



**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PALERMO**

**DIPARTIMENTO DELL'ENERGIA**

Dottorato di Ricerca in Fisica Tecnica Ambientale

**STUDIO DEI DIFFUSORI DI SCHROEDER E MODELLAZIONE  
MEDIANTE DWM (DIGITAL WAVEGUIDE MESH)**

Settore scientifico disciplinare ING-IND/11

**TESI DI  
ING. VINCENZO VINCI**

**COORDINATORE DEL DOTTORATO  
PROF. ALDO ORIOLI**

**TUTOR  
PROF. GIUSEPPE RODONÒ**

CICLO XXIII - ANNO ACCADEMICO 2011-2012

DOTTORATO





# Sommario

Sono stati trattati due differenti argomenti: lo studio della diffusione delle onde acustiche per mezzo dei diffusori di Schroeder e la modellazione acustica tramite la Digital Waveguide Mesh (DWM).

E' stato prima affrontato lo studio delle sequenze numeriche a spettro costante e il modo in cui esse vengono generate. La progettazione dei diffusori è stata studiata, partendo da una formulazione semplificata in campo lontano e variando i parametri di progetto sono stati ricavati i diagrammi polari di diffusione. In particolare, mediante i diagrammi polari in campo lontano è stata considerata la variazione della diffusione al variare della classe di sequenza (QRD, PRD, MLS), della lunghezza  $N$  della sequenza, della frequenza  $f_0$  di progetto e del numero di periodi  $np$  della sequenza base di cui è composta l'intero diffusore.

Sono stati descritti quelli che sono i metodi adottati per valutare la diffusione e la sua quantificazione mediante il coefficiente di diffusione.

La parte centrale della tesi ha riguardato la realizzazione del modello di simulazione basato sulla DWM. Il modello 2D è stato realizzato adottando per la mesh una topologia rettangolare interpolata, che coniuga semplicità nella realizzazione e basso errore di dispersione in frequenza.

I particolari dei diffusori di Schroeder sono stati rappresentati efficacemente con una tecnica di *suddivisione del dominio in sottodomini* a differente densità. Questo metodo rende più fitta la mesh solo là dove la geometria lo richiede e più larga nelle regioni di spazio vuote prive di bordi.

Nella simulazione, la valutazione della diffusione è stata fatta secondo la tecnica standard prevista per le misure reali, così come descritta nel documento (AES 4 ed. 2001). In questo modo i risultati ottenuti possono essere confrontati con quelli fatti su diffusori reali.

Tutti i programmi di simulazione sono stati sviluppati in ambiente LabVIEW.



# INDICE

<b>Sommario</b> .....	i
-----------------------	---

<b>Introduzione</b> .....	1
---------------------------	---

## **Capitolo 1 - Teoria dei numeri**

1.1 Congruenze .....	6
1.2 Congruenze algebriche .....	8
1.3 Residui quadratici .....	11
1.4 Proprietà spettrali delle sequenze di radici primitive .....	11
1.5 Proprietà spettrali delle sequenze di residui quadratici .....	13

## **Capitolo 2 - La riflessione diffusa**

2.1 Introduzione .....	15
2.2 Misura della diffusione .....	16
2.3 Il coefficiente di diffusione .....	16
2.4 Misura del coefficiente di diffusione .....	20
2.5 Il coefficiente di scattering .....	23
2.6 Misura del coefficiente di scattering .....	24
2.7 Confronto tra coefficiente di diffusione e di scattering .....	27
2.8 Metodi di predizione della diffusione .....	28

## **Capitolo 3 - I diffusori di Schroeder**

3.1 Introduzione .....	29
3.2 Principio di funzionamento .....	29
3.3 Dispersione spaziale e temporale .....	31
3.4 Effetto dei diffusori in luoghi acusticamente critici .....	32
3.5 Criteri di progettazione .....	33
3.6 Prestazioni dei diffusori .....	36
3.7 Sequenze .....	40

3.8 Diffusori a radice primitiva .....	41
3.9 Prestazioni dei diffusori a radice primitiva .....	45
3.10 Altro sulla sequenza e sulla frequenza di progetto dei PRD .....	47
3.11 Diffusori QRD .....	48
3.12 Effetti della disposizione periodica dei diffusori .....	50
3.13 Altre sequenze .....	51

## Capitolo 4 - Modellazione acustica

4.1 Introduzione .....	54
4.2 Modellazione basata sui raggi .....	55
4.3 Metodo della sorgente immagine .....	56
4.4 Ray-Tracing .....	58
4.5 Beam-Tracing .....	60
4.6 Metodi ibridi .....	62
4.7 Modellazione basata sulle onde .....	63
4.8 Metodi nel dominio della frequenza .....	63
4.9 Metodo agli elementi finiti .....	63
4.10 Il Boundary Element Method .....	66
4.11 Caratteristiche dei due metodi FEM e BEM .....	67
4.12 Differenze finite nel dominio del tempo .....	67

## Capitolo 5 - La digital waveguide mesh

5.1 Introduzione .....	71
5.2 Elemento base della DWM monodimensionale .....	71
5.3 Scattering del segnale .....	73
5.4 Formulazione alle differenze finite e formulazione DSP .....	76
5.5 Topologia della mesh .....	79
5.6 Passo di campionamento .....	81
5.7 Errore di dispersione .....	82
5.8 Dispersione nella mesh rettangolare .....	83
5.9 Dispersione nella mesh triangolare .....	85
5.10 Mesh 2D rettangolare interpolata .....	87
5.11 K-DWM e W-DWM .....	88
5.12 Realizzazione dei bordi nelle DWM .....	90

## Capitolo 6 - Realizzazione dell'ambiente di simulazione

6.1 Introduzione .....	93
------------------------	----

6.2	Costruzione della mesh .....	94
6.3	Introduzione del segnale nella mesh .....	99
6.4	Scomposizione del dominio della mesh in sottodomini a differente densità .....	100
6.5	Setup dell'ambiente di misura .....	104
6.6	Implementazione del software di simulazione .....	106
6.7	Struttura dati principale .....	107
6.8	Routines .....	107

## Capitolo 7 – Risultati delle simulazioni

7.1	Validazione del modello di simulazione .....	112
7.2	Simulazioni .....	115
7.3	Superficie piana .....	115
7.4	Diffusori PRD e QRD .....	118
7.5	Effetto dei diffusori in un ambiente chiuso .....	133

<b>Conclusioni</b> .....	135
--------------------------	-----

<b>Appendice A</b> .....	137
--------------------------	-----

<b>Appendice B</b> .....	145
--------------------------	-----

<b>Appendice C</b> .....	153
--------------------------	-----

<b>Appendice D</b> .....	155
--------------------------	-----

<b>Bibliografia</b> .....	179
---------------------------	-----

# INTRODUZIONE

A metà degli anni 70 M.R. Schroeder pubblica un famoso articolo nel quale cerca di dare risposta al seguente quesito: quale forma deve avere una superficie affinché essa possa diffondere un'onda sonora incidente in tutte le direzioni. Introduce così, per la prima volta, la possibilità di utilizzare in acustica i concetti legati ai reticoli di diffrazione studiati in ottica.

Facendo un passo indietro, c'è da dire che la necessità di ottenere elementi di diffusione del suono è stata evidenziata fin dai primi approcci scientifici nella progettazione acustica degli ambienti. Nelle sale da concerto, ad esempio, in quelle moderne molto grandi si presenta una duplice esigenza, quella di ridurre al minimo l'assorbimento dell'energia sonora, vocale e strumentale, e contemporaneamente evitare forti echi o riflessioni. Compromesso come si sa essere difficilmente realizzabile.

Anche in stanze piccole, come gli studi di registrazione e le sale di controllo, c'è la necessità di evitare nette riflessioni, invece non vi è la necessità di mantenere elevati livelli di energia sonora nell'ambiente. Per evitare quindi fastidiosi effetti derivanti dalle riflessioni, quali distorsioni nelle registrazioni stereo con problemi di localizzazione e colorazioni nelle registrazioni dovuti a filtri a pettine, veniva spesso fatto uso massiccio di materiale fonoassorbente per i rivestimenti interni, rendendo l'ambiente quasi anecoico.

Storicamente, la diffusione è stata ottenuta dall'uso deliberato o accidentale di decorazioni o superfici dure riflettenti, di varia forma geometrica. Le sale di nuova costruzione, realizzate con i criteri architettonici attuali, si presentano prive di tutti quegli elementi come statue, balconi, colonne ed altre forme di rilievi ornamentali di conseguenza nasce la necessità di inserire all'interno delle sale degli elementi che possano soddisfare i requisiti dell'acustica e nel contempo si integrino con lo stile architettonico dell'ambiente.

Le forme delle superfici utilizzate per movimentare il campo sonoro, ed evitare riflessioni speculari, sono state tipicamente semicilindriche o con prismi a facce piane, col risultato di assolvere parzialmente al compito richiestogli; cioè



di diffondere uniformemente le onde sonore incidenti con uguale energia e per un vasto range di frequenze, in modo da rendere le caratteristiche acustiche della sala più uniformi possibile.

Il diffusore di Schroeder può realizzare queste richieste in maniera prevedibile.

## I Diffusori di Schroeder

Schroeder spiega come con l'utilizzo di particolari sequenze numeriche (MLS) si possono progettare profili geometrici di superfici tali da garantire in campo lontano una diffusione omogenea in ogni direzione.

Il primo dispositivo, Diffusore di Schroeder, era una superficie piana con delle scanalature profonde  $\lambda/4$  e larghe  $\lambda/2$ , in cui il vuoto o il pieno viene definito dalla sequenza numerica MLS, successivamente perfezionato nei cosiddetti diffusori a resto quadratico ed a radice primitiva (QRD e PRD).

Quando un'onda piana incide sul diffusore, la propagazione viene spezzata e continua all'interno dei setti, le onde piane riflesse dal fondo vengono reirradiate. Come le scanalature hanno differente profondità anche le onde irradiate hanno differente fase, la distribuzione polare in campo lontano del suono diffuso è data dall'interferenza di tutti i contributi delle varie sorgenti. Scegliendo una sequenza appropriata di profondità per le scanalature si può ottenere il diagramma di radiazione voluto, a condizione che esso sia fisicamente realizzabile tramite un reticolo di fase.

Sono in seguito stati sviluppati diverse tipologie di diffusori che utilizzano diverse sequenze numeriche ed hanno quindi un differente profilo e differenti caratteristiche di dispersione, molti di essi da P. D'Antonio per la RPG Diffusor System Inc., che ne detiene i brevetti.

Una prima distinzione si può fare distinguendoli in due gruppi. I diffusori monodimensionali, contengono scanalature parallele di differente profondità, e diffondono l'onda piana incidente in una superficie semicilindrica. I diffusori bidimensionali sono realizzati come una scacchiera in cui le tessere hanno differente profondità e generano una diffusione semisferica.

La risposta, in termini di dispersione angolare, di questi dispositivi può essere determinata a priori adottando criteri di ottimizzazione in fase di progetto. Si può restringere l'angolo solido di diffusione, o orientarlo opportunamente.

## Applicazioni dei diffusori

Tra i primi ad adottare efficacemente questi dispositivi sono stati i tecnici della televisione britannica BBC, fornendone tra l'altro un'ampia documentazione. Essi riportano come la collocazione, negli studi televisivi, dei diffusori al posto dei materiali fonoassorbenti abbia contribuito ad avere un'ambiente acusticamente più naturale e vivibile, ed evitato i problemi relativi agli echi multipli.

Uno degli ambiti in cui hanno trovato largo impiego è nella realizzazione della cosiddetta conchiglia scenica, utilizzata dalle orchestre. Essa è una costruzione a forma di nicchia che circonda i musicisti, ha lo scopo di rafforzare e mescolare i suoni, proiettandoli verso il pubblico, ed anche migliorare la capacità dei musicisti di sentire se stessi e gli altri durante l'esecuzione. L'uso di diffusori di forme differenti, al posto di semplici pareti piatte, per la realizzazione della conchiglia viene maggiormente apprezzato dai musicisti, come è stato ampiamente documentato dal D'Antonio.

Particolarmente critici per l'acustica sono le sale di registrazione e di controllo. In quest'ultima, i diffusori, vengono posti a rivestimento delle pareti assieme a materiale fonoassorbente, consentendo di ottenere prestazioni ottime per l'ascolto da parte dell'operatore.

## Modellazione Acustica mediante DWM

Per potere efficacemente studiare il comportamento di questi dispositivi, oltre alle misure fisiche, sono necessari strumenti di previsione e simulazione, in grado di prevedere gli effetti che una particolare geometria ha sulla diffusione.

La D.W.M., (Digital Waveguide Mesh), è un potente metodo che consente di simulare la generazione e la propagazione delle onde nel dominio del tempo in un reticolo di punti bi o tridimensionale, dove sono rappresentati l'ambiente ed eventuali oggetti diffusori, in termini geometrici e nelle loro caratteristiche acustiche (impedenza caratteristica, indice di riflessione). Mediante questa tecnica è possibile, oltre all'osservazione dell'evoluzione temporale dei fenomeni, anche ottenere la risposta all'impulso nei vari punti del sistema fisico che si sta modellando. Dall'analisi della risposta all'impulso è possibile ricavare tutte le informazioni necessarie a caratterizzare la diffusione, del dispositivo che si vuole testare.

## Struttura della tesi

Nel Capitolo 1 viene presentata una breve introduzione di teoria dei numeri, riguardante le congruenze algebriche, i campi di Galois e la generazione delle sequenze aventi spettro costante. Nel Capitolo 2 si parla della riflessione diffusa, vengono definiti indici e metodi di misura che servono a descrivere la capacità di un dispositivo a diffondere l'energia sonora incidente. Il principio di funzionamento, i criteri di progettazione e le differenti tipologie di diffusori, sono esposti nel Capitolo 3.

Segue nel Capitolo 4 una introduzione ad i principali metodi di modellazione software utilizzati in acustica, quelli geometrici basati sui raggi (Ray-Tracing e Beam-Tracing), e quelli basati sulle onde (BEM, FEM, FTDM, DWM).

Uno di questi metodi, la Digital Waveguide Mesh, viene analizzata in dettaglio nel Capitolo 5, in quanto sarà il metodo di modellazione utilizzato per lo studio dei diffusori. La DWM consente infatti di realizzare un ambiente di misura simulato in cui, inseriti i dispositivi da testare, ne vengono "misurate" le caratteristiche di diffusione. Il Capitolo 6 contiene la descrizione della topologia di mesh utilizzata con gli algoritmi di aggiornamento ad ogni passo temporale. Vi è inoltre descritto il metodo adottato per la suddivisione della mesh in sottodomini a differente densità, utile in alcune circostanze a

velocizzare i calcoli. Il Capitolo 6 si chiude con una descrizione degli algoritmi adottati nella realizzazione del software, mediante il linguaggio di programmazione LabVIEW.

Infine nel Capitolo 7 viene esposta la validazione del modello di simulazione e le prove fatte su differenti tipologie di diffusore, con i risultati ottenuti.

## Capitolo 1

# TEORIA DEI NUMERI

### 1.1 Congruenze

La notazione di congruenza, introdotta da Gauss, serve ad esprimere il fatto che due numeri  $a$  e  $b$  differiscono per un multiplo di un numero naturale fissato  $m$ .

Si dice che  $a$  è congruente a  $b$  rispetto al modulo  $m$ , e si scrive

$$a \equiv b \pmod{m} \tag{1.1}$$

e quindi  $(a - b)$  è divisibile per  $m$ .

Una congruenza modulo 1 è sempre vera, poiché ogni intero è multiplo di 1.

Due numeri sono congruenti modulo 2 quando sono della stessa parità (entrambi pari o entrambi dispari). Valgono per le congruenze le stesse proprietà valide per le equazioni, possono infatti essere moltiplicate, sottratte e addizionate.

L'insieme  $0, 1, \dots, m-1$  si dice costituire un sistema completo di residui modulari.

Una *congruenza lineare*, in analogia con le equazioni lineari dell'algebra elementare, è una relazione del tipo

$$ax \equiv b \pmod{m} \tag{1.2}$$

ogni congruenza di questo tipo è risolubile in  $x$ , a patto che  $a$  sia coprimo con  $m$ .

Se si sostituiscono ad  $x$  i valori di un sistema completo di residui modulo  $m$ , si troverà tra essi un numero tale che  $ax$  sia congruo a  $b$  modulo  $m$ , questa è una soluzione. Naturalmente la congruenza sarà verificata per qualsiasi altro numero congruo alla prima soluzione, le soluzioni se viste nell'insieme dei numeri interi, saranno quindi in numero infinito.

Poiché nell'aritmetica in modulo  $m$  vi sono solo un numero finito di interi distinti, questo implica l'esistenza di relazioni algebriche verificate da ogni numero di quel sistema; diversamente da come accade per l'aritmetica ordinaria.

Considerando un qualsiasi numero  $x$  e le sue potenze  $x, x^2, x^3, \dots$  esse sono ristrette ad un numero finito di possibilità se considerate relativamente al modulo  $m$ , quindi prima o poi si avrà una ripetizione.

Sia

$$x^h \equiv x^k \pmod{m}, \text{ dove } k < h \quad (1.3)$$

se  $x$  è coprimo con  $m$ , il fattore  $x^k$  può essere cancellato e quindi  $x^l \equiv 1 \pmod{m}$  dove  $l = h - k$ .

Il minimo esponente  $l$  per cui  $x^l \equiv 1 \pmod{m}$  sarà detto *l'ordine* di  $x$  rispetto al modulo  $m$ . Le potenze di 3 modulo 11 sono:

$$3, 9, 5, 4, 1, 3, 9, \dots$$

la prima potenza di 3 congrua a 1 è  $3^5$ , quindi 5 è l'ordine di 3 (mod 11).

Le successive potenze di  $x$  sono periodiche, una volta raggiunto il primo numero  $l$  per cui  $x^l \equiv 1$ , quindi  $x^{l+1} \equiv x$  ed il ciclo si ripete:

$$n = \dots -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$$

$$3^n = \dots 4, 1, 3, 9, 5, 4, 1, 3, 9, \dots$$

Secondo il teorema di Fermat, quando il modulo è primo allora ogni intero  $x$  non congruo a 0 soddisfa:

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \quad (1.4)$$

quindi l'ordine di qualsiasi numero è un divisore di  $p - 1$ .

Una formulazione più generale di questo teorema è stata fatta da Eulero: preso l'insieme dei numeri  $0, 1, \dots, m - 1$ , si calcola il numero dei numeri tra essi che sono coprimi con  $m$  e si indica con  $\phi(m)$ .

Se  $m$  è primo tutti i numeri dell'insieme, tranne lo zero, sono primi con  $m$  così  $\phi(p) = p - 1$  per un qualsiasi primato. La generalizzazione di Eulero del teorema di Fermat si esprime come:

$$x^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m} \quad (1.5)$$

per un qualunque modulo  $m$ , a condizione che  $x$  sia coprimo con  $m$ .

## 1.2 Congruenze algebriche

Per analogia con le equazioni, una congruenza della forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \equiv 0 \pmod{m} \quad (1.6)$$

è detta congruenza algebrica, dove  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  sono interi assegnati ed  $x$  è l'incognita. Se  $n$ , il grado della congruenza, è 1 allora si riduce ad

$$a_1 x + a_0 \equiv 0 \pmod{m} \quad (1.7)$$

cioè una congruenza lineare.

Se un numero  $x_0$  verifica una congruenza algebrica modulo  $m$ , lo stesso si avrà per qualsiasi altro numero congruo ad  $x_0$  modulo  $m$ . Quindi, soluzioni congruenti si possono considerare uguali e, nel determinare il numero di soluzioni, si conterà il loro numero all'interno di un insieme completo di residui  $(\text{mod } m)$ .

Per determinare il numero di soluzioni di una congruenza algebrica è sufficiente considerare il caso in cui il modulo è potenza di un numero primo; in quanto se  $m$  è il modulo esso può essere espresso come

$$m = p^a q^b \quad \text{con } p, q \text{ primi} \quad (1.8)$$

il numero di soluzioni  $N(m)$  della congruenza sarà dato da:

$$N(m) = N(p^a) N(q^b) \dots \quad (1.9)$$

In particolare se uno dei numeri  $N(p^a)$  è zero per una delle potenze di numero primo che compongono  $m$ , allora la congruenza è insolubile.

Esistono teoremi di algebra elementare che restano validi per le congruenze, uno di questi è quello per cui una equazione di grado  $n$  non può avere più di  $n$

soluzioni; secondo il teorema di Lagrange infatti se il modulo  $p$  è primo la congruenza

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \equiv 0 \pmod{p} \quad (1.10)$$

non può avere più di  $n$  soluzioni. C'è qui da notare l'importanza del fatto che il modulo sia primo in quanto l'aritmetica relativa ad esso è particolarmente semplice.

Quelle congruenze algebriche di modulo primo contenenti solo due termini vengono dette congruenze binomiali, ed hanno la forma

$$ax^k \equiv b \pmod{p} \quad (1.11)$$

dove  $k$ , il grado della congruenza è un intero positivo.

Ogni congruenza binomiale può essere ricondotta ad un tipo semplice

$$x^k \equiv c \pmod{p} \quad (1.12)$$

dove  $c = a'b$  ed  $aa' \equiv 1 \pmod{p}$ , con  $a'$  reciproco di  $a \pmod{p}$ .

I valori di  $c$  per cui la (1.12) ammette soluzioni si diranno *residui  $k$ -esimi* rispetto al modulo  $p$ , ed analogamente i valori di  $c$  per cui non esiste soluzione si diranno *non residui  $k$ -esimi*; posto  $k = 2$  si avranno i residui quadratici.

Preso ad esempio  $p = 13$  e  $k = 2$  o  $k = 3$  si hanno i valori di  $x^2$  ed  $x^3$  rispetto al modulo 13:

$$x: 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12$$

$$x^2: 1 \ 4 \ 9 \ 3 \ 12 \ 10 \ 10 \ 12 \ 3 \ 9 \ 4 \ 1$$

$$x^3: 1 \ 8 \ 1 \ 12 \ 8 \ 8 \ 5 \ 5 \ 1 \ 12 \ 5 \ 12$$

Rispetto al modulo 13, i numeri 1, 3, 4, 9, 10, 12 sono residui quadratici, mentre 2, 5, 6, 7, 8, 11 sono non residui quadratici.

Secondo Eulero, per ogni primo  $p$ , esiste qualche numero il cui ordine è  $p - 1$ , tale intero viene chiamato *radice primitiva di  $p$* ; il numero delle radici primitive è dato da  $(p - 1)$ . L'esistenza di una radice primitiva è di notevole utilità nei calcoli relativi ad un modulo primo  $p$ .



Data  $r$ , una radice primitiva modulo  $p$ , allora  $r, r^2, r^3, \dots, r^{p-1} (\equiv 1)$  sono tra loro incongruenti poiché  $r^{p-1}$  è la prima potenza congrua ad 1, e nessuno di essi è congruo a 0; quindi essi devono essere congrui ai numeri  $1, 2, \dots, p-1$  in qualche ordine.

Qualsiasi numero non congruo a 0 (mod  $p$ ) è congruente ad un elemento che è potenza di radice primitiva e si può scrivere

$$a \equiv g^\alpha \pmod{p} \quad (1.13)$$

si dice che  $\alpha$  è l'*indice* di  $a$  (relativamente alla radice primitiva  $g$ ). Dato un  $a$ , quindi, si determina univocamente un  $\alpha$ .

L'uso della radice primitiva e degli indici è simile a quello del logaritmo e consente di sostituire l'operazione di moltiplicazione con quella di addizione, infatti se  $a \equiv g^\alpha$  e  $b \equiv g^\beta$  per cui  $ab \equiv g^{\alpha+\beta}$ , (mod  $p$ ), dunque per moltiplicare due numeri è sufficiente riferirsi ai loro indici e farne la somma, riportando il risultato nell'insieme  $1, 2, \dots, p-1$ .

Tramite l'uso degli indici è possibile studiare i residui  $k$ -esimi (mod  $p$ ), infatti data la congruenza

$$x^k \equiv a \pmod{p} \quad (1.14)$$

per vedere se è risolubile, si può scrivere in termini di indici

$$x \equiv g^\xi \pmod{p}; x^k \equiv g^{\xi k} \pmod{p}; a \equiv g^\alpha \pmod{p} \quad (1.15)$$

la congruenza diventa:

$$k\xi \equiv \alpha \pmod{p-1} \quad (1.16)$$

che è una congruenza lineare nell'incognita  $\xi$ . Studiando questa congruenza lineare si trova il numero di soluzioni e quindi di residui della congruenza di partenza. Infatti se  $k$  è coprimo con  $(p-1)$ , la congruenza lineare ha  $(p-1)$  soluzioni e si avrà che gli interi  $1^k, 2^k, \dots, (p-1)^k$  sono congrui ad  $1, 2, \dots, p-1$  in qualche ordine; quindi i residui  $k$ -esimi cercati saranno  $p-1$ . Se invece  $k$  ha fattori in comune con  $p-1$  si avrà che i residui  $k$ -esimi (mod  $p$ ) saranno in numero  $\frac{p-1}{K}$ , dove  $K$  è il massimo comune divisore tra  $k$  e  $(p-1)$ .

### 1.3 Residui quadratici

Nel caso in cui  $k = 2$  la congruenza diventa

$$x^2 \equiv a \pmod{p} \quad (1.17)$$

Quindi si tratta di determinare i *residui e non residui quadratici*.

Supponendo  $p > 2$ , il termine  $(p - 1)$  è pari quindi il massimo comune divisore è 2, di conseguenza i residui e non residui quadratici saranno in egual numero, pari a  $(p - 1)/2$ .

I residui quadratici saranno quei numeri il cui indice è pari, ed i non-residui quelli il cui indice è dispari.

### 1.4 Proprietà spettrali delle sequenze di radici primitive

Se si considera la sequenza

$$a_n = \exp\left(\frac{2i\pi g^n}{p}\right) \quad (1.18)$$

dove  $g$  è una radice primitiva del numero primo  $p$ , essa risulta periodica di periodo  $\phi(p) = p - 1$ , inoltre  $a_n$  ha modulo unitario.

La sequenza di autocorrelazione definita come

$$c_m = \sum_{n=0}^{p-2} a_n a_{n+m}^* \quad (1.19)$$

dove  $a^*$  sta per complesso coniugato di  $a$ , è tale che  $c_0 = p - 1$ , ed  $c_m = p - 1$  per  $m \equiv 0 \pmod{p - 1}$ .

Se  $m \not\equiv 0 \pmod{p}$ , allora

$$c_m = \sum_{n=0}^{p-2} \exp\left[\frac{i2\pi g^n (1 - g^m)}{p}\right] \quad (1.20)$$

Il fattore  $(1 - g^m) \not\equiv 0 \pmod{p}$  ed il termine  $g^n (1 - g^m)$  generano un sistema completo di residui  $\pmod{p}$  per  $n$  che va da 0 ad  $p - 2$ . Si ottiene che  $c_m$  è la somma di un insieme completo di radici  $p$ -esime dell'unità, eccetto 1 stesso. Visto che la somma completa sarebbe uguale ad 1, qui si ottiene:

$$c_m = -1 \quad \text{per } m \not\equiv 0 \pmod{p-1} \quad (1.21)$$

Quindi la sequenza  $a_n$  ha una funzione di autocorrelazione periodica, avente solo 2 valori ( $p - 1$  ed  $-1$ ).

Una simile funzione di autocorrelazione ha uno spettro di potenza con soli due valori, infatti data

$$A_m = \sum_{n=0}^{p-2} a_n e^{-2\pi i n m / (p-1)} \quad (1.22)$$

la trasformata discreta di Fourier, lo spettro di potenza è

$$|A_m|^2 = \sum_{k=0}^{p-2} c_k e^{\frac{2\pi i k m}{p-1}} \quad (1.23)$$

Quindi per  $m = 0$ , o più in generale per  $m \equiv 0 \pmod{p-1}$ , si ha

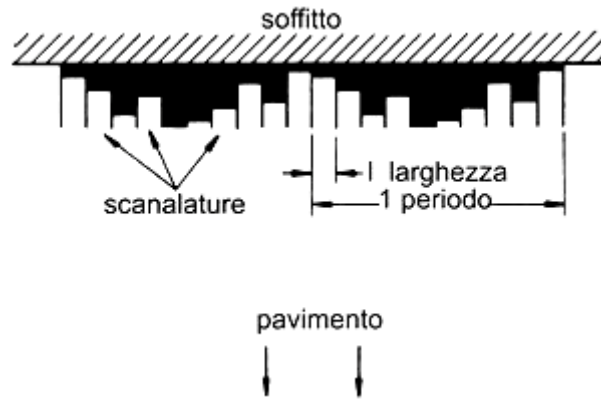
$$|A_0|^2 = 1 \quad (1.24)$$

Per  $m \not\equiv 0 \pmod{p-1}$ , con  $c_0 = p - 1$  e  $c_k = -1$  si ha

$$|A_m|^2 = p - 1 - \sum_{k=1}^{p-2} e^{\frac{2\pi i k m}{p-1}} = p \quad (1.25)$$

si ha quindi uno spettro di potenza piatto.

Sequenze numeriche che hanno spettro piatto sono utilizzate nel campo dell'acustica architettonica per la realizzazione dei cosiddetti *diffusori a reticolo di fase*. Si consideri infatti una struttura come quella in figura



**Figura 1.1:** Diffusore a reticolo di fase installato a soffitto.

rappresentante un pannello rigido in cui sono presenti scanalature di differente profondità  $d_n$ .

Un'onda sonora incidente verrà riflessa con fase cambiata in funzione della profondità della scanalatura, cioè  $2d_n \frac{2\pi}{\lambda}$  dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda.

Quindi se la profondità della scanalatura viene scelta in modo tale che

$$d_n = \frac{1}{2} \frac{\lambda s_n}{p}; \quad \text{con } s_n = g^n \pmod{p} \quad (1.26)$$

il fronte d'onda riflesso avrà una fase che varierà in accordo con la (1.18).

Come si vedrà meglio in seguito, una distribuzione su un piano di una sorgente con spettro piatto andrà a generare una distribuzione spaziale della energia uniforme, senza privilegiare nessuna direzione.

## 1.5 Proprietà spettrali delle sequenze di residui quadratici

Analogamente a quanto visto in precedenza, per le sequenze di radice primitiva, se si costruisce la

$$d_n = e^{2\pi i n^2 / p} \quad (1.27)$$

di modulo unitario e periodo  $p$ , essa ha una sequenza di autocorrelazione data da

$$c_m = \sum_{n=0}^{p-1} a_n a_{m+n}^* = e^{-2\pi i m^2 / p} \sum_{n=0}^{p-1} e^{-4\pi i n m / p} \quad (1.28)$$

quindi per  $m \not\equiv 0 \pmod{p}$ , il risultato della sommatoria su un insieme completo di radici  $p$ -esime dell'unità darà come risultato 0, quindi

$$c_m = 0 \quad \text{per } m \not\equiv 0 \pmod{p}$$

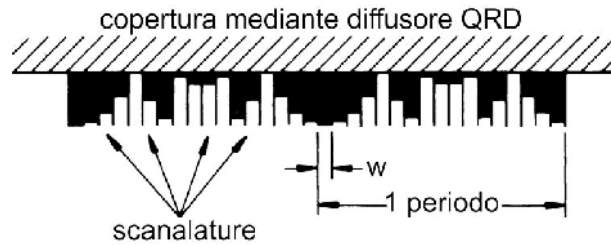
$$c_0 = p \quad \text{per } m \equiv 0 \pmod{p}$$

Una siffatta funzione di autocorrelazione produrrà uno spettro di potenza costante per tutti gli indici  $|A_m|^2 = p$  per ogni  $m$ .

Come nel caso delle sequenze di radici primitive, è possibile costruire dei diffusori a reticolo di fase a partire da sequenze di residui quadratici; infatti posta la profondità delle scanalature

$$d_n = \frac{1}{2} \frac{\lambda s_n}{p} \text{cons}_n = n^2 \pmod{p} \quad (1.29)$$

l'onda riflessa avrà una fase che varierà in accordo con (1.18).



**Figura 1.2:** Diffusore a reticolo di fase di tipo QRD (Quadratic Residue Diffusor).

È come se l'onda incidente venisse suddivisa in un numero di sorgenti quante sono le scanalature poste su un piano, ognuna con una fase differente che varia in accordo con la sequenza dei residui quadratici. Come verrà meglio esposto in seguito, ciò permette una diffusione angolare uniforme dell'energia incidente.

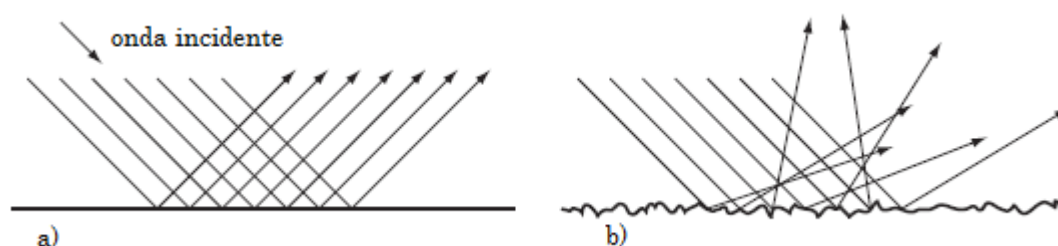
## Capitolo 2

# LA RIFLESSIONE DIFFUSA

### 2.1 Introduzione

La riflessione è un fenomeno che si verifica ogni volta che l'onda lungo il suo tragitto incontra un ostacolo; saranno le caratteristiche fisiche e geometriche dell'ostacolo a determinare come l'onda sarà riflessa. In linea generale, si avrà una riflessione speculare se l'onda incontra una superficie piana e di grandi dimensioni, in questo caso il fronte d'onda risultante dalla riflessione manterrà la stessa forma di quello incidente; l'unico effetto di una riflessione speculare è quello di modificare la direzione di propagazione di un'onda.

La condizione di specularità comunque rimane legata alla lunghezza d'onda, come le definizioni di planarità ed estensione della superficie. Infatti una superficie si considera planare se le sue disuniformità sono piccole rispetto alle lunghezze d'onda di cui è composta l'onda incidente; inoltre, affinché la riflessione possa avvenire in maniera speculare, le dimensioni dell'intera superficie devono essere molto maggiori delle lunghezze d'onda.



**Figura 2.1:** a) riflessione speculare, b) riflessione diffusa.

Il caso opposto alla riflessione speculare è la riflessione diffusa che pertanto si ottiene quando l'energia proveniente dall'onda incidente viene distribuita equamente nello spazio per effetto della superficie, che in questo caso viene

detta “diffusore”. La diffusione avviene per effetto delle irregolarità della superficie, che hanno dimensioni paragonabili alla lunghezza d’onda.

Lo studio e la progettazione dei diffusori viene fatto, quindi, in termini della loro capacità di diffondere adeguatamente il suono incidente, risulta pertanto indispensabile, misurarne gli effetti e valutarne la bontà con le adeguate figure di merito. Dei metodi di misura e dei risultati che se ne ricavano, si discuterà in questo capitolo.

## 2.2 Misura della diffusione

Per caratterizzare e quantificare la diffusione del suono dalle superfici sono stati sviluppati due differenti coefficienti denominati: *coefficiente di diffusione* e *coefficiente di scattering*.

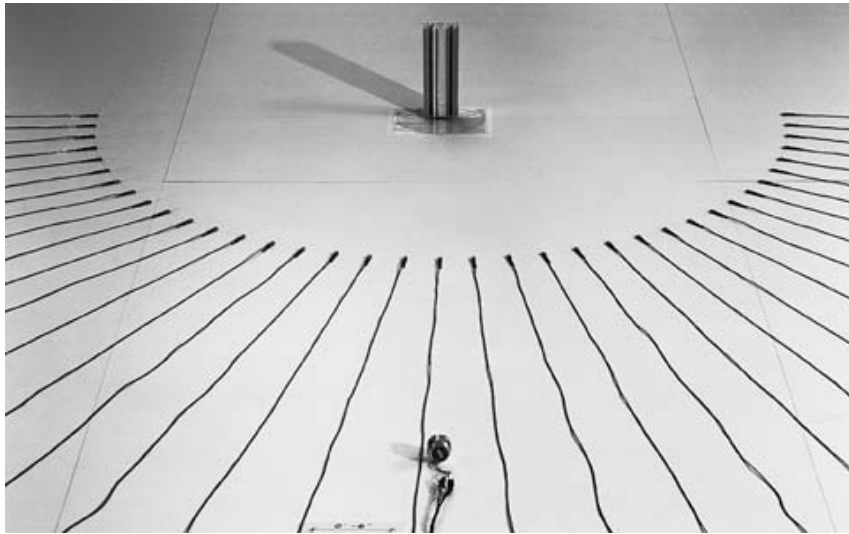
Per i due coefficienti le modalità di misura e di calcolo sono differenti e quindi anche il loro significato fisico; il coefficiente di diffusione misura quanto uniformemente, negli angoli, il diffusore distribuisce l’energia incidente. Mentre il coefficiente di scattering è il rapporto tra l’energia riflessa in maniera non speculare e l’energia totale riflessa.

## 2.3 Il coefficiente di diffusione

Il coefficiente di diffusione viene calcolato secondo le linee guida riportate nel documento dell’ AES (Audio Engineering Society) riguardante la caratterizzazione e la misura dello scattering superficiale (AES- 4id-2001).

Per il calcolo del coefficiente di diffusione è necessario misurare i diagrammi polari di radiazione.

La misura viene fatta facendo variare l’angolo d’incidenza e quindi spostando la sorgente; i ricevitori sono posti su un semicerchio (figura 2.2), nel caso di una risposta polare 2D, mentre saranno posti su una semisfera, nel caso di risposta polare 3D (figura 2.3).



**Figura 2.2:** La figura mostra il sistema di misura della diffusione su piano riflettente. Si vedono: in alto il diffusore, al centro di un arco di 37 microfoni e in basso sorgente. (tratta dal documento AES- 4id-2001).



**Figura 2.3:** La figura mostra il sistema di misura della diffusione emisferica, in camera anecoica. Si vedono: arco esterno dove è posta la sorgente, un arco interno dove sono posti i microfoni, ed al centro il diffusore. (Tratta dal documento AES- 4id-2001).

La scelta tra le due tipologie di misura dipende dalla geometria del diffusore, per alcuni dispositivi, infatti, è sufficiente la risposta polare 2D per essere completamente caratterizzati.

La misura al variare dell'angolo di incidenza è necessaria in quanto la diffusione del dispositivo varia in funzione di esso.

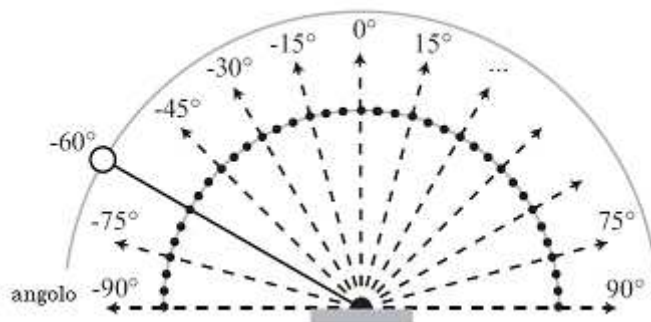


La diffusione, oltre che dall'angolo di incidenza, dipende anche dalla frequenza dell'onda incidente, quindi risulta necessario introdurre un ulteriore parametro per il coefficiente di diffusione, oltre a quello dell'angolo di incidenza, quindi il terzo di ottava della frequenza di osservazione:

$$d_{\psi_i}(f) = \text{compreso tra 0 ed 1} \quad (1.30)$$

dove  $\psi$  angolo di incidenza ed  $f$  frequenza.

La separazione tra due  $\psi_i$  successivi non deve essere superiore a  $10^\circ$ . Nel setup di misura la posizione dei microfoni deve essere tale da garantire una buona risoluzione angolare; è stato scelto che la risoluzione minima accettabile è di  $5^\circ$ .



**Figura 2.4:** La figura mostra lo schema del sistema di misura della diffusione su piano riflettente.

L'ambiente nel quale deve essere fatta la misura dovrebbe essere idealmente anecoico, in modo tale che quello che viene misurato ai microfoni non venga alterato da riflessioni provenienti dalle fonti, ma appartenga solamente alla diffusione prodotta dall'elemento sotto test.

Nella situazione reale, non essendo sempre possibile effettuare misure in ambienti anecoici tali da ospitare diffusori di grandi dimensioni, la misura può essere fatta in un ambiente grande in relazione al dispositivo; in modo che il contributo proveniente dalle pareti arrivi ad i microfoni molto dopo rispetto a quello del diffusore e possa essere cancellato dalle misure, non sovrapponendosi.

La distanza a cui devono essere poste sorgente e ricevitore, rispetto al diffusore, dipende dalle dimensioni di quest'ultimo e dalla lunghezza d'onda.

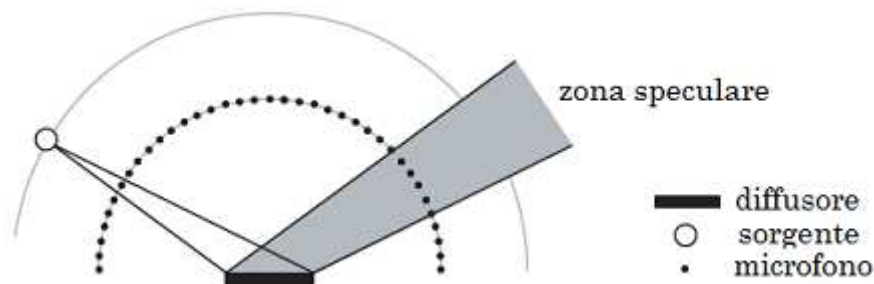
Le misure in *campo lontano* vengono condotte per la caratterizzazione diffusiva del dispositivo ed il confronto con i risultati teorici. Le misure in *campo vicino*, invece, sono utili quando si vogliono valutare gli effetti diffusivi nelle vicinanze del dispositivo, come ad esempio all'interno di ambienti reali, oppure per valutare eventuali effetti di focalizzazione dovuti a particolari geometrie. Affinché la misura si possa ritenere, almeno idealmente, fatta in campo lontano devono essere soddisfatte le seguenti condizioni, che riguardano le relazioni che debbono essere rispettate tra  $D_{max}$ , la massima dimensione del diffusore,  $\lambda$  la lunghezza d'onda maggiore considerata e le distanze  $r_1$  sorgente-diffusore ed  $r_2$  ricevitore-diffusore:

$$r \gg D_{max} \quad (1.31)$$

$$\frac{r}{D_{max}} \gg \frac{D_{max}}{\lambda} \quad (1.32)$$

$$r = \frac{2r_1r_2}{(r_1 + r_2)} \quad (1.33)$$

Qualora non sia possibile rispettare tutte queste condizioni, il requisito minimo richiesto è che almeno lo 80% dei ricevitori ricada fuori dalla zona di riflessione speculare come illustrato nella seguente immagine:

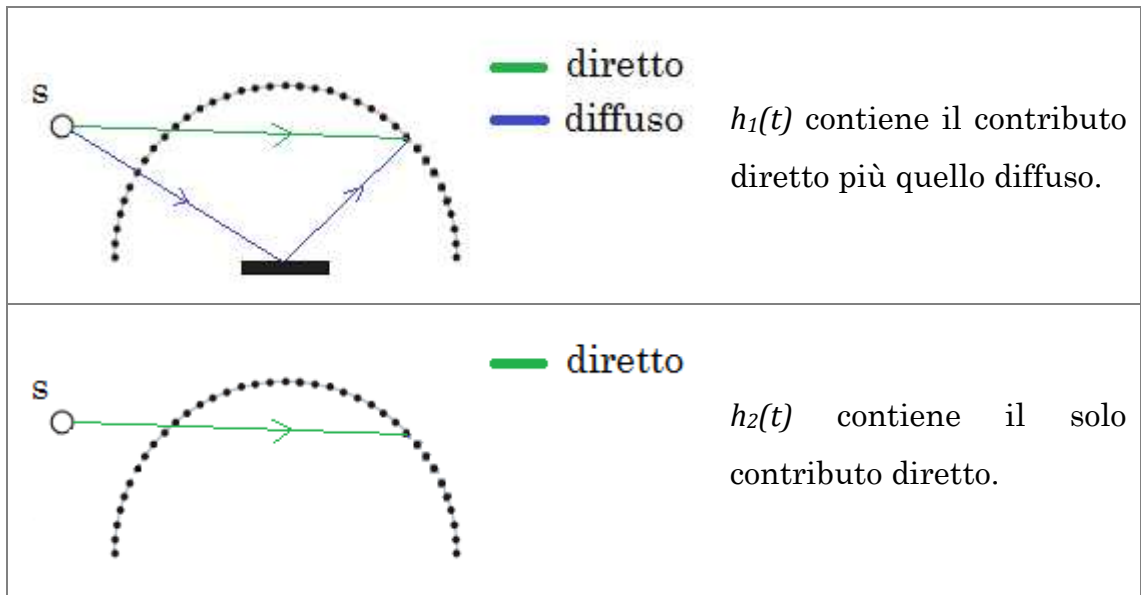


**Figura 2.5:** La zona di riflessione speculare.

Se il numero dei ricevitori fuori dalla zona di riflessione speculare risulta inferiore all'80%, le misure non possono ritenersi fatte in campo lontano.

## 2.4 Misura del coefficiente di diffusione

Per il calcolo del coefficiente di diffusione è necessario che, relativamente ad ogni ricevitore, siano misurate le risposte all'impulso sia in presenza del diffusore,  $h_1(t)$ , che senza diffusore,  $h_2(t)$ .



**Figura 2.6:** Modalità di misura di  $h_1(t)$  ed  $h_2(t)$ .

Poiché nella catena di misura entrano in gioco anche le funzioni di trasferimento di microfoni e sorgente, una ulteriore risposta all'impulso deve essere calcolata posizionando la sorgente al posto del diffusore  $h_3(t)$ . La risposta sorgente-microfono così ottenuta potrà essere, mediante deconvoluzione, eliminata dalla risposta all'impulso misurata per il diffusore. La risposta all'impulso del diffusore,  $h_4(t)$ , viene calcolata attraverso la seguente relazione:

$$h_4(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{\mathcal{F}[h_1(t) - h_2(t)]}{\mathcal{F}[h_3(t)]} \right] \quad (1.34)$$

Dove  $\mathcal{F}[\ ]$  rappresenta la trasformata di Fourier ed  $\mathcal{F}^{-1}[\ ]$  l'antitrasformata di Fourier.

Se invece delle misure reali, sul dispositivo, vengono utilizzate delle tecniche di modellazione non è necessario misurare la risposta  $h_3(t)$ , così che la risposta all'impulso del diffusore può essere determinata tramite:  $h_4(t) = h_1(t) - h_2(t)$ .

Alla risposta all'impulso  $h_4(t)$  viene inoltre applicata una finestra temporale in modo tale da tagliare le riflessioni provenienti dalle pareti dell'ambiente; queste applicazioni vengono ripetute per tutti i ricevitori e quindi vengono calcolati i valori RMS per ogni terzo di ottava di interesse.

Questi valori vengono usati per il calcolo del *coefficiente di diffusione angolare*  $d_\theta$ . Poiché il coefficiente deve essere più elevato quanto più uniforme nell'angolo è la diffusione, verrà utilizzata una funzione intermedia di autocorrelazione ciclica tra i valori ottenuti ad i vari ricevitori  $R_j$ , dove i ricevitori sono  $k = 1, 2 \dots (N - 1)$  ed  $L_k$  i valori RMS diffusione ad una determinata frequenza per gli  $N$  ricevitori:

$$R_j = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{L_k}{10^{10}} \frac{L_{((k+j) \bmod N)}}{10}}{\sum_{k=0}^{N-1} \left( \frac{L_k}{10^{10}} \right)^2} \quad \text{dove } j = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (1.35)$$

da questa se ne calcola la media per ottenere una singola figura di merito  $d\psi = \bar{R}_j$ . L'operazione di autocorrelazione e media può essere compattata in una sola formula:

$$d\psi = \frac{\left( \sum_{k=0}^{N-1} 10^{L_k/10} \right)^2 - \sum_{k=0}^{N-1} \left( 10^{L_k/10} \right)^2}{(N-1) \sum_{k=0}^{N-1} \left( 10^{L_k/10} \right)^2} \quad (1.36)$$

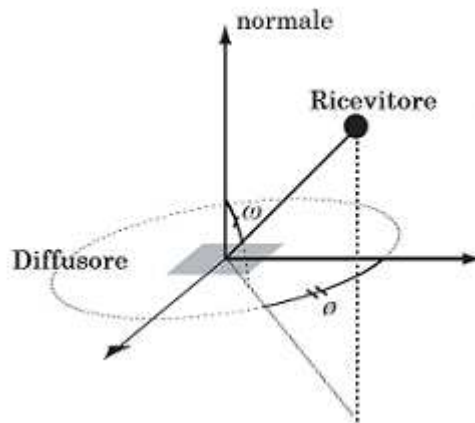
Nella convoluzione è stato assunto che i ricevitori siano equispaziati angularmente e quindi ognuno rappresenta la stessa quantità di area nella

risposta polare; quindi nel caso di risposta polare 2D questo si ottiene distribuendo i ricevitori equamente tra gli angoli da  $-90^\circ$  a  $+90^\circ$ .

Se la distribuzione dei ricevitori non è uniforme allora deve essere utilizzata la seguente formula, dove  $Q_k$  è proporzionale all'area occupata dal  $k$ -esimo ricevitore:

$$d\psi = \frac{\left( \sum_{k=0}^{N-1} Q_k 10^{L_k/10} \right)^2 - \sum_{k=0}^{N-1} Q_k \left( 10^{L_k/10} \right)^2}{(N-1) \sum_{k=0}^{N-1} Q_k \left( 10^{L_k/10} \right)^2} \quad (1.37)$$

Per quanto riguarda le risposte polari 3D non è semplice, come nel caso precedente, distribuire i ricevitori nella semisfera in modo che ognuno campioni la stessa area. La maniera più semplice per campionare attorno ad una semisfera è quella di distribuire i ricevitori ad intervalli costanti dei due angoli azimuth ed elevazioni, anche se in questo modo essi non vengono uniformemente distribuiti, ma risulteranno più densi in prossimità della calotta o azimuth e più larghi in prossimità dell'equatore.



**Figura 2.6:** Sistema di coordinate per la misura del coefficiente di diffusione in una calotta semisferica.

Se i ricevitori sono posti nella semisfera e sono separati equamente in azimuth ed elevazione, per ricavare i termini  $Q_k$  relativi ad ogni ricevitore, si devono usare le seguenti relazioni:

$$A_k = \frac{k\pi}{\Delta\Phi} \sin^2\left(\frac{\Delta\omega}{4}\right) \quad \text{per } \omega = 0^\circ \quad (1.38)$$

$$A_k = 2\sin(\omega)\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right) \quad \text{per } \omega \neq 0^\circ; |\omega| \neq 90^\circ \quad (1.39)$$

$$A_k = \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right) \quad \text{per } |\omega| \neq 90^\circ \quad (1.40)$$

$$Q_k = \frac{A_k}{A_{min}} \quad (1.41)$$

Dove  $\Delta\omega$  e  $\Delta\phi$  sono gli intervalli angolari in azimuth ed elevazione ed  $A_{min}$  il più piccolo dei valori degli  $A_k$  calcolati.

## 2.5 Il coefficiente di scattering

Il coefficiente di scattering è definito come il rapporto tra la parte di energia riflessa in maniera non speculare rispetto all'energia totale riflessa. L'onda sonora riflessa viene suddivisa nelle sue componenti: quella speculare e quella diffusa. La componente speculare è la porzione di energia dell'onda riflessa che viene trattata dalla superficie del diffusore alla stessa maniera di come farebbe una superficie piatta; quindi tanto più la superficie del diffusore somiglia ad una superficie piatta, tanto maggiore ci si aspetta che sia questa componente. Mentre la componente di energia diffusa è tutta quella riflessa in maniera non speculare.

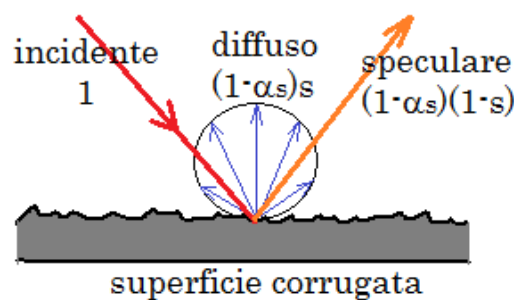
La definizione del coefficiente di scattering e la metodologia di misura sono descritti nella norma ISO 17497-1: 2004.

## 2.6 Misura del coefficiente di scattering

Con riferimento alla figura 2.7, un'onda che incide su una superficie con coefficiente di assorbimento  $\alpha_s$ , verrà in parte assorbita ed in parte riflessa nelle seguenti proporzioni:

$$E_{tot} = 1 - \alpha_s \quad \text{energia totale riflessa} \quad (1.42)$$

composta dalla *componente speculare* e dalla *componente diffusa*.



**Figura 2.7:** Descrizione dei termini usati nella definizione del coefficiente di scattering (Mommertz e Vorländer).

La componente diffusa  $E_{diff}$  e quella speculare  $E_{spec}$  dipendono dal *coefficiente di scattering*  $S$ :

$$E_{diff} = S(1 - \alpha_s) \quad (1.43)$$

$$E_{spec} = (1 - S)(1 - \alpha_s) \quad (1.44)$$

La (2.14) può essere scritta in maniera differente:

$$E_{spec} = (1 - \alpha_{spec}) \quad (1.45)$$

in cui  $\alpha_{spec}$  ha il significato di coefficiente di assorbimento apparente se si osserva la sola componente di riflessione speculare.

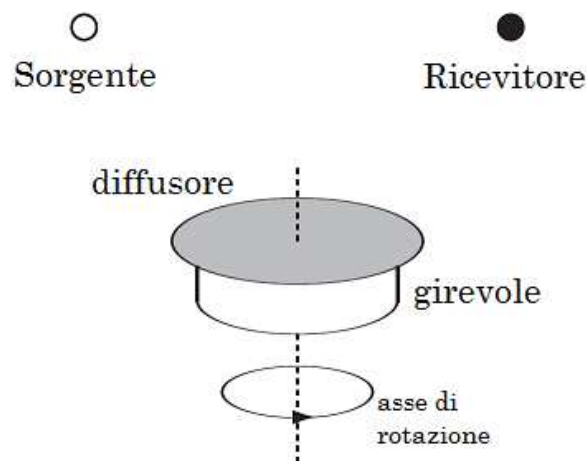
Nella definizione di  $\alpha_{spec}$  si è considerato come energia assorbita tutta quella che non viene riflessa in maniera speculare (energia assorbita dalla superficie ed energia diffusa), questo perché risulta utile nel calcolo del coefficiente di scattering, che può essere così riformulato:

$$S = \frac{\alpha_{spec} - \alpha_s}{1 - \alpha_s} \quad (1.46)$$

La formula precedente ci dice che è possibile determinare il coefficiente di scattering a patto di conoscere  $\alpha_s$  ed  $\alpha_{spec}$ , relativamente ad una determinato diffusore.

Il coefficiente di assorbimento per incidenza casuale  $\alpha_s$  può essere facilmente determinato mediante misura in camera riverberante, secondo il metodo descritto dalla normativa UNI EN ISO 354: 2003; oppure come in questo caso essere calcolato assieme con il coefficiente di assorbimento speculare apparente  $\alpha_{spec}$ , mediante il procedimento descritto nella UNI 17497-1: 2004, procedura che verrà in seguito descritta.

La misura viene condotta all'interno di una camera riverberante, entro cui viene posto il campione, e tramite l'ausilio di una piattaforma rotante motorizzata viene messo in rotazione. La misura necessita di una sorgente e di un microfono, come indicato in figura



**Figura 2.8:** Descrizione della geometria usata nella misura del coefficiente di scattering.

Il diffusore deve avere una forma circolare, altrimenti le misure risulteranno influenzate dalle mutanti condizioni del bordo durante la rotazione. La procedura prevede che vengano misurati i tempi di riverberazione in 4 differenti momenti:

- $T_1$  misurato senza diffusore e base rotante ferma
- $T_2$  misurato con dispositivo e base rotante ferma



- $T_3$  misurato senza dispositivo e base rotante in movimento
- $T_4$  misurato con dispositivo e base rotante in movimento

I tempi di riverberazione vengono calcolati dalla misura delle risposte all'impulso. Il metodo si fonda sull'assunto che nelle risposte all'impulso  $T_3$  e  $T_4$ , per via del fatto che il dispositivo è posto in rotazione, il contributo della diffusione non speculare, proveniente dal dispositivo, venga mediato e si cancelli per cui rimane solo la componente di risposta all'impulso proveniente dalla riflessione speculare. Per il calcolo quindi di  $T_3$  e  $T_4$  è necessario che le risposte all'impulso vengano ottenute da una media di più risposte all'impulso (tipicamente 72) fatte lungo un intero periodo di rotazione. Invece per il calcolo di  $T_1$  e  $T_2$ , quando la base rotante non è in movimento, non è necessario effettuare delle medie e basta quindi la misura di una singola risposta all'impulso. L'aver calcolato  $T_1$  e  $T_3$ , presi in assenza del campione, consente di potere correggere gli effetti dovuti alla presenza della base rotante che non è perfettamente piatta e circolare.

I tempi di riverberazione sono usati per calcolare entrambi i coefficienti di assorbimento, quindi sia quello per incidenza casuale che quello speculare apparente:

$$\alpha_s = 55.3 \frac{V}{S} \left( \frac{1}{c_2 T_2} - \frac{1}{c_1 T_1} \right) - \frac{4V}{S} (m_2 - m_1) \quad (1.47)$$

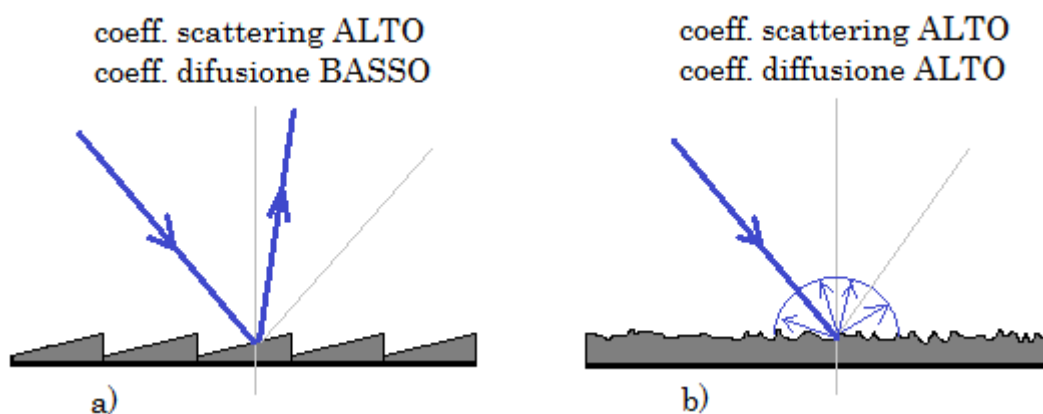
$$\alpha_{spec} = 55.3 \frac{V}{S} \left( \frac{1}{C_4 T_4} - \frac{1}{C_3 T_3} \right) - \frac{4V}{S} (m_4 - m_3) \quad (1.48)$$

$m_i, c_i, T_i$  sono rispettivamente i coefficienti di attenuazione dell'aria, la velocità del suono ed i tempi di riverberazione durante le 4 prove.

Visto la tipologia di prova non è necessario ripetere la misura del coefficiente  $S$ , per più posizioni di sorgente e ricevitore, come veniva fatto nel caso del coefficiente di diffusione. Un test simile si può fare, però piuttosto che in camera riverberante, in campo libero (come riportato da diversi autori) variando l'angolo di incidenza e riflessione; cioè spostando sorgente e microfono, così da ottenere delle indicazioni sul coefficiente di scattering e diversi angoli di incidenza.

## 2.7 Confronto tra coefficiente di diffusione e di scattering

Poiché i due coefficienti hanno significati fisici differenti essi pertanto possono risultare non correlati se osservati riguardo al medesimo diffusore. Infatti affinché il coefficiente di scattering abbia valori elevati è sufficiente che l'energia non venga riflessa in maniera speculare, senza nessun altro requisito di uniformità, come richiesto invece dal coefficiente di diffusione. Ad esempio, in linea di massima, i due diffusori seguenti fornirebbero risultati molto diversi per quanto riguarda i coefficienti di scattering e di diffusione.



**Figura 2.8:** Confronto dei coefficienti di scattering e diffusione relativamente a due tipologie di diffusore.

Oltre ad i risultati che si ottengono, anche i metodi per calcolare i due coefficienti sono sostanzialmente differenti: il coefficiente di diffusione richiede l'uso di un ambiente preferibilmente anecoico e deve essere fatto per diversi angoli di incidenza e riflessione, mentre il coefficiente di scattering richiede invece l'uso di una camera riverberante e di un sistema rotante di precisione ed inoltre che il campione venga costruito in forma circolare quanto più precisa possibile. Entrambi i metodi necessitano di un posizionamento di precisione per sorgente e microfoni, anche se nel caso del coefficiente di scattering di microfoni ne basta uno.

Nella misura del coefficiente di diffusione si ricavano i diagrammi polari di radiazione che mostrano come l'energia è distribuita nello spazio al variare di angolo di incidenza e frequenza, tutte informazioni che non possono essere

ricavate con la tecnica di misura del coefficiente di scattering; quest'ultimo infine non può essere utilizzato per lo studio di dispositivi come i diffusori di Schroeder, per i quali è necessario conoscere la distribuzione angolare dell'energia diffusa.

Entrambi i metodi sono molto influenzati dalle dimensioni contenute che debbono avere i dispositivi sotto test, e quindi dall'inevitabile effetto di bordo, non trascurabile nella misura della diffusione.

## 2.8 Metodi di predizione della diffusione

Ove non risultasse possibile effettuare le misure direttamente sui dispositivi reali, per valutare i coefficienti di diffusione o di scattering, si possono utilizzare diverse tecniche di modellazione acustica al calcolatore.

La tecnica più accurata risulta essere il Boundary Element Method, metodo particolarmente indicato per lo studio dei diffusori geometrici, come quelli di Schroeder, per l'accuratezza con cui possono essere descritte ed implementate nel modello le geometrie di tali dispositivi. La descrizione delle geometrie dei dispositivi e la modellazione delle rugosità, risultano essere due punti particolarmente critici non solo nel BEM ma anche per altri metodi di modellazione, di cui parleremo nel cap.4.

Anche se risulta particolarmente difficoltoso creare un modello accurato, questa operazione consente poi di fare su di esso tutti quei test che sui modelli reali sarebbe difficoltoso fare. Infatti è possibile simulare ambienti perfettamente anecoici e porsi in campo lontano, condizioni non realizzabili con i modelli reali.

## Capitolo 3

# I DIFFUSORI DI SCHROEDER

### 3.1 Introduzione

I diffusori di Schroeder sono diffusori acustici passivi, ed appartengono alla categoria dei diffusori a reticolo di fase, servono a diffondere l'onda sonora incidente evitando riflessioni speculari.

I diffusori di Schroeder sono stati inizialmente utilizzati per migliorare l'acustica di sale da concerto ed auditori, (primi studi di Schroeder), ma possono essere usati la dove vi sia la necessità, per motivi diversi, di avere una riflessione diffusa a larga banda. Vengono applicati sui muri o a soffitto, ad esempio nelle sale di registrazione o di controllo, dove si devono evitare riflessioni speculari dannose e contemporaneamente mantenere un adeguato livello energetico nell'ambiente.

### 3.2 Principio di funzionamento

Sono costituiti da pannelli su cui sono presenti scanalature parallele di ampiezza costante e differente profondità; la profondità è determinata da sequenze numeriche come le sequenze dei residui quadratici o di radice primitiva.

Nella figura 3.1 è rappresentato un diffusore unidimensionale, cioè se si considera un'onda piana incidente normalmente la superficie, l'onda verrà riflessa con simmetria cilindrica, quindi la diffusione avviene secondo un solo piano, perpendicolare alla direzione delle scanalature.

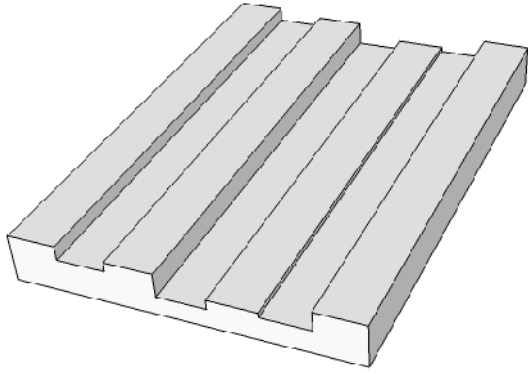


Figura 3.1: Diffusore unidimensionale.



Figura 3.2: Diffusione cilindrica.

Possono essere realizzati diffusori omnidirezionali con struttura a scacchiera come in figura 3.3, in questo caso le dimensioni delle tessere sono costanti, cambia la profondità. Anche in questo caso la matrice numerica utilizzata per costruire i diffusori è ricavata da sequenze numeriche che non sono poste in array ma in una matrice.

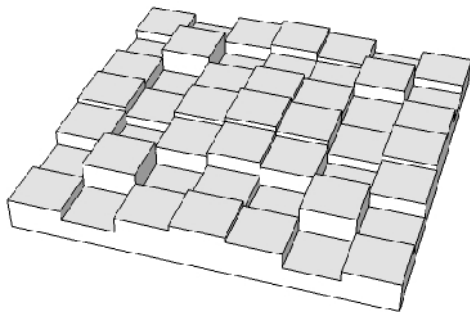


Figura 3.3: Diffusore bidimensionale.

