_g ed \mathbf{n}_h sarà possibile modellare gli spostamenti relativi attraverso le seguenti relazioni

$$\mathbf{v}^g = \Psi_u^g(\mathbf{x}) \mathbf{V}^g, \quad \mathbf{v}^h = \Psi_u^h(\mathbf{x}) \mathbf{V}^h \quad (1.4.4a,b)$$

dove \mathbf{V}^g e \mathbf{V}^h sono i vettori di quattro componenti ciascuno degli spostamenti relativi associati agli estremi di ciascuno elemento di contorno, mentre Ψ_u^g e Ψ_u^h sono le matrici (2x4) delle funzioni di forma relative agli elementi di contorno g e h, cioè:

$$\Psi_u^g(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \Psi_{u1}^g(x) & \Psi_{u2}^g(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{u1}^g(y) & \Psi_{u2}^g(y) \end{vmatrix} \quad (1.4.5a)$$

$$\Psi_u^h(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \Psi_{u1}^h(\mathbf{x}) & \Psi_{u2}^h(\mathbf{x}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{u1}^h(\mathbf{y}) & \Psi_{u2}^h(\mathbf{y}) \end{vmatrix} \quad (1.4.5b)$$

Affinché gli spostamenti relativi $\mathbf{v}^g(\mathbf{x})$, $\mathbf{v}^h(\mathbf{x})$ distribuiti sui due elementi g ed h siano continui, gli spostamenti relativi devono rispettare le seguenti condizioni:

$$V_{x2}^g = V_{x1}^h = V_x, \quad V_{y2}^g = V_{y1}^h = V_y \quad (1.4.6a,b)$$

dove V_x , V_y rappresentano le componenti dello spostamento relativo agente sul nodo comune.

Abbiamo visto finora come modellare le grandezze meccaniche e cinematiche di un contorno Γ del solido B attraverso l'utilizzo di funzioni di forma. Queste possono essere di vario tipo lineari, quadratiche, cubiche in funzione del grado di accuratezza che si vuole ottenere per la modellazione delle quantità di contorno.

1.5 Il sistema risolvente

La risposta sul contorno del solido sottoposto ad azioni distribuite è valutata in termini di grandezze pesate, attraverso l'uso di funzioni di forma energeticamente duali rispetto alle grandezze che definiscono la risposta cercata (Polizzotto, 1988b).

Ricordando che la risposta del solido B di dominio Ω viene raggiunta quando $\mathbf{u}_i^+ = \mathbf{0}$, $\mathbf{t}_i^+ = \mathbf{0}$ in Ω_∞ / Ω , ovvero:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^+ = & \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{uu} \Psi_f \mathbf{F}_1 d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{ut} \Psi_u (-\mathbf{U}_2) d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{uu} \Psi_f \bar{\mathbf{F}}_2 d\Gamma_2 + \oint_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{ut} \Psi_u (-\bar{\mathbf{U}}_1) d\Gamma_1 + \\ & + \frac{1}{2} \Psi_u (-\bar{\mathbf{U}}_1) + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{uu} \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{u\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p d\Omega = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.5.1a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_2^+ = & \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{tt} \boldsymbol{\Psi}_f \mathbf{F}_1 d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{tt} \boldsymbol{\Psi}_u (-\mathbf{U}_2) d\Gamma_2 + \oint_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{tt} \boldsymbol{\Psi}_f \bar{\mathbf{F}}_2 d\Gamma_2 - \frac{1}{2} \boldsymbol{\Psi}_f \bar{\mathbf{F}}_2 + \\ & + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{tt} \boldsymbol{\Psi}_u (-\bar{\mathbf{U}}_1) d\Gamma_2 + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{tt} \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{t\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p d\Omega = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.5.1b)$$

perché ciò si verifichi devono essere imposte le seguenti condizioni di compatibilità e congruenza. Si ricorda che tali condizioni in forma puntuale possono essere espresse nel modo seguente:

$$\mathbf{u}_1^+ = \mathbf{0} \quad \text{condizione di Dirichlet su } \Gamma_1^+ \quad (1.5.2a)$$

$$\mathbf{t}_2^+ = \mathbf{0} \quad \text{condizione di Neumann su } \Gamma_2^+ \quad (1.5.2b)$$

alternative alle classiche condizioni di Dirichlet $\mathbf{u}_1 = \bar{\mathbf{u}}_1$ su Γ_1 e di Neumann $\mathbf{t}_2 = \bar{\mathbf{t}}_2$ su Γ_2 .

In forma pesata:

$$\mathbf{W}_1^+ \equiv \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\Psi}_f (\mathbf{u}_1^+) d\Gamma_1 = \mathbf{0} \quad \text{condizione di Dirichlet su } \Gamma_1^+ \quad (1.5.3a)$$

$$\mathbf{P}_2^+ \equiv \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\Psi}_u (\mathbf{t}_2^+) d\Gamma_2 = \mathbf{0} \quad \text{condizione di Neumann su } \Gamma_2^+ \quad (1.5.3b)$$

Le stesse scritte in forma estesa diventano:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\Psi}_f^T(\mathbf{x}) \left(\int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{uu}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') \boldsymbol{\Psi}_f(\mathbf{x}') d\Gamma_1 \right) d\Gamma_1 \mathbf{F}_1 + \\ & + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\Psi}_f^T(\mathbf{x}) \left(\int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{uu}(\mathbf{x}; \mathbf{x}', \mathbf{n}') \boldsymbol{\Psi}_u(\mathbf{x}') d\Gamma_2 \right) d\Gamma_1 (-\mathbf{U}_2) + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\Psi}_f^T(\mathbf{x}) (\mathbf{u}_1^{1+}) d\Gamma_1 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.5.4a)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_2} \Psi_u^T(\mathbf{x}) \left(\int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{uu}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}') \Psi_f(\mathbf{x}') d\Gamma_1 \right) d\Gamma_2 \mathbf{F}_1 + \\ & + \int_{\Gamma_2} \Psi_u^T(\mathbf{x}) \left(\int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{uu}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', \mathbf{n}') \Psi_u(\mathbf{x}') d\Gamma_2 \right) d\Gamma_2 (-\mathbf{U}_2) + \int_{\Gamma_2} \Psi_u^T(\mathbf{x}) (\mathbf{t}_2^{1+}) d\Gamma_2 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.5.4b)$$

dove \mathbf{u}_1^{1+} e \mathbf{t}_2^{1+} sono i vettori che definiscono la risposta sugli stessi contorni in termini di spostamento e trazione per effetto delle sole distribuzioni di cause imposte. Se si pone:

$$\int_{\Gamma_1} \Psi_f^T(\mathbf{x}) \left(\int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{uu}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') \Psi_f(\mathbf{x}') d\Gamma_1 \right) d\Gamma_1 = \mathbf{A}_{uu} \quad (1.5.5a)$$

$$\int_{\Gamma_1} \Psi_f^T(\mathbf{x}) \left(\int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{uf}(\mathbf{x}; \mathbf{x}', \mathbf{n}') \Psi_u(\mathbf{x}') d\Gamma_2 \right) d\Gamma_1 = \mathbf{A}_{uf} \quad (1.5.5b)$$

$$\int_{\Gamma_1} \Psi_f^T(\mathbf{x}) (\mathbf{u}_1^{1+}) d\Gamma_1 = \mathbf{L}_u \quad (1.5.5c)$$

$$\int_{\Gamma_2} \Psi_u^T(\mathbf{x}) \left(\int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{uu}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}') \Psi_f(\mathbf{x}') d\Gamma_1 \right) d\Gamma_2 = \mathbf{A}_{fu} \quad (1.5.5d)$$

$$\int_{\Gamma_2} \Psi_u^T(\mathbf{x}) \left(\int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{uu}(\mathbf{x}, \mathbf{n}; \mathbf{x}', \mathbf{n}') \Psi_u(\mathbf{x}') d\Gamma_2 \right) d\Gamma_2 = \mathbf{A}_{ff} \quad (1.5.5e)$$

$$\int_{\Gamma_2} \Psi_u^T(\mathbf{x}) (\mathbf{t}_2^{1+}) d\Gamma_2 = \mathbf{L}_f \quad (1.5.5f)$$

le equazioni (1.5.4a,b) espresse in forma matriciale diventano:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A}_{uu} & \mathbf{A}_{uf} \\ \mathbf{A}_{fu} & \mathbf{A}_{ff} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{F}_1 \\ -\mathbf{U}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{L}_u \\ \mathbf{L}_f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{vmatrix} \quad (1.5.6)$$

oppure in forma compatta:

$$\mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{L} = \mathbf{0} \quad (1.5.7)$$

La (1.5.7) è l'equazione risolvente del Metodo degli Elementi di Contorno Simmetrico alla Galerkin.

Il vettore \mathbf{X} contiene le grandezze incognite, di tipo misto (forze e spostamenti) definite sui nodi del contorno. In particolare: \mathbf{F}_1 è il vettore delle forze reattive valutato nei nodi del contorno Γ_1 vincolato, mentre $-\mathbf{U}_2$ è il vettore degli spostamenti valutato nei nodi del contorno Γ_2 libero cambiato di segno.

Il vettore \mathbf{L} contiene la risposta in termini di grandezze pesate sul contorno: in particolare \mathbf{L}_u traduce in termini di spostamenti pesati sul contorno Γ_1^+ tutte le azioni note meccaniche e cinematiche applicate sul solido B , mentre \mathbf{L}_f traduce in termini di trazioni pesate sul contorno Γ_2^+ tutte le azioni note meccaniche e distorcenti applicate sul solido B .

La matrice \mathbf{A} è definita matrice delle pseudo-rigidezze e contrariamente al BEM per collocazione, è una matrice simmetrica e definita (Polizzotto 1988-a; Bonnet et al. 1998; Vodička et al. 2006).

Come si può osservare dalla (1.5.6) la matrice dei coefficienti del sistema risolvente \mathbf{A} è costituita da sette blocchi aventi diverso significato fisico.

Il primo blocco sulla diagonale principale di \mathbf{A} è costituito dalla matrice \mathbf{A}_{uu} . Tale matrice relaziona grandezze cinematiche (spostamenti pesati \mathbf{W}_1) sui lati del contorno Γ_1^+ a grandezze meccaniche (forze nodali \mathbf{F}_1) sullo stesso contorno Γ_1 . La dimensione dei suoi coefficienti è lunghezza/forza e gode della seguente proprietà:

$$\mathbf{A}_{uu} = \mathbf{A}_{uu}^T \quad (1.5.8)$$

Il secondo blocco sulla diagonale principale della matrice \mathbf{A} è costituito dalla matrice \mathbf{A}_{ff} . Tale matrice relaziona grandezze meccaniche (trazioni pesate \mathbf{P}_2) sui lati del contorno Γ_2^+ a grandezze cinematiche (spostamenti nodali $-\mathbf{U}_2$) sullo stesso

contorno Γ_2 . La dimensione dei suoi coefficienti è forza /lunghezza. Inoltre la \mathbf{A}_{ff} gode della seguente proprietà:

$$\mathbf{A}_{ff} = \mathbf{A}_{ff}^T \quad (1.5.9)$$

Gli altri blocchi della matrice \mathbf{A} sono costituiti dalle matrici \mathbf{A}_{uf} e \mathbf{A}_{fu} . La \mathbf{A}_{uf} relaziona grandezze cinematiche (spostamenti pesati \mathbf{W}_1) sui lati del contorno Γ_1^+ a grandezze cinematiche (spostamenti relativi nodali $-\mathbf{U}_2$) su Γ_2 ; mentre la matrice \mathbf{A}_{fu} relaziona grandezze meccaniche (trazioni pesate \mathbf{P}_2) sui lati del contorno Γ_2^+ a grandezze meccaniche (forze nodali \mathbf{F}_1) su Γ_1 .

Si può osservare che tali matrici godono della seguente proprietà:

$$\mathbf{A}_{uf} = \mathbf{A}_{fu}^T \quad (1.5.10)$$

en base alle considerazioni fatte, anche la matrice dei coefficienti del sistema risolvente \mathbf{A} :

$$\begin{array}{c} \mathbf{F}_1 \quad -\mathbf{U}_2 \quad \text{cause} \\ \mathbf{W}_1 \left| \begin{array}{cc} \mathbf{A}_{uu} & \mathbf{A}_{uf} \\ \mathbf{A}_{fu} & \mathbf{A}_{ff} \end{array} \right. \\ \mathbf{P}_2 \\ \text{effetti} \end{array} \quad (1.5.11)$$

gode della seguente proprietà:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \quad (1.5.12)$$

Come è noto il sistema risolvente (1.5.7) che governa il metodo SBEM ha all'interno dei coefficienti, formati da doppi integrali, delle singolarità più o meno forti che si manifestano quando il punto dove è applicata la causa \mathbf{x}' coincide con il

punto dove si valuta l'effetto \mathbf{x} (Panzeca et al. 1998, 2001, 2004-b; Terravecchia 2006; Gray 1995, 1998; Guiggiani 1991; Richardson e Cruse 1998).

Si ricorda che, per la determinazione dei coefficienti in forma chiusa della matrice \mathbf{A} e del vettore di carico \mathbf{L} le singolarità all'interno dei coefficienti del sistema risolvete possono essere eliminate grazie alla presenza della doppia integrazione, necessaria la prima per la modellazione della causa, la seconda per la pesatura degli effetti sul contorno (Terravecchia 2006; Bonnet e Guiggiani 2003).

Lo stato di tensione $\boldsymbol{\sigma}$ in un punto $\mathbf{x} \in \Omega_\infty$ causato dalle distribuzioni di azioni sopra specificate si ottiene attraverso la seguente I.S:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = & \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{\sigma u} \boldsymbol{\Psi}_f \mathbf{F}_1 d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{\sigma t} \boldsymbol{\Psi}_u (-\mathbf{U}_2) d\Gamma_2 + \\ & + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{\sigma u} \boldsymbol{\Psi}_f \bar{\mathbf{F}}_2 d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{\sigma t} \boldsymbol{\Psi}_u (-\bar{\mathbf{U}}_1) d\Gamma_2 + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\sigma u} \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\sigma \sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p d\Omega = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.5.13)$$

Nelle eq. (1.5.1a,b e 1.5.13) compaiono integrali di dominio dovuti al deformazioni anelastiche $\boldsymbol{\varepsilon}^p$:

$$\mathbf{u}[\boldsymbol{\varepsilon}^p] = \int_{\Omega} \mathbf{G}_{u\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p d\Omega, \quad \mathbf{t}[\boldsymbol{\varepsilon}^p] = \int_{\Omega} \mathbf{G}_{t\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p d\Omega, \quad \boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{\varepsilon}^p] = \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\sigma\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p d\Omega \quad (1.5.14a,b,c)$$

Il loro effetto comporta la presenza di integrali di dominio aventi nuclei debolmente e fortemente singolari. Nel prossimo capitolo si mostrerà una formulazione nella quale tali integrali di dominio vengono opportunamente trattati. Inizialmente vengono considerati come Valori Principali di Cauchy il cui termine libero associato è il *Bui free term* (Bui, 1978), quindi regolarizzati al fine di isolare la singolarità forte. Infine si applica il Radial Integral Method (RIM) (Takhteyev e Trebbia, 1990 e Gao, 2002) allo scopo di trasformarli da integrali di dominio in integrali da effettuarsi sul contorno dell'e-bem. La tecnica utilizzata per valutazione degli

integrali di dominio dovuti alle forze di massa $\bar{\mathbf{b}}$, ovvero presenti nelle eq. (1.5.1a,b e 1.5.13):

$$\mathbf{u}[\bar{\mathbf{b}}] = \int_{\Omega} \mathbf{G}_{uu} \bar{\mathbf{b}} d\Omega, \quad \mathbf{t}[\bar{\mathbf{b}}] = \int_{\Omega} \mathbf{G}_{tu} \bar{\mathbf{b}} d\Omega, \quad \boldsymbol{\sigma}[\bar{\mathbf{b}}] = \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\sigma u} \bar{\mathbf{b}} d\Omega \quad (1.5.15a,b,c)$$

è invece sviluppata nell'Appendice 1.1.

Appendice 1.1

In questa sezione si sviluppa la procedura mediante la quale è possibile trasformare gli integrali relativi alle forze di massa $\bar{\mathbf{b}}$ delle eq.(1.5.15a,b,c) in integrali di contorno, al fine di mostrare i vantaggi derivanti dalla generalizzabilità del metodo.

$$\mathbf{u}[\bar{\mathbf{b}}] = \int_{\Omega} \mathbf{G}_{uu} \bar{\mathbf{b}} d\Omega, \quad \mathbf{t}[\bar{\mathbf{b}}] = \int_{\Omega} \mathbf{G}_{tu} \bar{\mathbf{b}} d\Omega, \quad \boldsymbol{\sigma}[\bar{\mathbf{b}}] = \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\sigma u} \bar{\mathbf{b}} d\Omega \quad (A.1.1a,b,c)$$

Con riferimento al generico e-bem soggetto ad una distribuzione costante di forze di massa $\bar{\mathbf{b}}$, si consideri il coefficiente (A.1.1b) che è trasformato sul contorno mediante una doppia trasformazione in coordinate polari:

$$\int_{\Omega} \mathbf{G}_{tu} d\Omega \cdot \bar{\mathbf{b}} = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\boldsymbol{\Psi}_{tu}(\varphi)}{r} r dr d\varphi \cdot \bar{\mathbf{b}} = \int_0^{2\pi} \frac{\boldsymbol{\Psi}_{tu}(\varphi)}{R} R^2 d\varphi \cdot \bar{\mathbf{b}} = \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{tu} \mathbf{n}^T \mathbf{r} d\Gamma \cdot \bar{\mathbf{b}} \quad (A.1.2)$$

dove si è adottata la seguente relazione $R^2 d\varphi = \mathbf{n}^T \mathbf{r} d\Gamma$.

La strategia mostrata consente di valutare le trazioni dovute alle forze di massa trasferite sul contorno:

$$\mathbf{t}[\bar{\mathbf{b}}] = \int_{\Omega} \mathbf{G}_{tu} \bar{\mathbf{b}} d\Omega = \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{G}}_{tu} \bar{\mathbf{b}} d\Gamma \quad \text{dove} \quad \tilde{\mathbf{G}}_{tu} = \mathbf{G}_{tu} (\mathbf{n}^T \mathbf{r}) \quad (A.1.3)$$

Allo stesso modo possono essere valutati gli spostamenti:

$$\mathbf{u}[\bar{\mathbf{b}}] = \int_{\Omega} \mathbf{G}_{uu} \bar{\mathbf{b}} d\Omega = \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{G}}_{uu} \bar{\mathbf{b}} d\Gamma \quad \text{dove} \quad \tilde{\mathbf{G}}_{uu} = 1/2[\mathbf{G}_{uu} + q\mathbf{I}] (\mathbf{n}^T \mathbf{r}) \quad (\text{A.1.4})$$

essendo \mathbf{I} la matrice identità e $q = (3-4\nu)(1+\nu)/(8E(1-\nu)\pi)$

e le tensioni:

$$\boldsymbol{\sigma}[\bar{\mathbf{b}}] = \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\sigma u} \bar{\mathbf{b}} d\Omega = \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{G}}_{\sigma u} \bar{\mathbf{b}} d\Gamma \quad \text{dove} \quad \tilde{\mathbf{G}}_{\sigma u} = \mathbf{G}_{\sigma u} (\mathbf{n}^T \mathbf{r}) \quad (\text{A.1.5})$$

Capitolo 2

Analisi multidomain via SBEM

In questo capitolo gli approcci agli spostamenti e misto, sviluppati nell'ambito del SBEM da Panzeca et al. (2000-b, 2002-b), vengono utilizzati come strumento di l'analisi per il problema elasto-plastico. La strategia che si presenta è di carattere generale e definisce operatori algebrici che dipendono esclusivamente dalla geometria e dalla tipologia di ciascun e-bem. La possibilità di ottenere un sistema risolvibile con grandezze associate al contorno di interfaccia rende il metodo molto vantaggioso dal punto di vista computazionale rispetto ad altre formulazioni che operano sia nell'ambito del FEM che del BEM.

Nella loro generalità le strategie impiegate prevedono:

- la suddivisione del corpo in sottostrutture, chiamate elementi bem (e-bem) di qualsiasi dimensione e forma;
- la individuazione di vari tipi di contorno per e-bem;
- la determinazione di una matrice, definita capostipite, per ciascun e-bem discretizzato sul contorno, che relaziona le grandezze pesate (spostamenti e trazioni) su tutto il contorno con gli spostamenti dei nodi, cambiati in segno, e le forze sugli elementi di contorno, senza distinzione tra grandezze note ed incognite;
- la determinazione, per ciascun e-bem discretizzato sul contorno, di una espressione che relaziona quantità valutate in forma pesata (o generalizzata) sul contorno di interfaccia alle grandezze nodali definite sullo stesso contorno ed alle azioni esterne note, di dominio e di contorno;

- la determinazione del sistema risolvibile ottenuto imponendo le condizioni di regolarità sulle grandezze di interfaccia tra gli e-bem.

Entrambi gli approcci conducono a due equazioni, definite caratteristiche del corpo. La prima relaziona trazioni generalizzate (approccio agli spostamenti) o trazioni e spostamenti generalizzati (approccio misto) valutati sugli elementi di contorno della zona di interfaccia ai soli spostamenti nodali (approccio agli spostamenti) o trazioni e spostamenti nodali (approccio misto) sul medesimo contorno, al vettore delle azioni anelastiche, e al vettore di carico. La seconda è l'equazione delle tensioni che verrà descritta in seguito.

Nell'approccio agli spostamenti, l'operatore algebrico che caratterizza il comportamento di ciascun e-bem è la matrice di rigidità. Quindi la strategia seguita permette di definire gli e-bem, nell'ambito della formulazione simmetrica, in modo analogo a quanto effettuato per gli Elementi Finiti. Inoltre, considerando come variabili solamente gli spostamenti di interfaccia, conduce a sistemi risolvibili di piccole dimensioni, ottenuti garantendo l'equilibrio generalizzato e l'uguaglianza (compatibilità) degli spostamenti dei nodi di interfaccia.

Il secondo approccio relaziona sia quantità meccaniche che cinematiche e conduce a sistemi risolvibili di maggiore dimensione che garantiscono però la compatibilità e l'equilibrio sia negli elementi di interfaccia (generalizzati) sia nei nodi.

Da entrambi gli approcci, attraverso una forte condensazione di variabili, si perviene alla scrittura dell'equazione delle auto-tensioni (Panzeca, 1992; Zhang et al., 2002) che lega tensioni valutate sui punti di Gauss a deformazioni volumetriche imposte, attraverso una matrice di influenza (matrice di rigidità) quadrata, non simmetrica, semi-definita negativa e piena. Come si vedrà in seguito l'equazione delle auto-tensioni governa il problema elasto-plastico e le analisi limite ed a shakedown.

L'equazione contiene coefficienti che dipendono dalle deformazioni plastiche imposte, dalla risposta a quest'ultime in termini di spostamenti e trazioni nodali e dai carichi esterni e permette di localizzare tutti gli elementi bem in cui risulta violata la condizione di ammissibilità plastica (plasticamente attivi), rispetto al generico incremento di carico. Come si mostrerà in seguito, gli elementi bem individuati saranno raggruppati in macro-zone dove con l'impiego della stessa equazione delle auto-tensioni e mediante tecniche di *return mapping* sarà possibile effettuare la correzione della soluzione.

Entrambi i metodi sono stati implementati nel codice di calcolo Karnak.sGbem (Panzeca et al. 2002-a). Gli algoritmi consentono di effettuare l'analisi non lineare su lastre di qualunque dimensione e forma, con caratteristiche fisiche, meccaniche e geometriche differenti in ciascun e-bem, soggette a forze di contorno, a cedimenti vincolari nonché a forze di massa e distorsioni di volume.

2.1 Posizione del problema

Nei prossimi paragrafi saranno descritte nel dettaglio la procedure utilizzate per ottenere, mediante gli approcci agli spostamenti e misto, l'equazione delle auto-tensioni. Essa lega tensioni a deformazioni volumetriche imposte, attraverso una matrice di rigidità relativa a tutti gli elementi bem del sistema discretizzato.

Il punto di partenza è la definizione delle classiche I.S.:

$$\mathbf{u} = \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{uu} \mathbf{f} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{ut} (-\mathbf{u}) d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{uu} \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{u\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p d\Omega \quad (2.1.1a)$$

$$\mathbf{t} = \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{ut} \mathbf{f} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{tt} (-\mathbf{u}) d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{tu} \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{t\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p d\Omega \quad (2.1.1b)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{\sigma u} \mathbf{f} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{\sigma t} (-\mathbf{u}) d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\sigma u} \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\sigma\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p d\Omega \quad (2.1.1c)$$

Le eq.(2.1.1a,b,c) forniscono spostamenti, trazioni e tensioni in Ω_{∞} causate sia da

azioni stratificate meccaniche $\bar{\mathbf{f}}$ e cinematiche $-\bar{\mathbf{u}}$, entrambi vettori di contorno noti e incogniti, che da forze di massa $\bar{\mathbf{b}}$ e azioni anelastiche volumetriche $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, assunte costanti nel dominio Ω . Gli operatori \mathbf{G}_{hk} sono le matrici delle Soluzioni Fondamentali, introdotte da Maier and Polizzotto (1987), in cui si ricorda che gli indici $h=u,t,\sigma$ e $k=u,t,\sigma$ rappresentano rispettivamente l'effetto e la quantità duale, in senso energetico associata alla causa. Il vettore $\boldsymbol{\varepsilon}^p = [\varepsilon_x^p, \varepsilon_y^p, \varepsilon_{xy}^p]^T$ rappresenta le deformazioni anelastiche dovute ad azioni plastiche o termiche. La loro presenza comporta integrali di dominio con nuclei singolari per la cui soluzione è stata sviluppata una strategia computazionale che sarà mostrata dettagliatamente nel capitolo successivo.

Si consideri il solido bi-dimensionale Fig. 2.1.1 avente dominio Ω e contorno Γ , soggetto alle seguenti azioni:

- forze $\bar{\mathbf{f}}$ sulla porzione Γ_2 del contorno libero,
- spostamenti $\bar{\mathbf{u}}$ imposti sulla porzione Γ_1 del contorno vincolato,
- forze di massa $\bar{\mathbf{b}}$ e deformazioni plastiche $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ su Ω .

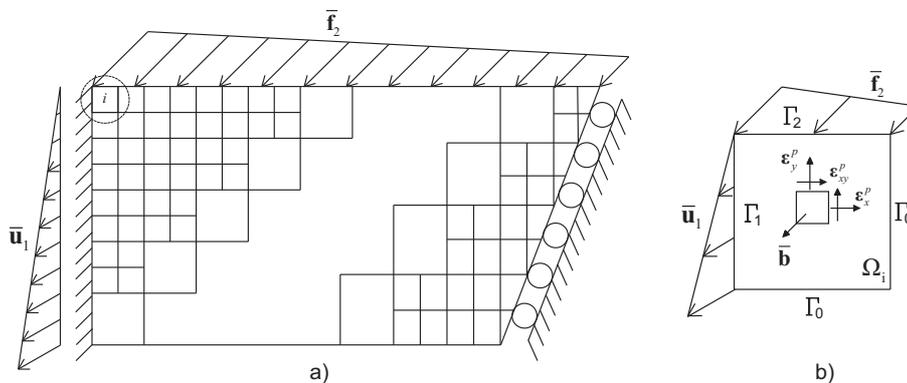


Fig.2.2.1: a) Solido suddiviso in elementi bem; b) l'i-esimo e-bem soggetto ad azioni di contorno e di volume.

Nell'ipotesi che le caratteristiche fisiche e geometriche del corpo siano variabili a zone, si operi un'opportuna discretizzazione del dominio. Tale suddivisione comporta l'introduzione del contorno di interfaccia Γ_0 tra elementi bem contigui e, come conseguenza, la nascita di ulteriori grandezze incognite nel problema di analisi, cioè spostamenti \mathbf{u}_0 e trazioni \mathbf{t}_0 entrambi vettori sul contorno.

Si vuole ottenere la risposta elastica alle azioni esterne non solo in termini di spostamenti \mathbf{u}_2 su Γ_2 , forze reattive \mathbf{f}_1 su Γ_1 dell'intero dominio Ω , ma anche in termini di spostamenti e trazioni del contorno di interfaccia Γ_0 di tutti gli elementi bem e delle tensioni $\boldsymbol{\sigma}$, utilizzando l'approccio agli spostamenti nell'ambito della formulazione simmetrica del metodo degli elementi di contorno. Le eqs.(2.1.1a,b) consentono di ottenere, mediante l'impiego di grandezze pesate, i coefficienti degli operatori algebrici necessari alla fase di analisi; l'eq.(2.1.1c) consente di ottenere lo stato di tensione nei punti di collocazione in fase di post-processing. Si consideri ciascun e-bem, caratterizzato da un contorno Γ distinto in libero Γ_2 , vincolato Γ_1 e d'interfaccia Γ_0 e si impongano in ognuno di questi le seguenti condizioni di Dirichlet e Neumann:

$$\mathbf{u}_1 = \bar{\mathbf{u}}_1 \quad \text{on } \Gamma_1, \quad \mathbf{t}_2 = \bar{\mathbf{f}}_2 \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (2.1.2a,b)$$

Introducendo nell'eqs.(2.1.2a,b) le I.S. degli spostamenti e delle trazioni, si ottengono le seguenti equazioni integrali:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{uu} \mathbf{f}_1 + \oint_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{ut} (-\bar{\mathbf{u}}_1) + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}_1 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{uu} \bar{\mathbf{f}}_2 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{ut} (-\mathbf{u}_2) + \\ & + \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{uu} \mathbf{f}_0 + \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{ut} (-\mathbf{u}_0) + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{uu} \bar{\mathbf{b}} + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{u\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p = \bar{\mathbf{u}}_1 \end{aligned} \quad (2.1.3a)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{uu} \mathbf{f}_1 + \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{ut} (-\bar{\mathbf{u}}_1) + \oint_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{uu} \bar{\mathbf{f}}_2 + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{f}}_2 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{ut} (-\mathbf{u}_2) + \\ & + \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{uu} \mathbf{f}_0 + \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{ut} (-\mathbf{u}_0) + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{uu} \bar{\mathbf{b}} + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{t\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p = \bar{\mathbf{f}}_2 \end{aligned} \quad (2.1.3b)$$

È necessario definire le grandezze incognite \mathbf{u}_0 and \mathbf{t}_0 , vettori relativi al contorno di interfaccia Γ_0 :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 = & \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{uu} \mathbf{f}_1 + \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{ut} (-\bar{\mathbf{u}}_1) + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{uu} \bar{\mathbf{f}}_2 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{ut} (-\mathbf{u}_2) + \\ & \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{uu} \mathbf{f}_0 + \oint_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{ut} (-\mathbf{u}_0) + \frac{1}{2} \mathbf{u}_0 + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{uu} \bar{\mathbf{b}} + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{u\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p \end{aligned} \quad (2.1.3c)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_0 = & \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{tu} \mathbf{f}_1 + \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{tt} (-\bar{\mathbf{u}}_1) + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{tu} \bar{\mathbf{f}}_2 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{tt} (-\mathbf{u}_2) + \\ & + \oint_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{tu} \mathbf{f}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{t}_0 + \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{tt} (-\mathbf{u}_0) + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{tu} \bar{\mathbf{b}} + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{t\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p \end{aligned} \quad (2.1.3d)$$

ed introdurre il vettore delle tensioni:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = & \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{\sigma u} \mathbf{f}_1 + \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{\sigma t} (-\bar{\mathbf{u}}_1) + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{\sigma u} \bar{\mathbf{f}}_2 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{\sigma t} (-\mathbf{u}_2) + \\ & + \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{\sigma u} \mathbf{f}_0 + \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{\sigma t} (-\mathbf{u}_0) + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\sigma u} \bar{\mathbf{b}} + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\sigma\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p \end{aligned} \quad (2.1.3e)$$

2.2 Equazione delle auto-tensioni mediante l'approccio agli spostamenti

Nell'ambito di problemi di tipo *multi domain* in questo paragrafo verrà descritto un approccio che consente di generare per ciascun e-bem gli operatori algebrici che ne caratterizzano il comportamento in funzione della geometria e del tipo di contorno. Si perviene a due relazioni che garantiscono, per ciascun e-bem l'equilibrio generalizzato e la compatibilità nodale in tutti i punti del dominio. Le

relazioni caratteristiche ricavate consentono di ottenere la seguente equazione delle auto-tensioni:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Z}\mathbf{p} + \beta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_s, \quad (2.2.1)$$

la quale esprime le tensioni valutate sui punti di Gauss, in funzione delle deformazioni anelastiche \mathbf{p} mediante la matrice di influenza \mathbf{Z} e del vettore di carico $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_s$ amplificato dal moltiplicatore β .

2.2.1 Equazioni caratteristiche dell'e-bem

Per definire le equazioni caratteristiche del singolo e-bem si procede modificando le eqs.(2.1.3a,b,c) e lasciando inalterate le eqs (2.1.3d,e) ovvero il sistema d equazioni integrali viene riscritto come segue:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{uu} \mathbf{f}_1 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{uu} (-\mathbf{u}_2) + \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{uu} \mathbf{f}_0 + \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{uu} (-\mathbf{u}_0) + \\ & + \oint_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{uu} (-\bar{\mathbf{u}}_1) - \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}_1 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{uu} \bar{\mathbf{f}}_2 + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{uu} \bar{\mathbf{b}} + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{u\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.2.2a)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{tu} \mathbf{f}_1 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{tu} (-\mathbf{u}_2) + \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{tu} \mathbf{f}_0 + \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{tu} (-\mathbf{u}_0) + \\ & + \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{tu} (-\bar{\mathbf{u}}_1) + \oint_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{tu} \bar{\mathbf{f}}_2 - \frac{1}{2} \bar{\mathbf{f}}_2 + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{tu} \bar{\mathbf{b}} + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{t\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.2.2b)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{uu} \mathbf{f}_1 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{uu} (-\mathbf{u}_2) + \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{uu} \mathbf{f}_0 + \oint_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{uu} (-\mathbf{u}_0) - \frac{1}{2} \mathbf{u}_0 + \\ & + \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{uu} (-\bar{\mathbf{u}}_1) + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{uu} \bar{\mathbf{f}}_2 + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{uu} \bar{\mathbf{b}} + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{u\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.2.2c)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_0 = & \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{tu} \mathbf{f}_1 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{tu} (-\mathbf{u}_2) + \oint_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{tu} \mathbf{f}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{f}_0 + \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{tu} (-\mathbf{u}_0) \\ & + \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{tu} (-\bar{\mathbf{u}}_1) + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{tu} \bar{\mathbf{f}}_2 + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{tu} \bar{\mathbf{b}} + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{t\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p \end{aligned} \quad (2.2.2d)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = & \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{\sigma u} \mathbf{f}_1 + \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{\sigma t} (-\bar{\mathbf{u}}_1) + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{\sigma u} \bar{\mathbf{f}}_2 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{\sigma t} (-\mathbf{u}_2) + \\ & + \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{tu} \mathbf{f}_0 + \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_u (-\mathbf{u}_0) + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\sigma u} \bar{\mathbf{b}} + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\sigma\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p \end{aligned} \quad (2.2.2e)$$

Nelle precedenti equazioni integrali $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ è il vettore delle deformazioni plastiche, la cui strategia di valutazione sarà definita nel capitolo 4. Si effettui la discretizzazione del contorno in elementi di contorno eseguendo la modellazione di tutte le grandezze note ed incognite attraverso l'introduzione di funzioni di forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \boldsymbol{\Psi}_t \mathbf{F}_1, \quad \bar{\mathbf{f}}_2 = \boldsymbol{\Psi}_t \bar{\mathbf{F}}_2, \quad \mathbf{t}_0 = \boldsymbol{\Psi}_t \mathbf{F}_0, \quad \mathbf{u}_2 = \boldsymbol{\Psi}_u \mathbf{U}_2, \\ \bar{\mathbf{u}}_1 &= \boldsymbol{\Psi}_u \bar{\mathbf{U}}_1, \quad \mathbf{u}_0 = \boldsymbol{\Psi}_u \mathbf{U}_0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\Psi}_p \mathbf{p} \end{aligned} \quad (2.2.3a-g)$$

dove $\boldsymbol{\Psi}_t$ and $\boldsymbol{\Psi}_u$ sono funzioni di forma relative al contorno, mentre $\boldsymbol{\Psi}_p$ sono funzioni di forma del dominio utilizzate per modellare le deformazioni plastiche \mathbf{p} applicate nei punti di Gauss di ciascun e-bem. Con le lettere maiuscole \mathbf{F} and \mathbf{U} si è voluto indicare i vettori nodali delle forze (\mathbf{F}_1 on Γ_1 and \mathbf{F}_0 on Γ_0) e degli spostamenti (\mathbf{U}_2 on Γ_2 and \mathbf{U}_0 on Γ_0) definiti sugli elementi di contorno. Si effettui quindi la pesatura di tutti i coefficienti delle eqs.(2.2.2a-d) servendosi delle stesse funzioni di forma utilizzate per la modellazione delle cause, ma duali in senso energetico in accordo con l'approccio alla Galerkin.

