

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI PALERMO

CENTRO INTERDIPARTIMENTALE
DI RICERCHE EDUCATIVE

sugli Stati Coerenti

Fabio F. G. Calabrese

Tesi di dottorato in
*Storia e Didattica delle Matematiche, della Fisica
e della Chimica - SSD: FIS08*
XXII Ciclo, 2008-2010
Coordinatore: Prof. F. Spagnolo

15 Febbraio 2011

Tutor: Prof. A. Brigaglia
Co-Tutor: Prof. F. Bagarello

Indice

Indice	i
Dedica	iv
Prefazione e ringraziamenti	v
1 Introduzione	1
1.1 La storia degli stati coerenti in sintesi	2
1.2 Struttura della tesi	5
2 La letteratura	7
2.1 Il manuale di Klauder e Sudarshan (1968) . . .	9
2.2 La raccolta e rassegna di Klauder e Skagerstam (1985)	11
2.2.1 L'articolo di rassegna	13
2.2.2 La raccolta di articoli	13
2.3 Il manuale di Perelomov (1986)	15
2.4 L'articolo di rassegna di Zhang, Feng e Gilmore (1990)	16
2.5 Gli atti del simposio di Oak Ridge (1994) . . .	17
2.6 L'articolo di rassegna di Ali, Antoine, Gazeau e Mueller (1995)	18
2.7 L'articolo storico di Nieto (1997)	19

2.8	Il manuale di Ali, Antoine e Gazeau (2000) . . .	20
2.9	L'articolo storico di Dodonov (2002)	22
2.10	Il manuale di Gazeau (2009)	22
3	La storia degli stati coerenti canonici	25
3.1	Schrödinger, 1926	25
3.2	L' "età di mezzo" e Von Neumann	32
3.3	Klauder, 1960-'63	35
3.4	Glauber e Sudarshan, 1963	41
3.4.1	La controversia del Nobel	49
4	Intervista ad Ali e Gazeau	52
4.1	Introduzione. Il contesto	52
4.2	Terminologia della trascrizione	53
4.3	Trascrizione dell'intervista	54
	Bibliografia dell'intervista	102
5	La/le comunità	105
5.1	Analisi della raccolta di Klauder e Skagerstam	106
5.2	Considerazioni generali	112
A	Feng: Resoconto del Simposio di Oak Ridge	116
B	Cenni introduttivi alla meccanica quantistica	121
B.1	Il problema della quantizzazione	121
B.2	Evoluzione e misura	125
B.3	L'oscillatore armonico quantistico e i Bosoni .	126
C	Gli stati coerenti canonici	129
C.1	Squeezed States	133
C.2	Wavelets	134
D	Struttura della bibliografia generale	138

Bibliografia generale

139

Dedica

Should authors feel compelled to justify the writing of yet another book? In an overpopulated world, should parents feel compelled to justify bringing forth yet another child? Perhaps not! But an act of creation is also an act of love, and a love story can always be happily shared. [...]

S. T. Ali, in [32]

Prefazione e ringraziamenti

Questa tesi di dottorato nasce, su suggerimento del Prof. Bagarello, come una ricerca sulla storia degli stati coerenti. La proposta aveva un suo doppio fondamento: da un canto, egli poteva rendermi partecipe delle conoscenze da lui accumulate nell'arco di svariati anni di ricerca in questo settore, e, d'altro canto, poteva mettermi in contatto con altri ricercatori che, come lui, hanno fatto la storia di questo settore.

Sono così stato introdotto alle idee di base di quest'affascinante e polivalente concetto: uno strumento che è nato agli albori della meccanica quantistica stessa, rinato dopo una quiescenza di trentacinque anni nel contesto dell'ottica quantistica e che da lì si è diffuso in quasi ogni campo della fisica teorica e sperimentale. Il doppio carattere trasversale e pervasivo di questo concetto ha ben presto comportato un espandersi incredibilmente proficuo anche alla fisica matematica, all'analisi funzionale pura e applicata, e altri campi continuano ancora oggi a sorgere davanti ai nostri occhi...