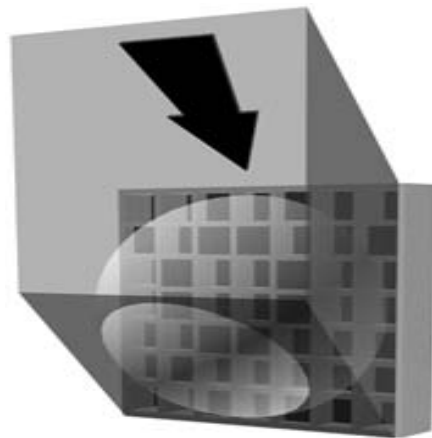


Figura 3.4: Diffusione emisferica.

Se si considera un'onda sonora piana, incidente sulla superficie del diffusore, essa si propagherà all'interno dei setti, fino a raggiungere il fondo per essere riflessa e riemergere dal diffusore. A questo punto il fronte d'onda che era piano si trova suddiviso in tante parti, che possono essere considerate come sorgenti secondarie, ognuna delle quali avrà stessa ampiezza delle altre (se si ipotizza che non vi è assorbimento di energia) ma fase che varia in relazione al

percorso fatto dall'onda all'interno del setto. Si avrà, come conseguenza, che la distribuzione polare dell'onda diffratta dipenderà dalla profondità dei setti.

Schroeder ha dimostrato che sequenze come quella dei residui quadratici generano una distribuzione uniforme dell'energia nei lobi di diffrazione.

### 3.3 Dispersione spaziale e temporale

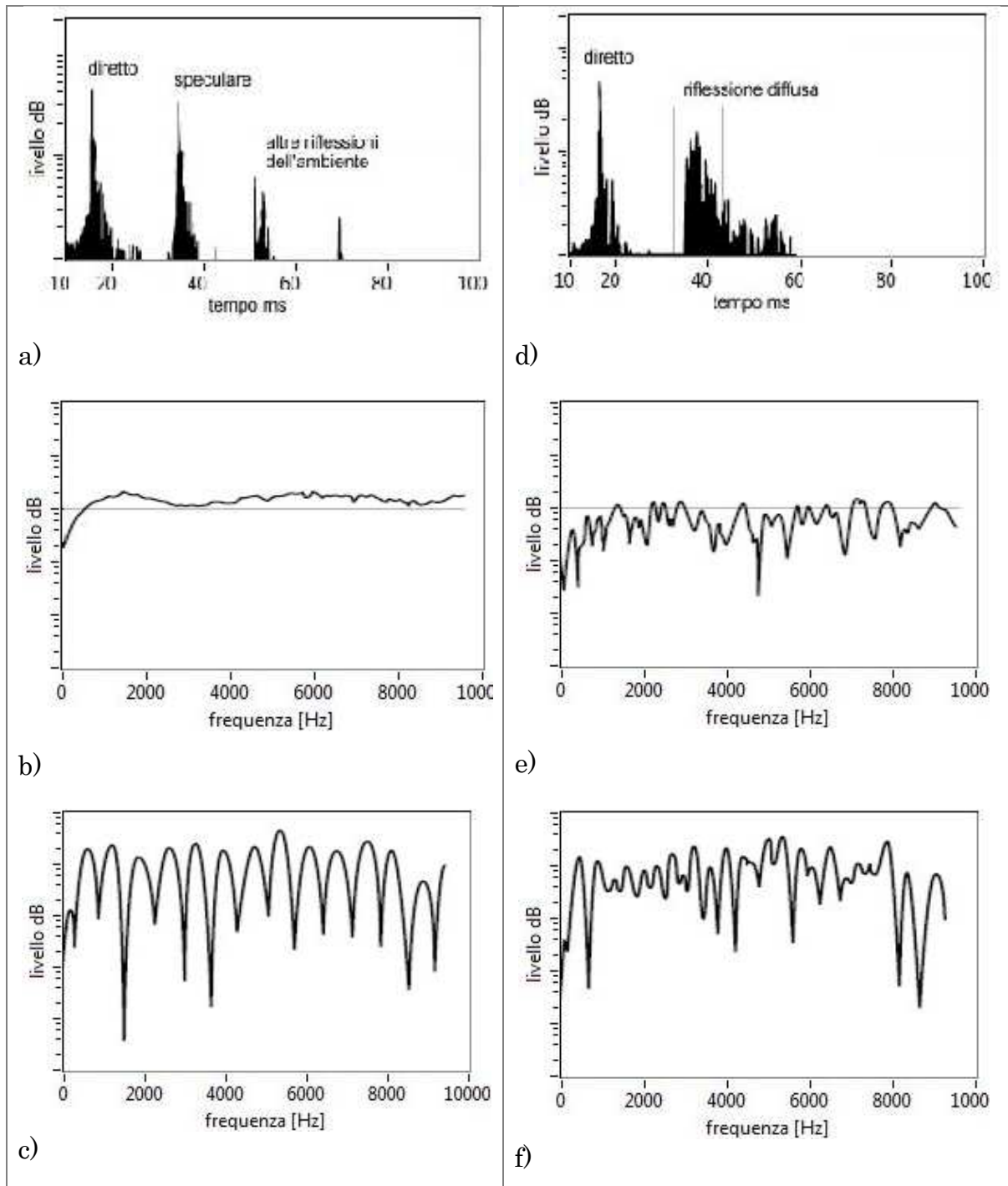
La conformazione della superficie è tale da generare una redistribuzione dell'energia incidente sia nello spazio che nel tempo.

La massima profondità dei setti determina l'entità della dispersione temporale, (restituzione dell'energia da parte del pannello), mentre la densità della riflessione in termini angolari è legata alla distribuzione spaziale dei vari setti lungo tutta la superficie.

Nella risposta temporale è contenuto sia il suono diretto che la riflessione ed il suono diffuso dalle superfici.

Con riferimento alle figure 3.5, osservando la risposta nel tempo si vede come quella generata dal diffusore presenti una maggiore distribuzione dell'energia nel tempo.

Nel dominio della frequenza si possono fare delle osservazioni: se si analizza la parte della risposta, escludendo l'onda incidente, si ottiene che la superficie piatta non deforma il contenuto spettrale dell'onda riflessa a meno dell'introduzione di un effetto "passa basso" causato dalle dimensioni finite del dispositivo, con una leggera ondulazione dello spettro; mentre lo spettro della parte diffusa dalla risposta del diffusore presenta lo stesso effetto passa basso associato ad oscillazioni uniformanti distribuite nello spettro. Se però si include nell'onda anche la parte dell'onda diretta si vede come, nel caso della superficie piatta, si abbia un marcato effetto pettine mentre per quando riguarda il diffusore questo effetto è molto ridotto.



**Figura 3.5:** Nelle immagini si vede la risposta nel tempo ed in frequenza di una superficie piatta a), b), c) e di un diffusore d), e), f).

### 3.4 Effetto dei diffusori in luoghi acusticamente critici

E' di esperienza comune che gli ambienti che godono di ottima reputazione, per avere una buona acustica, abbiano uno stile architettonico tale da garantire naturalmente una buona diffusione del suono al loro interno; quindi sale da

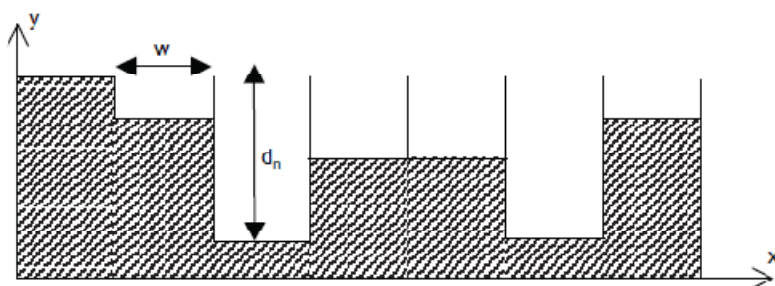
concerto che contengono vari ordini di balconi, statue, decorazioni e superfici curve, realizzati probabilmente ai soli fini estetici, ma con l'effetto di creare un alto grado di diffusione del suono all'interno dell'ambiente.

Nelle recenti costruzioni però le differenti esigenze estetiche, nonché di spazio ed economiche, portano a criteri di progettazione differenti rispetto a quelli di un tempo. Di conseguenza l'obiettivo adesso risulta essere quello di realizzare una adeguata diffusione a larga banda e per tutti gli angoli, e nel contempo soddisfare le esigenze estetiche, realizzando installazioni gradevoli ed integrate nell'ambiente.

### 3.5 Criteri di progettazione

Affinchè sia possibile ricavare delle formule utili per la progettazione dei diffusori è necessario fare delle ipotesi di lavoro, entro le quali i dispositivi avranno il loro massimo di efficacia.

All'ipotesi iniziale di un'onda piana incidente si aggiunge il fatto che la planarità dell'onda debba essere mantenuta anche attraverso i setti quindi in prima istanza l'ampiezza di essi, indicata con  $w$ , pone un limite massimo alla frequenza di progetto:



$$w = \lambda_{\min} \quad (1.49)$$

$$f_{\max} = \frac{c}{2w} \quad (1.50)$$

**Figura 3.6:** Profilo di un diffusore.

per frequenze maggiori di quelle corrispondenti a  $\lambda_{\min}$  si avranno all'interno dei setti dei modi trasversali, venendo così a mancare l'ipotesi di planarità dell'onda che si propaga all'interno di essi.



Al di sopra di tale frequenza si avrà comunque diffusione dell'onda sonora, per via delle irregolarità del profilo, ma la teoria non è più valida. Affinché si possa arrivare alla definizione della profondità dei setti, è necessario stabilire quella che è la frequenza di lavoro (che in termini di lunghezze d'onda diventa  $\lambda_0$ ) che assieme alle sequenze  $s_n$  andrà a definire le dimensioni del profilo:

$$d_n = \frac{s_n \lambda_0}{2N} \quad (1.51)$$

dove  $N$  è il numero primo utilizzato per generare la sequenza.

E' possibile ricavare il valore di  $N$  a partire dalla relazione (3.9) imponendo il valore  $m_{max}$  che è il numero massimo dei lobi presenti nelle figure di diffrazione

$$N = \frac{m_{max} c}{f_0 w} \quad (1.52)$$

con  $\alpha_i = 0^\circ$  ed  $|\sin \theta| = 1$ . Si avranno quindi  $(2N + 1)$  direzioni di diffrazione comprese tra gli angoli  $\theta = -90^\circ$  e  $\theta = +90^\circ$ .

Un'altra espressione che si può usare per calcolare il valore di  $N$  è:

$$N = \frac{2m_{max} f_{max}}{f_0} \quad (1.53)$$

ottenuta dalle combinazioni di (3.2) e (3.4). Poiché comunque  $N$  deve essere un numero primo, il valore ottenuto deve essere aggiustato al valore del prossimo primo più vicino.

Sono stati così definiti i parametri principali per la realizzazione del diffusore:  $w$  la larghezza dei setti,  $d_n$  la loro profondità,  $\lambda_{min}$  ci fornisce la massima frequenza  $f_{max}$ , per la quale la formulazione risulta valida ed  $\lambda_0$  che deve essere scelta in modo tale che  $f_0$  sia la minima frequenza per la quale si ha distribuzione uniforme.

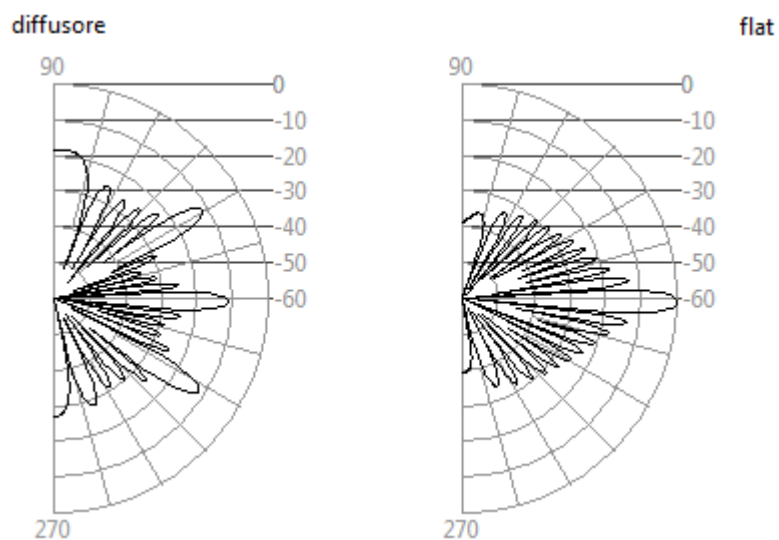
Il diffusore funzionerà egualmente per frequenze che sono multipli interi della frequenza di progetto  $f_0$ ; inoltre la  $f_0$  non sarà la minima frequenza alla quale avviene lo scattering ma la prima per la quale si ha validità della formulazione.

I diffusori vengono realizzati per ripetizione periodica della sequenza di base, cioè mettendo le singole sequenze  $s_n$  una di fianco all'altra. Come è facile intuire le prestazioni del diffusore varieranno in relazione alla progettazione della sequenza di base ed al numero di periodi.

Per visualizzare l'effetto della diffusione si usano i diagrammi polari di radiazione, che rappresentano l'ampiezza dell'onda diffratta in funzione dell'angolo, noti che siano la frequenza di osservazione e l'angolo d'incidenza.

Questi diagrammi possono essere ricavati, come vedremo in seguito, tramite formule previsionali a partire dalle sequenze  $s_n$ , oppure si possono ottenere da misure fisiche su dispositivi reali.

Nella figura di seguito vengono riportati i diagrammi di diffusione relativamente ad un diffusore di Schroeder e di una superficie piana.



**Figura 3.7:** Diagrammi polari di diffusione.

I valori indicati sono espressi in dB, e sono quindi relativi ad un valore di riferimento arbitrario, che spesso per comodità sarà il valore misurato nella direzione speculare (di massima radiazione) di una superficie piana di uguale dimensione del diffusore sotto indagine.

### 3.6 Prestazioni dei diffusori

Le relazioni utilizzate per la progettazione dei diffusori e per la valutazione delle loro prestazioni derivano dalla formulazione del campo sonoro diffratto secondo l'approssimazione di Fraunhofer per il campo lontano. La relazione semplificata che esprime il valore della pressione per il campo lontano è la seguente:

$$|p(\theta, \alpha)| = \left| A [\cos(\theta) + 1] \int_s e^{ikx[\sin(\theta) + \sin(\alpha)] - 2ikd(x)} dx \right| \quad (1.54)$$

Dove  $\alpha$  è l'angolo di incidenza,  $\theta$  l'angolo di riflessione,  $d(x)$  la profondità del diffusore nel punto  $x$ , ed  $A$  una costante dipendente dalla distanza dal diffusore.

Questa formulazione è la stessa utilizzata inizialmente da Schroeder nella sua argomentazione, dove è aggiunto il termine di correzione  $[\cos(\theta) + 1]$  che migliora l'approssimazione per onda incidente obliqua.

Come già accennato, questa formulazione rimane valida nell'ipotesi in cui sorgente e ricevitore sono in campo lontano, assieme alla assunzione di planarità dell'onda all'interno dei setti ed all'assenza di assorbimento di energia all'interno di essi. Il modello diviene meno accurato alle basse frequenze e per angoli di incidenza e riflessione obliqui.

L'integrale dell'equazione (3.6) può essere visto come le trasformate di Fourier dalle variabili  $(kx)$  in  $[\sin(\theta) + \sin(\alpha)]$ , quindi se per semplicità si scrive:

$$|p(\theta, \alpha)| \approx \left| A \int_s R(x) e^{ikx[\sin(\theta) + \sin(\alpha)]} dx \right| \quad (1.55)$$

si vede che se  $R(x)$  si sceglie in modo tale da avere spettro di potenza piatto rispetto a  $(kx)$  allora si avrà spettro costante rispetto alla variabile  $[\sin(\theta) + \sin(\alpha)]$ .

Quindi non vi è un legame diretto con l'angolo di diffrazione, cioè a spettro uniforme di  $R(x)$  non corrisponde diffusione uniforme in  $\theta$ , ma piuttosto, come si vedrà, l'uniformità sarà relativa all'ampiezza dei lobi di diffrazione; per cui

si avrà eguale distribuzione di energia tra i vari lobi di diffrazione. La comparsa dei lobi di diffrazione si ha per quegli angoli in cui i vari contributi provenienti dalle superfici di diffusione si sommano in fase.

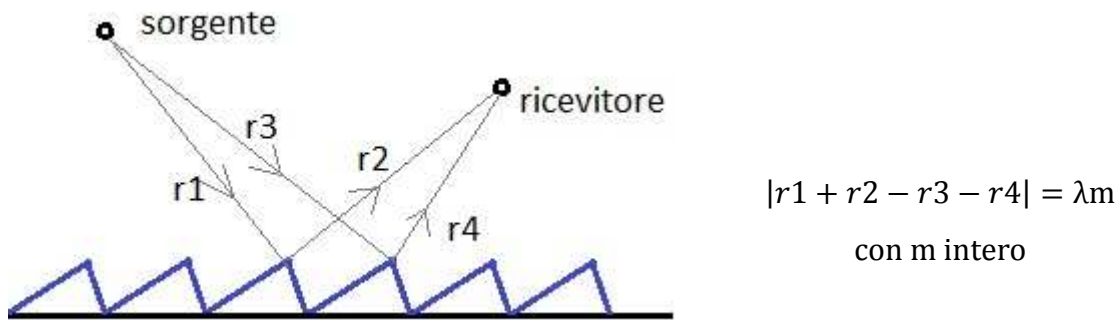


Figura 3.8: Profilo di un elemento diffusore con distanze dei raggi tra sorgente e ricevitore.

Si consideri infatti la situazione in cui il diffusore è costituito da una ripetizione periodica di periodo  $N$ , con larghezza dei setti  $w$ .

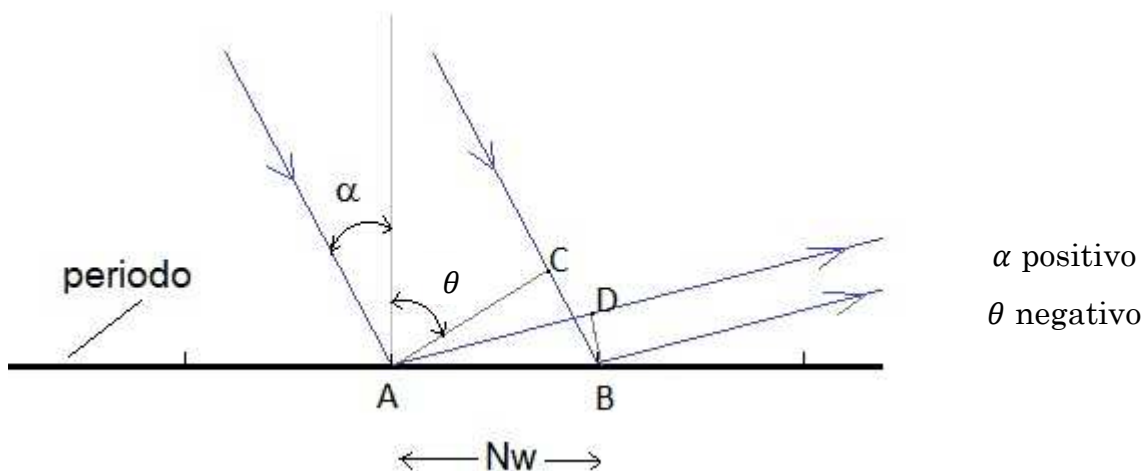


Figura 3.9: Periodi di diffusori affiancati con definizione degli angoli di incidenza e di diffrazione.

La differenza di percorso tra i due raggi è data da  $AD - CB$ , gli angoli per cui questa differenza è un multiplo della lunghezza d'onda, i due raggi si sommeranno in fase:  $AD - CB = \lambda m$  con  $m$  intero, positivo o negativo.

Dalla figura 3.8 si vede che  $AD = Nw \sin(\alpha)$ , e  $CB = -Nw \sin \theta$  (il meno compare per via del fatto che  $\theta$  è preso negativo rispetto all'asse verticale in accordo con  $\alpha$  che è positivo) quindi si ottiene

$$m\lambda = Nw(\sin\alpha + \sin\theta) \quad (1.56)$$

da cui si ricavano gli angoli a cui compaiono i lobi:

$$\sin\theta = \frac{m\lambda}{Nw} - \sin\alpha \quad (1.57)$$

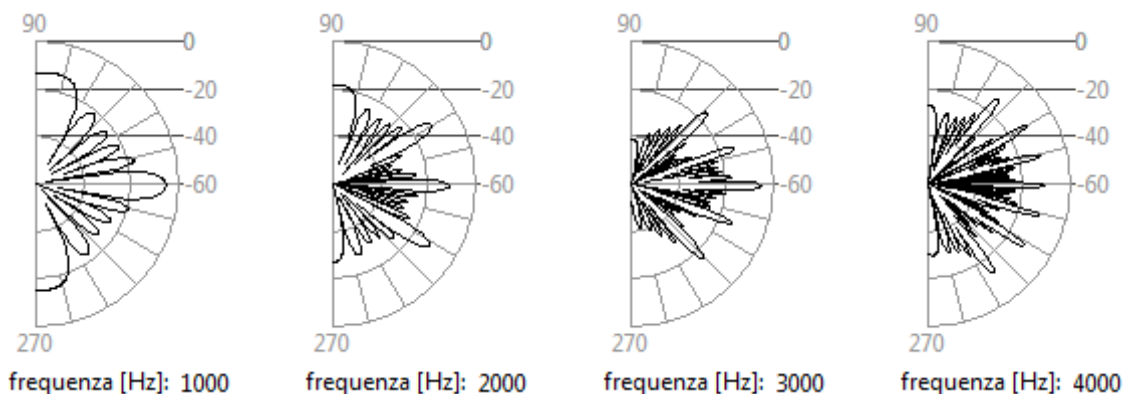
per un dato angolo di incidenza  $\alpha$ , gli angoli per cui si verifica l'uguaglianza dipendono da  $Nw$  quindi dalla lunghezza del singolo periodo, dalla lunghezza d'onda  $\lambda$ , e dall'ordine  $m$ , a patto che il valore nel lato destro dell'equazione non sia superiore all'unità.

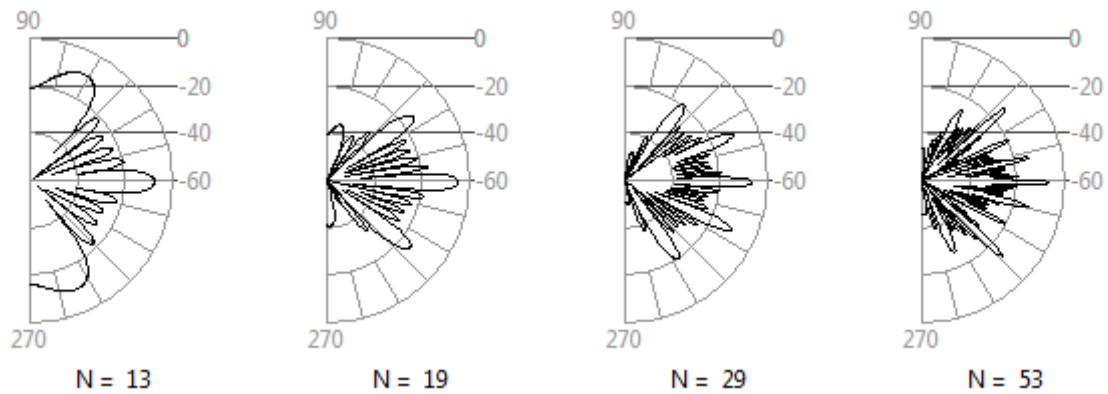
L'ordine del lobo di diffrazione corrisponde al valore di  $m$ , l'ordine zero corrisponde ad una riflessione speculare  $\sin(\theta) = -\sin(\alpha)$ .

Si può vedere come affinché il secondo membro dell'equazione sia consistente (abbia valore  $\leq 1$ ), l'ordine  $m$  massimo dipenda dalla lunghezza d'onda, infatti al diminuire di  $\lambda$ , può aumentare  $m$  a parità delle altre condizioni. Per questa ragione si vedrà come per frequenze più elevate il numero di lobi sarà maggiore. Analogamente, a parità di frequenza il numero di lobi aumenta all'aumentare del prodotto  $Nw$ , quindi della dimensione del periodo principale del diffusore, vedi figura 3.10. Se si sostituisce l'equazione (3.9) in (3.7) si ottiene:

$$|p_m| \approx \left| A \int_s R(x) e^{i2\pi xm/Nw} dx \right| \quad (1.58)$$

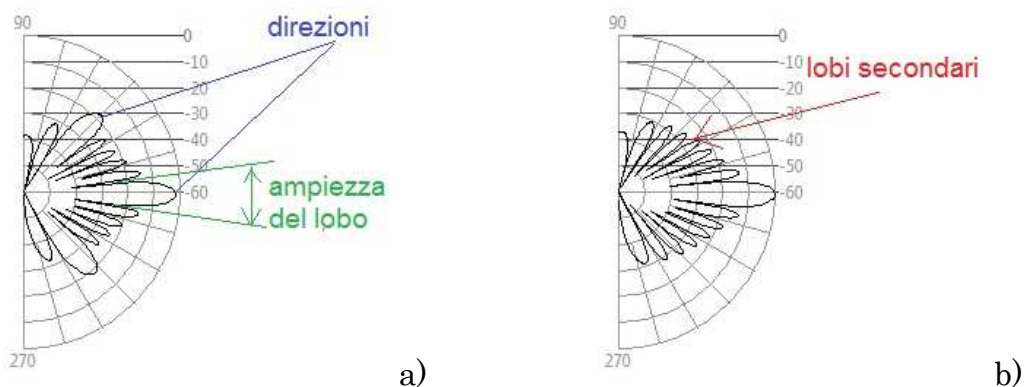
esprime l'ampiezza del lobo di ordine  $m$  in termini della trasformata di Fourier di  $R(x)$ .





**Figura 3.10:** Diagrammi di diffusione, al variare della frequenza (prima riga) ed al variare di N (seconda riga).

Nelle applicazioni reali i diffusori presentano un numero finito di periodi (uno o più d'uno), quindi l'estensione totale del diffusore è limitata; questo produce come effetto un allargamento dei lobi attorno alle direzioni di diffrazione (figura 3.11a). Inoltre la limitatezza nella lunghezza del periodo principale causa la comparsa di lobi di radiazione secondari, di fianco ad i lobi principali posti negli angoli predetti con (3.9), come si può vedere in figura 3.11b.



**Figura 3.11:** Diagrammi polari con indicazioni delle direzioni dei lobi e della larghezza a), in b) si nota la presenza dei lobi secondari.

Aumentare il numero dei periodi produce la concentrazione dell'energia nelle direzioni di diffrazione, quindi i lobi principali tendono a diventare sempre più stretti.

Per il calcolo dei diagrammi polari di radiazione in campo lontano dei diffusori è opportuno esprimere la (3.6) sotto forma di somma discreta, ipotizzando che i setti siano singole superfici radianti puntiformi, o meglio pistonni radianti:

$$|p(\theta, \alpha)| = \left| iAw [\cos(\theta) + 1] \operatorname{sinc}(kw\beta / 2) \sum_{p=0}^{n_p-1} e^{ikpNw\beta} \sum_{n=1}^N R_n e^{iknw\beta} \right| \quad (1.59)$$

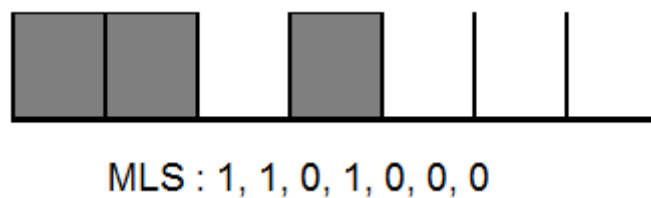
dove  $\beta = \sin(\theta) + \sin(\alpha)$ , il termine  $iwsinc(.)$  serve a rappresentare il setto come singola superficie radiante finita, e può essere eliminato se si vuole considerare la superficie radiante come puntiforme (a scapito della precisione). Il termine  $np$  rappresenta il numero di periodi mentre  $R_n = e^{-i2kd_n}$ , la forma discretizzata di  $R(x)$ , rappresenta il cambiamento di fase introdotto da ciascun setto sul fronte d'onda che impatta la superficie del diffusore.

I termini  $\cos(.)$  e  $\operatorname{sinc}(.)$ , migliorano l'approssimazione della formulazione matematica, ma ci si allontana dalla formulazione originaria di Schroeder, per cui l'energia dei lobi è solamente proporzionale e non identica alla trasformata di Fourier della serie  $d_n$ .

### 3.7 Sequenze

I primi lavori di Schroeder furono fatti sulle sequenze *MLS*, che sono sequenze binarie aventi la proprietà di avere lo spettro piatto a meno della componente continua.

Un esempio di diffusore di "lunghezza 7" è rappresentato nella seguente immagine:



**Figura 3.12:** Diffusore MLS.

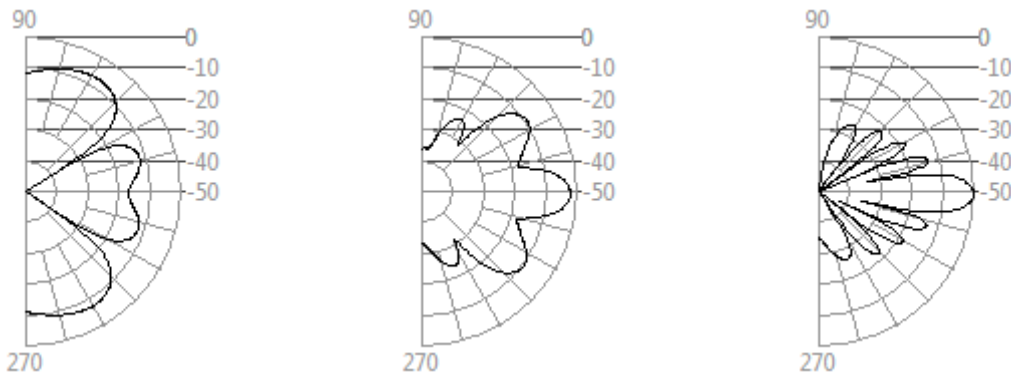
per ottenere le caratteristiche di diffusione, si consideri la formula (3.10), che in forma semplificata si può scrivere come

$$|pm| \approx \left| A \sum_{n=1}^N R_n e^{i2\pi nm/N} \right| = \begin{cases} A & \text{per } m=0, \pm N, \pm 2N \dots \\ A\sqrt{N+1} & \text{altrove} \end{cases} \quad (1.60)$$

quindi i lobi di radiazione che si trovano tra un lobo principale e l'altro, avranno la stessa ampiezza, minore di un fattore  $\sqrt{N+1}$  rispetto al lobo di ordine zero.

Se si considera una sequenza di lunghezza 7, essa avrà 5 lobi, per  $w < \lambda/4$ , i lobi secondari saranno minori di  $10 \log_{10}(N+1)$  dB quindi  $10 \log_{10}(8)$  dB.

In figura si vedono alcuni esempi :



a)  $MLS n = 7 e w = \lambda/4$     b)  $MLS n = 7 e w = 3\lambda/8$     c)  $MLS n = 7 e w = \lambda/2$

**Figura 3.13:** Diagrammi di diffusione per diffusore MLS.

Per frequenza di un ottava superiore si avrà che  $n = \lambda/2$ , la superficie si comporterà come una superficie patta perché tutti i setti irradieranno con la stessa fase, si è raggiunta la “frequenza critica”, questo limita il funzionamento di questi diffusori ad una sola ottava.

### 3.8 Diffusori a radice primitiva

Hanno la caratteristica di ridurre al massimo la riflessione in direzione speculare rispetto a quella di incidenza, ridistribuendo allo stesso tempo l'energia in maniera uniforme tra tutti gli altri lobi di diffusione. Questo effetto si ottiene per la frequenza di progetto e per multipli di essa.



Volendo osservare cosa accade nella direzione speculare, si può ricavare dalla (3.11):

$$|p(\theta, -\theta)|_{PRD} = \left| A [\cos(\theta) + 1] w \sum_{n=1}^{N-1} e^{-2jkd_n} \right| \quad (1.61)$$

Sostituendo  $d_n = \frac{s_n \lambda_0}{2N}$ , si ottiene:

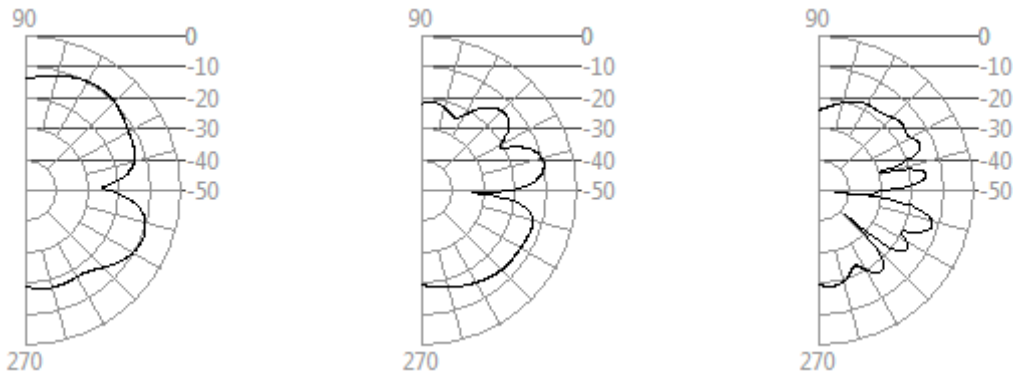
$$|p(\theta, -\theta)|_{PRD} = \left| A [\cos(\theta) + 1] w \sum_{n=1}^{N-1} e^{-2\pi i n / (N-1)} \right| = Aw [\cos(\theta) + 1] \quad (1.62)$$

mentre per una superficie piana si ottiene:

$$|p(\theta, -\theta)|_{flat} = Aw [\cos(\theta) + 1] (N - 1) \quad (1.63)$$

Il risultato è che il livello irradiato in direzione speculare, per un diffusore di tipo *PRD*, è ridotto di un fattore  $(N - 1)$  rispetto allo stesso livello irradiato nella stessa direzione da una superficie piana.

Le prestazioni dei diffusori a radice primitiva nel sopprimere le riflessioni speculari migliorano all'aumentare del numero  $N$ :



a) PRD  $N=13$ , per  $f=f_0$

b) PRD  $N=19$ , per  $f=f_0$

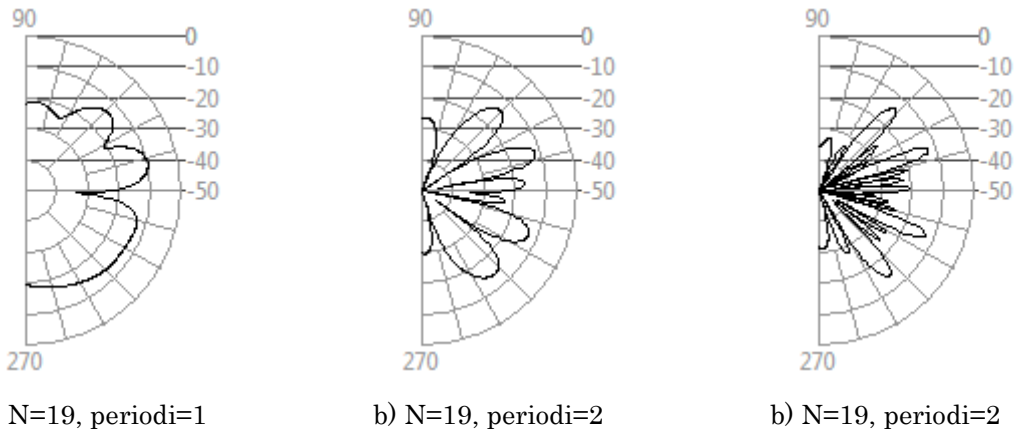
b) PRD  $N=37$ , per  $f=f_0$

**Figura 3.14:** Diagrammi polari di tre diversi diffusori a radice primitiva, per  $f=f_0$ . Si nota l'annullamento della riflessione speculare a  $0^\circ$ .

Come si può vedere dalle figure, l'effetto diventa rilevante quando  $N$  diventa maggiore di 20-30, quindi comincia a manifestarsi l'effetto di un minimo nel diagramma polare in direzione speculare all'incidente.

Un altro importante risultato che si ottiene con i diffusori a radice primitiva è che l'ampiezza del campo diffratto in direzione non speculare (ordine di diffrazione diverso da zero) è la stessa per tutti i lobi di diffrazione.

Questo risultato non è sempre vero soprattutto se si considerano solamente pochi periodi di ripetizione del diffusore:



**Figura 3.15:** Diffusore a radice primitiva al variare del numero di periodi.

Dal punto di vista matematico, per un singolo periodo si ha:

$$|pm| = \left| \sum_{n=1}^{N-1} e^{\frac{-2i\pi n s_n}{N}} e^{\frac{2i\pi n m}{N-1}} \right| = \begin{cases} 1 & m=0 \\ \sqrt{N} & m=\pm 1, \pm 2, \dots, m \leq (N-1) \end{cases} \quad (1.64)$$

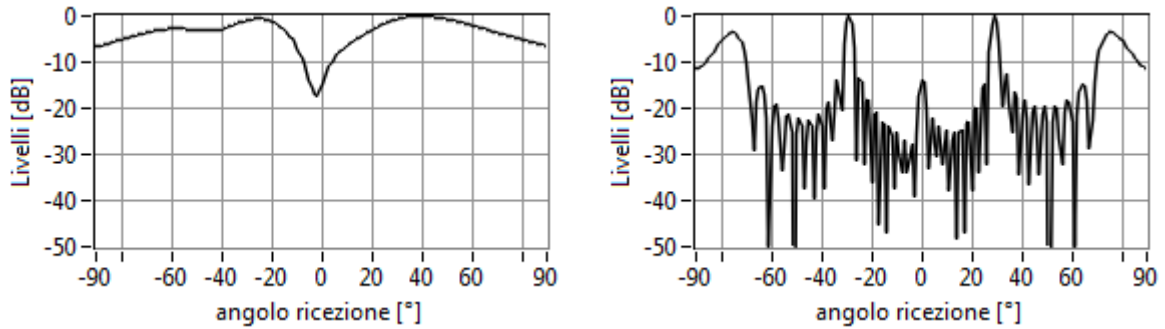
dove l'indice  $m$  rappresenta l'ordine del relativo lobo di diffrazione ( $m=0$ , indica riflessione speculare).

Per diffusori con più periodi si ha invece la (3.11), dove  $n_p$  rappresenta il numero di periodi, mentre per trovare le direzioni secondo le quali sono orientati i lobi di diffrazione si usa la:

$$\beta = \sin(\theta) + \sin(\alpha) = \frac{m\lambda_0}{(N-1)w} \quad (1.65)$$

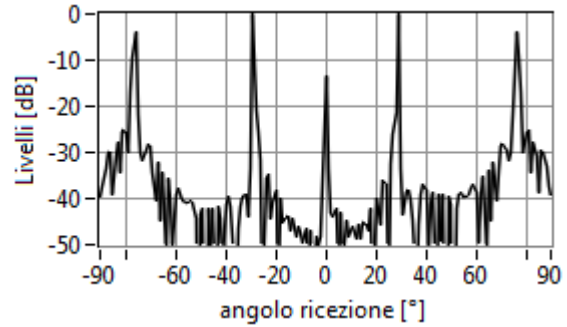
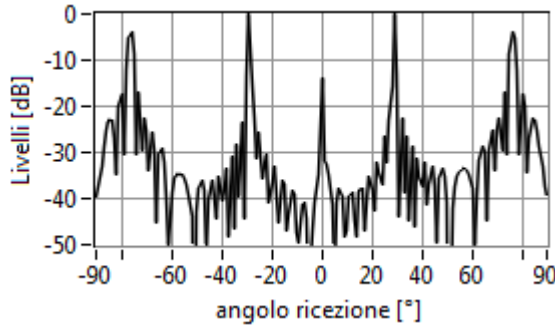
con  $m \neq 0$  e dove  $\lambda_0$  rappresenta la frequenza di progetto.

Comunque in queste direzioni si avranno solo dei picchi, nella distribuzione dell'onda diffratta, quando il diffusore è composto da pochi periodi ripetuti:



a)  $N=29$ , periodi=1

b)  $N=29$ , periodi=10



c)  $N=29$ , periodi=50

d)  $N=29$ , periodi=100

**Figura 3.16:** Diagrammi di diffusione per PRD con  $N=29$  al variare il numero di periodi di ripetizione.

La periodicità fa aumentare l'energia nei vari lobi di diffrazione, ma ha come effetto negativo che essi si restringono in ampiezza (dispersione angolare) questo fa sì che la diffusione sia meno uniforme.

Come si è visto, siffatti diffusori, a radice primitiva (*PRD*), hanno lobo di diffrazione di ordine zero (direzione speculare) che non è perfettamente nullo, ma semplicemente ha ridotto di un fattore  $\sqrt{N}$  rispetto ad i lobi di ordine superiore.

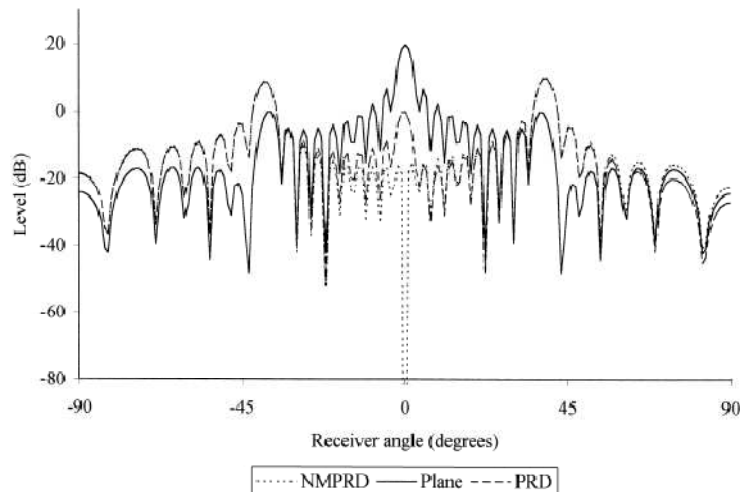
Un ulteriore miglioramento in questa direzione è stato introdotto da Feldman, il quale ha studiato delle sequenze *FMPRD* (Feldman Modified Primitive Root diffuser) che contengono un valore zero aggiunto alla sequenza originaria dei numeri tra 1 ed  $N - 1$  che diventa quindi una sequenza di tutti i numeri tra 0 ed  $N - 1$ .

Calcolando la (3.15) con sequenze di questo tipo si ottiene un valore nullo.

In maniera differente, Cox e D'Antonio, hanno ottenuto un risultato simile modificando la relazione che lega la sequenza  $d_n$ , della profondità dei setti, con la sequenza  $s_n$ , nella fase di progetto, che diventa:  $d_n = \frac{s_n \lambda_0}{2(N-1)}$ . Questo produce come effetto l'annullamento dell'ordine zero di diffrazione, dalla (3.15),

$|p(\theta, -\theta)| = 0$ . Queste sequenze vengono chiamate *NMPRD* (New Modified Primitive Root Diffusers).

Nelle immagini seguenti si vedono dei confronti tra *PRD*, *NMPRD* e superficie piana di riferimento:



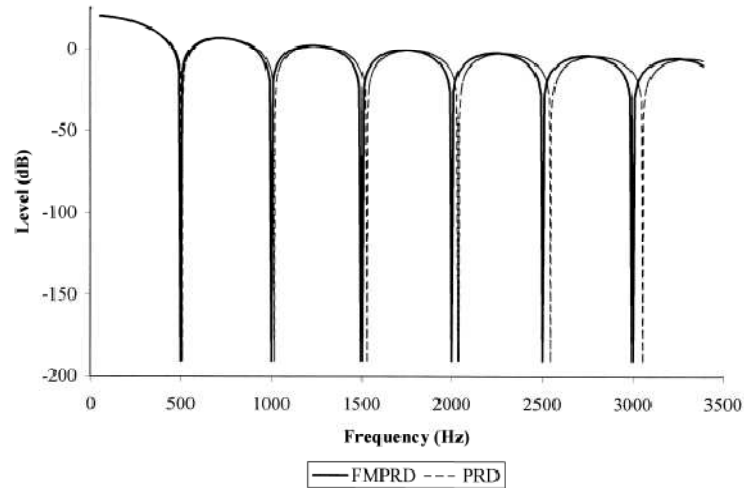
**Figura 3.17:** Diagrammi di diffusione per i diffusori NMPRD, PRD, superficie piana.

si vede come entrambe le sequenze modificate producano un annullamento della riflessione speculare (alla frequenza di progetto e multipli interi di essa). Il fatto di aver modificato le sequenze originarie di radice primitiva fa sì che essa non abbia più spettro perfettamente piatto e quindi l'uniformità dell'energia nei vari lobi di diffrazione viene alterata. Questo effetto diventa più importante all'aumentare del numero di periodi di sequenze modificate, quando si ha maggiore concentrazione nei lobi ed essi risultano più marcati.

### 3.9 Prestazioni dei diffusori a radice primitiva

Come previsto dalla teoria di Fraunhofer, questo tipo di diffusori mantengono le loro caratteristiche, oltre che per la frequenza di progetto, anche per multipli interi di essa.

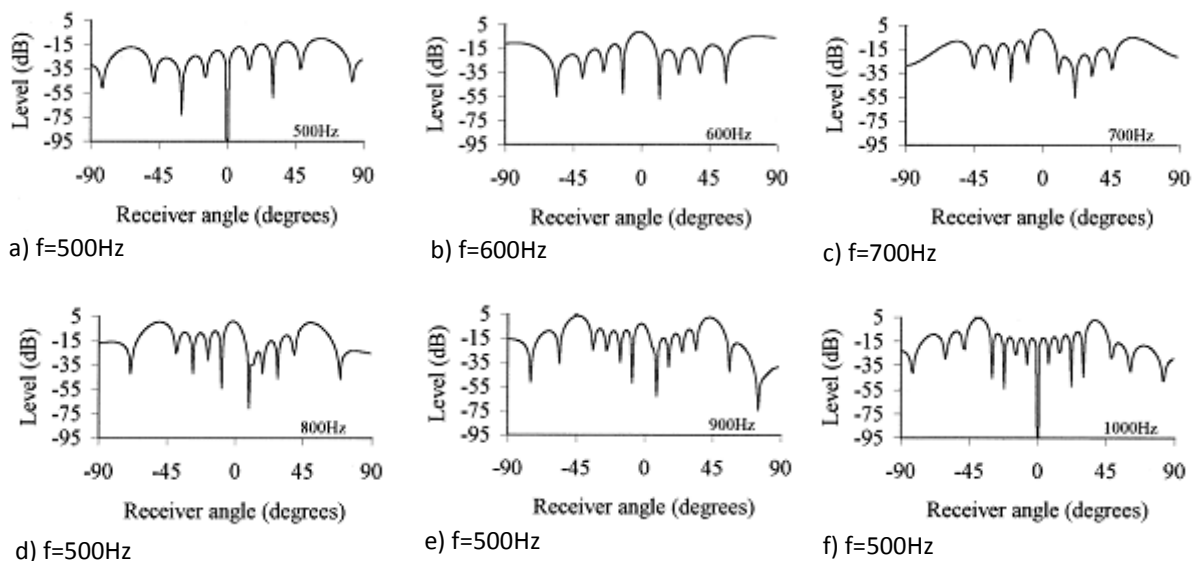
Se si osservano al variare della frequenza, da quella di progetto  $f_0$  a salire fino a  $2f_0, 3f_0, \dots$ , si vede come la caratteristica di annullamento sia verificata solo per un numero discreto di frequenze:



**Figura 3.18:** Livello in direzione speculare  $|p(\theta, -\theta)|_{PRD}$  per due sequenze: PRD ed NMPRD.  $n_p=2$ ,  $N=53$ ,  $f_0=500\text{Hz}$ .

Anche se la banda di funzionamento di questi dispositivi è molto stretta, ci sono delle situazioni in cui essi possono risultare molto utili soprattutto negli ambienti con modi propri molto marcati che debbono essere ridotti.

Dalla figura si vede pure come per le sequenze  $PRD$ , si abbia annullamento per frequenze multiple di  $N/(N - 1)$  volte quello di progetto  $f_0$ , questo per via del fatto che la lunghezza delle sequenze non è  $N$  bensì  $N - 1$ .



**Figura 3.19:** Diagrammi di diffusione per un FMPRD con  $N=11$ ,  $f_0=500\text{Hz}$  e  $w=5\text{cm}$ .

La situazione è differente per le sequenze modificate *NMPRD* ed *FMPRD* per le quali l'annullamento si ha esattamente per multipli della sequenza di progetto  $f_0$ .

### 3.10 Altro sulla sequenza e sulla frequenza di progetto dei *PRD*

I *PRD* vengono generati a partire dalle sequenze a radice primitiva, alla quale vengono applicati i parametri di progetto per generare la sequenza  $d_n$  della profondità dei setti.

Considerando una sequenza con  $N = 11$  e  $g = 2$  (rispettivamente numero primo e radice primitiva), si ottiene un diffusore i cui setti hanno profondità proporzionale alla sequenza:

$$s_n = 2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6, 1, \dots$$

e via di seguito in maniera periodica.

Risulta chiaro che i 10 numeri minori sono “una permutazione” degli interi 1, 2, ...10, infatti ognuno di essi appare nella sequenza una sola volta.

Il motivo per cui proprio la sequenza generata da radice primitiva sia differente rispetto alle altre 3 milioni di permutazioni è che la trasformata di Fourier della sequenza:

$$R_n = e^{i2\pi s_n/N} \tag{1.66}$$

ha componenti costanti, tranne quella di ordine zero che è più piccola.

Ma cosa accade se la frequenza diventa 2, 3, 4, ...10 volte maggiore?

Per una frequenza 5 volte maggiore ad  $f_0$ , l'effettiva sequenza diventa

$$s_n = 10, 9, 7, 3, 6, 1, 2, 4, 8 \dots \text{ e così via}$$

che è esattamente la sequenza di partenza traslata ciclicamente di 4 posizioni.

Come è facile dimostrare, il modulo della trasformata di Fourier (che determina il comportamento del diffusore) non è affetto da tale traslazione, quindi il comportamento in frequenza del diffusore si ripete per multipli interi

della  $f_0$  di progetto; solo se si moltiplica per multipli di 11, in questo caso, questo ragionamento non è più valido.

Infatti tutti i resti modulo 11 saranno zero, ed il diffusore si comporterà come una superficie piatta. Quindi un diffusore con una frequenza di progetto  $f_0$ , avrà un comportamento analogo a tutte le frequenze multiple di  $f_0$ , tranne per  $f = 11f_0$  per la quale si comporterà esattamente come una superficie liscia.

### 3.11 Diffusori QRD

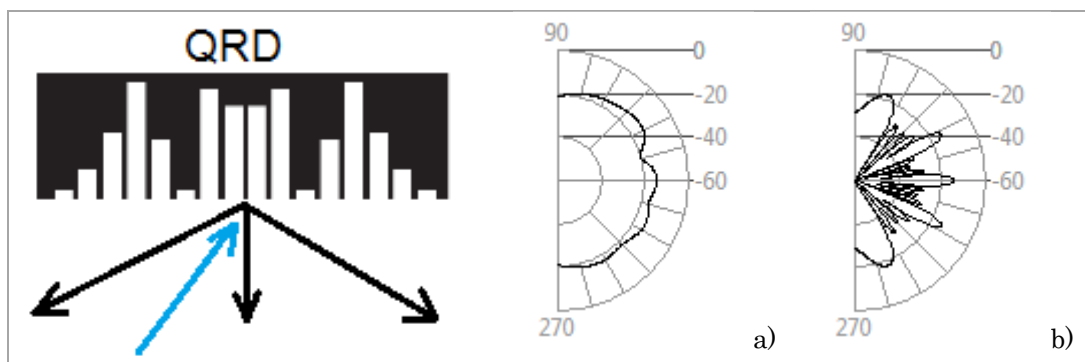
La sequenza utilizzata per realizzare i diffusori a resto quadratico *QRD* (Quadratic Residue Diffusors), è data da:

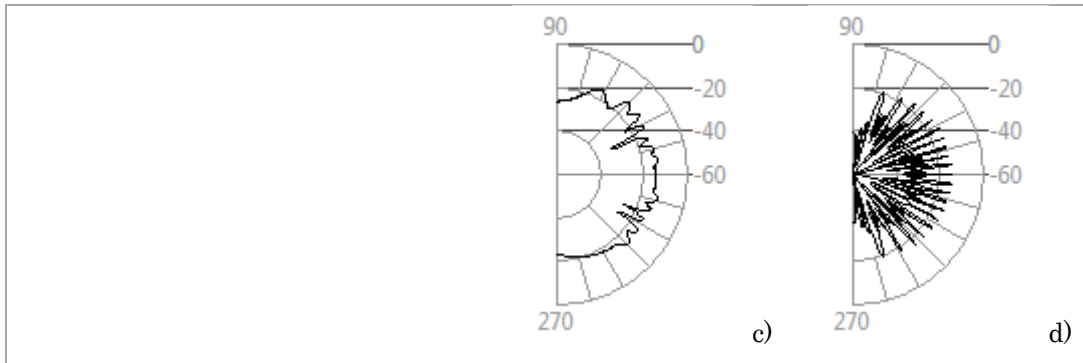
$$s_n = n^2 \text{ mod}(N) \quad (1.67)$$

una volta determinata a partire da essa la sequenza  $d_n$ , si ottiene:

$$|pm| \propto \sqrt{N} \text{ per } m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (1.68)$$

quindi tutti i lobi di radiazione hanno la stessa ampiezza, questa caratteristica viene mantenuta oltre che per la frequenza di progetto  $f_0$ , anche per multipli interi di essa.

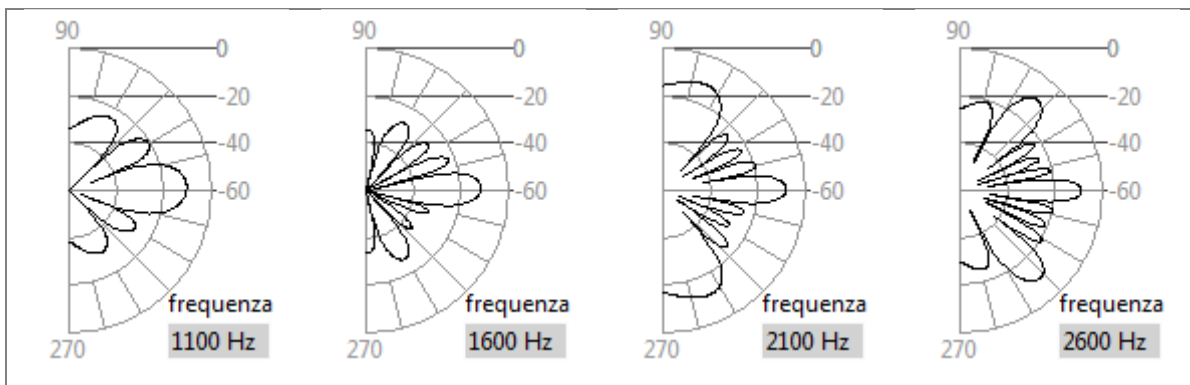




**Figura 3.20:** diffusore QRD con diagrammi di diffusore: a)  $f=f_0$  periodi=1; b)  $f=f_0$  periodi=5; c)  $f=5f_0$  periodi=1; d)  $f=f_0$  periodi=5.

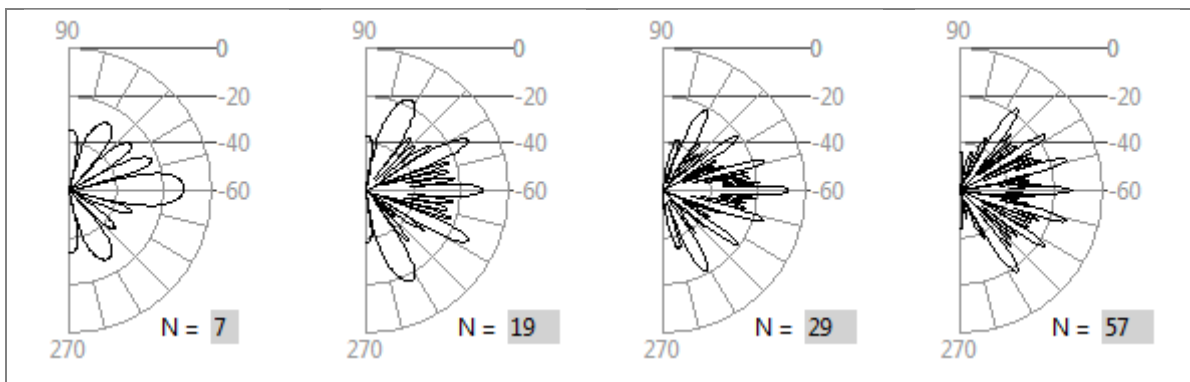
La posizione dei lobi di radiazione e quindi il loro numero è determinato tramite la (3.9). Quindi per un dato diffusore dove si è posto  $f_0, w$  ed  $N$ , si avranno differenti lobi in relazione alla frequenza di osservazione.

$$N = 7; w = 0,025m; f_0 = 1000Hz.$$



**Figura 3.21:** diffusione di un QRD al variare della frequenza.

Analogamente si può fare fissando una frequenza e facendo variare la lunghezza  $N$ :

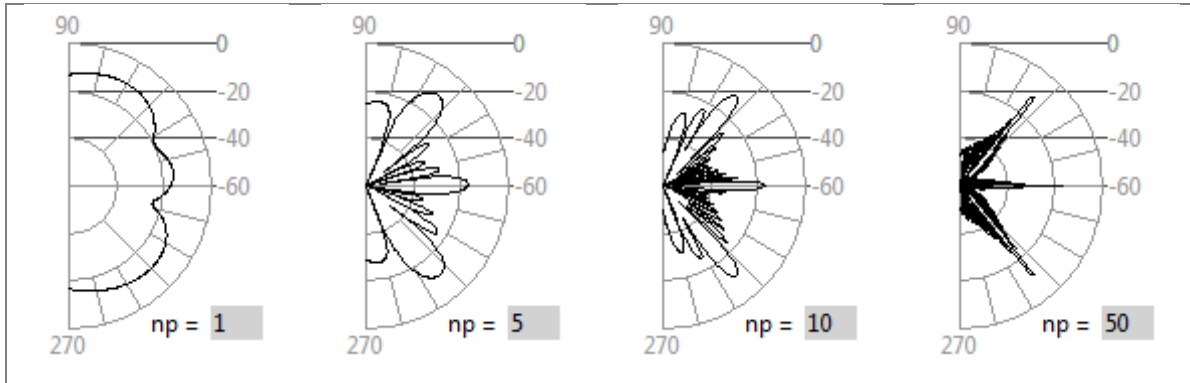


**Figura 3.22:** diffusione di un QRD al variare di  $N$ .



Come per i *PRD*, anche nel caso dei diffusori a resto quadratico, l'arrangiamento in successione periodica dei singoli diffusori di base produce l'effetto di restringimento dei lobi principali all'aumentare dei periodi.

$$N = 11; w = 0,025m; f_0 = 1000Hz.$$



**Figura 3.23:** diffusione di un QRD al variare del numero di periodi np.

### 3.12 Effetti della disposizione periodica dei diffusori

Nelle applicazioni reali i diffusori vengono realizzati affiancando una di seguito l'altra la stessa sequenza per coprire l'intera lunghezza. Si ha perciò una ripetizione periodica della sequenza di base  $s_n$ .

Questo principalmente viene fatto per una questione economica o di semplicità di realizzazione, ma l'effetto che si ottiene sulla diffusione è quello di accentuare i lobi principali attorno ai quali si concentra sempre più l'energia diffusa.

Se però, a parità di lunghezza complessiva del diffusore, si restringe troppo il periodo principale prediligendo il numero di ripetizioni si ha come effetto un restringimento eccessivo dei lobi, i quali diventano sempre più stretti in angolo e marcati in energia, a discapito dell'uniformità di radiazione (confinato solo in poche direzioni).

L'ideale sarebbe quello di usare lunghe sequenze principali, con poche ripetizioni, purtroppo però questo tipo di diffusori di Schroeder, con un elevato numero di setti di differente profondità, sono costose da realizzare e non sono molto usati nelle applicazioni reali.

Una possibile soluzione a questo problema è quello di usare quelle che sono dette tecniche di modulazione del reticolo di fase, introdotte da Angus; sviluppate inizialmente sui *QRD*, possono essere applicate anche sui diffusori a radice primitiva, anche nelle forme modificate.

Il principio fondamentale consiste nell'utilizzare due differenti diffusori di base e di sistemarli in sequenza in maniera pseudo casuale. Per la loro sistemazione possono essere utilizzate opportune sequenze binarie oppure arrangiare semplicemente le sequenze in maniera casuale.

Nell'immagine successiva è rappresentato un diffusore modulato ricavato da due *QRD*  $N = 7$  ed  $N = 11$ , usando la sequenza di modulazione  $\{0,1,1,0,1,0\}$ .



**Figura 3.24:** QRD modulato.

### 3.13 Altre sequenze

Per la realizzazione dei diffusori possono essere utilizzati anche altre tipologie di sequenze, come ad esempio quelle basate sulla *funzione indice*.

Posto  $r$  una radice primitiva di  $N$ ,

$$r^{s_n} = n \bmod(N) \quad \text{con} \quad n=1,2,\dots,N-1 \quad (1.69)$$

dove  $s_n$  è la funzione indice che soddisfa la precedente relazione per ogni  $n$ .

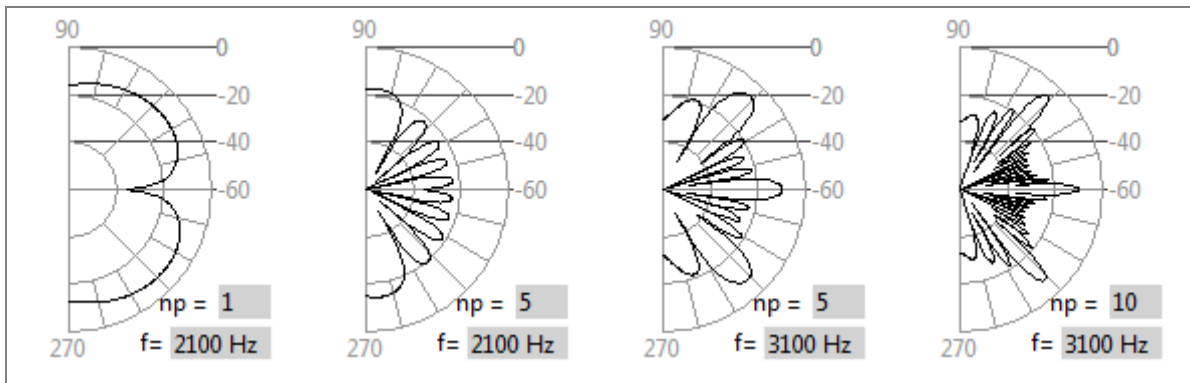
A partire da questo si può ricavare la sequenza dei fattori di riflessione del dispositivo:

$$R_n = \begin{cases} 0 & \text{per } m \equiv 0 \bmod(N) \\ e^{2\pi i s_n / (N-1)} & \text{altrove} \end{cases} \quad (1.70)$$

In questo caso il diffusore avrà un fattore di riflessione zero per  $n = 0$ , questo si realizza inserendo del materiale assorbente all'interno del setto

corrispondente. Il risultato è che questo tipo di diffusore avrà un minimo di assorbimento rispetto ai comuni *PRD*, ad i quali si avvicina molto come caratteristiche di diffusione.

L'immagine successiva mostra i diagrammi di radiazioni di una sequenza generato da  $N = 7$  ed  $r = 3$ :  $\{6, 2, 1, 4, 5, 3\}$ , con  $f_0=1000\text{Hz}$ .



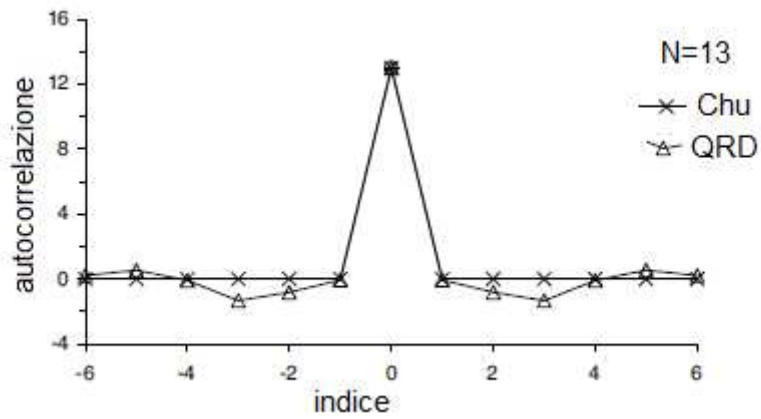
**Figura 2.25:** Diffusione prodotta da un diffusore con profilo a *funzione indice*.

Un altro approccio per generare sequenze utili a costruire i diffusori è di considerare il legame tra la funzione di autocorrelazione di una sequenza e sua trasformata di Fourier.