In questo modo è possibile ottenere il seguente sistema a blocchi:

$$\begin{array}{c|ccc|cc|c|c} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{u1,u1} & \mathbf{A}_{u1,f2} & \mathbf{A}_{u1,u0} & \mathbf{A}_{u1,f0} & \mathbf{A}_{u1,\sigma} & \mathbf{F}_1 & \hat{\mathbf{W}}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{f2,u1} & \mathbf{A}_{f2,f2} & \mathbf{A}_{f2,u0} & \mathbf{A}_{f2,f0} & \mathbf{A}_{f2,\sigma} & -\mathbf{U}_2 & \hat{\mathbf{P}}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{u0,u1} & \mathbf{A}_{u0,f2} & \mathbf{A}_{u0,u0} & \bar{\mathbf{A}}_{u0,f0} & \mathbf{A}_{u0,\sigma} & \mathbf{F}_0 & \hat{\mathbf{W}}_0 \\ \hline \mathbf{P}_0 & \mathbf{A}_{f0,u1} & \mathbf{A}_{f0,f2} & \bar{\mathbf{A}}_{f0,u0} & \mathbf{A}_{f0,f0} & \mathbf{A}_{f0,\sigma} & -\mathbf{U}_0 & \hat{\mathbf{L}}_0 \\ \hline \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{a}_{\sigma,u1} & \mathbf{a}_{\sigma,f2} & \mathbf{a}_{\sigma,u0} & \mathbf{a}_{\sigma,f0} & \mathbf{a}_{\sigma,\sigma} & \mathbf{P} & \hat{\mathbf{I}}_{\sigma} \end{array} + \beta \quad (2.2.4a-e)$$

dove valgono le seguenti posizioni:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{u1,u1} &= \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\Psi}_f^T \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{uu} \boldsymbol{\Psi}_f = \mathbf{A}_{u1,u1}^T, & \mathbf{A}_{u1,f2} &= \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\Psi}_f^T \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{ut} \boldsymbol{\Psi}_u = \mathbf{A}_{f2,u1}^T, \\
\mathbf{A}_{f2,f2} &= \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\Psi}_u^T \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{tt} \boldsymbol{\Psi}_u = \mathbf{A}_{f2,f2}^T, \\
\mathbf{A}_{u1,u0} &= \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\Psi}_f^T \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{uu} \boldsymbol{\Psi}_f = \mathbf{A}_{u0,u1}^T, & \mathbf{A}_{f2,u0} &= \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\Psi}_u^T \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{ut} \boldsymbol{\Psi}_f = \mathbf{A}_{u0,f2}^T, \\
\mathbf{A}_{u0,u0} &= \int_{\Gamma_0} \boldsymbol{\Psi}_f^T \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{uu} \boldsymbol{\Psi}_f = \mathbf{A}_{u0,u0}^T, \\
\mathbf{A}_{u1,f0} &= \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\Psi}_f^T \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{ut} \boldsymbol{\Psi}_f = \mathbf{A}_{f0,u1}^T, & \mathbf{A}_{f2,f0} &= \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\Psi}_u^T \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{tt} \boldsymbol{\Psi}_u = \mathbf{A}_{f0,f2}^T, \\
\mathbf{A}_{f0,f0} &= \int_{\Gamma_0} \boldsymbol{\Psi}_u^T \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{tt} \boldsymbol{\Psi}_u = \mathbf{A}_{f0,f0}^T, \\
\bar{\mathbf{A}}_{u0,f0} &= \int_{\Gamma_0} \boldsymbol{\Psi}_f^T \oint_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{ut} \boldsymbol{\Psi}_u + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} \boldsymbol{\Psi}_f^T \boldsymbol{\Psi}_u = \bar{\mathbf{A}}_{f0,u0}^T, \\
\mathbf{A}_{u1,\sigma} &= \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\Psi}_f^T \int_{\Omega} \mathbf{G}_{u\sigma} \boldsymbol{\Psi}_p, & \mathbf{A}_{f2,\sigma} &= \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\Psi}_u^T \int_{\Omega} \mathbf{G}_{t\sigma} \boldsymbol{\Psi}_p, \\
\mathbf{A}_{u0,\sigma} &= \int_{\Gamma_0} \boldsymbol{\Psi}_f^T \int_{\Omega} \mathbf{G}_{u\sigma} \boldsymbol{\Psi}_p, & \mathbf{A}_{f0,\sigma} &= \int_{\Gamma_0} \boldsymbol{\Psi}_u^T \int_{\Omega} \mathbf{G}_{t\sigma} \boldsymbol{\Psi}_p
\end{aligned} \tag{2.2.5a-n}$$

per la matrice di influenza \mathbf{A} , simmetrica e contenente 4*4 sottoblocchi matriciali e:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{W}}_1 &= \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\Psi}_f^T \oint_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{ut} \boldsymbol{\Psi}_u (-\bar{\mathbf{U}}_1) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\Psi}_f^T \boldsymbol{\Psi}_u (-\bar{\mathbf{U}}_1) + \\
&\quad + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\Psi}_f^T \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{uu} \boldsymbol{\Psi}_f \bar{\mathbf{F}}_2 + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\Psi}_f^T \int_{\Omega} \mathbf{G}_{uu} \bar{\mathbf{b}}
\end{aligned} \tag{2.2.6a}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}_2 = & \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\Psi}_u^T \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{uu} \boldsymbol{\Psi}_u (-\bar{\mathbf{U}}_1) + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\Psi}_u^T \oint_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{uu} \boldsymbol{\Psi}_f \bar{\mathbf{F}}_2 + \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\Psi}_u^T \boldsymbol{\Psi}_f \bar{\mathbf{F}}_2 + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\Psi}_u^T \int_{\Omega} \mathbf{G}_{uu} \bar{\mathbf{b}} \end{aligned} \quad (2.2.6b)$$

$$\hat{\mathbf{W}}_0 = \int_{\Gamma_0} \boldsymbol{\Psi}_f^T \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{uu} \boldsymbol{\Psi}_u (-\bar{\mathbf{U}}_1) + \int_{\Gamma_0} \boldsymbol{\Psi}_f^T \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{uu} \boldsymbol{\Psi}_f \bar{\mathbf{F}}_2 + \int_{\Gamma_0} \boldsymbol{\Psi}_f^T \int_{\Omega} \mathbf{G}_{uu} \bar{\mathbf{b}} \quad (2.2.6c)$$

$$\hat{\mathbf{L}}_0 = \int_{\Gamma_0} \boldsymbol{\Psi}_u^T \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{uu} \boldsymbol{\Psi}_u (-\bar{\mathbf{U}}_1) + \int_{\Gamma_0} \boldsymbol{\Psi}_u^T \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{uu} \boldsymbol{\Psi}_f \bar{\mathbf{F}}_2 + \int_{\Gamma_0} \boldsymbol{\Psi}_u^T \int_{\Omega} \mathbf{G}_{uu} \bar{\mathbf{b}} \quad (2.2.6d)$$

per il vettore dei carichi.

Nell'eq. (2.2.4) la prima e la seconda riga rappresentano le condizioni di Dirichlet and Neumann (2.1.2a,b), $\int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\Psi}_f^T (\mathbf{u}_1 - \bar{\mathbf{u}}_1) = \mathbf{0}$ e $\int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\Psi}_u^T (\mathbf{t}_2 - \bar{\mathbf{f}}_2) = \mathbf{0}$, scritte in forma pesata. La terza e la quarta riguardano invece la pesatura degli spostamenti e delle trazioni nella zona di interfaccia. In particolare la pesatura dell' eq.(2.2.2d), i.e. $\mathbf{P}_0 = \int_{\Gamma_0} \boldsymbol{\Psi}_u^T \mathbf{t}_0$ consente di ottenere trazioni generalizzate definite sugli elementi di contorno Γ_0 .

Inoltre il coefficiente β é il moltiplicatore delle azioni di contorno $-\bar{\mathbf{U}}_1$, $\bar{\mathbf{F}}_2$ e di dominio $\bar{\mathbf{b}}$.

Il sistema introdotto é lo stesso presente in Panzeca et al. (2002 a-b), nel quale si ricava l'equazione caratteristica per risolvere un problema di tipo multi-domain mediante l'approccio agli spostamenti. Tuttavia in questo caso compare nella formulazione anche una matrice che lega quantità pesate a deformazioni plastiche volumetriche \mathbf{p} .

L'eq.(2.2.3e) invece mantiene lo stesso significato di tensione nei punti di Gauss, ottenuta modellando le cause e valutando gli effetti di campo secondo l'approccio per collocazione:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{\sigma,u1} &= \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{\sigma u} \boldsymbol{\Psi}_f, & \mathbf{a}_{\sigma,f2} &= \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{\sigma t} \boldsymbol{\Psi}_u, \\
\mathbf{a}_{\sigma,u0} &= \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{\sigma u} \boldsymbol{\Psi}_f, & \mathbf{a}_{\sigma,f0} &= \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{\sigma t} \boldsymbol{\Psi}_u \\
\mathbf{a}_{\sigma,\sigma} &= \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\sigma\sigma} \boldsymbol{\Psi}_p \\
\hat{\mathbf{I}}_{\sigma} &= \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{\sigma t} \boldsymbol{\Psi}_u (-\bar{\mathbf{U}}_1) + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{\sigma u} \boldsymbol{\Psi}_f \bar{\mathbf{F}} + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\sigma u} \bar{\mathbf{b}}
\end{aligned} \tag{2.2.7e-f}$$

Nell' eq.(2.2.5) I termini $\bar{\mathbf{A}}_{u0,f0} = \bar{\mathbf{A}}_{f0,u0}^T$ contengono la pesatura dei valori principali di Cauchy (CPV) e i relativi termini liberi.

Le eqs.(2.2.4a-e) possono essere espresse in forma compatta come segue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{A}_0(-\mathbf{U}_0) + \mathbf{A}_{\sigma}\mathbf{p} + \beta \hat{\mathbf{L}} \\
\mathbf{P}_0 &= \tilde{\mathbf{A}}_0 \mathbf{X} + \mathbf{A}_{00}(-\mathbf{U}_0) + \mathbf{A}_{0\sigma}\mathbf{p} + \beta \hat{\mathbf{L}}_0 \\
\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{a}_{\sigma} \mathbf{X} + \mathbf{a}_{\sigma 0}(-\mathbf{U}_0) + \mathbf{a}_{\sigma\sigma}\mathbf{p} + \beta \hat{\mathbf{I}}_{\sigma}
\end{aligned} \tag{2.2.8a-c}$$

dove il vettore \mathbf{X} contiene i sotto-vettori \mathbf{F}_1 , $-\mathbf{U}_2$ e \mathbf{F}_0 , mentre i vettori $-\mathbf{U}_0$ e \mathbf{p} caratterizzano rispettivamente gli spostamenti dei nodi nella zona di interfaccia, cambiati di segno, e le deformazioni plastiche nodali.

Il vettore \mathbf{P}_0 rappresenta le trazioni generalizzate (o pesate) relative agli elementi di contorno della zona di interfaccia, ottenute come risposta a tutte le azioni di contorno e di dominio, note ed incognite. Il vettore $\boldsymbol{\sigma}$ rappresenta le tensioni, valutate nei punti di Gauss, dovute a tutte le azioni note ed incognite.

Effettuando una condensazione di variabili mediante la sostituzione del vettore \mathbf{X} , ricavato dall'eq.(2.2.8a), nell' eqs.(2.2.8b,c), si ottengono le seguenti equazioni:

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{D}_{00} \mathbf{U}_0 + \mathbf{D}_{0\sigma} \mathbf{p} + \beta \hat{\mathbf{P}}_0 \quad (2.2.9a)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{d}_{\sigma 0} \mathbf{U}_0 + \mathbf{d}_{\sigma\sigma} \mathbf{p} + \beta \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.2.9b)$$

dove valgono le seguenti posizioni:

$$\mathbf{D}_{00} = \mathbf{A}_0^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_{00}, \quad \mathbf{D}_{0\sigma} = -\mathbf{A}_0^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_\sigma + \mathbf{A}_{0\sigma},$$

$$\hat{\mathbf{P}}_0 = -\mathbf{A}_0^T \mathbf{A}^{-1} \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{L}}_0$$

$$\mathbf{d}_{\sigma 0} = \mathbf{a}_\sigma \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_0 - \mathbf{a}_{\sigma 0}, \quad \mathbf{d}_{\sigma\sigma} = -\mathbf{a}_\sigma \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_\sigma + \mathbf{A}_{\sigma\sigma},$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = -\mathbf{a}_\sigma \mathbf{A}^{-1} \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{l}}_\sigma \quad (2.2.10a-f)$$

Le eq.(2.2.9a,b) sono le equazioni caratteristiche di ciascun e-bem. Esse relazionano trazioni generalizzate (o pesate) \mathbf{P}_0 definite sulla zona di interfaccia Γ_0 e tensioni $\boldsymbol{\sigma}$ sul dominio dell' e-bem a spostamenti nodali \mathbf{U}_0 , deformazioni plastiche \mathbf{p} ed ai termini di carico $\hat{\mathbf{P}}_0$ e $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, che rappresentano la risposta elastica valutata rispettivamente sugli stessi elementi di contorno e all'interno del dominio di ciascun e-bem, amplificati di β . Inoltre, \mathbf{D}_{00} , $\mathbf{D}_{0\sigma}$, $\mathbf{d}_{\sigma 0}$, $\mathbf{d}_{\sigma\sigma}$ sono le matrici di rigidezza dell'e-bem, essendo \mathbf{D}_{00} e $\mathbf{d}_{\sigma\sigma}$ matrici quadrate a $\mathbf{D}_{0\sigma}$ e $\mathbf{d}_{\sigma 0}$ matrici rettangolari.

2.2.2 Sistema assemblato

Si suddivida il corpo in m e-bem e si consideri per ciascuno di questi le eqs.(2.2.9a,b). Si ottengono due relazioni globali che legano tutte le trazioni generalizzate e le tensioni relative agli elementi bem considerati:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_0^1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_0^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{00}^1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{D}_{00}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_0^1 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_0^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{0\sigma}^1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{D}_{0\sigma}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}^m \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{P}}_0^1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{P}}_0^m \end{pmatrix} \quad (2.2.11a)$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\sigma}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{\sigma 0}^1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{d}_{00}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_0^1 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_0^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{\sigma\sigma}^1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{d}_{\sigma\sigma}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}^m \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}}^1 \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}^m \end{pmatrix} \quad (2.2.11b)$$

o in forma compatta:

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{D}_{00} \mathbf{U}_0 + \mathbf{D}_{0\sigma} \mathbf{p} + \beta \hat{\mathbf{P}}_0 \quad (2.2.12a)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{d}_{\sigma 0} \mathbf{U}_0 + \mathbf{d}_{\sigma\sigma} \mathbf{p} + \beta \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.2.12b)$$

formalmente identica alle eqs.(2.2.8a,b) valide per ciascun e-bem, ma relative a tutti gli elementi bem del sistema assemblato. Si introduca la condizione di compatibilità tra gli spostamenti nodali di elementi bem adiacenti:

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{H} \boldsymbol{\xi}_0 \quad (2.2.13a)$$

dove \mathbf{H} é una matrice topologica

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{H}^m \end{pmatrix} \quad (2.2.13b)$$

e $\boldsymbol{\xi}_0$ il vettore degli spostamenti nodali del sistema assemblato. Si introduca inoltre la condizione di equilibrio tra le trazioni generalizzate sul contorno di interfaccia.

$$\mathbf{H}^T \mathbf{P}_0 = \mathbf{0} \quad (2.2.14)$$

Si ottiene:

$$\mathbf{K}_{00}\xi_0 + \mathbf{K}_{0\sigma}\mathbf{p} + \beta\hat{\mathbf{f}}_0 = \mathbf{0} \quad (2.2.15a)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{k}_{\sigma 0}\xi_0 + \mathbf{k}_{\sigma\sigma}\mathbf{p} + \beta\hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.2.15b)$$

dove sono si è posto:

$$\mathbf{K}_{00} = \mathbf{H}^T \mathbf{D}_{00} \mathbf{H}; \quad \mathbf{K}_{0\sigma} = \mathbf{H}^T \mathbf{D}_{0\sigma}; \quad \hat{\mathbf{f}}_0 = \mathbf{H}^T \hat{\mathbf{P}}_0;$$

$$\mathbf{k}_{\sigma 0} = \mathbf{d}_{\sigma 0} \mathbf{H}; \quad \mathbf{k}_{\sigma\sigma} = \mathbf{d}_{\sigma\sigma} \quad (2.2.16a-e)$$

Mediante una ulteriore condensazione di variabili sostituendo il vettore ξ_0 ricavato dalla eq.(2.2.15a) nell'eq.(2.2.15b), si ottiene:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Z}\mathbf{p} + \beta\hat{\boldsymbol{\sigma}}_s \quad (2.2.17)$$

dove:

$$\mathbf{Z} = -\mathbf{k}_{\sigma 0} \mathbf{K}_{00}^{-1} \mathbf{K}_{0\sigma} + \mathbf{k}_{\sigma\sigma}, \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_s = -\mathbf{k}_{\sigma 0} \mathbf{K}_{00}^{-1} \hat{\mathbf{f}}_0 + \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.2.18a,b)$$

L' eq.(2.2.17) consente di ricavare le tensioni sugli *strain points* di ciascun e-bem in funzione della deformazione plastica volumetrica \mathbf{p} e delle azioni esterne $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_s$, queste ultime amplificate di β . La matrice \mathbf{Z} , definita matrice delle autotensioni del sistema assemblato, è una matrice di influenza, quadrata di dimensioni $3m \times 3m$ con m numero degli elementi bem, piena, non simmetrica e semi-definita negativa. La valutazione di questa matrice dipende solamente dalle caratteristiche elastiche del materiale e dalla geometria della struttura.

La matrice \mathbf{Z} consente di calcolare la risposta elastica, nei punti di Gauss, di tutti gli elementi bem, dovute alla deformazioni plastiche \mathbf{p} , mentre il vettore $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_s$

contiene i coefficienti di influenza, ottenuti come risposta alle azioni esterne $\bar{\mathbf{F}}_2, -\bar{\mathbf{U}}_1, \bar{\mathbf{b}}$.

2.3 Equazione delle auto-tensioni mediante l'approccio misto

L'approccio che sarà descritto in questo paragrafo opera sempre in ambito multi domain fornendo, anche in questo, caso per ciascun e-bem, gli operatori algebrici che ne caratterizzano il comportamento in funzione della geometria e del tipo di contorno. A differenza del precedente approccio garantisce la condizione di regolarità sia forte (compatibilità ed eguaglianza nodale) che debole (compatibilità ed equilibrio generalizzato).

Le relazioni caratteristiche ricavate consentono di ottenere una equazione delle auto-tensioni analoga a quella precedentemente ricavata (2.2.17):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{K} \mathbf{p} + \beta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_s \quad (2.3.1)$$

2.3.1 Equazioni caratteristiche dell'e-bem

Per definire le equazioni caratteristiche del singolo e-bem si procede modificando le eqs.(2.1.3a,b,c) e lasciando inalterate le eqs (2.1.3d,e) ovvero il sistema d equazioni integrali viene riscritto come segue:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{uu} \mathbf{f}_1 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{ur} (-\mathbf{u}_2) + \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{ur} \mathbf{f}_0 + \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{ur} (-\mathbf{u}_0) + \oint_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{ur} (-\bar{\mathbf{u}}_1) + \\ & -\frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}_1 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{ur} \bar{\mathbf{f}}_2 + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{ur} \bar{\mathbf{b}} + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{u\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.3.2a)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{ur} \mathbf{f}_1 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{ur} (-\mathbf{u}_2) + \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{ur} \mathbf{f}_0 + \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{ur} (-\mathbf{u}_0) + \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{ur} (-\bar{\mathbf{u}}_1) + \\ & + \oint_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{ur} \bar{\mathbf{f}}_2 - \frac{1}{2} \bar{\mathbf{f}}_2 + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{ur} \bar{\mathbf{b}} + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{t\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.3.2b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 = & \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{uu} \mathbf{f}_1 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{ut} (-\mathbf{u}_2) + \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{uu} \mathbf{f}_0 + \oint_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{ut} (-\mathbf{u}_0) - \frac{1}{2} \mathbf{u}_0 + \\ & + \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{ut} (-\bar{\mathbf{u}}_1) + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{uu} \bar{\mathbf{f}}_2 + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{uu} \bar{\mathbf{b}} + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{u\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.3.2c)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_0 = & \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{tu} \mathbf{f}_1 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{tt} (-\mathbf{u}_2) + \oint_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{tu} \mathbf{f}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{f}_0 + \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{tt} (-\mathbf{u}_0) + \\ & + \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{tt} (-\bar{\mathbf{u}}_1) + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{tu} \bar{\mathbf{f}}_2 + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{tu} \bar{\mathbf{b}} + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{t\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p \end{aligned} \quad (2.3.2d)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = & \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{\sigma u} \mathbf{f}_1 + \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}_{\sigma t} (-\bar{\mathbf{u}}_1) + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{\sigma u} \bar{\mathbf{f}}_2 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_{\sigma t} (-\mathbf{u}_2) + \\ & + \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{\sigma u} \mathbf{f}_0 + \int_{\Gamma_0} \mathbf{G}_{\sigma t} (-\mathbf{u}_0) + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\sigma u} \bar{\mathbf{b}} + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\sigma\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p \end{aligned} \quad (2.3.2e)$$

Analogamente all'approccio agli spostamenti si effettui la discretizzazione del contorno in elementi di contorno eseguendo la modellazione di tutte le grandezze note ed incognite attraverso l'introduzione di funzioni di forma (2.2.3a-g) e la pesatura di tutti i coefficienti delle eqs.(2.2.2a-d) servendosi delle stesse funzioni di forma utilizzate per la modellazione delle cause, ma duali in senso energetico in accordo con l'approccio alla Galerkin.

In questo modo é possibile ottenere il seguente sistema a blocchi:

$$\begin{array}{c|cc|cc|cc|c|c} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{u1,u1} & \mathbf{A}_{u1,f2} & \mathbf{A}_{u1,u0} & \mathbf{A}_{u1,f0} & \mathbf{A}_{u1,\sigma} & \mathbf{F}_1 & \hat{\mathbf{W}}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{f2,u1} & \mathbf{A}_{f2,f2} & \mathbf{A}_{f2,u0} & \mathbf{A}_{f2,f0} & \mathbf{A}_{f2,\sigma} & -\mathbf{U}_2 & \hat{\mathbf{P}}_2 \\ \hline \mathbf{W}_0 & \mathbf{A}_{u0,u1} & \mathbf{A}_{u0,f2} & \mathbf{A}_{u0,u0} & \bar{\mathbf{A}}_{u0,f0} & \mathbf{A}_{u0,\sigma} & \mathbf{F}_0 & \hat{\mathbf{W}}_0 \\ \mathbf{P}_0 & \mathbf{A}_{f0,u1} & \mathbf{A}_{f0,f2} & \bar{\mathbf{A}}_{f0,u0} & \mathbf{A}_{f0,f0} & \mathbf{A}_{f0,\sigma} & -\mathbf{U}_0 & \hat{\mathbf{L}}_0 \\ \hline \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{a}_{\sigma,u1} & \mathbf{a}_{\sigma,f2} & \mathbf{a}_{\sigma,u0} & \mathbf{a}_{\sigma,f0} & \mathbf{a}_{\sigma,\sigma} & \mathbf{p} & \hat{\mathbf{I}}_{\sigma} \end{array} + \beta \quad (2.3.3a-e)$$

dove valgono posizioni (2.2.5a-n) e (2.2.6a-d) e le stesse considerazioni fatte nel precedente paragrafo.

Le eqs.(2.3.4a-e) possono essere espresse in forma compatta come segue:

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{A}_0\mathbf{X}_0 + \mathbf{A}_\sigma\mathbf{p} + \beta\hat{\mathbf{L}} \\ \mathbf{Z}_0 &= \mathbf{A}_0^T\mathbf{X} + \mathbf{A}_{00}\mathbf{X}_0 + \mathbf{A}_{0\sigma}\mathbf{p} + \beta\hat{\mathbf{L}}_0\end{aligned}\quad (2.3.4a-b)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{a}_\sigma\mathbf{X} + \mathbf{a}_{\sigma 0}\mathbf{X}_0 + \mathbf{A}_{\sigma\sigma}\mathbf{p} + \beta\hat{\mathbf{I}}_\sigma \quad (2.3.4c)$$

essendo:

$$\mathbf{Z}_0 = \begin{vmatrix} \mathbf{W}_0 \\ \mathbf{P}_0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{vmatrix} \mathbf{F}_1 \\ -\mathbf{U}_2 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{X}_0 = \begin{vmatrix} \mathbf{F}_0 \\ -\mathbf{U}_0 \end{vmatrix}, \quad \hat{\mathbf{L}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{W}}_1 \\ \hat{\mathbf{P}}_2 \end{vmatrix}, \quad \hat{\mathbf{L}}_0 = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{W}}_0 \\ \hat{\mathbf{P}}_0 \end{vmatrix} \quad (2.3.5a-e)$$

Il vettore \mathbf{Z}_0 contiene spostamenti \mathbf{W}_0 e trazioni \mathbf{P}_0 , generalizzati (o pesati), definiti sul contorno di interfaccia e ottenuti come risposta a tutte le azioni note ed incognite. Il vettore $\boldsymbol{\sigma}$ contiene le tensioni valutate su tutti i punti di Gauss di ciascun e-bem. Attraverso una condensazione di variabili, ovvero sostituendo il vettore \mathbf{X} ricavato dalla eq. (2.3.4a) nella eq. (2.3.4b,c), si ottengono le seguenti relazioni:

$$\mathbf{Z}_0 = \mathbf{D}_{00}\mathbf{X}_0 + \mathbf{D}_{0\sigma}\mathbf{p} + \beta\hat{\mathbf{Z}}_0 \quad (2.3.6a)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{d}_{\sigma 0}\mathbf{X}_0 + \mathbf{d}_{\sigma\sigma}\mathbf{p} + \beta\hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.3.7b)$$

dove valgono le seguenti posizioni:

$$\mathbf{D}_{00} = \mathbf{A}_0^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_{00}, \quad \mathbf{D}_{0\sigma} = -\mathbf{A}_0^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_\sigma + \mathbf{A}_{0\sigma}, \quad \hat{\mathbf{Z}}_0 = -\mathbf{A}_0^T\mathbf{A}^{-1}\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{L}}_0 \quad (2.3.7a-c)$$

$$\mathbf{d}_{\sigma 0} = \mathbf{a}_\sigma\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_0 - \mathbf{a}_{\sigma 0}, \quad \mathbf{d}_{\sigma\sigma} = -\mathbf{a}_\sigma\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}_\sigma + \mathbf{a}_{\sigma\sigma}, \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = -\mathbf{a}_\sigma\mathbf{A}^{-1}\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{I}}_\sigma \quad (2.3.7d-f)$$

Le eq.(2.3.6a,b) sono le due equazioni caratteristiche dell'e-bem scritte nell'ambito dell'approccio a variabili miste. Esse relazionano spostamenti e trazioni generalizzate (o pesate) \mathbf{Z}_0 definiti sul contorno di interfaccia Γ_0 e tensioni $\boldsymbol{\sigma}$ alle

quantità nodali \mathbf{X}_0 , alla deformazione plastica \mathbf{p} e rispettivamente ai due termini di carico $\hat{\mathbf{Z}}_0$ e $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ amplificati di β . Le equazioni caratteristiche rappresentano spostamenti e trazioni generalizzate e tensioni di collocazione come risposta elastica valutata rispettivamente sullo stesso contorno di interfaccia e sul dominio dell'e-bem. Dunque, \mathbf{D}_{00} , $\mathbf{D}_{0\sigma}$, $\mathbf{d}_{\sigma 0}$, $\mathbf{d}_{\sigma\sigma}$ rappresentano le matrici di rigidezza dell'e-bem.

2.3.2 Sistema assemblato

Anche in questo caso si procede suddividendo il corpo in m e-bem e considerando per ciascuno di questi le eqs.(2.3.7a,b). Si ottengono due relazioni globali che legano tutte le grandezze meccaniche e cinematiche generalizzate e le tensioni relative agli elementi bem

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_0^1 \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_0^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{00}^1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{D}_{00}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_0^1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_0^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{0\sigma}^1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{D}_{0\sigma}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}^m \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{Z}}_0^1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{Z}}_0^m \end{pmatrix} \quad (2.3.8a)$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\sigma}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{\sigma 0}^1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{d}_{\sigma 0}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_0^1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_0^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{\sigma\sigma}^1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{d}_{\sigma\sigma}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}^m \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}}^1 \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}^m \end{pmatrix} \quad (2.3.8b)$$

o in forma compatta:

$$\mathbf{Z}_0 = \mathbf{D}_{00} \mathbf{X}_0 + \mathbf{D}_{0\sigma} \mathbf{p} + \beta \hat{\mathbf{Z}}_0 \quad (2.3.9a)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{d}_{\sigma 0} \mathbf{X}_0 + \mathbf{d}_{\sigma\sigma} \mathbf{p} + \beta \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.3.9b)$$

analogamente a quanto fatto per l'approccio precedente. Le (2.3.9a,b) sono formalmente identiche alle eqs.(2.3.7a,b) ma relativamente a tutti gli elementi bem del sistema assemblato.

Si introducano il vettore delle grandezze nodali di interfaccia del sistema assemblato:

$$\zeta_0^T = \begin{vmatrix} \mathbf{F}_0^T & -\mathbf{U}_0^T \end{vmatrix} \quad (2.3.10)$$

individuate lungo il contorno Γ_0 comune tra gli e-bem e appropriate matrici di condensazione, \mathbf{L}^T per le forze ed \mathbf{N} per gli spostamenti. Si può scrivere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{F}_0^1 \\ -\mathbf{U}_0^1 \\ \dots \\ \dots \\ \mathbf{F}_0^m \\ -\mathbf{U}_0^m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\mathbf{L}^1)^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}^1 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ (\mathbf{L}^m)^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}^m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{F}_0 \\ -\mathbf{U}_0 \end{vmatrix} \quad (2.3.11)$$

o in forma compatta:

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{E}\zeta_0 \quad (2.3.12)$$

Con l'impiego delle stesse matrici trasposte, \mathbf{L} ed \mathbf{N}^T che assumono il ruolo di matrici di compatibilità degli spostamenti generalizzati e di equilibrio delle forze generalizzate rispettivamente, si ottiene:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{L}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_1^T & \dots & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{N}_m^T \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{W}_0^1 \\ \mathbf{P}_0^1 \\ \dots \\ \dots \\ \mathbf{W}_0^m \\ \mathbf{P}_0^m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{vmatrix} \quad (2.3.13)$$

che in forma compatta diventano:

$$\mathbf{E}^T \mathbf{Z}_0 = \mathbf{0} \quad (2.3.14)$$

da cui si ricavano le seguenti equazioni:

$$\mathbf{K}_{00} \boldsymbol{\zeta}_0 + \mathbf{K}_{0\sigma} \mathbf{p} + \beta \hat{\mathbf{f}}_0 = \mathbf{0} \quad (2.3.15a)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{k}_{\sigma 0} \boldsymbol{\zeta}_0 + \mathbf{k}_{\sigma\sigma} \mathbf{p} + \beta \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.3.15b)$$

avendo posto:

$$\mathbf{K}_{00} = \mathbf{E}^T \mathbf{D}_{00} \mathbf{E}, \mathbf{K}_{0\sigma} = \mathbf{E}^T \mathbf{D}_{0\sigma}, \hat{\mathbf{f}}_0 = \mathbf{E}^T \hat{\mathbf{Z}}_0, \mathbf{k}_{\sigma 0} = \mathbf{d}_{\sigma 0} \mathbf{E}, \mathbf{k}_{\sigma\sigma} = \mathbf{d}_{\sigma\sigma} \quad (2.3.16)$$

Si effettui una condensazione di variabili sostituendo il vettore $\boldsymbol{\zeta}_0$, ricavato dalla eq. (2.3.15a), nella eq. (2.3.15b), ottenendo l'equazione delle auto-tensioni:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{K} \mathbf{p} + \beta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_s \quad (2.3.17)$$

dove:

$$\mathbf{K} = -\mathbf{k}_{\sigma 0} \mathbf{K}_{00}^{-1} \mathbf{K}_{0\sigma} + \mathbf{k}_{\sigma\sigma}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_s = -\mathbf{k}_{\sigma 0} \mathbf{K}_{00}^{-1} \hat{\mathbf{f}}_0 + \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.3.18)$$

La eq.(2.3.17) consente di valutare le tensioni sui punti di Gauss di ciascun e-bem in funzione delle deformazioni plastiche volumetriche \mathbf{p} e delle azioni esterne $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_s$, amplificate di β . La matrice \mathbf{K} , definita matrice di influenza delle auto-tensioni del sistema assemblato, è una matrice quadrata di dimensione $3m \times 3m$, con m numero degli e-bem, piena, non simmetrica e semi-definita negativa. Essa è la matrice di influenza \mathbf{Z} presente nella eq.(2.2.17) e come quest'ultima viene valutata in funzione delle caratteristiche elastiche del materiale e della geometria della

struttura. Anche in questo caso, la matrice di influenza consente di calcolare la risposta elastica, nei punti di Gauss, di tutti gli elementi bem, dovute alla deformazioni plastiche \mathbf{p} , mentre il vettore $\hat{\mathbf{c}}_s$ contiene i coefficienti di influenza, ottenuti come risposta alle azioni esterne $\bar{\mathbf{F}}_2, -\bar{\mathbf{U}}_1, \bar{\mathbf{b}}$.

2.4 Applicazioni

Allo scopo di mostrare l'efficienza del metodo proposto sono state prese in esame alcune strutture soggette ad azioni sia di contorno, che di dominio. Nell'esempio che segue i risultati sono stati confrontati con la soluzione analitica e con quelli ottenuti mediante l'SBEM ma considerando il corpo come unico.

2.4.1 Esempio 1. Trave incastrata

In questo test è stata studiata la trave mostrata in Fig.(2.4.1) avente dimensioni 100x20x1 cm, incastrata ad un estremo e soggetta ad un carico tagliante parabolico con un valore massimo $q_{\max} = 7.5 \text{ daN/m}$ sull'altro estremo. Sono state assunte le seguenti caratteristiche fisiche: modulo di Young $D = 100,000 \text{ daN/cm}^2$ e coefficiente di Poisson $\nu = 0.18$.

La soluzione è stata confrontata sia con quella analitica che con quella ottenuta mediante SBEM. Per effettuare la simulazione del modello proposto sono stati testati diversi tipi di mesh, regolari ed irregolari (Fig. 2.4.1) dimostrando come la risposta globale non dipenda sostanzialmente dal tipo di discretizzazione in elementi bem scelto.

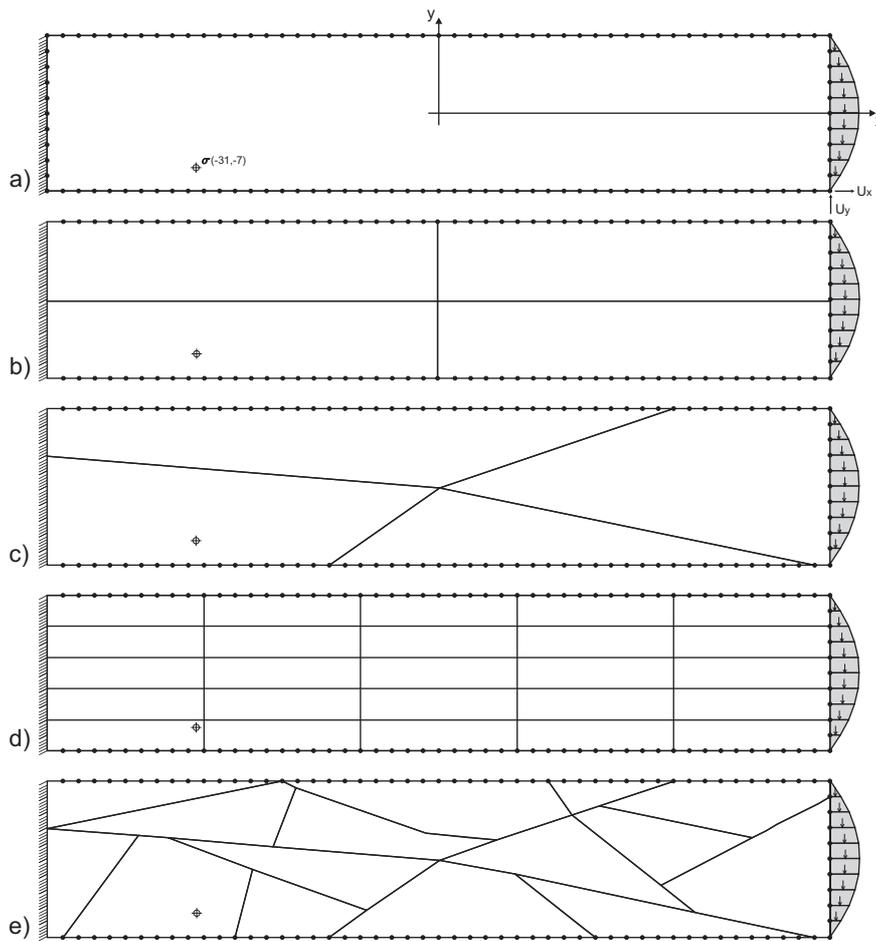


Fig. 2.4.1: Trave soggetta a forza di taglio parabolica: a) analisi per dominio singolo; b) mesh regolare con 4 e- bem; c) mesh irregolare con 4 e-bem; d) mesh regolare con 15 e-bem; e) mesh irregolare con 15 e-bem

In tutte le simulazioni effettuate è stato il passo della discretizzazione del contorno è stato fissato costante e pari a $p = 2 \text{ cm}$.

La Tab.2.4.1 mostra la soluzione, in termini di spostamenti nodali dello spigolo libero e di tensioni nel punto (-31, -7). Le soluzioni ottenute via SBEM sono tutte prossime a quella analitica.

Displ. stress	Analytical	Single domain (a)	Regular mesh 4 (b)	Irregular mesh 4 (c)	Regular mesh 15 (d)	Irregular mesh 15 (e)
U_x	-0.000725	-0.000721	-0.000719	-0.000719	-0.000719	-0.000719
U_y	-0.004838	-0.004917	-0.004918	-0.004918	-0.004917	-0.004917
σ_x	-0.850500	-0.841943	-0.841885	-0.841886	-0.839739	-0.841800
σ_y	0	0.000111	0.000111	0.000113	0.000137	0.000111
τ_{xy}	-0.038250	-0.037747	-0.037744	-0.037740	-0.038627	-0.037734

Tab.2.4.1: Soluzione in termini di spostamenti nodali e tensioni.

In Fig.5b-e si mostrano solamente i nodi lungo il contorno Γ_2 . Tali nodi rappresentano le sole incognite presenti nella formulazione proposta e definiscono le dimensioni dell'operatore algebrico \mathbf{H}_{22} che mostra la stessa dimensione (218x218) nelle quattro simulazioni. Le dimensioni dell'operatore $\mathbf{K}_{20,20}$ sono invece variabili poichè esso fornisce la risposta in termini di spostamento sia sul contorno libero Γ_2 che su quello di interfaccia Γ_0 : b) mesh regolare (332x332), c) mesh irregolare (364x364), d) mesh regolare (650x650), e) mesh irregolare (426x426).