Una sintesi estrema che permetta di avere una prima idea di quanto vi è di unitario in questo concetto può rappresentarsi tramite l'immagine di una medaglia. In una faccia, quella della fisica, vi è l'esigenza evocata dal principio di corrispondenza: come raccordare due teorie così strutturalmente in-

compatibili come la meccanica quantistica a quella classica? Gli stati coerenti sono una possibile risposta a questa domanda: sono, infatti, gli stati quantistici che maggiormente si avvicinano al comportamento classico.

L'altra faccia della medaglia è quella matematica: da questo lato, invece, si vede l'utilità di avere un sistema di generatori di uno spazio funzionale, un sistema che, pur non essendo minimale, gode di determinate proprietà che nessuna base può soddisfare. Portando a pieno compimento questo modo di pensare, in teoria dei segnali addirittura non si considera più di avere perso la minimalità, quanto di avere *guadagnato la ridondanza*. In effetti, la trasmissione dei segnali non essendo mai perfetta, la perdita di un dato non deve compromettere la ricostruzione del segnale: la minimalità è in questo campo un lusso che non ci si può permettere.

Vale la pena di conoscere la storia di un concetto così rilevante, certo, ma è già stata scritta? A mia conoscenza, lo vedremo diffusamente, la risposta è quasi completamente negativa: esiste una ricca letteratura secondaria di ricerca, ma esistono solo pochi e parziali contributi d'interesse storico.

In realtà, mi è stato chiaro fin da subito, la sola storia delle idee non bastava ad appagare il mio interesse: la sentivo certamente come l'aspetto centrale, ma pur sempre un punto di vista soltanto, di questa poliedrica realtà. Ho quindi accolto con gioia la proposta del Prof. Russo di affrontare aspetti di natura sociale: capire com'è costituita la comunità di ricerca, dove pubblica, ecc.

Ciò che forse il Prof. Bagarello non prevedeva, sottoponendomi questa sua proposta, è che l'argomento fosse per me così stimolante da farmi sorgere non solamente il desiderio di orientarmi nel suo sviluppo storico, ma anche la necessità di condividere con altri la meraviglia e il piacere di contemplare un tale quadro concettuale.

Sono così giunto a esporre quello che è il secondo carattere, forse il più profondo, del mio lavoro: il racconto, l'introduzione, la divulgazione dei fondamenti concettuali di tale struttura, alleggeriti da quell'apparato tecnico che li rende così difficilmente avvicinabili. La speranza, in particolare, è che la delineazione del quadro epistemologico favorisca l'apertura di questo mondo alla didattica. Già, perché se, purtroppo, il punto di vista storico è quasi assente, quello didattico, come vedremo, è sviluppato solamente in modo parziale.

Quali fonti sono state considerate in questa ricerca? La letteratura secondaria prima di tutto; quella primaria oculatamente, limitandosi agli articoli-chiave di questa sterminata famiglia. A fianco a questi strumenti, chiudendo il cerchio di questa prefazione, il Prof. Bagarello mi ha permesso di incontrare due ricercatori di primaria importanza in questo campo: il Prof. Jean-Pierre Gazeau, da Parigi, e il Prof. Syed Twareque Ali, da Montréal. Entrambi si sono mostrati entusiasti di partecipare a un'intervista sul ruolo che hanno svolto nello sviluppo degli stati coerenti: questa intervista è presente nel CD allegato, la sua trascrizione è presente in appendice, ed è a sé stante una fonte che permea di sé l'intera tesi. A questi due professori va la mia più viva gratitudine per la loro disponibilità e amabilità.

Questi ricercatori, con il Prof. Antoine e il Prof. Bagarello stesso, sono oggi esponenti preminenti di quella comunità che si è assunta il compito di sviluppare l'ossatura di quest'organismo, quella comunità che ha avuto come guide Schrödinger, Klauder, Glauber, Perelomov.