Come detto in precedenza, la trasformata di Fourier del fattore di riflessione superficiale corrisponde in prima approssimazione all'andamento della pressione diffusa in funzione degli angoli  $[\sin(\theta) + \sin(\psi)]$ . Continuando con questo ragionamento, in virtù del teorema di Wiener-Khinchine, la trasformata di Fourier dell'autocorrelazione del fattore di riflessione restituisce l'andamento dell'energia in funzione dell'angolo.

Quindi per avere una buona diffusione, la funzione di autocorrelazione del fattore di riflessione deve essere quanto più possibile prossima ad una delta di Dirac.

Se infatti si considera un *QRD*, esso ha una funzione di autocorrelazione del termine  $R_n$  molto simile ad una delta, quindi con un picco per gli indici zero e valori molto bassi altrove:



**Figura 3.26:** Funzioni di autocorrelazione per le due sequenze Chu e QRD.

Esistono diverse strade per individuare sequenze che abbiano ottima funzione di autocorrelazione, alcuni esempi sono le sequenze di Huffman usate da Angus o le sequenze Chu. Queste ultime sono caratterizzate dall'aver una funzione di autocorrelazione perfettamente a forma di delta di Dirac.

## Capitolo 4

# MODELLAZIONE ACUSTICA

### 4.1 Introduzione

Lo studio delle grandezze acustiche viene condotto tramite l'uso di modelli ed algoritmi, per la risoluzione e l'implementazione numerica (a calcolatore) delle equazioni che governano la propagazione delle onde.

In relazione al campo di applicazione e quindi alla grandezza ricercata sono stati sviluppati differenti tipologie di modelli che partono da ipotesi semplificative differenti. Si distinguono principalmente due tipologie di modelli: quelli *basati sui raggi* e quelli *basati sulle onde*.

Alla prima tipologia appartengono le tecniche del *Ray-Tracing*, *Beam-Tracing* ed il metodo della *sorgente immagine*, tutti metodi geometrici, nei quali non entra in gioco il concetto di onda, ma si fa uso solo di enti geometrici come rette, o fasci. Sono adottati principalmente nei software di acustica architettonica per ricavare le grandezze acustiche caratteristiche degli ambienti (risposte all'impulso, tempo di riverbero, etc...).

*I metodi basati sulle onde* derivano dalla risoluzione delle equazioni delle onde e quindi tramite essi si intende portare alla luce caratteristiche acustiche proprie dei fenomeni ondulatori, diffrazione, interferenza, modi propri e frequenze caratteristiche. Tali metodi si differenziano a loro volta nei: *metodi nel dominio della frequenza* cioè FEM (*Finite Element Method*) e BEM (*Boundary Element Method*) e *metodi nel dominio del tempo* FTDM (*Finite Time Domain Method*).

## 4.2 Modellazione basata sui raggi

Questo metodo consiste nel rappresentare le onde acustiche come dei raggi che si propagano in linea retta all'interno dell'ambiente.

Gli ambienti sono rappresentati da superfici con delle caratteristiche acustiche in termini di impedenza, per cui il raggio incidente obbedirà alla legge di Snell della riflessione.

Per quanto riguarda, invece, la diffusione essa non è una caratteristica intrinseca del metodo infatti devono essere predisposti algoritmi che ne simulino gli effetti ogni volta che il raggio incide su una superficie; secondo questa tecnica, il raggio rappresenta il fronte dell'onda acustica. I raggi cominciano il loro viaggio dalla sorgente con una certa quantità di energia, attribuita ad ognuno di loro in funzione della frequenza. L'energia è ottenuta secondo la legge del quadrato della distanza, man mano che il raggio prosegue il suo viaggio.

La dipendenza dalla frequenza dell'assorbimento nelle riflessioni è implementato conoscendo i coefficienti di assorbimento dei materiali di cui sono composti gli ambienti. Anche l'assorbimento prodotto dall'aria in funzione della frequenza può essere implementato in relazione alla distanza percorsa dal raggio.

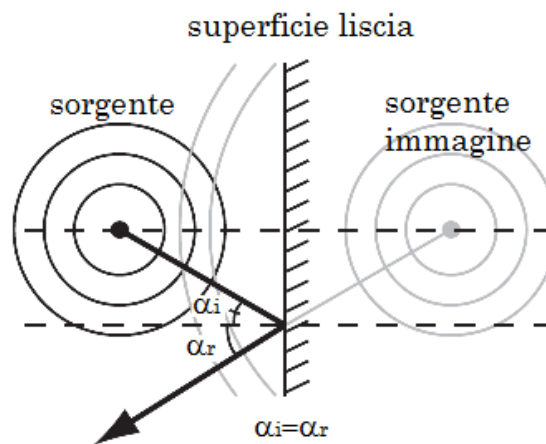
Essendo che diffrazione ed interferenza non vengono implementati, questo metodo produce buoni risultati per quegli ambienti nei quali il loro effetto è poco rilevante. Queste condizioni si verificano se le superfici dell'ambiente modellato sono grandi rispetto alle lunghezze d'onda rappresentate all'interno di esso oppure se l'effetto della diffusione risulta secondario rispetto alla riflessione speculare; per cui le superfici non debbono essere progettate per diffondere il suono.

Il risultato di tutte queste limitazioni è che il modello è in grado di rappresentare bene solo ambienti di grandi dimensioni, senza elementi di diffusione e per frequenze elevate.

Le tecniche più comuni nella modellazione basata sui raggi: il metodo della sorgente immagine, ray-tracing e beam-tracing, verranno descritti di seguito.

### 4.3 Metodo della sorgente immagine

Il metodo consiste nel creare delle sorgenti fittizie poste specularmente a quella reale, relativamente alla superficie di riflessione.

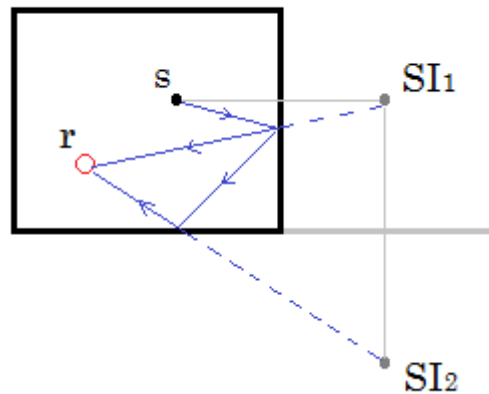


**Figura 4.1:** Riflessione speculare e sorgente immagine.

La sorgente reale e quella immagine giacciono sulla stessa retta, che corre perpendicolare alla superficie di riflessione, e sono poste alla stessa distanza da essa.

Il raggio riflesso proviene, quindi, dalla sorgente immagine dalla quale si propaga in linea retta, percorrendo lo stesso spazio che avrebbe percorso partendo dalla sorgente reale. Se il raggio incontra una nuova superficie si avrà un'altra riflessione e quindi sarà necessaria una sorgente immagine, questa volta di 2° ordine e speculare rispetto a quella precedente (di 1° ordine). Così facendo, maggiore è il numero di riflessioni che si intende rappresentare, maggiore sarà il numero di sorgenti immagine necessarie, per ogni sorgente-destinatario. Il tempo necessario affinché il raggio raggiunga il ricevitore sarà determinato dalla distanza tra la sorgente immagine ad esso, che corrisponde geometricamente alla distanza percorsa dal raggio partendo dalla sorgente

reale. L'attenuazione viene applicata al raggio in relazione alla distanza percorsa, ed in funzione della frequenza anche in base al coefficiente di assorbimento delle superfici.



**Figura 4.2:** Riflessioni multiple.

Il numero di sorgenti immagine che è necessario rappresentare dipende, oltre che dalla lunghezza della risposta all'impulso, anche dalla complessità delle geometrie; maggiore è il numero di superfici, maggiore sarà il numero di sorgenti immagine necessarie. Una ulteriore complicazione al metodo consiste nel controllare se sorgente e ricevitore si vedono: il cammino del raggio non è intralciato da ostacoli.

La diffrazione può essere implementata attraverso l'introduzione di sorgenti secondarie in corrispondenza ad i bordi di quelle superfici, per le quali si richiede l'effetto di diffrazione. Analogamente alla riflessione speculare, per queste sorgenti risulta necessario calcolarne la posizione e la distanza dal ricevitore. La dipendenza della diffrazione, in funzione dell'angolo e della frequenza, viene implementata attraverso l'uso di filtri digitali, progettati a partire dalla legge di diffrazione adottata.



## 4.4 Ray-Tracing

Il principio che sta alla base del ray-tracing è quello di seguire o tracciare il percorso dei raggi, che sono emessi dalla sorgente in tutte le direzioni. Idealmente la sorgente emette una quantità infinita di raggi, distribuiti in tutte le direzioni. Praticamente vengono emessi una quantità finita di raggi, ognuno dei quali segue un percorso differente, per riempire l'intero ambiente in cui è posta la sorgente.

Nel caso di sorgenti puntiformi con caratteristiche omnidirezionali, i raggi emessi sono uniformemente distribuiti lungo una sfera. Per ottenere una risposta all'impulso è necessario registrare il contenuto energetico relativo ad ogni raggio, relativamente al suo tempo di arrivo al ricevitore. Poiché i raggi hanno idealmente dimensione nulla il ricevitore posto nell'ambiente, che deve essere intercettato dal raggio, deve avere delle dimensioni sufficienti da essere colpito. Il ricevitore deve raccogliere l'informazione del raggio (intensità e tempo di arrivo), ma consentire ad esso di continuare il suo percorso, quindi essere trasparente nei confronti del raggio.

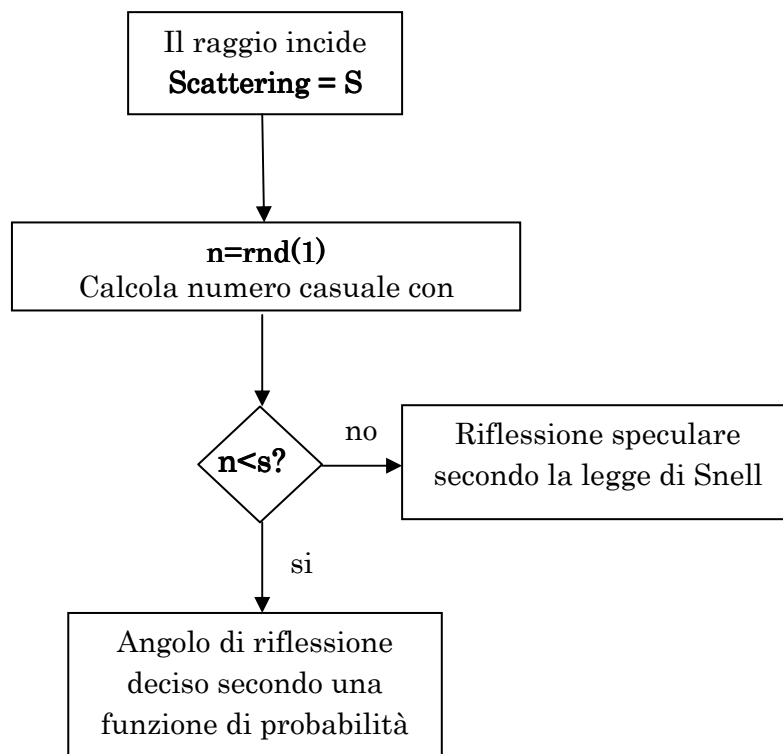
La scelta delle dimensioni del ricevitore è una questione cruciale nell'utilizzo di questa tecnica; ricevitore troppo piccolo raccoglie pochi raggi e quindi per ottenere una buona risposta è necessario "sparare" più raggi dalla sorgente, con aumento dei tempi di calcolo. Viceversa, con ricevitore troppo grosso si raccoglierebbero troppi raggi e si avrebbe una risposta distorta. Questa tecnica si adatta facilmente ad implementare lo scattering delle superfici applicando, ad esempio, una variazione dell'angolo di riflessione rispetto alla semplice riflessione speculare.

Tipicamente, lo scattering delle superfici viene modellato utilizzando un approccio statistico; la deviazione della riflessione rispetto alla direzione speculare viene scelta in maniera casuale. Se la distribuzione di probabilità con cui è scelta la direzione di riflessione è uniforme allora il coefficiente di scattering è 1. Per superfici che diffondono parzialmente allora la distribuzione angolare non sarà più uniforme ma più o meno concentrata attorno alla direzione speculare, in ragione dell'entità del coefficiente di scattering. Quindi

la probabilità che un raggio venga riflesso in maniera speculare dipende dal coefficiente di scattering, questo determina la distribuzione dell'energia nello spazio dopo la riflessione. La scelta della funzione di probabilità dipende dal tipo di superficie da rappresentare, ed è in genere di difficile scelta.

Un approccio comune è quello di usare la distribuzione Lambertiana (del coseno), modello di diffusione usato nel campo del ray-tracing ottico. La legge del coseno dice che la quantità di energia riflessa in una certa direzione è proporzionale al coseno dell'angolo con la normale alla superficie, indipendentemente dalla direzione di incidenza. Ad uno studio più attento però questa tecnica, seppur semplice da realizzare, risulta poco accurata in quanto la radiazione polare delle superfici non risulta correlata con la direzione di incidenza dell'onda e con la frequenza.

L'algoritmo che porta a decidere l'angolo secondo cui viene riflesso un raggio è il seguente:



**Figura 4.3:** Diagramma di flusso che descrive un metodo per l'implementazione della riflessione diffusa nella tecnica del ray-tracing.

L'accuratezza di questo metodo (nel rappresentare la diffusione) può essere migliorata usando funzioni di probabilità generate a partire dalla misura delle caratteristiche di diffusione di alcune tipologie di superfici. Un'ulteriore

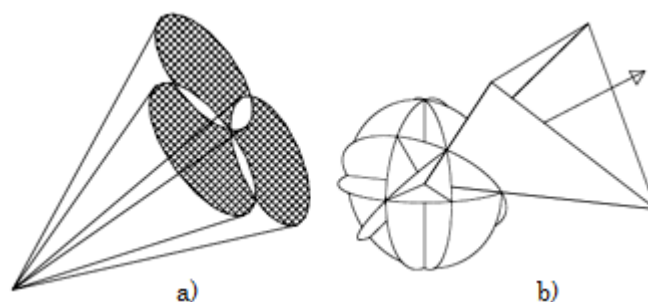
miglioramento a questa tecnica può essere apportato implementando la generazione di nuovi raggi (in rapporto  $n:1$ ) ogni volta che un raggio incide su una superficie, distribuendo ad essi l'energia di quello incidente; questo però a scapito dell'onere computazionale, particolarmente elevato nel caso in cui nell'ambiente siano presenti molte superfici diffondenti, o venga considerato un elevato numero di riflessioni.

Per potere, inoltre, rappresentare efficacemente la dipendenza della diffusione in funzione della frequenza, risulta necessario ripetere la computazione per ogni banda di frequenza, aggiustando il coefficiente di scattering ogni volta. Malgrado successivi miglioramenti a questa tecnica, apportati da vari autori, per migliorare l'implementazione della diffusione, i risultati sono comunque poco accurati se paragonati ad i dati misurati o ad i modelli di previsione dello scattering.

## 4.5 Beam-Tracing

La propagazione del suono, tramite la tecnica del beam-tracing, è rappresentata mediante l'utilizzo di fasci divergenti che si propagano a partire dalla sorgente. Diversamente dal ray-tracing, qui i fasci hanno dimensione finita ed il ricevitore può avere qualunque dimensione, poiché i fasci generati coprono tutti i possibili angoli di radiazione.

I fasci che vengono utilizzati possono avere forma differente come si vede in figura 4.4.



**Figura 4.4:** Beam-tracing con fasci conici a), piramidali b).

Man mano che il fascio si allontana dalla sorgente il fronte diventa sempre più ampio; le direzioni di propagazione del fascio sono determinate dal loro punto centrale, mentre l'estensione del fronte dalla distanza percorsa.

Poiché il fronte del fascio si allarga esso può entrare in contatto con più superfici nello stesso momento e quindi la sua determinazione, a partire dall'unico punto centrale, risulta poco accurata. Si parla quindi di beam-tracing approssimato. Un passo avanti rispetto al modello base consiste nell'implementare una divisione in più fasci quando esso entra in contatto con più superfici contemporaneamente.

Una tecnica per implementare la riflessione diffusa consiste nel suddividere la superficie diffondente in quadrati; il principio che sta alla base di questa tecnica è quello che ogni area agisce da ricettore, registrando la storia della riflessione del fascio e la temporizzazione della riflessione per quella particolare parte della superficie. Ogni area può agire anche da sorgente posta sulla superficie, ed è questo il modo in cui viene implementata la riflessione diffusa. Sono necessari più passaggi di calcolo: nel primo viene implementata la sola riflessione speculare ed è considerata la sola sorgente principale, viene inoltre registrata la temporizzazione nelle aree. Nel secondo passaggio vengono attivate le sorgenti poste sulle superfici di diffusione, precedentemente determinate, quindi ognuno con la propria risposta e la propria temporizzazione. Quindi come risultato del secondo passaggio si avrà l'implementazione della riflessione speculare e di una riflessione diffusa di primo ordine, contemporaneamente la storia della riflessione di ogni area viene registrata per essere usata nel passo successivo. Il processo viene ripetuto fino a quando non viene raggiunto un adeguato ordine di riflessione diffusa.

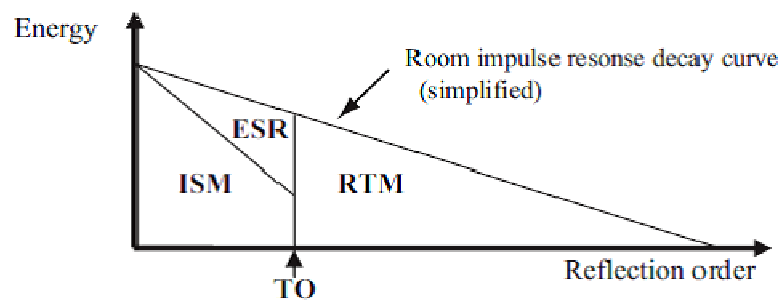
Per ottenere una buona approssimazione della riflessione diffusa è necessario un elevato numero di passi e quindi elevato costo computazionale. I calcoli aumentano all'aumentare del numero di riflessioni richieste, in particolar modo per ambienti poco assorbenti e quindi in cui il tempo di riverberazione è molto lungo. Una semplificazione al metodo potrebbe essere quella di

ipotizzare la riflessione indipendente dall'angolo d'incidenza ed usare la legge di Lambert per la riflessione, a scapito però dell'accuratezza dei risultati.

## 4.6 Metodi ibridi

Ogni metodo visto in precedenza ha delle caratteristiche che possono risultare vantaggiose se usate congiuntamente ad altri metodi, ad esempio mettendo assieme il metodo della sorgente immagine con ray-tracing. In questo caso, per calcolare la risposta all'impulso di un ambiente viene usato il metodo della sorgente immagine nel calcolo delle prime riflessioni, mentre la coda sonora, che deriva da ripetute riflessioni, si può calcolare più efficacemente con il metodo del ray-tracing che è meno impegnativo dal punto di vista dei calcoli per le riflessioni multiple, anche se meno preciso.

Software commerciali come ODEON usano una combinazione di sorgenti immagine, ray-tracing e beam-tracing, per determinare le varie parti della risposta all'impulso:



**Figura 4.5:** Modello ibrido usato dal software ODEON (da Christensen , Rindel. 2005).

Diagramma che illustra il metodo ibrido usato dal programma ODEON per ricavare la risposta all'impulso.

Brevemente si può dire che, la prima parte della risposta all'impulso è determinata facendo uso di una combinazione tra i metodi della sorgente immagine e del ray-tracing. Oltre alla velocità ed accuratezza migliorata nel

calcolo della risposta all'impulso, con l'uso di metodi ibridi, si può beneficiare dei diversi approcci per implementare la riflessione diffusa, migliorando in accuratezza e velocità di esecuzione nei calcoli.

## 4.7 Modellazione basata sulle onde

I modelli basati sulle onde fanno uso della soluzione dell'equazione delle onde, rispettivamente nel dominio del tempo per i TDM (*Tim Domain Methods*) e nel dominio della frequenza per gli FDM (*Frequency Domain Methods*) o EM (*Elements Method*). Tali modelli hanno il vantaggio, rispetto ad i metodi basati sui raggi, di rappresentare intrinsecamente i fenomeni di diffrazione ed interferenza, caratteristiche proprie dei fenomeni ondulatori.

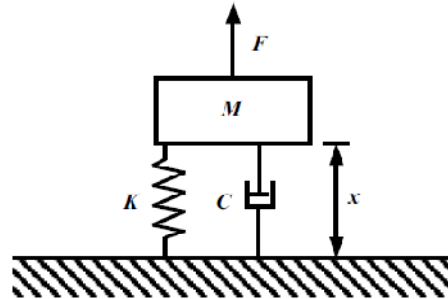
## 4.8 Metodi nel dominio della frequenza

I metodi nel dominio della frequenza consentono di risolvere l'equazione delle onde discretizzando il dominio di definizione del problema, cioè lo spazio, in sottodomini di piccole dimensioni, per ognuno dei quali l'equazione viene risolta numericamente. Si dividono nel metodo agli elementi finiti o FEM (*Finite Element Method*), in cui la discretizzazione interessa l'intero spazio o dominio di definizione del problema, e nel BEM (*Boundary Element Method*) in cui la risoluzione del problema, e quindi la discretizzazione, interessa solo i bordi del dominio di definizione.

## 4.9 Metodo agli elementi finiti

La descrizione di questo metodo può essere fatta considerando un semplice sistema meccanico massa-molla, come in figura 4.6.

Il sistema ad un solo grado di libertà, cioè la massa può muoversi in una sola direzione, con massa  $M$ , costante elastica  $K$  della molla e fattore di smorzamento  $C$ .



**Figura 4.6:** Sistema meccanico semplice ad 1grado di libertà.

L'equazione che regola il moto rispetto allo spostamento, si scrive:

$$M \frac{d^2 x}{df^2} + C \frac{dx}{df} + Kx = F \quad (1.71)$$

la soluzione armonica del sistema si scrive come:

$$x = |x| e^{j\omega t} \quad (1.72)$$

che si ottiene ponendo a zero  $F$  e  $C$ , dove  $\omega$  è la frequenza naturale del sistema e soddisfa la seguente equazione.

$$(K - \omega^2 M)x = 0 \quad (1.73)$$

Una formulazione simile può essere derivata anche per il caso più complesso dell'equazione delle onde:

$$\nabla^2 p(\bar{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(\bar{x}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.74)$$

dove  $p(\bar{x}, t)$  è la pressione all'istante  $t$  nel punto  $\bar{x} = (x, y, z)$  dello spazio. Considerando la soluzione armonica dell'equazione, la pressione acustica si può scrivere come:

$$p(\bar{x}, t) = p(\bar{x}) e^{(-j\omega t)} \quad (1.75)$$

dove si sono separate le variabili  $\bar{x}$  e  $t$ . Sostituendo la soluzione nell'equazione precedente si ottiene:

$$\left(K^2 + \nabla^2\right)p(\bar{x}) = 0 \quad (1.76)$$

nota come *equazione di Helmholtz*, che è una equazione in cui l'incognita  $p(\bar{x})$  è indipendente dal tempo, e dipende solo dalla  $K = \omega/C$ , *numero d'onda*.

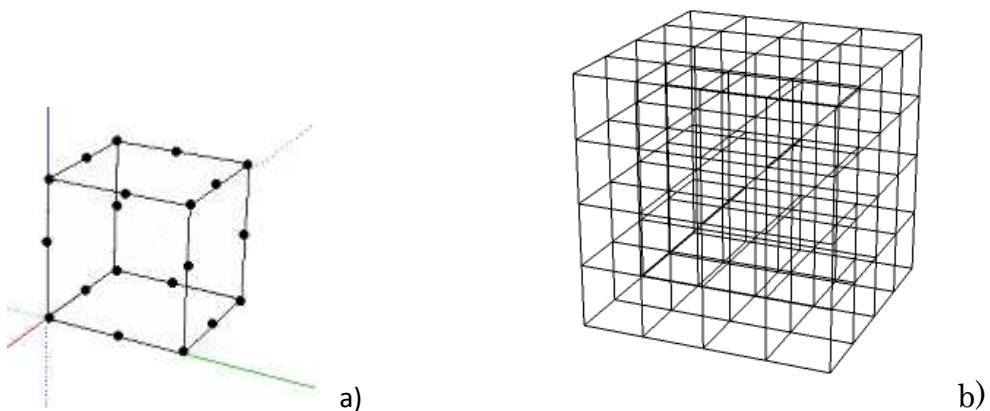
Ritornando al semplice sistema massa-molla, un sistema meccanico generale può avere diversi gradi di libertà e diversi valori di  $F$ ,  $M$ ,  $K$ ,  $C$ . Usando il metodo agli elementi finiti, il sistema viene diviso spazialmente in elementi discreti che interagiscono tra di loro; ogni elemento finito agisce come un sistema meccanico semplice costituito da nodi. Il problema viene diviso in un numero di equazioni simultanee semplici, relative ad i singoli elementi, che espresso in forma matriciale diventa:

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \mathbf{C} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (1.77)$$

ed

$$\left(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}\right) \mathbf{x} = 0 \quad (1.78)$$

dove  $\omega_n$  sono le armoniche del sistema. Il sistema discretizzato assume la forma:



**Figura 4.6:** Discretizzazione del dominio di definizione, nel metodo agli elementi finiti. a) nodi di pressione per ogni elemento di volume. b) suddivisione del volume in volumi elementari.



Per un sistema acustico i nodi rappresentano la pressione e sono ad un solo grado di libertà.

Il metodo agli elementi finiti per modellare un sistema meccanico complesso o uno spazio acustico, consiste nell'esecuzione dei seguenti passi:

- Discretizzare la struttura (o spazio) in elementi con nodi.
- Descrivere il comportamento del sistema (o grandezza fisica) nel singolo elemento.
- Connettere gli elementi, gli uni agli altri, impostando così un sistema di equazioni che descrivano l'intera struttura.
- Risolvere il sistema relativamente alla grandezza ricercata.
- Calcolare i valori della grandezza in ogni nodo (pressione).

Il FEM in campo acustico, pur essendo un metodo molto potente, risulta di difficile utilizzo soprattutto quando si vogliono rappresentare ambienti di dimensioni o per frequenze elevate, situazioni per le quali è richiesto un eccessivo numero di nodi e quindi onere computazionale.

## 4.10 Il Boundary Element Method

Nel BEM la risoluzione dell'equazione delle onde viene ridotta al solo confine del dominio di definizione del problema. Il confine è approssimato tramite una mesh continua di elementi di superficie allo stesso modo in cui nel metodo FEM, l'intero dominio viene diviso in elementi di volume.

Per poter trasportare il problema al solo confine è necessario riformulare l'equazione, che governa il campo acustico, e l'equazione che ne deriva è quella di Helmholtz-Kirchhoff. Il risultato è di applicare questa equazione integrale ad ogni elemento del contorno, ed esprimere il sistema sotto forma matriciale:

$$\mathbf{HP} = \mathbf{GV} \quad (1.79)$$

dove  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{V}$  sono pressione e velocità, mentre  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  sono matrici di coefficienti ricavati in fase di descrizione del problema. Risolvendo il sistema si ricavano le variabili acustiche per tutti gli elementi del confine o per punti interni di interesse.

## 4.11 Caratteristiche dei due metodi FEM e BEM

La caratteristica principale dei due metodi risiede nella semplicità con cui è possibile rappresentare anche domini molto complessi, poiché non vi sono vincoli nella uniformità della mesh che quindi può essere adattata facilmente a tutti i profili degli ambienti. I risultati che si ottengono sono molto accurati, ma all'aumentare della frequenza, per mantenere la stessa accuratezza, vi è la necessità di avere una mesh sempre più fitta e quindi la quantità di calcoli necessariamente aumenta.

Analogamente, all'aumentare delle dimensioni dell'ambiente in cui è definito il problema (dominio di definizione), anche la dimensione della mesh aumenta e con essa il numero di calcoli. Un ulteriore svantaggio risiede nel fatto che questi metodi risolvono le equazioni fissando la frequenza come parametro, questo significa che per poter esaminare il fenomeno per uno spettro ampio di frequenze è necessario ripetere i calcoli per tutte le frequenze di interesse. Questo fa sì che i metodi vengano utilizzati per rappresentare spazi di piccole dimensioni ed a frequenze relativamente basse.

La scelta tra BEM ed FEM dipende dalla natura dello spazio da modellare. Il BEM è più indicato per rappresentare ambienti non limitati poiché contrariamente al caso del FEM qui i calcoli vengono eseguiti solo relativamente agli elementi del bordo e non per l'intero dominio. Viceversa la quantità di informazioni richieste dal metodo nella descrizione del profilo è superiore rispetto al FEM, per il quale la quantità di input richiesti per descrivere le mesh è minore. In particolare il BEM è indicato nella risoluzione di quei problemi riguardanti la predizione dello scattering da superfici diffondenti.

## 4.12 Differenze finite nel dominio del tempo

Il metodo FDTM (*Finite Time Domain Method*) consente di risolvere l'equazione delle onde nel dominio del tempo e quindi consente di osservare il

fenomeno della propagazione del suono. La tecnica consiste nel discretizzare le derivate spaziali e temporali di cui è composta l'equazione delle onde, per ottenere, dalle equazioni differenziali delle *equazioni alle differenze finite*.

Il metodo più comune per discretizzare l'equazione differenziale, è quello di approssimare le derivate parziali tramite differenze finite.

Per una arbitraria funzione  $f(x)$ , la derivata prima  $\frac{df(x)}{dx}$  si può scrivere come:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x / 2) - f(x - \Delta x / 2)}{\Delta x} \quad (1.80)$$

cioè il gradiente della tangente, che si ricava dal limite per  $\Delta x$  che tende a zero. Nell'approssimazione alle differenze finite  $\Delta x$  ha un valore finito, ed al posto della derivata in un punto si ottiene la differenza finita:

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (1.81)$$

Per ottenere l'approssimazione alle differenze finite per la derivata seconda si itera l'approssimazione fatta per quella di primo ordine:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \approx \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} \quad (1.82)$$

Quelle ricavate sono differenze finite centrali del primo e del secondo ordine. Analogamente si può fare per le derivate parziali delle funzioni in più variabili, per esempio le derivate spaziali e temporali dell'equazione di un'onda monodimensionale, si possono esprimere mediante differenze finite nella seguente maniera:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} \quad (1.83)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \approx \frac{u(x, t + \Delta t) - 2u(x, t) + u(x, t - \Delta t)}{\Delta t^2} \quad (1.84)$$

Sostituendo nell'equazione delle onde unidimensionale  $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$

avendo posto  $c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ , si ottiene:

$$u(x, t + \Delta t) = u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) - u(x, t - \Delta t) \quad (1.85)$$

Che rappresenta l'espressione dell'equazione delle onde 1D (monodimensionale), alle differenze finite centrali. Poiché i passi temporali e spaziali risultano discretizzati mediante  $\Delta x$  e  $\Delta t$ , si può usare una notazione differente tramite gli indici  $k = x/\Delta x$  e  $n = t/\Delta t$ , ottenendo:

$$u(k, n + 1) = u(k + 1, n) + u(k - 1, n) - u(k, n - 1) \quad (1.86)$$

La quale ci dice che, per ogni passo temporale  $n$ , il valore all'istante successivo  $u(k, n + 1)$  può essere trovato come somma dei valori nei posti vicini  $u(k + 1, n)$  e  $u(k - 1, n)$ , meno il valore che si aveva nello stesso posto ma nell'istante precedente  $u(k, n - 1)$ . In maniera simile si ricavano le espressioni discretizzate per le equazioni delle onde in 2D e 3D.

Un aspetto molto importante riveste il passo di campionamento spaziale e temporale; lo schema alle differenze finite diventa sempre più accurato al diminuire delle differenze  $\Delta x$  e  $\Delta t$ . I valori dei passi temporali e spaziali inoltre sono legati, quindi una volta definito uno l'altro viene determinato di conseguenza, poiché essi sono legati dalla velocità di propagazione  $c$ , ed il legame è espresso dalla seguente relazione:

$$f_s = \frac{c\sqrt{N}}{d} \quad \text{eq.diCourant} \quad (1.87)$$

$f_s$  è la frequenza di campionamento temporale in Hz,  $c$  la velocità di propagazione dell'onda,  $N$  il numero di dimensioni dello spazio ed  $d$  il passo di campionamento spaziale. La frequenza di campionamento limita la massima frequenza che può contenere un'onda, che si propaga nel sistema modellato tramite FTDM. All'aumentare della frequenza di campionamento  $f_s$  richiesta, si avrà un passo spaziale minore e quindi un maggior numero di punti per i quali eseguire i calcoli.

Uno dei limiti del modello FTDM in 2D e 3D è quello della dispersione della velocità dell'onda con la frequenza e la direzione. L'analisi di questa caratteristica, intrinseca dell'approssimazione alle differenze finite, viene chiamata *Analisi di Von Neumann* ed è ripresa più avanti, qui si può dire che

la dispersione della velocità può essere ridotta diminuendo il passo di campionamento a parità di range di frequenza osservato.

Un vantaggio immediato del metodo FTDM, rispetto a quelli nel dominio della frequenza, è che ad ogni passo di simulazione si osserva il progredire del fenomeno nell'intero range di frequenze.

Avendo però un passo di campionamento fisso, si ha una mesh che non è adattabile al problema come nel caso dei metodi FEM e BEM e quindi non si riesce sempre a riprodurre accuratamente i profili. Una implementazione dei metodi FTDM è la Digital Waveguide Mesh o DWG, metodo che è stato adottato per lo studio delle caratteristiche dei diffusori, come descritto nei prossimi capitoli.

## Capitolo 5

# LA DIGITAL WAVEGUIDE MESH

### 5.1 Introduzione

La modellazione tramite guide d'onda digitali è un metodo efficiente ed accurato per rappresentare il comportamento dei sistemi fisici anche complessi. Rappresenta una valida alternativa ad i modelli tradizionali, basati sulla risoluzione dell'equazione delle onde, ed ha trovato notevole successo nel campo della modellazione acustica e particolarmente nel campo della sintesi audio digitale.

Per la modellazione di un sistema fisico viene utilizzata la guida d'onda digitale il cui elemento base, costituito da un elemento di giunzione, viene interconnesso con altri, tramite filtri e linee di ritardo, per formare la struttura desiderata, attraverso cui è in grado di propagarsi il segnale. E' possibile in questo modo sintetizzare il suono, costruendo delle strutture fatte da una rete di elementi interconnessi che possono simulare, ad esempio, il tratto vocale piuttosto che la membrana di un tamburo. Si riesce a rappresentare efficacemente sia elementi monodimensionali come una corda vibrante, che più complessi bi e tri-dimensionali, che nel nostro caso saranno i diffusori di Schroeder nei casi 2D e 3D.

### 5.2 Elemento base della DWM monodimensionale

La teoria che sta alla base delle DWM (*Digital Waveguide Mesh*) fa uso della soluzione dell'equazione delle onde nella forma di d'Alembert, che nel caso monodimensionale si scrive:

$$u(x,t) = u^+(x-ct) + u^-(x+ct) \quad (1.88)$$

Nella soluzione compaiono un'onda progressiva  $u^+$  ed un'onda regressiva  $u^-$ , entrambe viaggianti lungo l'asse  $x$  alla velocità  $c$ , ma in direzioni opposte. Effettuando una "discretizzazione" degli istanti spaziale e temporale, queste onde viaggianti possono essere implementate tramite l'uso di delay-line bidirezionali, come indicato in figura:

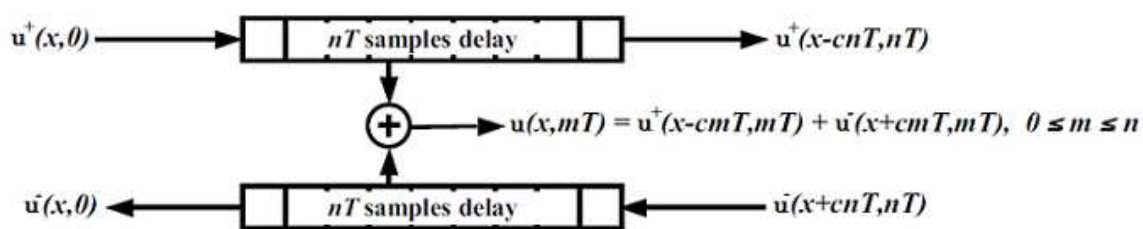


Figura 5.1: Delay line bidirezionale.

L'onda si propagherà in due direzioni nel caso 1D, ed in ogni punto il valore della grandezza si ottiene dalla somma dei due contributi.

Le grandezze usate nell'equazione delle onde dipendono dalle caratteristiche del mezzo fisico che si intende rappresentare. Considerando una corda vibrante si può efficacemente rappresentare lo spostamento, la velocità, l'accelerazione o la pendenza in ogni punto di essa. Analogamente, se si considera una colonna d'aria l'equazione delle onde può essere espressa in termini della pressione o della velocità delle particelle. Si può creare in questo caso una analogia diretta tra le coppie di variabili pressione-velocità con tensione-corrente delle linee elettriche. In entrambi i casi, infatti, il fenomeno ondulatorio può essere rappresentato mediante la stessa formulazione.

Di particolare importanza è la definizione di *impedenza caratteristica* o *impedenza d'onda*, che è definita in base al contesto dai rapporti tra forza e velocità, pressione e velocità particelle, tensione e corrente. Un'onda che si propaga in un mezzo, non subirà variazioni finché il mezzo manterrà la medesima impedenza caratteristica; il cambiamento di impedenza nei mezzi

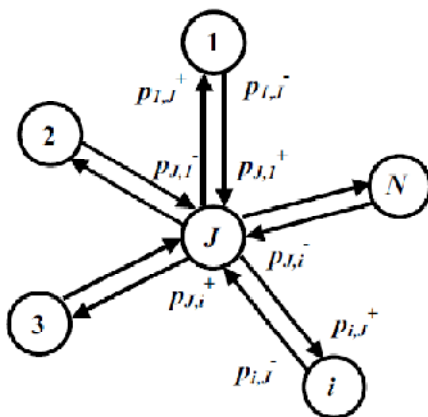
trasmissivi è infatti responsabile dei fenomeni di riflessione, rifrazione e scattering.

### 5.3 Scattering del segnale

Come nel mondo reale, un'onda all'interno della guida continuerà a propagarsi senza subire variazioni finché non incontra un cambiamento di impedenza; questo genererà scattering del segnale. Il modo attraverso cui realizzare questa condizione è quello di creare dei punti detti *giunzioni di scattering* (scattering junction), che rappresentano delle discontinuità; per cui quello che accade è che una parte del segnale verrà riflesso indietro ed un'altra parte continuerà il suo percorso (in accordo con il principio di conservazione dell'energia).

Il tratto vocale, composto da parti e sezioni differenti, e quindi ad impedenza differente, può essere efficacemente rappresentato da tratti di guida d'onda aventi giunzioni di scattering con diversa impedenza; analogamente, al passaggio di un'onda acustica da un mezzo con una densità ad uno con densità differente. Attraverso le giunzioni si possono creare dei punti in cui inserire l'energia nel sistema per simulare l'effetto, ad esempio, del plettro sulla corda oppure per controllare la perdita di energia del sistema, come ad esempio i buchi per le dita degli elementi a fiato.

La struttura della giunzione di scattering è rappresentata nella figura 5.2.



**Figura 5.2:** Giunzione di scattering.

La generica giunzione  $J$  è connessa con  $N$  giunzioni vicine, ogni connessione presenta due linee nelle quali il segnale viaggia in direzioni opposte. La pressione viene rappresentata con il termine  $p_i$  alla generica giunzione, la velocità delle particelle con  $v_i$  e l'impedenza della guida d'onda con  $Z_i$ .



Vale la relazione:

$$v_i = p_i / Z_i \quad (1.89)$$

Il segnale è indicato con  $p_i^+$  se è in verso entrante nella giunzione mentre è rappresentato con  $p_i^-$  se uscente; quindi il termine  $p_{j,i}^+$  è la componente entrante nelle giunzione  $J$  proveniente dalla giunzione  $i$ , viceversa il termine  $p_{j,i}^-$  è la componente uscente dalla giunzione  $J$  verso la giunzione  $i$ . Il valore della pressione in ogni elemento della guida è dato da:

$$p_i = p_i^+ + p_i^- \quad (1.90)$$

Su ogni tratto della guida è presente un elemento di ritardo unitario (delay) che regola la propagazione:

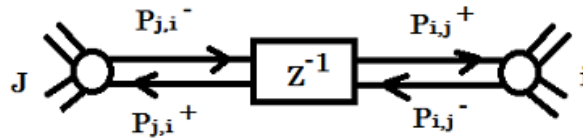


Figura 5.3: Linea di ritardo tra due giunzioni.

Vale la seguente relazione:

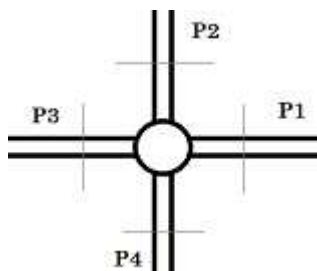
$$p_{j,i}^+ = z^{-1} p_{i,j}^- \quad (1.91)$$

dove  $z^{-1}$  è il delay unitario. Le condizioni che devono essere rispettate in ogni giunzione sono le seguenti:

1. La somma delle velocità in ingresso  $v_i^+$  deve uguagliare la somma delle velocità in uscita, poiché il flusso deve essere nullo,

$$\sum_{i=1}^N v_i^+ = \sum_{i=1}^N v_i^- \quad (1.92)$$

2. Il valore della pressione totale in ogni sezione di guida, collegata ad una giunzione, deve essere equivalente a quella delle altre sezioni.



$$p_1 = p_2 = \dots p_i = \dots = p_N \quad (1.93)$$

Figura 5.4: Sezioni delle guide.

Queste due condizioni assieme all'equazione (5.2), portano alla formulazione del valore della pressione alla  $j$ -esima giunzione, in funzione delle componenti entranti  $p_i^+$ :

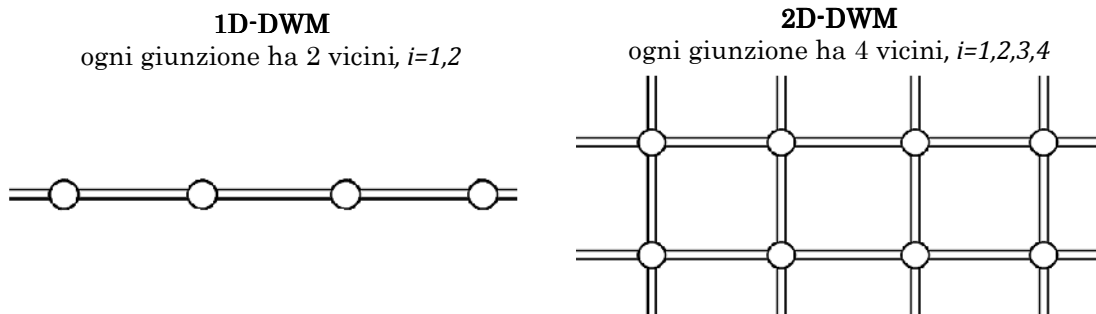
$$p_j = \frac{2 \sum_{i=1}^N \frac{p_i^+}{Z_i}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{Z_i}} \quad (1.94)$$

Mentre il valore della componente uscente dalla giunzione è dato da:

$$p_i^- = p_j - p_i^+ \quad (1.95)$$

Queste ultime due espressioni rappresentano le *equazioni di scattering* della giunzione; essenzialmente esse regolano, per un'onda incidente in una giunzione, la porzione di energia che viene trasmessa e quella che viene riflessa e torna indietro lungo la guida, in direzione opposta a quella in cui essa è arrivata alla giunzione. La parte di energia che non viene riflessa verrà posta in uscita alla giunzione e distribuita a tutte le altre giunzioni interconnesse, in relazione ad i rapporti tra le impedenze.

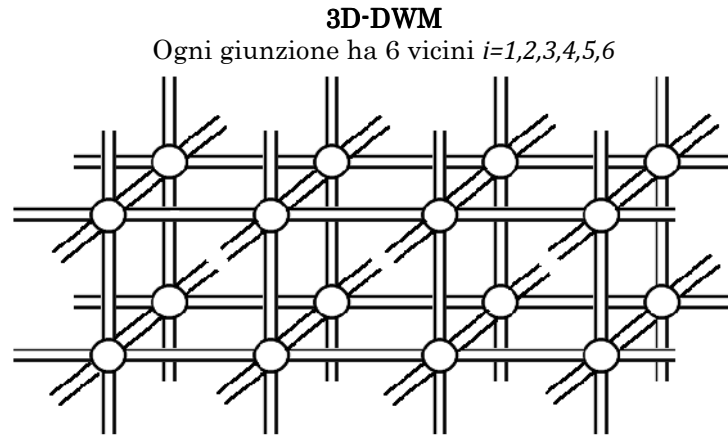
Vista la genericità della definizione per la giunzione di scattering essa si adatta facilmente a rappresentare elementi di geometrie differenti. Si passa infatti da una struttura unidimensionale, costituita da una semplice catena, ad una struttura bidimensionale solamente affiancando più catene ed aumentando il numero di interconnessioni per ogni giunzione.



**Figura 5.6:** Geometria delle DWM 1D e 2D.

Le equazioni di scattering rimangono uguali, quello che cambia è il numero di ingressi ed uscite in ogni giunzione. Allo stesso modo, affiancando più guide

bidimensionali si ottengono strutture tridimensionali nelle quali, mantenendo la stessa topologia rettangolare, ogni giunzione passa dall'aver 4 vicini ad averne 6.



**Figura 5.7:** Geometria delle DWM 3D.

Si realizzano strutture (mesh) costituite da giunzioni interconnesse per realizzare gli oggetti o gli ambienti desiderati.

## 5.4 Formulazione alle differenze finite e formulazione DSP

Per una generica giunzione di scattering, che non presenti perdite di energia, valgono le equazioni di scattering (5.5) e (5.6), si ha inoltre che le velocità in ogni singola giunzione sono date da:

$$v_i = v_i^+ + v_i^- \quad (1.96)$$

poiché  $p_i = p_i^+ + p_i^-$  ed  $v_i = p_i / Z_i$ , dove trattandosi di grandezze vettoriali, si ha:

$$\begin{aligned} v_i^+ &= p_i^+ / Z_i \\ v_i^- &= -p_i^- / Z_i \end{aligned} \quad (1.97)$$

Sostituendo la (10) in (9) si ottiene:

$$v_i = \frac{1}{Z_i}(p_i^+ + p_i^-) = \frac{1}{Z_i}(p_i^+ + (p_i - p_i^-)) = \frac{1}{Z_i}(2p_i^+ - p_i) \quad (1.98)$$

Poiché deve valere la (5) si ottiene:

$$\begin{aligned} \sum_i \left( \frac{2p_i^+}{Z_i} - \frac{p_i}{Z_i} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \sum_i \frac{2p_i^+}{Z_i} &= \sum_i \frac{p_i}{Z_i} \end{aligned} \quad (1.99)$$

dove poiché  $p_1 = p_2 = \dots p_j = \dots p_N$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2 \sum_i \frac{p_i^+}{Z_i} &= p_j \sum_i \frac{1}{Z_i} \\ \Rightarrow p_j &= \frac{2 \sum_i \frac{p_i^+}{Z_i}}{\sum_i \frac{1}{Z_i}} \end{aligned} \quad (1.100)$$

che coincide con l'espressione generale dell'equazione di scattering per la  $j$ -esima giunzione.

Si vuole adesso esplicitare la dipendenza temporale nel calcolo dei valori di pressione per la generica giunzione, per fare questo si consideri lo schema semplificato di fig. 3, si può scrivere:

$$\begin{aligned} p_{j,i}^+ &= z^{-1} (p_i - p_{i,j}^+) = z^{-1} (p_i - z^{-1} (p_j - p_{j,i}^+)) = \\ &= z^{-1} (p_i - z^{-1} p_j + z^{-1} p_{j,i}^+) = z^{-1} p_i - z^{-2} p_j + z^{-2} p_{j,i}^+ \\ \Rightarrow p_{j,i}^+ (1 - z^{-2}) &= z^{-1} p_i - z^{-2} p_j \\ \Rightarrow p_{j,i}^+ &= \frac{z^{-1}}{1 - z^{-2}} (p_i - z^{-1} p_j) \end{aligned} \quad (1.101)$$

Nel caso di una mesh 2D senza perdite, in cui l'impedenza caratteristica si mantiene costante, si può scrivere:

$$p_j = \frac{2 \sum_{i=1}^4 p_{j,i}^+ / Z_i}{\sum_{i=1}^4 \frac{1}{Z_i}} = \frac{2 \frac{1}{Z_i} \sum_{i=1}^4 p_{j,i}^+}{\frac{i}{Z_i} \sum_{i=1}^4 1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 p_{j,i}^+ \quad (1.102)$$

Sostituendo la (5.14), si ottiene la modalità di *rappresentazione DSP*.

$$\begin{aligned}
p_j &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \frac{z^{-1}}{(1-z^{-2})} (p_i - z^{-1}p_j) = \\
&= \frac{1}{2} \frac{z^{-1}}{(1-z^{-2})} \sum_{i=1}^4 (p_i - z^{-1}p_j) = \\
&= \frac{1}{2} \frac{z^{-1}}{(1-z^{-2})} \left( \sum_{i=1}^4 p_i - 4z^{-1}p_j \right) \Rightarrow p_j = \frac{1}{2} \frac{z^{-1}}{(1-z^{-2})} \sum_{i=1}^4 p_i - \frac{2z^{-1}p_j}{1-z^{-2}} \\
&\Rightarrow p_j \left( 1 + \frac{2z^{-2}}{(1-z^{-2})} \right) = \frac{1}{2} \frac{z^{-1}}{(1-z^{-2})} \sum_{i=1}^4 p_i \\
&\Rightarrow p_j \left( \frac{1+z^{-2}}{1-z^{-2}} \right) = \frac{1}{2} \frac{z^{-1}}{(1-z^{-2})} \sum_{i=1}^4 p_i \\
&\Rightarrow p_j = \frac{1}{2} \frac{z^{-1}}{1+z^{-2}} \sum_{i=1}^4 p_i
\end{aligned} \tag{1.103}$$

L'espressione così ottenuta presenta la dipendenza temporale nei termini  $z^{-1}$  e  $z^{-2}$  che indicano rispettivamente uno e due passi temporali unitari, nella  $Z$ -trasformata.

La stessa espressione si può scrivere nella seguente maniera:

$$p_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 p_i z^{-1} - p_j z^{-2} \tag{1.104}$$

Nella quale si pone in evidenza come il valore alla giunzione  $j$  -esima dipenda dai valori dei vicini all'istante precedente e dal valore che aveva in  $j$  stesso due istanti prima.

Riscrivendo l'espressione (5.16) in termini dell'indice temporale  $n$ , si ottiene la formulazione alle *differenze finite*:

$$p_j(n) = \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 p_i(n-1) - p_j(n-2) \right) \tag{1.105}$$

dalla quale esplicitando tutti i termini si ottiene:

$$p_j(n) + p_j(n-2) = \frac{1}{2} (p_1(n-1) + p_2(n-1) + p_3(n-1) + p_4(n-1)) \tag{1.106}$$

aggiungendo ad ambo i membri il termine  $-2p_j(n-1)$ , si ha:

$$p_j(n) - 2p_j(n-1) + p_j(n-2) = \frac{1}{2} [p_1(n-1) - 2p_j(n-1) + p_3(n-1)] + \frac{1}{2} [p_2(n-1) - 2p_j(n-1) + p_4(n-1)] \quad (1.107)$$

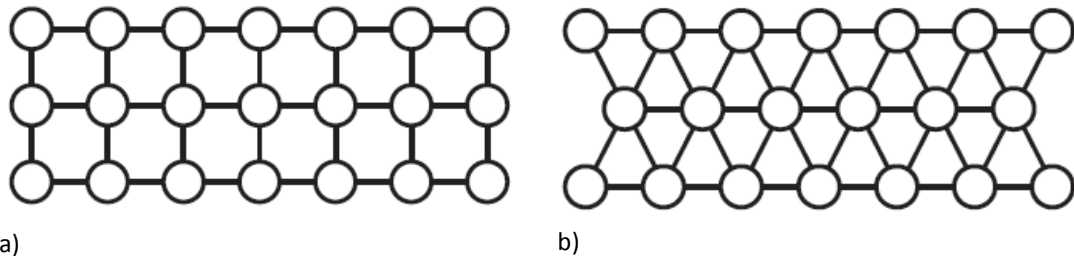
che è l'espressione in termini di differenze finite dell'equazione differenziale delle onde in coordinate rettangolari bidimensionali,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1.108)$$

in cui è stato posto  $c = 1/\sqrt{2}$  ed intervalli di campionamento spaziali e temporali uguali.

## 5.5 Topologia della mesh

Un elemento particolarmente importante è la scelta della topologia della mesh, quindi l'arrangiamento delle giunzioni nella formazione delle DWM.

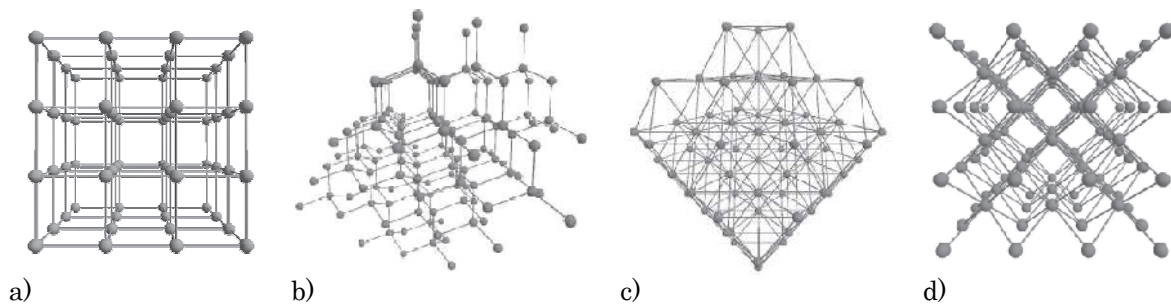


**Figura 5.8:** Topologie di mesh. a) rettangolare, b) triangolare.

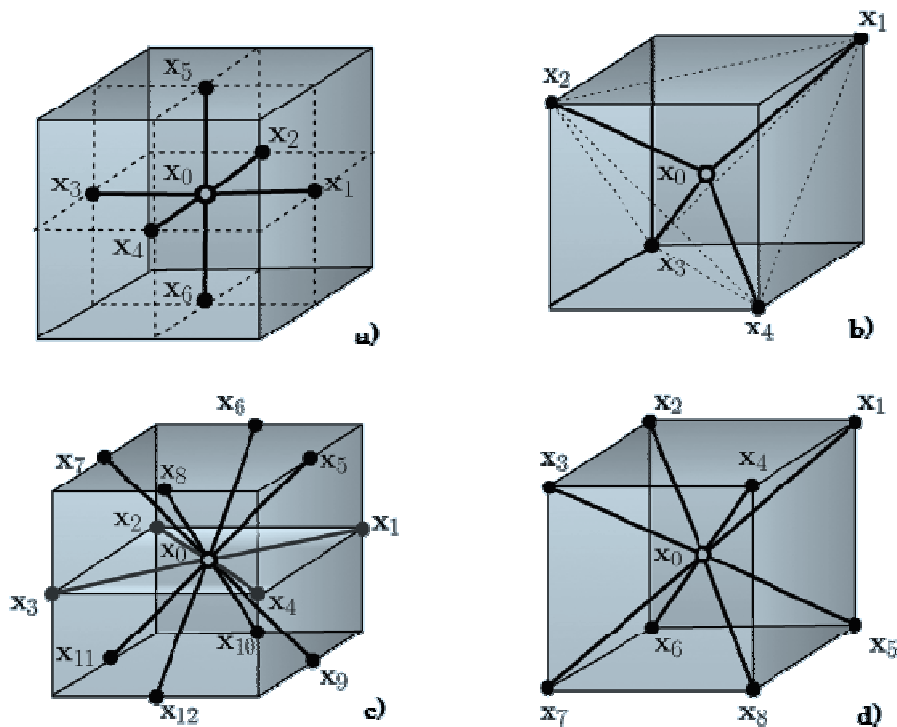
Differenti topologie possono essere usate per rappresentare la stessa struttura fisica; uno spazio bidimensionale può essere modellato mediante una mesh rettangolare oppure triangolare.

Nei due casi la giunzione fa parte sempre di una struttura 2D ma il modo in cui è interconnessa cambia. Infatti nel caso rettangolare si ha che ogni giunzione presenta 4 giunzioni vicine, mentre nel caso triangolare ogni giunzione ne presenta 6. Gli effetti derivanti dalla scelta di una topologia piuttosto che un'altra verranno di seguito discussi.

Per la modellazione di spazi tridimensionali, vi è un numero maggiore di topologie possibili:



**Figura 5.9:** Topologie di mesh 3D. a)rettangolare, b)tetraedrica, c)dodecaedrica, d)ottaedrica.



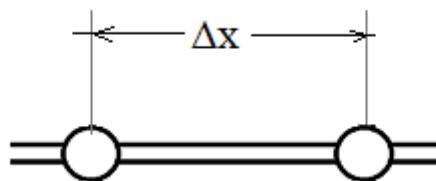
**Figura 5.10:** Particolari delle diverse giunzioni nelle mesh 3D. a)rettangolare 6 giunzioni connesse, b)tetraedrica 4 giunzioni connesse, c)dodecaedrica 12 giunzioni connesse, d)ottaedrica 8 giunzioni connesse.

Le differenti topologie hanno in comune il fatto che nelle interconnessioni la distanza tra le giunzioni si mantiene costante. Questo requisito, che limita il numero delle topologie realizzabili, deriva dall'aver discretizzato i domini spaziale e temporale in cui è definito il problema, con un passo di cambiamento costante. Per cui la propagazione che avviene per passi temporali discreti deve avvenire in tutte le direzioni col medesimo passo temporale, ciò comporta che le giunzioni limitrofe debbono essere tra loro equispaziate. Il problema verrà

ripreso in seguito quando si parlerà della tecnica dell'interpolazione, tramite la quale è possibile adottare differenti topologie con passi spaziali non omogenei in tutte le direzioni.

## 5.6 Passo di campionamento

Lo spazio, nella modellazione tramite DWM, viene campionato in modo tale che ad ogni campione spaziale, corrisponda una giunzione di scattering. Nel caso semplice di strutture 1D, la scelta di un passo di campionamento costante implica una distribuzione uniforme delle giunzioni su una retta, tutte distanti  $\Delta x$  una dall'altra.



**Figura 5.11:** Passo di campionamento.

Poiché l'onda si propaga nella guida con velocità finita  $c$ , dipendente dalle caratteristiche fisiche del mezzo che si vuole rappresentare, questo comporta che rimane definito implicitamente l'intervallo di tempo  $\Delta t$  necessario all'onda per percorrere lo spazio  $\Delta x$ :  $\Delta t = \Delta x/c$ .

La struttura risulta quindi *discretizzata* nel dominio dello spazio e nel dominio del tempo e questo implica che il segnale che in essa si può propagare risulta limitato in banda.

Per strutture 2D o 3D, il legame tra i passi di campionamento spaziale e temporale, con le velocità di propagazione dell'onda nelle mesh, dipende strettamente dalle topologie scelte; per una topologia rettangolare  $N$ -dimensionale, la velocità di propagazione viene presa relativamente alla direzione diagonale (in modo che sia rispettata la condizione di stabilità di Courant):



$$c = \frac{D}{2\Delta t} = \frac{\Delta x \sqrt{2}}{2\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1.109)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Delta t} = \frac{\sqrt{2}c}{\Delta x} \Rightarrow f_s = \frac{\sqrt{2}c}{\Delta x}$$

dove  $f_s$  è la frequenza di campionamento, che nel caso di  $N$  generico diventa:

$$f_s = \frac{\sqrt{N}c}{\Delta x} \quad (1.110)$$

Quindi affinché la struttura sia in grado di far propagare un segnale con una determinata banda audio il passo di campionamento deve essere scelto in modo da soddisfare la precedente relazione. Il limite sulla banda audio, imposto dalla sola frequenza di campionamento deriva dalla condizione di Nyquist, per cui la frequenza massima che può essere rappresentata è la metà di  $f_s$ . Se si vuole, ad esempio, adottare una  $f_s = 44.100$  Hz, in una mesh 3D rettangolare si ottiene  $\Delta x = (343\sqrt{3})/44.100 \approx 13mm$ , quindi per modellare un ambiente reale di 5m x 4m x 6m sono necessari circa 50 milioni di giunzioni. Il costo pertanto, in termini di memoria necessaria e di tempi di calcolo, cresce notevolmente all'aumentare della banda richiesta. Questo è uno dei fattori che limita maggiormente l'uso delle DWM per strutture 3D, soprattutto se si considera che normalmente risulta necessario effettuare un sovra campionamento spaziale della mesh dovuto ad altri fattori, che limitano la massima frequenza che la mesh può sostenere a  $0,25 f_s$ , e quindi il risultato è che la mesh diviene ancora più fitta a parità di condizioni.

## 5.7 Errore di dispersione

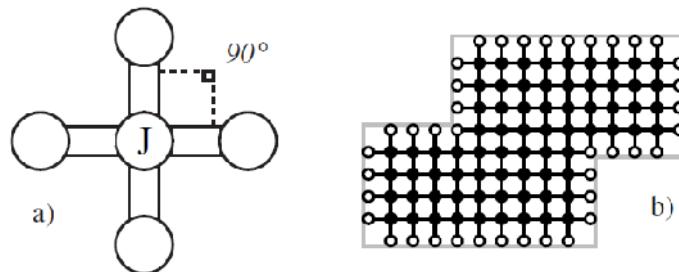
La modellazione di un ambiente tramite DWM prevede l'utilizzo di un mezzo trasmissivo (la mesh), che a causa della sua natura discreta ha la caratteristica di non essere isotropico. L'effetto principale è che la velocità di propagazione dell'onda nella mesh sarà dipendente dalla direzione e dalla frequenza, causando quello che viene comunemente chiamato *errore di dispersione*. Il grado della dispersione risulta fortemente influenzato dalla

topologia della mesh, che rappresenta il fattore caratterizzante dell'isotropia della struttura.

Per lo studio dell'errore di dispersione di una determinata topologia di mesh viene utilizzata l'analisi di Von Neumann, tramite la quale si arriva alla determinazione di un fattore di dispersione  $K$  che ne quantifica l'entità. L'analisi dettagliata dell'errore di dispersione è presente nell' Appendice B, qui di seguito si riportano i risultati relativamente ad i casi di topologia rettangolare e triangolare. Viene anticipata anche la topologia rettangolare interpolata, che è la struttura utilizzata nel presente studio.

## 5.8 Dispersione nella mesh rettangolare

La topologia rettangolare, come visto nei precedenti paragrafi, è caratterizzata dall'aver le giunzioni distribuite ad intervalli costanti sul piano cartesiano; ogni giunzione è connessa ad altre 4, poste a due a due su due assi perpendicolari, formanti angoli di  $90^\circ$ :



**Figura 5.12:** Topologia rettangolare. a) giunzione, b) ambiente modellato.

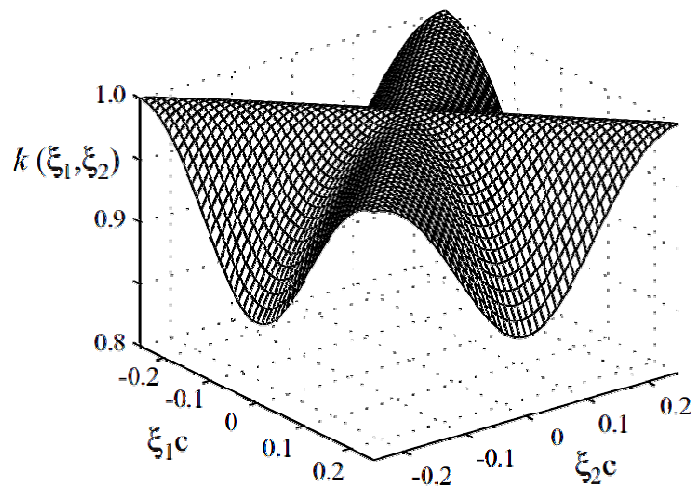
Tramite l'analisi di Von Neumann si ricava il *fattore  $K$  di dispersione*, come funzione delle frequenze spaziali  $\xi_1$  e  $\xi_2$ . Esso viene espresso in termini del rapporto tra la velocità di propagazione effettiva  $c'$  nella mesh, rispetto alla velocità di propagazione desiderata  $c$ , in funzione della direzione e della frequenza:

$$K(\xi_1, \xi_2) = \frac{c'(\xi_1, \xi_2)}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi\xi} \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{4 - b(\xi_1, \xi_2)^2}}{b(\xi_1, \xi_2)} \right) \quad (1.111)$$

dove  $b(\xi_1, \xi_2)$  è un fattore geometrico legato all'orientamento delle interconnessioni della particolare topologia, con  $\omega_1 = 2\pi\xi_1$  ed  $\omega_2 = 2\pi\xi_2$ , che per la mesh rettangolare vale:

$$b(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2} \left( e^{j\omega_1 cT} + e^{j\omega_2 cT} + e^{-j\omega_1 cT} + e^{-j\omega_2 cT} \right) = \cos(\omega_1 cT) + \cos(\omega_2 cT) \quad (1.112)$$

La seguente figura è la rappresentazione grafica del fattore di dispersione per la topologia rettangolare:



**Figura 5.13:** Fattore di dispersione per la mesh rettangolare.

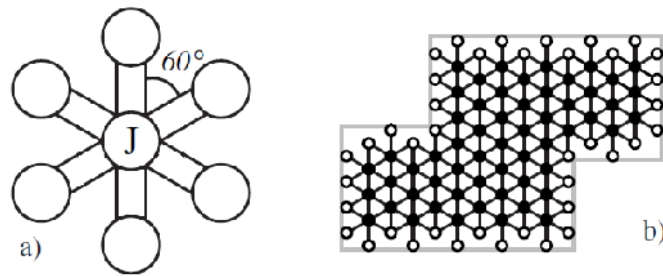
Il punto centrale  $K(0,0)$  equivale alla componente continua. Ogni punto su una circonferenza di raggio  $\xi$  dal centro (componente continua), rappresenta la frequenza spaziale  $\xi = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ . La frequenza temporale si ottiene tramite  $f = \xi c$ .