2.5 Conclusioni

Le relazioni che definiscono le incognite nodali ricavate mediante i due approcci (Tab. 2.5.1) saranno utilizzate nelle analisi elasto-plastica al passo limite ed a shakedown. Come sarà illustrato in seguito, attraverso le strategie sviluppate è possibile effettuare l'aggiornamento di tali variabili esclusivamente alla fine del passo di carico. In questa tesi si è voluto privilegiare l'approccio agli spostamenti come metodologia di analisi. La scelta deriva dal fatto che, nonostante l'approccio a variabili miste risulti più robusto, garantendo condizioni di regolarità, sia in forma forte che debole, risulta estremamente oneroso sul piano computazionale rispetto al primo. Per le applicazioni dell'approccio a variabili miste si rimanda invece a Panzeca et al., 2002-b.

		Incognite nodali			
Approcci	Equazione delle tensioni	$-U_0$	F_0	$-U_2$	F_1
Spostamenti	$\sigma = Zp + \beta \hat{\sigma}_s$	$\xi_0 = K_{00}^{-1}(K_{0\sigma}p + \beta \hat{f}_0)$	$X = A^{-1}(A_0 H \xi_0 - A_\sigma p - \beta \hat{L})$		
Variabili miste	$\sigma = Kp + \beta \hat{\sigma}_s$	$\zeta_0 = K_{00}^{-1}(K_{0\sigma}p + \beta \hat{f}_0)$		$X = A^{-1}(A_0 E \zeta_0 - A_\sigma p - \beta \hat{L})$	

Tab. 2.5.1: Quadro riassuntivo degli approcci agli spostamenti e misto

Capitolo 3

Aspetti computazionali del metodo delle equazioni integrali di contorno in presenza di azioni anelastiche di dominio

Nel campo della termoelasticità e della plasticità i metodi degli elementi di contorno comportano la presenza di integrali di dominio per la valutazione dei quali si ricorre ad una suddivisione interna del dominio in celle. Nella I.S. (Cap.1, p.1.3) degli spostamenti l'integrale di dominio che coinvolge le grandezze anelastiche contiene un nucleo debolmente singolare, ma l'operazione di derivazione, applicata alla stessa equazione per esprimere le deformazioni, comporta la nascita di integrali di dominio con singolarità forte.

La valutazione delle trazioni in un punto interno al dominio può essere effettuata mediante:

- Tecniche che operano sull'equazione integrale degli spostamenti: gli integrali di dominio vengono calcolati analiticamente con la discretizzazione del dominio in celle (Chandrae Mukherjee, 1997) oppure senza discretizzazione (Neves e Brebbia, 1991) applicando il secondo teorema di Green in un processo iterativo, ottenendo una serie di integrali di contorno equivalenti. Per valutare la trazione, in entrambe le strategie si applica l'operatore differenziale nel punto dopo aver calcolato lo spostamento.
- Tecniche che operano nel dominio per rimuovere la singolarità forte. Tali tecniche comportano la regolarizzazione degli integrali, seguita dal trasferimento della valutazione degli integrali dal dominio al contorno (Gao,

2002).

In Dallner and Kuhn (1993), Dong and Antes (1998), Huber et al. (1996) le tecniche di regolarizzazione forniscono integrali con singolarità debole risolti mediante la classica procedura della quadratura di Gauss e l'integrale con singolarità forte è trasformato mediante il teorema di Gauss in integrale di contorno.

Da un confronto, in Gao e Davies (2000) la tecnica di regolarizzazione fornisce un integrale con singolarità debole e uno con singolarità forte, entrambi trasformati, mediante tecnica RIM (Radial Integral Method, Gao 2002), in integrali regolari sul contorno. In questo approccio l'integrale con singolarità forte che definisce la trazione nel dominio è interpretato come Valore principale di Cauchy (CPV) a cui è associato il Bui free term (Bui, 1978).

La trasformazione dell'integrale di dominio in un integrale equivalente da effettuare sul contorno è di notevole importanza nell'ambito dei metodi BEM in quanto preserva una delle principali caratteristiche del metodo, ovvero quella di poter discretizzare soltanto il contorno. Le tecniche di trasformazione degli integrali di dominio in integrali di contorno rientrano nelle categorie di seguito riportate:

- Dual Reciprocity Method (DRM), (Nardini e Brebbia, 1982; Partridge et al., 1992);
- Multiple Reciprocity Method (MRM), (Nowak e Brebbia, 1989; Neves e Brebbia, 1991; Ochiai et al., 1996);
- Radial Integral Method (RIM), (Takhteyev e Trebbia, 1990; Gao e Davies, 2000; Gao, 2002)

La tecnica RIM, utilizzata nella tesi, si basa su un puro trattamento matematico in grado di trasformare qualsiasi integrale di dominio in integrale di contorno secondo una procedura unificata senza utilizzare soluzioni particolari o il vettore di Galerkin. L'integrale di dominio viene modificato mediante una trasformazione in

coordinate polari in un doppio integrale di cui uno radiale, da valutare analiticamente, e l'altro sul contorno.

L'approccio qui presentato, che si inquadra nell'ambito del SBEM (Maier e Polizzotto, 1987), opera nel campo degli spostamenti e lo stato di tensione è trattato in modo differente rispetto alle precedenti metodologie. Nella I.S. degli spostamenti l'integrale di dominio è regolarizzato e l'integrale singolare è trasformato sul contorno attraverso la tecnica RIM. Si ottiene un campo non-singolare di spostamenti su cui si applica l'operatore differenziale, dove il Bui free term è presente in forma implicita. Attraverso la legge di Hooke e la formula di Cauchy si genera l'I.S. delle trazioni. Quest'ultima è valutata sul contorno con un'operazione di limite che permette di definire l'integrale singolare come CPV, e di valutare il termine libero ad esso associato caratterizzato da funzioni trigonometriche e dal Bui free term in forma esplicita.

La strategia usata consente di evitare l'impiego degli integrali di dominio dovuti ad una distribuzione di azioni anelastiche e di effettuare la successiva integrazione sul contorno al fine di valutare i termini di carico, ottenuti come processo di pesatura alla Galerkin. Questi termini sono stati ottenuti in forma chiusa (Terravecchia, 2006), e ciò ha consentito l'implementazione nel codice di calcolo Karnak.sGbem (Panzeca et al., 2002).

3.1 Le Identità di Somigliana delle tensioni

Il punto di partenza per la valutazione della soluzione del problema elastico è l'I.S. degli spostamenti:

$$\mathbf{u} [\mathbf{f}, -\mathbf{u}, \bar{\mathbf{b}}, \boldsymbol{\varepsilon}^P] = \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{uu} \mathbf{f} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{uu} (-\mathbf{u}) d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{uu} \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{u\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^P d\Omega \quad (3.1.1)$$

La (3.1.1) fornisce gli spostamenti in qualsiasi punto del dominio illimitato dovuto a discontinuità stratificate, meccaniche \mathbf{f} e cinematiche $-\mathbf{u}$, entrambe note ed

incognite, nonché a forze di massa $\bar{\mathbf{b}}$ e deformazioni anelastiche $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ ipotizzate costanti nel dominio Ω , ma facilmente generalizzabili al caso di distorsioni variabili. Ricordiamo ancora una volta che le \mathbf{G}_{uk} presenti nella (3.1.1) sono matrici di soluzioni fondamentali (Cap.1, p. 1.2). L'I.S. degli spostamenti comporta delle integrazioni sui domini effettivi su cui il vettore delle distorsioni volumetriche $\boldsymbol{\varepsilon}^p = [\boldsymbol{\varepsilon}^p_x, \boldsymbol{\varepsilon}^p_y, \boldsymbol{\varepsilon}^p_{xy}]^T$ applicate; in quest'ultimo vettore le prime due componenti vengono utilizzate nell'ambito di problemi di termoelasticità, tutte nell'ambito di problemi di plasticità.

La teoria dell'elasticità, partendo dalla (3.1.1) permette di ottenere l'I.S. delle deformazioni, delle tensioni e delle trazioni. La relazione di congruenza è la seguente:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\varepsilon}^p_Q = \boldsymbol{\varepsilon}' [\mathbf{f}, -\mathbf{u}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p] - \boldsymbol{\varepsilon}^p_Q = \mathbf{C}_x \mathbf{u} [\mathbf{f}, -\mathbf{u}, \bar{\mathbf{b}}, \boldsymbol{\varepsilon}^p] - \boldsymbol{\varepsilon}^p_Q \quad (3.1.2)$$

con $\mathbf{u} [\mathbf{f}, -\mathbf{u}, \bar{\mathbf{b}}, \boldsymbol{\varepsilon}^p]$ definito dalla (3.1.1) e dove $\boldsymbol{\varepsilon}^p_Q$ è la distorsione volumetrica nel generico punto Q. L'operatore differenziale \mathbf{C}_x associato al punto effetto fornisce la seguente equazione integrale:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{\varepsilon u} \mathbf{f} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{\varepsilon t} (-\mathbf{u}) d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\varepsilon u} \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \mathbf{C}_x \int_{\Omega} \mathbf{G}_{u\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p d\Omega - \boldsymbol{\varepsilon}^p_Q \quad (3.1.3)$$

dove si sono assunte le posizioni $\mathbf{G}_{\varepsilon u} = \mathbf{C}_x \mathbf{G}_{uu}$ e $\mathbf{G}_{\varepsilon t} = \mathbf{C}_x \mathbf{G}_{ut}$.

L'applicazione alla (3.1.3) del tensore di elasticità \mathbf{D} e della matrice dei coseni direttori \mathbf{N} , conducono alla risposta nel dominio illimitato in termini di tensioni e trazioni così definite in forma simbolica:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}(\mathbf{C}_x \mathbf{u} [\mathbf{f}, -\mathbf{u}, \bar{\mathbf{b}}, \boldsymbol{\varepsilon}^p] - \boldsymbol{\varepsilon}^p_Q) = \boldsymbol{\sigma}' [\mathbf{f}, -\mathbf{u}, \bar{\mathbf{b}}, \boldsymbol{\varepsilon}^p] - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^p_Q \quad (3.1.4a)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{N}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}^T (\boldsymbol{\sigma}'[\mathbf{f}, -\mathbf{u}, \bar{\mathbf{b}}, \boldsymbol{\varepsilon}^p] - \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p) \quad (3.1.4b)$$

Nelle precedenti relazioni \mathbf{C}_x , \mathbf{D} , \mathbf{N} , sono definiti come segue:

$$\mathbf{C}_x = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{vmatrix}; \mathbf{D} = \frac{2G}{(1-2\nu)} \begin{vmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{vmatrix}; \mathbf{N} = \begin{vmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{vmatrix}; \quad (3.1.5 \text{ a,b,c})$$

Nella (3.1.3), l'operatore differenziale \mathbf{C}_x applicato all'integrale di dominio, che valuta gli effetti delle distorsioni volumetriche $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, comporta la nascita di ipersingularità nel gradiente di spostamento e quindi deve essere esaminato in maniera accurata.

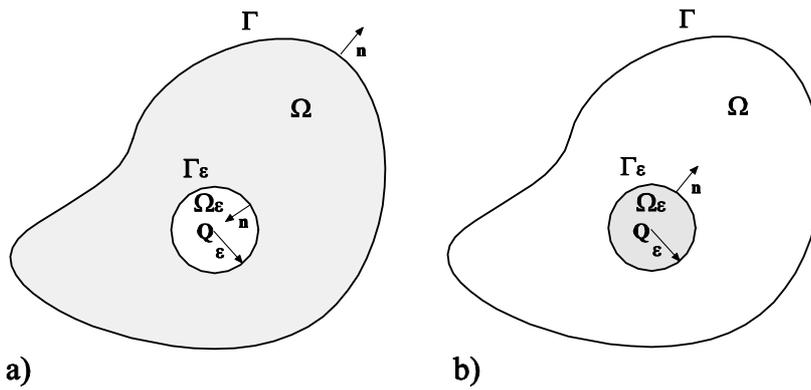


Fig. 3.1.1: Corpo bidimensionale soggetto a distorsioni volumetriche; a) cerchio di esclusione con raggio ε ; b) valutazione del Bui free term.

Con riferimento alla Fig. 3.1.1a, Ω è il dominio singolare di contorno Γ dove sono applicate le distorsioni volumetriche $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ mentre Ω_ε è un dominio circolare di

esclusione del punto Q interno al dominio in cui si valuta l'effetto ed avente contorno Γ_ε e raggio ε . L'ultimo integrale della (3.1.3) può essere riscritto come segue:

$$\mathbf{C}_x \int_{\Omega} \mathbf{G}_{u\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p d\Omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} \mathbf{C}_x \mathbf{G}_{u\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p d\Omega + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{C}_x \mathbf{G}_{u\sigma} d\Omega \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \quad (3.1.6)$$

oppure:

$$\mathbf{C}_x \int_{\Omega} \mathbf{G}_{u\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p d\Omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\mathbf{C}_x \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} \mathbf{G}_{u\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p d\Omega \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\mathbf{C}_x \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{G}_{u\sigma} d\Omega \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \right) \quad (3.1.7)$$

dove il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ del secondo integrale a destra nella (3.1.7) non ha effetto poiché, da una trasformazione in coordinate polari, si ottiene:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{G}_{u\sigma} d\Omega = \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{\boldsymbol{\Psi}_{u\sigma}(\varphi)}{r} r dr d\varphi = \mathbf{0} \quad (3.1.8)$$

essendo $\boldsymbol{\Psi}_{u\sigma}(\varphi)$ una funzione circolare.

Le (3.1.6-7), conducono a formulazioni caratterizzate dall'applicazione della tecnica di regolarizzazione. Gli approcci proposti da Gao e Davies (2000), Dallner e Kuhn (1993) e l'approccio proposto nel presente lavoro saranno analizzati nelle seguenti sottosezioni.

3.1.1 Approccio alla Gao

Il primo integrale a destra dell'equazione (3.1.6), è considerato come CPV e può essere scritto in una forma regolarizzata come segue:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} \mathbf{C}_x \mathbf{G}_{u\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p d\Omega \right) = \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\varepsilon\sigma} (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p) d\Omega + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} \mathbf{G}_{\varepsilon\sigma} d\Omega \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \quad (3.1.9)$$

L'integrale singolare di dominio è trasformato in un integrale da effettuarsi sul contorno applicando la tecnica RIM.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} \mathbf{G}_{\varepsilon\sigma} d\Omega \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p = \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{\varepsilon\sigma} \text{Log}(r) \mathbf{n}' \mathbf{r} d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p = \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{G}}_{\varepsilon\sigma} d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \quad (3.1.10)$$

Il secondo integrale della (3.1.6), attraverso l'applicazione del teorema di Gauss e della condizione $\mathbf{C}_x(\cdot) = -\mathbf{C}_{x'}(\cdot)$ è trasformato in un integrale definito sul contorno Γ_ε definendo così il Bui free term (Fig.3.1.1b). Successivamente effettuando una trasformazione da coordinate cartesiane in polari, quest'ultimo è valutabile in forma chiusa:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{C}_x \mathbf{G}_{u\sigma} d\Omega = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{N}' \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma_\varepsilon = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \mathbf{N}'(\varphi) \frac{\boldsymbol{\Psi}_{u\sigma}(\varphi)}{\varepsilon} \varepsilon d\varphi = \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \mathbf{N}'(\varphi) \boldsymbol{\Psi}_{u\sigma}(\varphi) d\varphi = \frac{1}{4(1-\nu)} \begin{vmatrix} \frac{5-4\nu}{2} & \frac{-1+4\nu}{2} & 0 \\ -1+4\nu & \frac{5-4\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3-4\nu \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Si ottiene l'espressione dei campi delle deformazioni e delle tensioni regolarizzate:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{\varepsilon u} \mathbf{f} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{\varepsilon t} (-\mathbf{u}) d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\varepsilon u} \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\varepsilon\sigma} (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p) d\Omega + \\ &+ \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{G}}_{\varepsilon\sigma} d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p + (\mathbf{J} - \mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \end{aligned} \quad (3.1.12a)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{\sigma u} \mathbf{f} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{\sigma t} (-\mathbf{u}) d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\sigma u} \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\sigma\sigma} (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p) d\Omega + \\ &+ \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{G}}_{\sigma\sigma} d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p + \mathbf{D}(\mathbf{J} - \mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \end{aligned} \quad (3.1.12b)$$

dove:

$$\tilde{\mathbf{G}}_{\sigma\sigma} = \mathbf{D} \mathbf{N}' \mathbf{G}_{u\sigma}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{J} - \mathbf{I}) = -\frac{\mathbf{D}}{(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{vmatrix} \quad (3.1.13)$$

In (3.1.12a,b) l'integrale di dominio regolarizzato può essere trasformato sul contorno con la stessa tecnica RIM; per il caso qui considerato ($\boldsymbol{\varepsilon}^p$ costante) questa trasformazione non è presa in considerazione poiché il contributo dell'integrale è identicamente nullo in tutto il dominio.

3.1.2 Approccio alla Dallner e Kuhn

L'approccio proposto da Dallner e Kuhn (1993) sviluppato nel 3D viene qui riproposto nell'ambito del 2D. L'integrale singolare nella eq.(3.1.7), seguendo la strategia adottata da Brebbia et al. (1984), è trasformato in coordinate polari e successivamente modificato applicando il teorema di Leibnitz arrivando così a definire il Bui free term. In seguito, dopo una nuova trasformazione in coordinate cartesiane, si effettua la regolarizzazione dell'integrale singolare ottenendo:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mathbf{C}_x \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} \mathbf{G}_{u\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p d\Omega) - \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{N}' \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p &= \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\sigma\sigma} (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p) d\Omega + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{C}_x \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} \mathbf{G}_{u\sigma} d\Omega \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p - \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{N}' \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

dove l'ultimo integrale è il Bui free term.

L'applicazione al secondo integrale a destra della precedente equazione del teorema di Gauss e della condizione $\mathbf{C}_x(\cdot) = -\mathbf{C}_{x'}(\cdot)$, conducono alla seguente espressione

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{C}_x \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} \mathbf{G}_{u\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p d\Omega - \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{N}' \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p = \\ = \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\varepsilon\sigma} (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p) d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{N}' \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p + \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{N}' \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p - \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{N}' \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

ottenendo così i seguenti campi di tensione e deformazione regolarizzati.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} = \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{\varepsilon u} \mathbf{f} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{\varepsilon t} (-\mathbf{u}) d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\varepsilon u} \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\varepsilon\sigma} (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p) d\Omega + \\ - \int_{\Gamma} \mathbf{N}' \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \end{aligned} \quad (3.1.16a)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{\sigma u} \mathbf{f} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{\sigma t} (-\mathbf{u}) d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\sigma u} \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\sigma\sigma} (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p) d\Omega \\ - \mathbf{D} \left(\int_{\Gamma} \mathbf{N}' \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma + \mathbf{I} \right) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \end{aligned} \quad (3.1.16b)$$

3.1.3 Il presente modello

Nel presente modello l'espressione di $\boldsymbol{\varepsilon}[\boldsymbol{\varepsilon}^p]$, data dall'eq.(3.1.6), è regolarizzata:

$$\mathbf{C}_x \int_{\Omega} \mathbf{G}_{u\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p d\Omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{C}_x \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} \mathbf{G}_{u\sigma} (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p) d\Omega + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{C}_x \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} \mathbf{G}_{u\sigma} d\Omega \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \quad (3.1.18)$$

L'ultimo integrale subisce una trasformazione in coordinate polari ottenendo un doppio integrale, di cui il primo è radiale e viene valutato analiticamente, mentre il secondo è definito attraverso le variabili al contorno come segue:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_x \int_{\Omega} \mathbf{G}_{u\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^p d\Omega &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{C}_x \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} \mathbf{G}_{u\sigma} (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p) d\Omega + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{C}_x \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\Psi_{u\sigma}(\varphi)}{r} r dr d\varphi \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{C}_x \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} \mathbf{G}_{u\sigma} (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p) d\Omega + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{C}_x \int_0^{2\pi} \frac{\Psi_{u\sigma}(\varphi)}{R} R^2 d\varphi \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \\
 &= \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\varepsilon\sigma} (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p) d\Omega + \mathbf{C}_x \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{u\sigma} \mathbf{n}^T \mathbf{r} d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p
 \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

dove è stata adottata la condizione $R^2 d\varphi = \mathbf{n}^T \mathbf{r} d\Gamma$. Si ottiene così un campo regolare di spostamenti al quale applicare l'operatore differenziale.

Nella (3.1.17) l'integrale:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{G}_{u\sigma} \mathbf{n}^T \mathbf{r} d\Gamma \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_Q^p \tag{3.1.18}$$

rappresenta un campo di spostamenti, le cui caratteristiche sono: è non singolare in Ω/Γ perché essendo adesso l'integrale sulla causa effettuata sul contorno risulta sempre $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$; è non singolare su Γ poiché quando $(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in \Gamma$ e $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$ si ha $\mathbf{n}^T \mathbf{r} = 0$; è continuo su Γ con derivata prima discontinua (App. 3.1). Considerando la posizione $\mathbf{C}_x(\cdot) = -\mathbf{C}_{x'}(\cdot)$, applicando l'operatore differenziale alla (3.1.18) si ottiene:

$$\mathbf{C}_x \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{u\sigma} \mathbf{n}^T \mathbf{r} d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p = \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{\varepsilon\sigma} \mathbf{n}^T \mathbf{r} d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p - \int_{\Gamma} \mathbf{N}' \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \tag{3.1.19}$$

dove il primo integrale a destra è nullo in quanto integrale circolare:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{G}_{\varepsilon\sigma} \mathbf{n}^T \mathbf{r} d\Gamma = \mathbf{0} . \tag{3.1.20}$$

Si ottengono le espressioni dei campi di deformazione e di tensione regolarizzati

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} = & \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{\varepsilon u} \mathbf{f} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{\varepsilon t} (-\mathbf{u}) d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\varepsilon u} \bar{\mathbf{b}} + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\varepsilon \sigma} (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p) d\Omega + \\ & - \left(\int_{\Gamma} \mathbf{N}' \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma + \mathbf{I} \right) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \end{aligned} \quad (3.1.21a)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = & \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{\sigma u} \mathbf{f} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{\sigma t} (-\mathbf{u}) d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\sigma u} \bar{\mathbf{b}} + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\sigma \sigma} (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p) d\Omega + \\ & - \mathbf{D} \left(\int_{\Gamma} \mathbf{N}' \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma + \mathbf{I} \right) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \end{aligned} \quad (3.1.21b)$$

Quest'ultima espressione è formalmente identica a quella fornita dall'approccio alla Dallner e Kuhn (1993). Comparando le espressioni delle tensioni fornite da Gao e Davies (2000), Dallner e Kuhn (1993), e quella sviluppata nel presente approccio (3.1.21b), la seguente uguaglianza è facilmente dimostrabile (App. 3.1):

$$\underbrace{\left(\int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{G}}_{\sigma\sigma} d\Gamma + \mathbf{D} \mathbf{J} \right) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p}_{\text{Gao}} = - \underbrace{\mathbf{D} \int_{\Gamma} \mathbf{N}' \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p}_{\text{Dallner, Presente approccio}} \quad (3.1.22)$$

L'espressione (3.1.22) permette di asserire che il Bui free term presente nella formulazione di Gao e Davies, non appare in forma esplicita nell'approccio di Dallner e Kuhn così come nell'approccio qui presentato.

Inoltre è da notare che nel caso speciale di dominio circolare, l'integrale sul contorno che coinvolge le grandezze di dominio presente nella (3.1.21b), è identico all'integrale che fornisce il Bui free term.

Quando si applica la formula di Cauchy all'eq.(3.1.21b), si ottiene l'I.S. delle trazioni su un elemento di giacitura generica definita dal versore \mathbf{n} .

$$\begin{aligned} \mathbf{t} = & \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{iu} \mathbf{f} \, d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{ii} (-\mathbf{u}) \, d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{iu} \bar{\mathbf{b}} + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{i\sigma} (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p) \, d\Omega \\ & - \mathbf{N}^T \mathbf{D} \left(\int_{\Gamma} \mathbf{N}' \mathbf{G}_{u\sigma} \, d\Gamma + \mathbf{I} \right) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

Gli aspetti computazionali dell'eq.(3.1.23), verranno discussi nella seguente sezione.

3.2 I.S. delle trazioni dovute ad azioni anelastiche di dominio

Al fine di valutare la trazione sul contorno, è necessario effettuare un'operazione di limite dall'interno del dominio. Così il primo integrale nell'eq.(3.1.23) è da interpretarsi come CPV a cui si associa il relativo termine libero $\mathbf{f}/2$, mentre il terzo integrale è identicamente nullo in Ω per $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ costante. Il quarto integrale della (3.1.23), qui riscritto per comodità:

$$\mathbf{t}[\boldsymbol{\varepsilon}^p] = -\mathbf{N}^T \mathbf{D} \int_{\Gamma} \mathbf{N}' \mathbf{G}_{u\sigma} \, d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \quad (3.2.1)$$

in cui il Bui free term associato al campo di trazione è presente in forma implicita, deve essere analizzato in maniera più dettagliata. Si ricorda che la trattazione parte dalla definizione di un campo di spostamenti continuo in tutto Ω_∞ e con discontinuità della derivata prima (deformazioni) sul contorno e che si traduce in un salto nel campo di trazioni.

E' necessario esaminare il comportamento della (3.2.1) quando la trazione viene valutata su di un elemento di giacitura generica \mathbf{n} interno al dominio di applicazione delle $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ e quindi procedere all'operazione di limite per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' \in \Gamma$.

3.2.1 Punto interno al dominio

Nel punto Q del solido di Fig. 3.2.1a si vuole determinare la trazione su un elemento di giacitura \mathbf{n} dovuta ad una distribuzione di distorsioni volumetriche $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ costanti che agiscono sull'intero solido.

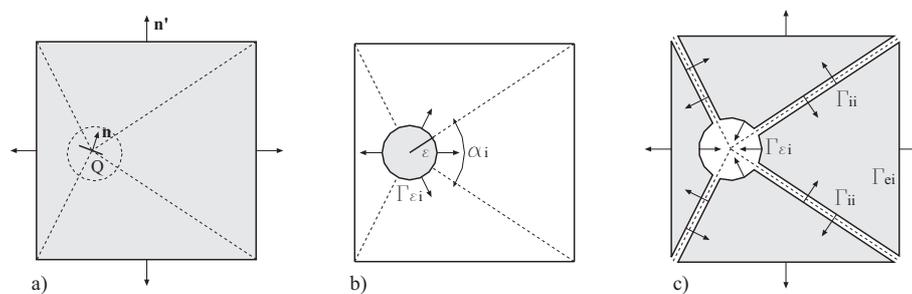


Fig. 3.2.1: Interpretazione della eq.(3.2.1); a) Dominio soggetto a distorsione volumetrica; b,c) Suddivisione del dominio in sottodomini.

Si suddivida il solido nelle porzioni evidenziate in Fig.3.2.1b,c in cui, nell'intorno del punto Q, è stata considerata una porzione di superficie circolare di raggio ε . Tutti i sottodomini siano caratterizzati da una normale uscente \mathbf{n}' ; nel caso della Fig 3.2.1c per il generico sottodominio i ($i=1,\dots,n$) si ha $\Gamma_i = \Gamma_{ei} \cup \Gamma_{\varepsilon i} \cup \Gamma_{ii}$ con Γ_{ei} contorno esterno, $\Gamma_{\varepsilon i}$ contorno circolare, Γ_{ii} contorno di interfaccia. L'effetto complessivo in Q è ottenuto attraverso la sommatoria degli effetti ottenuti integrando la causa sul contorno dei sottodomini delle Fig. 3.2.1b,c. Nel caso di Fig. 3.2.1b l'integrale sul contorno Γ_{ε} è effettuato in coordinate polari. Separando i contributi relativi alle porzioni di contorno sottese tra il punto Q e gli estremi degli elementi di contorno si ottiene:

$$-\mathbf{N}^T \mathbf{D} \left(\sum_{i=1}^n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{ei}} \mathbf{N}'_{ei} \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma_{ei} \right) = -\mathbf{N}^T \mathbf{D} \left(\sum_{i=1}^n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\alpha_i} \mathbf{N}'_{ei}(\varphi) \frac{\Psi_{u\sigma}(\varphi)}{\varepsilon} \varepsilon d\varphi \right) = \quad (3.2.2)$$

$$= -\mathbf{N}^T \mathbf{D} \mathbf{J}$$

Nella (3.2.2) si è applicata la definizione (3.1.11) per \mathbf{J} . Nel caso di Fig. 3.2.1c si ha:

$$-\mathbf{N}^T \mathbf{D} \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_{ei}} \mathbf{N}'_{ei} \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma_{ei} + \sum_{i=1}^n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{ei}} \mathbf{N}'_{ei} \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma_{ei} \right) =$$

$$= -\mathbf{N}^T \mathbf{D} \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_{ei}} \mathbf{N}'_{ei} \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma_{ei} + \sum_{i=1}^n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\alpha_i} \mathbf{N}'_{ei}(\varphi) \frac{\Psi_{u\sigma}(\varphi)}{\varepsilon} \varepsilon d\varphi \right) = \quad (3.2.3)$$

$$= -\mathbf{N}^T \mathbf{D} \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_{ei}} \mathbf{N}'_{ei} \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma_{ei} \right) + \mathbf{N}^T \mathbf{D} \mathbf{J}$$

Nella eq.(3.2.3) gli integrali relativi ai contorni di interfaccia non sono stati considerati in quanto si elidono a sommatoria avvenuta (normali uscenti con verso opposto), mentre gli integrali relativi alle porzioni circolari di contorno vengono effettuati in coordinate polari. Sommando la eq. (3.2.2) e la (3.2.3) e tenendo conto che le normali dei domini circolari di Fig. 3.2.1b e Fig. 3.2.1c sono opposte, il che si traduce in un cambiamento di segno del termine $\mathbf{N}^T \mathbf{D} \mathbf{J}$ contenuto nella eq.(3.2.3) si ottiene un contributo pari a:

$$\mathbf{t}[\boldsymbol{\varepsilon}^p] = -\mathbf{N}^T \mathbf{D} \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_{ei}} \mathbf{N}'_{ei} \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma_{ei} \right) \quad (3.2.4)$$

Ciò fornisce un significato fisico alla dimostrazione (App. 3.2) ed inoltre si mette in evidenza che:

- il Bui free term associato al campo delle trazioni $\mathbf{N}^T \mathbf{D} \mathbf{J}$ (3.2.2) è compreso nella formulazione;
- ogni elemento di contorno contribuisce alla sua generazione attraverso una parte dell'integrale di contorno che dipende dall'ampiezza dell'angolo sotteso tra il punto P considerato e gli estremi dell'elemento stesso.
- Quest'ultima affermazione è importante per determinare i contributi dati all'integrale eq.(3.2.1) quando il punto effetto si trova sullo stesso elemento su cui viene effettuata l'integrazione.

3.2.2 Punto sul contorno

Per determinare la trazione sul contorno, l'integrale (3.2.1) deve essere valutato attraverso una operazione di limite quando il punto effetto tende al contorno dall'interno, ovvero $(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \rightarrow (\mathbf{x}', \mathbf{n}') \in \Gamma$.

Per valutare la trazione sul lato Γ_{ei} mediante l'eq.(3.2.1), è necessario distinguere i lati sui quali deve essere effettuata l'integrazione: sullo stesso contorno Γ_{ei} (Figura 3.2.2a), su tutti gli altri contorni, indicati da Γ_{ej} , con $j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$, (Figura 3.2.2b).

Si esamini il primo contributo dove la causa (cioè le azioni anelastiche), è distribuita sullo stesso contorno Γ_{ei} . Si consideri quest'ultimo definito da \mathbf{n}' , e un punto Q nel dominio, all'interno del cerchio infinitesimo (Fig. 3.2.2a). A questo punto si consideri un elemento infinitesimo avente giacitura definite da $\mathbf{n} // \mathbf{n}'$.

Sia "d" la distanza tra il punto Q e l'elemento Γ_{ei} , misurata in direzione normale, Γ_{ei} la porzione di contorno del cerchio di ampiezza $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ (Fig. 3.2.2a).

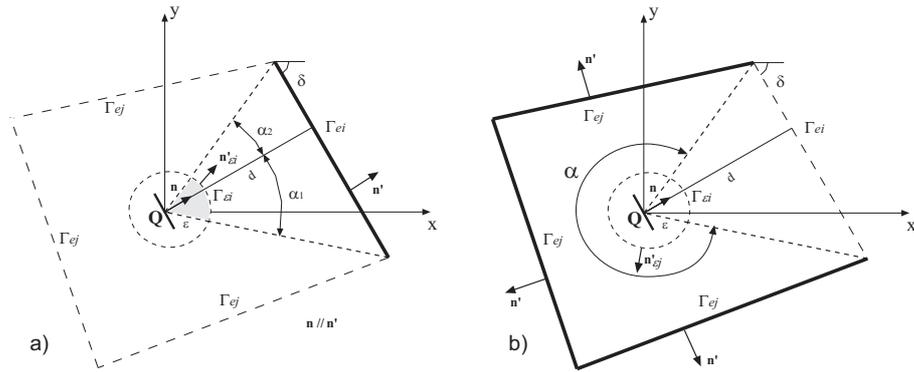


Fig. 3.2.2: Contributo del Bui free term in termini di trazioni a) del singolo elemento di contorno, b) dei rimanenti lati

L'operazione di limite effettuata sull'integrale (3.2.1) conduce a:

$$\mathbf{t}[\bar{\mathbf{x}}^p] = -\mathbf{N}^T \mathbf{D} \lim_{d \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma_{ei}} \mathbf{N}' \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma_i = -\mathbf{N}^T \mathbf{D} \oint_{\Gamma_{ei}} \mathbf{N}' \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma_i - \mathbf{N}^T \mathbf{D} \left(\mathbf{J}_b - \frac{1}{2} \mathbf{J} \right) \quad (3.2.5)$$

dove:

$$\mathbf{J}_b = \frac{1}{4(1-\nu)} \begin{bmatrix} -(1-\nu)\text{Cos}[2\delta] + \frac{1}{4}\text{Cos}[4\delta] & +\nu\text{Cos}[\delta] - \frac{1}{4}\text{Cos}[4\delta] & -\frac{1}{2}(1-2\nu + \text{Cos}[2\delta])\text{Sin}[2\delta] \\ -\nu\text{Cos}[\delta] - \frac{1}{4}\text{Cos}[4\delta] & -(1-\nu)\text{Cos}[2\delta] + \frac{1}{4}\text{Cos}[4\delta] & -\frac{1}{2}(1-2\nu - \text{Cos}[2\delta])\text{Sin}[2\delta] \\ -4\text{Cos}^3[\delta]\text{Sin}[\delta] & -4\text{Cos}[\delta]\text{Sin}^3[\delta] & -\frac{1}{2}\text{Cos}[4\delta] \end{bmatrix} \quad (3.2.7)$$

è una matrice di funzioni trigonometriche. Inoltre $\mathbf{N}^T \mathbf{D} \mathbf{J}_b$, contenente il salto della funzione arcotangente, è il *free term* associato al CPV e dipende dalla giacitura dell'elemento di contorno su cui si valuta la trazione; il termine $\mathbf{N}^T \mathbf{D} \mathbf{J} / 2$ è il contributo del generico lato su cui ricade al punto effetto al Bui free term associato alle trazioni.

Con l'ausilio della Fig. 3.2.2a è facile dimostrare che il contributo del singolo elemento di contorno su cui viene integrata la causa nel caso in cui $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$ è dato da:

$$\begin{aligned}
 & -\mathbf{N}^T \mathbf{D} \left(\lim_{d \rightarrow 0} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\alpha_i} \mathbf{N}'_{ei}(\varphi) \frac{\Psi_{u\sigma}}{\xi} \xi d\varphi \right) \right) = -\mathbf{N}^T \mathbf{D} \left(\lim_{d \rightarrow 0} \left(\int_{\alpha_i} \mathbf{N}'_{ei}(\varphi) \Psi_{u\sigma}(\varphi) d\varphi \right) \right) = \\
 & = -\mathbf{N}^T \mathbf{D} \left(\lim_{d \rightarrow 0} \left(\int_{-(\alpha_1 - (\frac{\pi}{2} - \delta))}^{\alpha_2 + (\frac{\pi}{2} - \delta)} \mathbf{N}'_{ei}(\varphi) \Psi_{u\sigma}(\varphi) d\varphi \right) \right) = \\
 & -\mathbf{N}^T \mathbf{D} \left(\int_{-\delta}^{\pi - \delta} \mathbf{N}'_{ei}(\varphi) \Psi_{u\sigma}(\varphi) d\varphi \right) = \frac{1}{2} \mathbf{N}^T \mathbf{D} \mathbf{J}
 \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

essendo per $d \rightarrow 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi / 2$.

Dalla Fig (3.2.2b) si può osservare che, qualunque sia la geometria del solido, il contributo degli altri lati è:

$$\begin{aligned}
 & -\mathbf{N}^T \mathbf{D} \left(\sum_{i=2}^n \lim_{d \rightarrow 0} \left(\int_{\alpha_i} \mathbf{N}'_{ei}(\varphi) \frac{\Psi_{u\sigma}}{\xi} \xi d\varphi \right) \right) = \\
 & = -\mathbf{N}^T \mathbf{D} \left(\int_{\pi - \delta}^{2\pi - \delta} \mathbf{N}'(\varphi) \Psi_{u\sigma}(\varphi) d\varphi \right) = \frac{1}{2} \mathbf{N}^T \mathbf{D} \mathbf{J}
 \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

in quanto nell'operazione di limite l'angolo tra essi ed il punto Q tende a π ; il contributo del generico lato su cui ricade il punto effetto al *Bui free term* associato a \mathbf{t} è uguale alla metà di questo; l'ulteriore metà è data dal contributo dei rimanenti lati. I due contributi forniscono la seguente definizione:

$$\mathbf{t}[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p] = -\mathbf{N}^T \mathbf{D} \oint_{\Gamma_{ei}} \mathbf{N}' \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma_i + \mathbf{N}^T \mathbf{D} (-\mathbf{J}_b + \mathbf{J}) \tag{3.2.10}$$

Si osserva che, quando si deve valutare la trazione nel punto Q sul contorno, il contributo del *Bui free term* è scisso in due parti: la prima nasce quando l'integrale della causa è valutato sullo stesso contorno, la seconda quando l'integrale della causa è relativo al contorno rimanente. Il loro valore è uguale.