Eccomi quindi pervenire in modo naturale ai ringraziamenti: al Prof. Bagarello, prima di tutto, che mi ha accolto permettendomi di sviluppare un tipo di ricerca, quello storico, che non pratica in prima persona, ma cui guarda con quel-

la ampia, limpida e determinata curiosità scientifica che lo contraddistingue. Al Prof. Brigaglia, storico della matematica e mio tutor, per la sua disponibilità, senza la quale tutto questo sarebbe stato impossibile. La mia amicizia affettuosa va anche al Prof. F. Spagnolo, padre e anima appassionata di questo dottorato, che è una sfida alla settorializzazione del sapere. Un ringraziamento va anche alla Prof.ssa Sperandeo per l'attività preliminare che ho svolto sotto la sua direzione, attività che si è rivelata utile nel seguito.

Il mio amore e le mie conoscenze di storia della fisica le devo al Prof. Russo, che le ha alimentate durante il corso di laurea e il percorso di dottorato. Il Prof. Russo è una persona la cui serietà e amabilità gli hanno valso la stima di tutti coloro che lo conoscono.

Andando a ritroso nel tempo dedico un caloroso saluto e ringraziamento al Prof. G. M. Palma il quale, da relatore della mia tesi di laurea, ha grandemente arricchito il mio orizzonte in meccanica quantistica, con quell'autorevolezza scientifica e umana simpatia che gli sono propri.

La mia gratitudine, infine, va al Prof. Trapani che con certissima pazienza mi ha formato alla fisica-matematica, facendomi fra l'altro gustare appieno la teoria degli operatori in spazi di Hilbert, un mio costante riferimento successivo. Devo anche al Prof. Trapani un mio soggiorno di studio di alcuni mesi a Louvain-la-Neuve nel 1997 per studiare, sotto la direzione del Prof. Antoine, algebre di operatori. Sì, lo stesso Prof. Antoine che ha dato contributi così rilevanti alla teoria degli stati coerenti. E lo stesso Prof. Antoine cui vanno anche i miei più calorosi ringraziamenti per essersi assunto il laborioso compito di rivedere e integrare l'intervista e, inoltre, per avermi fornito preziose indicazioni storiche e bibliografiche. Fu presso il gruppo di ricerca da lui coordinato che nel '97 incontrai per la prima volta il Prof. Gazeau, il quale mi

diede le sue dispense di corso sugli stati coerenti dicendomi:
On ne sait jamais... - Già, nella vita non si sa davvero mai.

Palermo, Gennaio 2011

Fabio F. G. Calabrese

Capitolo 1

Introduzione

Questo capitolo nasce con l'obiettivo di fornire un quadro orientativo, una mappa, che consenta - fra l'altro - una lettura non sistematica, bensì, secondo lo spirito dei tempi, rapida e selettiva.

Daremo quindi per cominciare una sintesi della storia degli stati coerenti, seguita da uno schema di compendio del contenuto della tesi.

Ho già avuto modo di anticipare nella prefazione il mio desiderio di rendere questo lavoro fruibile a lettori non specialisti del settore; data la strutturale doppia natura, fisica e matematica, degli stati coerenti, questo, fra l'altro, ha comportato la necessità di rivolgermi a lettori che possono provenire da uno dei due mondi esclusivamente: per entrambi può essere fruttuoso un confronto con i due versanti della teoria e della storia degli stati coerenti! Da ciò è sorta la necessità di prevedere un abbecedario che permettesse di leg-

gere quanto non fosse familiare alla propria formazione: a tal esigenza tentano di rispondere alcune delle appendici. Per il lettore che non possiede una preliminare conoscenza degli argomenti trattati, può già essere consigliabile darvi almeno una rapida scorsa.

1.1 La storia degli stati coerenti in sintesi

Gli stati coerenti furono introdotti da Schrödinger nel 1926 per rispondere all'obiezione di Lorentz che le funzioni d'onda da lui definite non mostrano un comportamento classico. Schrödinger ha quindi ottenuto per l'oscillatore armonico alcuni stati gaussiani aventi stessa ampiezza dello stato fondamentale e con valori di aspettazione di posizione e momento che oscillano classicamente [6]. Una sottoclasse di tali stati è stata poi considerata nel 1932 da von Neumann per investigare il processo di misura quantistica di posizione e momento [27]. Tali ricerche non sembrano avere avuto seguito fino ai primi anni '60, quando si è riaperto l'interesse in questa direzione [9], [11], [12], interesse finalizzato a inquadrare il problema generale della quantizzazione. In questo contesto Glauber ha introdotto il termine *Stati Coerenti* per studiare la questione della coerenza dell'onda elettromagnetica del maser [14]. Sudarshan [17] e ancora Glauber [15], [16], hanno poi mostrato che tali stati sono uno strumento adeguato a descrivere quantisticamente il campo elettromagnetico, in