Il comportamento ideale si ha per  $K = (\xi_1, \xi_2) = 1$ , in questi punti la velocità di propagazione risulta uguale a quella ideale. La regione attorno all'origine  $K(0,0)$  è quella in cui si ha una minore dispersione, sia rispetto alle direzioni che alla frequenza. Allontanandoci dal centro, (aumentando la frequenza), le caratteristiche di dispersione diventano sempre più dipendenti dalla direzione: la propagazione avviene in maniera ideale lungo le diagonali, dove la velocità si mantiene costante al variare della frequenza. Man mano che ci si sposta dalle direzioni diagonali verso le direzioni assiali la dispersione diventa sempre più marcata e, infatti, in corrispondenza degli assi che si ha la

massima dispersione in funzione della frequenza: l'effetto della dispersione è quello che le componenti e frequenze più elevate tendono a propagarsi più lentamente.

## 5.9 Dispersione nella mesh triangolare

Le giunzioni di scattering in una mesh triangolare hanno una collocazione topologica tale che un'onda che si irradia da una di esse, con un fronte d'onda circolare, incontra nello stesso istante 6 giunzioni limitrofe equispaziate. Dal punto di vista geometrico, una simile collocazione è possibile disponendo una giunzione al centro di un cerchio e le altre limitrofe nei vertici di un esagono regolare inscritto nel cerchio:



**Figura 5.14:** Topologia triangolare. a) giunzione, b) ambiente modellato.

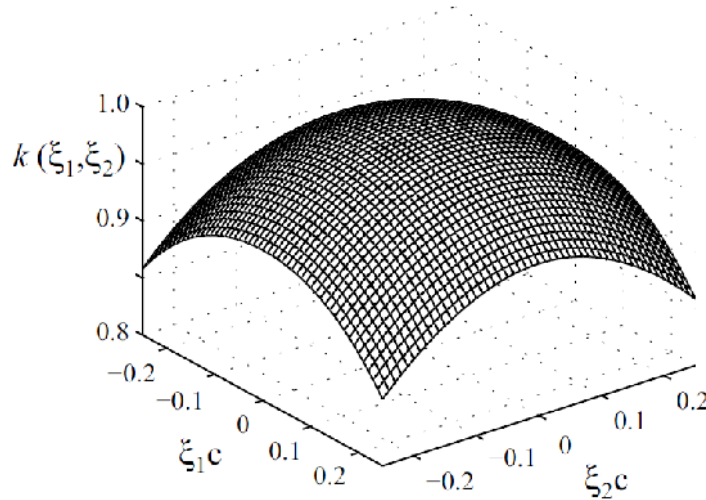
La generica giunzione obbedisce alla seguente equazione di scattering:

$$p_j = \sum_{i=1}^6 p_{j,i}^+ \quad (1.113)$$

È stato dimostrato che siffatta struttura risulta più accurata nel rappresentare la propagazione, rispetto alla topologia rettangolare. La formulazione del fattore di scattering rimane la stessa cambia il termine  $b(\xi_1, \xi_2)$ , relativo alla geometria della mesh, che in questo caso diventa:

$$b(\xi_1, \xi_2) = \frac{2}{3} \left[ \cos(\omega_1 ct) + \cos\left(\frac{\omega_2 ct}{2} + \frac{\sqrt{3}\omega_2 ct}{2}\right) + \cos\left(\frac{\omega_2 ct}{2} - \frac{\sqrt{3}\omega_2 ct}{2}\right) \right] \quad (1.114)$$

Le seguenti figure mostrano l'andamento del fattore di dispersione,  $k(\xi_1, \xi_2)$ , per la mesh triangolare:



**Figura 5.15:** Fattore di dispersione per la mesh triangolare.

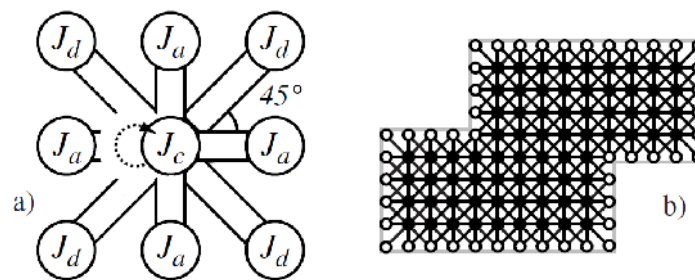
L'andamento del fattore di dispersione risulta più regolare in funzione alle direzioni, rispetto al caso della mesh rettangolare. Qui si nota che non vi è dispersione relativamente alle direzioni, ma essa si limita solo alla frequenza; per cui la velocità di propagazione tende a diminuire all'aumentare della frequenza e questo indipendentemente dall'angolo. Per basse frequenze, soprattutto nella zona vicino all'origine in cui  $k(0,0) = 1$ , il comportamento di questa tipologia di mesh è prossimo a quello ideale con dispersione molto bassa sia angularmente che in frequenza.

In generale il comportamento di questa tipologia di mesh risulta migliore rispetto a quella rettangolare, in quanto offre il grande vantaggio di rendere indipendente la dispersione dalla direzione di propagazione. Per quanto riguarda la dipendenza dalla frequenza, nelle simulazioni in cui è necessario una banda larga, è possibile adottare delle tecniche denominate di frequency-warping con le quali, tramite l'uso di filtri FIR in pre e post-processing, si riduce notevolmente lo slittamento alle alte frequenze.

## 5.10 Mesh 2D rettangolare interpolata

Un miglioramento in termini di uniformità di propagazione, rispetto alla mesh 2D rettangolare, si può ottenere mediante l'uso di mesh interpolate.

Mediante l'interpolazione, si ipotizza di interconnettere ogni giunzione con un numero arbitrario di altre giunzioni disposte a formare un cerchio attorno ad essa. Quello che si fa praticamente è, partendo da una mesh rettangolare, di aggiungere delle interconnessioni con gli elementi diagonali:



**Figura 5.16:** Topologia rettangolare interpolata. a) giunzione, b) ambiente modellato.

come se essi fossero posti sul cerchio; poi, per tenere conto della maggiore distanza dal centro rispetto agli elementi assiali, si attribuisce loro un peso differente, che consiste nell'estrappare alla posizione reale il valore che si avrebbe presso l'ipotetica giunzione sul cerchio.

L'equazione di scattering per il generico elemento di giunzione diventa:

$$p_j = \frac{2}{N} \sum_{x=1}^3 \sum_{y=1}^3 h_{x,y} p_{x,y}^+ \quad (1.115)$$

in cui  $h_{x,y}$  è la matrice dei pesi da attribuire agli elementi assiali, diagonale e centrale

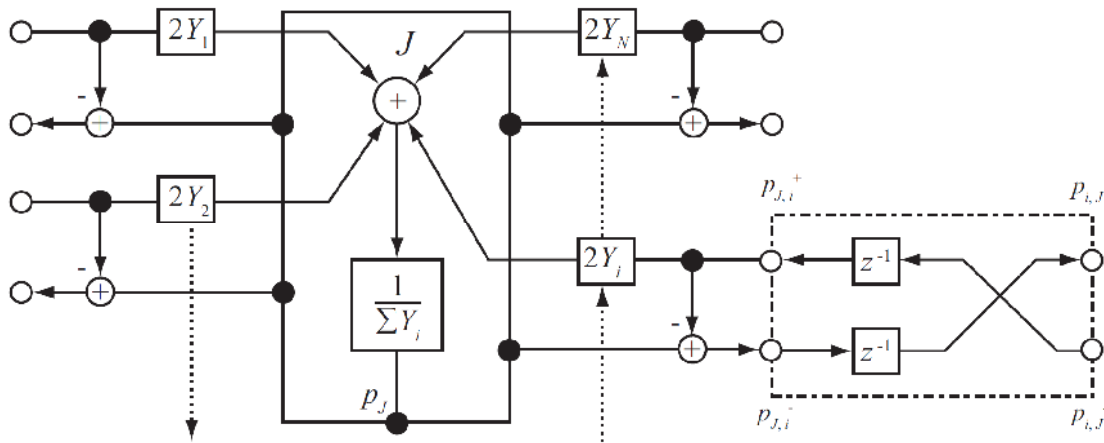
$$h_{x,y} = \begin{bmatrix} h_d & h_a & h_d \\ h_a & h_c & h_a \\ h_d & h_a & h_d \end{bmatrix} \quad (1.116)$$

In cui i valori di  $h_a$  componente assiale,  $h_d$  componente diagonale ed  $h_c$  componente centrale possono essere determinati mediante interpolazione

bilineare o quadratica, oppure adottando una procedura iterativa di ottimizzazione (vedi appendice B).

## 5.11 K-DWM e W-DWM

Un modello che utilizzi la formulazione (5.7) viene chiamato di tipo W (wave) e la struttura W-DWM, così chiamata perché le variabili fisiche sono rappresentate mediante componenti d'onda viaggianti in direzioni opposte.



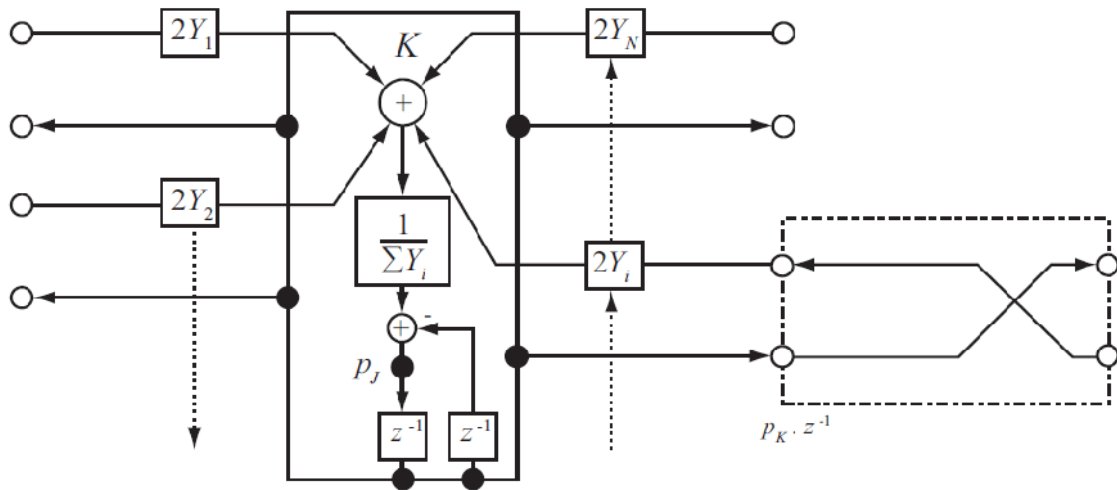
**Figura 5.17:** Diagramma a blocchi di una giunzione che utilizza il modello W-DWM. (da Murphy, Kelloniemi, Mullen, and Shelley 2007).

Invece la formulazione (5.18) viene denominata di tipo K poiché basta sulle leggi di continuità di Kirchhoff. I modelli di guide d'onda digitali costruiti secondo questo metodo vengono denominati K-DWM.

Una giunzione di scattering, senza perdite, utilizzata nella modellazione K-DWM, è riportata nella seguente figura 5.18, dove  $Y_i = 1/Z_i$  è l'ammettenza della generica giunzione che è connessa con  $j$ .

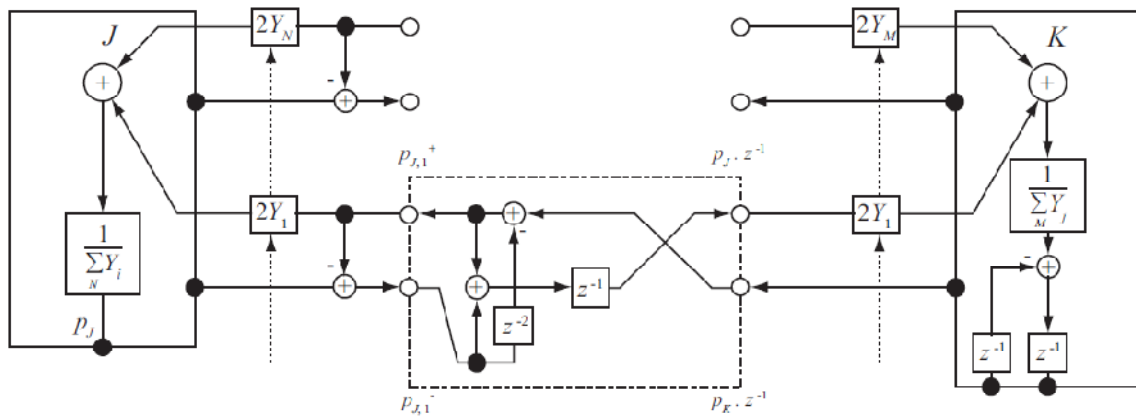
Si è visto nei paragrafi precedenti come questo tipo di formulazione dell'equazione delle onde sia equivalente a quella ottenuta mediante il metodo FTDM. Le due metodologie K e W-DWM presentano vantaggi differenti nella implementazione degli algoritmi: il metodo K-DWM risulta più semplice e veloce da implementare, in quanto richiede un minor numero di calcoli,

rispetto al W-DWM che a sua volta risulta più flessibile nella definizione delle geometrie dei bordi.



**Figura 5.18:** Diagramma a blocchi di una giunzione che utilizza il modello K-DWM (da Murphy, Kelloniemi, Mullen, and Shelley 2007).

È possibile interfacciare i due schemi in modo da usarli congiuntamente là dove essi risultano più efficaci, uno schema a blocchi di tale combinazione è riportato nella figura 5.19.



**Figura 5.19:** Diagramma a blocchi di una giunzione di interfaccia tra il modello W-DWM e K-DWM (da Murphy, Kelloniemi, Mullen, and Shelley 2007).

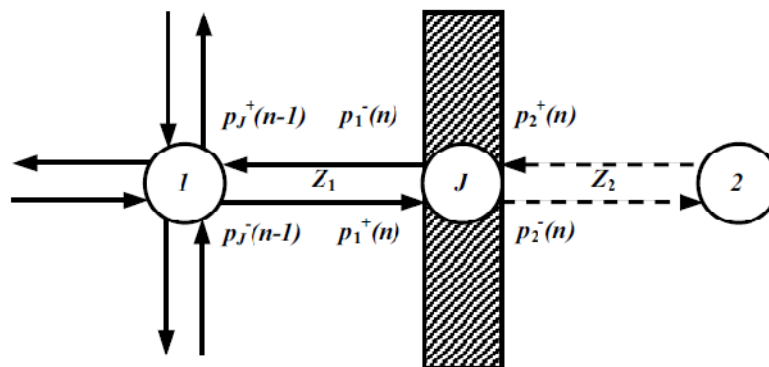


## 5.12 Realizzazione dei bordi nelle DWM

Quando un'onda, che si propaga in un ambiente, incontra una parete essa verrà in parte riflessa ed in parte assorbita, in funzione delle caratteristiche della parete. Il comportamento delle grandezze acustiche è determinato dalle caratteristiche del mezzo trasmissivo, esso si esprime in termini della impedenza caratteristica  $Z$ .

Nel passare da un mezzo trasmissivo (aria), avente una impedenza caratteristica, ad un altro mezzo trasmissivo (parete), avente un'altra impedenza caratteristica, l'onda incontra la superficie di separazione o bordo ed è proprio in corrispondenza ad esso che avviene la riflessione.

Il modo più semplice per realizzare una riflessione in una guida d'onda digitale è mediante l'utilizzo di una *dummy junction*, cioè di una giunzione fittizia posta dietro al bordo, come nella seguente immagine:



**Figura 5.20:** Rappresentazione della giunzione di bordo B e della Dummy Junction in una mesh rettangolare (da Murphy, 2000).

Se l'impedenza passa da  $Z_1$  a  $Z_2$ , il coefficiente di riflessione  $r$  viene definito come:

$$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad (1.117)$$

scrivendo  $Z_2$  in termini di  $Z_1$ :  $Z_2 = \mu Z_1$  in cui  $\mu$  è il rapporto tra le due impedenze, si ha che:

$$\mu = \frac{1+r}{1-r} \quad (1.118)$$

Con riferimento alla figura 20, la giunzione  $j$  posta nel bordo sarà tale per cui valgono le seguenti equazioni:

$$p_{B,D}^+ = 0 \quad (1.119)$$

il contributo proveniente dalla giunzione dummy D è nullo,

$$p_{B,1}^- = r p_{B,i}^- \quad (1.120)$$

La componente uscente dalla giunzione di bordo  $j$  verso la mesh è uguale al contributo entrante, per il fattore di riflessione  $r$ .

Sostituendo le precedenti espressioni in (5.7) si ottiene:

$$p_B = \frac{2p_{B,1}^+ / Z_1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{\mu Z_1}} = (1+r)p_{B,1}^+ \quad (1.121)$$

la cui formulazione alle differenze finite diventa:

$$p_B(n) = (1+2)p_1(n-1) - r p_B(n-2) \quad (1.122)$$

Tramite l'uso del coefficiente  $r$ , in questa formulazione per le giunzioni di bordo, si può stabilire quanto la parete deve assorbire; i valori validi per  $r$  sono tra -1 e +1. Per cui,  $r = 1$  coincide con una riflessione totale,  $r = -1$  con una riflessione ed una inversione di fase dell'onda incidente, mentre ponendo  $r = 0$  il bordo dovrebbe essere totalmente assorbente.

Questa condizione ideale di totale anecoicità viene realizzata solamente nel caso di struttura 1D. Per guide d'onda multidimensionali, la condizione di totale assorbimento è molto difficile da realizzare.

Quando un'onda acustica incide su una superficie rigida, quello che accade è che si ha una riflessione della pressione con conservazione della fase. Infatti nel bordo, tra aria e superficie, la componente velocità delle particelle nell'onda deve essere zero poiché la superficie rigida resta ferma, quindi l'energia dell'onda viene trasferita tutta alla componente pressione. Questa energia non potendo procedere oltre, in direzione di propagazione dell'onda, viene riflessa

nella direzione opposta con effetto un cambiamento nella fase della velocità delle particelle, ma non nella fase della componente pressione. Quindi la componente pressione dell'onda incidente si somma in fase con quella riflessa, con effetto che si raddoppia sul bordo mentre la componente velocità si annulla.

Una riflessione in cui si abbia una inversione di fase nella pressione ( $r = -1$ ) si realizza, ad esempio, quando un'onda passa da una regione delimitata da bordi ad uno spazio libero, come nel caso del passaggio dell'onda da un tubo aperto ad una estremità, verso lo spazio libero. In questo caso la componente di pressione nel passaggio si annulla mentre la componente velocità si raddoppia. Le riflessioni nei due casi, ( $r = 1, r = -1$ ), sono dovute alla differenza di impedenza che l'onda incontra nel passare da un mezzo all'altro. Nel caso di superficie rigida, ( $r = 1$ ), l'impedenza del bordo è molto maggiore rispetto a quella del mezzo di provenienza dell'onda, mentre nel secondo caso, ( $r = -1$ ), l'impedenza è minore. Per un'onda che si propaga in aria ed incontra delle superfici di confine di oggetti o pareti, le comuni condizioni di impedenza portano ad avere una  $r$  che varia tra 0 ed 1.

C'è da dire che l'aver rappresentato mediante il solo indice  $r$  il comportamento del sistema al bordo, comporta una notevole semplificazione rispetto a quello che è il comportamento di un'onda in un sistema fisico reale. Inoltre non vi è una corrispondenza diretta tra il fattore di riflessione  $r$ , che è stato sopra definito, ed il comune *coefficiente di riflessione* dei materiali definito in Acustica. Il coefficiente  $r$ , indipendente dalla frequenza, viene adottato per la semplicità con cui si integra con le equazioni di scattering, usate per le giunzioni standard, col risultato di ottenere espressioni semplici e facili da implementare.

Per una rappresentazione più precisa delle condizioni di bordo non si può prescindere da misure reali di impedenza nelle sue quantità complesse anche al variare della frequenza. Gli algoritmi di implementazione debbono pertanto usare una forma in cui compaiono le  $Z$  complesse e non  $r$  reale. Alternativamente  $r$  può essere sostituito da un filtro digitale che riproduce la risposta in frequenza esatta di un particolare bordo.

## Capitolo 6

# REALIZZAZIONE DELL'AMBIENTE DI SIMULAZIONE

### 6.1 Introduzione

Si è visto nel capitolo precedente come mediante la tecnica delle DWM sia possibile modellare la propagazione delle onde nel dominio del tempo, in ambienti bi e tri-dimensionali.

La possibilità di simulare il fenomeno nel dominio del tempo consente di poterne visualizzare la naturale evoluzione e contemporaneamente di potere eseguire, all'interno dell'ambiente modellato, delle misure virtuali con gli stessi criteri usati per le misure reali.

Nel presente lavoro si è creato un ambiente di misura virtuale nel quale testare le caratteristiche di diffusione dei diffusori di Schroeder. Nella scelta della topologia di mesh sono stati determinanti fattori come: le dimensioni degli ambienti da modellare e la densità della mesh.

Per poter effettuare dei test sui dispositivi è necessario che l'ambiente di misura simulato risponda agli stessi requisiti degli ambienti reali come descritto nel capitolo 2. Le dimensioni devono essere tali da ospitare il dispositivo sotto test, e consentire all'onda di propagarsi fino a raggiungere i punti di misura posti in campo lontano; inoltre è richiesta una notevole distanza dei bordi (pareti) dagli elementi di misura, a causa del loro comportamento non perfettamente anecoico.

Alle dimensioni notevoli degli ambienti si aggiunge la necessità di un passo di campionamento sufficientemente fitto tale che la mesh sia in grado di supportare una estesa banda audio, parametro fondamentale nello studio della diffusione.

Si è scelto pertanto di realizzare un modello di simulazione bidimensionale, tramite DWM con topologia rettangolare interpolata, per la semplicità di

implementazione e per la velocità nell'esecuzione delle simulazioni. La scelta di un modello 2D ci limita allo studio dei dispositivi con diffusione di tipo cilindrico e non con diffusione emisferica.

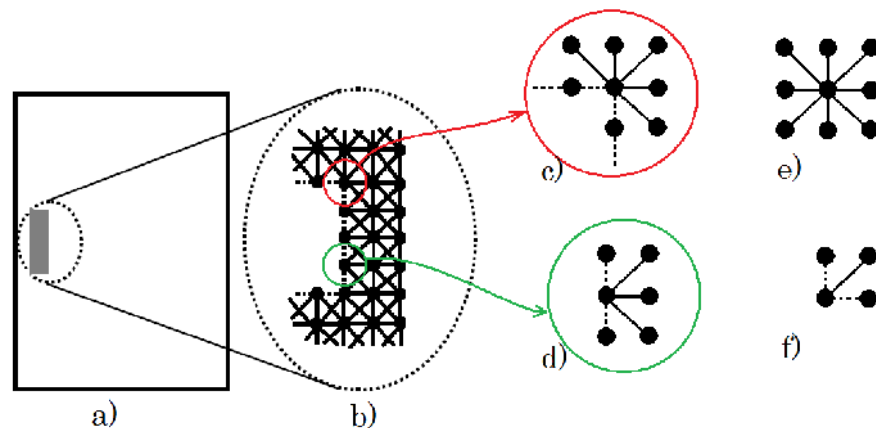
La modellazione 3D, che rispetti gli stessi requisiti, richiede una eccessiva quantità di memoria e calcoli, quindi tempi di elaborazione troppo lunghi, cosa che ne ha reso impraticabile l'adozione.

Queste sono in sintesi le scelte fatte nella realizzazione del modello:

- DWM 2D rettangolare interpolata.
- Frequenza di campionamento  $f_s = 44.100$  Hz, quindi la distanza tra due giunzioni  $d \approx 0,011m$ .
- I fattori di riflessione per i diffusori  $r = 1$  saranno considerati completamente riflettenti, mentre per le pareti dell'ambiente si pone  $r = 0$ .

## 6.2 Costruzione della mesh

La mesh 2D rettangolare interpolata è costituita da giunzioni differenti in relazione alla posizione che esse occupano all'interno dell'ambiente.



**Figura 6.1:** Varie tipologie di giunzioni: a) rappresentazione dell'ambiente con diffusore, b) ingrandimento in prossimità del diffusore, c), d), f) differenti elementi di bordo, e) Elemento non di bordo.

Si possono dividere in due tipologie: gli elementi lontani dal bordo e gli elementi di bordo.

L'espressione ricavata da Van Duyne e Smith per l'equazione di scattering di una mesh quadrata porta all'espressione generale per una geometrica  $N$  dimensionale rettangolare,

$$p_c(n) = \frac{\sum_{l=1}^{2N} Y_l p_l(n-1)}{\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{2N} Y_l} - p_c(n-2) \quad (1.123)$$

dove  $Y_l$  è l'ammettenza di ogni guida,  $p$  rappresenta il valore del segnale all'istante  $n$  presso la giunzione  $c$ .

La massima frequenza consentita da una struttura simile si dimostra essere  $0,25f_s$ , cioè un quarto della frequenza di campionamento della mesh. Per minimizzare la dispersione della velocità con la direzione della topologia rettangolare ogni giunzione viene connessa con le giunzioni diagonali, realizzando una topologia rettangolare interpolata. Nel caso bidimensionale, l'equazione alle differenze si scrive:

$$p_c(n) = \frac{\sum_{l=-1}^1 \sum_{m=-1}^1 Y_{l,m} h_{l,m} p_{l,m}(n-1)}{\frac{1}{2} \sum_{l=-1}^1 \sum_{m=-1}^1 Y_{l,m} h_{l,m}} \quad (1.124)$$

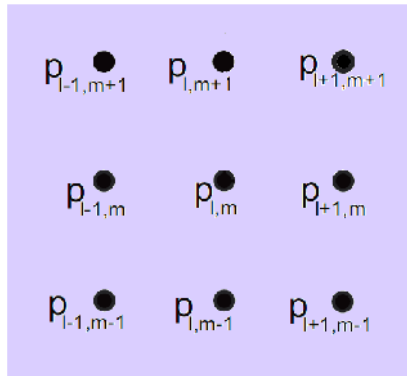
dove  $h_{l,m}$  sono i pesi derivanti da interpolazione, per ogni nodo, (Appendice B).

I valori dei coefficienti,  $h_d = 0.37593$  per le connessioni diagonali e  $h_c = 1.50372$  per il nodo centrale, vengono utilizzati per compensare la differente distanza con i nodi assiali e per rendere la velocità di propagazione diagonale apparentemente uguale a quella delle connessioni assiali, il cui peso vale  $h_a = 1.24814$ .

Quando tutte le giunzioni vedono la stessa ammettenza, la precedente equazione diventa:

$$p_{l,m}(n) = \frac{1}{4} \sum_{l=-1}^1 \sum_{m=-1}^1 h_{l,m} p_{l,m}(n-1) - p_{l,m}(n-2) \quad (1.125)$$

Questa equazione viene utilizzata per aggiornare la generica giunzione di posizione,  $(l, m)$ , che si trova in un ambiente con ammettenza costante non in prossimità del bordo o su una superficie in cui vi è una discontinuità figura 6.2.



**Figura 6.2:** Giunzione lontana dal bordo.

La corretta rappresentazione delle riflessioni prodotte dalle superfici di confine e dagli oggetti, gioca un ruolo molto importante nella simulazione acustica. Generalmente, il comportamento delle superfici reali dipende dalla frequenza dell'onda incidente e quindi un modello che simuli il comportamento reale deve implementare questa dipendenza. Inoltre esso dovrebbe anche implementare la trasmissione attraverso la superficie di confine e quindi all'interno degli oggetti, i quali re-irradiano nell'ambiente. È stato dimostrato, in alcuni studi, che ignorare la trasmissione attraverso gli oggetti porta a risultati che non si discostano in maniera significativa rispetto a quelli condotti invece tenendo conto del fenomeno.

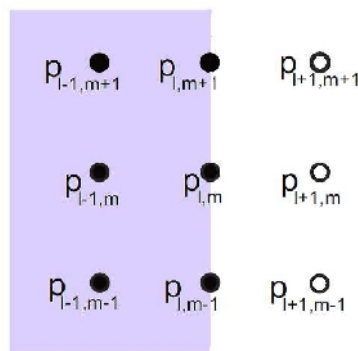
Nel presente stadio, per semplificare la formulazione, si considera la superficie di bordo *localmente reattiva*, quindi le proprietà riflettive di ogni singolo punto sul bordo dipendono unicamente dalla impedenza definita nel medesimo punto. Inoltre si considera l'impedenza delle superfici *indipendente dalla frequenza*, tale da potere adottare un unico valore reale  $r$  per indice di riflessione a tutte le frequenze.

Le superfici, considerate localmente reattive, sono tali per cui in un punto del bordo la componente velocità delle particelle normale alla superficie, dipende solo dal valore della pressione di fronte al punto e non dai valori che la pressione assume in punti limitrofi a quello considerato. Questo comporta che la superficie non sia in grado di far propagare vibrazioni in direzione parallela al bordo stesso.

Per poter rappresentare gli oggetti all'interno dell'ambiente si utilizza una geometria semplificata in cui le variazioni di pendenza procedono per angoli di  $90^\circ$ . Questo comporta che esiste un numero finito di situazioni possibili, che sono illustrati in figura 6.1c), 6.1d), 6.1f), e qui di seguito esaminati in dettaglio.

Si fa uso di giunzioni "fantasma", che figurano solo formalmente ma il cui contributo non compare nella formulazione finale delle equazioni. L'introduzione delle giunzioni fantasma consente di realizzare l'interruzione della mesh in quanto il loro contributo non figura nei calcoli, non è necessario calcolarne il valore. Le equazioni per la giunzione di bordo B nei tre casi, sono state ricavate rifacendosi a (Kowalczyk; 2008) nel caso di mesh 2D in rettangolare interpolata e superfici localmente reattive.

La giunzione in un *bordo piano* viene rappresentata in figura 6.3,



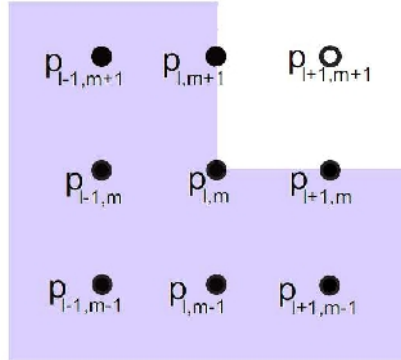
**Figura 6.3:** Giunzione sul bordo piano.  
Pallini vuoti sono le giunzioni fantasma

al passo  $n$ -esimo il valore di  $p$  alla giunzione  $(l,m)$  si trova come in (6.4).



$$p_{l,m}(n) = \left[ \begin{aligned} &h_d(p_{l-1,m}(n-1) + p_{l,m+1}(n-1) + p_{l,m-1}(n-1) + \\ &+ h_d(p_{l-1,m+1}(n-1) + p_{l-1,m-1}(n-1) + h_c p_{l,m}(n-1) + \\ &+ \left( \lambda \frac{r+1}{r-1} - 1 \right) p_{l,m}(n-2) \end{aligned} \right] / \left( 1 + \lambda \frac{R+1}{R-1} \right) \quad (1.126)$$

La giunzione in un *angolo acuto* viene rappresentata in figura 6.4,

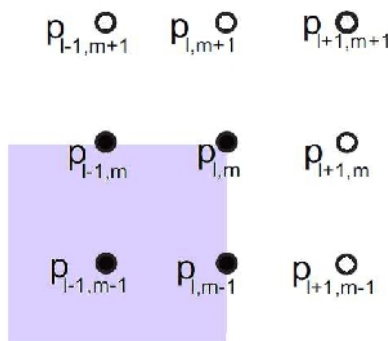


**Figura 6.4:** Giunzione in un angolo acuto.  
Pallino vuoto è la giunzione fantasma.

al passo n-esimo il valore di  $p$  alla giunzione  $(l,m)$  si trova come in (6.5).

$$p_{l,m}(n) = \left[ \begin{aligned} &h_d(2p_{l-1,m}(n-1) + 2p_{l,m-1}(n-1)) + 2h_d p_{l-1,m-1}(n-1) + \\ &+ h_c p_{l,m}(n-1) + \left( 2\lambda \frac{R+1}{R-1} - 1 \right) p_{l,m}(n-2) \end{aligned} \right] / \left( 1 + 2\lambda \frac{R+1}{R-1} \right) \quad (1.127)$$

La giunzione in un *angolo ottuso* viene rappresentata in figura 6.5,



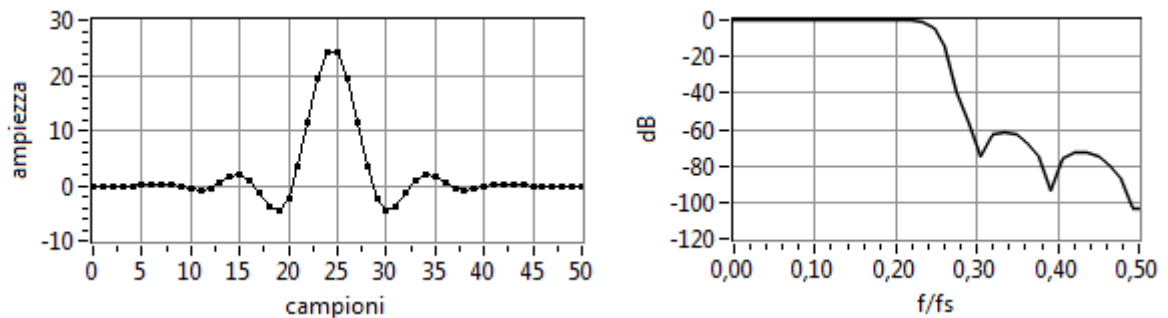
**Figura 6.5:** Giunzione in un angolo ottuso.  
Pallino vuoto è la giunzione fantasma.

al passo  $n$ -esimo il valore di  $p$  alla giunzione  $(l,m)$  si trova come in (6.6).

$$p_{l,m}(n) = h_a (p_{l+1,m}(n-1) + p_{l-1,m}(n-1)) + h_b (p_{l,m+1}(n-1) + p_{l,m-1}(n-1)) + h_d (p_{l+1,m-1}(n-1) + p_{l-1,m+1}(n-1)) + h_c (p_{l,m}(n-1) - p_{l,m}(n-2)) \quad (1.128)$$

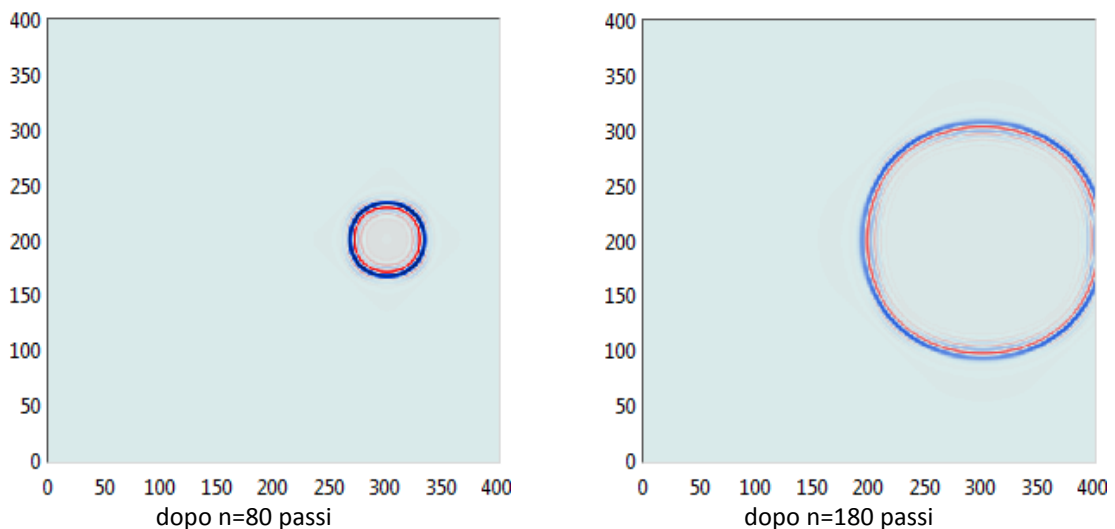
### 6.3 Introduzione del segnale nella mesh

Il segnale utilizzato come input alla mesh è un impulso di Dirac, filtrato con un filtro passa basso, la cui frequenza di taglio è di  $0,25f_s$ . La necessità è quella di produrre un impulso nella posizione della mesh in cui si stabilisce essere la posizione della sorgente, segnale che verrà raccolto nei punti di output per ricavare la risposta all'impulso del sistema.



**Figura 6.6:** Le immagini mostrano il segnale filtrato e la risposta all'impulso del filtro utilizzato, dove  $f_s = 44.100$  Hz.

Nelle immagini seguenti è invece rappresentato il segnale che si propaga nella mesh in differenti istanti:

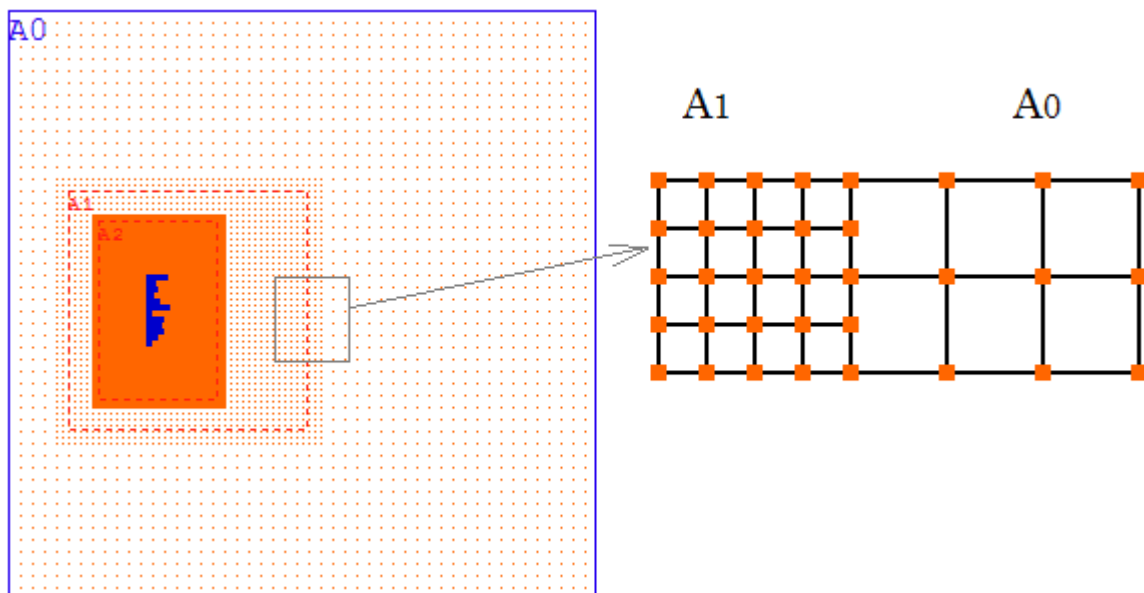


**Figura 6.7:** Impulso che si propaga nella mesh.

## 6.4 Scomposizione del dominio della mesh in sottodomini a differente densità

Un aspetto di primaria importanza è la possibilità di potere rappresentare all'interno del modello la forma de bordi dei diffusori. A causa della natura discreta della mesh, molti particolari dei profili risulteranno approssimati e l'unico modo per limitare questo errore è quello di rendere più fitta la mesh. Questo purtroppo appesantisce notevolmente i calcoli fino a renderli in alcuni casi impraticabili, soprattutto nei casi in cui l'ambiente da rappresentare è particolarmente esteso. Un modo per risolvere il problema è quello di suddividere l'intero dominio di definizione in sottodomini a differente densità, in modo tale che la maglia sia più fitta solo nelle regioni in cui è necessario un maggiore livello di dettaglio, mantenendo una maglia più larga nelle aree in cui non è richiesto.

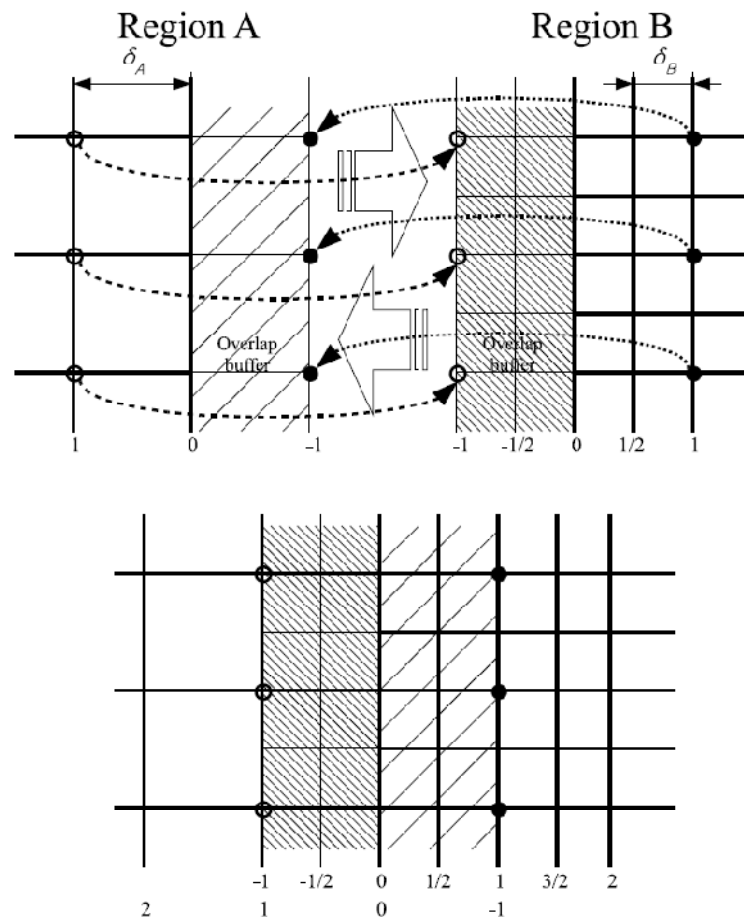
Il dominio principale  $A_0$  rappresenta l'intero ambiente, all'interno di esso possono trovarsi sottodomini annidati uno dentro l'altro con maglia via via più fitta  $A_1, A_2 \dots$ .



**Figura 6.8:** Scomposizione della mesh in sottodomini a differente densità. Il dominio esterno  $A_0$  contiene altri 2 sottodomini  $A_1$  ed  $A_2$ . L'oggetto è rappresentato in  $A_2$ . L'immagine a destra mostra la regione di confine tra due aree a diversa densità.

Poiché le regioni così definite hanno passo spaziale e temporale differente, esse sono governate da differenti sistemi di equazioni e sono interfacciate le une alle altre mediante le giunzioni della regione di confine.

Il metodo è ripreso da (Moonseok, Scavone; 2009) ed utilizza la *tecnica di Overlapping*;



**Figura 6.9:** Interfaccia tra due regioni una spaziatura  $\delta_A$ , e l'altra con spaziatura  $\delta_B$  (da Moonseok, Scavone; 2009).

Con riferimento alla figura 6.8, alle due regioni A e B a diversa densità viene aggiunta in prossimità dell'area di confine uno strato costituito da giunzioni che servono da buffer. Queste regioni aggiunte ad ambo i lati risulteranno geometricamente sovrapposte una sull'altra. I calcoli vengono eseguiti indipendentemente nei due domini e ad ogni passo i valori delle aree di overlapping vengono aggiornati; questo consente al segnale di propagarsi da una regione all'altra.

La dimensione di questa regione di sovrapposizione equivale ad un intervallo di campionamento delle regioni con passo maggiore. Nella figura 6.10 si vede la mesh nella regione A, di tipo rettangolare, ha un passo di campionamento  $\delta_A$  e la regione B un passo  $\delta_B$ , con  $\delta_A = 2\delta_B$ .

Poiché la velocità di propagazione deve essere uguale  $T_A = 2T_B$  ed  $n_A = 2n_B$ ; dove  $T_A$  è l'intervallo di campionamento temporale della regione A ed  $n_A$  l'indice temporale discreto.

Per via del passo temporale diverso è necessario che ad ogni computazione fatta nella regione A devono corrispondere 2 computazioni nella regione B.

Una volta completati i calcoli nelle aree non di sovrapposizione, cioè con riferimento all'immagine in figura 6.9, tutti i valori di  $p_{A,l,m}(n_A)$  per  $l \geq 0$  ed  $m \geq 1$ , e di  $p_{B,l,m}(n_B)$  per  $l \geq 0$  ed  $m \geq 1/2$ , i valori nell'area di sovrapposizione vengono aggiornati nel seguente modo:

- *regione A*

$$p_{A,-1,m}(n_A) = p_{B,1,m}(n_B) \quad \text{per ogni } m \text{ intero} \quad (1.129)$$

- *regione B*

in maniera analoga alla (6.7)

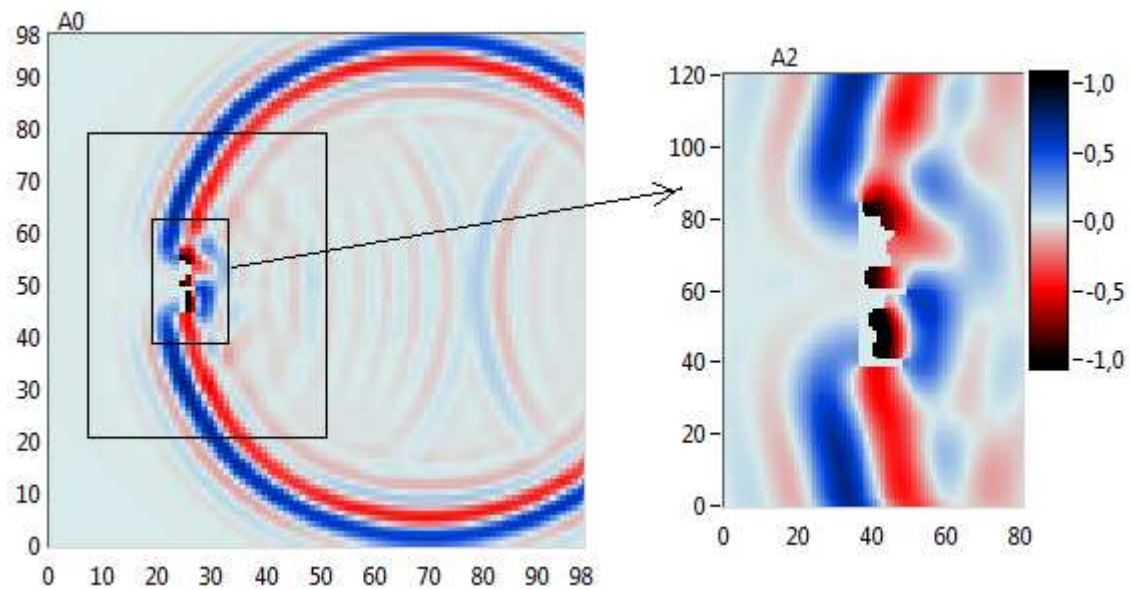
Inoltre nell'area di sovrapposizione della regione B, che è più fitta, vi sono dei nodi che non trovano un corrispondente nella regione A, per essi viene effettuata una interpolazione lineare; quindi per la regione B vale:

$$p_{B,-1,m/2}(n_B) = \begin{cases} p_{A,1,m/2}(n_A) & \text{se } m \text{ è pari} \\ \frac{1}{2} [p_{A,1,(m-1)/2}(n_A) + p_{A,1,(m+1)/2}(n_A)] & \text{se } m \text{ è dispari} \end{cases} \quad (1.130)$$

e:

$$p_{B,-1/2,m/2}(n_B) = \frac{1}{2} [p_{A,1,m/2}(n_A) + p_{A,0,m/2}(n_A)] \quad (1.131)$$

Le seguenti immagini mostrano una implementazione di tre regioni interconnesse, schematizzate in figura 6.8, in cui l'impulso si propaga dall'una all'altra. Il dominio più fitto  $A_2$  contiene l'oggetto definito in dettaglio, la sorgente è posta nel dominio più esterno  $A_0$ .



**Figura 6.10:** Simulazione della propagazione di un impulso in un ambiente costituito da un dominio principale  $A_0$ , che contiene il sottodominio  $A_1$  che a sua volta contiene  $A_2$ . I domini hanno differente densità, il diffusore è posto nel dominio più fitto  $A_2$  e la sorgente in  $A_0$ .

Utilizzando questo metodo vengono generate delle riflessioni spurie all'interfaccia di separazione, causate dalla differenza della dispersione nelle sue regioni. Con l'analisi di Von Neumann si può dimostrare che questa differenza nelle velocità, relativamente alle direzioni assiali, può variare tra  $0\%$  e  $\pm 15\%$  per frequenze spaziali che vanno dalla continua fino alla metà delle frequenze di Nyquist; mentre in direzione diagonale la velocità si mantiene costante e l'interfaccia non crea problemi di riflessione.

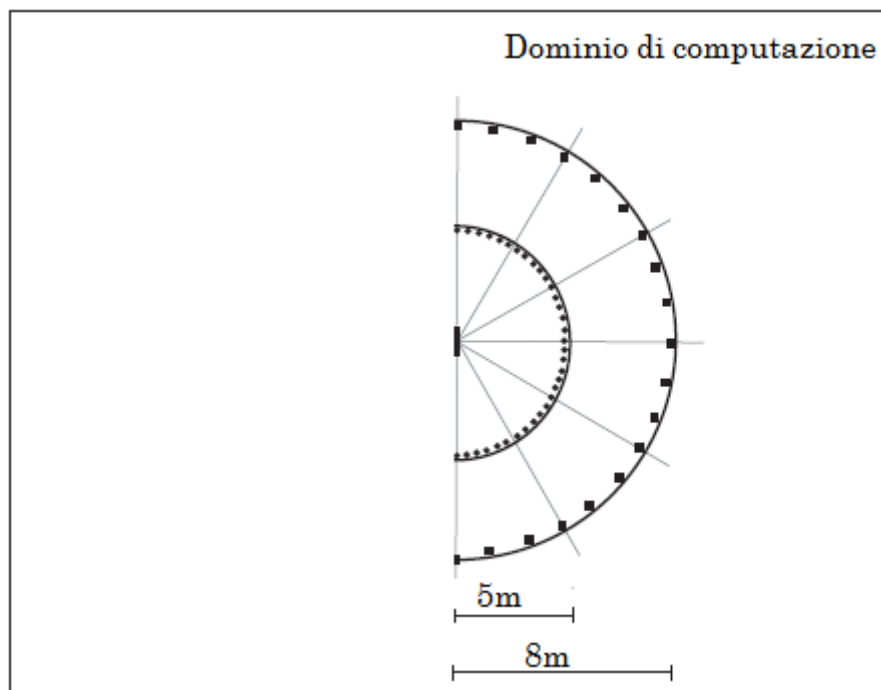
Questo effetto viene mitigato adottando le seguenti precauzioni:

- Si mantiene basso il rapporto tra i passi di campionamento, eventualmente creando più strutture una dentro l'altra se è necessario aumentare il rapporto.
- Si utilizza per i segnali una banda più bassa di quella massima consentita, in modo che la mesh lavori in una regione a bassa dispersione di velocità.

Per i motivi sopra elencati si è scelto di adottare un rapporto di densità di 2:1 tra i domini interni e quelli esterni.

## 6.5 Setup dell'ambiente di misura

Per la misura del coefficiente di diffusione (AES 4 ed. 2001) i dispositivi sotto test vengono generati ed inseriti nel centro di una mesh, che simula l'ambiente in cui viene condotta la misura. Le dimensioni dell'ambiente vengono scelte in modo tale che le riflessioni, dovute alla non perfetta anecoicITÀ delle pareti, interferiscano il meno possibile con la misura. L'impulso viene generato nel punto in cui è posta la sorgente e simultaneamente il segnale, nei punti in cui sono posti i microfoni, viene registrato. La disposizione di sorgente microfoni e dispositivo sotto test è rappresentata nella seguente figura.

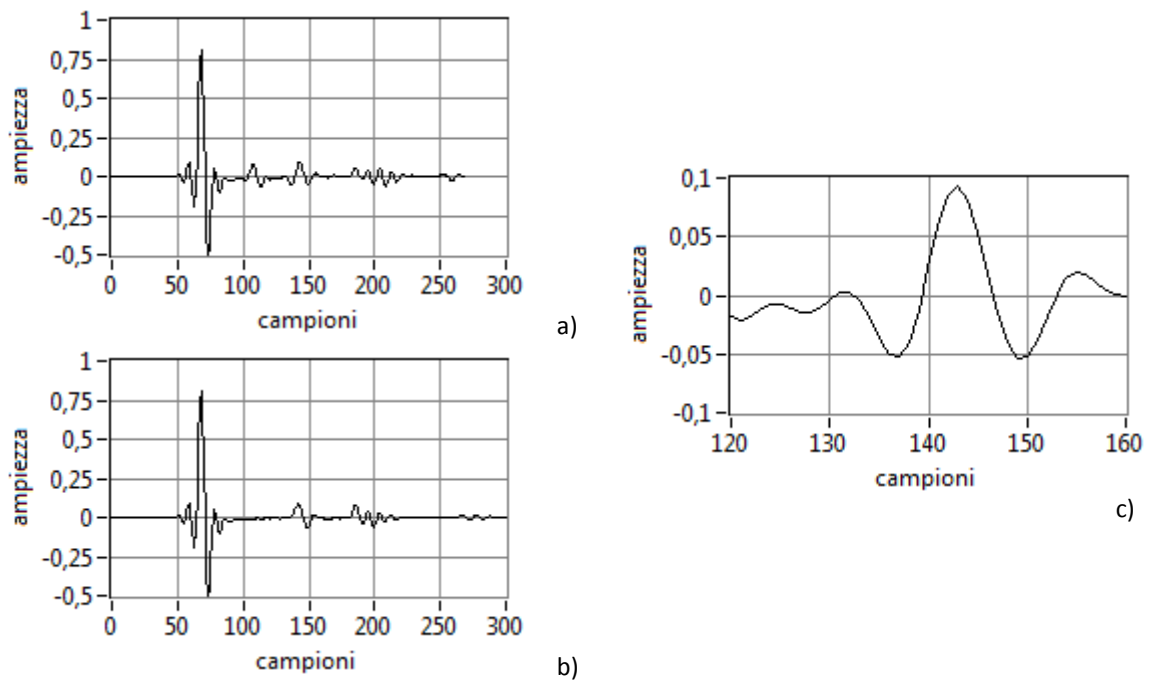


**Figura 6.11:** Setup di simulazione in accordo con lo standard AES. I punti esterni sono le posizioni della sorgente, i puntini interni sono le posizioni dei microfoni.

Dove  $d_m$  e  $d_s$  sono le distanze relativamente delle posizioni dei microfoni (output) e della sorgente (input), le distanze vengono prese in modo tale che almeno l'80% dei microfoni sia fuori dalla zona di riflessione speculare (Capitolo 2).

Per dispositivo di 1.1m, composto da 101 punti della mesh,  $d_m = 5\text{m}$  e  $d_s = 8\text{m}$ , la  $f_s = 44.100\text{ Hz}$  e i punti distano circa 11 mm.

I ricevitori sono posti in semicerchio con una distanza angolare di  $5^\circ$  da  $-90^\circ$  a  $+90^\circ$ . Mentre le prove vengono fatte variando la posizione della sorgente di  $10^\circ$ . Per ogni posizione di sorgente la misura viene ripetuta 2 volte, con e senza il diffusore inserito nell'ambiente, così da potere eliminare dalla risposta all'impulso il contributo del suono diretto e di eventuali riflessioni.



**Figura 6.12:** Risposte all'impulso: a) con diffusore, b) senza diffusore, c) zoom della riflessione, isolata per differenza

Alla risposta all'impulso ottenuta viene applicato un finestraggio temporale di Hanning, per evitare che il troncamento della code del segnale possa alterare la risposta in frequenza del sistema.

Ogni simulazione ha una durata tale da consentire all'impulso di propagarsi nell'ambiente, raggiungere il diffusore ed irradiarsi verso i ricevitori.

Le risposte all'impulso vengono poi trasformate, secondo Fourier, e vengono ricavati i livelli in dB per ogni terzo di ottava, utili per il calcolo dell'indice di diffusione.



## 6.6 Implementazione del software di simulazione

L'ambiente di simulazione scelto per implementare le DWM è LabVIEW della National Instrument. Oltre ad una preferenza di carattere personale, la scelta è stata dettata dalla molteplicità di strumenti che esso offre nel trattamento e nell'elaborazione dei segnali, per la potenza nello strutturare i dati, la flessibilità nell'uso di sottoprogrammi e la vasta scelta di interfacce grafiche di visualizzazione dei dati.

I programmi principali possono essere rappresentati nella seguente maniera:

1<sup>a</sup> Fase: preparazione della mesh.

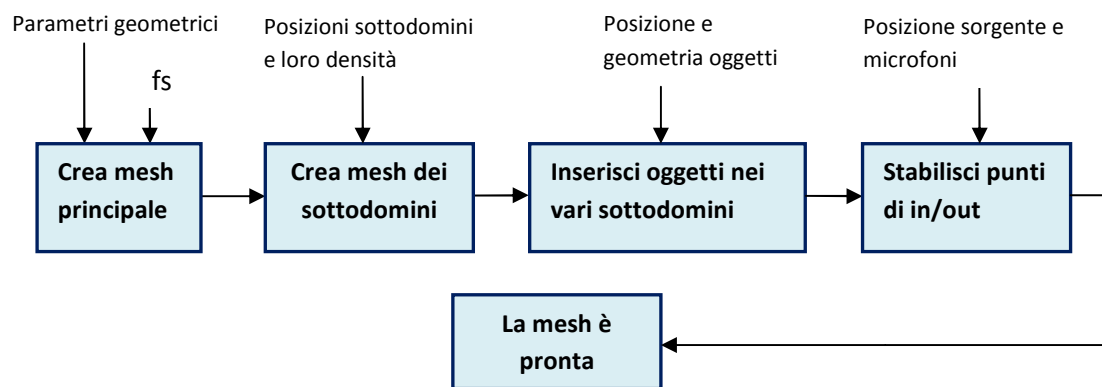


Figura 6.13: Schema a blocchi della fase di creazione delle mesh.

2<sup>a</sup> Fase: esegue la simulazione.

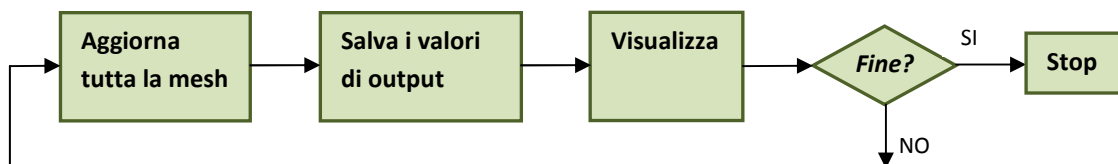
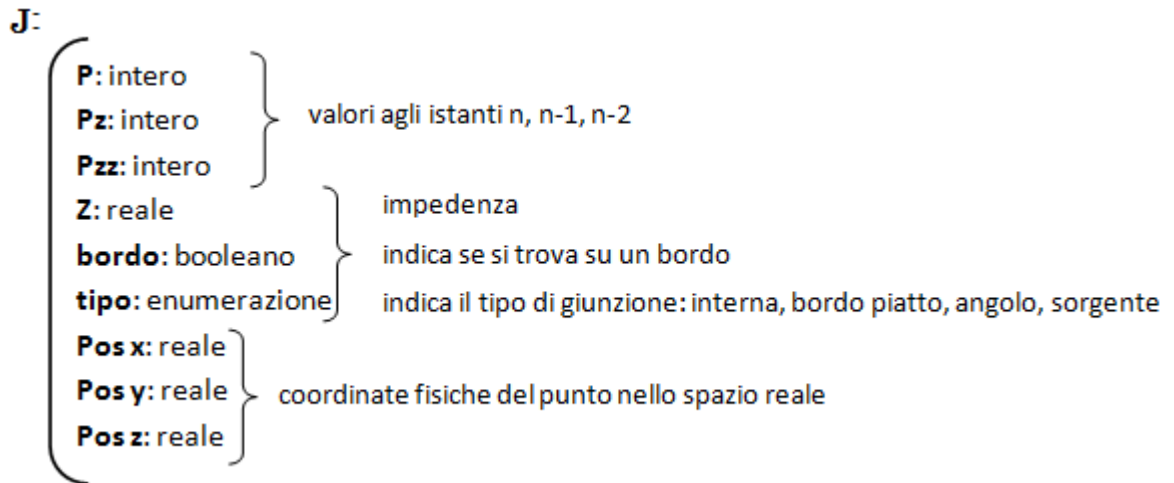


Figura 6.14: Schema a blocchi della fase di simulazione.

3<sup>a</sup> Fase: *elaborazione dei dati di output e creazione di diagrammi e grafici.*

## 6.7 Struttura dati principale

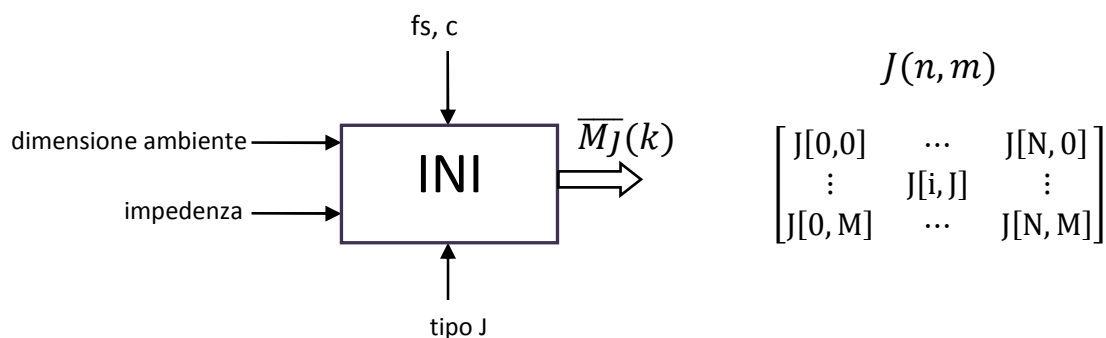
Oggetto **giunzione J** di tipo *Cluster*: esso è l'oggetto base che rappresenta l'elemento giunzione di scattering nella DWM.



## 6.8 Routines

### Routine INI

Routine di creazione della mesh, usata sia per la mesh principale che per i sottodomini: crea una matrice bi-tri dimensionale i cui elementi sono oggetti di tipo J, attribuisce loro una collocazione all'interno del dominio di appartenenza, legge i dati di input relativi alle dimensioni dell'ambiente, frequenze di campionamento, impedenza.



**Figura 6.15:** Schema a blocchi della routine INI.

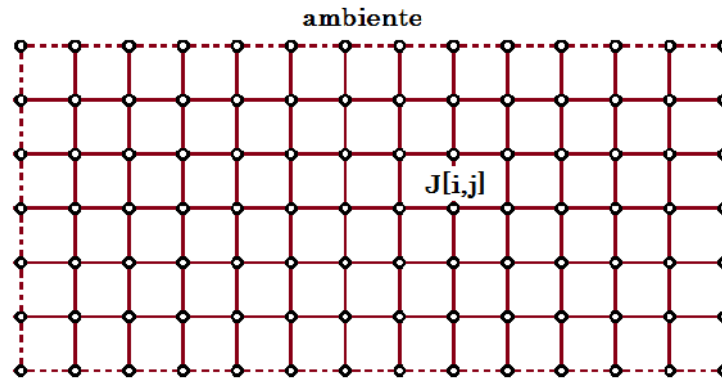


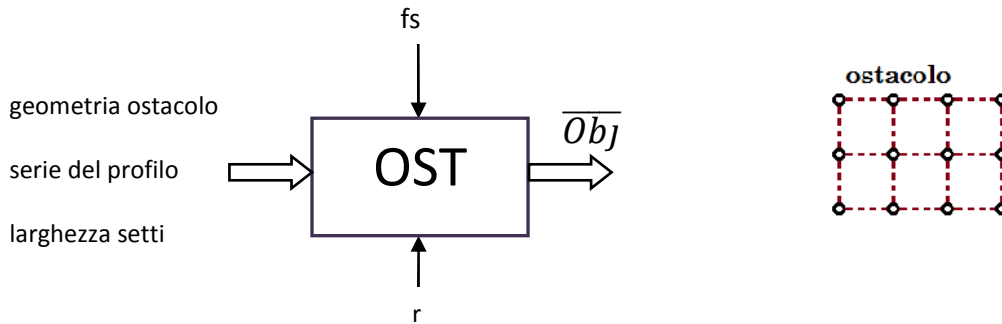
Figura 6.15: Rappresentazione della mesh creata dalla routine INI.