Nell'ipotesi di $\boldsymbol{\varepsilon}^p = \text{cost.}$, le I.S. possono essere scritte nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}[\mathbf{f}, -\mathbf{u}, \bar{\mathbf{b}}, \boldsymbol{\varepsilon}^p] = & \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{uu} \mathbf{f} d\Gamma + \oint_{\Gamma} \mathbf{G}_{ut} (-\mathbf{u}) + \frac{1}{2} \mathbf{u} + \\ & + \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{G}}_{uu} \bar{\mathbf{b}} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{u\sigma} (\mathbf{n}^T \mathbf{r}) d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \end{aligned} \quad (3.2.11a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}[\mathbf{f}, -\mathbf{u}, \bar{\mathbf{b}}, \boldsymbol{\varepsilon}^p] = & \oint_{\Gamma} \mathbf{G}_{uu} \mathbf{f} d\Gamma + \frac{1}{2} \mathbf{f} + \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{ut} (-\mathbf{u}) d\Gamma + \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{G}}_{uu} \bar{\mathbf{b}} d\Gamma + \\ & - \mathbf{N}^T \mathbf{D} \oint_{\Gamma} \mathbf{N}' \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p + \mathbf{N}^T \mathbf{D} (-\mathbf{J}_b + \mathbf{J} - \mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \end{aligned} \quad (3.2.11b)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{f}, -\mathbf{u}, \bar{\mathbf{b}}, \boldsymbol{\varepsilon}^p] = & \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{\sigma u} \mathbf{f} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{\sigma t} (-\mathbf{u}) d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\sigma u} \bar{\mathbf{b}} + \\ & - \mathbf{D} \left(\int_{\Gamma} \mathbf{N}' \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma + \mathbf{I} \right) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \end{aligned} \quad (3.2.11c)$$

dove i vettori \mathbf{f} and $-\mathbf{u}$ sono quantità note ed incognite relative ai contorni Γ_1 , Γ_2 e Γ_0 . Nelle eqs.(3.2.11a,b) le forze di volume sono state trasferite sul contorno come mostrato in App. 1.1. Coerentemente al BEM simmetrico alla Galerkin, le pesature di \mathbf{u} e \mathbf{t} forniscono i coefficienti del sistema risolvete espresso dall'eq.(1.5.6)

3.3 Valutazione in forma chiusa dei coefficienti del termine di carico

In questa sezione si procede al calcolo in forma chiusa degli spostamenti pesati $\mathbf{W}[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p]$ e delle trazioni pesate $\mathbf{P}[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p]$ presenti nel vettore di carico \mathbf{L} dell'eq. (1.5.7).

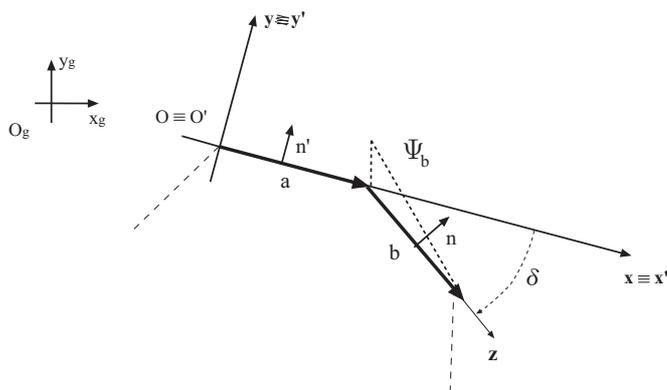


Fig. 3.3.1: Elementi di contorno adiacenti: sistemi di riferimento generali e locali per la valutazione in forma chiusa dei coefficienti del termine di carico.

La strategia utilizzata per il calcolo di questi coefficienti è quella proposta da Terravecchia (2006) (Fig. 3.3.1), costituita dalle seguenti operazioni:

- trasformazione dei vettori delle cause dal sistema di riferimento generale (O_g, x_g, y_g) ad un sistema di riferimento locale $(O, x, y) \equiv (O', x', y')$ giacente sull'elemento di contorno dove deve essere integrata la causa;
- tecnica di proiezione in assi locali riguardante le quantità definite sugli elementi di contorno dove viene valutato l'effetto;
- tecniche di trasformazione delle funzioni in coordinate naturali;
- trasformazione del blocco dei coefficienti dal sistema di riferimento locale a quello generale attraverso appropriate matrici di trasformazione.

A questo punto è necessario ricordare che la trasformazione dell'integrale di dominio relativo alle cause in integrale da effettuarsi sul contorno comporta una sommatoria di integrali sui quali la pesatura può essere effettuata singolarmente. E' in quest'ottica che viene applicata la tecnica sopra descritta.

Per il generico blocco dei coefficienti di carico calcolato in assi locali $(O, x, y) \equiv (O', x', y')$ si ha

$$\mathbf{K}^l = \int_{\Gamma_i} \Psi_h \mathbf{k}[\boldsymbol{\varepsilon}^p] d\Gamma_i \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p = \int_{\Gamma_i} \Psi_h \left(\sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} \tilde{\mathbf{G}}_{k\sigma} d\Gamma_j \right) d\Gamma_i \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \quad (3.3.1)$$

con $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, n$ dove n è il numero degli elementi di contorno, e con $\mathbf{K}^l = \mathbf{W}, \mathbf{P}$, $\mathbf{k} = \mathbf{u}, \mathbf{t}$, $k = u, t$, $h = t, u$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_Q^p$ distorsione in assi locali causa (O', x', y') . La eq.(3.3.1) viene applicata per una particolare tipologia di coefficienti fra quelli previsti in Terravecchia (2006); l'elemento di contorno \mathbf{a} , di lunghezza a , su cui si integra la causa e l'elemento di contorno \mathbf{b} , di lunghezza b , su cui si pesa l'effetto sono adiacenti e formano un angolo relativo δ (Fig. 3.3.1). I blocchi di coefficienti considerati sono $\mathbf{K}_{b,a}^l$ di dimensione (2×3) ; in quest'ultimi si suppone di calcolare gli effetti verticali pesati in \mathbf{b} in termini di spostamenti e di trazioni dovuti ad una distorsione verticale di dominio $\boldsymbol{\varepsilon}_{Q,y}^p$ integrata sull'elemento di contorno \mathbf{a} .

La relazione (3.3.1) applicata al caso di Fig. 3.3.1 si particolarizza in:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{y,b}^l &= \int_{\Gamma_b} \Psi_{b,y} \mathbf{u}_y[\boldsymbol{\varepsilon}^p] d\Gamma_b \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{Q,y}^p = \int_{\Gamma_b} \Psi_{b,y} \left(\int_{\Gamma_a} \tilde{\mathbf{G}}_{u\sigma}(x; x') d\Gamma_a \right) d\Gamma_b \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{Q,y}^p \\ \mathbf{P}_{y,b}^l &= \int_{\Gamma_b} \Psi_{b,y} \mathbf{t}_y[\boldsymbol{\varepsilon}^p] d\Gamma_b \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{Q,y}^p = \int_{\Gamma_b} \Psi_{b,y} \left(\int_{\Gamma_a} \tilde{\mathbf{G}}_{t\sigma}(x, n; x', n') d\Gamma_a \right) d\Gamma_b \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{Q,y}^p \end{aligned} \quad (3.3.2a,b)$$

Le relazioni (3.3.2a,b) vengono calcolate attraverso la tecnica presente in Terravecchia (2006) che prevede una proiezione ed una trasformazione in coordinate naturali. Essendo z' e z gli assi locali associati rispettivamente agli elementi \mathbf{a} e \mathbf{b} , attraverso la proiezione sull'asse locale $x \equiv x'$ si avrà che:

$$x' = z' , x = a + z \text{Cos}[\delta] , y = -z \text{Sin}[\delta] , \quad (3.3.3a-c)$$

$$dz' = dx' , dz = \frac{I}{\text{Cos}[\delta]} dx \quad (3.3.3d-e)$$

mentre la trasformazione in coordinate naturali $(x' x) \rightarrow (\xi' \xi)$ comporta

$$x' = a \xi' , x = a + b \text{Cos}[\delta] \xi ,$$

$$\Psi_b = I - \frac{x-a}{b \text{Cos}[\delta]} = I - \xi , J' = \frac{dx'}{d\xi'} = a , J = \frac{dx}{d\xi} = b \text{Cos}[\delta] \quad (3.3.4a-e)$$

Le espressioni precedentemente introdotte sono applicate per il calcolo in forma chiusa delle (3.3.2a,b). I coefficienti in forma chiusa sono di seguito riportati in funzione dell'angolo relativo δ tra gli elementi di contorno e del rapporto $m = a/b$ fra le relative lunghezze. Sono altresì riportati i grafici delle funzioni al variare dell'angolo relativo δ .

$$W_{y,b}^I = \frac{b^4 \text{Sin}(\delta)}{24(1-\nu)\pi} \left(\begin{array}{l} m^2 \left(-2(1-\nu) \left(3 - b(1 - 4m^2 \text{Cos}(\delta)) \right) + 3 \left(2\text{Cos}(2\delta) - b(\text{Cos}(2\delta) - 2m^2 \text{Cos}(3\delta)) \right) \right) \text{Sin}(\delta) + \\ + m^4 \left(\text{ArcTan}(\text{Cot}(\delta)) - \text{ArcTan} \left(\text{Cot}(\delta) + \frac{\text{Csc}(\delta)}{m^2} \right) \right) \\ \left(3(-3 + 2\nu) \text{Cos}(2\delta) - bm^2(7 - 4\nu) \text{Cos}(3\delta) + 3(\text{Cos}(4\delta) + bm^2 \text{Cos}(5\delta)) \right) + \\ + 2(3 - 2b)b(1 - \nu) \left(\text{ArcTan}(\text{Cot}(\delta)) - \text{ArcTan}(\text{Cot}(\delta) + m^2 \text{Csc}(\delta)) \right) + \\ + m^4 \left(-2(1 - \nu) \left(3\text{Cos}(\delta) + bm^2(1 + 2\text{Cos}(2\delta)) \right) + 3(\text{Cos}(3\delta) + bm^2 \text{Cos}(4\delta)) \right) \\ \left(4\text{Log}(m) - \text{Log}(1 + m^4 + 2m^2 \text{Cos}(\delta)) \right) \text{Sin}(\delta) \end{array} \right) \quad (3.3.5a)$$

$$P_{y,b}^l = \frac{b}{32(1-\nu^2)(1-2\nu)\pi} \left(\begin{aligned} & b m^2 \left((1-2\nu)^2 + b(2-4(1-\nu)\nu) - 2b \cos(2\delta) \right) \sin(2\delta) \\ & + 4m^2 \left(\operatorname{ArcTan}(\cot(\delta)) - \operatorname{ArcTan}\left(\cot(\delta) + \frac{\operatorname{Csc}(\delta)}{m^2}\right) \right) \\ & \left(-2b(1-\nu)^2 \cos(\delta) (2\cos(\delta) + bm^2 \cos(2\delta)) + (1-2\nu)^2 (1 + bm^2 \cos(\delta)) \sin(\delta)^2 + \right. \\ & \left. - b(2(1-\nu) + \cos(2\delta) + bm^2 \cos(\delta)(3-4\nu) + 2\cos(2\delta)) \sin(\delta)^2 \right. \\ & \left. + 8(2-b)b(1-\nu)^2 \left(\operatorname{ArcTan}(\cot(\delta)) - \operatorname{ArcTan}(\cot(\delta) + m^2 \operatorname{Csc}(\delta)) \right) \cos(\delta) + \right. \\ & \left. m^2 \left((2+5b-4((2+3b)\nu+8(1+b)\nu^2)) \cos(\delta) + \right. \right. \\ & \left. \left. b((1+b)m^2(1-2\nu)^2 \cos(2\delta) - \cos(3\delta) + bm^2(4(1-\nu)^2 + 4\cos(4\delta))) \right) \right. \\ & \left. (4\operatorname{Log}(m) - \operatorname{Log}(1+m^4 + 2m^2 \cos(\delta))) \cos(\delta) + \right. \\ & \left. -(2-b)(1-2\nu)^2 \operatorname{Log}(1+m^4 + 2m^2 \cos(\delta)) \sin(\delta) \right) \end{aligned} \right) \quad (3.3.5b)$$

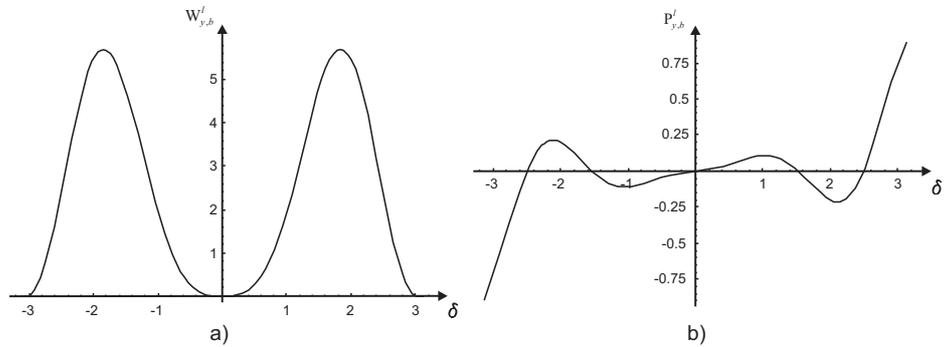


Fig. 3.3.2: a) $W_{y,b}^l(\delta)$ e b) $P_{y,b}^l(\delta)$ per $D=1$, $\nu=0.3$, $a=2$, $b=3$, $m=a/b=2/3$.

La procedura sopra descritta è stata applicata a tutti i blocchi dei coefficienti presenti nel termine di carico; i vettori calcolati, trasformati dal sistema locale al generale, sono stati implementati nel codice di calcolo Karnak.sGbem (Cucco et al., 2002), consentendo così calcoli notevolmente accurati.

Nella (3.3.8) il termine $\mathbf{N}^T \mathbf{D}(\mathbf{H} + \mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p$ è un termine costante che concorre alle trazioni pesate sull'elemento di contorno attraverso una matrice che in assi locali assume la seguente forma:

$$b \int_{\Gamma_b} \Psi_{b,y} \mathbf{N}^T \mathbf{D}(\mathbf{H} + \mathbf{I}) \cdot d\Gamma_b \cdot \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{Q,y}^{pl} = \frac{b}{2} \frac{2G}{(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{4} \\ \frac{\nu}{2} & \frac{1-\nu}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{Q,y}^{pl} \quad (3.3.8)$$

3.4 Applicazioni

L'approccio proposto è stato applicato per analisi di strutture piane in presenza di carichi termici o distorsioni anelastiche. Il carico termico è stato considerato inizialmente costante nel dominio (esempio 1a) utilizzando l'approccio per corpo unico (Polizzotto, 1988a, b), poi costante a zone (esempio 1b), utilizzando l'approccio *multi domain*. Entrambi gli approcci sono stati implementati nel codice di calcolo Karnak.sGbem (Cucco et al., 2002); nell'approccio *multi domain* l'analisi è effettuata mediante il metodo degli spostamenti (Panzeca et al., 2002a, b). I risultati ottenuti sono stati confrontati con quelli della teoria classica.

3.4.1 Esempio 1

In questo esempio è stata analizzata una piastra di $L = 2$ cm, $H = 1$ cm, $s = 1$ cm, modulo di Young $D = 10000$ daN/cm², coefficiente di Poisson $\nu = 0.3$, coefficiente termico $\alpha = 0.00001$, sia in presenza di carico termico costante che di carico termico variabile.

1a) Carico termico costante (approccio per singolo dominio)

Il solido bidimensionale (Fig. 3.4.1), soggetto a carico termico costante $\Delta T_x = +40$ e $\Delta T_y = +30$ è stato discretizzato sul contorno con passo costante $p = 0.1$ cm

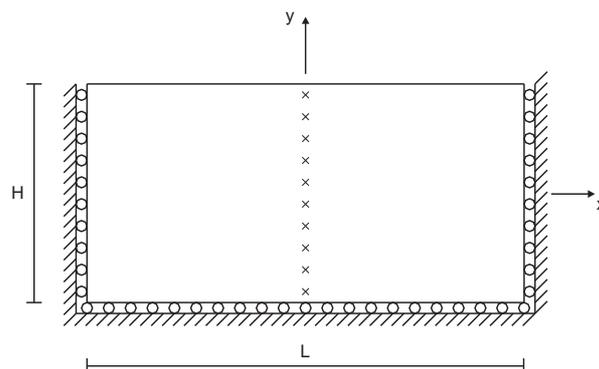


Fig. 3.4.1: Solido bidimensionale soggetto ad un carico termico costante.

La soluzione analitica di questo problema, nell'ipotesi di stato piano di deformazione, è la seguente:

$$\sigma_x = - \frac{D}{(1 - \nu^2)} \alpha \Delta T_x; \quad \varepsilon_y = \left(\frac{\nu}{1 - \nu} \Delta T_x + \Delta T_y \right) \alpha;$$

$$u_y(y) = \int_{-H/2}^y \varepsilon_y \, dy$$

$$u_y(y) = \left(\frac{\nu}{1 - \nu} \Delta T_x + \Delta T_y \right) \cdot \left(\frac{H}{2} + y \right) \alpha \tag{3.4.1a,b,c}$$

Le tensioni σ_x e gli spostamenti verticali u_y , sono stati valutati in corrispondenza dell'asse di simmetria y su un numero discreto di punti (Fig. 3.4.1), e successivamente confrontati con la soluzione analitica (Fig. 3.4.2).

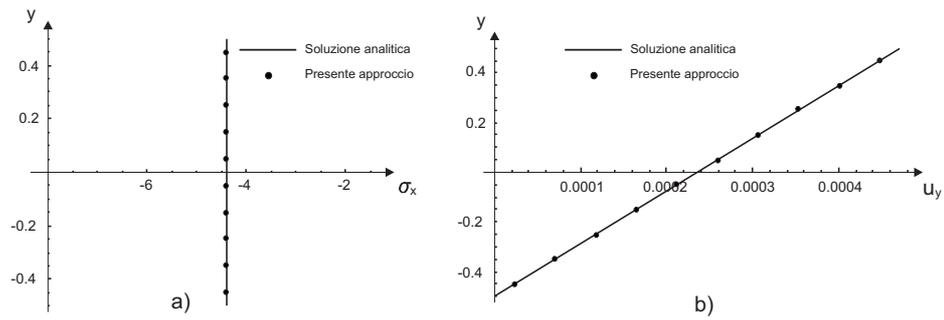


Fig 3.4.2: Confronto con la soluzione analitica: a) σ_x , b) u_y .

1b) Carico termico variabile (approccio multidomain)

Lo stesso solido bidimensionale del precedente esempio è stato sottoposto ad una variazione quadratica di temperatura in direzione y (Fig. 3.4.3). La legge di variazione è la seguente:

$$\Delta T_x = c_2 y^2 + c_1 y + c_0 \quad (3.4.2)$$

dove le costanti sono definite da:

$$c_2 = 2(T_1 + T_2 - 2T_3) \frac{1}{H^2}, \quad c_1 = (T_1 - T_2) \frac{1}{H}, \quad c_0 = T_3, \quad (3.4.3)$$

essendo:

$$T_1 = -20; \quad T_2 = 40; \quad T_3 = 0. \quad (3.4.4)$$

La soluzione analitica di questo problema, nell'ipotesi di stato piano di deformazione, è la seguente:

$$\sigma_x = -\frac{D}{(1-\nu^2)}\alpha \Delta T_x;$$

$$\varepsilon_y = \frac{\nu}{(1-\nu)}\alpha \Delta T_x;$$

$$u_y(y) = \int_{-H/2}^y \varepsilon_y dy$$

$$u_y(y) = \frac{\nu}{(1-\nu)}\left(\frac{1}{24}c_2(H^3 + 8y^3) - \frac{1}{8}c_1(H^2 - 4y^2) + \frac{1}{2}c_0(H + 2y)\right)\alpha \quad (3.4.5a-d)$$

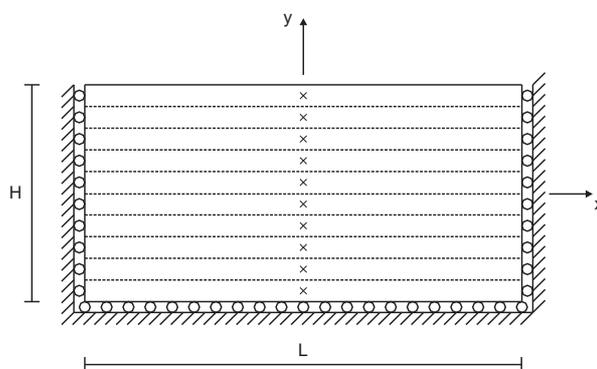


Fig. 3.4.3: Solido bidimensionale soggetto a carico termico variabile: suddivisione in sottostrutture

Il solido è stato suddiviso in 10 sottostrutture ciascuna delle quali è soggetta ad un carico termico costante a zone per simulare nel discreto la legge di variazione termica; per ciascuna sottostruttura sono state adottate le caratteristiche fisiche e meccaniche dell' esempio 1a. E' stata introdotta una discretizzazione del contorno a passo costante $p = 0.1 \text{ cm}$ e sono stati valutati la tensione σ_x e lo spostamento

verticale u_y nel baricentro di ogni sottostruttura utilizzando la presente strategia. I risultati ottenuti sono stati confrontati con la soluzione analitica (Fig. 3.4.4).

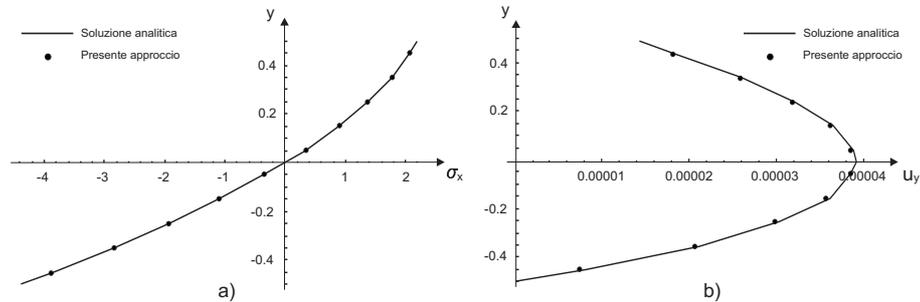


Fig 3.4.4: Confronto con la soluzione analitica: a) σ_x , b) u_y .

3.4.2 Esempio 2

Come secondo esempio è stata considerata una trave (dimensioni: $L = 300$ cm, $H=50$ cm, spessore $s = 30$ cm, modulo di Young $D = 300000$ daN/cm², coefficiente di Poisson $\nu = 0.12$, coefficiente termico $\alpha = 0.000012$), soggetta a distorsione anelastica concentrata nella sezione mediana.

2a) Rotazione relativa imposta

In questo primo caso la distorsione anelastica concentrata consiste in una rotazione relativa $\bar{\delta} = k_t$ dove $k_t = \alpha \Theta$ è la curvatura dovuta ad una variazione termica lineare e Θ è il gradiente termico (Fig. 3.4.5a,b).

La distorsione concentrata $\bar{\delta}$ è simulata mediante l'introduzione della sezione mediana di una striscia di 1 cm, suddivisa in 20 sottostrutture, ciascuna delle quali è soggetta ad azioni anelastiche $\varepsilon_x^p(y) = \Delta T_x(y)$ (Fig. 3.4.5c).

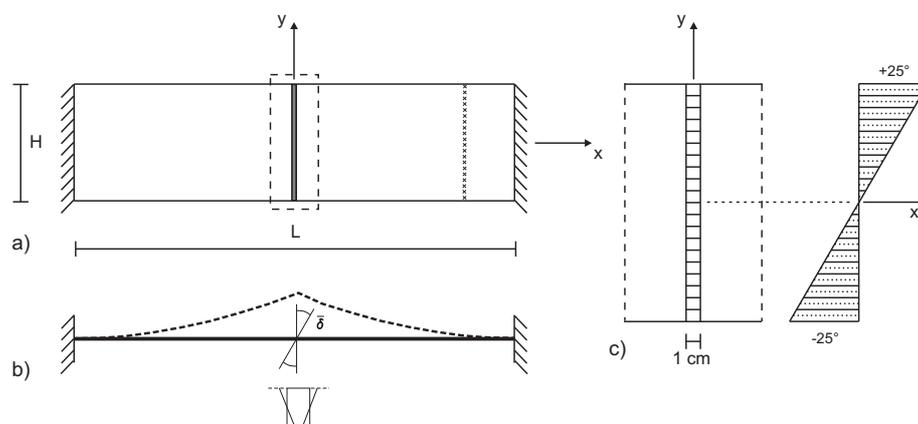


Fig. 3.4.5: Trave soggetta a distorsione concentrata $\bar{\delta}$: a) suddivisione in sottostrutture;
 b) deformata, c) discretizzazione in sottostrutture

I dati del problema esaminato sono: $\varepsilon_x^p(y) = 2(y/H)T$, $T = 25$, $\Theta = 1$, $\bar{\delta} = k_t = \alpha \Theta = -\alpha$. E' stata adottata una discretizzazione con passo costante $p = 2.5 \text{ cm}$.

La soluzione analitica nel caso di solido monodimensionale, prevede la nascita di un momento $M = (DI/L)\bar{\delta} = 3750 \text{ daNcm}$ e una distribuzione lineare di tensione lungo H $\sigma_x = (M/I)y$ in ogni sezione. Le tensioni σ_x ottenute sono confrontate con le soluzioni analitiche (Fig. 3.4.6). In Fig. 3.4.7 si mostrano la deformata e la mappatura delle trazioni.

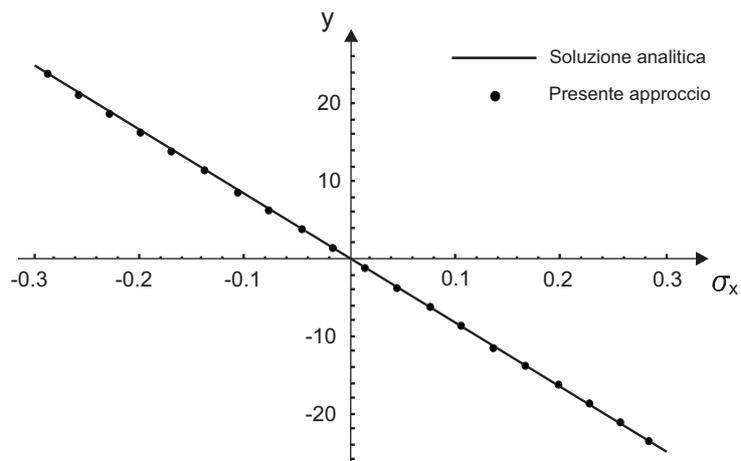


Fig. 3.4.6: Confronto con la soluzione analitica

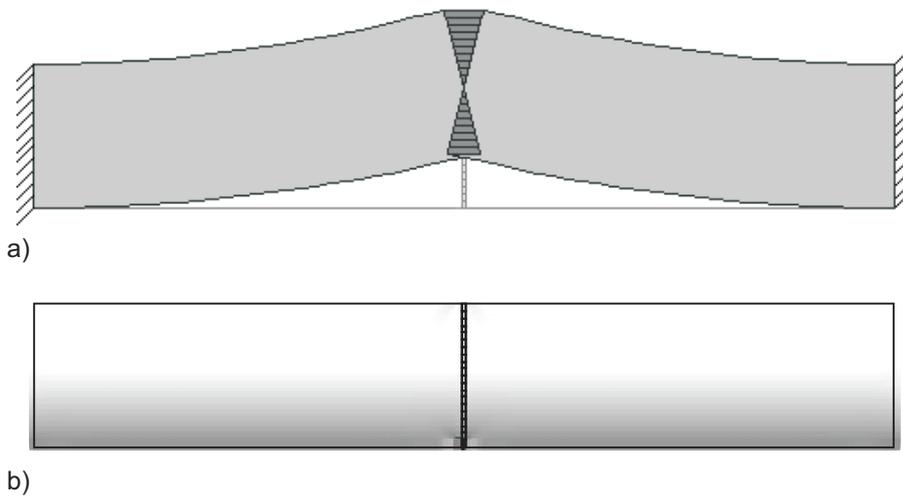


Fig. 3.4.7: a) deformata, b) mappatura delle trazioni sul contorno.

2b) *Spostamenti relativi imposti*

In questo caso invece è stata applicata una distorsione anelastica concentrata, che consiste in uno spostamento relativo $\bar{w} = 0.01 \text{ cm}$, applicato nella sezione mediana della trave (Fig. 3.4.8).

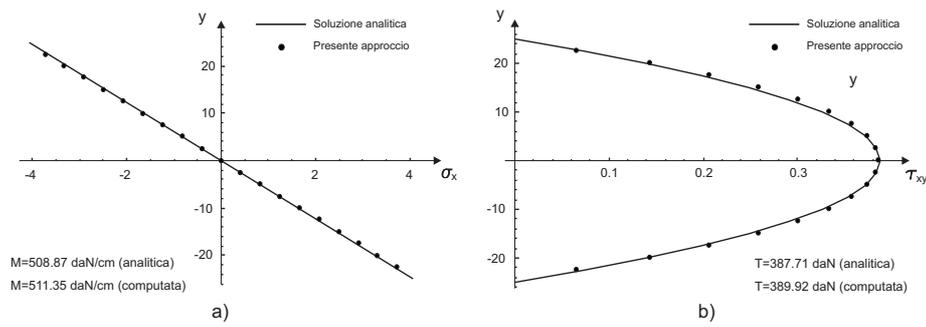
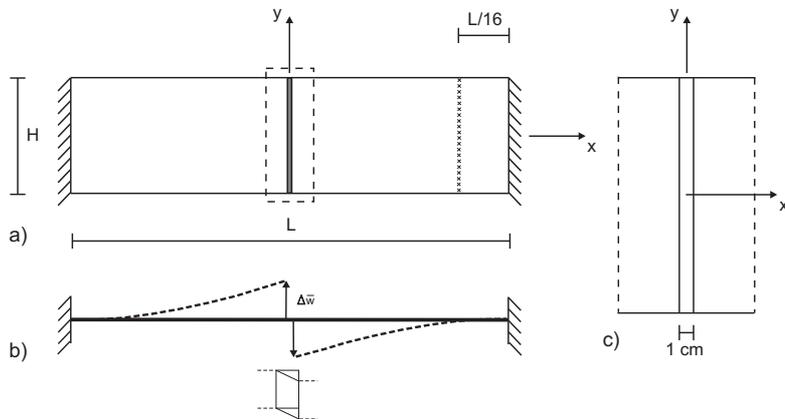
La distorsione concentrata \bar{w} è simulata mediante l'inserimento di una striscia nella sezione mediana della trave di 1 cm soggetta ad una distorsione a scorrimento $\varepsilon_{xy}^p = 0.01$. La soluzione analitica, nel caso di solido monodimensionale fornisce:

- il momento flettente e il taglio valutati all'incastro pari a:

$$M = \left(2 \frac{L^2}{12DI} + 2\chi \frac{1}{GA} \right)^{-1} = 581.57 \text{ daN cm},$$

$$T = \left(\frac{L^3}{12DI} + \chi \frac{L}{GA} \right)^{-1} = 387.71 \text{ daN}$$
(3.4.6a,b)

- la distribuzione lineare delle tensioni normali $\sigma_x = (M(x)/I)y$, con $M(x) = M - Tx$, e quella parabolica delle tensioni tangenziali $\tau_{xy} = (TS(y)/Ib)$ valutate lungo l'altezza della trave,



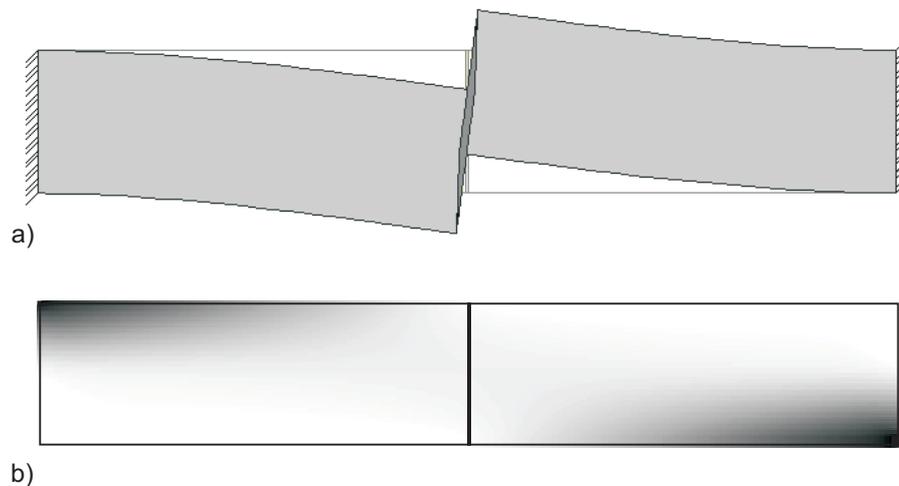


Fig. 3.4.10: a) deformata, b) mappatura delle trazioni.

La tensione normale σ_x , ottenuta nella sezione a distanza $x = L/16$ dall'incastro, e quella tangenziale τ_{xy} , sono state confrontate con la soluzione analitica (Fig. 3.4.9). In Fig. 3.4.10 sono riportate la deformata e la mappatura delle trazioni.

Appendice 3.1

Si vuole dimostrare l'eguaglianza

$$\underbrace{\left(\int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{G}}_{\sigma\sigma} d\Gamma + \mathbf{D}\mathbf{J} \right) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p}_{\text{Gao}} = -\mathbf{D} \underbrace{\int_{\Gamma} \mathbf{N}' \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma}_{\text{Dallner, Presente approccio}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \quad (\text{A.3.1})$$

La dimostrazione si ottiene tramite l'applicazione della tecnica RIM e dalla definizione di \mathbf{J} data nell'eq.(3.1.11).

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{G}}_{\sigma\sigma} d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p + \mathbf{D}\mathbf{J}\boldsymbol{\varepsilon}_Q^p &= -\mathbf{D} \int_{\Gamma} \mathbf{N}'\mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \\
 \int_{\Gamma} (\mathbf{G}_{\sigma\sigma} \text{Log}(r) \mathbf{n}'\mathbf{r}) d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p + \mathbf{D}\mathbf{J}\boldsymbol{\varepsilon}_Q^p &= -\mathbf{D} \int_{\Gamma} \mathbf{N}'\mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \\
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{2\pi} \boldsymbol{\Psi}_{\sigma\sigma}(\varphi) \left(\int_{\varepsilon}^{R(\varphi)} \frac{1}{r^2} r dr \right) d\varphi \right) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p + \mathbf{D}\mathbf{J}\boldsymbol{\varepsilon}_Q^p &= -\mathbf{D} \int_{\Gamma} \mathbf{N}'\mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \\
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega - \Omega_{\varepsilon}} \mathbf{G}_{\sigma\sigma} d\Omega \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p + \mathbf{D}\mathbf{J}\boldsymbol{\varepsilon}_Q^p &= -\mathbf{D} \int_{\Gamma} \mathbf{N}'\mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \\
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{D} \int_{\Omega - \Omega_{\varepsilon}} \mathbf{C}_x \mathbf{G}_{u\sigma} d\Omega \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p + \mathbf{D}\mathbf{J}\boldsymbol{\varepsilon}_Q^p &= -\mathbf{D} \int_{\Gamma} \mathbf{N}'\mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \\
 -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{D} \int_{\Omega - \Omega_{\varepsilon}} \mathbf{C}_{x'} \mathbf{G}_{u\sigma} d\Omega \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p + \mathbf{D}\mathbf{J}\boldsymbol{\varepsilon}_Q^p &= -\mathbf{D} \int_{\Gamma} \mathbf{N}'\mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \\
 -\mathbf{D} \int_{\Gamma} \mathbf{N}'\mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{D} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \mathbf{N}'\mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p + \mathbf{D}\mathbf{J}\boldsymbol{\varepsilon}_Q^p &= -\mathbf{D} \int_{\Gamma} \mathbf{N}'\mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \\
 -\mathbf{D} \int_{\Gamma} \mathbf{N}'\mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p - \mathbf{D}\mathbf{J}\boldsymbol{\varepsilon}_Q^p + \mathbf{D}\mathbf{J}\boldsymbol{\varepsilon}_Q^p &= -\mathbf{D} \int_{\Gamma} \mathbf{N}'\mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_Q^p \tag{A.3.2}
 \end{aligned}$$

Capitolo 4

Teoria classica della plasticità

In questo capitolo si tratteranno gli aspetti più significativi della teoria della plasticità. Saranno definite sia le equazioni costitutive e le grandezze che controllano l'evoluzione del processo di plasticizzazione, che la tecnica di *return mapping* utilizzata per la valutazione della risposta elasto-plastica mediante analisi al passo. Infine saranno introdotti i teoremi della teoria classica per l'analisi a shakedown.

L'algoritmo di *return mapping* utilizzato deriva da una strategia ormai nota. Essa prevede una prima fase nella quale viene valutato il predittore o tensione di tentativo mediante un'analisi puramente elastica e una seconda fase in cui il predittore, qualora non rispetti la condizione di ammissibilità plastica viene "rilassato" sulla superficie di snervamento.

La strategia di rientro che si propone impiega il metodo dell'*operator splitting* utilizzato da Simo (1998) e metodi per l'integrazione della relazione costitutiva nel tempo. (Matzenmiller e Taylor, 1994; Ortiz e Simo, 1986; Cocchetti e Perego, 2003).

Gli ultimi paragrafi sono dedicati alla teoria classica dell'adattamento elastico governata dai teoremi statico e cinematico di Melan e Koiter, da cui sono stati ricavati i due approcci per la determinazione del moltiplicatore a shakedown.

4.1 Generalità sul comportamento elasto-plastico

Un'assunzione fondamentale alla base della teoria della plasticità è la scomposizione delle deformazioni:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (4.1.1)$$

La componente $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ della eq.(4.1.1) rappresenta la deformazione o recupero elastico, mentre $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ è la deformazione plastica, quindi irreversibile.

Il vettore che definisce il campo di tensioni è legato alla parte elastica delle deformazioni mediante il tensore di elasticità \mathbf{D} :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (4.1.2)$$

Nell'ambito di una descrizione puramente elastica del comportamento dei materiali tutti i valori di tensione sono ammissibili. Nella teoria elasto-plastica si assume invece che in ogni punto del corpo la tensione debba appartenere ad un dominio definito nello spazio delle tensioni:

$$F[\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}] \leq 0 \quad (4.1.3)$$

L'appartenenza a tale dominio definisce per $\boldsymbol{\sigma}$ la condizione di ammissibilità plastica. Pertanto gli stati di sforzo per i quali la condizione (4.1.3) non è soddisfatta sono fisicamente inaccettabili. La funzione di snervamento F introdotta dipende sia dal valore di tensione, sia da alcuni parametri di stato $\boldsymbol{\rho}$, necessari per modellare le variazioni di comportamento che il materiale subisce a seguito di processi meccanici o termici. All'inizio del programma di carico considerato, il dominio elastico è individuato dalla (4.1.3) per valori di $\boldsymbol{\rho}$ nulli. Nel caso in cui la funzione di snervamento non si evolva con la storia deformativa plastica, cioè non dipenda dalle

variabili interne ρ , si ottiene un modello di comportamento elastico perfettamente plastico, in cui le deformazioni plastiche possono svilupparsi a stato di sforzo costante.

Si assume che all'interno del dominio elastico la componente di deformazione plastica sia nulla e che possa essere diversa da zero solo se σ e ρ sono tali da individuare un punto esterno alla frontiera F :

$$F[\sigma, \rho] > 0 \quad (4.1.4)$$

Poiché il modello descritto dalla (4.1.3) è molto generale e quindi difficile da trattare matematicamente, in questa tesi verranno introdotte alcune ipotesi limitative, ma che consentono di preservare una sufficiente generalità. Supponendo che il dominio di snervamento sia convesso, descritto dalla legge di von Mises e che abbia un comportamento elasto-plastico con incrudimento cinematico, la (4.1.3) assume la seguente forma:

$$F[\sigma, \rho] = \frac{1}{2}(\sigma - \rho)^T \mathbf{M} (\sigma - \rho) - \sigma_y^2 \leq 0 \quad (4.1.5)$$

$$\text{con } \mathbf{M} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \quad (4.1.6)$$

dove \mathbf{M} è una matrice di costanti, ρ è la variabile interna relativa all'*hardening* cinematico (back stress), cioè il parametro che descrive la traslazione della superficie di snervamento e σ_y è la funzione di snervamento.

La parte irreversibile del processo elastico è data dalla valutazione della deformazione plastica ϵ^p e dalle variabile interna ρ . Nell'ipotesi di plasticità associata le leggi di evoluzione, dette legge di flusso e legge di incrudimento, sono definite mediante le seguenti relazioni incrementali:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p &= \dot{\lambda} \partial_{\boldsymbol{\sigma}} F[\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}] \\ \dot{\boldsymbol{\rho}} &= \dot{\lambda} \mathbf{H} \partial_{\boldsymbol{\rho}} F[\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}]\end{aligned}\quad (4.1.7a,b)$$

dove \mathbf{H} è nota come matrice dei moduli *hardening*, il parametro λ i rappresenta il moltiplicatore plastico che deve soddisfare le seguenti condizioni:

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad \text{se } F[\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}] = 0 \quad \text{e} \quad \dot{F}[\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}] = 0 \quad (4.1.8a,b,c)$$

altrimenti:

$$\dot{\lambda} = 0 \quad (4.1.9a)$$

o, equivalentemente:

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} F[\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}] = \dot{\lambda} \dot{F}[\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}] = 0 \quad (4.1.10a,b)$$

La legge di flusso ipotizzata (4.1.7a), detta associata, ammette che ad ogni istante la (4.1.3) definisca un dominio convesso nello spazio delle componenti di sforzo e che la direzione del flusso plastico, coincida con la normale uscente alla funzione di snervamento $\partial_{\boldsymbol{\sigma}} F[\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}]$.

Il vettore $\partial_{\boldsymbol{\rho}} F[\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}]$, definisce invece l'evoluzione delle variabili interne.

L'eq. (4.1.10a) costituisce il vincolo di irreversibilità mentre l'eq.(4.1.10b) esprime la condizione secondo cui gli incrementi di deformazione plastica hanno luogo solo in fase di carico (regola di coerenza di Prager).

Normalità e convessità del dominio elastico possono considerarsi come conseguenze del postulato di Drucker che definisce la classe di materiali detti "stabili". Considerando un ciclo di carico e scarico che porti la tensione nel punto dal valore

iniziale σ_a (necessariamente ammissibile) ad un punto σ_y posto sulla sua frontiera e quindi nuovamente a σ_a il postulato fornisce:

$$(\sigma_y - \sigma_a)^T \dot{\epsilon}^p \geq 0 \quad (4.1.11)$$

In altre parole, supponendo di applicare alla struttura e successivamente di rimuovere un sistema di forze addizionali. Si ha che:

- 1) durante la fase di carico, le forze addizionali compiono lavoro non-negativo;
- 2) durante il ciclo di carico e scarico, il lavoro complessivo delle forze addizionali risulta ancora non-negativo.

4.2 Analisi elasto-plastica al incrementale

La teoria dell'elasto-plasticità fornisce diversi strumenti teorici e computazionali. Tra questi il più noto comprende i teoremi dell'analisi limite con i quali è possibile calcolare il carico di collasso di una struttura. In molti casi tuttavia, le informazioni ricavate mediante analisi limite non risultano sufficienti per una ricostruzione più articolata della risposta non lineare della struttura. Infatti nel caso in cui la stessa sia soggetta ad un programma di carico complesso o in presenza di fenomeni di incrudimento ($H > 0$) o softening ($H < 0$), il problema necessita di un'analisi più accurata.

Per tali ragioni spesso risulta utile effettuare analisi al passo, processi in grado di fornire una descrizione dell'evoluzione temporale della risposta strutturale e di fenomeni, anche complessi, legati al comportamento non lineare del materiale. La soluzione è ottenuta in forma di curva carico-spostamento costruendo una successione sufficientemente fitta di punti di equilibrio che permetta una accurata ricostruzione dell'intera curva per interpolazione

In questo paragrafo si discuterà sulla procedura utilizzata per la valutazione della soluzione elasto-plastica di fine passo. Si tratta di una strategia di tipo *initial strain* basata della teoria dello *split operator* e prevede:

- la valutazione del predittore elastico mediante uno dei due metodi di analisi multidomain descritti nel capitolo precedente;
- la correzione della soluzione mediante tecniche di path-following.

4.2.1 Algoritmo di *return mapping* in elastoplasticità

Si supponga di conoscere la risposta relativa all'istante di carico t_n in termini di tensioni $\boldsymbol{\sigma}_n$, deformazioni totali $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ e plastiche $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$. Si vuole valutare la risposta $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$ relativa all'istante t_{n+1} .

Poiché la risposta elasto-plastica è *path-dependent*, la soluzione in genere non è facilmente determinabile se non attraverso la discretizzazione dello spazio e del tempo

L'integrazione di $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ nell'intervallo $[t_n, t_{n+1}]$ conduce alla seguente relazione:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\lambda} \partial_{\boldsymbol{\sigma}} F[\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}] dt \quad (4.2.1)$$

essendo $\dot{\lambda}$ l'incremento del moltiplicatore plastico .

Si integri per parti e si assuma la condizione $\lambda [t_n] = 0$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \lambda_{n+1} \partial_{\boldsymbol{\sigma}} F[\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}]_{n+1} - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \gamma \frac{d}{dt} \partial_{\boldsymbol{\sigma}} F[\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}] dt \quad (4.2.2)$$

Si assuma che la storia di carico sia definita da un percorso estemale (Ortiz and Martin, 1989, Bilotta e Casciaro, 2007), sulla base della teoria proposta da Ponter e Martin (1972). L'approccio è basato sulla integrazione esatta della equazione

costitutiva $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)$ sia lungo particolari percorsi di tensione che massimizzano il lavoro complementare o lungo particolari percorsi di deformazione che minimizzano l'energia di deformazione. I percorsi estremali si configurano come percorsi elastici che connettono, nello spazio delle tensioni il punto iniziale rappresentativo della $\boldsymbol{\sigma}_n$ e quello finale rappresentativo della $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, con l'assunzione che il processo la deformazione plastica si inneschi nel punto finale. Quindi l'eq.(4.2.1) diventa:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \lambda_{n+1} \partial_{\boldsymbol{\sigma}} F[\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}]_{n+1} \quad (4.2.3)$$

Di conseguenza, nell'ipotesi di percorsi estremali la risposta è *path-independent*. E' importante considerare che gli stessi risultati possono essere ottenuti mediante il metodo implicito delle differenze all'indietro di Eulero o mediante il l'algoritmo di *closest point return mapping* (Simo and Hughes, 1998).

Il predittore elastico $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^*$ è funzione della tensione iniziale $\boldsymbol{\sigma}_n$ e dell'incremento di carico, i.e.:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^* = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{D} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}[\Delta \mathbf{u}] \quad (4.2.4)$$

Se $F[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^*] > 0$, la tensione elastica deve essere corretta e ciò richiede l'impiego di un algoritmo di rientro. Nel presente approccio tale algoritmo utilizza l'eq.(4.2.3) e conduce alla soluzione risolvendo il seguente sistema non lineare di equazioni:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^* - \lambda_{n+1} \mathbf{D} \partial_{\boldsymbol{\sigma}} F[\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}]_{n+1} \\ \boldsymbol{\rho}_{n+1} = \boldsymbol{\rho}_n + \lambda_{n+1} \mathbf{H} \partial_{\boldsymbol{\rho}} F[\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}] \\ F[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{\rho}_{n+1}] = 0 \end{cases} \quad (4.2.5a,b,c)$$

Nella eq.(4.2.5a,b,c), n e $n+1$ rappresentano rispettivamente l'istante precedente e quello attuale, $\boldsymbol{\sigma}^*$ è la tensione elastica (*predictor*). Nell'ipotesi di stato piano di deformazione le eq.(4.2.5a,b,c) rappresentano un sistema non lineare nelle incognite $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, $\boldsymbol{\rho}_{n+1}$, λ_{n+1} . (Simo and Hughes, 1998). In particolare nel caso di solido bidimensionale e nell'ipotesi di funzione di snervamento di von Mises definita nella (4.1.5) e legge di flusso associata (4.1.7a,b), le eq.(4.2.5a,b,c) vengono riscritte come segue:

$$\begin{cases} \mathbf{f}_\sigma \equiv \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^* + \lambda_{n+1} \mathbf{D} \mathbf{M} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\rho}_{n+1}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_\rho \equiv \boldsymbol{\rho}_{n+1} - \boldsymbol{\rho}_n - \lambda_{n+1} \mathbf{H} \mathbf{M} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\rho}_{n+1}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_\lambda \equiv \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\rho}_{n+1})^T \mathbf{M} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\rho}_{n+1}) - \sigma_y^2 = 0 \end{cases} \quad (4.2.6a,b,c)$$

dove le incognite $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, $\boldsymbol{\rho}_{n+1}$ e λ_{n+1} di questo problema non lineare possono essere ottenute mediante il metodo classico o modificato di N-R all'interno di una procedura ricorsiva:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbf{I} + \lambda_{n+1}^j \mathbf{D} \mathbf{M} & -\lambda_{n+1}^j \mathbf{D} \mathbf{M} & \mathbf{D} \mathbf{M} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^j - \boldsymbol{\rho}_{n+1}^j) & \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{j+1} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^j & \mathbf{f}_\sigma^j \\ \hline -\lambda_{n+1}^j \mathbf{H} \mathbf{M} & \mathbf{I} + \lambda_{n+1}^j \mathbf{H} \mathbf{M} & -\mathbf{H} \mathbf{M} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^j - \boldsymbol{\rho}_{n+1}^j) & \boldsymbol{\rho}_{n+1}^{j+1} - \boldsymbol{\rho}_{n+1}^j & \mathbf{f}_\rho^j \\ \hline (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^j - \boldsymbol{\rho}_{n+1}^j)^T \mathbf{M} & -(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^j - \boldsymbol{\rho}_{n+1}^j)^T \mathbf{M} & 0 & \lambda_{n+1}^{j+1} - \lambda_{n+1}^j & \mathbf{f}_\lambda^j \end{array} = - \quad (4.2.7)$$

che riscritto in forma compatta diventa:

$$\mathbf{J}^j (\mathbf{y}^{j+1} - \mathbf{y}^j) = -\mathbf{f}^j \quad (4.2.8)$$

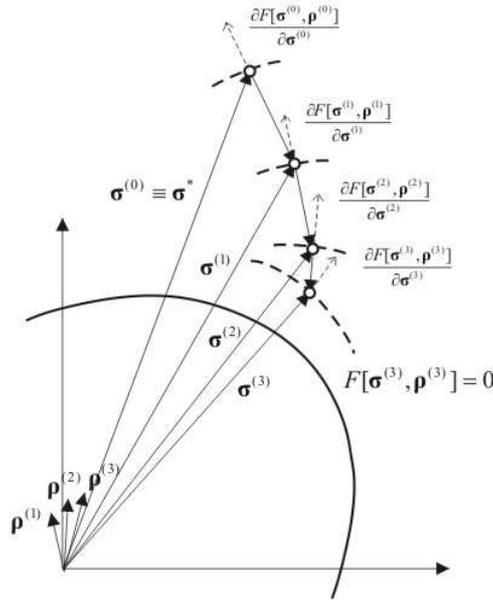


Fig. 4.2.1 Interpretazione geometrica dell’algoritmo di *return mapping*.

Il vettore \mathbf{y}^{j+1} presente nella (4.2.8) rappresenta la soluzione approssimata in termini di tensioni, variabili interne e scorrimento plastico ottenuta al raggiungimento del soddisfacimento della condizione di ammissibilità plastica, cioè quando $F[\boldsymbol{\sigma}^{j+1}, \boldsymbol{\rho}^{j+1}] \leq Toll$. Una interpretazione geometrica dell’algoritmo di rientro è rappresentata in Fig. 4.2.1 che mostra la graduale convergenza della soluzione sulla superficie di snervamento. La soluzione consente di aggiornare il vettore della deformazioni plastiche:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \lambda_{n+1} \mathbf{M} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\rho}_{n+1}) \quad (4.2.9)$$

4.3 Analisi a Shakedown

Sotto i carichi di esercizio, che si susseguono un numero notevole di volte, non è sufficiente garantirsi nei confronti del collasso. Occorre infatti assicurare che la struttura si mantenga sempre integra, evitando un accumulo delle deformazioni che porti alla perdita di funzionalità. Questo risultato può essere raggiunto imponendo che la struttura in condizioni di esercizio si mantenga sempre in campo elastico in modo tale che il materiale da cui è costituito preservi le sue proprietà. Dal momento che il limite elastico è sensibilmente influenzato da fenomeni poco prevedibili come stati di auto-tensione indotti da processi di lavorazione, imprecisioni di montaggio, cedimenti vincolari, assestamenti o plasticizzazioni e conseguenti a inevitabili concentrazioni locali di sforzo, ecc., la verifica elastica non può prescindere la presenza di deformazioni plastiche. Non si esclude pertanto la possibilità che insorgano deformazioni plastiche iniziali le quali generino stati di coazione che portino la struttura a rispondere in modo puramente elastico, quanto il loro accumularsi nel tempo. Se si verifica tale condizione si dice che la struttura si adatta in campo elastico.

La problematica appena introdotta costituisce la classica teoria dell'adattamento o shakedown ed è governata dai teoremi statico e cinematico rispettivamente di Melan e Koiter.

La maggior parte dei metodi numerici proposti valuta il moltiplicatore ad adattamento direttamente dall'applicazione di questi due teoremi (metodi diretti). In questi casi, l'analisi ad adattamento è formulata come un problema di ottimizzazione vincolata e può essere affrontata mediante metodi di programmazione matematica. Recentemente un nuovo metodo per la valutazione del fattore di sicurezza all'adattamento di strutture a comportamento elasto-plastico è stato proposto da Casciaro-Garcea (2002). Tale metodo è basato su una tecnica iterativa analoga all'algoritmo di tipo path-following alla Riks, un altro metodo usato in analisi elasto-plastiche per valutare il percorso di equilibrio di una struttura, ed offre le

stesse caratteristiche di robustezza, efficienza richiedendo un analogo impegno computazionale.

Nei prossimi paragrafi si mostreranno i teoremi statico e cinematico e gli approcci classici che consentono di determinare il moltiplicatore a shakedown, sui quali si baserà la strategia utilizzata in questa tesi, che invece sarà discussa, in seguito, nel Cap 6.

4.4 Teoria classica dello Shakedown

In questa sezione si stabiliranno le condizioni per cui una struttura idealmente elastoplastica si adatta sotto azioni esterne variabili e ripetute nel tempo. Poiché nella maggior parte delle situazioni è difficile stabilire l'esatta sequenza con cui le azioni esterne si avvicendano nella vita di una struttura, l'analisi dovrebbe essere condotta con riferimento alla più sfavorevole tra le storie possibili. Tale storia critica può essere determinata in maniera rigorosa sulla base dei dati disponibili e cioè i valori massimi e minimi che ogni singola azione esterna può assumere in condizioni di esercizio, in concomitanza o singolarmente. Si dispone pertanto di un dominio dei carichi, luogo dei punti rappresentativi delle condizioni potenzialmente verificabili. Il dominio dei carichi non riguarda solamente le azioni meccaniche bensì tutte le azioni esterne variabili e ripetute. Inoltre non risulta necessariamente convesso e alcune azioni possono elidersi a vicenda. Tuttavia come si dimostrerà in seguito i risultati non sono alterati se al dominio effettivo si sostituisce il suo involucro convesso.

4.4.1 Teorema del Convex Hull

Il teorema del Convex Hull dimostrato da Poliziotto (1982) stabilisce che, dato un dominio dei carichi Π qualsivoglia, è sempre possibile sostituire il dominio effettivo con il suo involucro convesso senza che i risultati siano alterati.

Si consideri un generico dominio Π costituito dai due segmenti 1-2 e 1-3(Fig 4.4.2). Se la condizione di sicurezza è soddisfatta per qualsiasi condizione di carico sul dominio Π , lo sarà anche per i carichi contenuti all'interno del range triangolare del dominio convesso Π_c che inviluppa Π (Fig 4.4.2). Ne consegue che, in genere, al fine di valutare il moltiplicatore a shakedown, è possibile limitarsi a considerare esclusivamente i carichi $\mathbf{Q}_i (i=1,2\dots v)$ rappresentati dai vertici v del dominio convesso senza variazioni nella risposta.

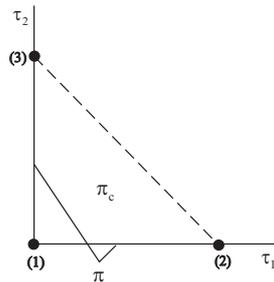


Fig 4.4.2. Esempio: il dominio Π è rappresentato dai due segmenti (1)-(2) e (1)-(3), quello convesso Π_c dal triangolo (1)-(2)-(3). I tre punti (1), (2), (3) rappresentano i carichi base.

Quanto detto si dimostra facilmente considerando la risposta in termini di tensione $\tilde{\sigma}(t) = \beta \sigma^e(t) + \sigma^s$ all'istante t relativa al punto $\tau = (1-\alpha)\tau_1 + \alpha\tau_2$, con $0 < \alpha < 1$, (Fig.4.4.2), giacente all'interno del dominio convesso Π_c , ma possibilmente non all'interno del dominio originario Π . Il punto scelto è rappresentativo della condizione di carico $\mathbf{Q}(t)$. La risposta sia tale da soddisfare la seguente legge di ammissibilità:

$$\varphi(\tilde{\sigma}(t)) \leq 0. \quad (4.4.2)$$

Poiché $\mathbf{Q}(t)$, rappresentato dal punto $\tau = (1-\alpha)\tau_1 + \alpha\tau_2$, espresso in funzione dei carichi \mathbf{Q}_1 e \mathbf{Q}_2 è:

$$\mathbf{Q}(t) = (1-\alpha)\mathbf{Q}_1 + \alpha\mathbf{Q}_2 \quad (4.4.3)$$

allora la (4.4.2) in forma esplicita risulta:

$$\varphi(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t)) = (1-\alpha)\varphi(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1) + \alpha\varphi(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2) \leq 0 \quad (4.4.4)$$

e pertanto devono valere:

$$\varphi(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1) \leq 0 \quad \text{e} \quad \varphi(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2) \leq 0. \quad (4.4.5)$$

In altre parole per ottenere la condizione di sicurezza:

$$\varphi(\boldsymbol{\sigma}^e + \boldsymbol{\sigma}^s) \leq 0 \quad (4.4.6)$$

non è necessario considerare tutti i punti dell'intero dominio Π rappresentativi delle infinite condizioni di carico a cui la struttura è potenzialmente soggetta, ma solamente i vertici v del range di Π , che rappresentano un set finito di condizioni di carico cosiddette "carichi base".

4.4.2 Posizione del problema

Si consideri un solido bidimensionale soggetto ad azioni esterne. In molti casi la storia reale dei carichi $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t)$ non è nota, ma è possibile stabilire il dominio dei carichi Π , *range* contenente tutti i carichi possibili \mathbf{Q} . Per il teorema del Convex Hull (p. 4.4.1) il dominio Π può essere assunto avente forma di un iper-poliedro convesso, caratterizzato da v punti di carico \mathbf{Q}_i ($i=1,2,\dots,v$) vertici dell'iper-poliedro.

Qualunque percorso di carico all'interno di Π rappresenta una potenziale storia di carico tale da garantire sempre una risposta ammissibile. Si introduca il moltiplicatore β che amplifica omoteticamente il dominio Π , determinando un nuovo dominio $\beta\Pi$ tale che la somma delle tensioni residue σ^s , dovute alle deformazioni plastiche, che insorgono per la particolare storia di carico a cui la struttura è soggetta, e le tensioni elastiche σ_i^e , risposta ai carichi base Q_i ($i=1,2,\dots,v$) amplificati di β , costituisce una condizione di sicurezza in tutti i punti della struttura, cioè:

$$\varphi(\beta\sigma_i^e + \sigma^s) \leq 0 \quad (4.4.1)$$

4.4.3 Teorema statico dello shakedown (Teorema di Melan)

Il primo teorema dello shakedown o teorema di Melan può essere espresso mediante la seguente definizione: se (condizione necessaria e sufficiente) esiste una distribuzione di tensioni autoequilibrate e indipendenti dal tempo t , σ^p , tali che la somma delle suddette tensioni e delle tensioni elastiche σ_i^e :

$$\sigma_i^e + \sigma^p = \hat{\sigma}_i \quad (4.4.7)$$

costituisce una condizione di sicurezza per la struttura ovvero uno stato di tensione che soddisfa la condizione di ammissibilità plastica:

$$\varphi(\hat{\sigma}_i) \leq 0 \quad (4.4.8)$$

in tutti i punti del solido e per ogni possibile combinazione di carico interna al range del dominio Π , allora si dice che la struttura si adatta ad una qualche distribuzione di autotensioni indipendenti dal tempo (che in genere dipendono dal programma di

carico considerato), e la risposta ad una successiva variazione di carico interna al range del dominio dei carichi Π sarà elastica.

D'altro canto, l'adattamento non può avvenire se non esiste nessuna distribuzione di autotensioni indipendente dal tempo tale che lo stato di tensione (4.4.7) non verifica la (4.4.8) in tutti i punti del solido e per ogni possibile combinazione di carico interna al range del dominio Π .

Si consideri il dominio di von Mises definito dalla funzione:

$$\varphi(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i) = \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i^T \mathbf{M} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i - \sigma_y^2 \leq 0 \quad \text{con} \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i = \beta \boldsymbol{\sigma}_i^e + \boldsymbol{\sigma}^p \quad (4.4.9)$$

dove:

- $\beta \boldsymbol{\sigma}_i^e$ rappresenta la risposta elastica ai carichi base \mathbf{Q}_i ($i=1,2,\dots,v$) amplificati di β
- $\boldsymbol{\sigma}^s$ rappresenta il campo di autotensioni, risposta alle deformazioni plastiche che nascono nella struttura.

4.4.4 Approccio statico classico

L'approccio statico deriva dal teorema statico e consiste nella valutazione del valore massimo che il moltiplicatore dei carichi β può assumere, detto β_{sh} , tale che si verifichi la condizione imposta dal teorema statico ovvero che garantisca l'adattamento elastico della struttura, ovvero:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{sh} = \max_{(\beta, \boldsymbol{\sigma}^p)} \beta: \\ \varphi(\beta \boldsymbol{\sigma}_i^e + \boldsymbol{\sigma}^p) \leq 0 \\ \mathbf{C}^T \boldsymbol{\sigma}^p = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (4.4.10)$$

Si consideri un solido, soggetto a n carichi base suddiviso in m celle potenzialmente attive. Sia σ_i^e , la risposta elastica ai carichi base Q_i ($i=1, \dots, n$). Il problema dello shakedown (4.4.10) viene riscritto per tutte le celle del dominio come segue:

$$\begin{cases} \beta_{sh} = \max_{(\beta, \sigma_j^p)} \beta: \\ \varphi_j (\beta \sigma_{ij}^e + \sigma_j^p) \leq 0 & i = 1, \dots, n \text{ carichi base} \\ C^T \sigma_j^p = 0 & j = 1, \dots, m \text{ celle} \end{cases} \quad (4.4.11)$$

Sia le tensioni elastiche σ_i^e che le tensioni autoequilibrate σ_j^p rappresentano stati di tensione valutati sui punti di Gauss di ciascuna cella.

4.4.5 Teorema cinematico dello shakedown (Teorema di Koiter)

Il secondo teorema dello shakedown o teorema di Koiter può essere espresso mediante la seguente definizione che esprime la condizione necessaria e sufficiente per la quale una struttura non si adatti elasticamente: una struttura non si adatterà elasticamente, se esistono sia un set ammissibile di deformazioni plastiche $\epsilon^p = \sum_{i=1}^n \epsilon_i^p$ (campo compatibile) che almeno una condizione di carico esterno Q , interna al *range* del dominio Π , tali che il lavoro di dissipazione risulti minore del lavoro prodotto per effetto dei carichi base:

$$\exists \sigma_i^e[Q_i]: \sum_{i=1}^n \int_V (\sigma_i^e - \sigma_i^p)^T \epsilon_i^p dV \geq 0 \quad (4.4.12)$$

dove $\sigma_i^s \epsilon_i^p$ il lavoro di deformazione plastica associata a ϵ_i^p .

Si deduce che la condizione necessaria e sufficiente perché si verifichi l'adattamento elastico per la suddetta struttura per tutti i meccanismi di accumulo plastico è che il corrispondente lavoro di dissipazione sia non minore di quello prodotto per effetto dei carichi base:

$$\sum_{i=1}^v \int_V \boldsymbol{\sigma}_i^p \boldsymbol{\varepsilon}_i^p dV - \sum_{i=1}^v \int_V \boldsymbol{\sigma}_i^e \boldsymbol{\varepsilon}_i^p dV \geq 0 \quad (4.4.13)$$

I campi delle deformazioni plastiche $\boldsymbol{\varepsilon}_i^p$ sono dipendenti tra loro e il campo $\boldsymbol{\varepsilon}^p = \sum_{i=1}^v \boldsymbol{\varepsilon}_i^p$ non produce tensioni. L'equazione precedente deve essere accompagnata dalle seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\boldsymbol{\varepsilon}^p) &= \mathbf{0} && \text{on } \Gamma_1 \\ \mathbf{t}(\boldsymbol{\varepsilon}^p) &= \mathbf{0} && \text{on } \Gamma_2 \\ \boldsymbol{\sigma}^p(\boldsymbol{\varepsilon}^p) &= \mathbf{0} && \text{on } \Omega \end{aligned} \quad (4.4.14a,b,c)$$

4.4.6 Approccio cinematico classico

Poiché l'eq.(4.4.13) modificata ponendo $\boldsymbol{\sigma}_i^e = \beta \boldsymbol{\sigma}_i^e$ è soddisfatta per tutti i $\beta \leq \beta_{sh}$ e la seguente disequazione :

$$\sum_{i=1}^v \int_V \boldsymbol{\sigma}_i^p \boldsymbol{\varepsilon}_i^p dV / \sum_{i=1}^v \int_V \boldsymbol{\sigma}_i^e \boldsymbol{\varepsilon}_i^p dV \geq \beta_{sh} \quad (4.4.15)$$

è valida per tutti i meccanismi di accumulo plastico, come conseguenza, β_{sh} può essere valutata mediante un'operazione di minimo, i.e:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{sh} = \min \quad \sum_{i=1}^v \int_V \boldsymbol{\sigma}_i^p \boldsymbol{\varepsilon}_i^p dV \\ \quad (\boldsymbol{\varepsilon}_i^p, \mathbf{u}(\boldsymbol{\varepsilon}^p), \mathbf{t}(\boldsymbol{\varepsilon}^p), \boldsymbol{\varepsilon}^p) \\ \sum_{i=1}^v \int_V \boldsymbol{\sigma}_i^e \boldsymbol{\varepsilon}_i^p dV = 1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}^p = \sum_{i=1}^v \boldsymbol{\varepsilon}_i^p \\ \mathbf{u}(\boldsymbol{\varepsilon}^p) = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_1 \\ \mathbf{t}(\boldsymbol{\varepsilon}^p) = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_2 \\ \boldsymbol{\sigma}^p(\boldsymbol{\varepsilon}^p) = \mathbf{0} \quad \text{on } \Omega \end{array} \right. \quad (4.4.16)$$

4.4.6 Considerazioni

Per quanto visto nei paragrafi precedenti, si noti come i teoremi statico e cinematico dello shakedown sono, rispettivamente, generalizzazioni dei teoremi statico e cinematico dell'analisi limite per una combinazione dei carichi esterni che variano in un dominio ammissibile Π . Infatti, i teoremi statico e cinematico dell'analisi limite sono forme particolari dei teoremi statico e cinematico dello shakedown ottenute per una singola condizione di carico, di intensità unitaria. Come nell'analisi limite, uno stato autoequilibrato di tensioni non ha nessuna influenza sul moltiplicatore di adattamento.

Inoltre, il teorema statico dello shakedown assicura che il moltiplicatore al limite elastico β_e sia minore (o uguale) del moltiplicatore di shakedown β_{sh} . Infatti, sommando alla tensione elastica $\beta_{sh}\sigma^e$ la tensione autoequilibrata σ^p , vengono soddisfatti i requisiti del teorema statico. D'altra parte, il teorema cinematico dello shakedown assicura che, per ciascuna condizione di carico possibile, il moltiplicatore di collasso β_c sia maggiore (o uguale) a β_{sh} . Il moltiplicatore a shakedown è quindi limitato dalle condizioni:

$$\beta_e \leq \beta_{sh} \leq \beta_c \quad (4.4.17)$$

Capitolo 5

Analisi elastoplastica per macrozone attive

In questo capitolo si mostrerà una strategia sviluppata mediante SBEM che utilizza l'approccio agli spostamenti, descritto nel Capitolo 2, per effettuare analisi elastoplastiche ad *initial strain* di solidi bidimensionali non omogenei, nelle ipotesi di materiali stabili, funzione di snervamento di von Mises, plasticità associata, stati piani di deformazione, incrudimento cinematico. L'approccio è condotto a partire dalla discretizzazione del dominio in elementi bem nei quali viene valutato, in termini discreti, l'accumulo delle deformazioni plastiche. L'equazione delle autotensioni definita dalla (2.2.17) governerà l'intero problema, consentendo di individuare gli elementi bem attivi, ovvero le sottostrutture nelle quali la condizione di ammissibilità plastica risulta violata che, nel presente approccio, vengono raggruppate in macroelementi. Gli e-bem localizzati in questa fase sono gli stessi che necessitano della correzione della soluzione mediante tecniche di *path-following*. L'algoritmo di rientro sviluppato a tale scopo si avvale della medesima equazione delle autotensioni e consente la correzione simultanea della soluzione non locale in tutti gli elementi bem attivi mediante l'utilizzo della matrice delle autotensioni, all'interno di un sistema non lineare di equazioni, avente come incognite la tensione elasto-plastica, la *back stress* e il moltiplicatore plastico di fine passo.

Infine la soluzione approssimata del problema non lineare è ottenuta mediante il metodo di Newton-Raphson (N-R), già utilizzato in elastoplasticità unitamente a metodi ad elementi di contorno, da diversi autori (Mallardo e Alessandri, 2004; Gao

and Davies, 2000; Bonnet e Mukerjee, 1996; Banerjee, 1994; Wang et al., 2007, Zito et al., 2011).

La procedura utilizzata mostra notevoli vantaggi computazionali legati alla riduzione del numero delle iterazioni plastiche. Inoltre parte delle difficoltà, derivanti dalla necessità di utilizzare matrici Jacobiane di notevoli dimensioni in processi ricorsivi, sono state superate grazie ad una strategia computazionale che semplifica notevolmente le operazioni di calcolo.

Alcuni test numerici, effettuati mediante il codice di calcolo Karnak.sGbem (Cucco et al., 2002) e confrontati con altri approcci, mostreranno infine l'efficienza del metodo proposto.

5.1 Algoritmo elasto-plastico per macro-zone attive

La strategia elastoplastica si serve di un algoritmo di *return mapping* che coinvolge tutti gli elementi bem plasticamente attivi che definiscono la cosiddetta macro-zona attiva e utilizza il metodo classico N-R. Sulla base della teoria dello *split operator* sviluppata da Simo e Hughes (1998), la presente analisi elastoplastica viene condotta suddividendo (split) il problema elastoplastico in due fasi dette rispettivamente fase di *elastic predictor* e fase di *plastic corrector*.

L'equazione delle autotensioni consente di valutare le tensioni di tentativo nella fase di *predictor* e di correggere la soluzione nella fase di *corrector*. Inoltre i coefficienti della matrice delle autotensioni, cambiati in segno, ne garantiscono la non località discreta.

5.1.1 Fase di *elastic predictor*

Allo scopo di valutare le tensioni di tentativo, ovvero la risposta puramente elastica all'istante $n+1$ in ciascun elemento bem del corpo discretizzato, la eq.(2.2.17) fornisce i predittori $\sigma_{(n+1)}^*$ in funzione delle deformazioni plastiche

$\mathbf{p}_{(n+1)}$, accumulate ed imposte come distorsioni volumetriche, e dell'incremento di carico $\beta_{(n+1)}$:

$$\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}^* = \mathbf{Z}\mathbf{p}_{(n+1)} + \beta_{(n+1)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_s \quad \text{where} \quad \mathbf{p}_{(n+1)} = \mathbf{p}_{(n)} + \Delta\mathbf{p}_{(n+1)} \quad (5.1.1)$$

dove la matrice \mathbf{Z} è piena e riguarda tutti gli m elementi bem, definiti in seguito alla discretizzazione del solido. Quindi si effettua il controllo della condizione di ammissibilità plastica di tutte le tensioni di tentativo $\boldsymbol{\sigma}_{i(n+1)}^*$ sui punti di Gauss degli m elementi bem mediante la legge di von Mises:

$$F[\boldsymbol{\sigma}_{i(n+1)}^*, \boldsymbol{\rho}_{i(n+1)}] = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}_{i(n+1)}^* - \boldsymbol{\rho}_{i(n+1)})^T \mathbf{M} (\boldsymbol{\sigma}_{i(n+1)}^* - \boldsymbol{\rho}_{i(n+1)}) - \sigma_{iy}^2 \leq 0 \quad (5.1.2)$$

dove $\boldsymbol{\rho}_{i(n+1)}$ rappresenta la traslazione del dominio durante il processo di carico-scarico, essendo $i = 1, \dots, m$ il generico e-bem. In tutti gli a bem-elements (con $a \leq m$ numero degli elementi bem attivi) nei quali la condizione (5.1.2) risulta violata, cioè $F[\boldsymbol{\sigma}_{i(n+1)}^*, \boldsymbol{\rho}_{i(n+1)}] > 0$, si esegue una operazione di correzione che consente di definire il valore delle tensioni dovute alle deformazioni plastiche.

5.1.2 Fase di *plastic corrector*

Il primo termine dell'eq.(2.2.17), ovvero $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Z}\mathbf{p}$, consente di valutare la soluzione elasto-plastica valutata sui punti di Gauss degli elementi bem plasticamente attivi. In questa fase i vettori $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\rho}$ e il termine scalare λ sono quantità incognite, mentre il vettore \mathbf{p} rappresenta la deformazione plastica volumetrica da imporre su ciascun e-bem al fine di valutare il campo ammissibile di tensioni.

Tale risultato è ottenuto mediante una strategia detta “per macro-zone attive” (Panzecca et al., 2010; Parlavecchio et al., 2010), mediante la quale è possibile ottenere la risposta elasto-plastica come soluzione di un sistema globale non lineare di equazioni.

L’analisi elasto-plastica al passo n+1 nel discreto è condotta in modo analogo a quella nel continuo (Cap.4), definendo un algoritmo di rientro mediante l’utilizzo delle equazioni (4.2.6a-c) scritte in un unico sistema per tutti gli a elementi bem individuati e raggruppati nella macro-zona nella precedente fase di *predictor*, i.e.:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{A(n+1)} = \boldsymbol{\sigma}_{A(n+1)}^* - \boldsymbol{\sigma}_{A(n+1)}^p \\ \boldsymbol{\rho}_{A(n+1)} = \boldsymbol{\rho}_{A(n)} + \boldsymbol{\rho}_{A(n+1)}^p \\ \mathbf{F}_A[\boldsymbol{\sigma}_{A(n+1)}, \boldsymbol{\rho}_{A(n+1)}] = \mathbf{0} \end{cases} \quad (5.1.3 \text{ a-c})$$

dove $\boldsymbol{\sigma}_{A(n+1)}^p = \mathbf{Z}_{AA} \mathbf{p}_{A(n+1)}$ e dove l’indice A individua vettori contenenti grandezze, note ed incognite, di tutti gli a elementi bem. Nell’ipotesi che per l’e-bem, la funzione di forma $\boldsymbol{\Psi}_p$ dell’eq.(2.2.3a-g) sia la stessa di quella relativa al moltiplicatore plastico, i.e. $\lambda_h = \psi_p \Lambda_h$ con $\psi_p \geq 0$, le leggi di flusso plastico e quelle di *hardening* relative a tutti gli elementi-bem attivi possono essere espresse come segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_A &= \begin{vmatrix} \mathbf{p}_l \\ \vdots \\ \mathbf{p}_a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Lambda_l \partial_{\boldsymbol{\sigma}_l} F[\boldsymbol{\sigma}_l, \boldsymbol{\rho}_l] \\ \vdots \\ \Lambda_a \partial_{\boldsymbol{\sigma}_a} F[\boldsymbol{\sigma}_a, \boldsymbol{\rho}_a] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Lambda_l \mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}_l - \boldsymbol{\rho}_l) \\ \vdots \\ \Lambda_a \mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}_a - \boldsymbol{\rho}_a) \end{vmatrix} \\ \boldsymbol{\rho}_A^p &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{\rho}_l \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Lambda_l \mathbf{H}_l \partial_{\boldsymbol{\rho}_l} F[\boldsymbol{\sigma}_l, \boldsymbol{\rho}_l] \\ \vdots \\ \Lambda_a \mathbf{H}_a \partial_{\boldsymbol{\rho}_a} F[\boldsymbol{\sigma}_a, \boldsymbol{\rho}_a] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Lambda_l \mathbf{H}_l \mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}_l - \boldsymbol{\rho}_l) \\ \vdots \\ \Lambda_a \mathbf{H}_a \mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}_a - \boldsymbol{\rho}_a) \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (5.1.4a,b)$$

dove, per semplicità, l'indice $n+1$ è stato omissso.