$\overline{M}_J(k)$  è un elemento di tipo Cluster, contiene:

{	<b>J [i,j]:</b> matrice 2D o 3D di elementi di tipo J	
	<b>d:</b> reale	passo spaziale
	<b>PosFis:</b> cluster	
	$\left. \begin{array}{c} w_y \\ L_x \\ w \\ L \end{array} \right\}$	contiene la posizione fisica della mesh
	<b>PosRel:</b> cluster	
	$\left. \begin{array}{c} InRow \\ InCop \\ FineRow \\ FineCol \end{array} \right\}$	contiene la posizione relativa all'interno del dominio
	<b>Contenuto:</b> stringa	indica in quale dominio è contenuta
	<b>Contiene:</b> flag	se contiene altri sottodomini
	<b>Livello:</b> intero	
	<b>Fattore di zoom:</b> intero	indica il fattore di zoom rispetto al dominio esterno

### Routine OST

Routine di creazione degli ostacoli da inserire nella mesh. Dalla geometria dell'ostacolo crea una matrice bidimensionale di 0 e 1 che definiscono il profilo dell'oggetto :  $\overline{Obj}$ .



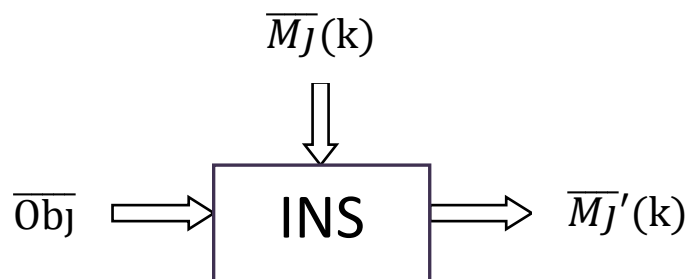
**Figura 6.16:** Schema a blocchi della routine OST e di creazione della mesh dell'ostacolo.

L'oggetto  $\overline{Obj}$  contiene:

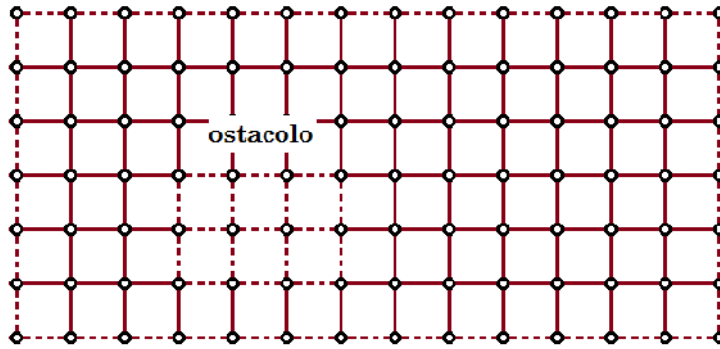
{	<b>O [i,j]:</b> array di interi	contiene la descrizione dell'oggetto				
	<b>PosFis:</b> cluster	contiene la posizione fisica della mesh				
	<table border="0" style="display: inline-table;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"><math>Pos_x</math></td> <td style="padding-left: 5px;">}</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"><math>Pos_y</math></td> <td style="padding-left: 5px;"></td> </tr> </table>	$Pos_x$	}	$Pos_y$		contiene la posizione fisica della mesh
	$Pos_x$	}				
	$Pos_y$					
<b>Sottodominio:</b> stringa	sottodominio di appartenenza					
<b>r:</b> reale	fattore di riflessione					

### Routine INS

Routine di inserimento dell'ostacolo all'interno del relativo sottodominio. Modifica gli elementi  $J(i,j)$  dell' $n$ -esimo elemento di  $\overline{M}_J(k)$  relativo al sottodominio in cui  $\overline{Obj}$  deve essere contenuto. Gli attributi di  $J(i,j)$ , relativi al tipo di cella ed al bordo, vengono modificati in accordo con la descrizione dell'oggetto contenuta in  $\overline{Obj}$ .



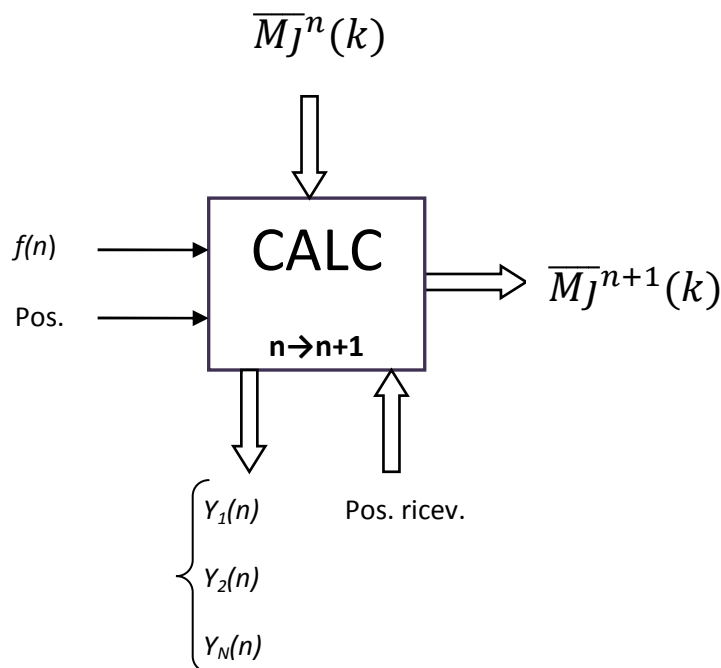
**Figura 6.17:** Schema a blocchi della routine INS.



**Figura 6.18:** Rappresentazione della mesh con l'oggetto inserito dalla routine INS.

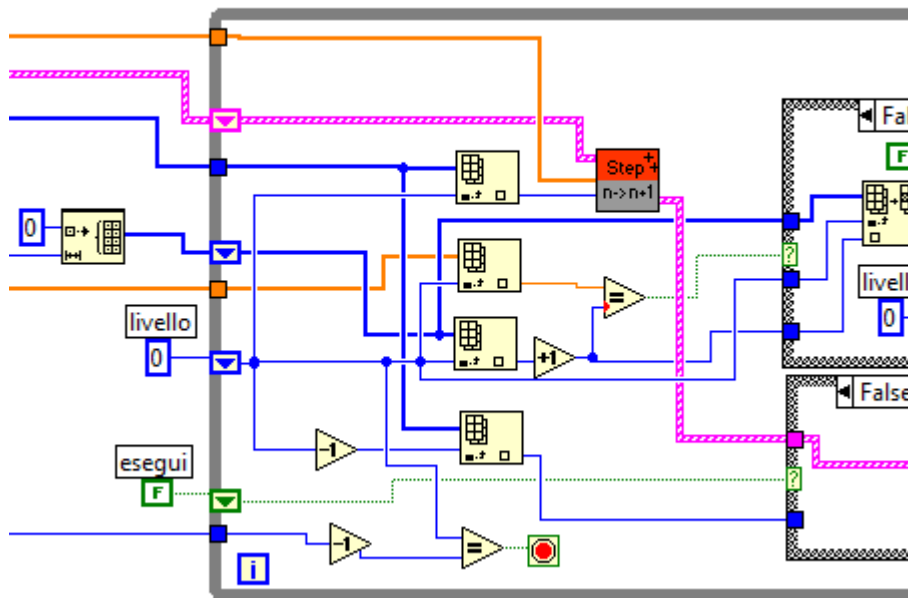
### Routine CALC

Routine di aggiornamento della mesh . Per ogni mesh e per ogni punto di  $J(i, j)$  viene eseguito l'aggiornamento al passo  $n+1$ , secondo gli algoritmi delle DWM. Ogni punto in base alla sua posizione avrà una differente formulazione di aggiornamento. Viene inoltre inserito nella mesh il segnale forzante  $f(n)$  nella posizione indicata per la sorgente.

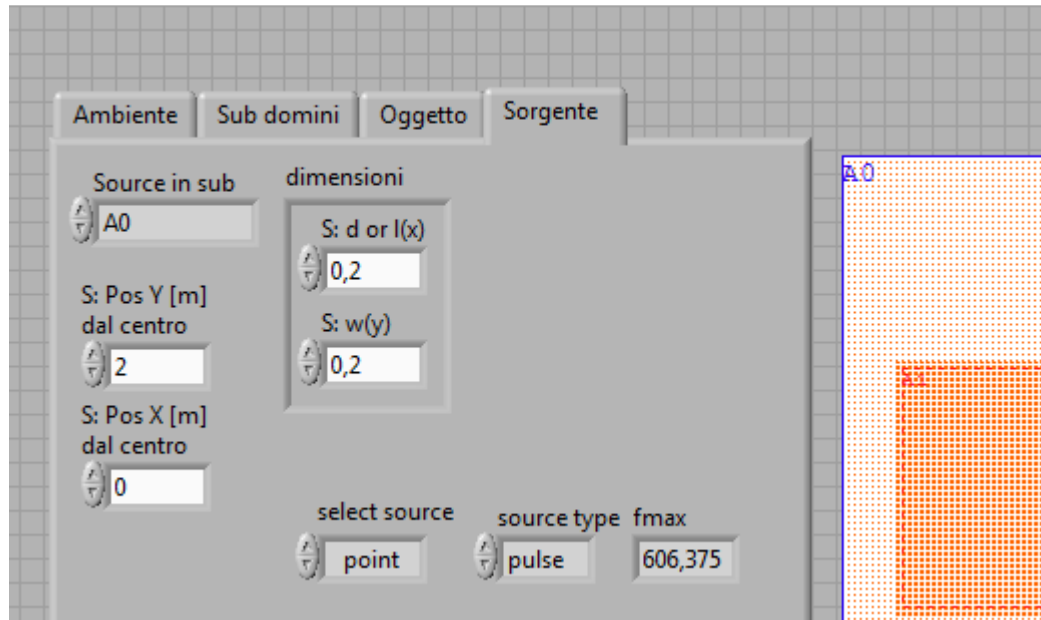


L'output è la mesh  $\bar{M}_J^{n+1}(k)$  aggiornato al passo  $n+1$  ed i valori alle posizioni dei ricevitori.

L'ambiente di programmazione si presenta in questo modo:



**Figura 6.19:** Stralcio del Block Diagram, di LabVIEW.



**Figura 6.20:** Stralcio del Front Panel, di LabVIEW.

## Capitolo 7

# RISULTATI DELLE SIMULAZIONI

### 7.1 Validazione del modello di simulazione

Per testare la validità del modello, viene simulata la risposta all'impulso di un ambiente rettangolare, per comparare la risposta in frequenza con le frequenze di risonanza (modi) previsti teoricamente.

I modi di un ambiente bidimensionale rettangolare, si trovano mediante l'espressione:

$$f_{l,m} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{l}{L}\right)^2 + \left(\frac{m}{W}\right)^2} \quad (7.1)$$

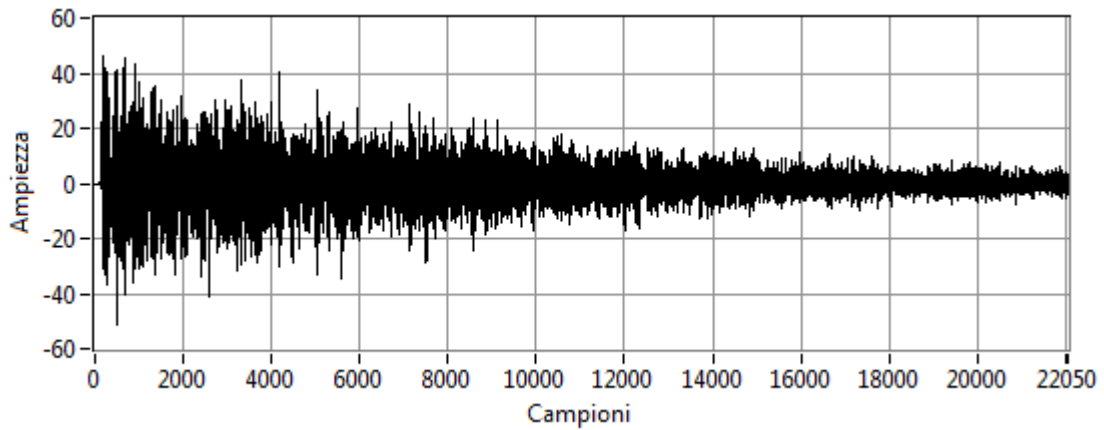
dove  $l, m$  sono i numeri modali ed  $L, W$  sono le dimensioni dell'ambiente in metri.

Per eseguire il test è stato generato un ambiente di dimensioni  $L=2,42\text{m}$  ed  $W=3,30\text{m}$ . Il coefficiente di riflessione della superficie delle pareti è posto a  $r=0,99$ , ed il periodo di campionamento spaziale  $d=0,022\text{m}$  a cui corrisponde una frequenza di campionamento del segnale  $f_s=22.050\text{Hz}$ .

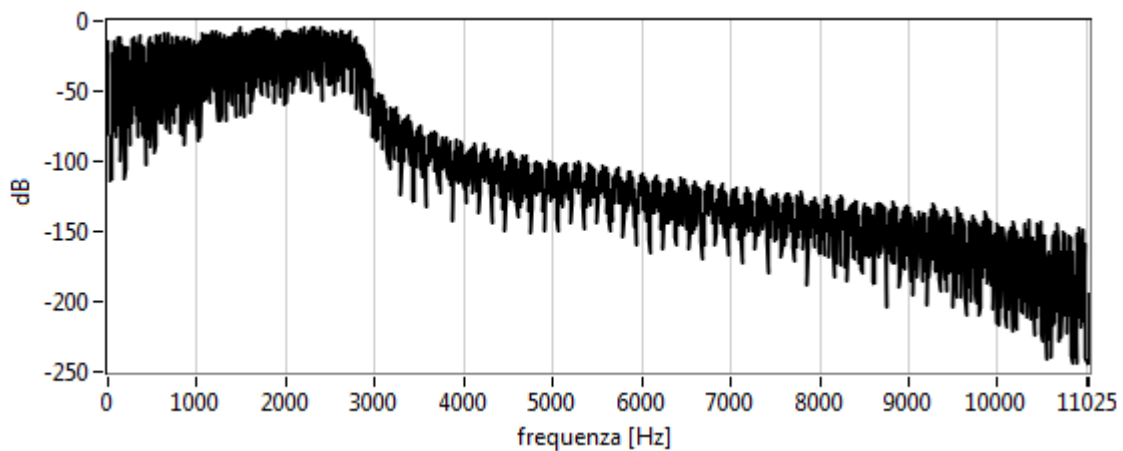
Il segnale di ingresso è stato posto nel punto S di coordinate  $(2,21;1,45)$  e consiste in un impulso di Dirac filtrato passa basso con frequenza di taglio posta a  $f_s/8$ , il punto di campionamento è invece posto in M di coordinate  $(0,3;0,5)$ . I punti sono stati scelti in modo da non trovarsi su nodi o ventri.

I risultati ottenuti sono presentati nelle seguenti figure 7.1 e 7.2.

Dalla figura 7.1 si nota il decremento dovuto all'assorbimento delle pareti che non sono perfettamente riflettenti. La figura 7.2 riporta lo spettro di potenza in cui si nota che il segnale decade velocemente a partire dai  $2.750\text{Hz}$  che è la frequenza di taglio del filtro passa basso.



**Figura 7.1:** Risposta all'impulso, di durata 1s.



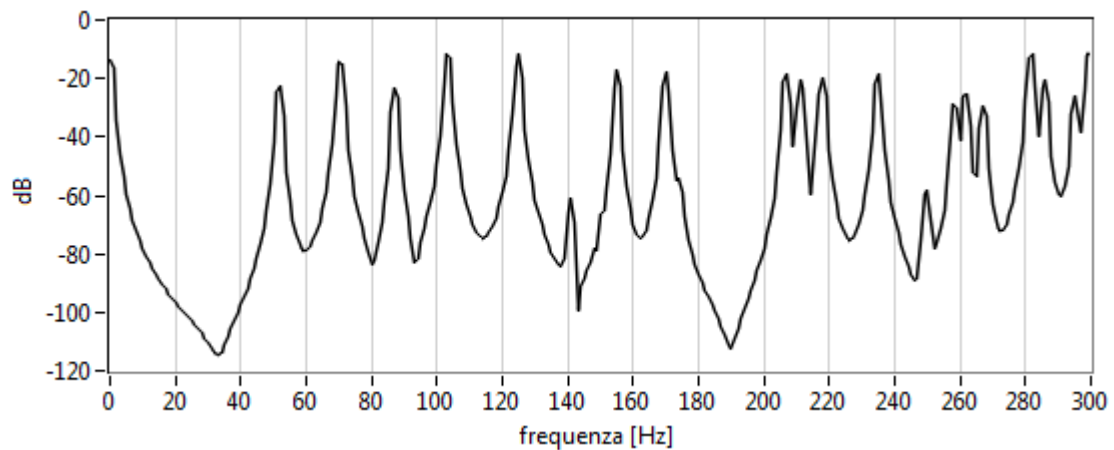
**Figura 7.2:** Risposta in frequenza su tutto lo spettro.

Per potere esaminare la presenza di frequenze modali si deve osservare lo spettro alle basse frequenze in figura 7.3.

Per confronto si riportano le frequenze calcolate teoricamente:

	l=0	l=1	l=2	l=3	l=4	l=5	l=6	l=7
m=0	0	52	103	155	206	258	309	361
m=1	70	87	125	170	218	267	317	367
m=2	140	150	174	209	249	293	340	387
m=3	211	217	235	261	295	333	374	418
m=4	281	286	299	321	348	381	418	457
m=5	351	355	366	384	407	436	468	503

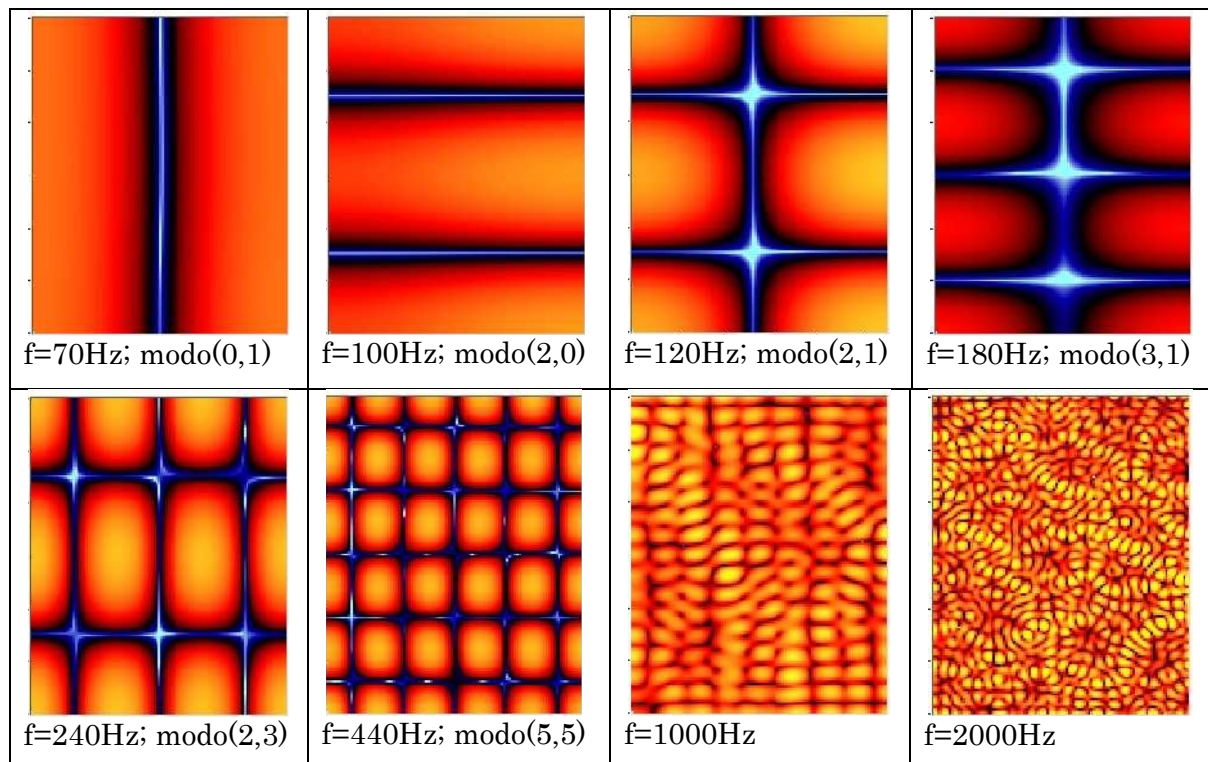




**Figura 7.3:** Risposta alle basse frequenze. Sono evidenti i modi molto pronunciati.

Si riscontra una notevole coincidenza con la maggior parte dei modi previsti teoricamente. Modi vicini in frequenza non sono visibili in quanto è necessaria una migliore risoluzione in frequenza rispetto a quella adottata.

Questo riscontro ci dice che la mesh rappresenta bene ambienti rettangolari e con basso assorbimento.



**Figura 7.4:** Analisi nodale di un ambiente bidimensionale di dimensioni  $L=2.42\text{m}$ ,  $W=3.30\text{m}$ .

Sono state eseguite delle mappature visibili in figura 7.4, ottenute dall'analisi in frequenza dei segnali catturati in ogni punto della mesh; dalle mappature si nota chiaramente la posizione e l'intensità di nodi e ventri.

## 7.2 Simulazioni

In ogni prova la superficie sotto test è posta nell'ambiente come descritto nel setup di misura del capitolo 6. Le posizioni della sorgente variano da  $-90^\circ$  a  $+90^\circ$  con un passo di  $10^\circ$ , e le risposte vengono catturate dai ricevitori.

Per ogni risposta viene calcolata la FFT, e gli spettri vengono combinati insieme in un diagramma colorimetrico (spetrogramma) in cui in ascissa ci sono le frequenze ed in ordinate gli angoli. In questo modo si può osservare l'andamento al variare della frequenza della distribuzione angolare dell'energia, per effetto della diffusione.

Per il calcolo del coefficiente di diffusione lo step tra un ricevitore e l'altro è posto a  $5^\circ$  ed il calcolo dei diagrammi polari viene eseguito in bande di terzi di ottava da 100Hz a 8000Hz. Inoltre, per potere confrontare i dati misurati con quelli predetti tramite l'approssimazione in campo lontano, verranno usati i dati rilevati con un passo di  $1^\circ$  tra un ricevitore e l'altro, mentre i diagrammi polari verranno realizzati per frequenze singole in banda stretta.

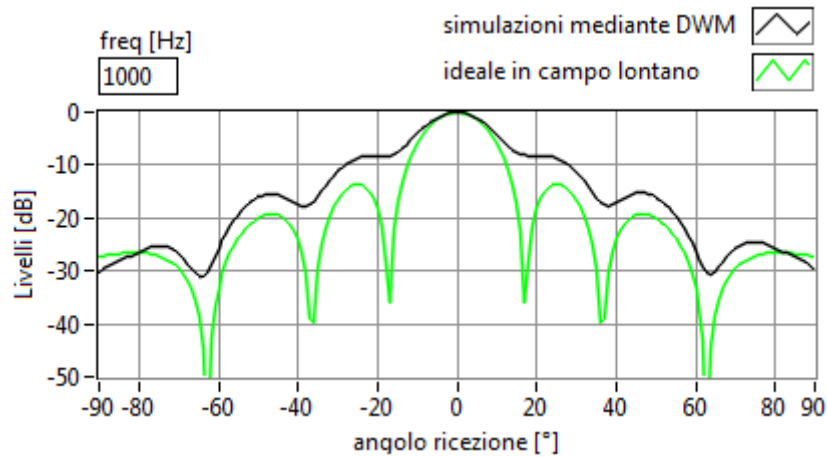
Il coefficiente di diffusione angolare verrà presentato in bande di terzi di ottava e per tutti gli angoli di incidenza, dalla media dei valori si ottiene un unico *coefficiente di diffusione per incidenza casuale*.

## 7.3 Superficie piana

Come prima misura viene realizzata una superficie piana di dimensioni 1,10m di lunghezza per 0,033m di spessore. Viene presentato prima un confronto tra il diagramma in campo lontano ed il diagramma simulato a 1000Hz.

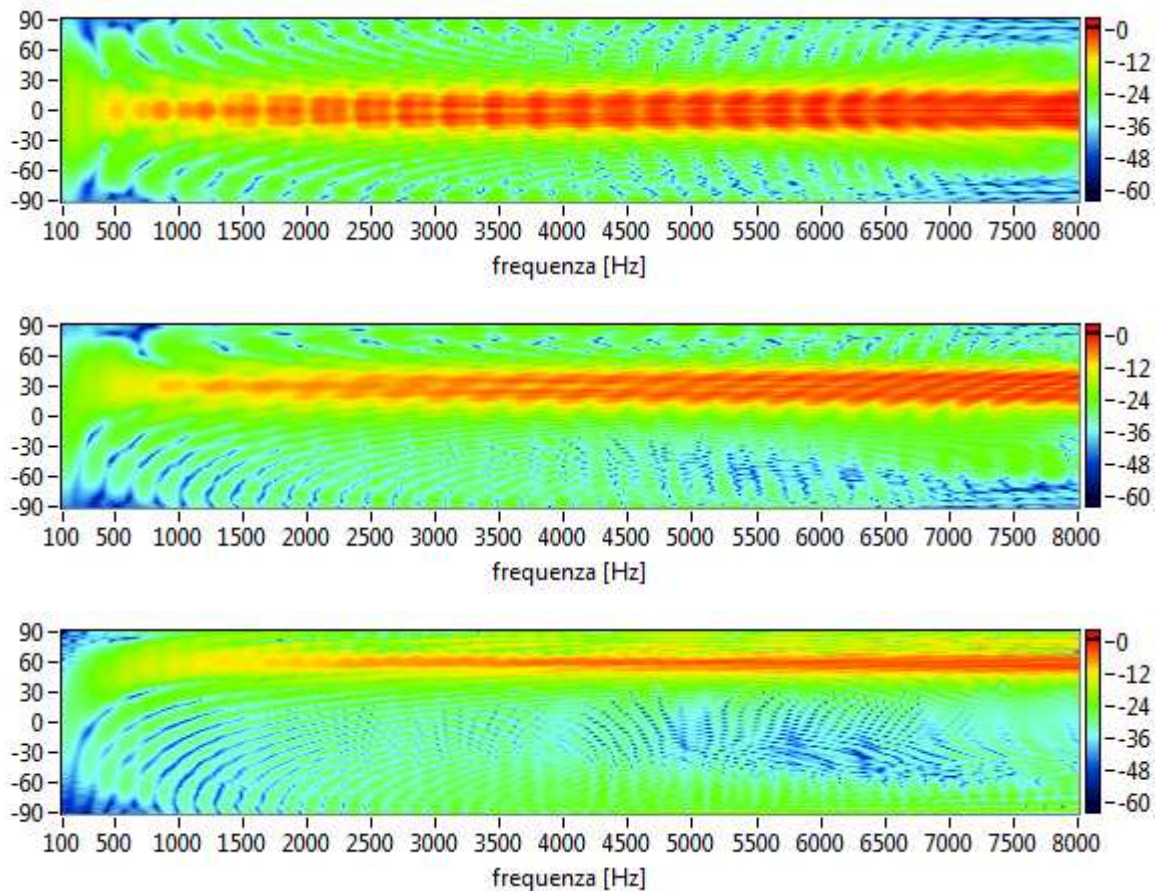
La figura 7.4 mostra una notevole somiglianza dei diagrammi nella formazione dei lobi, i quali a meno delle ampiezze hanno le stesse posizioni. Appaiono meno marcati nel caso del diagramma ottenuto mediante DWM rispetto a quelli ideali in campo lontano, questo per via della distanza finita a cui sono posti i ricettori nella simulazione.

Nella figura della diffusione sono presenti: il lobo centrale e i lobi secondari.



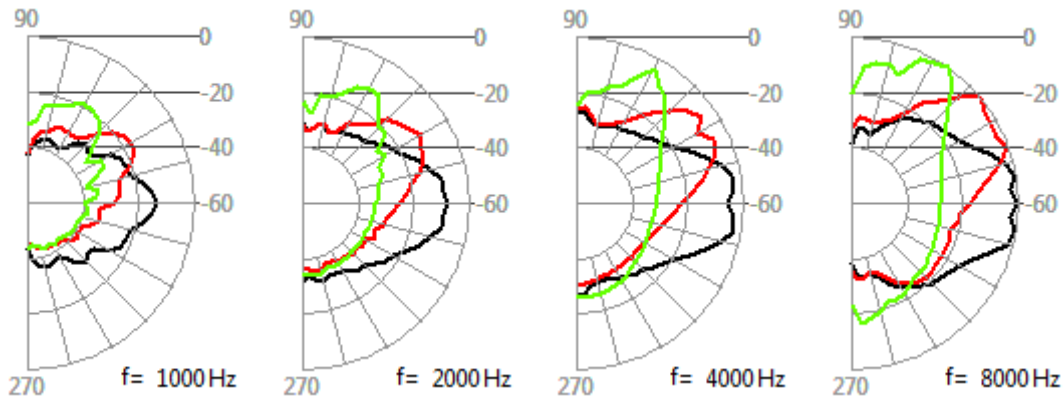
**Figura7.4:**Diagramma polare di diffusione della superficie piana di dimensioni 1,1m di lunghezza e 0,0033m di spessore, confronto tra il diagramma ottenuto nell'ambiente di simulazione in verde ed il diagramma ottenuto mediante approssimazione in campo lontano in nero.

Il lobo centrale che viene a formarsi nella direzione di riflessione speculare  $0^\circ$  è molto accentuato, come ci si aspetta da una superficie piana, ed attorno a questo vi sono i lobi secondari che sorgono per via delle dimensioni finite della superficie e saranno tanto più rilevanti quanto le dimensioni della superficie sono paragonabili con la lunghezza d'onda.

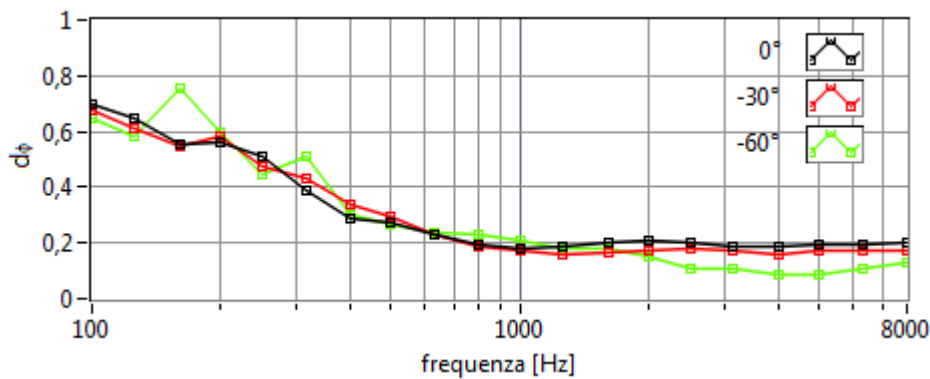


**Figura7.5:** Spettrogrammi per la superficie piana di 1.1m di lunghezza e 0.033m di spessore per incidenza:  $0^\circ$ ,  $-30^\circ$ ,  $-60^\circ$ .

Poiché questa superficie verrà paragonata con i diffusori di Schroeder, su cui si è indagato, anche per essa sono stati calcolati i diagrammi di radiazione polare in bande di terzi di ottava ed il coefficiente di diffusione angolare.



**Figura7.6:** Diagrammi polari di diffusione per la superficie piana di 1.1m di lunghezza e 0.033m di spessore per incidenza: 0°, -30°, -60°, rispettivamente in nero, rosso e verde.



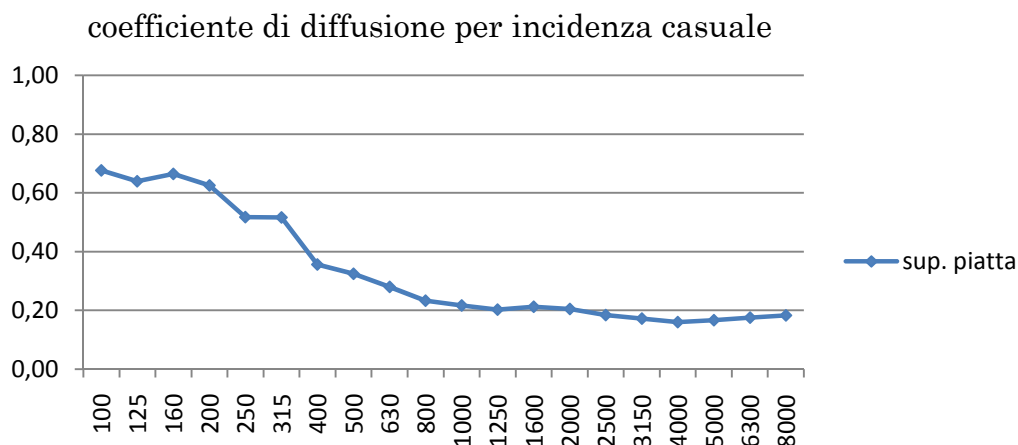
**Figura7.7:** Coefficiente di diffusione per la superficie piana di lunghezza 1.1m e spessore 0.033m, per incidenza 0°, -30° e -60°.

Il diagramma in figura 7.7 mostra come, a partire dagli 800Hz, il coefficiente di diffusione sia basso ma comunque non nullo, come ci si aspetterebbe da una superficie che dovrebbe riflettere solo in direzione speculare. Questi valori derivano dalla concomitanza di diversi fattori, il primo dei quali è ancora una volta dovuto alle dimensioni finite della superficie. Questo effetto è più marcato alle basse frequenze per le quali la superficie riflette meno energia oltre che in termini assoluti, anche rispetto alla direzione speculare, tendendo a comportarsi sempre più da sorgente secondaria puntiforme.

L'altro effetto deriva dall'aver posto i ricevitori ad una distanza finita, per avere ambienti di simulazione non troppo estesi e ridurre al massimo il tempi

di computazione, che per ambienti di grandi dimensioni diventerebbero impraticabili. Alternativamente la condizione di campo lontano potrebbe essere migliorata diminuendo le dimensioni della superficie, ma in questo caso la quantità di energia riflessa si riduce notevolmente alle basse frequenze.

Il coefficiente di diffusione per incidenza casuale, calcolato dalla media dei coefficienti di diffusione al variare dell'angolo di incidenza, è presentato in figura 7.8.



**Figura 7.8:** Coefficiente di diffusione per incidenza casuale, per la superficie piatta

Questo diagramma verrà paragonato con quelli ottenuti per i vari diffusori di Schroeder studiati, i quali per poterli confrontare verranno realizzati approssimativamente tutti con le stesse dimensioni. La lunghezza è fissata a 1,1m, lasciando da caso a caso qualche centimetro di tolleranza tra un dispositivo e l'altro dovuto alle dimensioni discrete vincolanti da adottare.

## 7.4 Diffusori PRD e QRD

Il comportamento di diverse tipologie di diffusori è stato studiato, simulando la diffusione angolare con il metodo precedentemente descritto e ricavando i coefficienti di diffusione. In questo modo sono state messe a confronto le prestazioni di diffusori PRD e QRD al variare dei parametri di progetto,  $N$  numero primo che genera la sequenza,  $f_0$  frequenza di accordo ed  $n_p$  numero di periodi di ripetizione della sequenza base.

Poiché i diffusori sono stati implementati mediante DWM in ambiente 2D, è stato necessario fissare dei vincoli sulla progettazione, essi riguardano:

- il passo minimo nella profondità dei setti posto a 0,011m posto uguale al passo di campionamento spaziale.
- la larghezza dei setti  $w$  è posta a 0,033m uguale a tre campioni dello spazio.

Inoltre per tutte le tipologie simulate, la lunghezza complessiva del dispositivo testato è stata di 1,1m, affiancando le sequenze di base le une alle altre in sequenze periodiche.

In seguito ogni diffusore verrà identificato con varie sigle che hanno il seguente significato:

- **QRD** o **PRD** rispettivamente se si tratta di un diffusore ai residui quadratici o a radice primitiva.
- **N** il numero primo da cui si ricava la sequenza di base.
- **w** la larghezza dei setti del diffusore.
- **n<sub>p</sub>** il numero di periodi della sequenza base di cui è composto il diffusore.
- **f<sub>0</sub>** la frequenza di progetto.



**Figura 7.9:** Implementazione discreta di un diffusore nell'ambiente di simulazione. I puntini in blu rappresentano il profilo del diffusore. Si noti la larghezza dei setti fissata a 3 punti. In questo caso si è rappresentato un PRD per  $N=7$  ed  $n_p=6$ .

**Caso 1:**

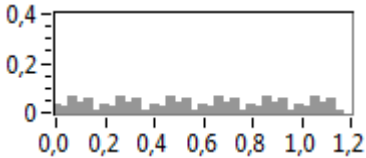
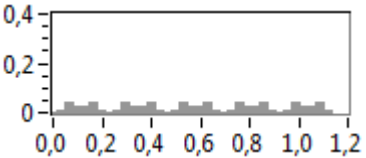
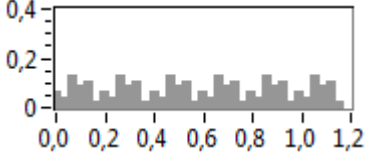
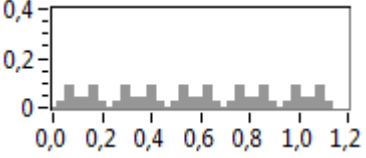
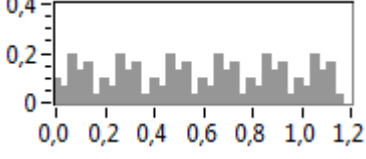
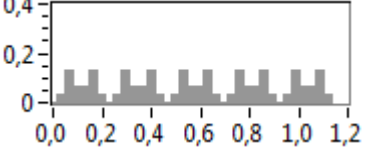
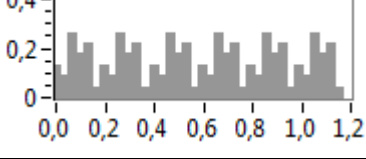
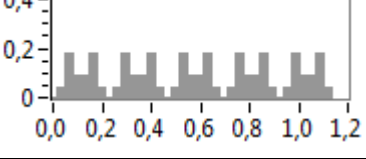
$N=7$ ;  $w=0.033m$

Le sequenze PRD e QRD sono:

$S_{PRD}=\{3,2,6,4,5,1\}$  generata dalla radice primitiva  $r_p=3$ ;  $n_p=6$ .

$S_{QRD}=\{0,1,4,2,2,4,1\}$ ;  $n_p=5$ .

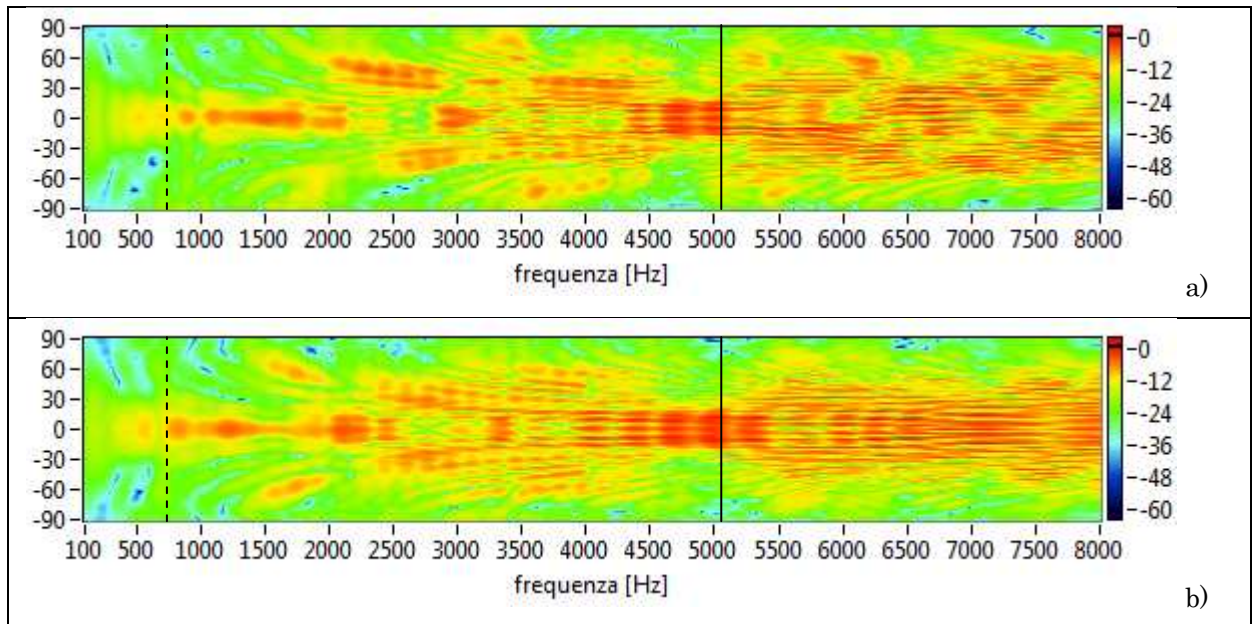
Avendo posto un passo minimo per la profondità dei setti, le frequenze di progetto  $f_0$  possibili sono tutti i sottomultipli di  $f_{0,max}=2207,79Hz$ . Impostata una  $f_0$  si ottiene la sequenza delle profondità dei setti:

$f_0$ [Hz]	$d_{PRD}(n)$ in metri	$d_{QRD}(n)$ in metri
2207,79	{0.033, 0.022, 0.066, 0.044, 0.055, 0.011} 	{0, 0.011, 0.044, 0.022, 0.022, 0.044, 0.011} 
1103,89	{0.066, 0.044, 0.132, 0.088, 0.110, 0.022} 	{0, 0.022, 0.088, 0.044, 0.044, 0.088, 0.022} 
735,93	{0.099, 0.066, 0.196, 0.132, 0.165, 0.033} 	{0, 0.033, 0.132, 0.066, 0.066, 0.132, 0.033} 
551,94	{0.132, 0.088, 0.264, 0.176, 0.220, 0.044} 	{0, 0.044, 0.176, 0.088, 0.088, 0.176, 0.044} 

Visto che al diminuire della  $f_0$  gli spessori diventano sempre maggiori, si è scelto di non scendere sotto i 551,94 Hz, per evitare di avere spessori troppo elevati.

Confronto tra PRD e QRD a parità di frequenza di progetto:

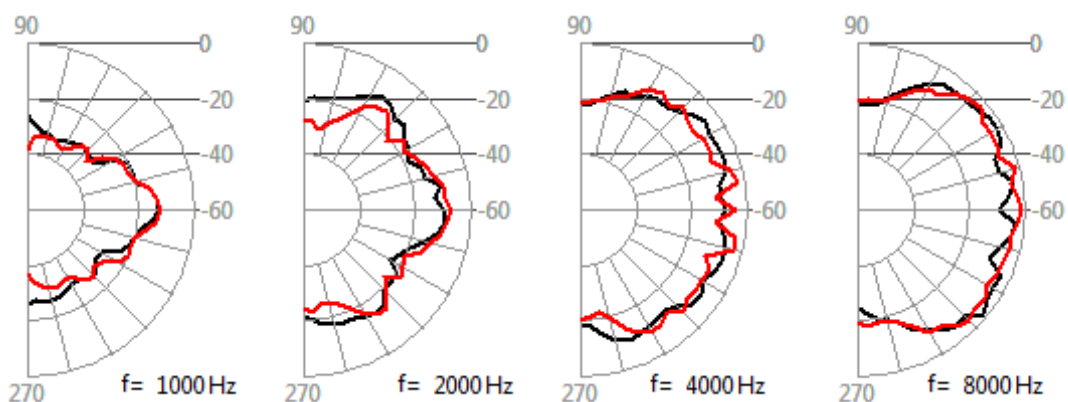
gli spettrogrammi completi per tutti i casi analizzati sono presenti in Appendice D, qui si riportano per brevità quelli relativi ad  $f_0=735,93Hz$  per incidenza normale.



**Figura 7.10:** Spettrogrammi per incidenza normale ottenuti per i diffusori a)PRD, b)QRD. Con  $N=7$ ,  $n_p=6$ ,  $f_0=735.93\text{Hz}$ ,  $w=0.033\text{m}$ . La frequenza di coincidenza è  $f_c=5151.51$  indicata con riga nera continua.

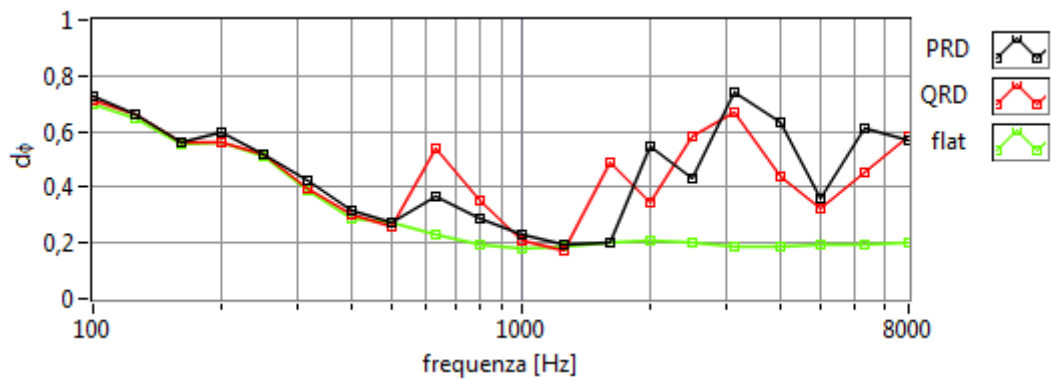
Si nota come l'energia si distribuisca nei lobi laterali soprattutto alle alte frequenze, mentre alla frequenza di progetto i lobi laterali sono poco marcati perché contengono poca energia. Si nota una diminuzione dei lobi laterali con l'accentuarsi del lobo centrale in prossimità della *frequenza di coincidenza* che in questo caso si trova a  $f=7 \times 735.93\text{Hz}=5151.51\text{Hz}$ . A questa frequenza il diffusore tende a comportarsi come una **superficie speculare**.

Per entrambi i casi vengono riportati i diagrammi polari in bande di terzi di ottava.



**Figura 7.11:** Diagrammi polari di diffusione per diffusori PRD in nero e QRD in rosso per incidenza normale. Con  $N=7$ ,  $n_p=6$ ,  $f_0=735.93\text{Hz}$ ,  $w=0.033\text{m}$ .





**Figura 7.12:** Coefficiente di diffusione angolare per incidenza normale, per i diffusori PRD e QRD. Con  $N=7$ ,  $n_p=6$ ,  $f_0=735.93\text{Hz}$ ,  $w=0.033\text{m}$ . In verde la superficie piatta di riferimento.

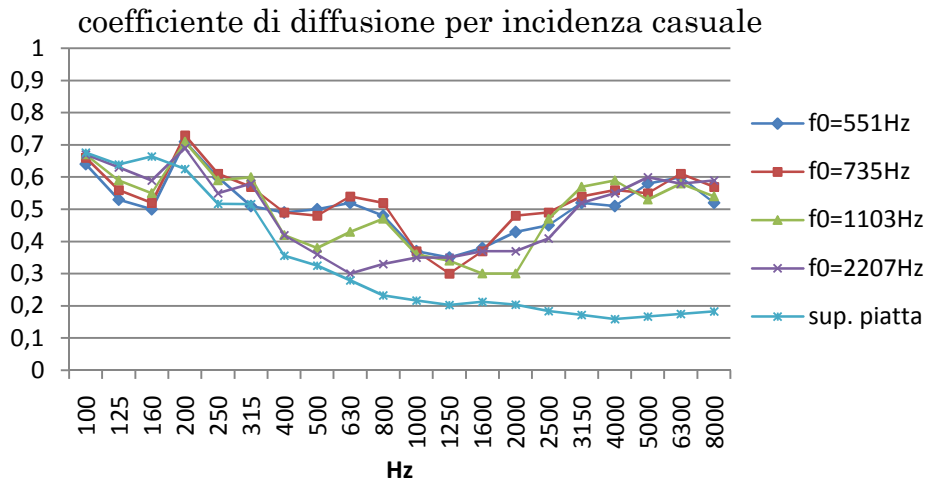
Dal diagramma del coefficiente di diffusione si può osservare come i due diffusori mostrano un andamento che segue quello della superficie piatta fino ad i 500Hz. Un picco evidente si ha per la banda dei 630Hz, prossima alla frequenza di progetto  $f_0$ , soprattutto per il diffusore QRD, il picco si ripete nella banda dei 1600Hz, prossima a  $2f_0$ . Per mettere in luce in maniera più marcata queste caratteristiche risulta necessaria un'analisi in banda fine e non in bande di terzi di ottava.

Almeno per quanto riguarda l'incidenza normale i due diffusori tendono ad avere un comportamento simile, il QRD ha un comportamento migliore a frequenze più basse (fino a 1600Hz), mentre il PRD dai 3000Hz in sù.

Si è voluto poi osservare l'andamento del coefficiente di diffusione fissando il tipo di diffusore e variando la frequenza di progetto.

Nel caso del diffusore PRD il coefficiente di diffusione per incidenza casuale:

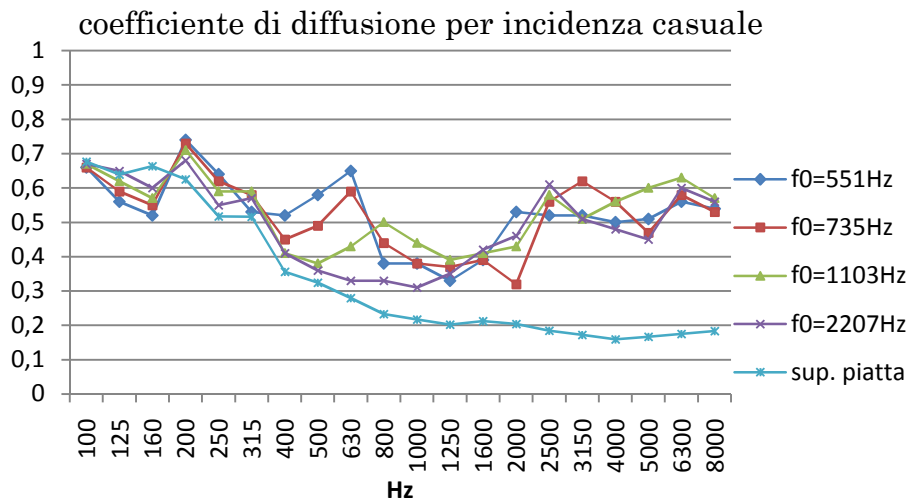
	terzi di ottava [Hz]																			
	100	125	160	200	250	315	400	500	630	800	1000	1250	1600	2000	2500	3150	4000	5000	6300	8000
$f_0=551\text{Hz}$	0,64	0,53	0,5	0,71	0,6	0,51	0,49	0,5	0,52	0,48	0,37	0,35	0,38	0,43	0,45	0,52	0,51	0,58	0,6	0,52
$f_0=735\text{Hz}$	0,66	0,56	0,52	0,73	0,61	0,57	0,49	0,48	0,54	0,52	0,37	0,3	0,37	0,48	0,49	0,54	0,56	0,55	0,61	0,57
$f_0=1103\text{Hz}$	0,67	0,59	0,55	0,71	0,59	0,6	0,42	0,38	0,43	0,47	0,36	0,34	0,3	0,3	0,47	0,57	0,59	0,53	0,58	0,54
$f_0=2207\text{Hz}$	0,67	0,63	0,59	0,69	0,55	0,58	0,42	0,36	0,3	0,33	0,35	0,35	0,37	0,37	0,41	0,52	0,55	0,6	0,58	0,59



**Tabella 7.13:** Coefficiente di diffusione per incidenza casuale per i diffusori PRD N=7, np=6, w=0.033m, per f0 che varia :551Hz, 735Hz, 1103Hz, 2207Hz

Nel caso di diffusore QRD il coefficiente di diffusione per incidenza casuale:

	terzi di ottava [Hz]																			
	100	125	160	200	250	315	400	500	630	800	1000	1250	1600	2000	2500	3150	4000	5000	6300	8000
f0=551Hz	0,66	0,56	0,52	0,74	0,64	0,53	0,52	0,58	0,65	0,38	0,38	0,33	0,39	0,53	0,52	0,52	0,5	0,51	0,56	0,54
f0=735Hz	0,66	0,59	0,55	0,73	0,62	0,58	0,45	0,49	0,59	0,44	0,38	0,37	0,39	0,32	0,56	0,62	0,56	0,47	0,58	0,53
f0=1103Hz	0,67	0,62	0,57	0,71	0,59	0,59	0,41	0,38	0,43	0,5	0,44	0,39	0,41	0,43	0,58	0,51	0,56	0,6	0,63	0,57
f0=2207Hz	0,67	0,65	0,6	0,68	0,55	0,57	0,41	0,36	0,33	0,33	0,31	0,35	0,42	0,46	0,61	0,51	0,48	0,45	0,6	0,56



**Tabella 7.14:** Coefficiente di diffusione per incidenza casuale per i diffusori QRD con N=7, np=6, w=0.033m, per f0 che varia :551Hz, 735Hz, 1103Hz, 2207Hz

Il coefficiente di diffusione per incidenza casuale (ricavato dalla media dei coefficienti di diffusione ottenuti per diversi angoli di incidenza), si mantiene

sostanzialmente coerente a quanto accade per l'incidenza normale, dimostrando l'efficacia di questi dispositivi nel diffondere l'energia indipendentemente dall'angolo di incidenza.

Si evidenzia che in tutti i casi trattati la regione di maggiore efficacia sia per frequenze superiori ad i 2500Hz, mentre una costante è il buco che si viene a creare nelle bande da 1000Hz a 1600Hz, per le quali si ha un abbassamento della diffusione, indipendentemente dalla frequenza di progetto.

Per frequenze di progetto  $f_0$  centrate sui 551Hz e 735Hz, si ha un picco di diffusione nella banda dei 630Hz, più marcato nel caso del diffusore QRD.

**Caso 2:**

$N=13$ ;  $n_p=3$ ;  $w=0.033m$ .

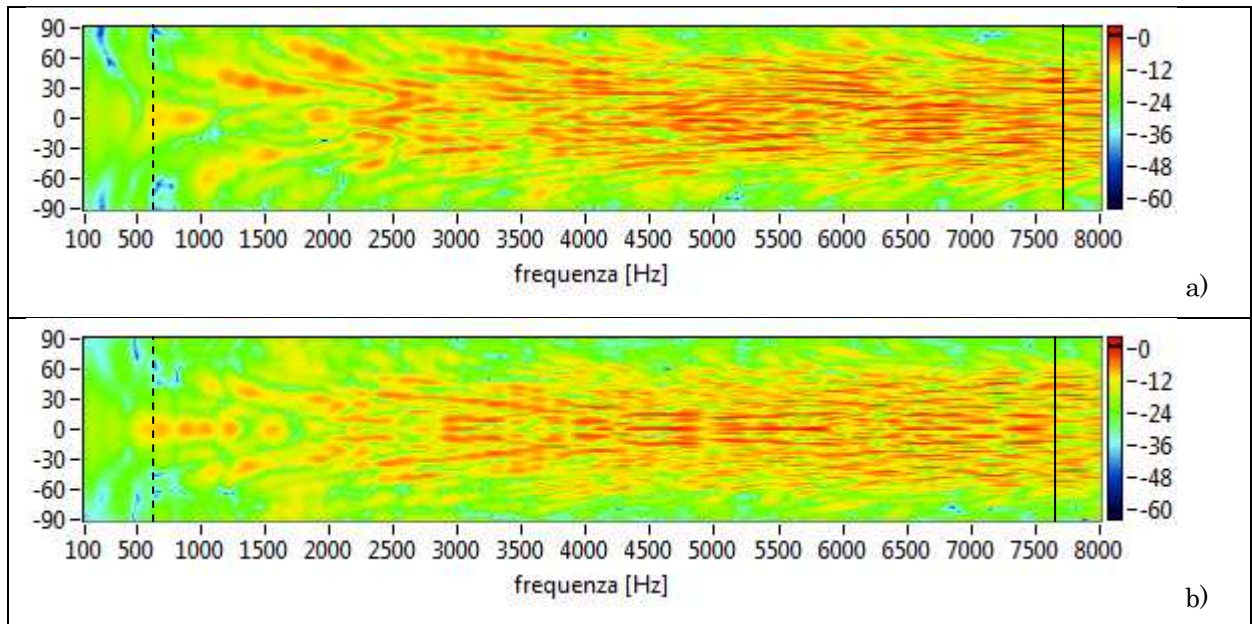
Le sequenze PRD e QRD sono:

$S_{PRD}=\{7, 10, 5, 9, 11, 12, 6, 3, 8, 4, 2, 1\}$  generata dalla radice primitiva  $r_p=7$ .

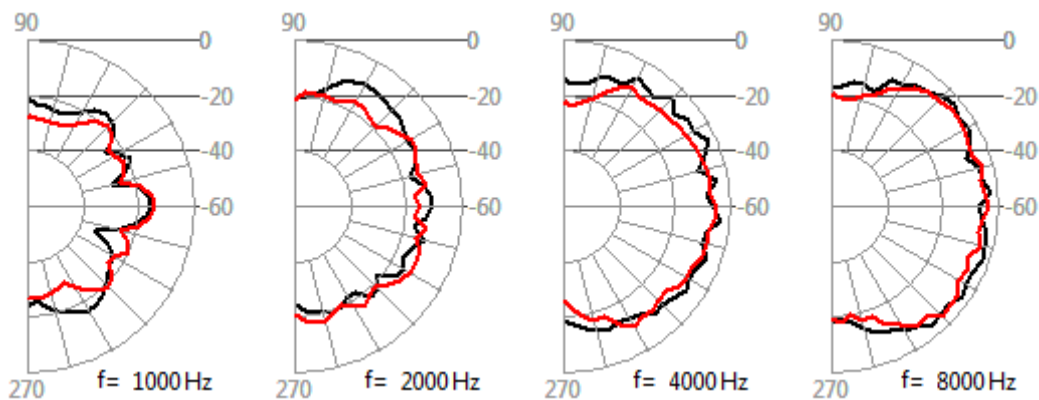
$S_{QRD}=\{0, 1, 4, 9, 3, 12, 10, 10, 12, 3, 9, 4, 1\}$ .

In questo caso le frequenze di progetto sono due:  $f_0=1188.81Hz$  che è la frequenza di progetto massima imposta dal passo di campionamento, ed  $f_0=594.405Hz$ . Come nel caso precedente non si considerano frequenze  $f_0$  più basse per evitare che di avere spessori troppo grossi.

$f_0$ [Hz]	$d_{PRD}(n)$ in metri	$d_{QRD}(n)$ in metri
1188.81	{0.077, 0.11, 0.055, 0.099, 0.121, 0.132, 0.066, 0.033, 0.088, 0.044, 0.022, 0.011}	{0, 0.011, 0.044, 0.099, 0.033, 0.132, 0.11, 0.11, 0.132, 0.033 0.099, 0.044, 0.011}
594.405	{0.154, 0.22, 0.11, 0.198, 0.242, 0.264, 0.132, 0.066, 0.176, 0.088, 0.044, 0.022}	{0, 0.022, 0.088, 0.198, 0.066, 0.264, 0.22, 0.22, 0.264, 0.066, 0.198 0.088, 0.022}



**Figura 7.15:** Spettrogrammi per incidenza normale ottenuti per i diffusori a)PRD, b)QRD. Con  $N=13$ ,  $n_p=6$ ,  $f_0=594\text{Hz}$ ,  $w=0.033\text{m}$ . La frequenza di coincidenza è  $f_c=7727\text{Hz}$  indicata con riga nera continua.



**Figura 7.16:** Diagrammi polari di diffusione per diffusori PRD in nero e QRD in rosso per incidenza normale. Con  $N=13$ ,  $n_p=3$ ,  $f_0=594\text{Hz}$ ,  $w=0.033\text{m}$ .

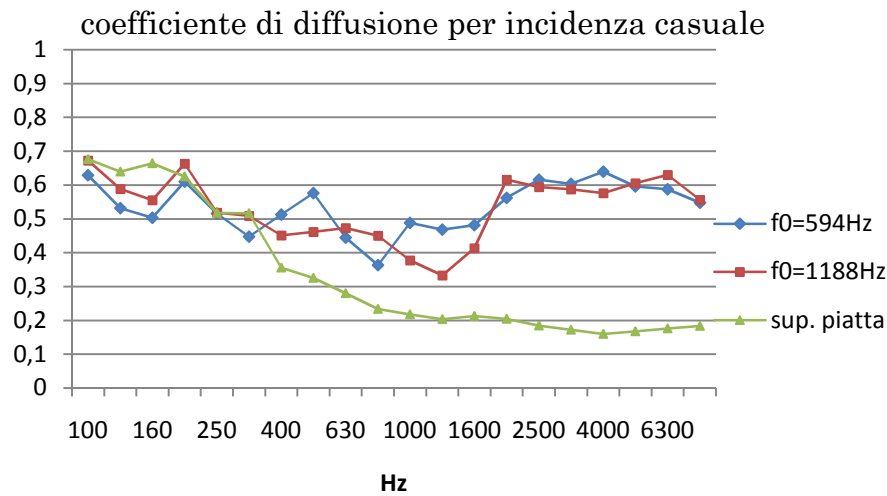
Sia gli spettrogrammi che i diagrammi polari mostrano un miglioramento della distribuzione dell'energia già a partire dai 1000Hz, rispetto al caso di diffusori con  $N=7$ . La simmetria delle sequenze QRD si riflette negli spettrogrammi che appaio simmetrici, mentre una evidente asimmetria si ha nel caso PRD, più accentuata nelle basse frequenze, poiché i lobi sono più ampi rispetto alle alte frequenze. A parte queste asimmetrie, dai diagrammi polari per incidenza normale non si evidenziano nette differenze tra le due tipologie a parità di frequenza di progetto, ne per quanto riguarda l'uniformità ne per l'ampiezza. Le differenze diventano più nette se si osserva il diagramma del coefficiente di diffusione per incidenza casuale per i due casi, si nota che i QRD hanno un

comportamento migliore a medie frequenze, mentre i PRD alle frequenze più elevate, mantenendosi più costante al variare della frequenza.

Inoltre risulta meno accentuato il buco attorno ad i 1000Hz di diffusione che sia aveva nel caso per N=7.

Il coefficiente di diffusione per i PRD:

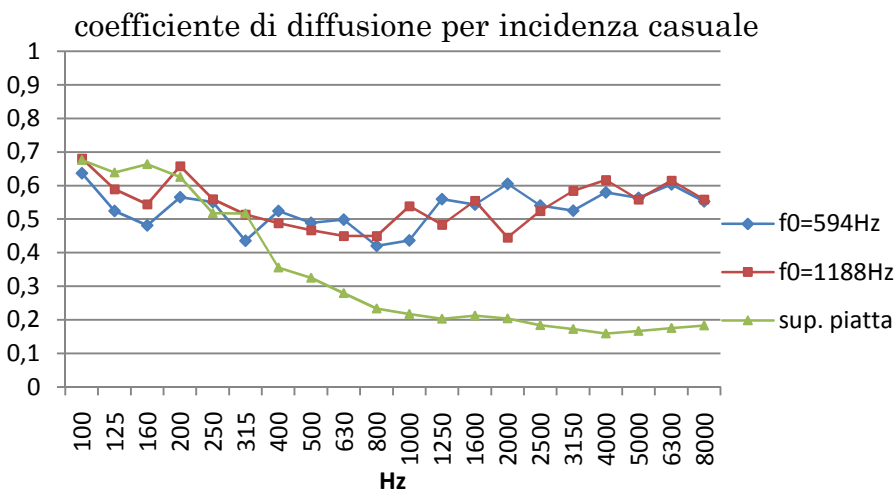
	terzi di ottava [Hz]																			
	100	125	160	200	250	315	400	500	630	800	1000	1250	1600	2000	2500	3150	4000	5000	6300	8000
f0=594Hz	0,63	0,53	0,5	0,61	0,52	0,45	0,51	0,58	0,44	0,36	0,49	0,47	0,48	0,56	0,62	0,6	0,64	0,6	0,59	0,55
f0=1188Hz	0,67	0,59	0,56	0,66	0,52	0,51	0,45	0,46	0,47	0,45	0,38	0,33	0,41	0,62	0,59	0,59	0,58	0,6	0,63	0,56



**Figura 7.17:** Coefficiente di diffusione per incidenza casuale per i diffusori PRD N=13, np=3, w=0.033m, per f0 che varia :594Hz, 1188Hz.

Il coefficiente di diffusione per i QRD:

	terzi di ottava [Hz]																			
	100	125	160	200	250	315	400	500	630	800	1000	1250	1600	2000	2500	3150	4000	5000	6300	8000
f0=594Hz	0,64	0,52	0,48	0,57	0,55	0,44	0,52	0,49	0,5	0,42	0,44	0,56	0,54	0,61	0,54	0,53	0,58	0,56	0,6	0,55
f0=1188Hz	0,68	0,59	0,54	0,66	0,56	0,51	0,49	0,47	0,45	0,45	0,54	0,48	0,55	0,45	0,52	0,58	0,62	0,56	0,62	0,56



**Figura 7.18:** Coefficiente di diffusione per incidenza casuale per i diffusori QRD N=13, np=3, w=0.033m, per f0 che varia :594Hz, 1188Hz.