Il sistema globale non lineare (5.1.3a-c) può essere riscritto nella seguente forma:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_\sigma \equiv \boldsymbol{\sigma}_A - \boldsymbol{\sigma}_A^* + \mathbf{Z}_{AA} \mathbf{p}_A = \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_\rho \equiv \boldsymbol{\rho}_A - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_A - \boldsymbol{\rho}_A^p = \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_A \equiv \mathbf{F}_A[\boldsymbol{\sigma}_A, \boldsymbol{\rho}_A] = \mathbf{0} \end{cases} \quad (5.1.5 \text{ a-c})$$

dove si è posto $\boldsymbol{\rho}_{(n)} = \tilde{\boldsymbol{\rho}}$ e:

$$\boldsymbol{\sigma}_A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_l \\ \vdots \\ \boldsymbol{\sigma}_a \end{bmatrix}, \boldsymbol{\sigma}_A^* = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_l^* \\ \vdots \\ \boldsymbol{\sigma}_a^* \end{bmatrix}, \mathbf{K}_{AA} = \begin{bmatrix} -\mathbf{Z}_{ll} & \cdots & -\mathbf{Z}_{la} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{Z}_{al} & \cdots & -\mathbf{Z}_{aa} \end{bmatrix}, \quad (5.1.6a-c)$$

$$\boldsymbol{\rho}_A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_l \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_a \end{bmatrix}, \tilde{\boldsymbol{\rho}}_A = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\rho}}_l \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{\rho}}_a \end{bmatrix}, \mathbf{F}_A[\boldsymbol{\sigma}_A, \boldsymbol{\rho}_A] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_l - \boldsymbol{\rho}_l)^T \mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}_l - \boldsymbol{\rho}_l) - \sigma_{ly}^2 \\ \vdots \\ \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_a - \boldsymbol{\rho}_a)^T \mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}_a - \boldsymbol{\rho}_a) - \sigma_{ay}^2 \end{bmatrix} \quad (5.1.6d-f)$$

La matrice \mathbf{Z}_{AA} è semi-definita positiva e deriva dalla matrice \mathbf{Z} presente nell'eq. (2.2.17), estraendo i blocchi relativi agli a elementi bem plasticamente attivi, cambiati in segno.

Nella prima funzione \mathbf{F}_σ , $\boldsymbol{\sigma}_A$ è il vettore soluzione delle tensioni totali, $\boldsymbol{\sigma}_A^*$ la tensione di tentativo, mentre $\mathbf{Z}_{AA} \mathbf{p}_A$ rappresenta la componente correttiva (vettore delle auto-tensioni) contenente i contributi locali e non locali, $\boldsymbol{\rho}_A$ è il vettore delle variabili interne associate all'incrudimento cinematico. Le funzioni \mathbf{F}_ρ e \mathbf{F}_A contengono solamente contributi locali.

Le (5.1.5 a-c) costituiscono un sistema di equazioni non lineari nelle incognite di tensione $\boldsymbol{\sigma}_A$, *back stresses* $\boldsymbol{\rho}_A$ e moltiplicatore plastico Λ_A (dove $\Lambda_A^T = | \Lambda_l \ \cdots \ \Lambda_a |$) per la macrozona attiva.

Anche nel caso di sistema non lineare per macro-zone la soluzione approssimata è ottenuta applicando il metodo classico di N-R:

$$\begin{array}{c|c|c} \mathbf{J}_{\sigma\sigma}^j & \mathbf{J}_{\sigma\rho}^j & \mathbf{J}_{\sigma\Lambda}^j \\ \hline \mathbf{J}_{\rho\sigma}^j & \mathbf{J}_{\rho\rho}^j & \mathbf{J}_{\rho\Lambda}^j \\ \hline \mathbf{J}_{\Lambda\sigma}^j & \mathbf{J}_{\Lambda\rho}^j & \mathbf{J}_{\Lambda\Lambda}^j \end{array} \left\| \begin{array}{c} \boldsymbol{\sigma}_A^{j+1} - \boldsymbol{\sigma}_A^j \\ \boldsymbol{\rho}_A^{j+1} - \boldsymbol{\rho}_A^j \\ \Lambda_A^{j+1} - \Lambda_A^j \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} -\mathbf{F}_{\sigma}^j \\ -\mathbf{F}_{\rho}^j \\ -\mathbf{F}_{\Lambda}^j \end{array} \right\| \quad (5.1.7)$$

o, in forma compatta,

$$\mathbf{J}_{AA}^j (\mathbf{Y}_A^{j+1} - \mathbf{Y}_A^j) = -\mathbf{F}_A^j \quad (5.1.8)$$

dove sono valide le seguenti posizioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\sigma\sigma}^j &= \begin{vmatrix} \mathbf{I} - \Lambda_l^j \mathbf{K}_{ll} \mathbf{M} & \cdots & -\Lambda_a^j \mathbf{Z}_{la} \mathbf{M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\Lambda_a^j \mathbf{Z}_{al} \mathbf{M} & \cdots & \mathbf{I} - \Lambda_a^j \mathbf{Z}_{aa} \mathbf{M} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{J}_{\sigma\rho}^j = \begin{vmatrix} \Lambda_l^j \mathbf{Z}_{ll} \mathbf{M} & \cdots & \Lambda_a^j \mathbf{Z}_{la} \mathbf{M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_a^j \mathbf{Z}_{al} \mathbf{M} & \cdots & \Lambda_a^j \mathbf{Z}_{aa} \mathbf{M} \end{vmatrix}, \\ \mathbf{J}_{\sigma\Lambda}^j &= \begin{vmatrix} -\mathbf{K}_{ll} \mathbf{M} (\boldsymbol{\sigma}_l^j - \boldsymbol{\rho}_l^j) & \cdots & -\mathbf{K}_{la} \mathbf{M} (\boldsymbol{\sigma}_a^j - \boldsymbol{\rho}_a^j) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{K}_{al} \mathbf{M} (\boldsymbol{\sigma}_l^j - \boldsymbol{\rho}_l^j) & \cdots & -\mathbf{K}_{aa} \mathbf{M} (\boldsymbol{\sigma}_a^j - \boldsymbol{\rho}_a^j) \end{vmatrix}, \quad \mathbf{J}_{\rho\sigma}^j = \begin{vmatrix} -\Lambda_l^j \mathbf{H}_l \mathbf{M} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & -\Lambda_a^j \mathbf{H}_a \mathbf{M} \end{vmatrix}, \\ \mathbf{J}_{\rho\rho}^j &= \begin{vmatrix} \mathbf{I} + \Lambda_l^j \mathbf{H}_l \mathbf{M} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I} + \Lambda_a^j \mathbf{H}_a \mathbf{M} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{J}_{\rho\Lambda}^j = \begin{vmatrix} -\mathbf{H}_l \mathbf{M} (\boldsymbol{\sigma}_l^j - \boldsymbol{\rho}_l^j) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{H}_a \mathbf{M} (\boldsymbol{\sigma}_a^j - \boldsymbol{\rho}_a^j) \end{vmatrix}, \\ \mathbf{J}_{\Lambda\sigma}^j &= \begin{vmatrix} (\boldsymbol{\sigma}_l^j - \boldsymbol{\rho}_l^j)^T \mathbf{M} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & (\boldsymbol{\sigma}_a^j - \boldsymbol{\rho}_a^j)^T \mathbf{M} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{J}_{\Lambda\rho}^j = \begin{vmatrix} -(\boldsymbol{\sigma}_l^j - \boldsymbol{\rho}_l^j)^T \mathbf{M} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & -(\boldsymbol{\sigma}_a^j - \boldsymbol{\rho}_a^j)^T \mathbf{M} \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (5.1.9 \text{ a-h})$$

$$\mathbf{J}_{AA}^j = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \quad (5.1.9 \text{ i})$$

e dove l'apice j è riferito al processo ricorsivo del N-R. Il blocco generico $\mathbf{J}_{\alpha\delta}^j = [\partial_{\delta} \mathbf{F}_{\alpha}]^j$ della matrice degli Jacobiani \mathbf{J}_{AA}^j , rappresenta la derivata della funzione \mathbf{F}_{α} (con $\alpha = \sigma, \rho, \lambda$) rispetto alla variabile δ (con $\delta = \boldsymbol{\sigma}_A, \boldsymbol{\rho}_A, \boldsymbol{\lambda}_A$). Il vettore \mathbf{Y}_A^{j+1} è la soluzione in termini di tensione, variabili interne e moltiplicatore plastico valutati sui punti di Gauss della macrozona plasticamente attiva.

L'uso della matrice delle autotensioni \mathbf{Z} garantisce il soddisfacimento simultaneo della condizione di ammissibilità plastica in tutte le macro-zone plasticamente attive, senza la necessità di effettuare ulteriori iterazioni.

5.1.3 Semplificazioni computazionali nella procedura N-R

Poiché, in genere, l'operatore Jacobiano \mathbf{J}_{AA}^j è di notevoli dimensioni, operazioni di aggiornamento e di inversione nei processi ricorsivi, risultano onerosi dal punto di vista computazionale. La seguente strategia consente di semplificare le operazioni di calcolo allo scopo di ridurre tempi e costi di computazione.

Si consideri il sistema non lineare, espresso dall' eq. (5.1.7), riscritto nella seguente forma:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{J}_{\sigma\sigma}^j & \mathbf{J}_{\sigma r}^j \\ \mathbf{J}_{r\sigma}^j & \mathbf{J}_{rr}^j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\sigma}_A^{j+1} - \boldsymbol{\sigma}_A^j \\ \mathbf{r}_A^{j+1} - \mathbf{r}_A^j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\mathbf{F}_{\sigma}^j \\ -\mathbf{F}_r^j \end{vmatrix} \quad (5.1.10)$$

avendo posto:

$$\mathbf{J}_{\sigma r}^j = \begin{vmatrix} \mathbf{J}_{\sigma\rho}^j & \mathbf{J}_{\sigma A}^j \end{vmatrix}, \quad \mathbf{J}_{r\sigma}^j = \begin{vmatrix} \mathbf{J}_{\rho\sigma}^j \\ \mathbf{J}_{A\sigma}^j \end{vmatrix}, \quad \mathbf{J}_{rr}^j = \begin{vmatrix} \mathbf{J}_{\rho\rho}^j & \mathbf{J}_{\rho A}^j \\ \mathbf{J}_{A\rho}^j & \mathbf{J}_{AA}^j \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{r}_A^{j+1} - \mathbf{r}_A^j = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\rho}_A^{j+1} - \boldsymbol{\rho}_A^j \\ \boldsymbol{\Lambda}_A^{j+1} - \boldsymbol{\Lambda}_A^j \end{vmatrix}, \quad \mathbf{F}_r^j = \begin{vmatrix} \mathbf{F}_\rho^j \\ \mathbf{F}_A^j \end{vmatrix} \quad (5.1.11a-e)$$

o in forma esplicita:

$$\begin{cases} \mathbf{J}_{\sigma\sigma}^j (\boldsymbol{\sigma}_A^{j+1} - \boldsymbol{\sigma}_A^j) + \mathbf{J}_{\sigma r}^j (\mathbf{r}_A^{j+1} - \mathbf{r}_A^j) = -\mathbf{F}_\sigma^j \\ \mathbf{J}_{r\sigma}^j (\boldsymbol{\sigma}_A^{j+1} - \boldsymbol{\sigma}_A^j) + \mathbf{J}_{rr}^j (\mathbf{r}_A^{j+1} - \mathbf{r}_A^j) = -\mathbf{F}_r^j \end{cases} \quad (5.1.12a,b)$$

Si effettui una condensazione di variabili attraverso la sostituzione del vettore $(\mathbf{r}_A^{j+1} - \mathbf{r}_A^j)$ estratto dall'eq. (5.1.11a) nella eq. (5.1.11b), ottenendo:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{J}_{ss}^j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{rr}^j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\sigma}_A^{j+1} - \boldsymbol{\sigma}_A^j \\ \mathbf{r}_A^{j+1} - \mathbf{r}_A^j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\mathbf{F}_S^j \\ -\mathbf{F}_R^j \end{vmatrix} \quad (5.1.13)$$

dove:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{ss}^j &= \mathbf{J}_{\sigma\sigma}^j - \mathbf{J}_{\sigma r}^j (\mathbf{J}_{rr}^j)^{-1} \mathbf{J}_{r\sigma}^j, \\ \mathbf{F}_S^j &= \mathbf{J}_{\sigma\sigma}^j (\mathbf{J}_{rr}^j)^{-1} \mathbf{F}_r^j - \mathbf{F}_\sigma^j, \\ \mathbf{F}_R^j &= \mathbf{J}_{r\sigma}^j (\mathbf{J}_{ss}^j)^{-1} \mathbf{F}_s^j - \mathbf{F}_r^j \end{aligned} \quad (5.1.14 a-c)$$

L'utilizzo dell'eq.(5.1.12a,b) per la determinazione della soluzione elastoplastica risulta più vantaggioso rispetto all'approccio precedente, essendo le due equazioni disaccoppiate e necessitando solamente dell'inversione dei due operatori \mathbf{J}_{ss}^j e \mathbf{J}_{rr}^j . Infatti il blocco \mathbf{J}_{ss}^j è di dimensioni ridotte, il blocco \mathbf{J}_{rr}^j è costituito da tre blocchi diagonali, mentre il blocco \mathbf{J}_{AA}^j è nullo. E' facile

dimostrare, tramite una partizione di matrici, che l'inversa $(\mathbf{J}_{rr}^j)^{-1}$ è costituita solamente dalla blocchi ancora diagonali, facilmente invertibili con tempi computazionali minori rispetto a quelli necessari se si utilizzasse l'eq.(5.1.7):

$$\mathbf{J}_{rr}^{-1} = \left| \begin{array}{c|c} \mathbf{J}_{\rho\rho}^{-1} - \mathbf{J}_{\rho\rho}^{-1} \mathbf{J}_{\rho A} \mathbf{G}_{AA}^{-1} \mathbf{J}_{A\rho} \mathbf{J}_{\rho\rho}^{-1} & \mathbf{J}_{\rho\rho}^{-1} \mathbf{J}_{\rho A} \mathbf{G}_{AA}^{-1} \\ \hline \mathbf{G}_{AA}^{-1} \mathbf{J}_{A\rho} \mathbf{J}_{\rho\rho}^{-1} & -\mathbf{G}_{AA}^{-1} \end{array} \right|$$

$$\mathbf{G}_{AA} = \mathbf{J}_{A\rho} \mathbf{J}_{\rho\rho}^{-1} \mathbf{J}_{\rho A} \quad (5.1.15a,b)$$

Successivamente, mediante il vettore soluzione \mathbf{Y}_A^{j+1} , è possibile ottenere il vettore delle deformazioni plastiche $\Delta \mathbf{p}_A$ e il nuovo vettore delle variabili interne $\boldsymbol{\rho}_A$, che include l'incremento $\Delta \boldsymbol{\rho}_A$ (eq. 5.1.1) relativo al passo di carico $n+1$ e ai soli elementi bem attivi. La soluzione consente di aggiornare i vettori globali per valutare il nuovo *predictor* e verificare la condizione di ammissibilità plastica nel dominio traslato in un sottoprocesso iterativo.

5.2 Analisi per singoli elementi bem

Come alternativa alla precedente analisi, è stata sviluppata una procedura che consente di ottenere la soluzione del processo non lineare per singoli elementi bem attivi. Si consideri a tale scopo, l' h -esimo e-bem attivo. Il sistema non lineare (5.1.3a-c), riscritto per il singolo e- bem è il seguente:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{h(n+1)} = \boldsymbol{\sigma}_{h(n+1)}^* - \boldsymbol{\sigma}_{h(n+1)}^p \\ \boldsymbol{\rho}_{h(n+1)} = \boldsymbol{\rho}_{h(n)} + \boldsymbol{\rho}_{h(n+1)}^p \\ \mathcal{f}_h[\boldsymbol{\sigma}_{h(n+1)}, \boldsymbol{\rho}_{h(n+1)}] = 0 \end{cases} \quad \text{con } h = 1, \dots, a \quad (5.2.1 \text{ a-c})$$

che contiene solamente i contributi correttivi locali, essendo $\boldsymbol{\sigma}_{h(n+1)}^p = \mathbf{Z}_{hh} \mathbf{p}_{h(n+1)}$. Anche in questo caso si ometterà in seguito l'indice $n+1$ e si porrà $\boldsymbol{\rho}_{(n)} = \tilde{\boldsymbol{\rho}}$. Nella medesima ipotesi del caso precedente, relativamente alle funzioni di forma utilizzate, lo scorrimento plastico e le variabili interne, in ogni singolo e-bem attivo possono essere espresse come segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_h &= \Lambda_h \partial_{\boldsymbol{\sigma}_h} F[\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\rho}_h] = \Lambda_h \mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\rho}_h) \\ \boldsymbol{\rho}_h^p &= \Lambda_h \mathbf{H}_h \partial_{\boldsymbol{\rho}_h} F[\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\rho}_h] = \Lambda_h \mathbf{H}_h \mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\rho}_h) \end{aligned} \quad (5.2.2a,b)$$

il sistema non lineare (5.1.17a-c) può essere riscritto nella seguente forma:

$$\begin{cases} \mathbf{f}_\sigma \equiv \boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}_h^* + \mathbf{Z}_{hh} \mathbf{p}_h = \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_\rho \equiv \boldsymbol{\rho}_h - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_h - \boldsymbol{\rho}_h^p = \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_A \equiv \mathbf{F}_h[\boldsymbol{\sigma}_A, \boldsymbol{\rho}_h] = 0 \end{cases} \quad \text{con } h = 1, \dots, a \quad (5.2.3a-c)$$

dove si assume:

$$\mathbf{F}_h[\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\rho}_h] = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\rho}_h)^T \mathbf{M} (\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\rho}_h) - \sigma_{hy}^2 \quad (5.2.4)$$

Nella prima funzione \mathbf{f}_σ , $\boldsymbol{\sigma}_h$ è il vettore soluzione delle tensioni totali, $\boldsymbol{\sigma}_h^*$ la tensione di tentativo, mentre $\mathbf{Z}_{hh} \mathbf{p}_h$ rappresenta la componente correttiva (vettore delle auto-tensioni) contenente solamente i contributi locali, $\boldsymbol{\rho}_h$ è il vettore delle variabili interne associate all'incrudimento cinematico.

La (5.2.3a-c) comprende un sistema di equazioni non lineari nelle incognite di tensione $\boldsymbol{\sigma}_h$, *back stresses* $\boldsymbol{\rho}_h$ e moltiplicatore plastico Λ_h per il singolo e-bem attivo.

La soluzione approssimata del problema non lineare è ottenuta, anche in questo caso, applicando il metodo classico di N-R come segue:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{J}_{\sigma\sigma}^j & \mathbf{J}_{\sigma\rho}^j & \mathbf{J}_{\sigma\Lambda}^j \\ \mathbf{J}_{\rho\sigma}^j & \mathbf{J}_{\rho\rho}^j & \mathbf{J}_{\rho\Lambda}^j \\ \mathbf{J}_{\Lambda\sigma}^j & \mathbf{J}_{\Lambda\rho}^j & \mathbf{J}_{\Lambda\Lambda}^j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\sigma}_h^{j+1} - \boldsymbol{\sigma}_h^j \\ \boldsymbol{\rho}_h^{j+1} - \boldsymbol{\rho}_h^j \\ \Lambda_h^{j+1} - \Lambda_h^j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\mathbf{f}_\sigma^j \\ -\mathbf{f}_\rho^j \\ -\mathbf{f}_\Lambda^j \end{vmatrix} \quad (5.2.5a-c)$$

dove sono valide le seguenti posizioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\sigma\sigma}^j &= \mathbf{I} - \Lambda_h^j \mathbf{Z}_{hh} \mathbf{M}, \quad \mathbf{J}_{\sigma\rho}^j = \Lambda_h^j \mathbf{Z}_{hh} \mathbf{M}, \quad \mathbf{J}_{\sigma\Lambda}^j = -\mathbf{Z}_{hh} \mathbf{M} (\boldsymbol{\sigma}_h^j - \boldsymbol{\rho}_h^j), \\ \mathbf{J}_{\rho\sigma}^j &= -\Lambda_h^j \mathbf{H}_h \mathbf{M}, \quad \mathbf{J}_{\rho\rho}^j = \mathbf{I} + \Lambda_h^j \mathbf{H}_h \mathbf{M}, \quad \mathbf{J}_{\rho\Lambda}^j = -\mathbf{H}_h \mathbf{M} (\boldsymbol{\sigma}_h^j - \boldsymbol{\rho}_h^j), \\ \mathbf{J}_{\Lambda\sigma}^j &= (\boldsymbol{\sigma}_h^j - \boldsymbol{\rho}_h^j)^T \mathbf{M}, \quad \mathbf{J}_{\Lambda\rho}^j = -(\boldsymbol{\sigma}_h^j - \boldsymbol{\rho}_h^j)^T \mathbf{M}, \quad \mathbf{J}_{\Lambda\Lambda}^j = 0. \end{aligned} \quad (5.2.6a-i)$$

o, in forma compatta,:

$$\mathbf{J}_{hh}^j (\mathbf{Y}_h^{j+1} - \mathbf{Y}_h^j) = -\mathbf{f}_h^j \quad (5.2.7)$$

A differenza della strategia precedente per la quale si è dovuti ricorrere ad una semplificazione computazionale la soluzione del problema non lineare (5.2.7) si ricava senza notevoli oneri di computazione. Il vettore \mathbf{Y}_A^{j+1} è la soluzione in termini di tensione, variabili interne e moltiplicatore plastico valutati sui punti di Gauss del generico h -esimo e-bem.

Applicando l'eq.(5.2.7) a tutti gli elementi bem attivi è possibilile ottenere la soluzione del problema elasto-plastico attraverso un numero di iterazioni plastiche tale da soddisfare la condizione di ammissibilità plastica in tutti gli elementi-bem. Questa strategia risulta più onerosa rispetto alla precedente, ma presenta il vantaggio di operare con matrici Jacobiane $\mathbf{J}_{hh}(\mathbf{Y}_h)$ di dimensioni ridotte per le quali

l'aggiornamento e l'inversione nel processo ricorsivo risultano semplificati. Inoltre, nell'ipotesi di plasticità ideale, la soluzione è sempre garantita anche in fase di collasso plastico attribuendo alla metodologia robustezza e affidabilità.

5.3 La procedura elastoplastica

In Fig. 5.1 si mostra il diagramma di flusso della procedura elastoplastica utilizzata. Una volta ottenuto il vettore delle deformazioni plastiche \mathbf{p} , mediante una delle due strategie precedentemente mostrate (analisi per macrozone e per singoli elementi bem) le quantità nodali possono essere ottenute come segue:

$$\xi_0 = \mathbf{K}_{00}^{-1}(\mathbf{K}_{0\sigma}\mathbf{p} + \beta\hat{\mathbf{f}}_0)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}_0\mathbf{H}\xi_0 - \mathbf{A}_\sigma\mathbf{p} - \beta\hat{\mathbf{L}}) \quad (5.3.1a,b)$$

E' importante notare che l'aggiornamento della soluzione nodale $\zeta_{0(n+1)}$ e $\mathbf{X}_{(n+1)}$ si effettua alla fine del passo di carico $n+1$, contrariamente a quanto accade in altre formulazioni che necessitano di una continua correzione della soluzione nodale per ciascun incremento plastico nel processo iterativo plastico (Bilotta e Casciaro, 2007).

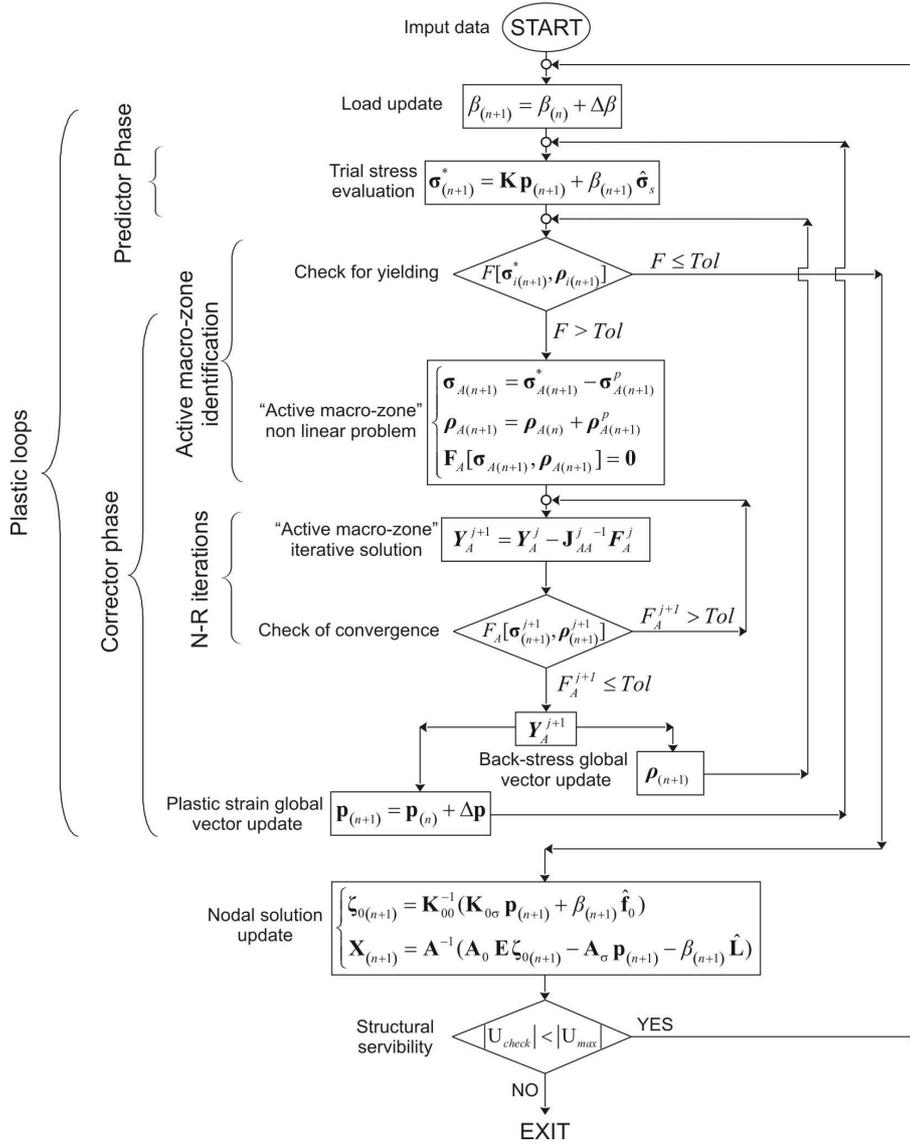


Fig. 5.3.1: Diagramma di flusso della procedura elastoplastica

5.4 Risultati numerici

In questa sezione si propongono alcuni test numerici effettuati mediante il codice di calcolo Karnak.sGbem (Cucco et al., 2002) all'interno del quale la procedura elasto-plastica è stata implementata come modulo aggiuntivo. La soluzione elastoplastica è stata valutata nelle ipotesi di stato piano di deformazione, plasticità ideale o *hardening* cinematico, funzione di snervamento di von Mises e plasticità associata.

5.4.1 Esempio 1. Cubo soggetto a spostamenti imposti

Questo primo esempio, nel quale è stato esaminato un cubo (Fig. 5.3.1) soggetto a spostamenti imposti, descrive il comportamento del solido nell'ipotesi di plasticità ideale ($H=0$), *hardening* ($H=0.1$) e *softening* ($H=-0.1$).

Il modello, soggetto a vincoli scorrevoli imposti nei due piani $x = 0$, $y = 0$ è stato discretizzato in 49 elementi bem bidimensionali. In Fig. 7a-c si mostrano i risultati, valutati in termini di tensioni in A (Figure 5.3.2a-c) della faccia superiore del cubo come risposta a spostamenti imposti e confrontati con la soluzione di Gao e Davies(2002) nell'ambito del Bem per collocazione. Come si può osservare nei primi due casi esaminati le soluzioni sono prossime a quelle di confronto.

Il materiale è caratterizzato da: modulo di Young $D = 1$ MPa , coefficiente di Poisson $\nu = 0.3$, tensione di snervamento $\sigma_y = 0,8$ MPa . Per l'analisi di return mapping è stata considerata una tolleranza $Tol=0.001$.

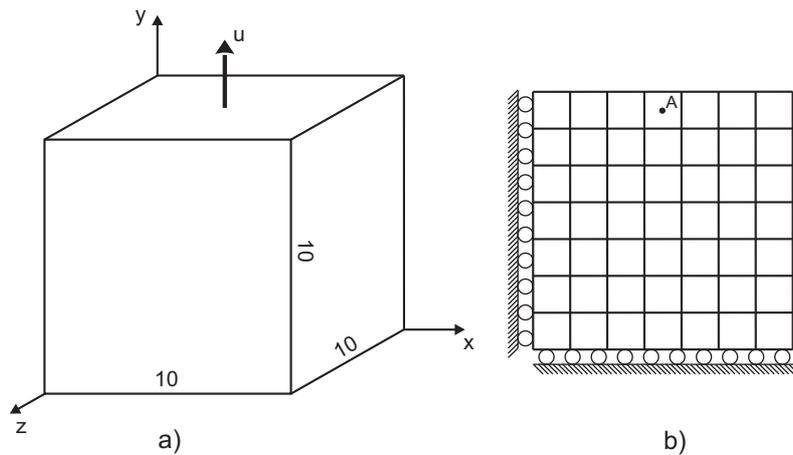


Fig. 5.3.1: Cubo soggetto a spostamenti imposti: a,b) descrizione geometrica; c,d) mesh adottata.

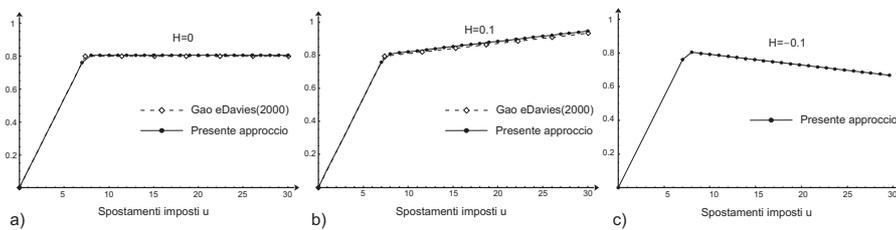


Figure 5.3.2: Curva tensioni-spostamenti verticali imposti: a) plasticità ideale; b) hardening; c) softening.

5.4.2 Esempio 2. Piastra sottile con foro circolare

L'esempio che si propone riguarda una piastra sottile con foro circolare (Fig.5.3.3a) soggetta ad un carico di trazione uniforme. Il dominio è stato discretizzato in 144 elementi bem (Fig. 5.3.3b) a 4 nodi, ciascuno dei quali è caratterizzato dalla modellazione lineare delle variabili nodali. Il materiale di cui è costituito presenta le seguenti caratteristiche: modulo di Young $D = 206700$ MPa, coefficiente di Poisson $\nu = 0.3$, tensione di snervamento uniassiale $\sigma_y = 450$ MPa.

Per l'analisi di return mapping è stata considerata una tolleranza $Tol=0.001$. L'obiettivo è stato quello di valutare il fattore di carico a collasso e confrontarlo con la soluzione numerica ottenuta attraverso la strategia proposta nel Cap.4, Par. 4.2.1, e con quella ottenuta mediante il metodo di analisi per singoli elementi bem. In Fig. 5.3.4a,b sono mostrate le curve carico-spostamento relative al punto A, rispettivamente nell'ipotesi di plasticità perfetta e con incrudimento cinematico. Il primo risultato è stato confrontato con quello ottenuto da Zito et al. (2011).

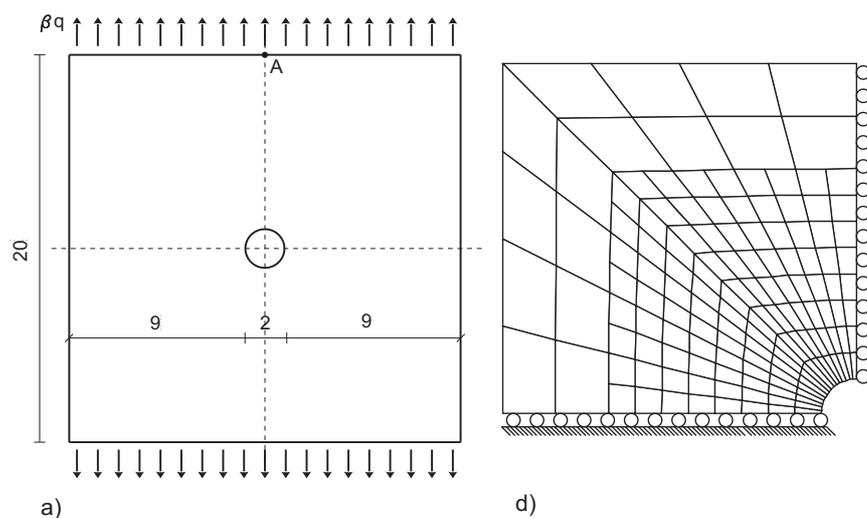


Fig. 5.3.3: Piastra sottile con foro circolare: a) descrizione geometrica; b) mesh adottata.

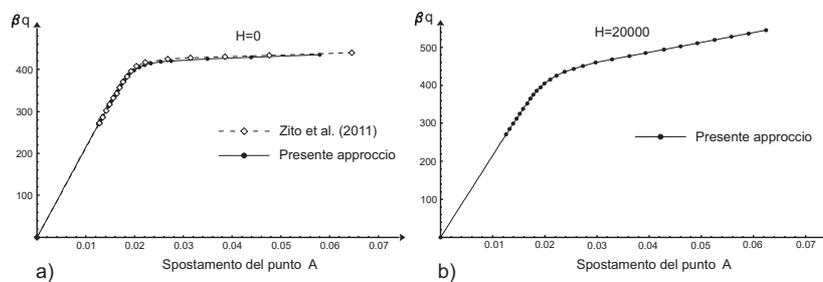


Fig. 5.3.4: Curva spostamenti-fattore di carico: a) plasticità ideale; b) hardening.

In Fig. 5.3.5 si mostra invece la convergenza delle due soluzioni N-R in termini di σ_y e Λ valutate nei punti di Gauss relative all'e-bem prossimo al foro, sempre nelle ipotesi di plasticità perfetta (Figure 5.3.5a,b), o *hardening* (Fig. 5.3.5c,d). In genere la soluzione necessita di poche iterazioni di N-R in tutti gli elementi bem, tre nel caso in esame.

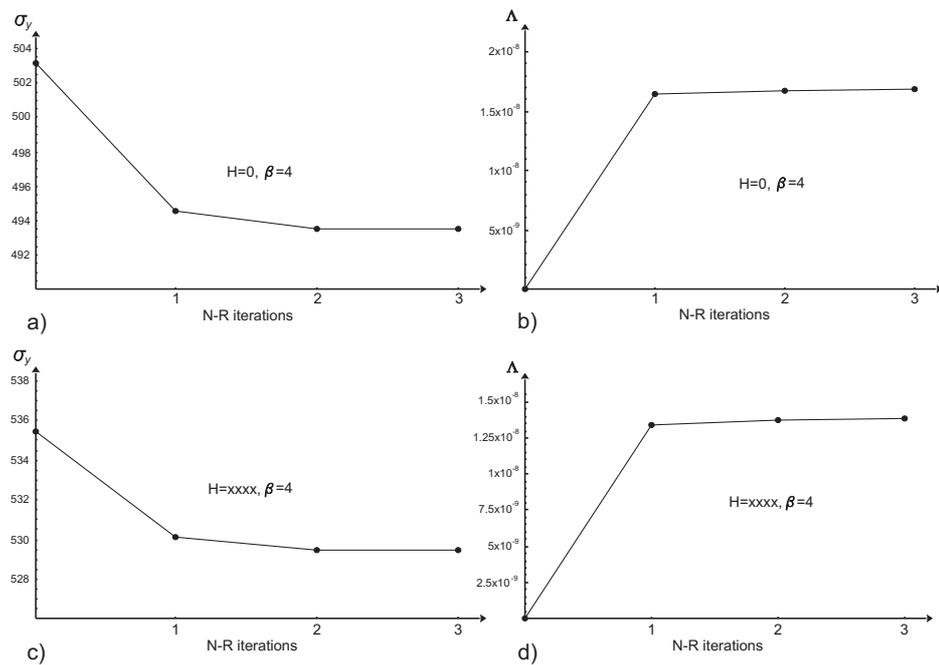


Fig. 5.3.5: Convergenza delle soluzioni di N-R: a,c) tensioni verticali; b,d) moltiplicatore plastico

5.4.3 Esempio 3. Piastre sottili con foro circolare e quadrato

In questo esempio sono state studiate due piastre sottili con foro circolare (Fig. 5.3.6a) e quadrato (Fig. 5.3.6b), . In questo caso è stata adottata una mesh costituita da 252 elementi bem a 8 nodi, anche in questo caso modellati linearmente (Fig. 5.3.3b). Il materiale di cui è costituito presenta le seguenti caratteristiche: modulo di Young $D = 210000$ MPa , coefficiente di Poisson $\nu = 0.3$, tensione di snervamento uniaassiale $\sigma_y = 200$ MPa , tolleranza $Tol=0.001$.