**Caso 3:**

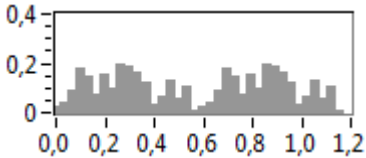
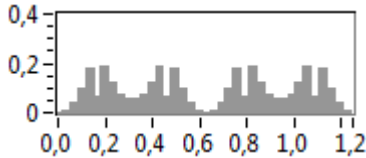
$N=19$ ;  $n_p=2$ ;  $w=0.033m$ .

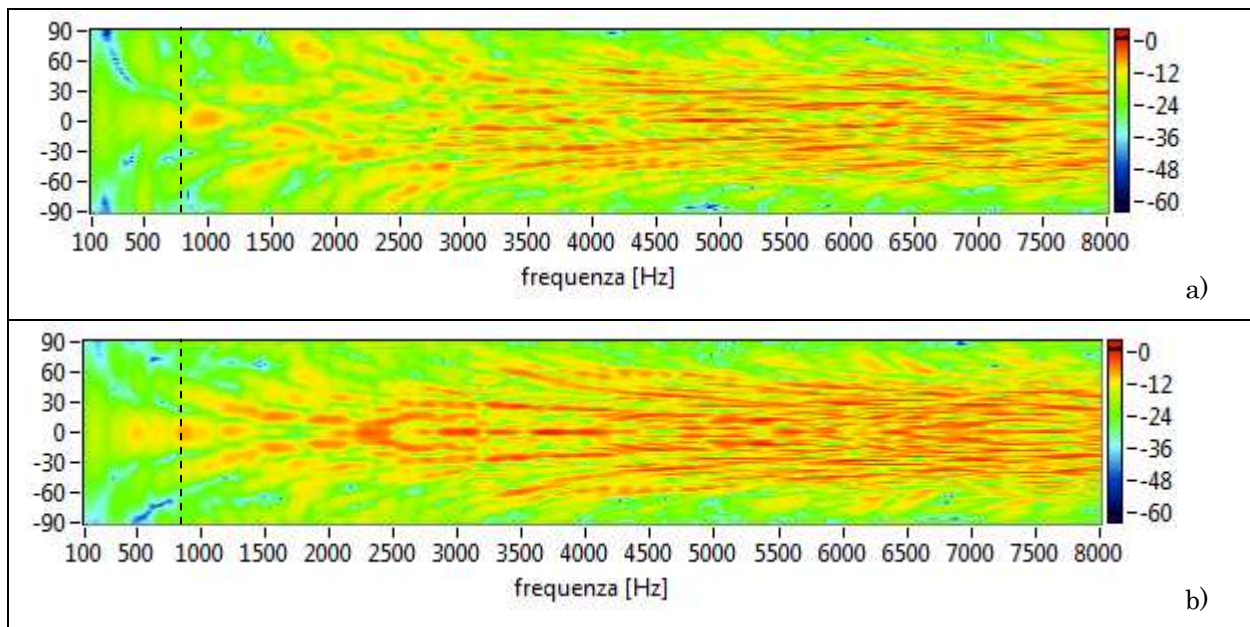
Le sequenze PRD e QRD sono:

$S_{PRD}=\{2, 4, 8, 16, 13, 7, 14, 9, 18, 17, 15, 11, 3, 6, 12, 5, 10, 1\}$  generata dalla radice primitiva  $r_p=2$ .

$S_{QRD}=\{0, 1, 4, 9, 16, 6, 17, 11, 7, 5, 5, 7, 11, 17, 6, 16, 9, 4, 1\}$ .

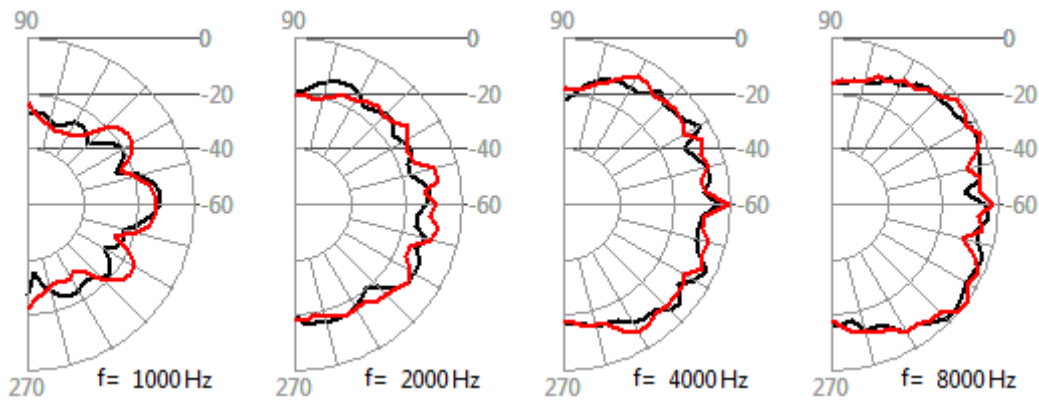
In questo caso la frequenza di progetto è  $f_0=813.397Hz$ , che è la frequenza di progetto massima imposta dal passo di campionamento.

$f_c$ [Hz]	$d_{PRD}(n)$ in metri	$d_{QRD}(n)$ in metri
813.397	{0.022, 0.044, 0.088, 0.176, 0.143, 0.077, 0.154, 0.099, 0.198, 0.187, 0.165, 0.121, 0.033, 0.066, 0.132, 0.055, 0.11, 0.011}	{0, 0.011, 0.044, 0.099, 0.176, 0.066, 0.187, 0.121, 0.077, 0.055, 0.055, 0.077, 0.121, 0.187, 0.066, 0.176, 0.099, 0.044, 0.011}
		



**Figura 7.19:** Spettrogrammi per incidenza normale ottenuti per i diffusori a)PRD, b)QRD. Con  $N=19$ ,  $n_p=2$ ,  $f_0=813,397Hz$ ,  $w=0.033m$

Gli spettrogrammi mostrano come già dai 1000Hz vi sia una buona distribuzione dell'energia. I lobi risultano in maggiore numero rispetto al caso precedente e questo genera una migliore uniformità.

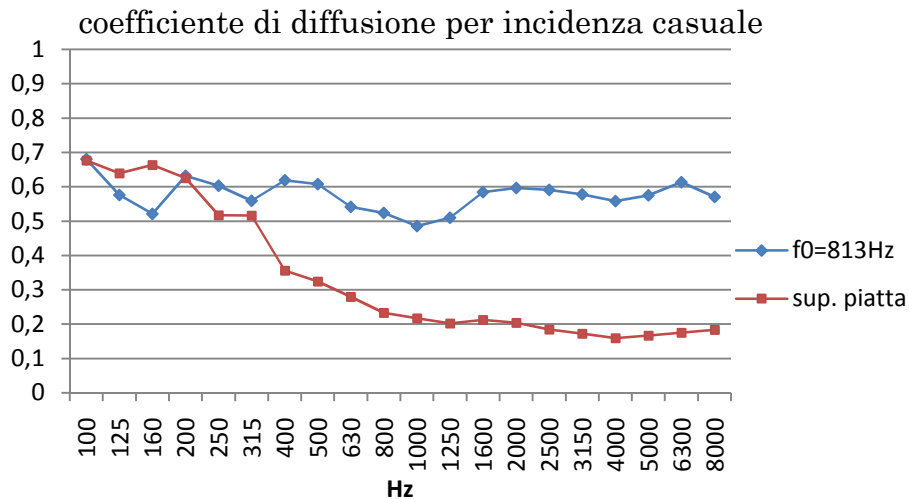


**Figura 7.20:** Diagrammi polari di diffusione per diffusori PRD in nero e QRD in rosso per incidenza normale. Con  $N=19$ ,  $n_p=2$ ,  $f_0=813\text{Hz}$ ,  $w=0.033\text{m}$ .

I diagrammi polari mostrano una distribuzione pressoché uniforme dai 2000Hz, per angoli che vanno da  $-70^\circ$  a  $+70^\circ$ . Non vi è una netta differenza tra le due tipologie, quello che risulta più evidente è il miglioramento ottenuto rispetto al caso precedente con  $N=13$  nelle frequenze medio basse.

#### Il coefficiente di diffusione per il PRD:

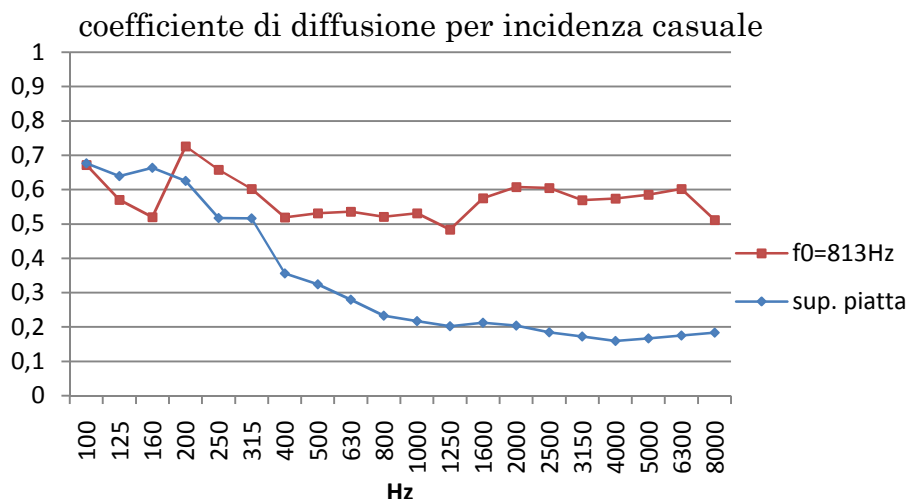
	terzi di ottava [Hz]																			
	100	125	160	200	250	315	400	500	630	800	1000	1250	1600	2000	2500	3150	4000	5000	6300	8000
$f_0=813\text{Hz}$	0,68	0,58	0,52	0,63	0,6	0,56	0,62	0,61	0,54	0,52	0,49	0,51	0,58	0,6	0,59	0,58	0,56	0,58	0,61	0,57



**Figura 7.21:** Coefficiente di diffusione per incidenza casuale per il diffusore PRD con  $N=19$ ,  $n_p=2$ ,  $w=0.033\text{m}$ , per  $f_0=813\text{Hz}$ .

#### Il coefficiente di diffusione per il QRD:

	terzi di ottava [Hz]																			
	100	125	160	200	250	315	400	500	630	800	1000	1250	1600	2000	2500	3150	4000	5000	6300	8000
$f_0=813\text{Hz}$	0,68	0,58	0,52	0,63	0,6	0,56	0,62	0,61	0,54	0,52	0,49	0,51	0,58	0,6	0,59	0,58	0,56	0,58	0,61	0,57



**Figura 7.22:** Coefficiente di diffusione per incidenza casuale per il diffusore QRD con  $N=19$ ,  $n_p=2$ ,  $w=0.033m$ , per  $f_0=813Hz$ .

#### Caso 4:

$N=37$ ;  $n_p=1$ ;  $w=0.033m$ .

Le sequenze PRD e QRD sono:

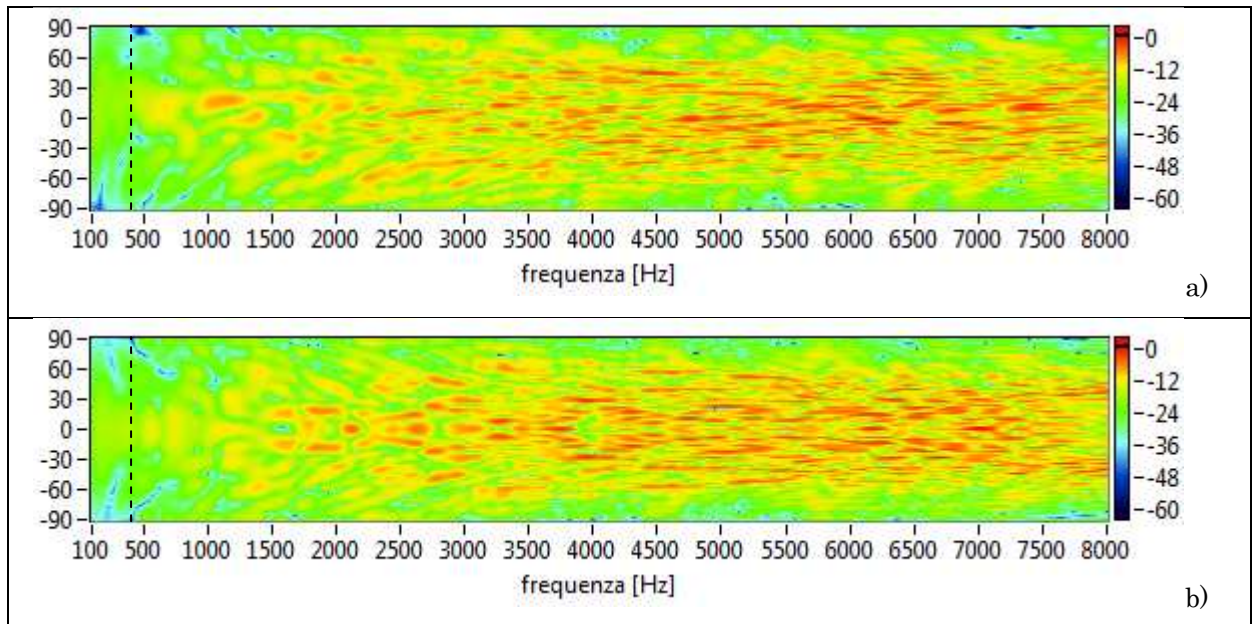
$S_{PRD}=\{2, 4, 8, 16, 32, 27, 17, 34, 31, 25, 13, 26, 15, 30, 23, 9, 18, 36, 35, 33, 29, 21, 5, 10, 20, 3, 6, 12, 24, 11, 22, 7, 14, 28, 19, 1\}$  generata dalla radice primitiva  $r_p=2$ .

$S_{QRD}=\{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 12, 27, 7, 26, 10, 33, 21, 11, 3, 34, 30, 28, 28, 30, 34, 3, 11, 21, 33, 10, 26, 7, 27, 12, 36, 25, 16, 9, 4, 1\}$ .

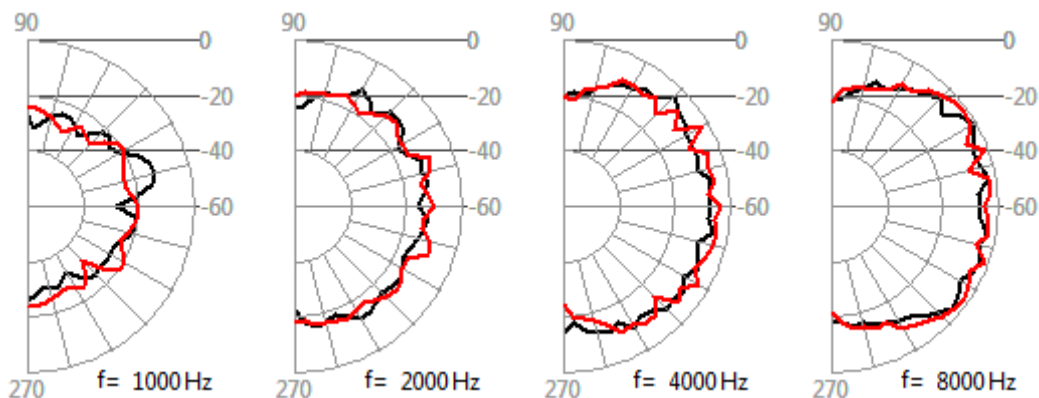
In questo caso la frequenza di progetto è  $f_0=417.69Hz$ , che è la frequenza di progetto massima imposta dal passo di campionamento.

$f_0$ [Hz]	$d_{PRD}(n)$ in metri	$d_{QRD}(n)$ in metri
417.69	{0.022, 0.044, 0.088, 0.176, 0.352, 0.297, 0.187, 0.374, 0.341, 0.275, 0.143, 0.286, 0.165, 0.33, 0.253, 0.099, 0.198, 0.396, 0.385, 0.363, 0.319, 0.231, 0.055, 0.11, 0.22, 0.033, 0.066, 0.132, 0.264, 0.121, 0.242, 0.077, 0.154, 0.308, 0.209, 0.011} 	{0, 0.011, 0.044, 0.099, 0.176, 0.275, 0.396, 0.132, 0.297, 0.077, 0.286, 0.11, 0.363, 0.231, 0.121, 0.033, 0.374, 0.33, 0.308, 0.308, 0.33, 0.374, 0.033, 0.121, 0.231, 0.363, 0.11, 0.286, 0.077, 0.297, 0.132, 0.396, 0.275, 0.176, 0.099, 0.044, 0.011} 





**Figura 7.23:** Spettrogrammi per incidenza normale ottenuti per i diffusori a)PRD, b)QRD. Con  $N=37$ ,  $n_p=1$ ,  $f_0=417\text{Hz}$ ,  $w=0.033\text{m}$

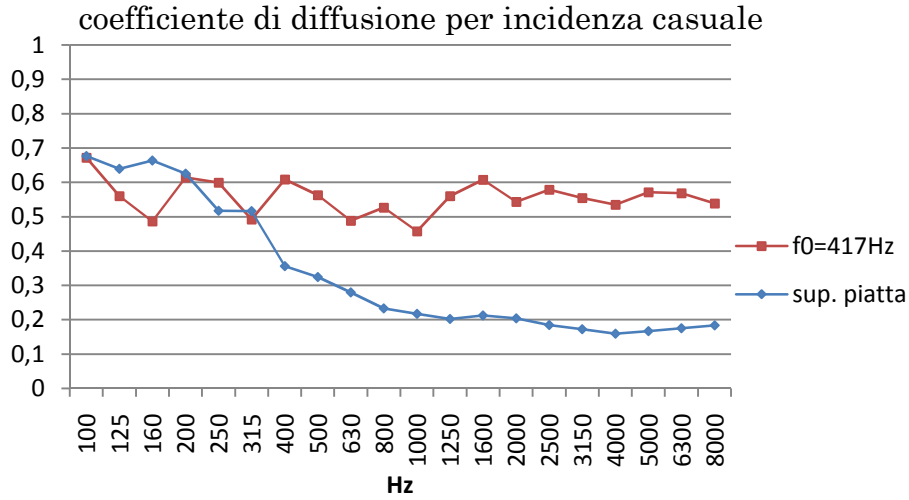


**Figura7.24:** Diagrammi polari di diffusione per diffusori PRD in nero e QRD in rosso per incidenza normale. Con  $N=37$ ,  $n_p=1$ ,  $f_0=417\text{Hz}$ ,  $w=0.033\text{m}$ .

In questo caso, malgrado la sequenza sia più lunga delle precedenti, non si registra un netto miglioramento. Il motivo principale è senz'altro dovuto al fatto che il dispositivo testato ha uno spessore troppo elevato in proporzione alla lunghezza; infatti le dimensioni dei setti arrivano a  $0,40\text{m}$ , contro  $1,1\text{m}$  di lunghezza. Le caratteristiche potrebbero più efficacemente essere misurate ripetendo un numero adeguato di volte la sequenza base, ma in questo caso risulterebbe necessario un ambiente più ampio e quindi un nuovo setup di misura. I valori ottenuti si mantengono comunque coerenti con quelli delle prove precedenti.

### Il coefficiente di diffusione per il PRD:

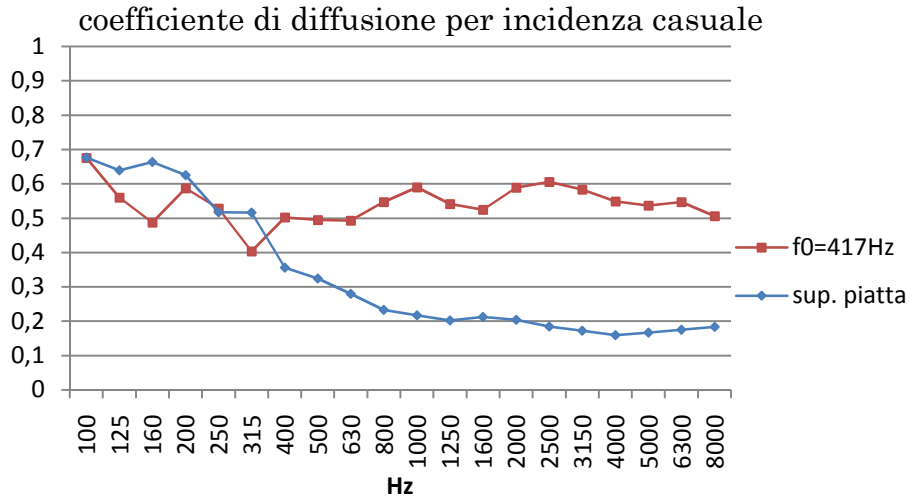
	terzi di ottava [Hz]																			
	100	125	160	200	250	315	400	500	630	800	1000	1250	1600	2000	2500	3150	4000	5000	6300	8000
f0=417Hz	0,67	0,56	0,49	0,61	0,6	0,49	0,61	0,56	0,49	0,53	0,46	0,56	0,61	0,54	0,58	0,55	0,53	0,57	0,57	0,54



**Figura 7.23:** Coefficiente di diffusione per incidenza casuale per il diffusore PRD con N=37, np=1, w=0.033m, per f0=417Hz.

### Il coefficiente di diffusione per il QRD:

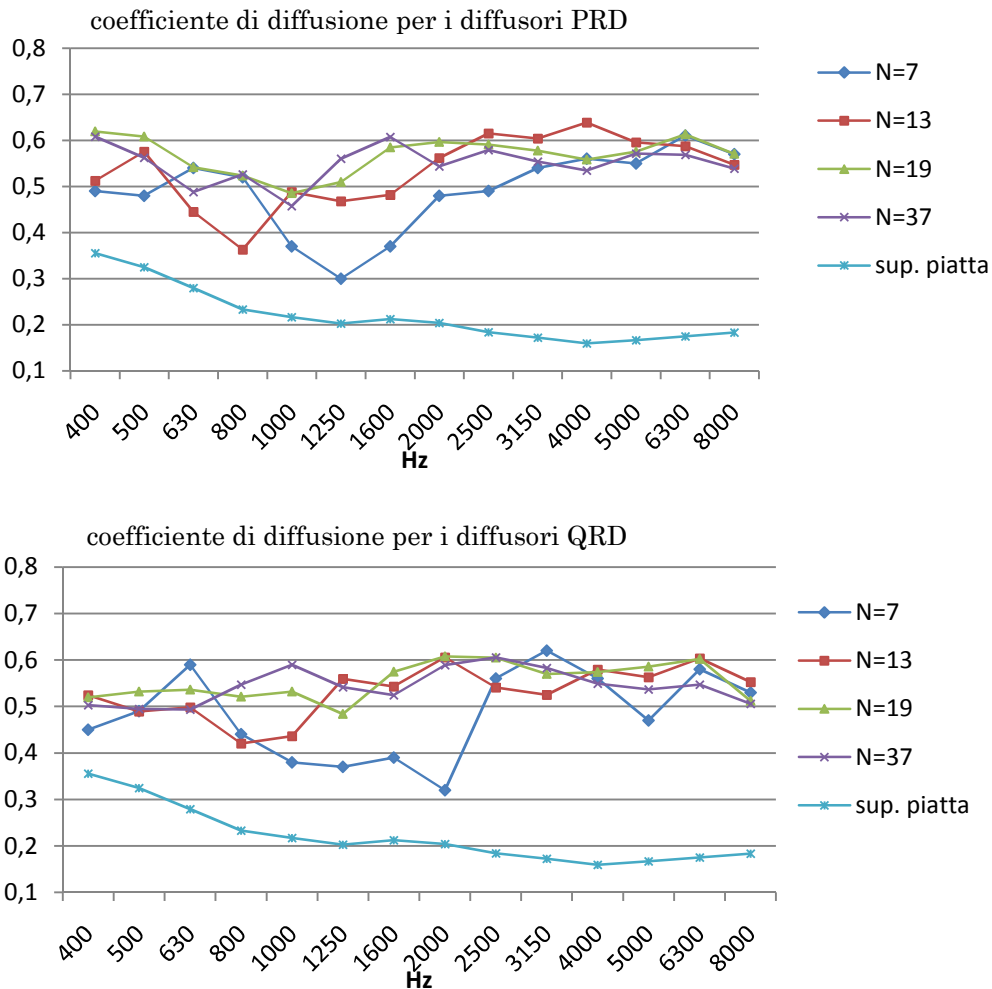
	terzi di ottava [Hz]																			
	100	125	160	200	250	315	400	500	630	800	1000	1250	1600	2000	2500	3150	4000	5000	6300	8000
f0=417Hz	0,68	0,56	0,49	0,59	0,53	0,4	0,5	0,49	0,49	0,55	0,59	0,54	0,52	0,59	0,61	0,58	0,55	0,54	0,55	0,51



**Figura 7.24:** Coefficiente di diffusione per incidenza casuale per il diffusore QRD con N=37, np=1, w=0.033m, per f0=417Hz.

### Confronto tra i vari casi

Vengono adesso messe a confronto le caratteristiche di diffusione al variare del numero N di lunghezza della sequenza.



**Figura 7.25:** Grafici dei coefficienti di diffusione per incidenza casuale nei casi esaminati di diffusori PRD e QRD, al variare della lunghezza delle sequenze.

Vengono prese in considerazione le frequenze superiori a 400Hz, quelle per le quali si è riscontrata una netta differenza nella diffusione rispetto alla superficie piatta.

Sia per i diffusori PRD che QRD, si riscontra la comune tendenza al miglioramento del coefficiente all'aumentare del numero N di lunghezza della sequenza, ciò in accordo con i risultati teorici. L'incremento più di N genera un migliore comportamento alle medie frequenze, mentre la diffusione a frequenze alte sembra essere poco influenzata.

## 7.5 Effetto dei diffusori in un ambiente chiuso

Viene simulato un ambiente di dimensioni 7m x 4m, con bordo che abbia coefficiente di riflessione  $r=0,95$ . All'interno viene posta una sorgente ed un ricevitore come in figura 7.27. Viene ricavata la risposta all'impulso di durata un secondo nel caso di ambiente vuoto e poi con all'interno posizionati dei diffusori.

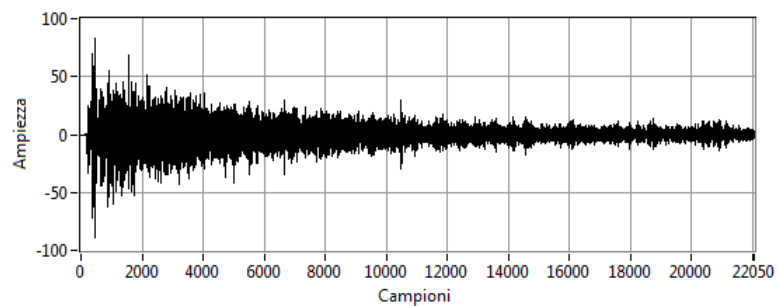


Figura 7.26: risposta all'impulso nel caso di ambiente vuoto.

Sono stati provati i diffusori PRD con  $N=19$  e QRD con  $N=13$ , precedentemente analizzati. Il diffusore PRD è stato posto in fondo, i due diffusori QRD sono stati messi ai lati.

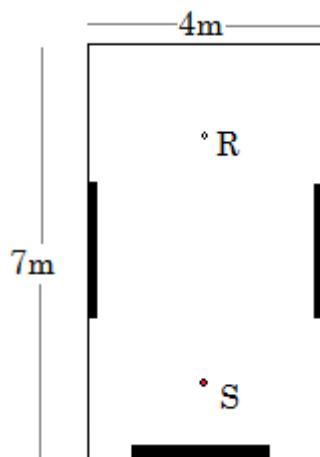


Figura 7.27: Ambiente di prova, i diffusori sono rappresentati ad i lati e dietro la sorgente.

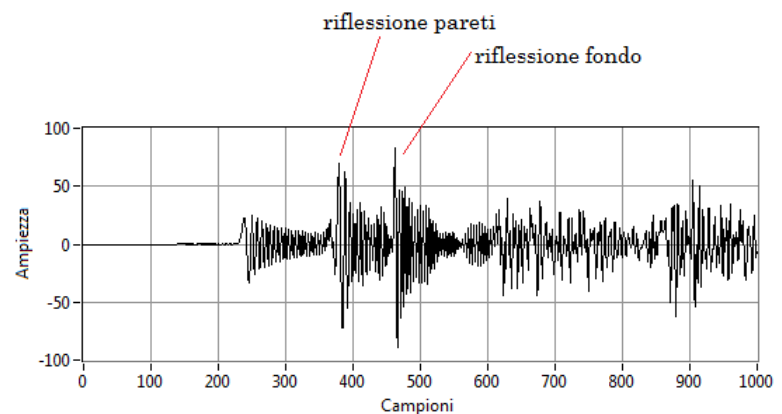
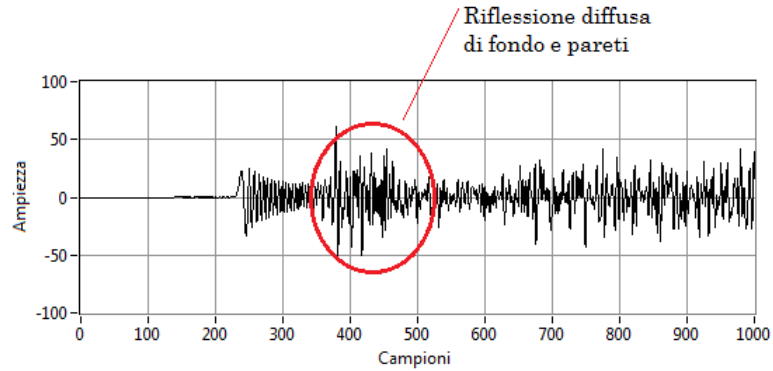
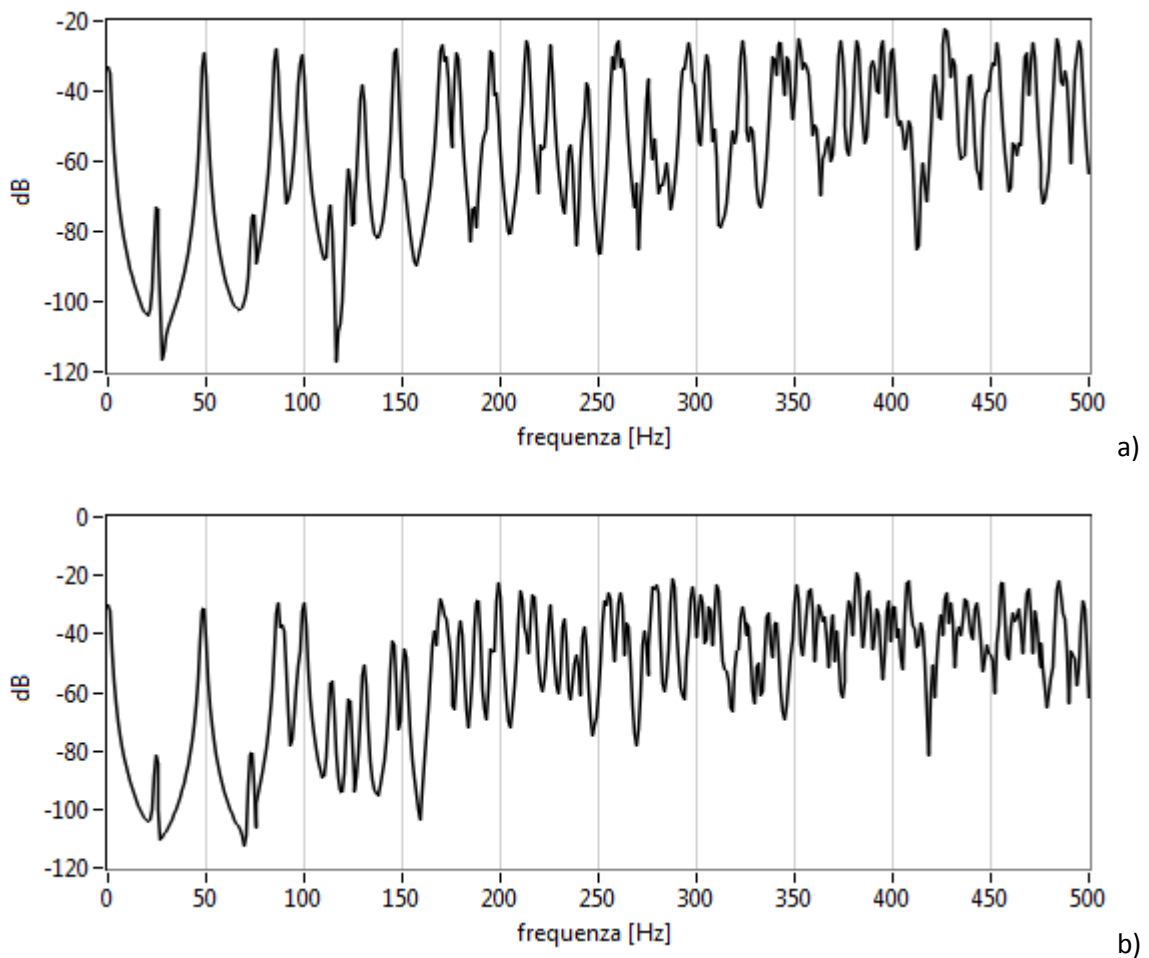


Figura 7.28 a)



**Figura 7.28 b):** Particolare della risposta all'impulso in cui si vedono le riflessioni delle pareti laterali e della parete di fondo, nei due casi a) ad ambiente vuoto e b) con i diffusori

L'analisi spettrale della risposta all'impulso ci mostra la presenza di componenti modali molto marcate, nel caso di ambiente vuoto (figura 7.x a). Mentre nel secondo caso la riflessione diffusa produce una migliore distribuzione spettrale dell'energia, già visibile a partire da 150Hz (figura 7.x b), i picchi infatti risultano meno marcati ed aumentati in numero.



**Figura 7.29:** Spettro delle risposte all'impulso rispettivamente ad ambiente vuoto a) ed con diffusori b).

## Conclusioni

Le tecniche di modellazione basate sulle onde, nella fattispecie quelle nel dominio del tempo, a cui la DWM appartiene, adottano una discretizzazione dello spazio in punti equidistanti e quindi rigidamente fissati una volta definita la topologia ed il passo di campionamento. Questo fa sì che, mentre risulta semplice rappresentare nel reticolo delle forme semplici, le geometrie complesse e ricche di particolari per essere riprodotte senza eccessive semplificazioni, necessitano di una eccessiva densità di campionamento. Ciò significa un notevole incremento del numero di punti del reticolo e quindi del numero di calcoli necessari. Il metodo adottato, utilizza una tecnica di suddivisione della mesh in sottodomini di differente densità, questo consente una migliore razionalizzazione del tempo di calcolo.

Il modello software sviluppato in ambiente LabVIEW è molto valido nella simulazione del comportamento di elementi diffondenti. Ne danno prova il confronto con la teoria, nei casi di determinazione dei modi propri in un piccolo ambiente e della diffusione in campo lontano. Si è visto infatti come le frequenze modali, ricavate dall'analisi spettrale della risposta all'impulso, siano esattamente coincidenti con quelle previste per via teorica. Un'ulteriore prova della validità del metodo si ha dal confronto tra i diagrammi polari, ottenuti da una superficie piana e quelli previsti in campo lontano. Anche in questo caso si ha una netta coincidenza nella forma e distribuzione dei lobi di diffusione.

Verificata la validità del modello, per eseguire delle prove sui diffusori, sono stati ricavati i diagrammi polari di diffusione su diverse tipologie di diffusori sia di radice primitiva (PRD) che ai residui quadratici (QRD). Dalle prove sono stati ottenuti i diagrammi polari di diffusione per ogni terzo di ottava, gli spettrogrammi in banda fine e sono stati calcolati i coefficienti di diffusione angolare e per incidenza casuale (presenti in Appendice D).

Sono stati considerati quattro casi per la lunghezza della sequenza di base, rispettivamente per  $N=7, 13, 19, 37$ . Per potere mettere a confronto le

prestazioni dei diffusori, generati da sequenze di lunghezza differente, i singoli periodi sono stati ripetuti fino a raggiungere la lunghezza prefissata di 1,1m. Inoltre in tutti e 4 i casi, sono state messe a confronto sequenze di radice primitiva e sequenze ai residui quadratici. I coefficienti di diffusione ottenuti mostrano un incremento dell'indice di diffusione all'aumentare del numero N di lunghezza della sequenza e sono coerenti con le previsioni teoriche. Non si evidenziano inoltre sostanziali differenze tra le due tipologie di diffusore PRD e QRD a parità di parametri di progetto.

Si è successivamente simulato l'effetto dei diffusori in un ambiente chiuso ed è stato mostrato come i diffusori riducano gli effetti negativi delle riflessioni speculari, riducendo i picchi delle frequenze modali e ridistribuendo l'energia nello spettro.

Con tutti i limiti imposti dalla tecnica di modellazione adottata (la DWM), il software realizzato si è dimostrato essere uno strumento efficace nel modellare i diffusori Schroeder ed a predirne lo scattering.

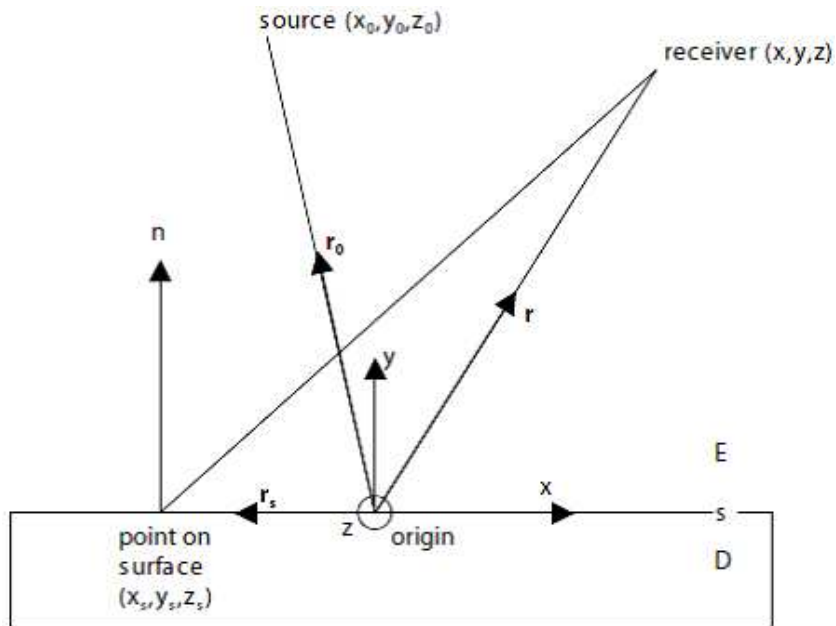
# Appendice A

## A.1 L'equazione integrale di Helmholtz-Kirchhoff

L'equazione integrale di H-K rappresenta il pilastro su cui si fondano i principali metodi di predizione in acustica.

Essa esprime il valore della pressione ad una determinata frequenza, in un punto, come combinazione del contributo diretto della sorgente e della somma dei contributi provenienti dalle riflessioni delle superfici.

$$p_i(r, r_0) + \int_s p(r_s) \frac{\partial G(r, r_s)}{\partial n(r_s)} - G(r, r_s) \frac{\partial p(r_s)}{\partial n(r_s)} d_s = \begin{cases} p(r) & \text{se } r \in E \\ \frac{1}{2} p(r) & \text{se } r \in s \\ 0 & \text{se } r \in D \end{cases} \quad (\text{A.1})$$



**Figura A.1:** Geometria del modello (da Cox & D'Antonio "Acoustic Absorbers and Diffusers")

Dove:

$r$  ed  $r_0$  sono vettori rispettivamente che descrivono ricevitore e sorgente,

$r_s$  vettore sulla superficie,

$p(r_s)$  la pressione nel punto  $r_s$

$p_i(r, r_0)$  la pressione radiata dalla sorgente posta in  $r_0$ , ricevuta in  $r$



$G$  la funzione di Green

$n$  la normale alla superficie

$E$  regione esterna alla superficie

$s$  superficie

$D$  regione interna alla superficie

$p_i(r, r_0)$  è il contributo diretto proveniente dalla sorgente; mentre l'integrale superficiale, dove  $r_s$  è un punto su di essa ed  $n(r_s)$  la normale uscente alla superficie nello stesso punto, dà il contributo riflesso da tutta la superficie nel punto  $r$ .

L'equazione esprime il valore della pressione per una singola frequenza, quindi siamo in situazione stazionaria, dove tutti i transitori sono esauriti.  $G$  è la funzione di Green, che rappresenta il contributo di una sorgente puntiforme al ricevitore. La forma della funzione di Green dipende dalla geometria, se il problema è definito in 3D esso avrà la forma :

$$G(r) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \quad (\text{A.2})$$

dove  $r = |r - r_0|$  e  $k$  il numero d'onda.

Mentre in un ambiente bidimensionale la funzione di Green assume la forma:

$$G(r) = -\frac{j}{4} H_0^{(2)}(kr) \quad (\text{A.3})$$

dove  $H_0^{(2)}$  è la funzione di Henkel del secondo tipo di ordine zero.

Per  $kr \gg 1$  si ha:

$$G(r) = \frac{Ae^{-jkr}}{\sqrt{kr}} \quad (\text{A.4})$$

dove  $A$  è costante.

La funzione di Green in 2D rappresenta la radiazione di una sorgente lineare infinitamente estesa.

Nell'espressione dell'equazione integrale H-K ci sono tre diverse possibilità e dipendono dal punto in cui è piazzato il punto ricevente:

1. Nel caso in cui il punto  $r^{(r \in E)}$  è esterno alla superficie riflettente.
2. Nel caso in cui il punto  $r^{(r \in S)}$  si trova sulla superficie.
3. Nel caso in cui il punto  $r^{(r \in D)}$  si trova dentro la superficie.

L'integrale è costituito da due termini, uno contenente la pressione  $p(r_s)$  sulla superficie e l'altro la derivata della pressione  $\partial p(r_s)/\partial n(r_s)$ . Sotto l'ipotesi di superficie localmente reattiva, la derivata della pressione superficiale è legata alla pressione attraverso l'ammettenza della superficie:

$$jkp(r_s)\beta'(r_s) = \frac{\partial p(r_s)}{\partial n(r_s)} \quad (\text{A.5})$$

$\beta'$  è l'ammettenza superficiale.  $\beta'$  è definita tramite vettore uscente dalla superficie, ed è legata alla più comune ammettenza  $\beta$  ricavata mediante vettore entrante da  $\beta = -\beta'$ . Per superfici poco assorbenti, il contributo di questo termine può essere considerato nullo.

Per risolvere l'equazione, risulta necessario quindi trovare prima il valore della pressione  $p(r_s)$  sulla superficie e successivamente si può calcolare il valore dell'integrale; questa procedura viene adottata nella modellazione BEM.

## A.2 Approssimazione di Kirchhoff e di Franhofer

Il passo successivo per la semplificazione dell'equazione integrale consiste nell'ipotizzare vera la condizione di Kirchhoff, secondo la quale vale:

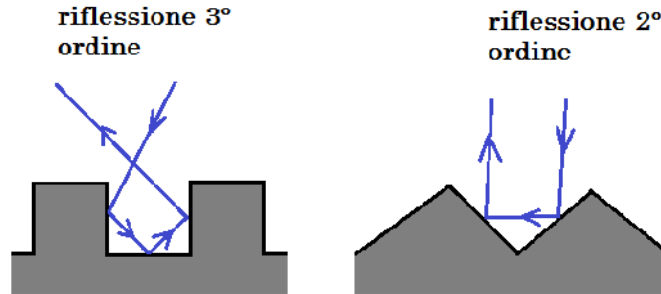
$$p(r_s) = [1 + R(r_s)]p_i(r_s, r_0) \quad (\text{A.6})$$

dove  $R$  è il fattore di riflessione della superficie. Si suppone inoltre che la superficie sia larga, rispetto alla lunghezza d'onda, e sottile in modo da poter considerare nullo il contributo proveniente dai bordi e posteriore.

Questa approssimazione porta a risultati poco accurati quando la superficie ha uno spessore significativo oppure se è piccolo rispetto alla lunghezza d'onda o quando vi sono forti variazioni di impedenza lungo di essa.

Per superfici irregolari e dallo spessore rilevante, il modello derivante dalle semplificazioni di Kirchhoff manifesta in accuratezza, poiché incapace di rappresentare riflessioni multiple, lì dove invece sorgono. Infatti se la

superficie presenta incavi o posizioni di essa con gradienti elevati vi è la possibilità che si verifichino riflessioni di 2° e 3° ordine prima di raggiungere il ricevitore.



**Figura A.2:** Riflessioni di ordine superiore.

Per evitare di incorrere in queste situazioni, si applica la condizione di Kirchhoff per quelle superfici il cui gradiente non superi i 30° o 40°. Nonostante queste restrizioni, il modello derivante risulta molto utile ed accurato nella predizione dello scattering per una larga varietà di diffusori, inoltre l'approssimazione consente di velocizzare i calcoli rispetto al metodo BEM, mantenendo sotto certe condizioni un accettabile livello di precisione. La condizione di Kirchhoff viene sostituita nell'equazione integrale di Helmholtz-Kirchhoff,

$$p(r) = p_i(r, r_0) + \int_s p_i(r, r_0) [1 + R(r_s)] \left[ \frac{\partial G(r, r_s)}{\partial n(r_s)} - G(r, r_s) jk \cos(\psi) \frac{(R(r_s) - 1)}{(R(r_s) + 1)} \right] ds \quad (\text{A.7})$$

dove  $\psi$  è l'angolo di incidenza.

Inoltre se si assume che il ricevitore è sufficientemente lontano dalla superficie, la derivata della funzione di Green può essere approssimata come segue:

$$\frac{\partial G(r, r_s)}{\partial n(r_s)} \approx -jkG(r, r_s) \cos(\theta) \quad (\text{A.8})$$

avendo posto  $\theta$  come angolo di riflessione.

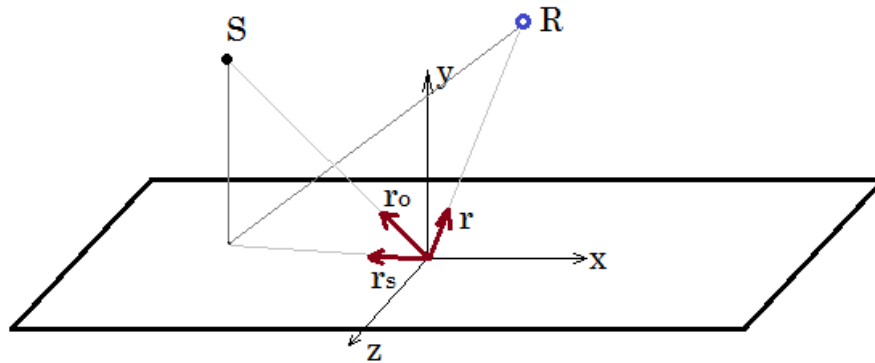
Si ottiene l'espressione per la pressione:

$$p(r) = p_i(r, r_0) - jk \int_s p_i(r_s, r_0) [1 + R(r_s)] G(r, r_s) \left[ \cos(\theta) + \cos(\psi) \frac{(R(r_s) - 1)}{(R(r_s) + 1)} \right] ds \quad (\text{A.9})$$

L'approssimazione successiva consiste nel considerare la superficie completamente riflettente (condizione di Fresnell) ponendo  $R = 1$ , ottenendo così una notevole semplificazione della formulazione:

$$p(r) = p_i(r, r_0) - 2jk \int_s p_i(r_s, r_0) G(r, r_s) \cos(\theta) d_s \quad (\text{A.10})$$

Considerando il caso di superficie planare di figura A.3,



**Figura A.3:** Superficie planare con riferimenti.

se la sorgente non è troppo vicina alla superficie, allora la pressione incidente  $p_i$  è data dalla funzione di Green. In coordinate cartesiane, il calcolo delle distanze tra la superficie ed i punti di sorgente e ricevitore può essere approssimato,

$$p_i(r_s, r_0) = G(r_s, r_0) = \frac{e^{jk|r_s - r_0|}}{4\pi|r_s - r_0|} \quad (\text{A.11})$$

dove

$$|r_s - r_0| \approx |r_0| - \frac{(x_0 x_s + z_0 z_s)}{|r_0|} + \frac{(x_s^2 + z_s^2)}{|r_0|} \quad (\text{A.12})$$

ed

$$|r - r_s| \approx |r| - \frac{xx_s + zz_s}{|r|} + \frac{x_s^2 + z_s^2}{|r|} \quad (\text{A.13})$$

si ottiene per la pressione di scattering:

$$p_s(r) \approx -\frac{jk}{8\pi^2} \frac{e^{-jk(r_0+r)}}{rr_0} \cos(\theta) \iint e^{jk(xx_s+zz_s+x_s^2+z_s^2)/r} e^{jk(x_0x_s+z_0z_s+x_s^2+z_s^2)/r_0} dx_s dz_s \quad (\text{A.14})$$

In cui si assume trascurabile la variazione del termine a denominatore, della funzione di Green, rispetto alla variazione di fase del termine esponenziale.

Affinchè si possa arrivare ad una soluzione analitica dell'integrale è necessario che i termini quadratici siano trascurabili, questo avviene se sorgente e ricevitore si trovano a grande distanza dalla superficie. Questa approssimazione porta alla soluzione di Fraunhofer per il campo lontano dell'espressione della pressione di scattering:

$$p_s(r) \approx -\frac{jk}{8\pi^2} \frac{e^{-jk(r_0+r)}}{rr_0} \cos(\theta) \iint e^{jk(xx_s+zz_s)/r} e^{jk(x_0x_s+z_0z_s)/r_0} dx_s dz_s \quad (\text{A.15})$$

in cui l'integrale può essere facilmente risolto, note che siano le dimensioni della superficie.

Infatti posta la superficie di dimensioni  $L$  in  $x$  e  $D$  in  $Z$ , si ottiene:

$$p_s(r) \approx -\frac{jkLD}{8\pi^2} \frac{e^{-jk(r_0+r)}}{rr_0} \cos(\theta) \text{sinc}\left(\frac{kD}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{x_0}{r_0}\right)\right) \text{sinc}\left(\frac{kL}{2}\left(\frac{z}{r} + \frac{z_0}{r_0}\right)\right) \quad (\text{A.16})$$

Si riesce così a calcolare in maniera veloce la pressione di scattering in campo lontano per la superficie piana.

Affinchè sia possibile studiare il comportamento di superfici non planari come i diffusori di Schroeder, i quali possono essere rappresentati come fatto per la superficie piana, a grande distanza, ma partendo dall'equazione (A.9) ed imponendo una impedenza superficiale che varia in base alla posizione. Si ottiene per la pressione di scattering:

$$p_s(r) = -\frac{jk}{16\pi^2} e^{-jk(r+r_0)} \iint e^{jk(x_0x_s+z_0z_s)/r_0} [1+R(r_s)] e^{jk(xx_s+zz_s)/r} \cdot \left[ \cos(\theta) + \cos(\psi) \frac{(R(r_s)-1)}{(R(r_s)+1)} \right] dx_s dz_s \quad (\text{A.17})$$

Se si suppone inoltre che la variazione di impedenza sia in una sola direzione,  $x$ , e con incidenza normale, si ottiene la forma semplificata:

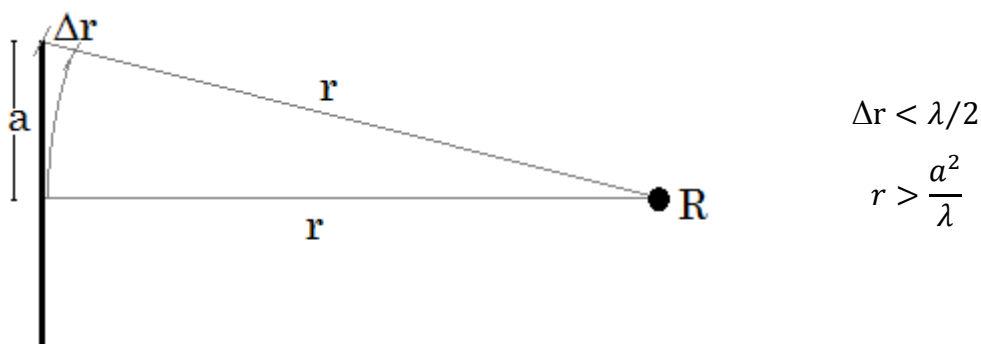
$$p_s(r) = -\frac{jk}{8\pi^2} e^{-jk(r+r_0)} \text{sinc}\left(\frac{kD}{2r}\right) [\cos(\theta) + 1] \int_{-L/2}^{L/2} R(r_s) e^{jkx_s \sin(\theta)} dx_s \quad (\text{A.18})$$

Nella quale si può notare che l'integrale assume essenzialmente la forma di trasformata di Fourier del coefficiente di riflessione.

### A.3 Campo lontano

L'ipotesi di campo lontano, che sta alla base della formulazione di Fraunhofer, ci consente di semplificare notevolmente l'espressione della pressione di scattering, che infatti diventa proporzionale alla trasformata di Fourier del coefficiente di riflessione della superficie del diffusore.

Il campo lontano è definito come quella regione dello spazio dove la differenza tra le distanze, minima e massima, del pannello dal ricevitore è piccola rispetto alla lunghezza d'onda. In queste condizioni infatti tutti i punti del pannello si possono considerare alla stessa distanza dal ricevitore. Anche la distanza dalla sorgente deve essere tale da soddisfare alle stesse condizioni, inoltre la distanza del ricevitore dal diffusore deve essere maggiore della lunghezza d'onda.



**Figura A.4:** Condizioni di campo lontano

Quando ci si trova il campo lontano la risposta polare diventa indipendente dalla distanza del ricevitore dalla superficie diffondente. Queste condizioni sono spesso inapplicabili in quanto per alcuni diffusori e per determinate frequenze, il campo lontano si trova a centinaia di metri dalla superficie.

Nelle condizioni di campo lontano si otterranno gli stessi risultati in termini di accuratezza sia che si adotti la formulazione di Kirchhoff che di Fraunhofer, quindi per incidenza obliqua e per basse frequenze.

# Appendice B

L'analisi di Von Neumann consente, mediante l'uso della trasformata di Fourier, di studiare la dispersione della velocità di propagazione del segnale nella DWM, per le diverse topologie (Savioja, Välimäki.2000).

## B.1 Mesh 2D rettangolare

Per ogni giunzione vale la seguente equazione alle differenze:

$$p_j(n) = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N p_i(n-1) - p_j(n-2) \quad (\text{B.1})$$

dove  $n$  è l'indice temporale,  $N$  il numero di giunzioni limitrofe alla  $j$ -esima.

Nel caso di mesh rettangolare si avrà che  $N = 4$ , per cui l'equazione diventa:

$$p(n, k_1, k_2) = \frac{1}{2} \left[ p(n-1, k_1-1, k_2) + p(n-1, k_1+1, k_2) + p(n-1, k_1, k_2-1) + p(n-1, k_1, k_2+1) \right] - p(n-2, k_1, k_2) \quad (\text{B.2})$$

in cui si è indicato  $k_1$  e  $k_2$  le coordinate spaziali discrete.

Si calcola la trasformata spaziale bidimensionale di Fourier:

$$P(n, \xi_1, \xi_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} p(n, k_1, k_2) e^{-j(\omega_1 k_1 + \omega_2 k_2) c T} \quad (\text{B.3})$$

Dove  $N_1$  ed  $N_2$  sono il numero di giunzioni nelle due direzioni;  $\omega_1 = 2\pi\xi_1$ ,  $\omega_2 = 2\pi\xi_2$  ed  $\xi_1, \xi_2$  le frequenze spaziali normalizzate.

Si ottiene per la trasformata:

$$\begin{aligned} P(n, \xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{2} \left( e^{j\omega_1 c T} + e^{j\omega_2 c T} + e^{-j\omega_1 c T} + e^{-j\omega_2 c T} \right) P(n-1, \xi_1, \xi_2) - P(n-2, \xi_1, \xi_2) \\ &= b(\xi_1, \xi_2) P(n-1, \xi_1, \xi_2) - P(n-2, \xi_1, \xi_2) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$



il termine  $b(\xi_1, \xi_2)$  vale:

$$b(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2} \left( e^{j\omega_1 cT} + e^{j\omega_2 cT} + e^{-j\omega_1 cT} + e^{-j\omega_2 cT} \right) = \cos(\omega_1 cT) + \cos(\omega_2 cT) \quad (\text{B.5})$$

Un altro modo per rappresentare la trasformata (B.4) è quello di utilizzare il *fattore di amplificazione spettrale*  $g(\xi_1, \xi_2)$  cioè quel termine che, moltiplicato per la trasformata della soluzione in un determinato istante, fornisce il valore della trasformata nell'istante temporale successivo:

$$g(\xi_1, \xi_2)^n P(0, \xi_1, \xi_2) = b(\xi_1, \xi_2) g(\xi_1, \xi_2)^{n-1} P(0, \xi_1, \xi_2) - g(\xi_1, \xi_2)^{n-2} P(0, \xi_1, \xi_2) \quad (\text{B.6})$$

dove  $P(0, \xi_1, \xi_2)$  rappresenta la condizione iniziale all'istante  $n = 0$ .

La precedente relazione può essere riscritta nella seguente maniera:

$$g(\xi_1, \xi_2)^2 - b(\xi_1, \xi_2) g(\xi_1, \xi_2) + 1 = 0 \quad (\text{B.7})$$

che risulta in termini di  $g(\xi_1, \xi_2)$ , fornisce due soluzioni:

$$g(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2} b(\xi_1, \xi_2) \pm \frac{1}{2} j \sqrt{4 - b(\xi_1, \xi_2)^2} \quad (\text{B.8})$$

Per lo studio della stabilità e della dispersione è meglio riscrivere il fattore di amplificazione spettrale in termini di modulo e fase:

$$g(\xi_1, \xi_2) = |g(\xi_1, \xi_2)| e^{-j2\pi \xi c'(\xi_1, \xi_2) T} \quad (\text{B.9})$$

dove  $c'(\xi_1, \xi_2)$  rappresenta la velocità di propagazione nella direzione  $\alpha = \arctan(\xi_1/\xi_2)$ .

Il modulo del fattore di amplificazione ci dice se lo schema è *dissipativo*, cioè se  $|g(\xi_1, \xi_2)| = 1$  la propagazione avviene senza perdite.

La velocità di propagazione nella mesh si ricava dalla seguente equazione:

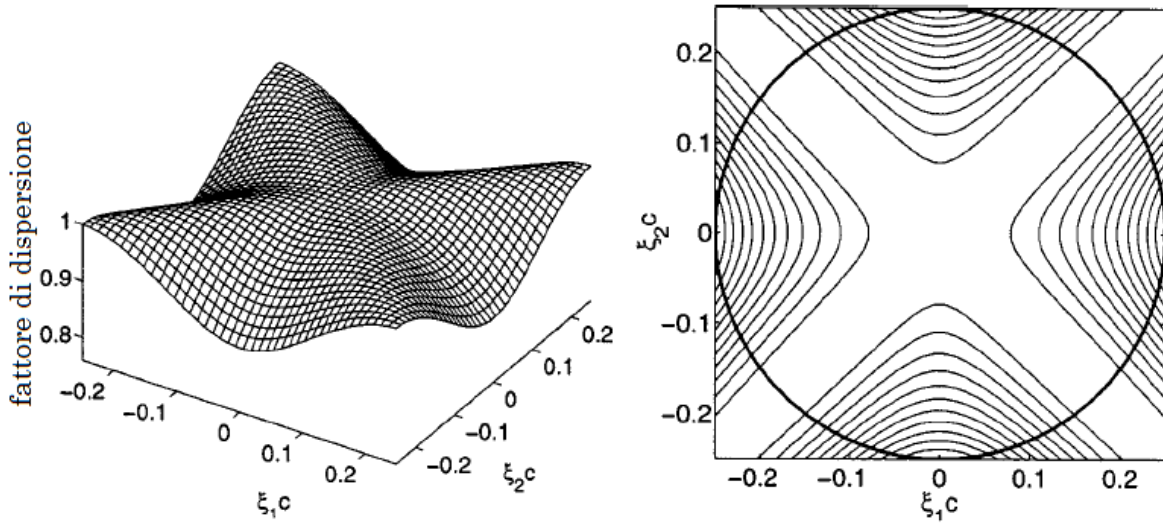
$$2\pi \xi c'(\xi_1, \xi_2) T = \angle g(\xi_1, \xi_2) = \arctan \frac{\sqrt{4 - b(\xi_1, \xi_2)^2}}{b(\xi_1, \xi_2)} \quad (\text{B.10})$$

La velocità di propagazione desiderata  $c = 1/(\sqrt{2}T)$ , dove si è posto unitario l'intervallo spaziale di campionamento (derivante dalla condizione di Courant).

Il rapporto tra la velocità di propagazione calcolata con quella desiderata fornisce il *fattore di dispersione*:

$$k(\xi_1, \xi_2) = \frac{c'(\xi_1, \xi_2)}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi\xi} \arctan \frac{\sqrt{4 - b(\xi_1, \xi_2)}}{b(\xi_1, \xi_2)} \quad (\text{B.11})$$

in cui  $\xi = \sqrt{\xi_1 + \xi_2}$  è il raggio della frequenza spaziale.



**Figura B.1:** Fattore di dispersione  $k$  per mesh rettangolare 2D (da Savioja, Välimäki, 2000).

I risultati sono presentati in termini delle frequenze temporali normalizzate  $f_1 = \xi_1 c$  ed  $f_2 = \xi_2 c$ ; la direzione di propagazione si ricava dall'angolo  $\angle(\xi_1, \xi_2)$ . Come si può notare non vi è dispersione nelle direzioni diagonali, cioè per  $\angle(\xi_1, \xi_2) = \pi/4 + k\pi/2$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ). La massima dispersione si ha  $\angle(\xi_1, \xi_2) = k\pi/2$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ).

La risposta in frequenza della mesh rettangolare si ripete dopo la frequenza normalizzata  $f/f_s = 0,25$ ; questa risulta l'ultima frequenza utile ed è quella che viene presa in considerazione, e non 0,5 come imposta della condizione di Nyquist.

## B.2 Mesh 2D triangolare

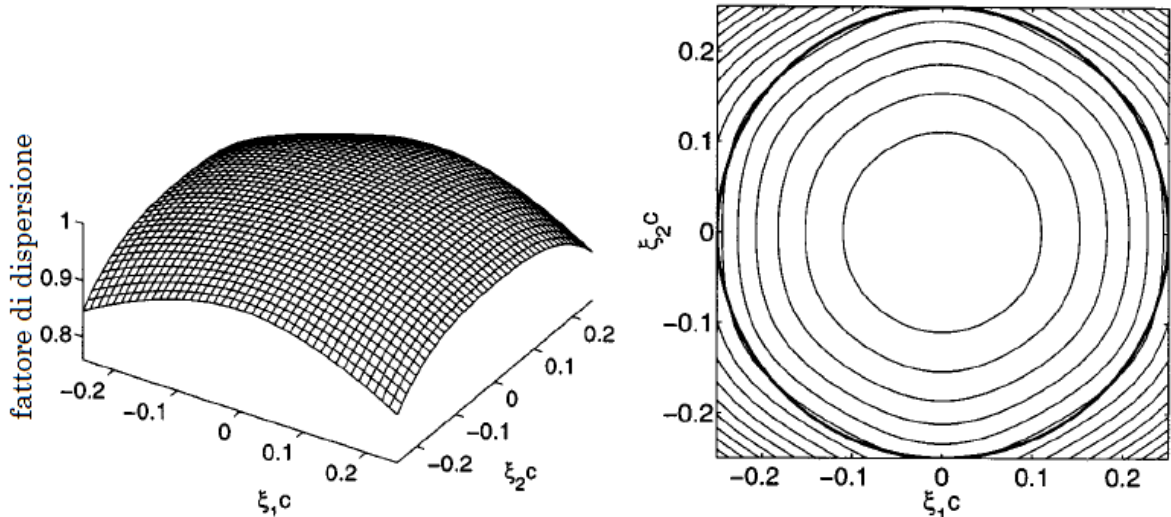
Per una mesh triangolare, l'equazione alle differenze (B.1) diventa:

$$p_j(n) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^6 p_i(n-1) - p_j(n-2) \quad (\text{B.12})$$

L'analisi della dispersione viene condotta allo stesso modo del caso della mesh rettangolare, la forma del fattore di dispersione rimane uguale alla (B.11), cambia il termine  $b(\xi_1, \xi_2)$  che in questo caso diventa:

$$\begin{aligned} b(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{3} \left[ e^{j\omega_1 cT} + e^{j(\omega_1 cT/2 + \sqrt{3}j\omega_2 cT/2)} + e^{(-j\omega_1 cT/2 + \sqrt{3}j\omega_2 cT/2)} + \right. \\ &\quad \left. + e^{j\omega_1 cT} + e^{(-j\omega_1 cT/2 - \sqrt{3}j\omega_2 cT/2)} + e^{(j\omega_1 cT/2 - \sqrt{3}j\omega_2 cT/2)} \right] = \quad (\text{B.13}) \\ &= \frac{2}{3} \left[ \cos(\omega_1 cT) + \cos(\omega_1 cT/2 + \sqrt{3}\omega_2 cT/2) + \cos(\omega_1 cT/2 - \sqrt{3}\omega_2 cT/2) \right] \end{aligned}$$

I risultati sono presentati nelle seguenti figure:



**Figura B.2:** Fattore di dispersione  $k$  per mesh triangolare 2D. Le linee di isolivello rappresentano variazioni dell'1% (da Savioja, Välimäki.2000).