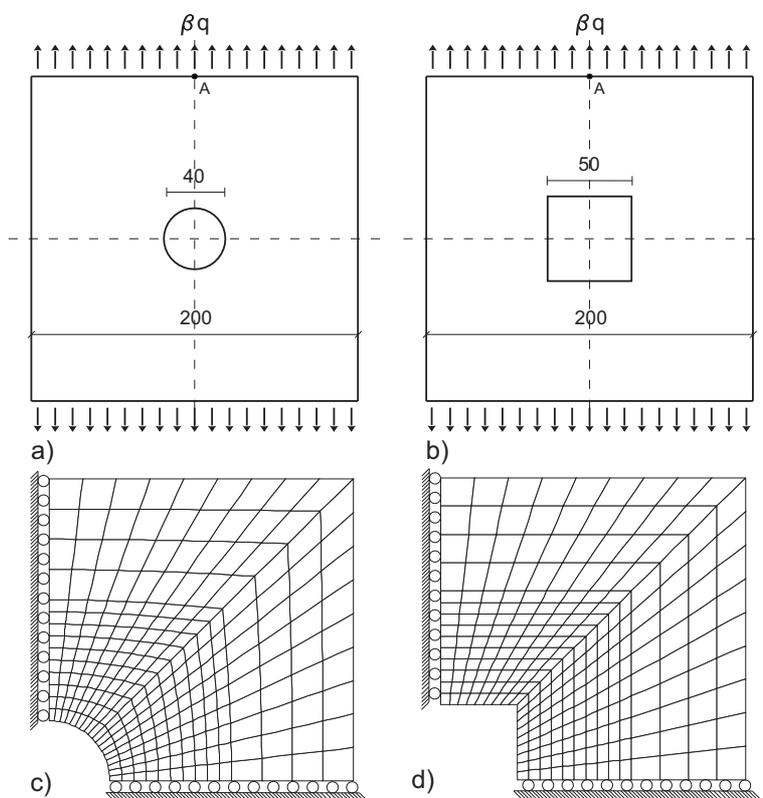


Fig. 5.3.6: Piastre sottili con foro circolare e quadrato: a,b) descrizione geometrica; c,d) mesh adottata.

Il moltiplicatore a collasso ottenuto è stato confrontato con le soluzioni numeriche (vd.Tab. 5.3.1), ricavate mediante l'approccio proposto nel paragrafo 5.1.4 ed altri metodi di analisi disponibili in letteratura (Borges et al., 1996; Zhang et al., 2002; Gaydon e Mc Crum, 1954; Belytshko e Hodge, 1970; Casciaro e Cascini, 1982).

	Metodi	$\beta q / \sigma_y$
Foro circolare	Exact (Gaydon and Mc Crum ,1954)	0.800
	Lower bound (Borges et al., 1996) 423 elementi	0.800
	SGBEM (Zhang et al., 2002) 128 elementi cella	0.801
	Lower bound (Borges et al., 1996) 113 elementi	0.801
	Casciaro and Cascini, 1982	0.803
	SGBEM - Present approach 252 elementi bem	0.805
Foro quadrato	Belytschko and Hodge, 1970	0.693
	SGBEM - Present approach 252 elementi bem	0.733
	SGBEM (Zhang et al., 2002) 128 elementi cella	0.747

Tab 5.3.1: Moltiplicatore a collasso ottenuto mediante analisi SGBEM per macro-zone attive e confrontato con altre formulazioni.

In Fig. 5.3.7a,b sono state riportate le curve carico-spostamento relative al punto A. I risultati sono stati confrontati con quelli ottenuti da Zhang et al. (2002) mediante approccio SGBEM.

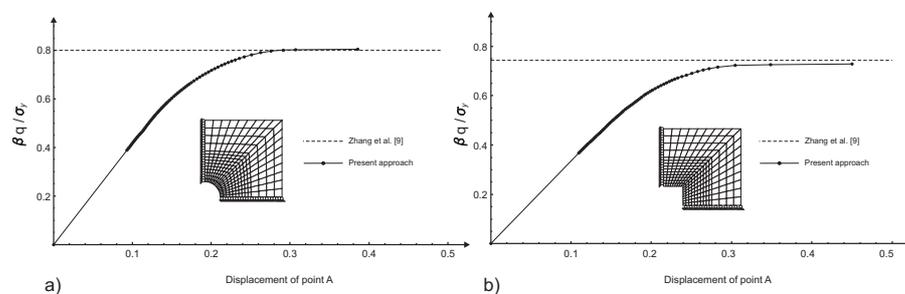


Fig. 5.3.7: Curve carico-spostamento.

5.4.4 Esempio 4. Cilindro cavo soggetto a pressione idrostatica

In questo esempio è stato considerato un cilindro, cavo e a parete spessa, soggetto a pressione idrostatica (Figure 4a). La discretizzazione adottata è costituita da 288 elementi bem (Figure 4b) a 8 nodi. Il materiale è caratterizzato da un modulo di Young pari a $D = 21000$ MPa e coefficiente di Poisson $\nu = 0.3$, tensione di snervamento $\sigma_y = 30$ MPa e valore di pressione iniziale $q = 1$ MPa. Il valore assegnato alla tolleranza è lo stesso dei casi precedenti.

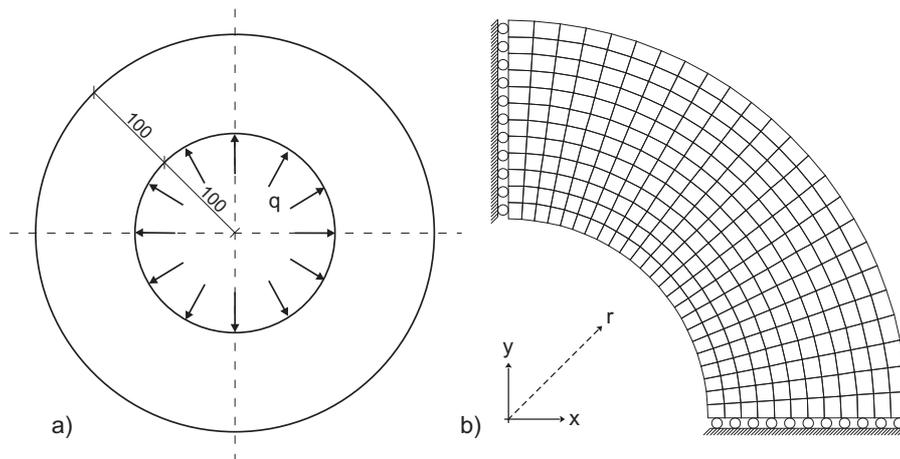


Fig. 5.3.8: Cilindro a parete sottile soggetto a pressione idrostatica: a) descrizione geometrica, b) mesh adottata.

La soluzione è stata ottenuta mediante analisi per singoli elementi bem e confrontata con i risultati di Gao and Davies (2000) nell'ambito dell'approccio per collocazione. In Fig. 5.3.9 si mostra il diagramma della pressione-spostamento radiale della faccia interna. La pressione che causa il collasso plastico della struttura vale $q = 21.26$ MPa .

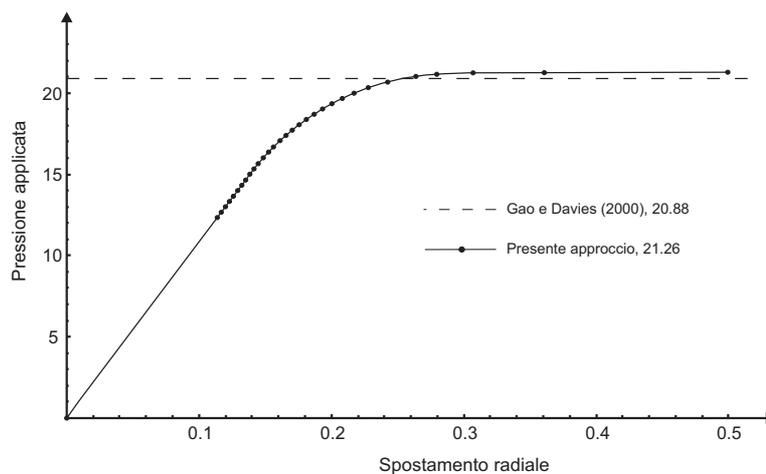


Fig. 5.3.9: Diagramma spostamenti-p pressione radiale.

In Figura 5.3.10a,b si mostra la distribuzione delle tensioni radiali e circonferenziali relative al valore di pressione $q = 18 \text{ MPa}$. Le curve in Fig. 5.3.11 rappresentano i valori degli spostamenti radiali al variare del carico.

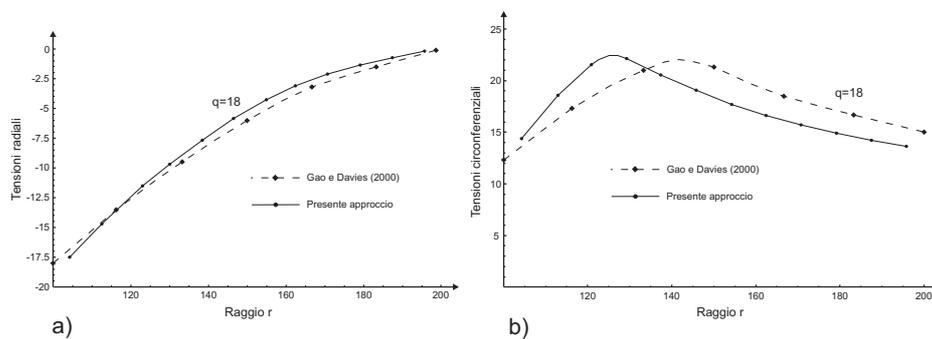


Fig. 5.3.10: Distribuzione delle tensioni radiali e circonferenziali relative al valore di pressione $q=18$.

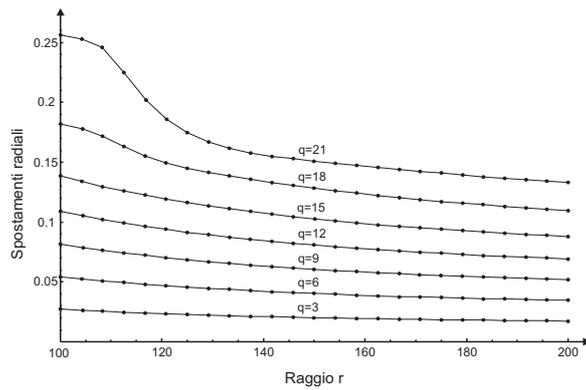


Fig. 5.3.11: Spostamento radiale in funzione del carico.

5.4.5 Esempio 5. Punch test su un anello a sezione a T

L'esempio che segue mostra uno dei principali vantaggi che offre l'utilizzo del SBEM, ovvero la possibilità di discretizzare il dominio solo parzialmente.

Si tratta di un punch test su un anello con sezione a T. Il materiale che lo costituisce è caratterizzato da modulo di Young $D = 210000$ MPa, coefficiente di Poisson $\nu = 0.29$, tensione di snervamento $\sigma_y = 200$ MPa e valore di pressione iniziale $q = 1$ MPa. Anche in questo caso il valore della tolleranza è pari a 0.001.

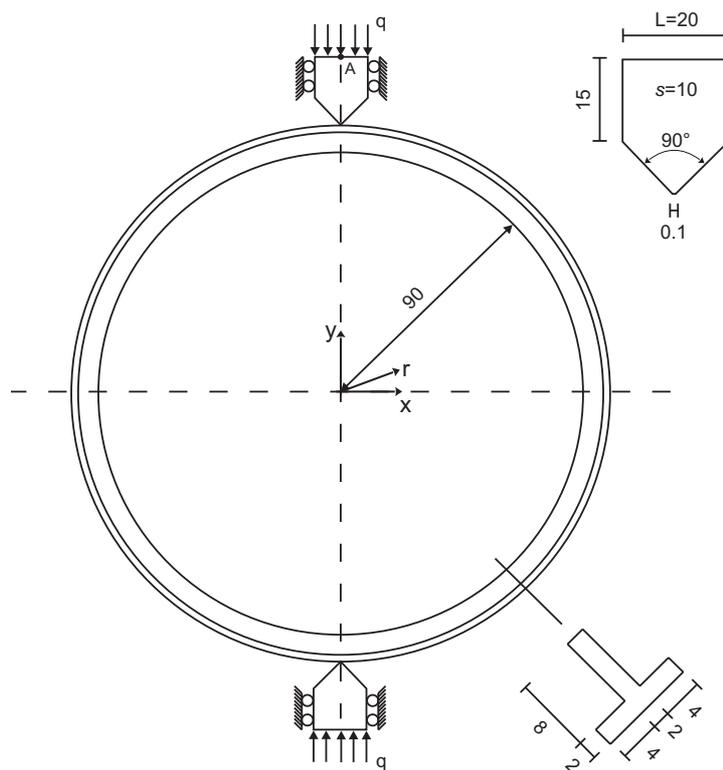


Fig. 5.3.12: Punch test su un anello a sezione a T: descrizione geometrica.

Per individuare le macro-zone attive è stata effettuata un'analisi elastoplastica preliminare, utilizzando una mesh di tentativo ottenuta discretizzando il dominio in 250 elementi bem lineari a 4 nodi (Figure 9a). Tale studio ha permesso di definire la mesh di analisi, costituita da 333 elementi bem lineari ad 8 nodi (Fig. 9b), caratterizzanti le due macro-zone attive, e due macroelementi a comportamento puramente elastico (Figure 5.3.13b).

In Fig. 5.3.14 si mostrano le curve caratteristiche carico-spostamento relative ai due tipi di mesh riferite al punto di controllo A. Rispetto alla analisi di tentativo caratterizzata da elementi bem a 4 nodi (Fig. 5.3.13a), che, come già è stato detto,

viene effettuata esclusivamente per individuare le macro-zone potenzialmente attive, quella di analisi, caratterizzata da elementi bem a 8 nodi, (Fig. 5.3.13b), pertanto meno rigida della precedente, mostra elevate prestazioni in quanto riesce a descrivere perfettamente il comportamento della struttura durante il collasso plastico coerentemente alla legge costitutiva adottata.

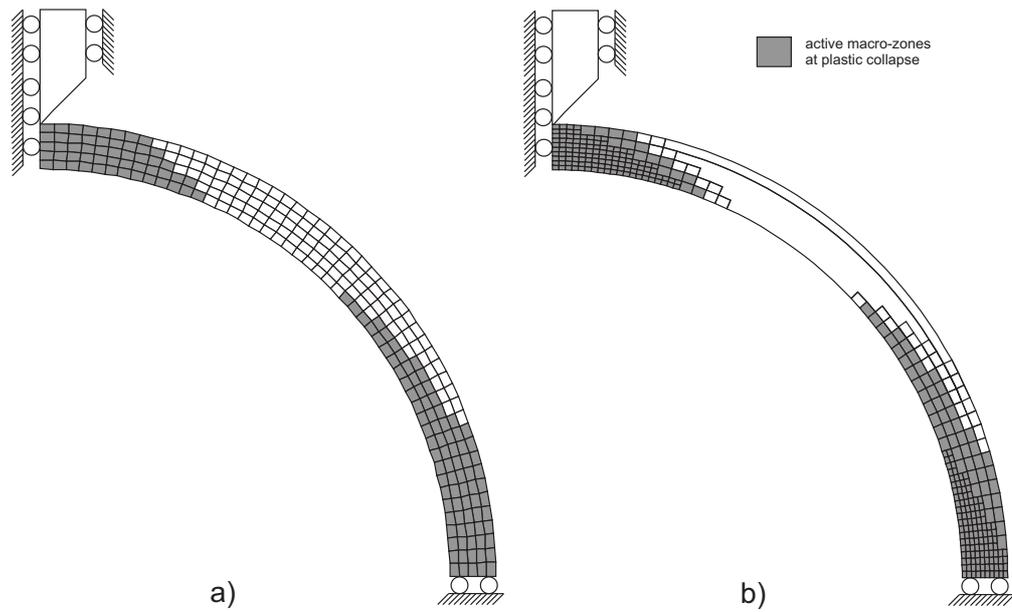


Fig. 5.3.13: a) mesh di tentativo, b) mesh di analisi.

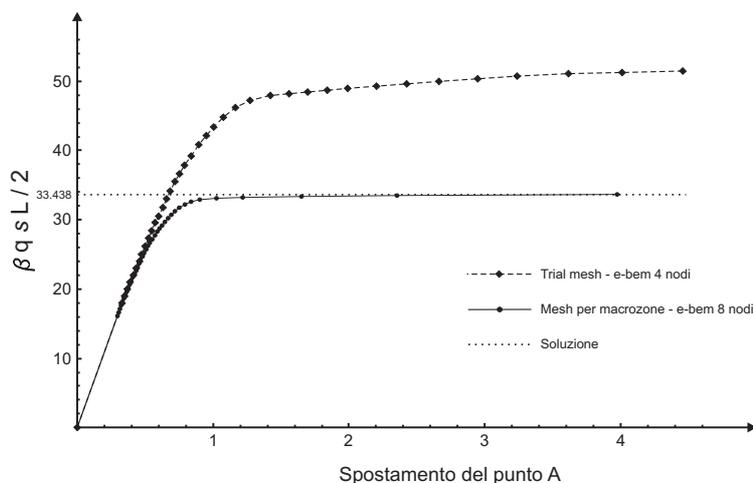


Fig. 5.3.14: Curve carico-spostamento.

In Fig.5.3.15 si mostrano le distribuzioni delle tensioni relative alla sezione verticale $\sigma_x(r)$ (Fig. 5.3.15a) e a quella orizzontale $\sigma_y(r)$ (Fig. 5.3.15b) per differenti incrementi di carico. In particolare mostra il fenomeno della formazione delle due cerniere plastiche che porta la struttura al collasso. La distribuzione delle tensioni viene valutata sui punti di Gauss di ciascun e-bem connesso al vincolo.

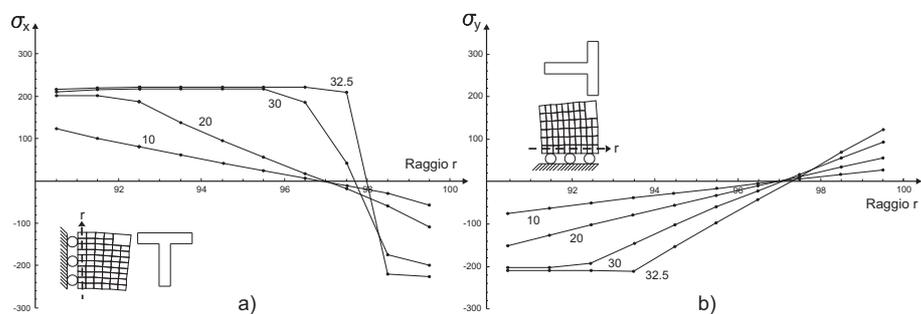


Fig. 5.3.15: Distribuzioni di tensioni al variare del carico: a) $\sigma_x(r)$ nelle sezione verticale. b) $\sigma_y(r)$ nella sezione orizzontale.

5.4.6 Esempio 6. Telaio piano su suolo non omogeneo

In questo esempio è stato preso in esame un telaio piano a comportamento elastoplastico, caratterizzato da una sezione a doppio T e appoggiato su suolo non omogeneo a zone. Le caratteristiche geometriche e materiali della struttura sono mostrati in Fig.5.3.16. Sull'intera superficie della trave è stato imposto un carico con valore iniziale pari a 0.1Mpa ed è stato assunto lo stesso valore di tolleranza degli esempi precedenti. La struttura analizzata è costituita da un telaio in acciaio, due plinti in calcestruzzo e due differenti tipologie di suolo aventi un rapporto dei moduli elastici pari a 25.

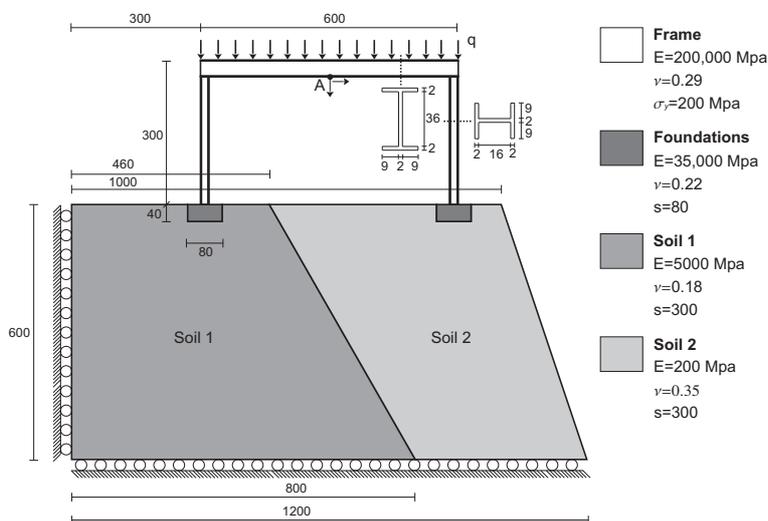


Fig. 5.3.16: Telaio appoggiato su suolo non omogeneo: descrizione geometrica.

Nel test è stata effettuata una prima analisi preliminare puramente elastica dell'intera struttura mediante la procedura sviluppata in Panzeca et al. (2002-a,b). Essa consente di individuare lo stato di tensione relativo al valore di carico iniziale,

localizzare le zone potenzialmente coinvolte dall'azione delle deformazioni plastiche e scegliere la mesh di analisi che, nel caso del telaio esaminato, è riportata in Fig. 5.3.17. E' importante sottolineare che, per definire la mesh ottimale sono sufficienti uno o al massimo due tentativi. Questa strategia consente di localizzare le macrozone potenzialmente attive che conducono al collasso la struttura, servendosi di una indagine sul comportamento elastico che suggerisce il range della zona da discretizzare. La mesh scelta viene poi verificata mediante analisi elasto-plastica e, se ritenuta insufficiente, ne viene ampliato il range. In Fig. 5.3.17 le macrozone attive sono state evidenziate mediante campitura grigia. La strategia offre il vantaggio di studiare la restante parte della struttura come macro-elemento a comportamento puramente elastico, quindi governata da variabili di solo contorno. Ciò comporta una notevole riduzione degli oneri computazionali.

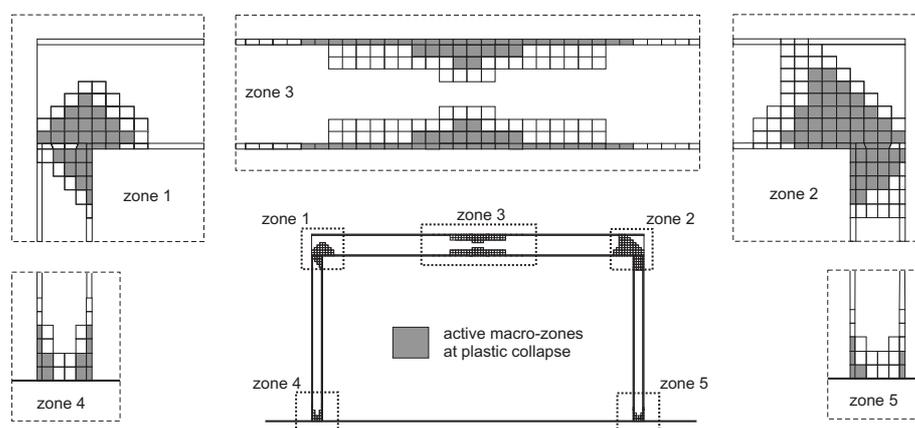


Fig. 5.3.17: Mesh adottata.

La Fig.5.3.18 mostra il diagramma carico- spostamenti relativo al punto medio A del telaio e il valore del moltiplicatore a collasso plastico. In particolare, le curve rappresentano gli spostamenti verticali e orizzontali durante l'intero processo di carico.

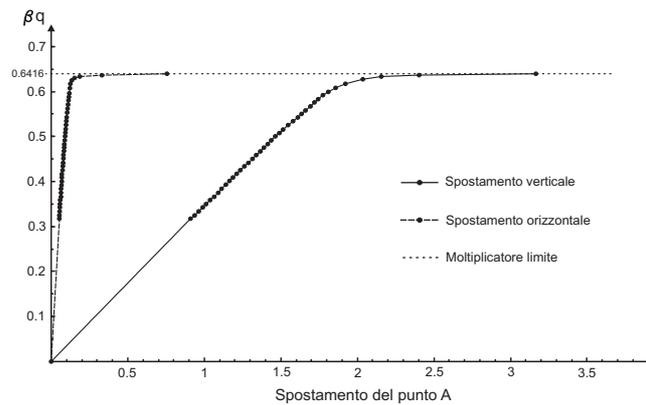


Fig. 5.3.18: Curve carico-spostamenti verticale e orizzontale del punto A.

In Fig. 5.3.19 si mostrano la configurazione deformata a collasso e le distribuzioni delle tensioni sul suolo valutate a quote differenti. In Fig. 5.3.19c,d sono invece riportate le mappature delle tensioni principali di compressione. La prima riguarda lo stato di sforzo (Fig.5.3.19c) relativa al carico iniziale $\beta q = 0.1$, mentre la seconda (Fig.5.3.19d) lo stato di sforzo relativo al carico finale $\beta q = 0.6414$.

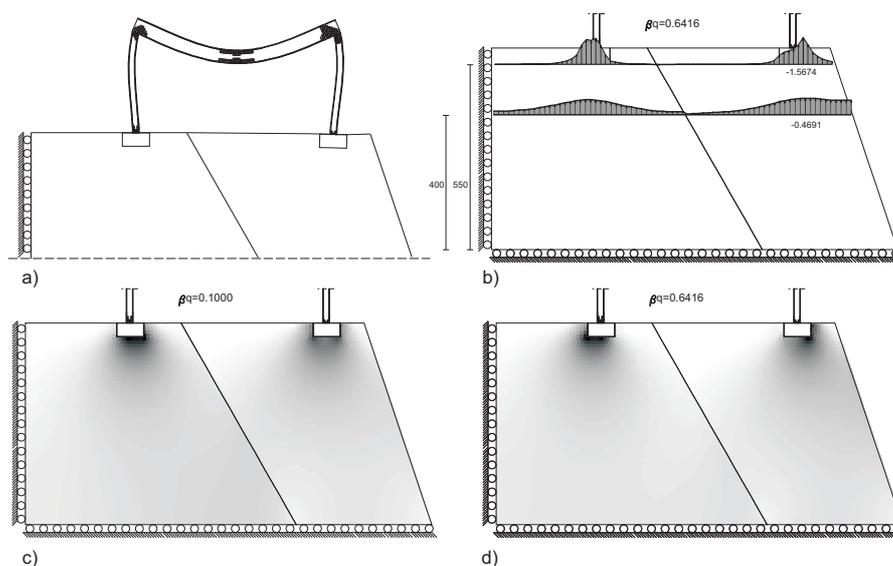


Fig. 5.3.19: a) configurazione deformata a collasso plastico; b) distribuzione delle tensioni a collasso plastico; c,d) mappatura delle tensioni principali

Dal confronto delle due mappature si può facilmente apprezzare la variazione della distribuzione delle tensioni dovuta al verificarsi del fenomeno di accumulo plastico. Inoltre, anche in questo caso, la possibilità di discretizzare solamente alcune zone del dominio, ovvero quelle potenzialmente soggette all'accumulo delle deformazioni plastiche, ha consentito di studiare la restante parte della struttura come macro-elemento elastico, governato dalle sole grandezze associate al contorno, con un notevole risparmio nel numero delle variabili.

5.5 Conclusioni

L'applicazione del SBEM a problemi di tipo *multidomain* ha consentito di sviluppare una strategia per l'analisi elastoplastica caratterizzata da alcuni

interessanti aspetti. Innanzitutto l'approccio offre la possibilità di esaminare solidi non omogenei e strutture complesse, ovvero derivate dall'assemblaggio di elementi con caratteristiche fisiche e geometriche differenti. A questo vantaggio si unisce quello derivante dalla possibilità di valutare di tutti i coefficienti in forma chiusa e di utilizzare mesh circoscritte alle zone di potenziale accumulo delle deformazioni plastiche, studiando il resto del dominio come unico macroelemento a comportamento puramente elastico.

Un altro aspetto importante, che contribuisce a rendere la strategia estremamente vantaggiosa e competitiva, deriva dall'utilizzo dell'equazione delle autotensioni per la valutazione dei *predictors* e della risposta elastoplastica di fine passo. L'algoritmo sviluppato si serve della suddetta equazione per la simultanea correzione della soluzione elastica in tutti gli elementi bem plasticamente attivi nel medesimo passo di carico, garantendo una risposta direttamente non locale e consentendo l'aggiornamento delle variabili nodali solamente a fine passo di carico.

L'implementazione della procedura all'interno del codice di calcolo Karnak.sGbem (Cucco et al., 2002), ha consentito di effettuare diversi test numerici. Il confronto dei risultati ottenuti con quelli disponibili in letteratura, ne ha poi comprovato l'elevato livello prestazionale.

Capitolo 6

Analisi a shakedown

L'approccio statico per l'analisi a shakedown e per l'analisi limite, che può intendersi come caso particolare dell'analisi a shakedown, costituisce uno strumento robusto in grado di fornire direttamente, mediante tecniche di programmazione matematica, la condizione di sicurezza strutturale. Infatti per tutti quei problemi di ingegneria, che non necessitano di informazioni sulla storia delle tensioni e delle deformazioni, tale approccio risulta più vantaggioso rispetto all'analisi elastoplastica incrementale, in quanto consente di valutare direttamente il moltiplicatore limite con un notevole risparmio in termini di costi computazionali.

In questo capitolo si mostrerà una riformulazione del teorema statico mediante il SBEM per problemi di tipo *multidomain* (Panzeca et al. 2002a-b) La trattazione sarà presentata relativamente al caso più generale (analisi a shakedown), mostrando in seguito come, mediante opportune semplificazioni, la stessa può essere facilmente riferita anche al suo caso particolare, ovvero per singola condizione di carico (analisi limite).

L'analisi è stata sviluppata accoppiando una procedura *multidomain* SBEM a metodi di programmazione matematica per problemi di ottimizzazione non lineare vincolata.

Si mostrerà primo approccio in cui tale problema è stato trasformato nella forma canonica di un problema di ottimizzazione conico quadratica (CQO), in termini di variabili discrete, e implementato accoppiando il codice di calcolo Karnak.sGbem al toolbox di ottimizzazione di Matlab 7.6.0. Successivamente, in un secondo

approccio, il problema CQO viene ritrasformato nella forma canonica di un problema di Programmazione Semi-Definita (SDP), mediante l'utilizzo del metodo dei moltiplicatori di Lagrange. In questa ultima forma è stato implementato accoppiando Karnak.sGbem a SeDuMi, un toolbox open source di Matlab.

Infine si mostreranno alcuni test numerici nei quali il moltiplicatore limite, ottenuto mediante approccio diretto, è stato confrontato con i risultati ottenuti mediante analisi incrementale via SBEM e con quelli disponibili in letteratura. Le applicazioni mostrano il grande vantaggio computazionale che deriva dalla possibilità effettuare la discretizzazione solamente delle zone coinvolte dal fenomeno di accumulo delle deformazioni plastiche, consentendo di lasciare come macroelemento a comportamento elastico, governato dalle sole variabili associate al contorno, la restante parte. Ciò si traduce in una notevole riduzione del numero delle variabili, uno dei principali obiettivi perseguito in problemi di programmazione come questo da diversi autori (Sloan, 1988; Zhang et. al., 2002; Chen et al., 2008).

6.1 Teorema di Melan e approccio statico mediante SBEM

Al fine di calcolare direttamente il fattore di sicurezza a shakedown in termini di variabili discrete il teorema statico è stato riformulato mediante l'approccio *multidomain* del SBEM. Nell'ipotesi di funzione di snervamento di von Mises, convessa e quadratica, il teorema statico conduce ad un problema di ottimizzazione di una funzione obiettivo lineare soggetta a vincoli quadratici.

L'approccio che si presenta accoppia il Multidomain SBEM a tecniche di ottimizzazione non lineare, e utilizza l'equazione (2.2.17) per definire il campo di tensioni autoequilibrate, vincolo del problema di ottimizzazione del teorema statico classico.

In accordo con quest'ultimo, la condizione di sicurezza per la struttura, ovvero uno stato di tensione che soddisfa la condizione di ammissibilità plastica è garantita dal soddisfacimento della seguente disuguaglianza:

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}_{ij}) \leq 0 \quad \forall i \text{ e } \forall j \quad (6.1.1)$$

con $i=1 \dots n$ carichi base, $j=1 \dots m$ elementi bem, e dove:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}^e + \boldsymbol{\sigma}_j^p \quad (6.1.2)$$

L'equazione precedente, analoga alla eq.(2.2.17), rappresenta la tensione totale come somma del vettore delle tensioni elastiche $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}^e$, risposta elastica al i -esimo carico base, valutata nel j -esimo e-bem e del vettore delle autotensioni $\boldsymbol{\sigma}_j^p$, essendo quest'ultimo funzione delle deformazioni plastiche \mathbf{p} attraverso la seguente relazione:

$$\boldsymbol{\sigma}^p = \mathbf{Z}\mathbf{p} \quad (6.1.3)$$

L'eq. (6.1.3) è la stessa equazione delle autotensioni utilizzata nell'analisi elastoplastica e rappresenta una condizione di auto-equilibrio del teorema statico dello shakedown, in termini di variabili discrete.

Dunque considerando le eq. (6.1.1-6.1.3) il problema di ottimizzazione può essere riscritto come segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{sh} = \max_{(\beta, \mathbf{p})} \beta: \\ \text{s.t. :} \\ \mathbf{F}(\beta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i^e + \mathbf{Z}\mathbf{p}) \leq \mathbf{0} \\ \forall i = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (6.1.4)$$

dove β_{sh} rappresenta il massimo dei moltiplicatori di carico β per i quali la struttura si adatta. In forma esplicita si avrà:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{sh} = \max_{(\beta, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m)} \beta: \\ \text{s.t. :} \\ F_1 (\beta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{i1}^e + \mathbf{Z}_{11} \mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{Z}_{1m} \mathbf{p}_m) \leq 0 \\ \vdots \\ F_m (\beta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{im}^e + \mathbf{Z}_{m1} \mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{Z}_{mm} \mathbf{p}_m) \leq 0 \end{array} \right. \quad (6.1.5)$$

La sostituzione della eq.(6.1.3) nella eq. (6.1.2), nell'ipotesi di funzione di snervamento di von Mises, scritta nella forma (4.1.5), conducono ad un classico problema di ottimizzazione vincolata di una funzione obiettivo lineare soggetta ai soli vincoli quadratici:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{sh} = \max_{(\beta, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m)} \beta: \\ \text{s.t. :} \\ \frac{1}{2} (\beta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{i1}^e + \mathbf{Z}_{11} \mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{Z}_{1m} \mathbf{p}_m)^T \mathbf{M} (\beta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{i1}^e + \mathbf{Z}_{11} \mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{Z}_{1m} \mathbf{p}_m) - \sigma_{y1}^2 \leq 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{2} (\beta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{im}^e + \mathbf{Z}_{m1} \mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{Z}_{mm} \mathbf{p}_m)^T \mathbf{M} (\beta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{im}^e + \mathbf{Z}_{m1} \mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{Z}_{mm} \mathbf{p}_m) - \sigma_{ym}^2 \leq 0 \end{array} \right. \quad (6.1.6)$$

Nel caso di $n=1$ il teorema dello shakedown è noto come teorema del lower bound e la condizione di sicurezza (6.1.1) e l'approccio statico (6.1.6) risultano notevolmente semplificati.

6.2 Ottimizzazione Conica Quadratica (CQO)

Si consideri il problema di ottimizzazione non lineare vincolata, ricavato nel capitolo precedente nella sua forma classica:

$$\begin{cases} \min_{(\mathbf{y})} & f(\mathbf{y}) : \\ \text{s.t.} & \\ & \mathbf{g}_i(\mathbf{y}) \leq 0 \\ & \mathbf{y} \in \mathbf{Y} \end{cases} \quad (6.2.1)$$

dove la funzione obiettivo f , risulta soggetta al vincolo quadratico di disuguaglianza costituito da ciascuna condizione $\mathbf{g}_i(\mathbf{y}) \leq 0$ con $i = 1, \dots, n_g$.

Un vettore $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, tale da soddisfare tutte le condizioni di vincolo rappresenta una soluzione ammissibile del problema (6.2.1), mentre l'insieme di tali punti costituisce una regione ammissibile \mathbf{Y} . Il problema di programmazione non lineare (NLP), dunque, consisterà nel determinare una soluzione ammissibile \mathbf{y}^* tale che $f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{y}^*)$ per ciascuna soluzione ammissibile \mathbf{y} .

Il problema precedente in questa tesi è stato riformulato nella forma canonica di un problema di Ottimizzazione Conica Quadratica (CQO):

$$\begin{cases} \min_{(\mathbf{y})} & f(\mathbf{y}) : \\ \text{s.t.} & \\ & \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y} \leq 0 \end{cases} \quad (6.2.2)$$

dove \mathbf{B} è una matrice di costanti positiva e simmetrica e \mathbf{y} il vettore delle incognite.

La forma (6.2.2) può essere facilmente ricavata raggruppando nella matrice \mathbf{B} tutti i termini costanti della (6.1.6) o (6.1.8).

In particolare, per il j -esimo e-bem e la i -esima condizione di carico:

$$F_{ij} = \underbrace{\left[\beta \mathbf{p}_1^T \dots \mathbf{p}_m^T \right]}_{\mathbf{y}^T} \underbrace{\left[\hat{\mathbf{g}}_i^c \mathbf{Z}_{i1} \dots \mathbf{Z}_{im} \right]^T \frac{M}{2\sigma_y^2} \hat{\mathbf{g}}_i^c \mathbf{Z}_{i1} \dots \mathbf{Z}_{im}}_{\mathbf{B}_i} \underbrace{\left[\beta \mathbf{p}_1^T \dots \mathbf{p}_m^T \right]}_{\mathbf{y}} - 1 \leq 0 \quad (6.2.3)$$

ed in forma compatta:

$$F_{ij} = \mathbf{y}^T \mathbf{B}_{ij} \mathbf{y} - 1 \leq 0 \quad (6.2.4)$$

Il problema dello shakedown (6.1.6) può essere riscritto come segue:

$$\begin{cases} \min_{(\mathbf{y})} & \mathbf{c}^T \mathbf{y} \\ \text{s.t.:} & \\ & \mathbf{y}^T \mathbf{B}_1 \mathbf{y} - 1 \leq 0 \quad k=1, \dots, m \cdot n \\ & \vdots \\ & \mathbf{y}^T \mathbf{B}_k \mathbf{y} - 1 \leq 0 \end{cases} \quad (6.2.5)$$

avendo posto $\mathbf{c}^T = [-1 \ 0 \ \dots \ 0]$.

Il problema (6.2.5) è stato implementato utilizzando il codice di calcolo Karnak.sGbem accoppiato con un toolbox di Matlab 7.6.0.

Anche in questa strategia l'approccio *multidomain* SBEM ha permesso di ridurre le dimensioni del problema consentendo di introdurre la discretizzazione parziale del dominio, ovvero della zona di potenziale accumulo delle deformazioni plastiche. Il resto della struttura viene invece studiato come macroelemento elastico governato dalle sole variabili di contorno. Tale aspetto rende l'approccio estremamente vantaggioso.

6.3 La Programmazione Semi-Definita (SDP)

In questo paragrafo si mostra un secondo approccio che consente di determinare la stessa condizione di sicurezza fornita dal CQO, ma come soluzione di un problema di Programmazione Semi-Definita (SDP). A tale scopo ci si serve del concetto di dualità che consente di trasformare il problema originario, cosiddetto primale, in una forma computazionalmente conveniente, detta duale.

Nel problema duale le variabili possono interpretarsi come moltiplicatori di Lagrange e nella soluzione assumono il valore λ^* associato alla soluzione primale y^* del problema (6.2.1). Si tratterà di risolvere un problema di programmazione quadratica nei moltiplicatori λ , ma soggetto unicamente alle condizioni $\lambda \geq \mathbf{0}$ e pertanto generalmente più semplice. Nota la soluzione duale λ^* , la soluzione primale y^* può essere facilmente ricavata mediante le condizioni di stazionarietà.

6.3.1 Dal CQO al SDP

Al fine di trasformare il problema CQO (6.2.5) nella forma canonica di un problema SDP, si introduca il valore nominale y_0 . Il problema CQO può essere riscritto come segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{y=[\beta_{sh}, p_i]^T} \quad -(\mathbf{y} + \mathbf{y}_0)^T \mathbf{A} (\mathbf{y} + \mathbf{y}_0)^T = -\beta^2 \\ \text{s.t.:} \\ \mathbf{y}^T \mathbf{B}_i \mathbf{y} - 1 \leq \mathbf{0} \quad i=1, \dots, k \quad \text{con } k = m \cdot n \end{array} \right. \quad (6.3.1)$$

$$\text{con } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1 \times 3m} & \mathbf{0}_{1 \times 3m} \\ \mathbf{0}_{3m \times 1} & \mathbf{0}_{3m \times 3m} & \mathbf{0}_{3m \times 3m} \\ \mathbf{0}_{3m \times 1} & \mathbf{0}_{3m \times 3m} & \mathbf{0}_{3m \times 3m} \end{pmatrix} \quad (6.3.2)$$

Si proceda con il metodo classico dei moltiplicatori di Lagrange introducendo per il j-esimo e-bem la funzione Lagrangiana:

$$L(\mathbf{y} : \lambda) = -(\mathbf{y} + \mathbf{y}_0)^T \mathbf{A} (\mathbf{y} + \mathbf{y}_0)^T + \lambda (\mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y} - 1), \quad (6.3.3)$$

ottenuta sommando alla funzione obiettivo corretta di segno, affinché il problema originario si trasformi in un problema di minimo, una combinazione lineare dei

vincoli utilizzando come coefficienti delle variabili λ (Lagrangiane) incognite e condizionate nel segno, $\lambda \geq 0$, perché associate a vincoli di disuguaglianza del tipo, ≤ 0 quali sono le condizioni di plasticità. L'introduzione di tali variabili è servita a trasformare il problema di massimo condizionato in un problema di stazionarietà senza vincoli (tranne quello di segno su λ), relativo alla funzione obiettivo allargata. In effetti L possiede, nel punto di stazionarietà, un punto sella, nel senso che essa è minima rispetto alle variabili "primali" \mathbf{y} del problema (...), ma un "massimo" rispetto alle variabili duali λ . Dando a tutte le variabili variazioni libere, risulta:

$$\Delta_{\mathbf{y}}L(\mathbf{y} : \lambda) = -2\mathbf{A}(\mathbf{y} + \mathbf{y}_0) + 2\lambda\mathbf{B}\mathbf{y}$$

$$\Delta_{\lambda}L(\mathbf{y} : \lambda) = (\mathbf{y}^T\mathbf{B}\mathbf{y} - 1)\lambda$$

e dovendo essere $\Delta L \leq 0$ per qualunque scelta delle variabili duali e $\Delta L \geq 0$ per qualunque scelta delle variabili primali, si ha:

$$\mathbf{y}^T\mathbf{B}\mathbf{y} - 1 \leq 0$$

e

$$\lambda \geq 0$$

La (6.3.3) può essere riscritta come:

$$L(\mathbf{y} : \lambda) = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\mathbf{A} & -\mathbf{y}_0\mathbf{A} \\ -\mathbf{y}_0^T\mathbf{A} & -\mathbf{y}_0^T\mathbf{A}\mathbf{y}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \lambda\mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.3.5)$$

Si introduca, a questo punto, la funzione q , duale di quella Lagrangiana L , definita per λ :

$$q(\lambda) = \inf L(\mathbf{y} : \lambda) = \inf \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\mathbf{A} + \lambda \mathbf{B} & -\mathbf{y}_0 \mathbf{A} \\ -\mathbf{y}_0^T \mathbf{A} & -\mathbf{y}_0^T \mathbf{A} \mathbf{y}_0 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.3.6)$$

E' noto che l' $\inf L(\mathbf{y} : \lambda)$ è equivalente, nel senso dello stesso valore ottimale, a:

$$\begin{cases} \sup_t t \\ \text{s.t.} \\ L(\mathbf{y} : \lambda) - t \geq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (6.3.7)$$

avendo introdotto la variabile ausiliaria t .

Nel precedente problema la condizione di vincolo

$$L(\mathbf{y} : \lambda) - t \geq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad (6.3.8)$$

è equivalente a:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\mathbf{A} + \lambda \mathbf{B} & -\mathbf{y}_0 \mathbf{A} \\ -\mathbf{y}_0^T \mathbf{A} & -\mathbf{y}_0^T \mathbf{A} \mathbf{y}_0 - \lambda - t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad (6.3.9)$$

e quindi:

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{A} + \lambda \mathbf{B} & -\mathbf{y}_0 \mathbf{A} \\ -\mathbf{y}_0^T \mathbf{A} & -\mathbf{y}_0^T \mathbf{A} \mathbf{y}_0 - \lambda - t \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (6.3.10)$$

Pertanto la forma equivalente, nel senso dello stesso valore ottimale, di $L(\mathbf{y} : \lambda)$ in (6.3.6) può essere scritta come:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_t t \\ \text{s.t.} \\ \mathbf{G}(\lambda, t) \equiv \begin{pmatrix} -\mathbf{A} + \lambda \mathbf{B} & -\mathbf{y}_0 \mathbf{A} \\ -\mathbf{y}_0^T \mathbf{A} & -\mathbf{y}_0^T \mathbf{A} \mathbf{y}_0 - \lambda - t \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (6.3.11)$$

Il problema duale di (6.3.1):

$$\sup_{\lambda \geq 0} \inf_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} L(\mathbf{y} : \lambda) = \sup_{\lambda \geq 0} \sup_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ \mathbf{G}(\lambda, t) \geq \mathbf{0}}} t = \sup_{\substack{\lambda \geq 0, t \in \mathbb{R} \\ \mathbf{G}(\lambda, t) \geq \mathbf{0}}} t \quad (6.3.12)$$

può essere riscritto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\lambda \geq 0} t \\ \text{s.t.} \\ \mathbf{G}(\lambda, t) \equiv \begin{pmatrix} -\mathbf{A} + \lambda \mathbf{B} & -\mathbf{y}_0 \mathbf{A} \\ -\mathbf{y}_0^T \mathbf{A} & -\mathbf{y}_0^T \mathbf{A} \mathbf{y}_0 - \lambda - t \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (6.3.13)$$

Il sistema (6.3.1) è la forma canonica di un problema lineare convesso SDP che può essere risolto utilizzando diversi algoritmi basati sulla ottimizzazione globale. Per tutti gli elementi bem si avrà:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\lambda_i \geq 0} t \\ \text{s.t.} \\ \mathbf{G}(\lambda, t) \equiv \begin{pmatrix} -\mathbf{A} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{B}_i & -\mathbf{A} \mathbf{y}_0 \\ -\mathbf{y}_0^T \mathbf{A} & -\mathbf{y}_0^T \mathbf{A} \mathbf{y}_0 - \sum_{i=1}^k \lambda_i - t \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (6.3.14)$$

6.3.2 Implementazione mediante SeDuMi

Il problema precedentemente introdotto è stato implementato accoppiando Karnak.sGbem con SeDuMi, un toolbox open source di Matlab. Questa operazione ha richiesto le alcune manipolazioni al fine di ottenere la seguente forma:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t.} & \\ & \tilde{\mathbf{F}}_0 + x_1 \tilde{\mathbf{F}}_1 + \dots + x_p \tilde{\mathbf{F}}_p \geq 0 \end{cases} \quad (6.3.15)$$

dove $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p]^T$ $p=(m*n)+1$

Ponendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad \text{con } \mathbf{c} = [0 \ 0 \ \dots \ 0_{p-1} \ -1]^T \\ \mathbf{F}_0 = \begin{pmatrix} -\mathbf{A} & -\mathbf{A}\mathbf{y}_0 \\ -\mathbf{y}_0^T \mathbf{A} & -\mathbf{y}_0^T \mathbf{A}\mathbf{y}_0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F}_p = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & -1 \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (6.3.16)$$

e imponendo la seguente condizione di vincolo:

$$\lambda_i \geq 0$$

si ottiene il vettore delle incognite duali:

$$\mathbf{x}^T = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_{p-1} \ t] \quad (6.3.17)$$

dal quale è possibile ricavare mediante le condizioni di stazionarietà (6.3.4a):

$$-2\mathbf{A}(\mathbf{y} + \mathbf{y}_0) + 2\lambda\mathbf{B}\mathbf{y} = 0 \quad (6.3.18a)$$

$$\mathbf{y} = (-2\mathbf{A} + 2\lambda\mathbf{B})^{-1} 2\mathbf{A}\mathbf{y}_0 \quad (6.3.18b)$$

il vettore delle variabili primali:

$$\mathbf{y}^T = [\beta, \mathbf{p}_i] \quad (6.3.19)$$

6.4. Risultati numerici

Al fine di mostrare l'efficienza dei metodi mostrati sono stati effettuati alcuni test numerici nelle seguenti ipotesi: stati piani di deformazione, elastoplasticità perfetta funzione di snervamento di von Mises e legge di flusso associata.

Nelle applicazioni, di seguito riportate, è stato utilizzato il Sistema Internazionale di misura (S.I), pertanto le tensioni sono espresse in MPa, la geometria e gli spostamenti in mm.

6.4.1 Esempio 1. Analisi limite. Piastra sottile quadrata con foro circolare

La piastra considerata (Fig.6.1a), sottoposta ad un carico uniforme q è stata discretizzata in 144 elementi bem ad otto nodi (Fig.6.1b), governati da quantità di contorno modellate linearmente. Le caratteristiche del materiale sono le seguenti: modulo di Young $E = 206700 \text{ MPa}$, coefficiente di Poisson $\nu = 0.29$ e valore assiale dello snervamento $\sigma_y = 450 \text{ MPa}$.

Il moltiplicatore limite ottenuto risolvendo un problema CQO è stato confrontato con la soluzione numerica ottenuta mediante l'analisi elastoplastica iterativa proposta nel Cap.5, e altri metodi, sia incrementali che diretti disponibili in letteratura (Zito et al. 2011.). Sia mediante analisi diretta che incrementale l'approccio SBEM mostra, rispetto ad altri metodi di analisi, il vantaggio di operare con un numero ridotto di variabili garantendo accuratezza della soluzione. Tali vantaggi derivano dal rispetto delle condizioni di equilibrio e compatibilità all'interno di ciascun e-bem, dovuto all'uso delle soluzioni fondamentali nel processo di analisi. L'analisi lower bound ha fornito direttamente e rapidamente il fattore di sicurezza limite, mentre gli approcci incrementali hanno restituito, oltre al valore del moltiplicatore limite anche la curva carico-spostamenti, ma con maggior onere computazionale.

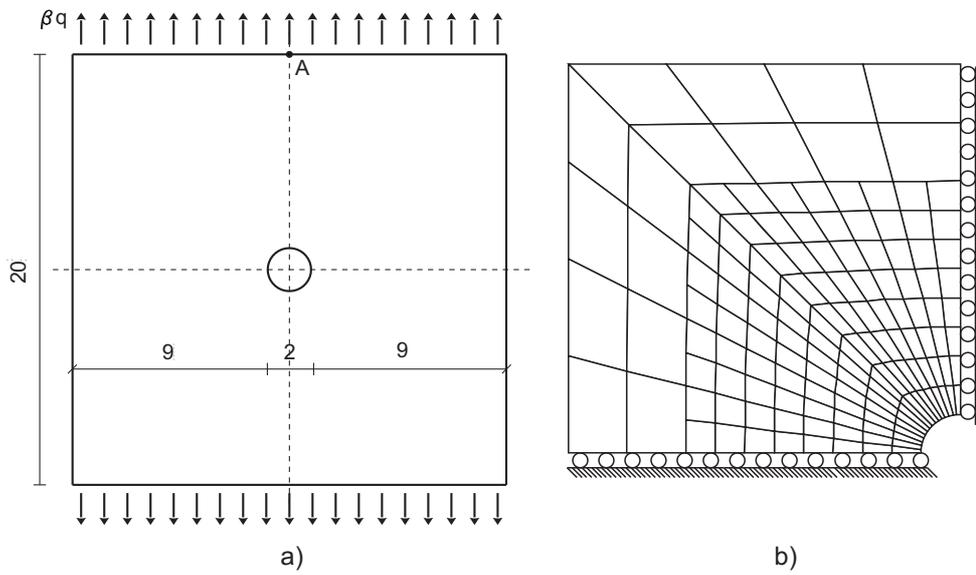


Fig. 6.1: Piastra quadrata con foro circolare: a) descrizione geometrica; b) mesh adottata.

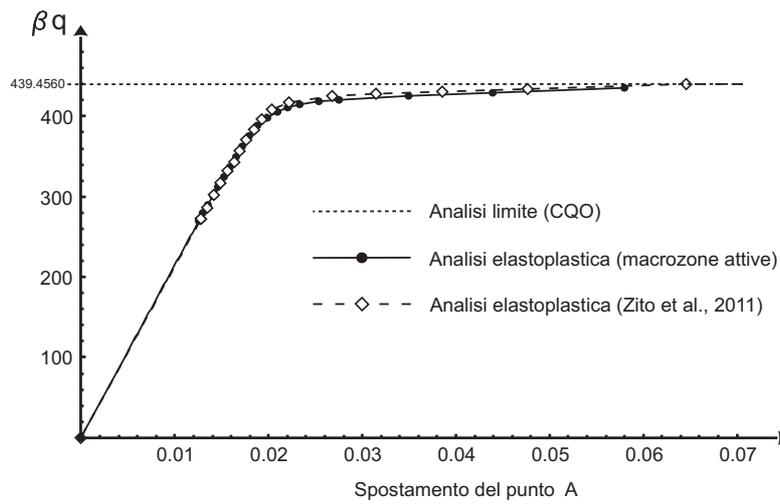


Fig. 6.2 : Curve carico-spostamenti

6.5 Conclusioni

Dai test effettuati derivano le seguenti considerazioni. L'utilizzo di SeDuMi consente di affrontare problemi con elevato numero di variabili. Tuttavia la generalizzazione del problema di tipo SD comporta notevoli difficoltà in quanto necessita dell'inversione, non sempre possibile, di operatori matriciali che dipendono dalla geometria della struttura nonché di elevati oneri computazionali.

Il CQO risolto mediante la funzione *fmincon* di Matlab garantisce la soluzione qualunque sia la geometria della struttura, ma per un numero di variabili inferiore al precedente. Tuttavia è stato possibile superare tale difficoltà grazie ai vantaggi offerti dal metodo utilizzato. Infatti l'approccio multidomain SBEM ha consentito di ridurre notevolmente la dimensione del problema confinando la discretizzazione nelle zone di potenziale accumulo delle deformazioni plastiche e lasciando la restante parte come macroelementi a comportamento elastico. Il confronto con i risultati ottenuti mediante analisi iterativa ha mostrato le elevate prestazioni e la robustezza di entrambi i metodi proposti.

Conclusioni

In questa tesi la formulazione Simmetrica del Metodo degli Elementi di Contorno è stata estesa all'analisi elastoplastica ed a shakedown. Questo lavoro vuole dare un contributo fornendo algoritmi robusti in grado di descrivere il fenomeno elasto-plastico in presenza di *hardening* cinematico e di valutare direttamente il moltiplicatore a shakedown mediante metodi di programmazione matematica. Tali obiettivi sono stati perseguiti mediante:

- Una metodologia di analisi del discreto che offre il vantaggio di utilizzare operatori algebrici simmetrici e definiti in segno, di eliminare tutte le singolarità presenti nei nuclei degli integrali, di definire tutti i coefficienti in forma chiusa, di garantire, mediante le Soluzioni Fondamentali, il rispetto della compatibilità e dell'equilibrio puntuale in tutto il dominio.
- Una strategia di tipo *multidomain* nell'ambito del SBEM per la generazione di un sistema di sottostrutture (e-bem), che ha consentito di analizzare solidi con caratteristiche fisico-geometriche variabili a zone, modellare le sole zone del dominio potenzialmente soggette alle deformazioni plastiche, di definire le equazioni di elasticità che legano le grandezze generalizzate e quelle nodali di interfaccia alle azioni esterne note ed incognite, agenti nel sottodominio. Attraverso queste equazioni, operando una forte condensazione delle variabili del sistema risolvibile, è garantito il rispetto delle condizioni di compatibilità e di equilibrio puntuali all'interno di ciascun e-bem e in termini di grandezze generalizzate e nodali sul contorno.
- L'utilizzo dell'equazione delle autotensioni sia nell'analisi elastoplastica che nell'approccio statico per la determinazione diretta del moltiplicatore a

shakedown. Tale relazione globale garantisce direttamente una soluzione non locale e indipendente dal percorso di accumulo delle deformazioni plastiche.

- Metodi di ottimizzazione non lineare per la determinazione diretta del moltiplicatore a shakedown

Tutti questi aspetti sono stati scrupolosamente analizzati e successivamente implementati, come moduli aggiuntivi, all'interno del codice Karnak.sGbem e mediante toolbox di ottimizzazione di Matlab 7.6.0. I risultati sono stati confrontati con altre formulazioni, al fine di mostrare l'efficienza delle metodologie proposte.

Bibliografia

- Aliabadi M.H., 2002. The boundary element method. *Applications in solids and structures*, vol. 2. London: Wiley.
- Banerjee P.K. The boundary element method in engineering, McGraw Hill, London, 1994.
- Belytschko T. Hodge PG., 1970. Plane stress limit analysis by finite element. *Journal of Engineering Mechanics ASCE* , 96, 931-944.
- Bilotta A., Casciaro R., 2006. A high-performance element for the analysis of 2D elastoplastic continua. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 196, 818-828.
- Bonnet M., 1995. Regularized direct and indirect symmetric variational BIE formulation for three-dimensional elasticity. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 15, 93-102.
- Bonnet M., Guiggiani M., 2003. Direct evaluation of double singular integrals and new free terms in 2D symmetric Galerkin BEM. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 192, 2565-2595.
- Bonnet M., Maier G., Polizzotto C., 1998. Symmetric Galerkin boundary element method. *Appl. Mech. Rev.*, 51, 669-704.
- Bonnet M., Mukherjee S., 1996. Implicit Bem formulations for usual and sensitivity problems in elasto-plasticity using the consistent tangent operator concept, *Int. J. of Solids and Structures* 30, 4461-4480.
- Borges LA, Zouain N, Huespe AE., 1996. A nonlinear optimization procedure for limit analysis. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 15, 487-512.

- Brebbia C.A., 1978. The Boundary element method for engineers. Pentch Press.
- Brebbia C.A., Telles, J.C.F. and Wrobel, L.C., 1984. Boundary Element Techniques. Theory and application in engineering, Springer, Berlin.
- Bui H.D., 1978. Some remarks about the formulation of three-dimensional thermoelastoplastic problems by integral equation. *Int. J. of Solids and Structures.*, 14, 935-939.
- Capurso M., 1974. A displacement bounding principle in shakedown of structures subjected to cyclic loads, *Int. J. Solids Struct.* 10 77–92.
- Carini A., Diligenti M., Maranesi P., Zannella M., 1999. Analytical integrations for two dimensional elastic analysis by the symmetric Galerkin boundary element method. *Comp. Mech.*, 23, 308-323.
- Casciaro R., Cascini L., 1982. A mixed formulation and mixed finite elements for limit analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 18, 211-243.
- Casciaro R., Garcea G., 2002. An iterative method for shakedown analysis, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 165 (1–4), 5761–5792.
- Casciaro R., Garcea G., Armentano G., Petrolo S., 2005. Finite element shakedown analysis of two-dimensional structures, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 63, 1174–1202.
- Chen S., Liu Y., Li J., Cen Z., 2008. Lower bound shakedown analysis by using the elemt free Galerkin method and non-linear programming. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 197, 3911-3921.
- Chen S., Liu Y., Li J., Cen Z., 2011. Performance of the MLPG method for static shakedown analysis for bounded kinematic hardening structures. *Eur. J. Mech., A/Solids.* 30, 183-194

- Cocchetti G., Perego U., 2003. A rigorous bound on error in backward-difference elastoplastic time-integration. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 192, 4909-4927.
- Comi C., Perego U., 1995. A unified approach for variationally consistent finite elements in elastoplasticity, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 12 , 323–344.
- Corradi L., Zavelani A., 1974. A linear programming approach to shakedown analysis of structures. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 3 37–53.
- Cruse T.A., Richardson J.D., 1996. Non-singular Somigliana Stress Identities in Elasticity. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 39, 3273-3304.
- Cucco F., Panzeca T., Terravecchia S., 2002. Symmetric boundary element method versus finite element method. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 191, 3347-3367.
- Cucco F., Panzeca T., Terravecchia S., 2002. The program Karnak.sGbem Release 2.1, Palermo.
- Feng X.Q., Sun Q., 2007. Shakedown analysis of shape memory alloy structures. *Int. J.l of Plasticity* 23, 183-206
- Frangi A., Maier G., 1998. On symmetric Galerkin BEM in nonlinear fracture mechanics, *International Association for Boundary Element Methods (IABEM 1998)*, Palaiseau (France).
- Frangi A., Novati G., 1996. Symmetric BE method in two-dimensional elasticity: evaluation of double integrals for curved elements. *Comp. Mech.*, 19, 58-68.
- Fuschi P., Polizzotto C., 1998. Internal-variable elastic-plastic material model with hardening saturation surface. *Acta Mechanica* 1998; 129: 73-95

- Ganguly S., Layton J.B., Balakrishna C., Kane J.H., 1999. A fully symmetric multi-zone Galerkin boundary element method. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 44, 991-1009.
- Gao X.W., 2002. A boundary element method without internal cells for two-dimensional and three-dimensional elastoplastic problems. *J. Appl. Mech. ASME*, 69, 154-160.
- Gao X.W., 2002. The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary-only discretization. *Engng. Analysis with Boundary Elements*, 26, 905-939.
- Gao X.W., 2003. Boundary element analysis in thermoelasticity with and without internal cells. *Int. J. for Num. Meth. in Engng*, 57, 975-990.
- Gao X.W., Davies T.G., 2000. An effective boundary element algorithm for 2D and 3D elastoplastic problem. *Int. J. of Solids and Structures*, 37, 4987-5008.
- Gao X.W., Davies T.G., 2002. Boundary element programming in mechanics, Cambridge University Press.
- Gaydon FA, Mc Crum AW. 1954. A theoretical investigation of the yield point loading of a square plate with a central circular hole. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2, 156-169
- Genna F., 1988. A non-linear inequality, finite element approach to the direct computation of shakedown load safety factor. *Int. J. of Mechanical Sciences*, 30, 769-789.
- Gray L.J., 1998. Evaluation of singular and hypersingular Galerkin boundary integrals: direct limits and symbolic computation. In: Sladek J, Sladek V (eds), Singular integrals in boundary element methods. Computational Mechanics, Southampton.

- Gray L.J., Paulino G.H., 1997. Symmetric Galerkin boundary integral formulation for interface and multi-zone problems. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 40, 3085-3101.
- Groß-Wedge J., 1997. On the numerical assessment of the safety factor of elastic-plastic structures under variable loading. *Int. J. of Mechanical Sciences*, 39(4), 417-433.
- Guiggiani M., 1991. Direct Evaluation of hypersingular integrals in 2D BEM. In: Proceedings of the 7th GAMM seminar on numerical techniques for boundary element methods, Kiel, Germany.
- Guiggiani M., 1994. Hypersingular formulation for boundary stress evaluation, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 13, 169-179.
- Guiggiani M., 1995. Hypersingular boundary integral equation have an additional free term. *Comp. Mech.*, 16, 245-248.
- Guiggiani M., Krishnasamy G., Rudolphi T.J., Rizzo F.J., 1992. A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations, *ASME, J. Appl. Mech.*, 59, 604-614.
- Hadamard J., 1923. Lectures on Chauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations. Yale University Press, New Hawen.
- Hartmann F., 1989. Introduction to Boundary Elements. Springer-Verlag.
- Hill, R., 1950 The Mathematical Theory of Plasticity, Clarendon Press,
- Holzer S., 1993. How to deal with hypersingular integrals in the symmetric BEM. *Communication in Numerical Methods in Engineering.*, 9, 219-232.
- Jirásek M., Bazant Z.P., 2002. Inelastic analysis, John Wiley & son, LTD, West Sussex, England.

- Kane J.H., 1994. Boundary element analysis in engineering continuum mechanics. Prentice-Hall.
- Lam E.S.S., Diao B., 2000. Application of return mapping technique to multiple hardening concrete model, *Struct. Engng and Mech.*, 3, 215-226.
- Layton J.B., Ganguly S., Balakrishna C., Kane J.H., 1997. A symmetric Galerkin multi-zone boundary element formulation. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 40, 2913-2931.
- Liu Y., Zhang X, Cen Z., 2005. Lower bound shakedown analysis by the symmetric Galerkin boundary element method, *Int. J. of Plasticity*, 21, 21-42
- Maier G., 1970. A matrix structural theory of piecewise linear elastoplasticity, *Meccanica*, 5, 54-66.
- Maier G., 1979. Shakedown analysis, in: Cohn M.Z., G. Maier (Eds.), *Engineering Plasticity by Mathematical Programming*, Pergamon Press, pp. 107-134 (Chapter 6).
- Maier G., Diligenti M., Carini A., 1991. A variational approach to boundary element elastodynamic analysis and extension to multidomain problems. *Comp. Meth. Appl. Mech. & Engng.*, 92, 192-213.
- Maier G., Miccoli S., Novati G., Perego D., 1995. Symmetric Galerkin BEM in plasticity and gradient-plasticity. *Comp. Mech.*, 17, 115-129.
- Maier G., Polizzotto C., 1983. A boundary element approach to limit analysis, *5-th International Conference on Boundary Elements*, Hiroshima, Japan, Springer, Berlin, pp. 265-277;
- Maier G., Polizzotto C., 1987. A Galerkin approach to boundary element elastoplastic analysis. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 60, 2, 175-194.

- Makrodimopoulos A., 2006. Computational formulation of shakedown analysis as a conic quadratic optimization problem. *Mech. Research Comm.* 33, 72-83
- Mallardo V., Alessandri C., 2004. Arc-length procedures with BEM in physically nonlinear problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*; 28: 547-559.
- Malvern E.M., 1969. Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Prentice-Hall.
- Mantič V., 1994. On computing boundary limiting values of boundary integrals with strongly singular and hypersingular kernels in 3D BEM for elastostatics. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 13, 115-134.
- Martin J. B., 1975. Plasticity: fundamentals and general results. The Mit Press, Massachusetts, USA.
- Matzenmiller A., Taylor R.L., 1994. A return mapping algorithm for isotropic elastoplasticity, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 37, 813-826.
- Monegato G., 1994. The numerical evaluation of hypersingular integrals, *J. Comp. Appl. Math.*, 50, 9-31.
- Ortiz M., Martin J.B., 1989. Symmetry-preserving return mapping algorithms and incrementally extremal paths: a unification of concepts. *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, 28, 1839-1853.
- Ortiz M., Popov E.P., 1985. Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 21, 1561-1576.
- Ortiz M., Simo J.C., 1986. An analysis of a new class of integration algorithm for elastoplastic constitutive relations. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 23, 353-366.
- Panzeca T., 1992. Shakedown and limit analysis by the boundary integral equation method. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 11, 685-699;

- Panzeca T., Cucco F., Parlavecchio E., Zito L., 2011. A combined approach of SGBEM and Conic Quadratic Optimization for limit analysis. *Advances in on Boundary Element Techniques (BETEQ 2011)*, Brasilia, Brasile.
- Panzeca T., Cucco F., Milana V., Terravecchia S., 2003. Body forces and thermoelasticity in the SGBEM. *Proceedings of 15th International Conference on Computer Method in Mechanics*, Gliwice-Szczyrk, Polonia.
- Panzeca T., Cucco F., Milana V., Terravecchia S., 2004-a. Multidomain approach for thermoelasticity in the SGBEM. *International Conference on Boundary Element Techniques (BETEQ 2004)*; Madeira, Portogallo.
- Panzeca T., Cucco F., Milana V., Terravecchia S., 2004-b. Stress field by the symmetric Galerkin boundary element method. *J. Strain Analysis.*, 39, 569-580.
- Panzeca T., Cucco F., Parlavecchio E., Zito L., 2009. Elastoplastic analysis by the multidomain Symmetric Boundary Element Method, *International Conference on Boundary Element Techniques (BETEQ 2009)*, Atene, Grecia.
- Panzeca T., Cucco F., Parlavecchio E., Zito L., 2009. La formulazione simmetrica alla Galerkin del BEM in elastoplasticità. *XIX Congresso di Meccanica Teorica ed applicata (AIMETA 2009)*, Ancona, Italia.
- Panzeca T., Cucco F., Salerno M., Terravecchia S., 2000-a. Il metodo degli spostamenti nella formulazione simmetrica degli elementi di contorno. *XIII Convegno Italiano di Meccanica Computazionale (GIMC 2000)*, Brescia, Italia.
- Panzeca T., Cucco F., Terravecchia, S., 2002-a. Symmetric Boundary Element Method versus Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 191, 3347-3367.
- Panzeca T., Fujita Yashima H., Salerno M., 1998. Mathematical aspects and applications of the symmetric Galerkin boundary element method. *Proceedings of IV World Congress on Computational Mechanics*. Extended abstract on CD,

- Idelsohn SR, Onate E, Dvorkin EN (eds) Buenos Aires.
- Panzeca T., Fujita Yashima H., Salerno M., 2001. Direct stiffness matrices of BEs in the Galerkin BEM formulation. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 20, 277-298.
- Panzeca T., Parlavecchio E., Terravecchia S., Zito L., 2010. Elastoplastic analysis for active macro-zones via multidomain symmetric Galerkin BEM, *International Conference on Boundary Element Techniques.(BETEQ 2010)*. Berlino, Germania.
- Panzeca T., Salerno M., 2000-b. Macroelements in the mixed boundary value problems. *Comp. Mech.*, 437-446.
- Panzeca T., Salerno M., Terravecchia S., 1999. Impiego delle sottostrutture nella formulazione simmetrica del BEM. *Congresso di Meccanica Teorica ed applicata (AIMETA 1999)*, Como, Italia.
- Panzeca T., Salerno M., Terravecchia S., 2002-b. Domain decomposition in the symmetric boundary element method analysis. *Comp. Mech.* 28, 191–201.
- Panzeca T., Terravecchia S., Zito L., 2008. Computational Aspects in thermoelasticity by the symmetric boundary element method, in *Advances in on Boundary Element Techniques (BETEQ 2008)*, Siviglia, Spagna.
- Panzeca T., Terravecchia S., Zito, L., 2010. Computational aspects in 2D SBEM analysis with domain inelastic actions. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 82, 184-204.
- Parlavecchio E., Salerno M., Terravecchia S., Zito L., 2010. Active Macro-zones algorithm via multifomain SBEM for strain-hardening elastoplastic analysis. *XVIII Convegno Italiano di Meccanica Computazionale (GIMC 2000)*, Siracusa, Italia.

- Parlavecchio E., Zito L., Panzeca T., 2011. Lower bound limit analysis by SGBEM: Conic optimization vs incremental approach. *Int. J. of Solids and Structures*. (Under review, Febbraio 2011).
- Paulino G.H., Liu Y., 2001. Implicit consistent and continuum tangent operators in elastoplastic boundary element formulations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190: 2157-2179
- Perego U., 1987. Sull'analisi elastoplastica per elementi di contorno. *Tesi dottorale*
- Perez-Gavilan J.J. and Aliabadi M.H., 2001. A symmetric Galerkin BEM for Multi-connected bodies: A new approach. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 25, 633-638.
- Pinsky P.M., Ortiz M., Pister K., 1983. Numerical integration of rate constitutive equations in finite deformation analysis, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 40, 137-158.
- Polizzotto C, Zito M., 1998. BIEM-based variational principles for elastoplasticity with unilateral contact boundary conditions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 21: 329-338.
- Polizzotto C., 1982. A Unified treatment of shakedown theory and related bounding techniques. *SM Archives*, 7, 19-75;
- Polizzotto C., 1988-a. An energy approach to the boundary element method, Part. I: Elastic solids. *Comp. Meth. Appl. Mech. & Engng.*, 69, 167-184.
- Polizzotto C., 1988-b. An energy approach to the boundary element method, Part. II: Elastic-plastic solids. *Comp. Meth. Appl. Mech. & Engng.*, 69, 263-276.
- Polizzotto C., 1991. A boundary min-max principle as a tool for boundary element formulation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2, 89-93.

- Ponter A.R.S., Engelhardt M., 2000. Shakedown limits for a general yield condition: implementation and application for a von Mises yield condition. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 19, 423–445.
- Ponter A.R.S., Karter K.F., 1997. Shakedown state simulation techniques based on linear elastic solutions, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 140, 259–279.
- Ponter A.R.S., Martin J. B., 1972. Some extremal properties and energy theorems for inelastic materials and their relationship to the deformation theory of plasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, 20, 281-300.
- Salerno M.G., 1998. Aspetti matematici e computazionali nella formulazione simmetrica alla Galerkin del Metodo degli Elementi di Contorno. *Tesi dottorale*.
- Salvadori A., 2001. Analytical integration of hypersingular kernel in 3D BEM problems. *Comp. Meth. Appl. Mech. & Engrg.*, 190, 3957–3975.
- Simo J.C., Ortiz M., 1985. A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 492 , 221-245.
- Simo J.C., Hughes T.J.R., 1998. Computational Inelasticity, in: *Interdisciplinary Applied Mathematics*, vol. 7, Springer, Berlin.
- Simo, J.C., Taylor, R.L., 1985. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 48, 101-118.
- Sirtori S., Maier G., Novati G., Miccoli S., 1992. A Galerkin symmetric boundary element method in elasticity: formulation and implementation, *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 35, 255-282.
- Sloan S.W., 1988. Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 12, 61-77;

- Stavroulakis G.E., Antes H., 2000. Nonlinear equation approach for inequality elastostatics: a two-dimensional BEM implementation. *Comput. Struct.*, 75, 631–646.
- Stein E, Zhang G., 1992. Shakedown with non-linear strain-hardening including structural computation using finite element method. *International Journal of Plasticity*, 8, 1-31.
- Takhteyev V., Brebbia C.A., 1990. Analytical integrations in boundary elements. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 30, 95–100.
- Telles J.C.F. and Carrer, J.A.M., 1991 Implicit procedures for the solution of elastoplastic problems by boundary element method, *Math. Comput. Model*, 15, 303-311.
- Terravecchia S., 2002. Analisi per sottostrutture nel Metodo Simmetrico degli Elementi di Contorno – Lastre. *Tesi dottorale*.
- Terravecchia S., 2006. Closed form coefficients in the Symmetric Boundary Element Approach. *Eng. Anal. Bound. Elem. Meth.*, 30, 479-488.
- Timoshenko S., Godier J.N., 1951. Theory of Elasticity. McGraw-Hill.
- Vodička R., Mantič V., Paris F., 2006. On the removal of the non-uniqueness in the solution of elastostatic problems by symmetric Galerkin BEM. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 66, 1884-1912.
- Wang, X., Wang L.B., Xu L.M., 2004. Formulation of the return mapping algorithm for elastoplastic soil models. *Comput. and Geotech.* 31, 315–338
- Wendland W.L., 1997. Boundary element topics. Springer-Verlag.
- Wilkins M.L., 1964. Calculation of elastic-plastic flow. *Methods of Comput. Phys.*, 3, 211-263.

- Yan A.M., Nguyen D.H., 2001. Kinematical shakedown analysis with temperature-dependent yield stress, *Int. J. Num. Meth. Engrg.* 50, 1145–1168.
- Zhang X., Liu Y., Cen Z., 2002. Lower bound limit analysis by the symmetric Galerkin boundary element method and the Complex method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 191 , 1967–1982.
- Zhang X., Liu Y., Cen Z., 2004. Boundary element methods for lower bound limit and shakedown analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements.* 28, 905-917.
- Zhang Y.G., 1995. An iteration algorithm for kinematic shakedown analysis. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 127, 217-226.
- Zito L., Cucco F., Parlavecchio E., Panzeca T., 2010. Incremental limit analysis for active macro-zones. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*. (Under review Settembre 2010).
- Zito L., Parlavecchio E., Panzeca T., 2010. Elastoplastic analysis by active macro-zones with linear kinematic hardening and von Mises materials. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* (Under review Dicembre 2010).
- Zito L., Parlavecchio E., Panzeca T., 2011. On the computational aspects of a symmetric multidomain BEM approach for elastoplastic analysis. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design.* 46, 103-120.