La propagazione nella struttura triangolare avviene in maniera più uniforme rispetto al caso rettangolare. Il fattore di dispersione è quasi indipendente dalla direzione di propagazione, i massimi si trovano per  $\angle(\xi_1, \xi_2) = k\pi/3$  ed i minimi per  $\angle(\xi_1, \xi_2) = \pi/6 + k\pi/3$  ( $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ).

### B.3 Mesh 2D rettangolare interpolata

La mesh interpolata costituisce un'estensione di quella rettangolare. Si inizia ipotizzando una struttura rettangolare in cui ogni giunzione abbia numero arbitrario di vicini, con i quali è connessa da linee di ritardo, in modo tale da avere un numero maggiore di direzioni di propagazione. Posto  $H$  il numero di ipotetici nodi vicini, la forma della trasformata di Fourier per il calcolo della dispersione diventa:

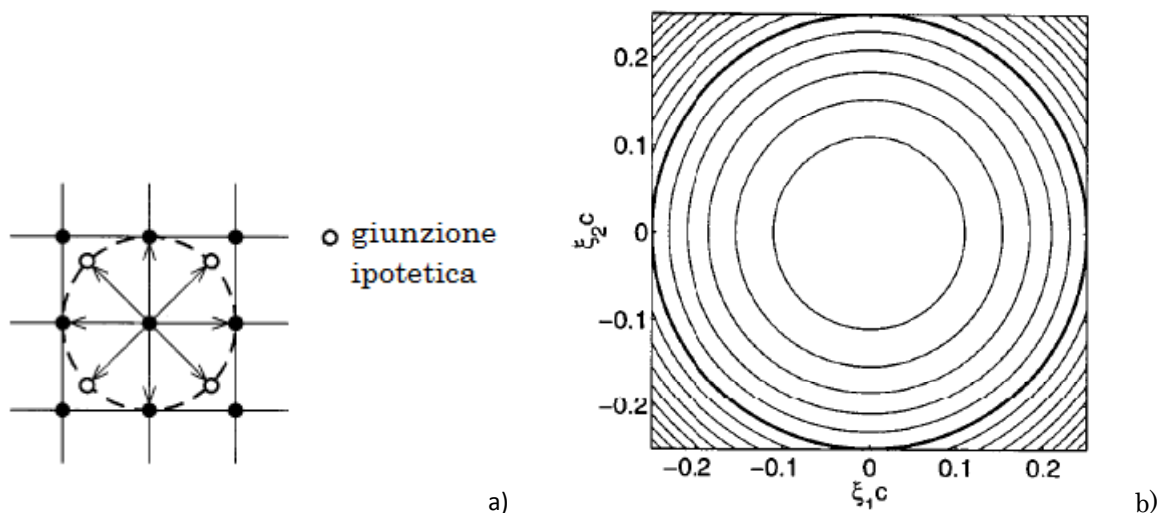
$$P(n, \xi_1, \xi_2) = \frac{2}{H} \sum_{i=0}^{H-1} e^{j(\omega_1 \cos \alpha_i + \omega_2 \sin \alpha_i) cT} P(n-1, \xi_1, \xi_2) - P(n-2, \xi_1, \xi_2) \quad (\text{B.14})$$

dove  $\alpha_i$  è l'angolo tra due giunzioni consecutive.

L'equazione del fattore di dispersione, per questa ipotetica struttura, rimane uguale alla (B.11), cambia il termine  $b(\xi_1, \xi_2)$ , che in questo caso diventa:

$$b(\xi_1, \xi_2) = \frac{2}{H} \sum_{i=0}^{H-1} e^{j(\omega_1 \cos(\alpha_i) + \omega_2 \sin(\alpha_i)) cT} \quad (\text{B.15})$$

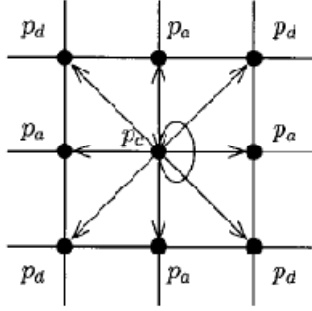
Se si sceglie una struttura ipotetica in cui ogni giunzione sia connessa ad 8 vicini equidistanti:



**Figura B.3:** a) Mesh ipotetica ad 8 giunzioni equidistanti, b) Fattore di dispersione. Le linee di isolivello rappresentano variazioni dell'1% (da Savioja, Välimäki.2000).

In questo caso, si vede, che il fattore di dispersione risulta indipendente dalla direzione.

Poiché in una topologia rettangolare la posizione delle giunzioni non può essere arbitraria, ma fissata rigidamente in un reticolo, il collegamento diagonale deve necessariamente avvenire nella posizione imposta e non in



**Figura B.3:** Mesh interpolata.

quella ideale precedentemente ipotizzata.

Affinchè si possa connettere, tramite linee di ritardo, anche le posizioni diagonali che sono poste a distanza diversa da quelle assiali è necessario applicare dei pesi che tengano conto di questa differenza.

L'equazione (B.1) si modifica nella seguente maniera:

$$p(n, k_1, k_2) = \frac{2}{N} \sum_{x=-1}^1 \sum_{y=-1}^1 h_{x,y} p(n-1, k_1+x, k_2+y) - p(n-2, k_1, k_2) \quad (\text{B.16})$$

dove  $h_{x,y}$  rappresentano i pesi da applicare per ogni nodo:

$$h_{x,y} = \begin{bmatrix} h_d & h_a & h_d \\ h_a & h_c & h_a \\ h_d & h_a & h_d \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

a causa della simmetria della struttura, i pesi si presenteranno distribuiti simmetricamente.

Per una mesh rettangolare 2D non interpolata si ha:

$$h_{x,y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ed } H=4 \quad (\text{B.18})$$

Per calcolare la velocità di propagazione in questa struttura si calcola la trasformata di Fourier di (B.16):

$$\begin{aligned}
P(n, \xi_1, \xi_2) = & \frac{2}{N} P(n-1, \xi_1, \xi_2) \left[ h_a \left( e^{j\omega_1 cT} + e^{j\omega_2 cT} + e^{-j\omega_1 cT} + e^{-j\omega_2 cT} \right) + \right. \\
& \left. + h_a \left( e^{j(\omega_1 + \omega_2) cT} + e^{j(\omega_1 - \omega_2) cT} + e^{-j(\omega_1 + \omega_2) cT} + e^{-j(\omega_1 - \omega_2) cT} \right) + h_c \right] + \\
& - P(n-2, \xi_1, \xi_2)
\end{aligned} \tag{B.19}$$

il termine  $b(\xi_1, \xi_2)$  in questo caso vale:

$$\begin{aligned}
b(\xi_1, \xi_2) = & \frac{4}{N} \left[ h_a (\cos \omega_1 cT + \cos \omega_2 cT) + \right. \\
& \left. + h_d (\cos(\omega_1 + \omega_2) cT + \cos(\omega_1 - \omega_2) cT) + h_c / 2 \right]
\end{aligned} \tag{B.20}$$

Lo schema alle differenze espresso da (B.16) è stabile e senza perdite se il fattore di amplificazione spettrale risulta pari ad 1:

$$|g(\xi_1, \xi_2)| = 1 \tag{B.21}$$

questo implica che  $b(\xi_1, \xi_2)$  sia reale ed  $|b(\xi_1, \xi_2)| \leq 2$ .

Il valore massimo per  $|b(\xi_1, \xi_2)|$  si ha per  $\xi_1 = 0$  e  $\xi_2 = 0$

$$b(0, 0) = \frac{4}{N} \left( 2h_d + 2h_a + \frac{h_c}{2} \right) \tag{B.22}$$

La condizione di stabilità per una mesh rettangolare interpolata impone che:

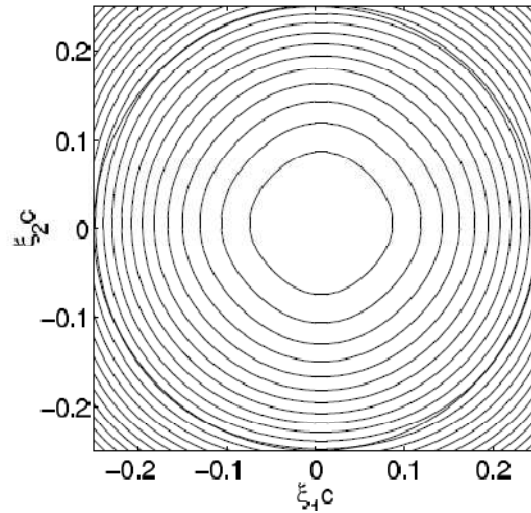
$$4h_d + 4h_a + h_c \leq N \tag{B.23}$$

quindi nel calcolo dei pesi si deve tenere conto di questo vincolo.

Il calcolo dei pesi ottimi, eseguito secondo quanto riportato in (Savioja, Valimaki, 2000), porta ad i seguenti risultati:

$$h_{x,y} = \begin{bmatrix} 0.09398 & 0.3120 & 0.09398 \\ 0.3120 & 0.3759 & 0.3120 \\ 0.09398 & 0.3120 & 0.09398 \end{bmatrix} \tag{B.24}$$

In questo caso il fattore di dispersione che si ottiene è il seguente,



**Figura B.4:** Fattore di dispersione per mesh rettangolare 2D interpolata con coeff. Ottimi. Le linee di isolivello rappresentano variazioni dell'1% (da Savioja,Välimäki.2000).

Si vede che la dispersione è praticamente indipendente dalla direzione, il comportamento risulta migliore rispetto alla mesh 2D non interpolata, ma le sue prestazioni risultano peggiori rispetto alla mesh triangolare.

# Appendice C

## Soluzione di D'Alembert per l'equazione delle onde

Nel caso monodimensionale, l'equazione delle onde si può scrivere:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (\text{C.1})$$

come primo passo è necessario fare un cambiamento di variabili,  $s = x - ct$  ed  $r = x + ct$ , così che:

$$u(x,t) = u(s,r) = u(s(x,t), r(x,t)) \quad (\text{C.2})$$

le derivate parziali di  $u$  in termini di  $x$  e  $t$  si trasformano in termini di  $s$  ed  $r$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial r} \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial r} = -c \frac{\partial u}{\partial s} + c \frac{\partial u}{\partial r} \quad (\text{C.4})$$

le derivate del secondo ordine:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( -c \frac{\partial u}{\partial s} + c \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -c \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + c \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \\ &= -c \frac{\partial}{\partial s} \left( -c \frac{\partial u}{\partial s} + c \frac{\partial u}{\partial r} \right) + c \frac{\partial}{\partial r} \left( -c \frac{\partial u}{\partial s} + c \frac{\partial u}{\partial r} \right) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial r} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Sostituendo nell'equazione (1), si ottiene:

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial r} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) \quad (\text{C.7})$$



Che semplificata diventa:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial r} = 0 \quad (\text{C.8})$$

Integrando l'equazione differenziale alle derivate parziali (8), prima rispetto a  $s$  e poi rispetto a  $r$ , si ottiene la soluzione generica dove  $f$  e  $g$  sono due funzioni arbitrarie nelle variabili  $s$  ed  $r$  :

$$u(s, r) = f(s) + g(r) \quad (\text{C.9})$$

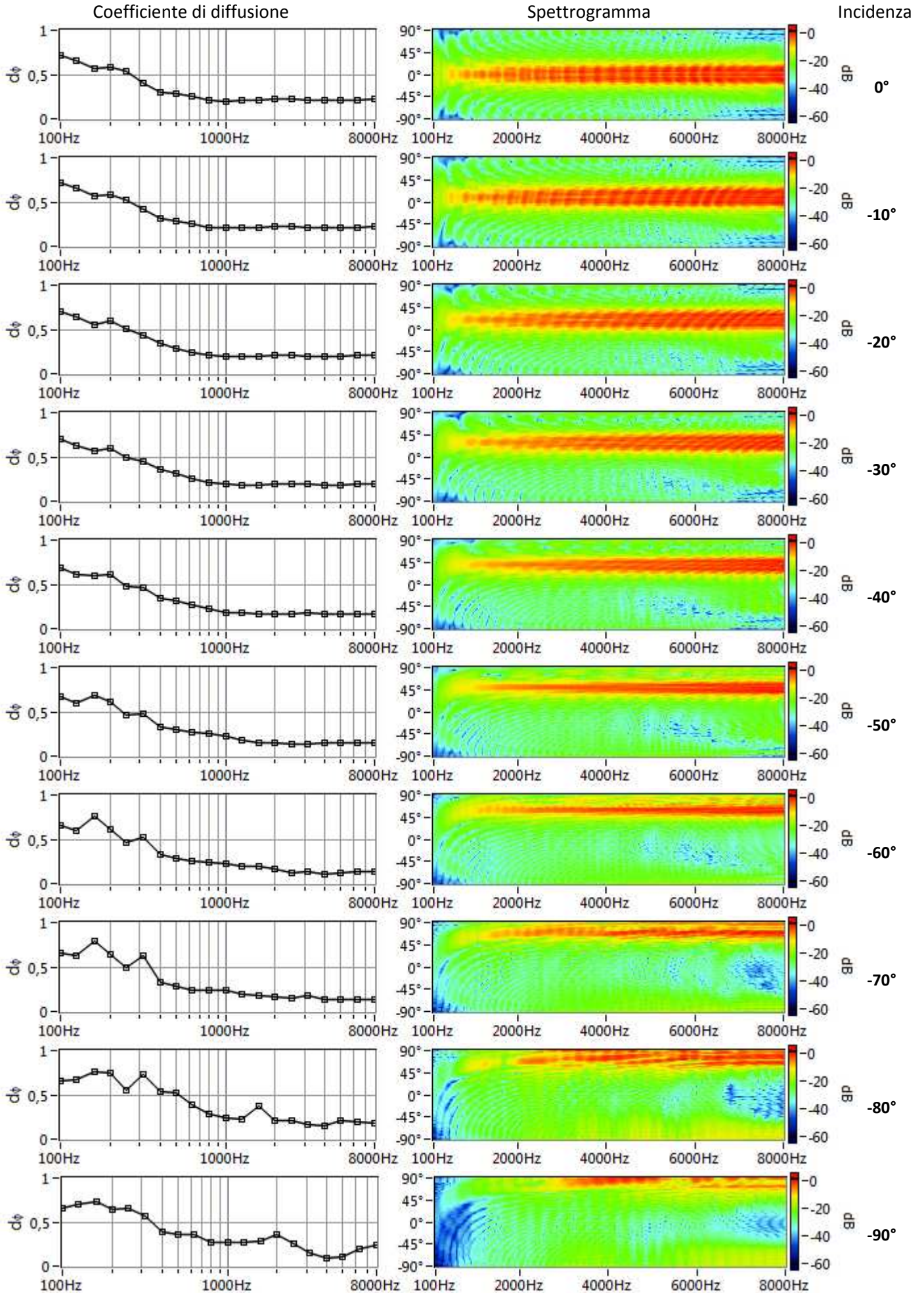
Ricordando l'espressione di  $s$  ed  $r$  si ha:

$$u(x, t) = u^+(x - ct) + u^-(x + ct) \quad (\text{C.10})$$

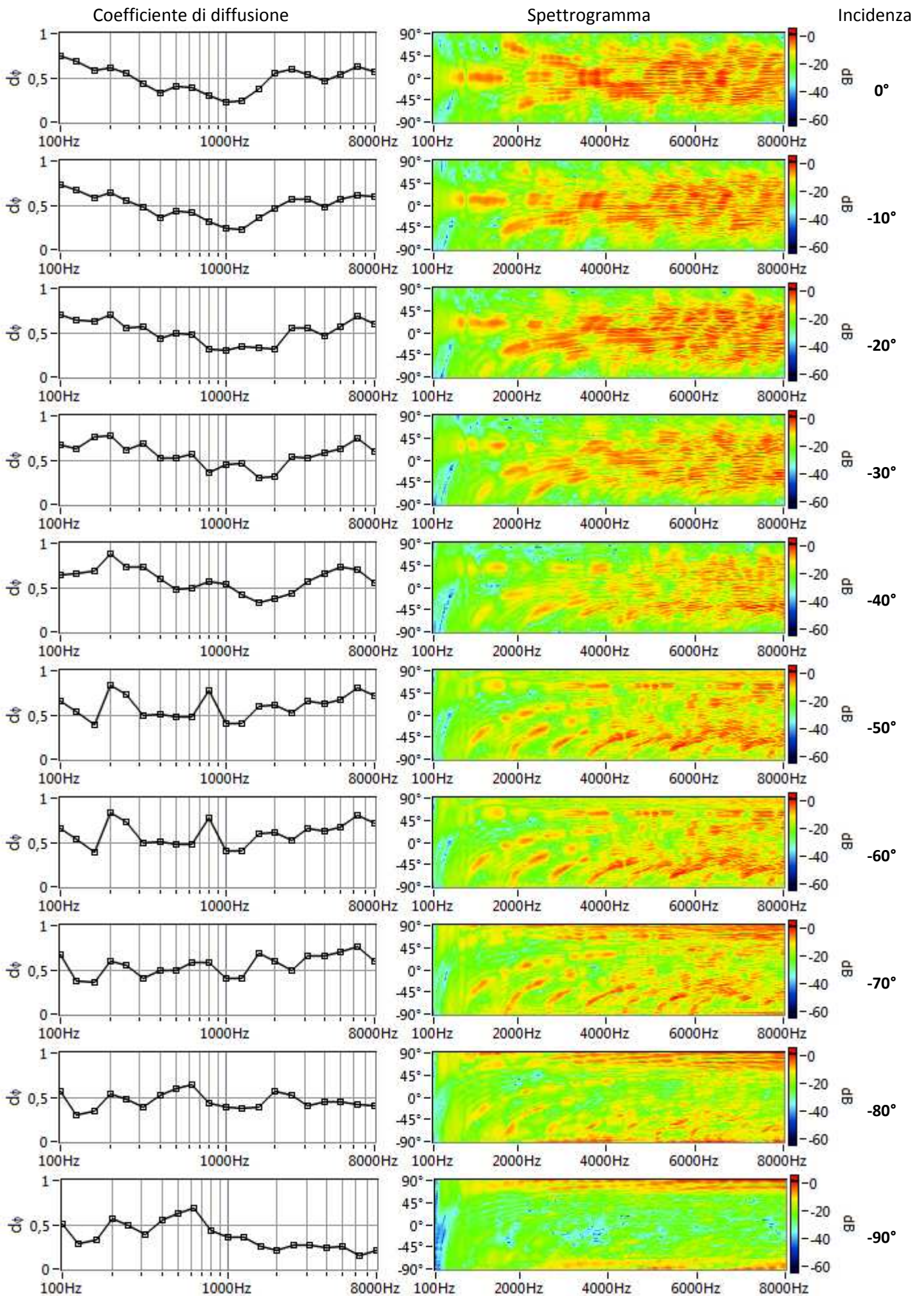
In cui  $u^+$  ed  $u^-$  hanno il senso di onda viaggiante nel senso positivo delle  $x$  ed onda viaggiante nel senso negativo delle  $x$ .

# Appendice D

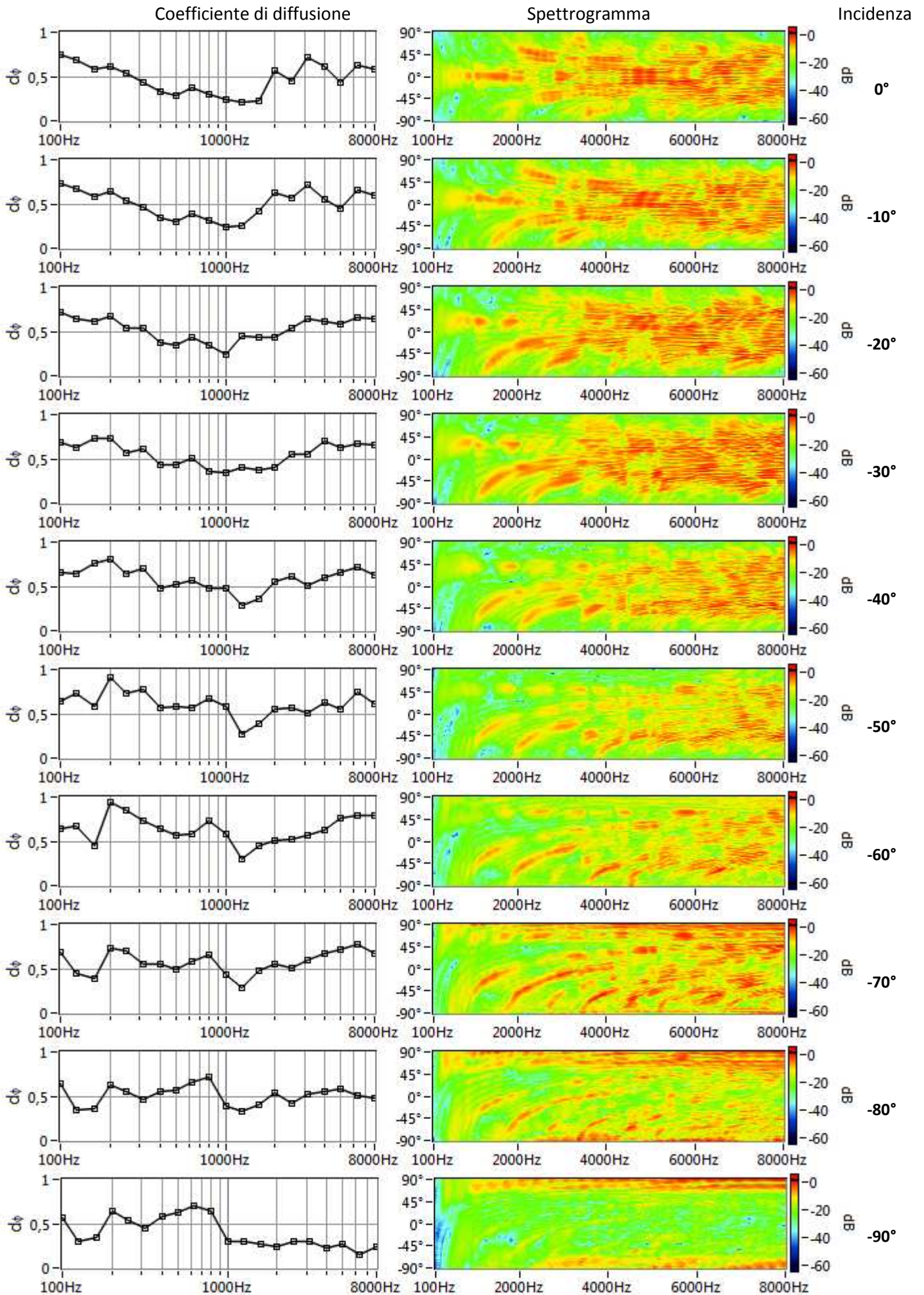
Superficie piana  $l=1.1\text{m}$ , spessore  $0.033\text{m}$ .



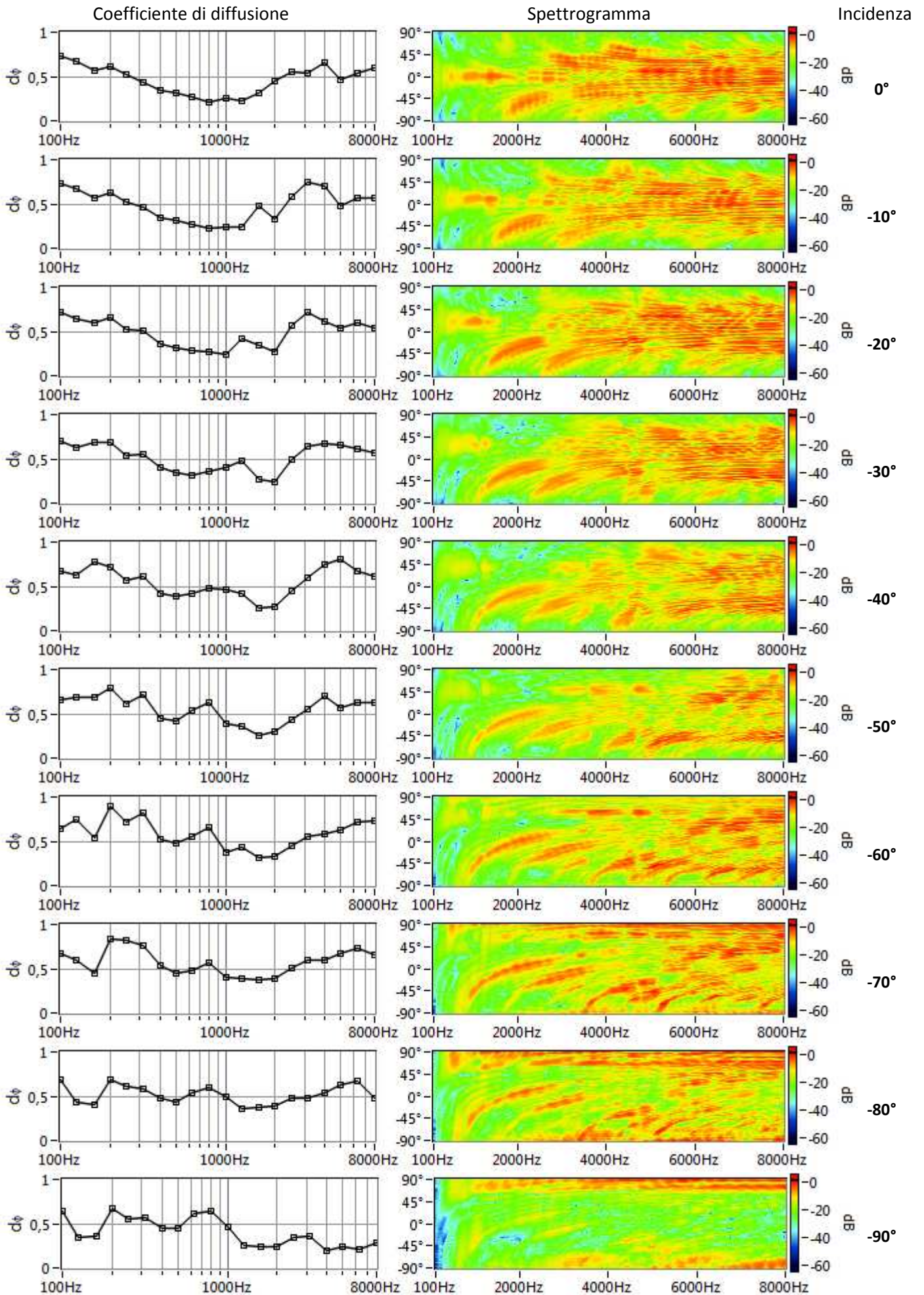
PRD con  $N=7, n_p=6, f_0=551\text{Hz}, w=0.033\text{m}$ .



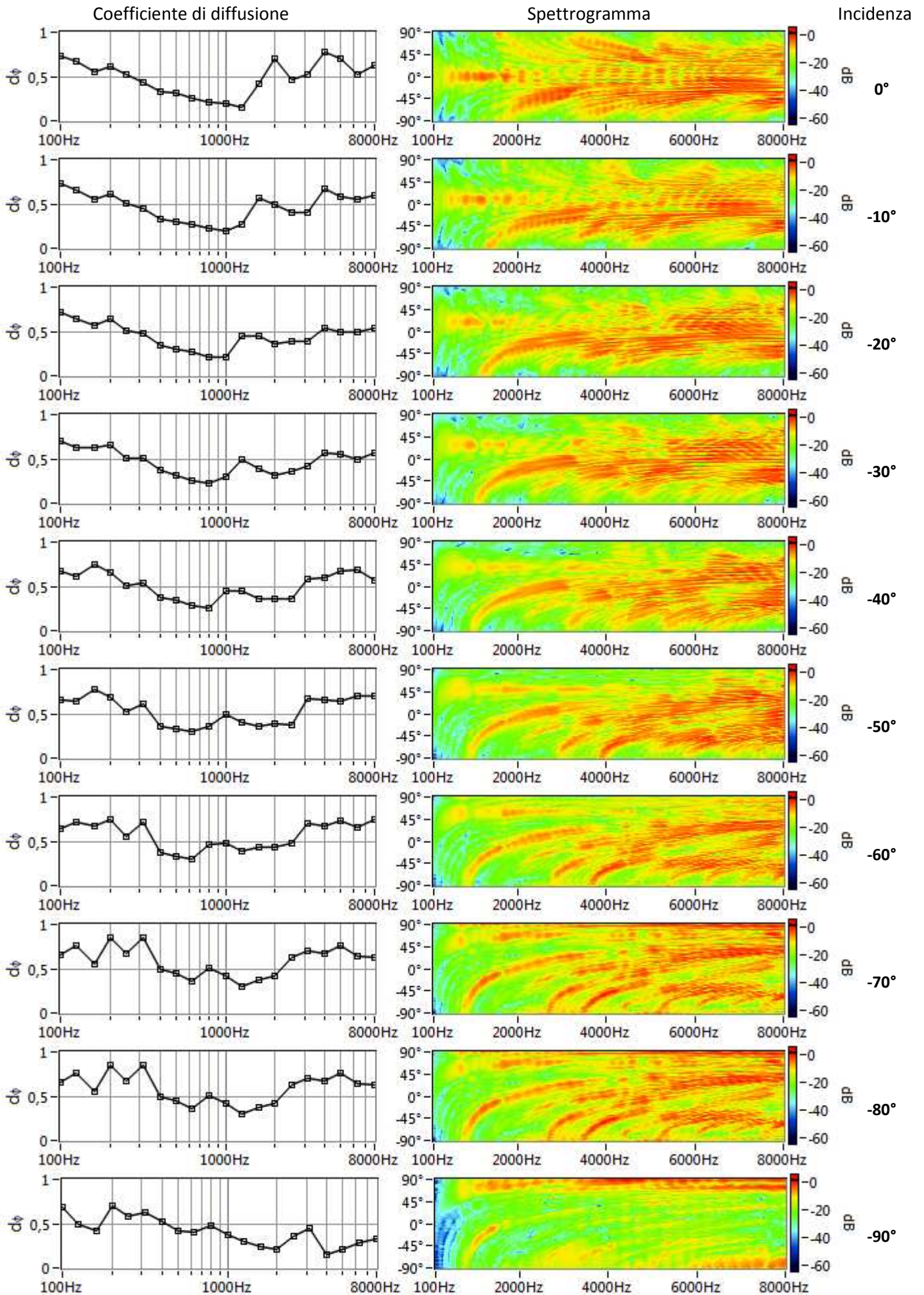
PRD con  $N=7, n_p=6, f_0=735\text{Hz}, w=0.033\text{m}$ .



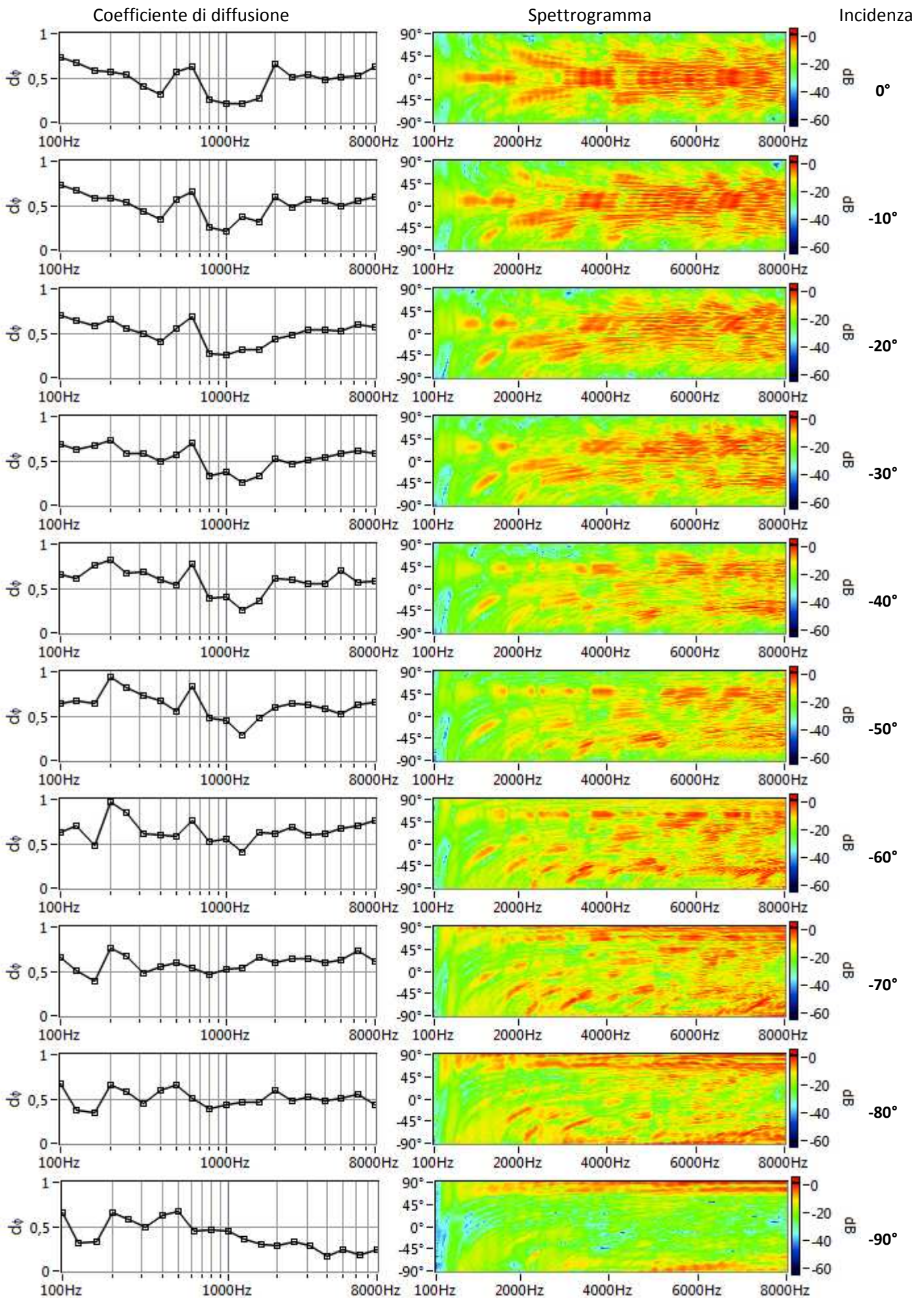
PRD con  $N=7, np=6, f_0=1103\text{Hz}, w=0.033\text{m}$ .



PRD con  $N=7, np=6, f_0=2207\text{Hz}, w=0.033\text{m}$ .

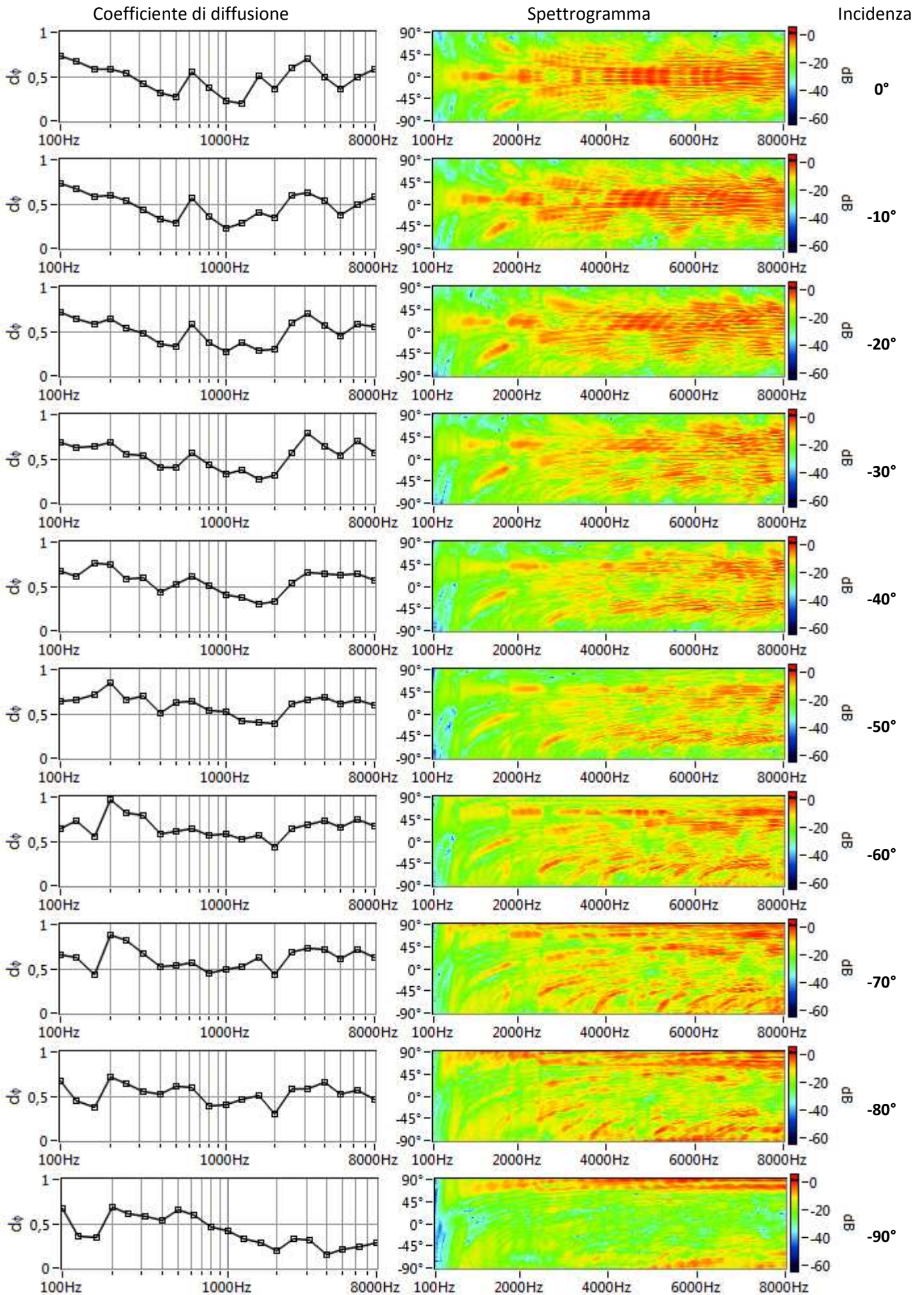


QRD con  $N=7, n_p=6, f_0=551\text{Hz}, w=0.033\text{m}$ .

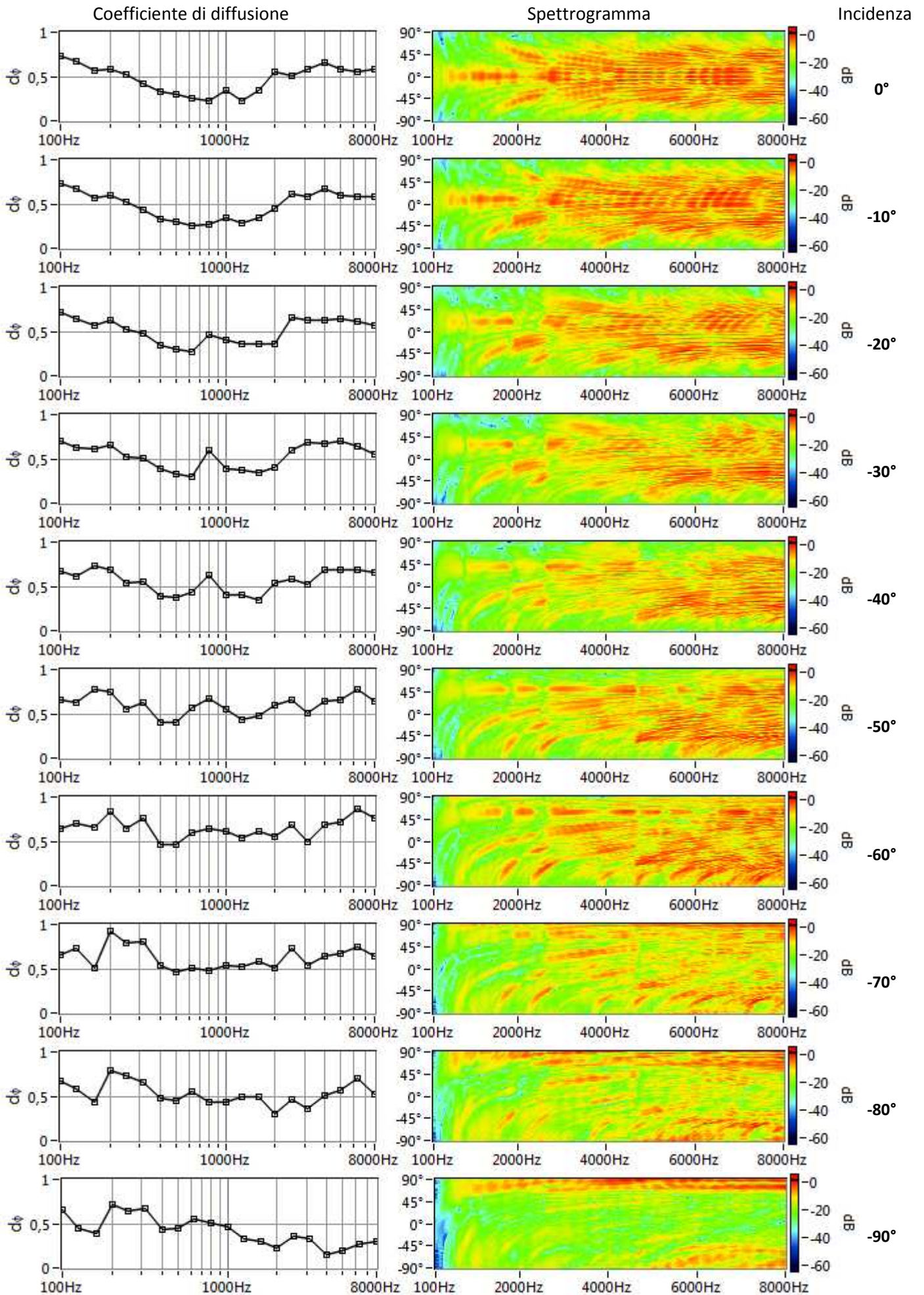




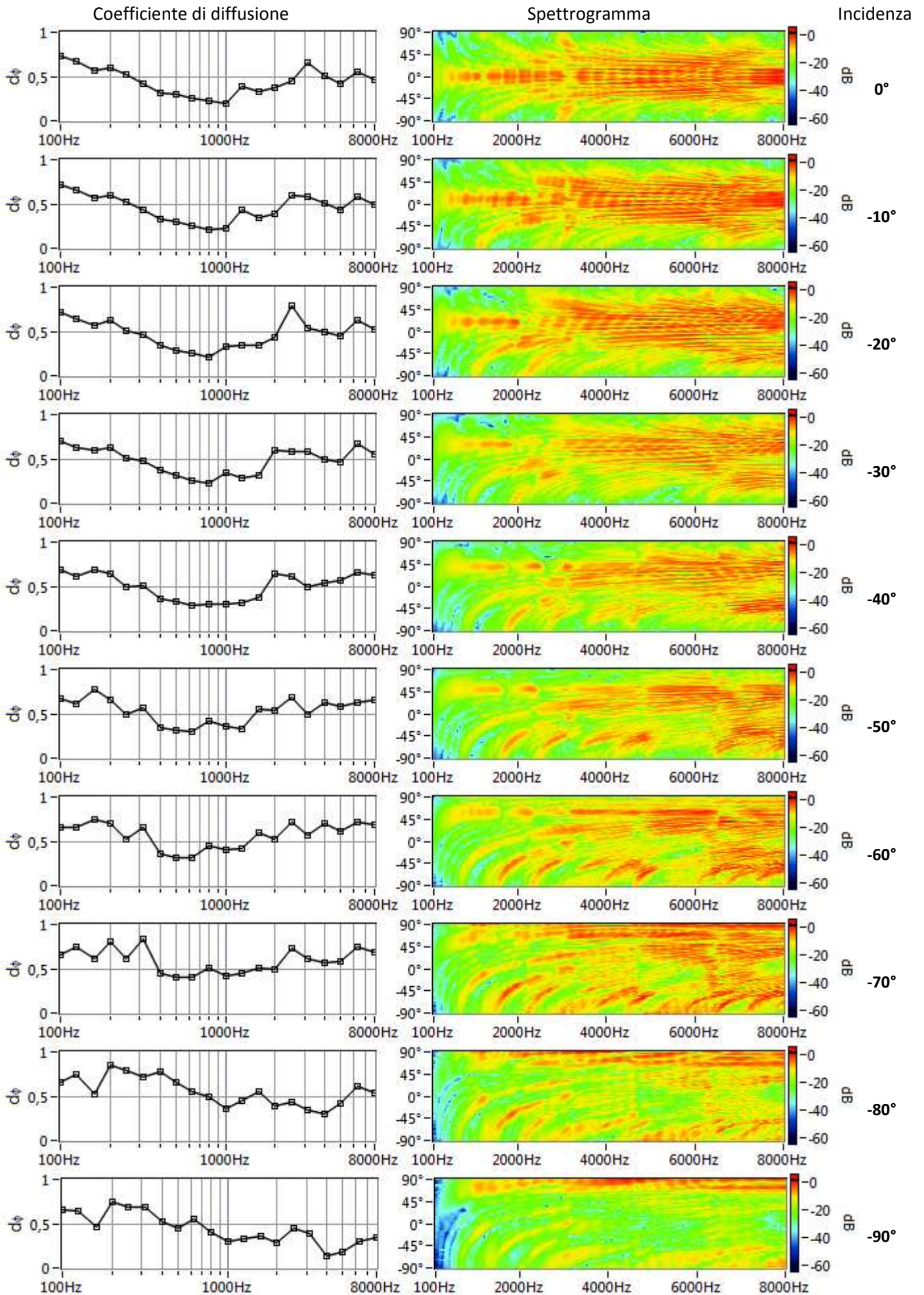
QRD con  $N=7, n_p=6, f_0=735\text{Hz}, w=0.033\text{m}$ .



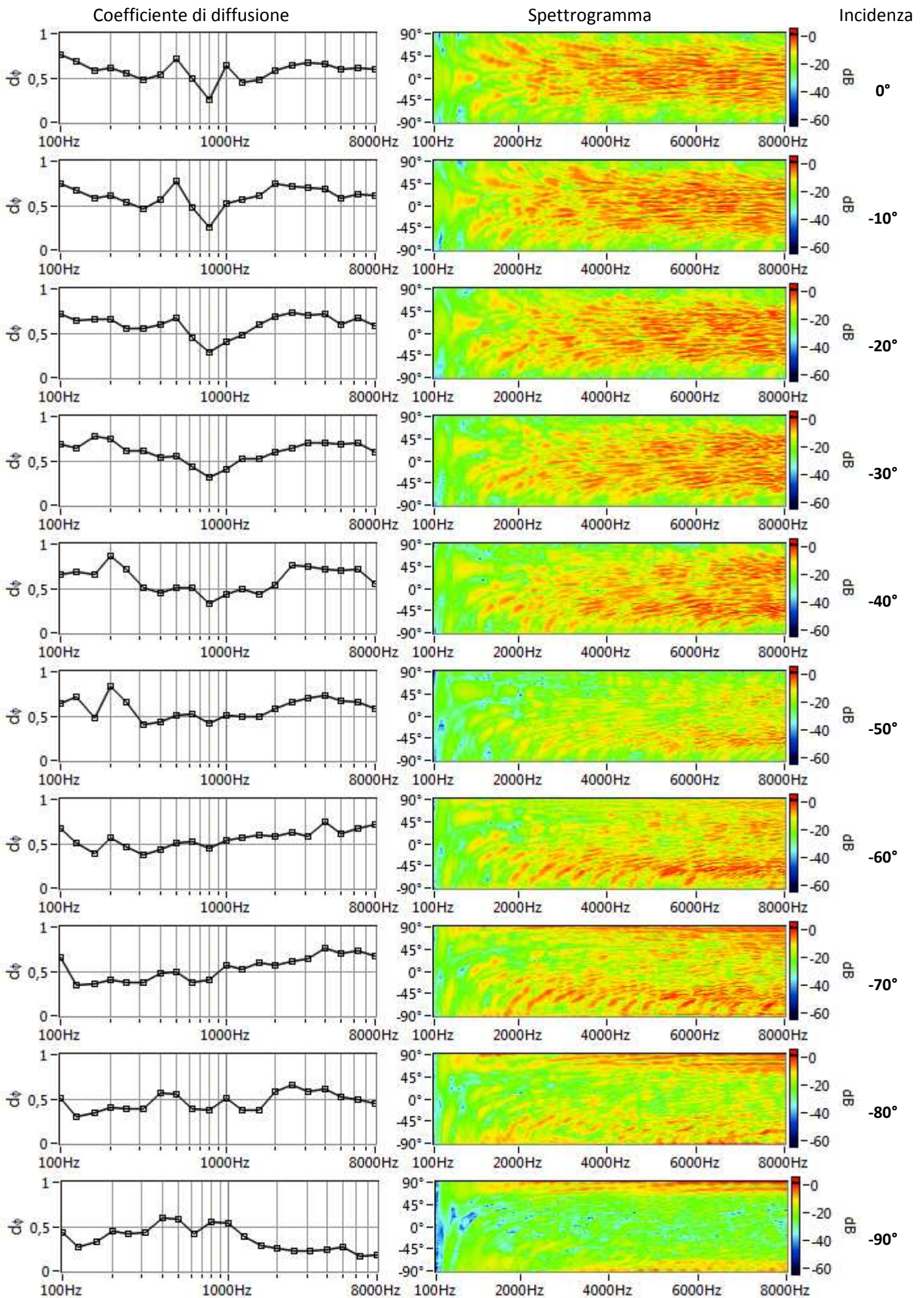
QRD con  $N=7, np=6, f_0=1103\text{Hz}, w=0.033\text{m}$ .



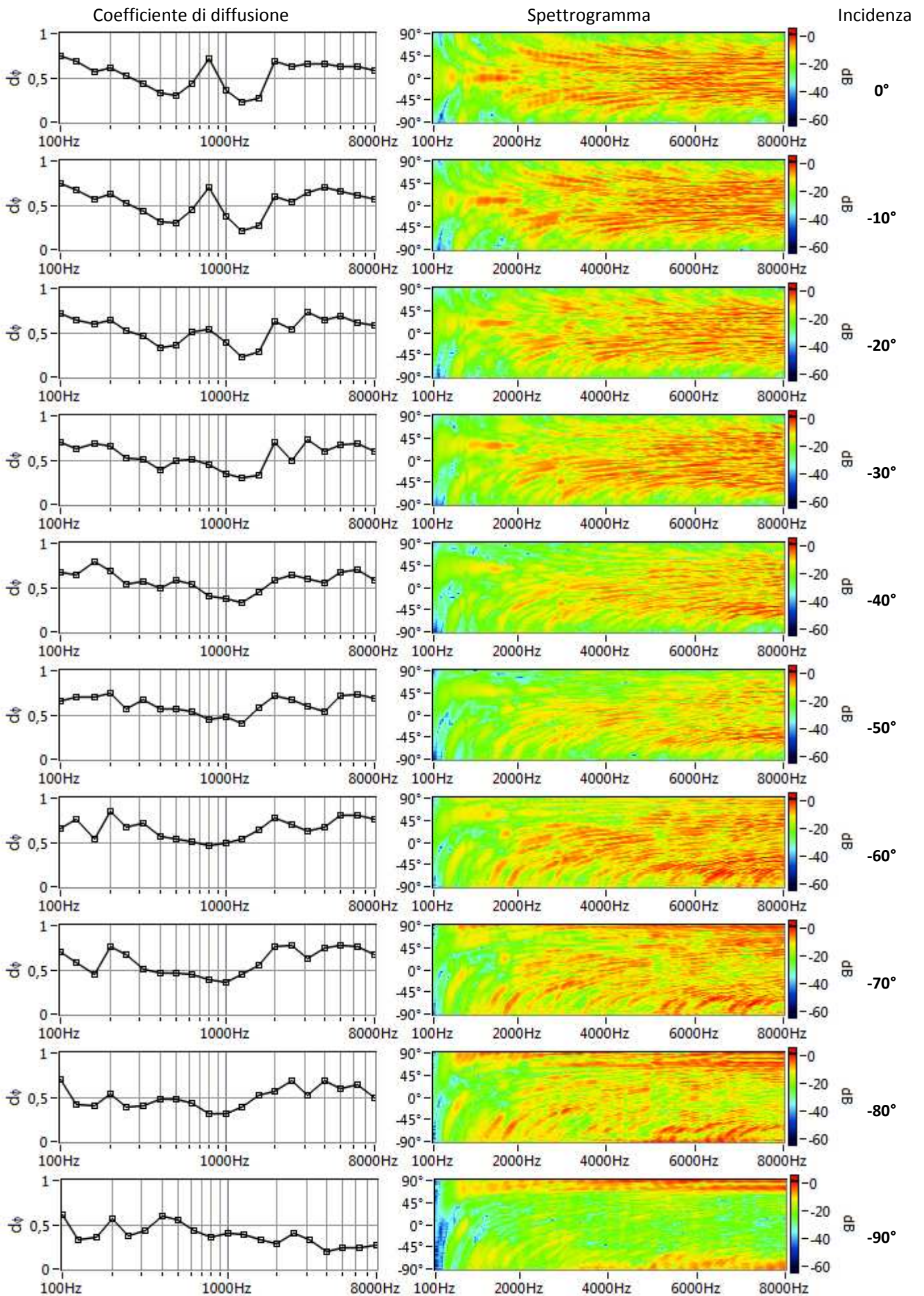
QRD con  $N=7, np=6, f_0= 2207\text{Hz}, w=0.033\text{m}$ .



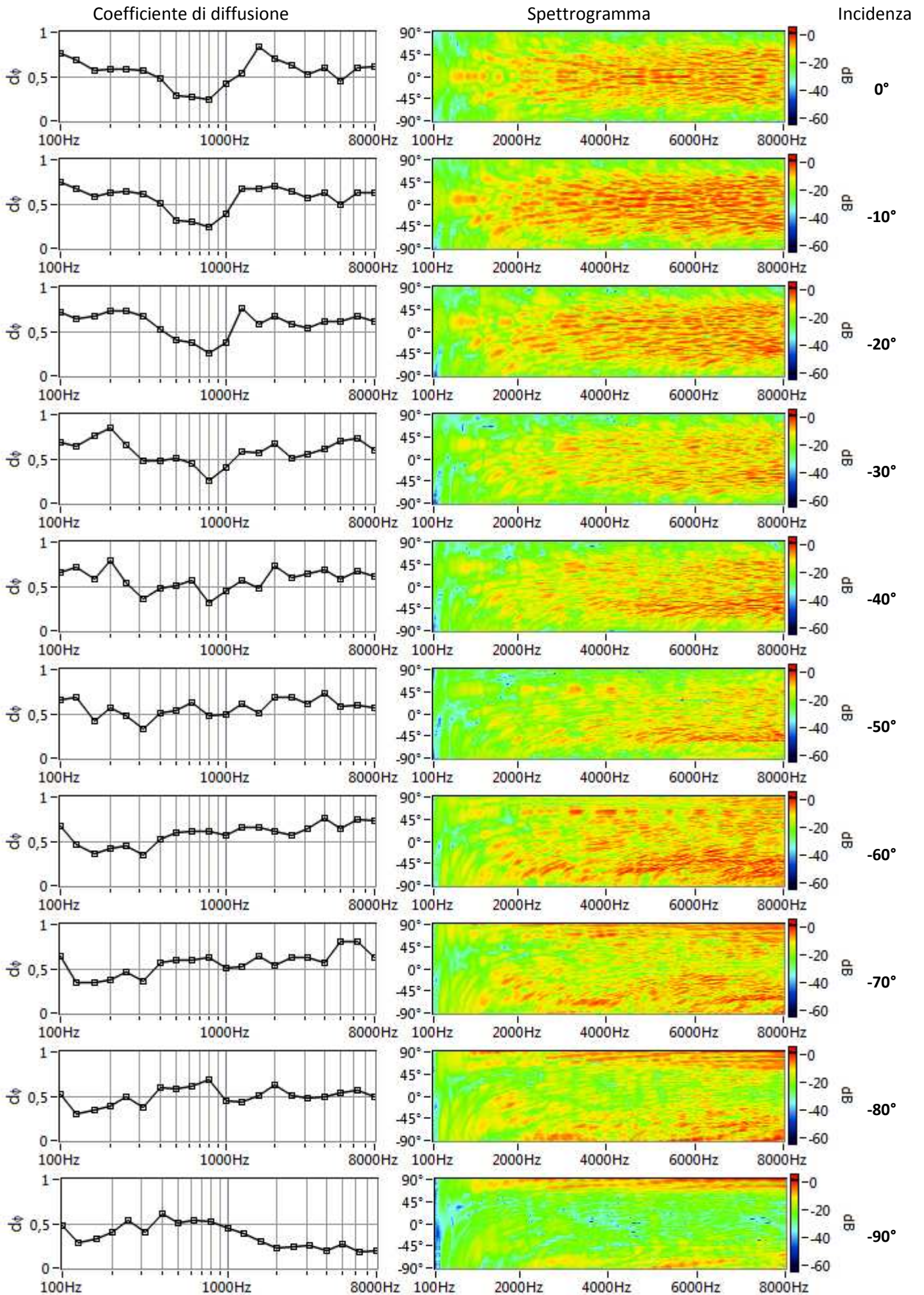
PRD con  $N=13, np=3, f_0=594\text{Hz}, w=0.033\text{m}$ .



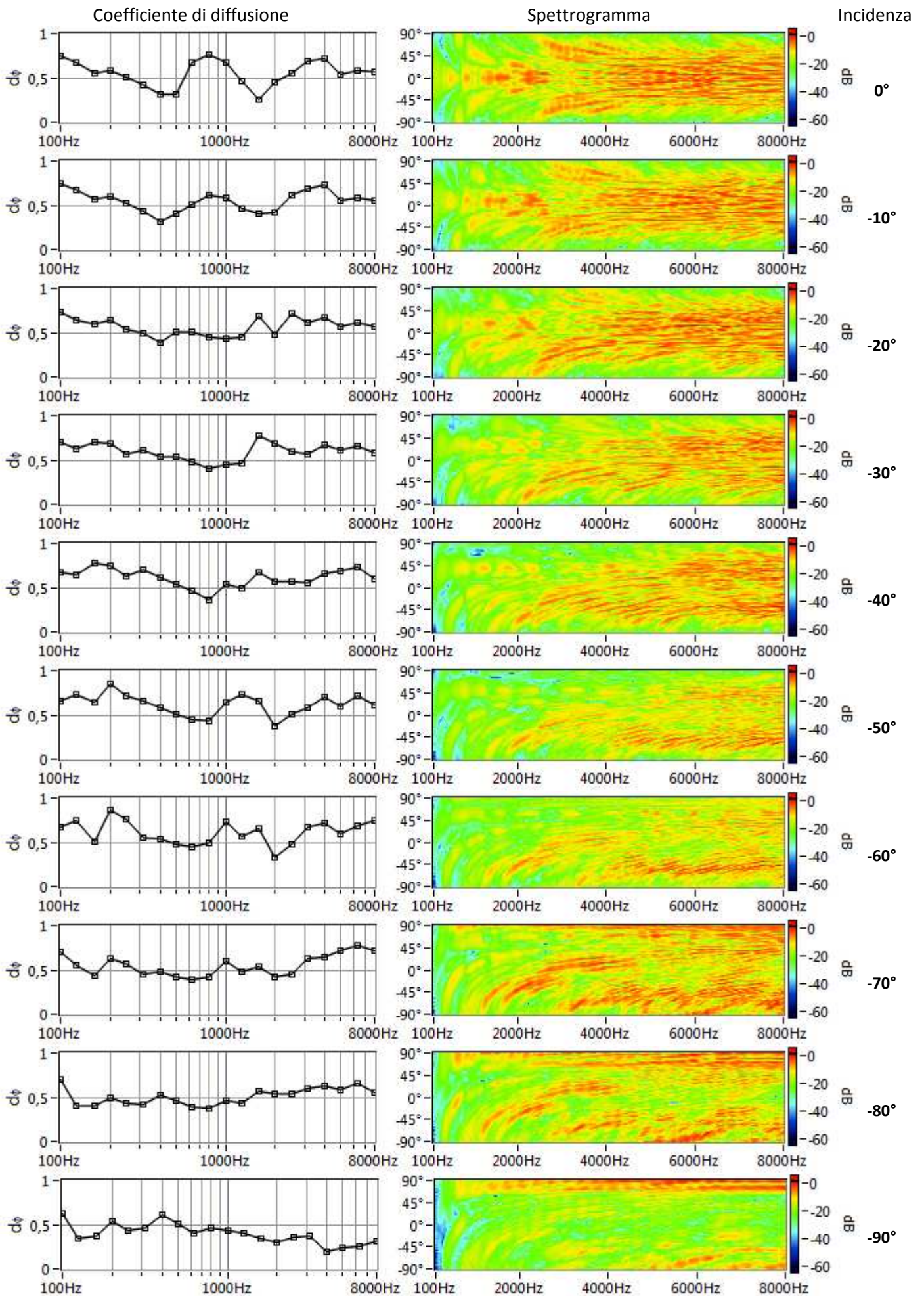
PRD con  $N=13, np=3, f_0=1188\text{Hz}, w=0.033\text{m}$ .



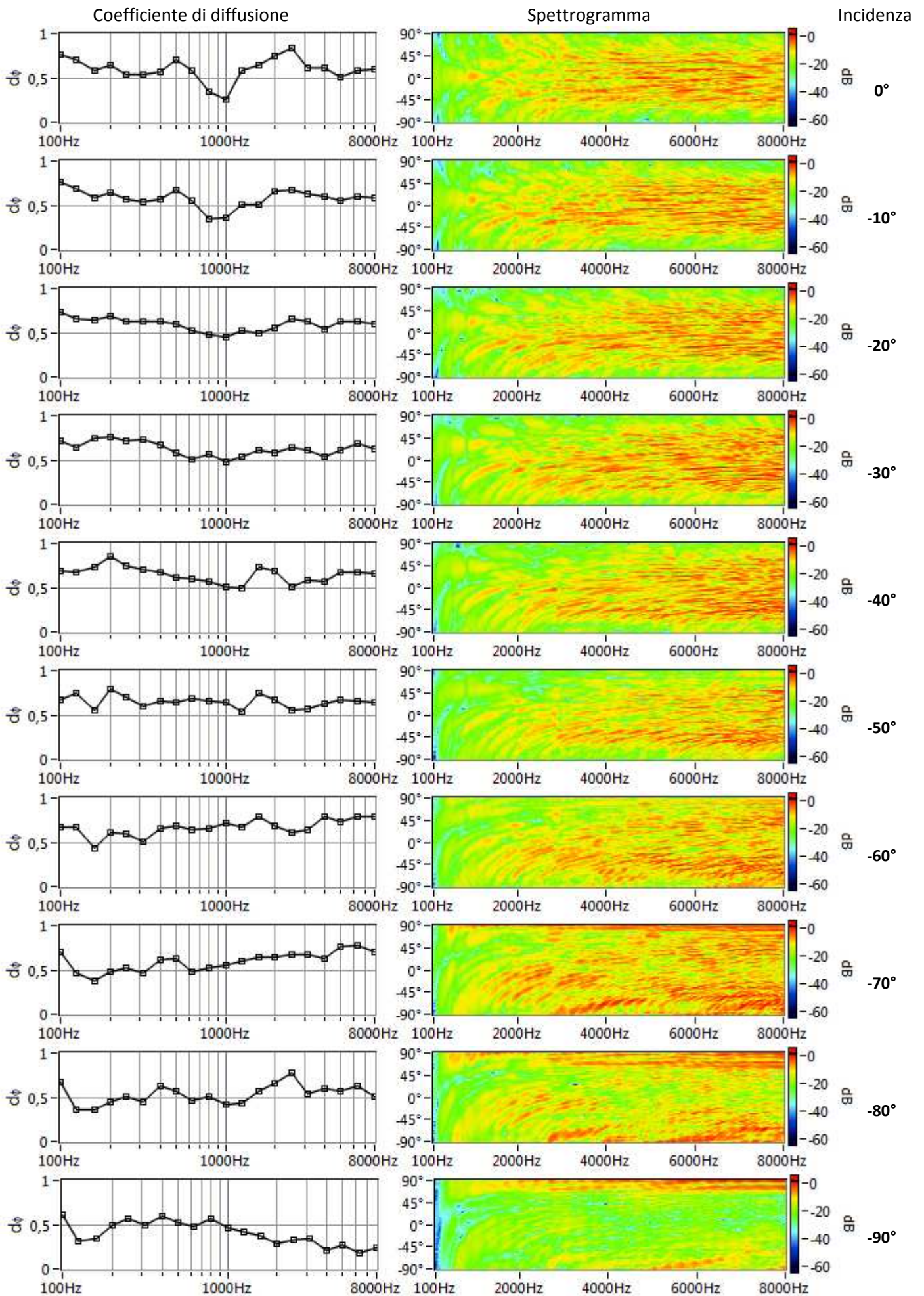
QRD con  $N=13, n_p=3, f_0=594\text{Hz}, w=0.033\text{m}$ .



QRD con  $N=13, np=3, f_0=1188\text{Hz}, w=0.033\text{m}$ .

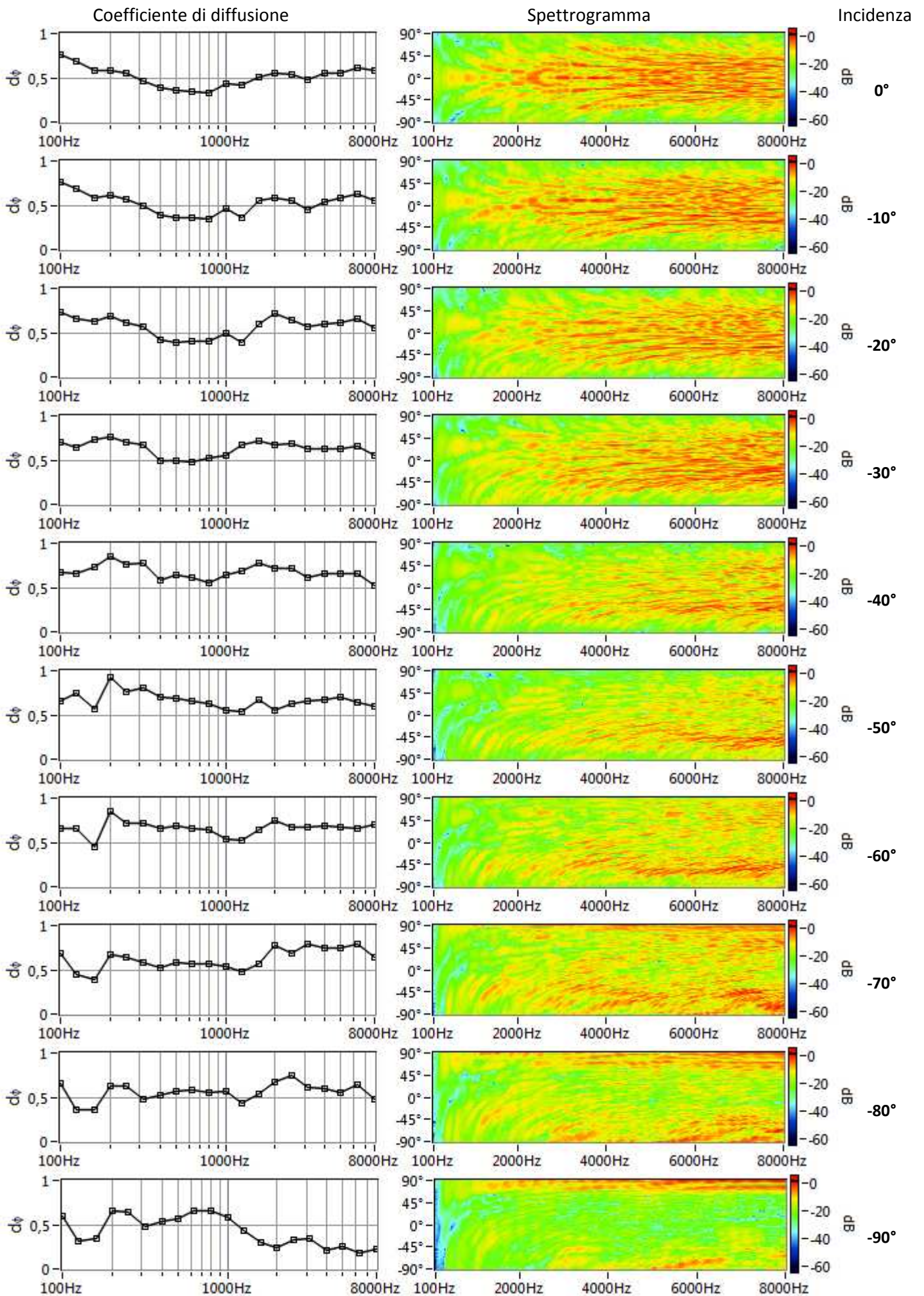


PRD con  $N=19, n_p=2, f_0=813\text{Hz}, w=0.033\text{m}$ .

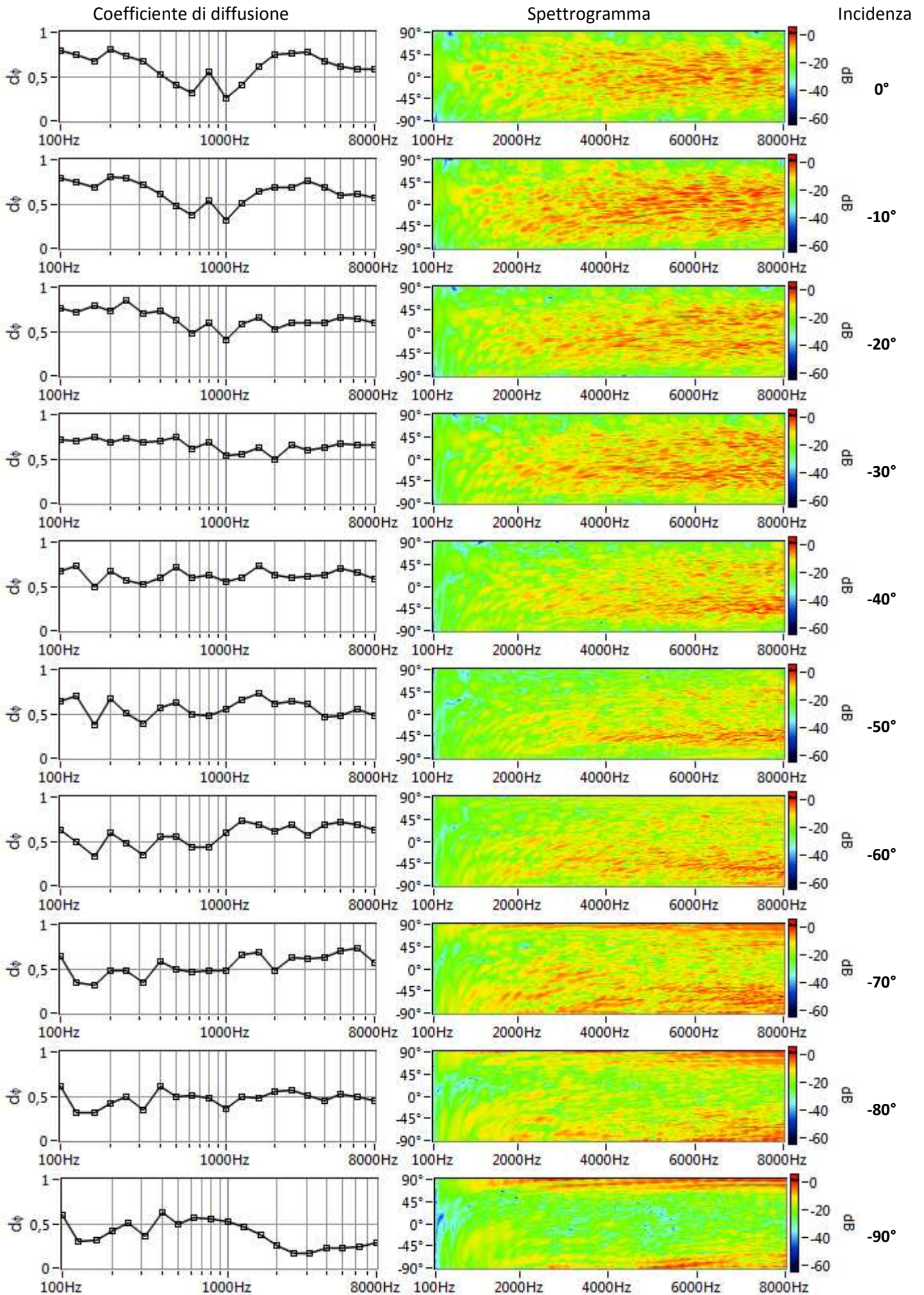




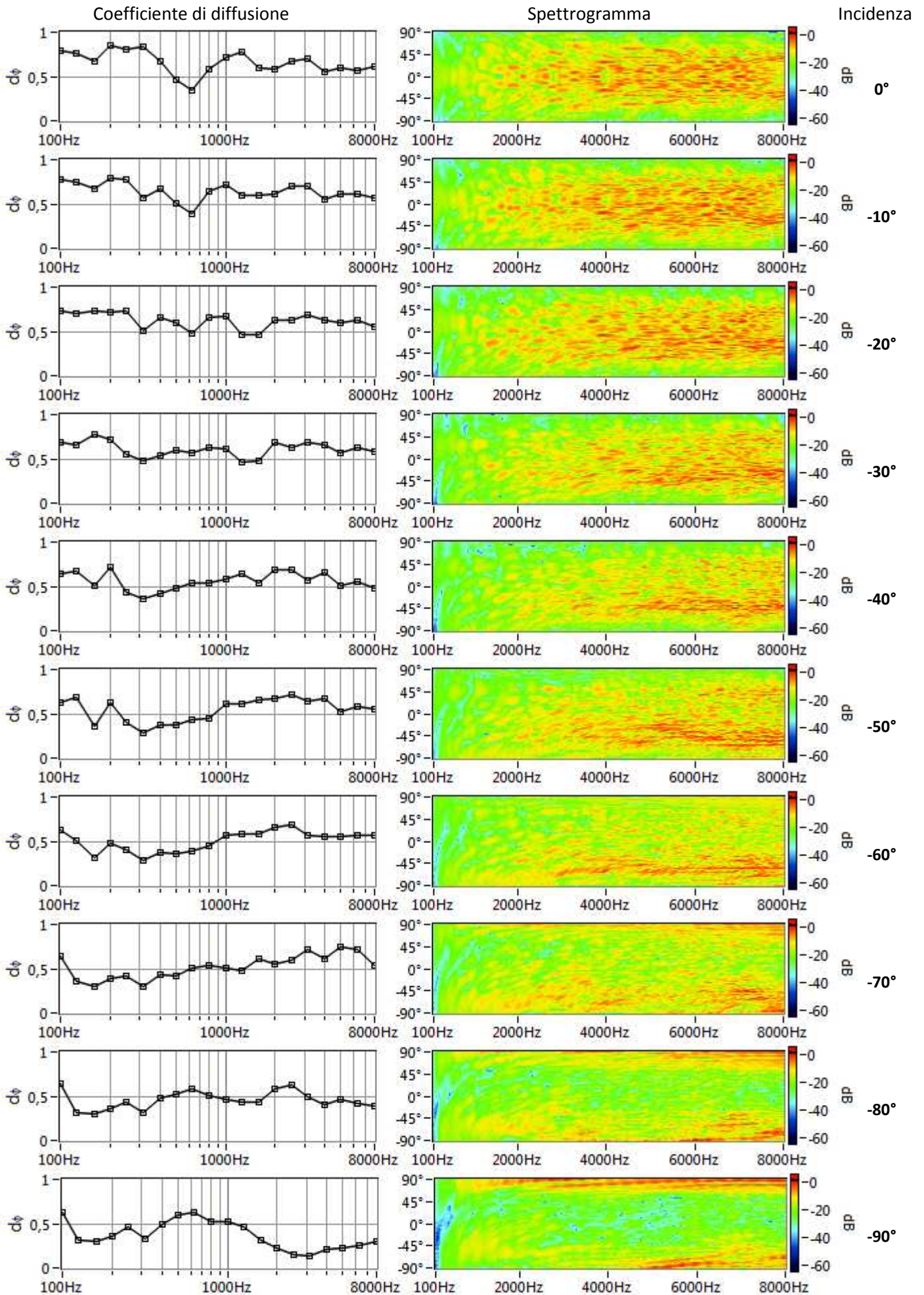
QRD con  $N=19$ ,  $n_p=2$ ,  $f_0=813$ Hz,  $w=0.033$ m.



PRD con  $N=37, n_p=1, f_0=417\text{Hz}, w=0.033\text{m}$ .



QRD con  $N=37, np=1, f_0=417\text{Hz}, w=0.033\text{m}$ .



# Tabelle dei coefficienti di diffusione

PRD N=7, np=6, w=0.033m

$f_0=551\text{Hz}$

Angolo	terzi di ottava[Hz]																			
	100	125	160	200	250	315	400	500	630	800	1000	1250	1600	2000	2500	3150	4000	5000	6300	8000
0	0,72	0,67	0,57	0,59	0,53	0,42	0,32	0,39	0,37	0,29	0,21	0,22	0,36	0,54	0,56	0,52	0,47	0,52	0,60	0,50
-10	0,71	0,66	0,57	0,63	0,53	0,46	0,35	0,42	0,41	0,30	0,22	0,21	0,34	0,45	0,54	0,55	0,48	0,60	0,58	0,56
-20	0,69	0,63	0,62	0,69	0,54	0,56	0,42	0,49	0,48	0,31	0,29	0,33	0,31	0,30	0,54	0,53	0,48	0,59	0,69	0,57
-30	0,66	0,61	0,75	0,77	0,60	0,68	0,52	0,52	0,56	0,35	0,44	0,45	0,28	0,30	0,53	0,50	0,58	0,65	0,74	0,62
-40	0,63	0,64	0,68	0,88	0,73	0,72	0,59	0,47	0,48	0,57	0,52	0,40	0,31	0,36	0,42	0,55	0,66	0,72	0,69	0,49
-50	0,62	0,71	0,49	0,96	0,83	0,62	0,59	0,47	0,43	0,73	0,42	0,38	0,38	0,48	0,40	0,68	0,54	0,52	0,71	0,57
-60	0,64	0,54	0,39	0,83	0,73	0,48	0,51	0,48	0,48	0,77	0,40	0,40	0,60	0,61	0,51	0,63	0,63	0,66	0,80	0,70
-70	0,66	0,36	0,35	0,59	0,55	0,40	0,49	0,50	0,58	0,54	0,37	0,37	0,67	0,61	0,42	0,62	0,60	0,73	0,77	0,63
-80	0,57	0,30	0,33	0,54	0,48	0,38	0,52	0,59	0,64	0,41	0,37	0,33	0,31	0,52	0,45	0,35	0,43	0,50	0,33	0,37
-90	0,51	0,28	0,31	0,56	0,49	0,38	0,54	0,62	0,69	0,43	0,36	0,36	0,25	0,21	0,22	0,27	0,23	0,26	0,13	0,18
casuale	0,64	0,53	0,50	0,71	0,60	0,51	0,49	0,50	0,52	0,48	0,37	0,35	0,38	0,43	0,45	0,52	0,51	0,58	0,60	0,52

$f_0=735\text{Hz}$

Angolo	terzi di ottava[Hz]																			
	100	125	160	200	250	315	400	500	630	800	1000	1250	1600	2000	2500	3150	4000	5000	6300	8000
0	0,72	0,66	0,56	0,60	0,52	0,42	0,32	0,28	0,37	0,29	0,23	0,20	0,20	0,55	0,43	0,74	0,64	0,36	0,61	0,57
-10	0,72	0,65	0,56	0,62	0,51	0,45	0,32	0,29	0,39	0,31	0,22	0,24	0,41	0,61	0,55	0,69	0,55	0,39	0,63	0,58
-20	0,70	0,63	0,59	0,66	0,52	0,52	0,36	0,33	0,42	0,33	0,22	0,44	0,42	0,41	0,53	0,62	0,62	0,56	0,61	0,60
-30	0,67	0,61	0,71	0,71	0,56	0,59	0,42	0,42	0,50	0,35	0,34	0,38	0,35	0,40	0,55	0,53	0,70	0,66	0,68	0,68
-40	0,64	0,63	0,75	0,79	0,62	0,69	0,47	0,52	0,55	0,47	0,46	0,27	0,35	0,53	0,61	0,50	0,58	0,65	0,69	0,60
-50	0,62	0,71	0,58	0,90	0,73	0,77	0,56	0,58	0,56	0,67	0,57	0,25	0,37	0,54	0,56	0,50	0,61	0,53	0,74	0,60
-60	0,63	0,67	0,45	0,94	0,84	0,73	0,64	0,56	0,59	0,73	0,58	0,28	0,43	0,49	0,51	0,56	0,62	0,73	0,79	0,78
-70	0,68	0,45	0,38	0,73	0,70	0,55	0,55	0,49	0,58	0,64	0,38	0,27	0,48	0,56	0,49	0,59	0,63	0,71	0,81	0,67
-80	0,64	0,34	0,35	0,63	0,54	0,45	0,55	0,57	0,66	0,70	0,36	0,29	0,34	0,49	0,38	0,45	0,52	0,59	0,46	0,40
-90	0,57	0,29	0,33	0,64	0,54	0,45	0,59	0,62	0,69	0,63	0,30	0,29	0,26	0,23	0,26	0,33	0,21	0,24	0,12	0,22
casuale	0,66	0,56	0,52	0,73	0,61	0,57	0,49	0,48	0,54	0,52	0,37	0,30	0,37	0,48	0,49	0,54	0,56	0,55	0,61	0,57

$f_0= 1103\text{Hz}$

Angolo	terzi di ottava[Hz]																			
	100	125	160	200	250	315	400	500	630	800	1000	1250	1600	2000	2500	3150	4000	5000	6300	8000
0	0,72	0,66	0,55	0,60	0,50	0,42	0,32	0,29	0,25	0,20	0,23	0,21	0,30	0,43	0,55	0,53	0,65	0,39	0,54	0,57
-10	0,72	0,65	0,55	0,61	0,50	0,44	0,32	0,29	0,25	0,22	0,22	0,22	0,46	0,32	0,57	0,73	0,70	0,39	0,60	0,57
-20	0,70	0,63	0,57	0,64	0,51	0,49	0,34	0,29	0,27	0,25	0,23	0,41	0,33	0,25	0,56	0,72	0,63	0,45	0,62	0,48
-30	0,68	0,61	0,66	0,67	0,52	0,54	0,38	0,32	0,31	0,36	0,39	0,46	0,26	0,23	0,49	0,62	0,67	0,65	0,59	0,57
-40	0,65	0,61	0,77	0,71	0,55	0,61	0,41	0,37	0,41	0,46	0,46	0,40	0,23	0,26	0,44	0,59	0,74	0,75	0,65	0,59
-50	0,63	0,67	0,69	0,78	0,59	0,71	0,44	0,42	0,54	0,62	0,37	0,35	0,24	0,28	0,41	0,53	0,70	0,56	0,57	0,59
-60	0,63	0,74	0,54	0,89	0,70	0,82	0,52	0,48	0,55	0,65	0,36	0,42	0,30	0,31	0,44	0,54	0,56	0,63	0,67	0,72
-70	0,67	0,60	0,44	0,84	0,82	0,76	0,53	0,44	0,48	0,57	0,39	0,35	0,35	0,37	0,49	0,58	0,59	0,61	0,76	0,62
-80	0,68	0,42	0,39	0,68	0,61	0,58	0,47	0,42	0,54	0,59	0,47	0,32	0,33	0,36	0,48	0,45	0,49	0,63	0,62	0,46
-90	0,64	0,34	0,35	0,67	0,55	0,56	0,44	0,44	0,62	0,64	0,46	0,24	0,23	0,23	0,32	0,37	0,19	0,20	0,20	0,28
casuale	0,67	0,59	0,55	0,71	0,59	0,60	0,42	0,38	0,43	0,47	0,36	0,34	0,30	0,30	0,47	0,57	0,59	0,53	0,58	0,54

$f_0=2207\text{Hz}$

Angolo	terzi di ottava[Hz]																			
	100	125	160	200	250	315	400	500	630	800	1000	1250	1600	2000	2500	3150	4000	5000	6300	8000
0	0,71	0,65	0,54	0,59	0,50	0,41	0,31	0,29	0,24	0,20	0,18	0,13	0,41	0,69	0,45	0,51	0,75	0,70	0,46	0,61
-10	0,71	0,64	0,54	0,60	0,50	0,43	0,31	0,28	0,25	0,20	0,17	0,26	0,56	0,48	0,39	0,39	0,63	0,62	0,51	0,60
-20	0,70	0,62	0,55	0,62	0,49	0,46	0,33	0,28	0,25	0,20	0,19	0,44	0,43	0,34	0,38	0,38	0,51	0,50	0,50	0,60
-30	0,68	0,60	0,61	0,63	0,49	0,49	0,36	0,30	0,24	0,21	0,28	0,49	0,37	0,30	0,34	0,40	0,54	0,57	0,51	0,55
-40	0,66	0,59	0,73	0,65	0,50	0,53	0,36	0,33	0,27	0,24	0,45	0,43	0,34	0,34	0,34	0,56	0,58	0,66	0,74	0,57
-50	0,64	0,62	0,77	0,67	0,50	0,59	0,34	0,31	0,29	0,35	0,49	0,39	0,35	0,38	0,36	0,67	0,64	0,62	0,73	0,70
-60	0,63	0,70	0,66	0,73	0,54	0,71	0,36	0,32	0,29	0,46	0,47	0,37	0,41	0,43	0,47	0,70	0,66	0,75	0,64	0,75
-70	0,64	0,76	0,54	0,84	0,66	0,84	0,49	0,44	0,35	0,50	0,40	0,28	0,36	0,41	0,64	0,69	0,69	0,73	0,68	0,64
-80	0,67	0,63	0,47	0,78	0,76	0,67	0,75	0,56	0,39	0,42	0,38	0,30	0,31	0,25	0,37	0,48	0,45	0,71	0,64	0,55
-90	0,67	0,49	0,42	0,70	0,58	0,62	0,52	0,41	0,40	0,47	0,37	0,29	0,22	0,20	0,34	0,45	0,15	0,17	0,30	0,32
casuale	0,67	0,63	0,59	0,69	0,55	0,58	0,42	0,36	0,30	0,33	0,35	0,35	0,37	0,37	0,41	0,52	0,55	0,60	0,58	0,59

### QRD N=7, np=6, w=0.033m

$f_0=551\text{Hz}$

Angolo	terzi di ottava[Hz]																			
	100	125	160	200	250	315	400	500	630	800	1000	1250	1600	2000	2500	3150	4000	5000	6300	8000
0	0,71	0,66	0,57	0,55	0,52	0,39	0,30	0,56	0,62	0,23	0,19	0,19	0,26	0,63	0,49	0,51	0,48	0,47	0,49	0,60
-10	0,71	0,65	0,56	0,57	0,52	0,42	0,32	0,56	0,65	0,24	0,19	0,36	0,30	0,58	0,47	0,53	0,53	0,47	0,54	0,57
-20	0,69	0,63	0,57	0,64	0,53	0,48	0,39	0,55	0,68	0,26	0,24	0,30	0,30	0,42	0,47	0,52	0,52	0,47	0,58	0,55
-30	0,67	0,60	0,65	0,72	0,57	0,56	0,48	0,55	0,69	0,31	0,36	0,25	0,32	0,51	0,44	0,49	0,51	0,52	0,56	0,58
-40	0,64	0,60	0,76	0,81	0,66	0,67	0,59	0,54	0,77	0,38	0,39	0,24	0,35	0,59	0,59	0,55	0,52	0,71	0,55	0,52
-50	0,62	0,67	0,63	0,93	0,81	0,72	0,67	0,55	0,83	0,47	0,44	0,27	0,46	0,59	0,64	0,62	0,56	0,51	0,66	0,63
-60	0,62	0,70	0,46	0,97	0,85	0,60	0,60	0,58	0,75	0,52	0,55	0,40	0,61	0,59	0,68	0,59	0,63	0,64	0,69	0,75
-70	0,66	0,50	0,38	0,76	0,67	0,48	0,55	0,59	0,52	0,45	0,50	0,49	0,57	0,59	0,59	0,63	0,60	0,58	0,77	0,60
-80	0,67	0,36	0,34	0,66	0,58	0,44	0,60	0,66	0,51	0,38	0,42	0,41	0,40	0,57	0,49	0,50	0,47	0,49	0,55	0,41
-90	0,65	0,31	0,32	0,66	0,59	0,48	0,63	0,67	0,44	0,46	0,45	0,35	0,28	0,28	0,29	0,29	0,15	0,21	0,14	0,23
casuale	0,66	0,56	0,52	0,74	0,64	0,53	0,52	0,58	0,65	0,38	0,38	0,33	0,39	0,53	0,52	0,52	0,50	0,51	0,56	0,54

$f_0=735\text{Hz}$

Angolo	terzi di ottava[Hz]																			
	100	125	160	200	250	315	400	500	630	800	1000	1250	1600	2000	2500	3150	4000	5000	6300	8000
0	0,71	0,66	0,56	0,56	0,52	0,40	0,30	0,26	0,54	0,35	0,21	0,17	0,49	0,34	0,58	0,67	0,44	0,32	0,45	0,58
-10	0,71	0,65	0,56	0,58	0,52	0,42	0,31	0,27	0,56	0,35	0,21	0,26	0,39	0,32	0,58	0,60	0,50	0,34	0,46	0,57
-20	0,70	0,63	0,56	0,62	0,51	0,47	0,34	0,31	0,57	0,35	0,25	0,36	0,27	0,29	0,58	0,68	0,52	0,40	0,58	0,56
-30	0,68	0,61	0,63	0,67	0,53	0,52	0,39	0,40	0,56	0,43	0,31	0,36	0,25	0,29	0,56	0,79	0,61	0,53	0,68	0,54
-40	0,65	0,60	0,75	0,74	0,57	0,59	0,42	0,52	0,60	0,49	0,40	0,36	0,29	0,31	0,54	0,63	0,62	0,62	0,62	0,50
-50	0,63	0,64	0,72	0,84	0,65	0,70	0,49	0,62	0,64	0,53	0,52	0,40	0,39	0,38	0,61	0,64	0,66	0,60	0,62	0,60
-60	0,62	0,72	0,55	0,96	0,81	0,78	0,57	0,62	0,65	0,56	0,59	0,52	0,55	0,43	0,64	0,68	0,74	0,61	0,71	0,66
-70	0,64	0,62	0,43	0,88	0,82	0,67	0,52	0,54	0,56	0,44	0,47	0,47	0,57	0,41	0,66	0,70	0,70	0,56	0,78	0,60
-80	0,67	0,44	0,37	0,72	0,64	0,54	0,52	0,62	0,59	0,38	0,39	0,41	0,45	0,27	0,59	0,51	0,59	0,47	0,61	0,46
-90	0,66	0,35	0,34	0,68	0,61	0,58	0,54	0,66	0,59	0,47	0,41	0,33	0,28	0,19	0,30	0,31	0,14	0,18	0,21	0,27
casuale	0,66	0,59	0,55	0,73	0,62	0,58	0,45	0,49	0,59	0,44	0,38	0,37	0,39	0,32	0,56	0,62	0,56	0,47	0,58	0,53

f<sub>0</sub>= 1103Hz

Angolo	terzi di ottava[Hz]																			
	100	125	160	200	250	315	400	500	630	800	1000	1250	1600	2000	2500	3150	4000	5000	6300	8000
0	0,71	0,66	0,55	0,57	0,51	0,40	0,31	0,28	0,23	0,21	0,32	0,21	0,32	0,54	0,50	0,58	0,61	0,59	0,46	0,59
-10	0,71	0,65	0,55	0,58	0,51	0,42	0,31	0,28	0,24	0,26	0,34	0,27	0,33	0,43	0,60	0,58	0,63	0,62	0,56	0,53
-20	0,70	0,63	0,55	0,61	0,50	0,46	0,33	0,28	0,25	0,46	0,39	0,34	0,34	0,34	0,65	0,63	0,59	0,68	0,59	0,46
-30	0,68	0,61	0,60	0,64	0,51	0,49	0,37	0,31	0,29	0,59	0,37	0,36	0,33	0,38	0,59	0,66	0,62	0,71	0,64	0,59
-40	0,66	0,60	0,71	0,67	0,52	0,53	0,38	0,36	0,42	0,63	0,39	0,39	0,33	0,52	0,56	0,50	0,62	0,67	0,64	0,65
-50	0,64	0,62	0,77	0,73	0,54	0,62	0,40	0,39	0,57	0,66	0,54	0,43	0,47	0,59	0,65	0,49	0,63	0,64	0,74	0,63
-60	0,63	0,69	0,64	0,83	0,62	0,75	0,46	0,45	0,59	0,63	0,61	0,54	0,60	0,55	0,68	0,49	0,67	0,71	0,85	0,79
-70	0,63	0,73	0,50	0,93	0,79	0,81	0,53	0,46	0,49	0,46	0,49	0,47	0,54	0,49	0,73	0,53	0,67	0,62	0,76	0,65
-80	0,66	0,58	0,42	0,79	0,74	0,65	0,48	0,45	0,54	0,43	0,42	0,44	0,46	0,28	0,49	0,34	0,41	0,58	0,70	0,55
-90	0,66	0,44	0,38	0,71	0,64	0,67	0,44	0,45	0,54	0,51	0,46	0,32	0,29	0,21	0,34	0,33	0,14	0,15	0,29	0,29
casuale	0,67	0,62	0,57	0,71	0,59	0,59	0,41	0,38	0,43	0,50	0,44	0,39	0,41	0,43	0,58	0,51	0,56	0,60	0,63	0,57

f<sub>0</sub>=2207Hz

Angolo	terzi di ottava[Hz]																			
	100	125	160	200	250	315	400	500	630	800	1000	1250	1600	2000	2500	3150	4000	5000	6300	8000
0	0,71	0,65	0,55	0,58	0,50	0,40	0,30	0,28	0,23	0,20	0,17	0,38	0,31	0,35	0,44	0,62	0,50	0,41	0,56	0,41
-10	0,71	0,64	0,54	0,58	0,50	0,42	0,31	0,27	0,24	0,19	0,21	0,42	0,34	0,37	0,59	0,57	0,48	0,41	0,58	0,45
-20	0,70	0,63	0,54	0,60	0,49	0,44	0,33	0,27	0,24	0,20	0,31	0,32	0,33	0,43	0,80	0,53	0,49	0,42	0,63	0,54
-30	0,68	0,61	0,58	0,62	0,49	0,47	0,35	0,30	0,24	0,22	0,33	0,27	0,29	0,58	0,58	0,58	0,50	0,40	0,61	0,51
-40	0,67	0,59	0,67	0,63	0,48	0,49	0,34	0,32	0,27	0,29	0,28	0,30	0,35	0,63	0,60	0,50	0,54	0,51	0,65	0,59
-50	0,65	0,60	0,77	0,65	0,48	0,55	0,33	0,30	0,28	0,40	0,34	0,32	0,55	0,53	0,68	0,47	0,62	0,54	0,58	0,63
-60	0,64	0,64	0,74	0,69	0,51	0,65	0,34	0,30	0,30	0,44	0,39	0,42	0,59	0,52	0,71	0,56	0,66	0,58	0,69	0,69
-70	0,63	0,74	0,61	0,80	0,60	0,82	0,43	0,39	0,40	0,49	0,39	0,40	0,50	0,48	0,73	0,59	0,66	0,59	0,76	0,75
-80	0,65	0,73	0,52	0,85	0,78	0,72	0,77	0,65	0,54	0,46	0,31	0,40	0,53	0,38	0,47	0,30	0,23	0,49	0,57	0,56
-90	0,65	0,63	0,46	0,75	0,69	0,68	0,53	0,45	0,55	0,39	0,29	0,32	0,34	0,28	0,43	0,39	0,13	0,13	0,31	0,35
casuale	0,67	0,65	0,60	0,68	0,55	0,57	0,41	0,36	0,33	0,33	0,31	0,35	0,42	0,46	0,61	0,51	0,48	0,45	0,60	0,56

PRD N=13, np=3, w=0,033m

f<sub>0</sub>=594Hz

Angolo	terzi di ottava[Hz]																			
	100	125	160	200	250	315	400	500	630	800	1000	1250	1600	2000	2500	3150	4000	5000	6300	8000
0	0,74	0,68	0,57	0,59	0,53	0,47	0,52	0,72	0,47	0,24	0,63	0,43	0,47	0,57	0,63	0,65	0,62	0,58	0,62	0,64
-10	0,73	0,66	0,57	0,59	0,52	0,45	0,55	0,77	0,46	0,24	0,51	0,55	0,59	0,74	0,70	0,66	0,65	0,57	0,62	0,58
-20	0,70	0,63	0,64	0,64	0,54	0,54	0,59	0,66	0,44	0,28	0,39	0,48	0,58	0,67	0,73	0,67	0,72	0,60	0,67	0,59
-30	0,67	0,62	0,77	0,74	0,60	0,60	0,53	0,55	0,41	0,30	0,39	0,51	0,52	0,58	0,64	0,66	0,70	0,70	0,68	0,60
-40	0,64	0,68	0,66	0,87	0,70	0,50	0,45	0,51	0,49	0,32	0,43	0,49	0,42	0,53	0,76	0,74	0,70	0,68	0,70	0,51
-50	0,63	0,72	0,47	0,84	0,65	0,40	0,43	0,49	0,52	0,41	0,50	0,48	0,47	0,57	0,66	0,69	0,74	0,66	0,63	0,57
-60	0,66	0,50	0,38	0,56	0,45	0,36	0,43	0,50	0,51	0,45	0,53	0,56	0,58	0,57	0,63	0,54	0,72	0,59	0,69	0,74
-70	0,64	0,34	0,35	0,41	0,37	0,36	0,48	0,49	0,37	0,40	0,54	0,45	0,58	0,57	0,56	0,65	0,73	0,75	0,75	0,71
-80	0,50	0,29	0,33	0,40	0,38	0,38	0,56	0,56	0,38	0,38	0,49	0,33	0,31	0,57	0,67	0,57	0,58	0,55	0,40	0,42
-90	0,43	0,27	0,32	0,45	0,42	0,42	0,59	0,58	0,41	0,55	0,54	0,38	0,29	0,25	0,18	0,23	0,22	0,27	0,13	0,16
casuale	0,63	0,53	0,50	0,61	0,52	0,45	0,51	0,58	0,44	0,36	0,49	0,47	0,48	0,56	0,62	0,60	0,64	0,60	0,59	0,55

$f_0=1188\text{Hz}$

Angolo	terzi di ottava[Hz]																			
	100	125	160	200	250	315	400	500	630	800	1000	1250	1600	2000	2500	3150	4000	5000	6300	8000
0	0,73	0,66	0,55	0,60	0,51	0,42	0,31	0,28	0,43	0,71	0,35	0,21	0,25	0,67	0,61	0,63	0,61	0,59	0,59	0,65
-10	0,72	0,65	0,55	0,60	0,50	0,42	0,30	0,29	0,45	0,70	0,36	0,19	0,25	0,59	0,53	0,63	0,69	0,60	0,59	0,56
-20	0,70	0,63	0,58	0,62	0,50	0,45	0,32	0,34	0,50	0,52	0,38	0,21	0,27	0,62	0,53	0,72	0,63	0,63	0,62	0,53
-30	0,68	0,61	0,68	0,65	0,51	0,49	0,38	0,48	0,50	0,42	0,33	0,29	0,31	0,69	0,49	0,71	0,58	0,62	0,64	0,55
-40	0,66	0,62	0,78	0,68	0,52	0,56	0,48	0,57	0,52	0,39	0,35	0,32	0,44	0,57	0,63	0,59	0,55	0,64	0,68	0,58
-50	0,64	0,69	0,69	0,74	0,55	0,66	0,56	0,56	0,52	0,43	0,46	0,39	0,57	0,71	0,66	0,59	0,53	0,71	0,73	0,63
-60	0,64	0,75	0,54	0,85	0,66	0,71	0,56	0,54	0,50	0,45	0,48	0,54	0,64	0,77	0,70	0,62	0,67	0,81	0,79	0,74
-70	0,68	0,58	0,44	0,76	0,67	0,51	0,46	0,45	0,44	0,36	0,34	0,39	0,52	0,76	0,74	0,60	0,74	0,72	0,80	0,64
-80	0,69	0,41	0,39	0,54	0,39	0,40	0,48	0,47	0,43	0,30	0,31	0,35	0,48	0,53	0,69	0,46	0,59	0,53	0,63	0,47
-90	0,61	0,32	0,35	0,56	0,37	0,42	0,59	0,54	0,42	0,35	0,40	0,38	0,32	0,27	0,37	0,34	0,19	0,19	0,21	0,26
casuale	0,67	0,59	0,56	0,66	0,52	0,51	0,45	0,46	0,47	0,45	0,38	0,33	0,41	0,62	0,59	0,59	0,58	0,60	0,63	0,56

**QRD N=13, np=3, w=0,033m**

$f_0=594\text{Hz}$

Angolo	terzi di ottava[Hz]																			
	100	125	160	200	250	315	400	500	630	800	1000	1250	1600	2000	2500	3150	4000	5000	6300	8000
0	0,74	0,66	0,55	0,56	0,57	0,55	0,46	0,27	0,25	0,22	0,41	0,53	0,82	0,68	0,63	0,50	0,59	0,38	0,53	0,62
-10	0,73	0,66	0,56	0,61	0,63	0,60	0,50	0,30	0,28	0,23	0,38	0,66	0,66	0,69	0,65	0,55	0,63	0,44	0,60	0,62
-20	0,70	0,63	0,65	0,72	0,72	0,66	0,52	0,40	0,35	0,24	0,37	0,75	0,57	0,66	0,59	0,51	0,62	0,55	0,68	0,61
-30	0,67	0,63	0,75	0,84	0,65	0,48	0,47	0,50	0,44	0,24	0,40	0,57	0,55	0,66	0,50	0,51	0,61	0,70	0,71	0,61
-40	0,64	0,70	0,57	0,79	0,53	0,35	0,47	0,49	0,56	0,30	0,43	0,57	0,46	0,73	0,60	0,61	0,67	0,58	0,68	0,58
-50	0,64	0,68	0,42	0,56	0,47	0,33	0,50	0,53	0,62	0,46	0,49	0,61	0,50	0,68	0,66	0,60	0,71	0,56	0,59	0,50
-60	0,67	0,45	0,36	0,42	0,45	0,33	0,52	0,60	0,61	0,61	0,56	0,64	0,65	0,60	0,57	0,60	0,75	0,65	0,74	0,74
-70	0,64	0,33	0,34	0,37	0,46	0,35	0,56	0,60	0,60	0,62	0,45	0,49	0,64	0,56	0,54	0,63	0,59	0,83	0,83	0,63
-80	0,52	0,29	0,33	0,38	0,50	0,37	0,60	0,58	0,61	0,67	0,42	0,38	0,43	0,60	0,51	0,49	0,46	0,56	0,50	0,49
-90	0,47	0,28	0,32	0,40	0,54	0,39	0,61	0,51	0,54	0,51	0,44	0,38	0,29	0,23	0,20	0,24	0,17	0,29	0,14	0,16
casuale	0,64	0,52	0,48	0,57	0,55	0,44	0,52	0,49	0,50	0,42	0,44	0,56	0,54	0,61	0,54	0,53	0,58	0,56	0,60	0,55

$f_0=1188\text{Hz}$

Angolo	terzi di ottava[Hz]																			
	100	125	160	200	250	315	400	500	630	800	1000	1250	1600	2000	2500	3150	4000	5000	6300	8000
0	0,73	0,66	0,54	0,57	0,49	0,40	0,29	0,30	0,67	0,75	0,66	0,44	0,24	0,44	0,53	0,68	0,68	0,51	0,57	0,50
-10	0,73	0,65	0,54	0,58	0,50	0,42	0,30	0,39	0,51	0,60	0,57	0,44	0,39	0,41	0,59	0,69	0,70	0,51	0,62	0,48
-20	0,71	0,63	0,58	0,62	0,52	0,48	0,37	0,50	0,49	0,43	0,43	0,43	0,68	0,47	0,71	0,62	0,68	0,55	0,55	0,50
-30	0,69	0,61	0,69	0,67	0,56	0,60	0,53	0,53	0,46	0,39	0,44	0,45	0,77	0,68	0,59	0,55	0,67	0,64	0,62	0,60
-40	0,66	0,63	0,76	0,74	0,61	0,69	0,60	0,53	0,45	0,34	0,53	0,49	0,66	0,55	0,56	0,54	0,66	0,68	0,72	0,61
-50	0,64	0,72	0,64	0,85	0,70	0,65	0,58	0,50	0,44	0,42	0,64	0,73	0,64	0,36	0,51	0,59	0,69	0,60	0,68	0,61
-60	0,65	0,74	0,51	0,86	0,76	0,54	0,53	0,47	0,44	0,49	0,72	0,57	0,65	0,32	0,47	0,67	0,72	0,59	0,67	0,74
-70	0,70	0,55	0,43	0,62	0,57	0,44	0,47	0,41	0,38	0,40	0,56	0,46	0,52	0,41	0,43	0,60	0,61	0,69	0,80	0,70
-80	0,69	0,40	0,39	0,49	0,42	0,41	0,51	0,45	0,38	0,37	0,46	0,40	0,51	0,52	0,53	0,57	0,60	0,59	0,67	0,50
-90	0,63	0,34	0,36	0,53	0,43	0,45	0,60	0,51	0,39	0,46	0,44	0,40	0,33	0,29	0,33	0,38	0,19	0,20	0,23	0,32
casuale	0,68	0,59	0,54	0,66	0,56	0,51	0,49	0,47	0,45	0,45	0,54	0,48	0,55	0,45	0,52	0,58	0,62	0,56	0,62	0,56

**PRD N=19, np=2, w=0,033m**

f<sub>0</sub>=813Hz

Angolo	terzi di ottava[Hz]																			
	100	125	160	200	250	315	400	500	630	800	1000	1250	1600	2000	2500	3150	4000	5000	6300	8000
0	0,75	0,68	0,56	0,62	0,53	0,52	0,56	0,69	0,57	0,33	0,24	0,58	0,63	0,73	0,82	0,64	0,56	0,47	0,57	0,60
-10	0,74	0,67	0,57	0,63	0,54	0,53	0,56	0,66	0,54	0,34	0,35	0,50	0,50	0,64	0,64	0,65	0,58	0,54	0,59	0,59
-20	0,72	0,64	0,62	0,67	0,61	0,62	0,61	0,58	0,50	0,47	0,44	0,51	0,49	0,53	0,63	0,61	0,53	0,58	0,64	0,57
-30	0,70	0,63	0,74	0,75	0,70	0,72	0,66	0,57	0,50	0,56	0,46	0,53	0,60	0,57	0,61	0,61	0,52	0,55	0,68	0,59
-40	0,67	0,66	0,73	0,84	0,74	0,70	0,65	0,59	0,59	0,56	0,51	0,48	0,72	0,68	0,50	0,57	0,55	0,68	0,64	0,62
-50	0,65	0,74	0,54	0,79	0,69	0,59	0,65	0,63	0,68	0,65	0,63	0,53	0,74	0,66	0,54	0,55	0,61	0,64	0,62	0,61
-60	0,66	0,67	0,42	0,61	0,59	0,51	0,65	0,69	0,63	0,65	0,71	0,66	0,78	0,67	0,61	0,64	0,78	0,72	0,80	0,78
-70	0,69	0,46	0,37	0,47	0,51	0,45	0,60	0,63	0,47	0,51	0,52	0,53	0,58	0,65	0,62	0,66	0,63	0,74	0,79	0,67
-80	0,66	0,35	0,35	0,44	0,51	0,44	0,63	0,56	0,47	0,50	0,41	0,39	0,46	0,62	0,78	0,52	0,63	0,54	0,64	0,48
-90	0,60	0,31	0,33	0,49	0,57	0,49	0,59	0,52	0,48	0,57	0,46	0,42	0,37	0,28	0,27	0,36	0,19	0,24	0,14	0,21
casuale	0,68	0,58	0,52	0,63	0,60	0,56	0,62	0,61	0,54	0,52	0,49	0,51	0,58	0,60	0,59	0,58	0,56	0,58	0,61	0,57

**QRD N=19, np=2, w=0,033m**

f<sub>0</sub>=813Hz

Angolo	terzi di ottava[Hz]																			
	100	125	160	200	250	315	400	500	630	800	1000	1250	1600	2000	2500	3150	4000	5000	6300	8000
0	0,75	0,68	0,56	0,57	0,53	0,44	0,37	0,34	0,33	0,31	0,42	0,41	0,50	0,54	0,51	0,42	0,50	0,60	0,62	0,52
-10	0,74	0,67	0,56	0,60	0,55	0,48	0,37	0,34	0,35	0,33	0,45	0,35	0,54	0,56	0,54	0,39	0,51	0,60	0,63	0,56
-20	0,72	0,64	0,60	0,67	0,60	0,56	0,40	0,37	0,39	0,39	0,48	0,38	0,59	0,70	0,64	0,52	0,55	0,61	0,60	0,53
-30	0,69	0,62	0,72	0,75	0,69	0,65	0,47	0,48	0,46	0,51	0,54	0,66	0,71	0,65	0,67	0,63	0,59	0,59	0,63	0,53
-40	0,66	0,65	0,73	0,85	0,76	0,76	0,57	0,63	0,60	0,53	0,63	0,68	0,77	0,70	0,70	0,60	0,64	0,64	0,64	0,46
-50	0,64	0,73	0,56	0,92	0,76	0,81	0,70	0,68	0,66	0,62	0,55	0,53	0,66	0,53	0,63	0,67	0,68	0,68	0,64	0,55
-60	0,64	0,66	0,43	0,85	0,71	0,72	0,65	0,68	0,66	0,64	0,54	0,52	0,63	0,73	0,66	0,64	0,68	0,65	0,67	0,68
-70	0,68	0,45	0,38	0,68	0,65	0,57	0,53	0,58	0,57	0,56	0,52	0,46	0,56	0,78	0,65	0,77	0,75	0,73	0,80	0,63
-80	0,65	0,35	0,35	0,63	0,63	0,48	0,52	0,56	0,59	0,55	0,55	0,39	0,46	0,61	0,73	0,62	0,60	0,53	0,66	0,46
-90	0,59	0,31	0,33	0,66	0,64	0,47	0,54	0,56	0,65	0,66	0,58	0,42	0,29	0,24	0,27	0,36	0,20	0,23	0,14	0,20
casuale	0,67	0,57	0,52	0,73	0,66	0,60	0,52	0,53	0,54	0,52	0,53	0,48	0,57	0,61	0,60	0,57	0,57	0,59	0,60	0,51

**PRD N=37, np=1, w=0,033m**

f<sub>0</sub>=417Hz

Angolo	terzi di ottava[Hz]																			
	100	125	160	200	250	315	400	500	630	800	1000	1250	1600	2000	2500	3150	4000	5000	6300	8000
0	0,78	0,74	0,65	0,79	0,72	0,67	0,50	0,39	0,29	0,54	0,25	0,39	0,60	0,73	0,74	0,77	0,66	0,60	0,55	0,55
-10	0,78	0,73	0,67	0,79	0,78	0,71	0,59	0,46	0,36	0,52	0,30	0,50	0,64	0,68	0,67	0,74	0,68	0,60	0,56	0,56
-20	0,75	0,71	0,78	0,72	0,84	0,70	0,72	0,61	0,47	0,59	0,39	0,58	0,65	0,52	0,58	0,58	0,56	0,66	0,60	0,62
-30	0,71	0,69	0,75	0,68	0,72	0,68	0,69	0,73	0,61	0,67	0,52	0,55	0,62	0,49	0,64	0,59	0,63	0,65	0,66	0,60
-40	0,66	0,72	0,49	0,67	0,57	0,52	0,59	0,70	0,59	0,59	0,54	0,59	0,72	0,62	0,60	0,61	0,60	0,70	0,65	0,59
-50	0,63	0,69	0,37	0,67	0,50	0,38	0,56	0,62	0,49	0,45	0,55	0,65	0,73	0,60	0,63	0,57	0,44	0,43	0,57	0,44
-60	0,62	0,48	0,32	0,60	0,47	0,34	0,56	0,54	0,43	0,42	0,60	0,73	0,67	0,60	0,69	0,55	0,70	0,68	0,68	0,65
-70	0,63	0,34	0,31	0,48	0,47	0,33	0,59	0,50	0,46	0,48	0,46	0,63	0,68	0,51	0,60	0,64	0,59	0,69	0,71	0,56
-80	0,61	0,30	0,31	0,42	0,48	0,33	0,60	0,50	0,51	0,47	0,35	0,44	0,39	0,54	0,57	0,46	0,35	0,50	0,43	0,45
-90	0,60	0,29	0,30	0,41	0,50	0,35	0,63	0,49	0,57	0,54	0,51	0,46	0,37	0,24	0,15	0,14	0,20	0,22	0,27	0,37
casuale	0,67	0,56	0,49	0,61	0,60	0,49	0,61	0,56	0,49	0,53	0,46	0,56	0,61	0,54	0,58	0,55	0,53	0,57	0,57	0,54



QRD N=37, np=1, w=0,033m

$f_0=417\text{Hz}$

Angolo	terzi di ottava[Hz]																			
	100	125	160	200	250	315	400	500	630	800	1000	1250	1600	2000	2500	3150	4000	5000	6300	8000
0	0,79	0,75	0,68	0,86	0,80	0,83	0,67	0,46	0,35	0,58	0,71	0,77	0,60	0,59	0,67	0,70	0,55	0,60	0,56	0,61
-10	0,78	0,74	0,68	0,79	0,77	0,57	0,67	0,51	0,39	0,64	0,72	0,60	0,60	0,61	0,70	0,70	0,55	0,61	0,61	0,57
-20	0,74	0,70	0,74	0,72	0,73	0,51	0,65	0,60	0,48	0,66	0,67	0,46	0,46	0,63	0,63	0,69	0,62	0,60	0,62	0,55
-30	0,69	0,66	0,77	0,72	0,55	0,48	0,54	0,59	0,56	0,62	0,61	0,47	0,47	0,69	0,62	0,68	0,66	0,57	0,62	0,58
-40	0,65	0,67	0,51	0,72	0,44	0,35	0,42	0,48	0,54	0,54	0,58	0,65	0,54	0,69	0,68	0,57	0,65	0,51	0,55	0,47
-50	0,62	0,69	0,36	0,63	0,41	0,29	0,38	0,38	0,43	0,45	0,61	0,62	0,66	0,67	0,72	0,65	0,68	0,52	0,58	0,55
-60	0,62	0,51	0,32	0,48	0,40	0,28	0,38	0,36	0,39	0,44	0,57	0,59	0,59	0,65	0,69	0,56	0,56	0,55	0,56	0,56
-70	0,65	0,36	0,31	0,38	0,42	0,30	0,43	0,43	0,51	0,53	0,50	0,48	0,61	0,55	0,59	0,71	0,61	0,74	0,71	0,53
-80	0,64	0,31	0,30	0,35	0,44	0,31	0,47	0,52	0,58	0,50	0,47	0,43	0,44	0,58	0,63	0,49	0,40	0,47	0,42	0,39
-90	0,63	0,31	0,30	0,36	0,46	0,33	0,50	0,60	0,63	0,53	0,52	0,46	0,31	0,23	0,16	0,14	0,21	0,23	0,25	0,30
casuale	0,68	0,56	0,49	0,59	0,53	0,40	0,50	0,49	0,49	0,55	0,59	0,54	0,52	0,59	0,61	0,58	0,55	0,54	0,55	0,51

# BIBLIOGRAFIA

- Audio Engineering Society Inc. “*AES information document for room acoustics and sound reinforcement systems-Characterization and measurement of surface scattering uniformity*”. AES-4id-2001(r2007).
- Angus J. A. S., Marvin A. C., Clegg J., “*The effect of acoustic diffusers on room modes*”. Proc. Inst. Acoust. 1993; 15: 237–46.
- Angus J. A. S., Marvin A. C., Clegg J., Dawson J. F., Knobloch A., “*The effect of acoustic diffusers on room mode decay*”. J. Audio Eng. Soc., 1995.
- Angus J. A. S., “*Large area diffusers using modulated phase reflection gratings*”. J. Audio Eng. Soc. 1995.
- Angus J. A. S., “*Using modulated phase reflection gratings to achieve specific diffusion characteristic*”. J. Audio Eng. Soc. 1995.
- Angus J. A. S., “*Using grating modulation to achieve wideband large area diffusers*”. Appl. Acoust. 2000; 60: 143–165.
- Beenson M. J., Murphy D. T., “*RoomWeaver: a digital waveguide mesh based room acoustics research tool*”. In Proc. 7th Int. Conf. on Digital Audio Effect (DAFX-04), pp. 268-273, Naples, Italy, 2004.
- Bilbao S., “*Wave and scattering methods for the numerical integration of partial differential equations*”. PhD thesis, Stanford University, 2001, <http://ccrma.stanford.edu/~bilbao/>.
- Cox T. J., Lam Y. W., “*Evaluation of methods for predicting the scattering from simple rigid panels*”. Appl. Acoust. 1993; 40: 123-140.
- Cox T. J., Lam Y. W., “*Prediction and evaluation of the scattering from quadratic residue diffusers*”. J. Acoust. Soc. Am. 1994; 95: 297-305.
- Cox T. J., D’Antonio P., “*Room Optimizer: A computer Program to Optimize the Placement of Listener, Loudspeakers, Acoustical surface treatment, and room Dimensions in Critical Listening Rooms*”. In: Proc. 103 AES Convention. Preprint 4555 (H-6), New York, 1997.
- Cox T. J., D’Antonio P., “*Optimized planar and curved diffusers*”. J. Audio Eng. Soc. 1999.
- Cox T. J., D’Antonio P., “*Acoustic phase gratings for reduced specular reflection*”. App. Acoust. 2000; 60: 167-186.
- Cox T. J., D’Antonio P., “*Acoustic Absorbers and Diffusers*”. Spon, London, 2004.
- Cox T. J., “*Predicting the scattering from reflectors and diffusers using 2D boundary element methods*”. J. Acoust. Soc. Am. 1994; 96: 874-878.
- Cox T. J., “*The optimization of profiled diffusers*”. J. Acoust. Soc. Am. 1995; 97: 2928-41.

- Cox T. J., “*Diffusion parameters for baffled diffusers*”. J. Audio Eng. Soc. 1995.
- Cox T. J., “*Designing curved diffusers for performance spaces*”. J. Audio Eng. Soc. 1996; 44: 354-364.
- Cox T. J., “*Acoustic phase gratings for reduced specular reflection*”. Appl. Acoust. 2000; 60: 167-186.
- Cox T. J., “*Acoustic diffusers: the good, the bad and the ugly*”. Proceeding of the Institute of Acoustics.
- D’Antonio P., “*Performance acoustics: the importance of diffusing surfaces and the variable acoustics modular performance shell-VAMPS*”. J. Audio Eng. Soc. 1991.
- D’Antonio P., “*The QRD diffractal: a new one-and two-dimensional fractal sound diffuser*”. J. Audio Eng. Soc. 1992; 40: 117-29.
- D’Antonio P., Konnert J.H., “*The reflection phase grating diffusor: design theory and application*”. J.A.E.S. 32, No. 4, April 1984, pp. 228-236.
- D’Antonio P., Cox T. J., “*Two decades of sound diffusor design and development*”. Part. 1: applications and design. J. Audio Eng. Soc. 1996; 46: 955–76.
- D’Antonio P., Cox T. J., “*Diffusor application in rooms*”. Appl. Acoust. 2000; 60: 113-142.
- Davenport Harold, “*Aritmetica superiore*”. Zanichelli, 1994.
- Embrechts J. J., Archambeau D., Stan G. B., “*Determination of the scattering coefficient of random rough diffusing surfaces for room acoustics applications*”. Acta-acustica-ACUSTICA 2001; 87: 482-494.
- Erkut C., Karjalainen M., “*Finite difference method vs. digital waveguide method in string instrument modeling and synthesis*”. In Proc. Int. Symposium on Musical Acoustics (ISMA-02), Mexico City, 2002, <http://www.acoustics.hut.fi/~cerkut/publications.html>.
- Everest F. A., “*The master handbook of acoustics*”. Blue Ridge Summit, PA: Tab Books Inc.,
- Walker R., “*The design and application of modular, acoustic diffusing elements*”. BBC Research Department Report No. BBC RD 1990/15.
- Farina A., “*A new method for measuring the scattering coefficient and the diffusion coefficient of panels*”. Acta-acustica-ACUSTICA, 2000; 86: 928-942.
- Feldman E., “*A reflection grating that nullifies the specular reflection: a cone of silence*”. J. Acoust. Soc. Am. 1995; 98: 623-34.
- Fontana F., Rocchesso D., “*A new formulation of the 2D-waveguide mesh for percussion instruments*”. In Proc. XI Colloquium on Musical Informatics, pp. 27-30, Bologna, Italy, 1995.

- Fujiwara K., Miyajima T., “*Absorption characteristics of a practically constructed Schroeder diffuser of quadratic-residue type*”. *App. Acoust.* 1992; 35:149-152.
- Fujiwara K., “*A study of the sound absorption of a quadratic-residue type diffuser*”. *Acustica* 1995; 81: 370-8.
- Fujiwara K., Nakai K., Torihara H., “*Visualization of the sound field around a Schroeder diffuser*”. *Appl. Acoust.* 2000; 60: 225-235.
- Hargreaves T. J., Cox T. J., Lam Y. W., “*Surface diffusion coefficients for room acoustics: free-field measures*”. *J. Acoust. Soc. Am.* 2000.
- Hargreaves J. A., Cox T. J., “*A transient boundary element method model of Schroeder diffuser scattering using well mouth impedance*”. *J. Acoust. Soc. Am.* 2008.
- ISO 17497-1, 2004(E).
- Järvinen A., Savioja L., Möller H., Ikonen V., Ruusuvuori A., “*Design of a reference listening room-a case study*”. *J. Audio Eng. Soc.*, 1997.
- Jeon J. Y., Lee S. C., Voländer M., “*Development of scattering surfaces for concert halls*”. *Appl. Acoust.* 2004; 65: 341-355.
- Karjalainen M., “*1-D digital waveguide modeling for improved sound synthesis*”. In *Proc. Int. Conf. Acoust., Speech, and Signal Process.*, Orlando, Florida, USA, Vol. 2, pp. 1869-1872, IEEE Press, 2002.
- Karjalainen M., Erkut C., “*Digital waveguide vs. finite difference schemes: equivalence and mixed modeling*”. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, 2004, pp. 978-989.
- Kinsler E. L., Frey R. A., Coppens B. A., Sanders V. J., “*Fundamentals of acoustics*”. John Wiley & Sons, Inc., 2000.
- Kleiner M., Gustafsson H., Backman J., “*Measurement of directional scattering coefficients using near-field acoustic holography and spatial transformation of sound fields*”. *J. Audio Eng. Soc.* 1997; 45: 331-46.
- Kuttruff H., “*Room Acoustics*”. Applied Science, London, 1973, pp. 192-199.
- Laird J., Masri P., Canagarajah C. N., “*Efficient and accurate synthesis of circular membranes using digital waveguides*”. *Proceedings IEEE*, 1998.
- Lam Y. W., “*A boundary integral formulation for the prediction of acoustic scattering from periodic structures*”. *J. Acoust. Soc. Am.* 1999; 105: 762-769.
- Lee K., Smith J. O., “*Implementation of a highly diffusing 2-D digital waveguide mesh with a quadratic residue diffuser*”. In *Proc. ICMC2004*, Miami, Florida, 2004.

- Mommertz E., “*Determination of scattering coefficients from the reflection directivity of architectural surfaces*”. *App. Acoust.* 2000; 60: 201-203.
- Mommertz E., Vorländer M., “*Measurement of scattering coefficient of surfaces in the reverberation chamber and in the free field*”. In proceeding of the 15th ICA II 1995; pp. 577-580.
- Monazzam M. R., Lam Y. W., “*Performance of profiled single noise barriers covered with quadratic residue diffusers*”. *Appl. Acoust.* 2005; 66: 709-730.
- Murphy D. T., “*Digital waveguide mesh topologies in room acoustics*”. PhD Thesis, 2000.
- Murphy D. T., Campos G., Howard D. M., “*Surround-sound reverberation using digital waveguide mesh modeling techniques*”. AES 19th International Conference, 2001.
- Murphy D. T., Howard D. M., “*Modeling and directionally encoding the acoustics of a room*”. *Electron. Lett.*, Vol. 34, No. 9, pp. 864-865, 1998.
- Murphy D. T., Howard D. M., “*The waveverb multichannel room acoustic modeling system*”. Proceeding of the International Computer Music Conference, pp. 472-475, Hong Kong, 1999.
- Murphy D. T., Howard D. M., “*2-D digital waveguide mesh topologies in room acoustics modeling*”. In Proc. DAFX-00, pp. 211-216, Verona, Italy, 2000.
- Murphy D. T., Beeson M. J., “*Modeling spatial sound occlusion and diffraction effects using the digital waveguide mesh*”. In Proc. AES 24th Conf. Multichannel Audio, Banff, AB, Canada, 2003, pp. 207-216.
- Murphy D. T., Beeson M. J., “*The KW-Boundary hybrid digital waveguide mesh for room acoustics applications*”. *IEEE Trans. Speech and Audio Processing*, In Press 2006.
- Murphy D. T., Beeson M. J., Shelley S., Southern A., Moore A., “*RenderAIR-room acoustics simulation using a hybrid digital waveguide mesh approach*”. Proc. Of the AES 124th Convention, preprint 7429, Amsterdam, The Netherlands, 2008.
- Nobile M. A., Hayek S. I., “*Acoustic propagation over an impedance plane*”. *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 78, 1985.
- Okoniewski M., Okoniewska E., Stuchly M. A., “*Three-dimensional subgridding algorithm for FDTD*”. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 45, No. 3, 1997.
- “RPG research <http://www.rpginc.com/research//index.htm>”, Copyright 2000, RPG Diffusor Systems, Inc.

- Savioja L., Välimäki V., “*Improved discrete-time modeling of multi-dimensional wave propagation using the interpolated digital waveguide mesh*”. Proceedings IEEE, 1997.
- Savioja L., Välimäki V., “*Reduction of the dispersion error in the triangular digital waveguide mesh using frequency warping*”. IEEE Signal Processing Letters, Vol. 6, No. 3, pp. 58-60, 1999.
- Savioja L., Välimäki V., “*Reducing the dispersion error in the digital waveguide mesh using interpolation and frequency-warping techniques*”. IEEE Trans. Speech and Audio Process., Vol. 8, No. 2, pp. 184-194, 2000.
- Savioja L., Välimäki V., “*Interpolated 3-D digital waveguide mesh with frequency warping*”. In Proc. Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing, Salt Lake City, 2001.
- Savioja L., Välimäki V., “*Interpolated rectangular 3-D digital waveguide mesh algorithms with frequency warping*”. IEEE Trans. Speech Audio Process., Vol. 11, No. 6, pp. 783-790, 2003.
- Savioja L., Rinne T., Takala T., “*Simulation of room acoustics with a 3-D finite difference mesh*”. In Proc. Int. Computer Music Conf., pp. 463-466, Aarhus, Denmark, 1994.
- Savioja L., Backman J., Järvinen A., Takala T., “*Waveguide mesh method for low-frequency simulation of room acoustics.*” In Proc. 15th Int. Congr. Acoust. (ICA '95), Vol. 2, pp. 637-640, Trondheim, Norway, 1995.
- Schroeder M. R., “*Diffuse sound reflection by maximum-length sequences*”. J. Acoust. Soc. Am. 1975; 57: 149-150.
- Schroeder M. R., “*Binaural dissimilarity and optimum ceilings for concert halls: more lateral sound diffusion*”. J. Acoust. Soc. Am. 1979; 65: 958-63.
- Schroeder M. R., “*Number theory in science and communication*”. Springer Series in Information Sciences, Vol. 7. Springer-Verlag, Berlin 1984.
- Schroeder M. R., “*Phase grating with suppressed specular reflection*”. Acustica 1995; 81: 364-9.
- Shelley S., “*Diffuse boundary modeling in the digital waveguide mesh*”. PhD Thesis, 2007.
- Smith J. O., “*Physical modeling using digital waveguides*”. Computer Music Journal, Vol. 16, No. 4, pp. 74-87, 1992.
- Smith J. O., “*On the equivalence of the digital waveguide and finite difference time domain schemes*”. CCRMA, Music Department, Stanford University, 2004.

- Southern A., Murphy D., “*Spatial encoding for digital waveguide mesh room modeling applications*”. AES 28th International Conference, Piteå, Sweden, 2006.
- Southern A., Murphy D., “*Methods for 2nd order spherical harmonic spatial encoding in digital waveguide mesh virtual acoustic simulations*”. In Proc. IEEE Workshop Applicat. Signal Process. to Audio Acoust., New Paltz, NY, 2007, pp. 203-206.
- Strikwerda C. J., “*Finite difference schemes and partial differential equations*”. SIAM, 2004.
- Terai T., “*On calculation of sound fields around three dimensional objects by integral equation methods*”. J. Sound Vib. 1980; 69: 71-100.
- Van Duyne S. A., Smith J. O., “*Physical modeling with the 2-D digital waveguide mesh*”. In Proc. Int. Computer Music Conf., pp. 40-47, Tokyo, Japan, 1993.
- Van Duyne S. A., Smith J. O., “*The 2-D digital waveguide mesh*”. In Proc. IEEE Workshop on Application of Signal Processing to Audio and Acoustics, New Paltz, NY, 1993.
- Van Duyne S. A., Smith J. O., “*The tetrahedral digital waveguide mesh*”. In Proc. IEEE Workshop on the Application of Signal Processing to Audio and Acoustics, pp. 1-4, Mohonk, 1995.
- Van Duyne S. A., Smith J. O., “*The 3D tetrahedral digital waveguide mesh with musical applications*”. In Proc. Int. Computer Music Conf., pp. 9-16, Hong Kong, 1996.
- Vorländer M., Mommertz E., “*Definition and measurement of random-incidence scattering coefficients*”. Appl. Acoust. 2000; 60: 187-199.
- Vorländer M., “*Auralization-fundamentals of acoustics, modeling, simulation, algorithms and acoustic virtual reality*”. New York: Springer-Verlag, 2008.
- Xiaotian Zhu, Zhemin Zhu, Jianchun Cheng, “*Using optimized surface modification to improve low frequency response in a room*”. Appl. Acoust. 2004; 65: 841-860.