un modo tale che permetta di utilizzare le equazioni classiche del campo¹. In tali stati le funzioni di correlazione del campo quantistico si fattorizzano come in ottica classica. Da questo studio è sorto l'ampio ramo di studio teorico e applicativo degli stati coerenti in ottica quantistica.

Visti i grandi successi ottenuti dalla teoria degli stati coerenti in ottica quantistica, il passo successivo, chiaro già abbastanza presto, è stato di trovare i corrispondenti stati coerenti per sistemi fisici diversi dall'oscillatore armonico. Ciò ha comportato una ricerca sulla struttura degli stessi e sulle possibili generalizzazioni. In questo quadro più generale, gli stati coerenti fin qui considerati vengono adesso indicati come *stati coerenti canonici* o *stati coerenti standard*. Preferiremo la prima dizione nel corso di tutto lo scritto.

Partendo dalle proprietà note sono quindi sorte diverse linee di ricerca di fisica-matematica le quali privilegiano l'una o l'altra di queste proprietà, a detrimento delle altre. La corrente principale, per tutti gli anni '70, è senza dubbio stata l'ampia famiglia di generalizzazioni gruppali. Si è cioè considerato il gruppo delle trasformazioni che generano gli stati coerenti canonici, il gruppo di Weyl-Heisenberg, e si è generalizzato nelle più svariate direzioni. Da questo punto di vista la teoria degli stati coerenti è stata sviluppata principalmente da Gilmore [21] e Perelomov [20] nei primi anni '70.

¹Si tenga presente che la procedura canonica per studiare il campo elettromagnetico consiste nel considerarlo racchiuso in una scatola, condizione in cui ogni modo del campo si comporta come un oscillatore armonico.

Negli anni successivi la corrente dominante delle generalizzazioni gruppali ha mantenuto pieno valore, ad esempio con la problematica delle rappresentazioni di gruppi che hanno la proprietà di essere a quadrato integrabile su dati spazi omogenei. A fianco a questo, però, si sono rese disponibili altre possibilità. Innanzi tutto, in ottica quantistica è sorto l'ampio campo degli stati *squeezed*, che generalizzano gli stati coerenti in quanto stati a minima incertezza. In seguito, in ambito matematico, dalla metà degli anni '80 si dirama il campo delle *wavelets*, le quali sono particolari stati coerenti continui². Questa ramificazione ha causato un forte spostamento d'interessi dalla fisica teorica e dalla fisica matematica, alla matematica applicata dell'analisi dei segnali. Corrispondentemente le applicazioni si ampliano oltre l'orizzonte consolidato dell'ampia famiglia della fisica quantistica, al mondo delle applicazioni ingegneristiche. Sia la teoria degli *squeezed states* che quella delle *wavelets* si sono poi affrancate dalla comune madre, in particolare, quest'ultima, con lo sviluppo dell'analisi di multirisoluzione.

Infine, negli ultimi due decenni, si sono rese disponibili generalizzazioni di natura sostanzialmente diversa, precisamente l'approccio tramite spazi di Hilbert a “reproducing kernel” e le “positive operator-valued measures”, oltre alle interpretazioni di tipo probabilistico.

²Precisiamo che ci stiamo riferendo qui alle *wavelets* continue. Queste appartengono alla famiglia delle generalizzazioni gruppali degli stati coerenti, nel senso che sono generate dal gruppo affine sulla retta; ma non generalizzano gli stati coerenti *canonici*, i quali sono generati da un diverso gruppo, quello di Weyl-Heisenberg.

Per quanto riguarda gli attori principali se Klauder è indubbiamente la figura più carismatica di questo campo, avendo dato contributi fondamentali per quasi quattro decenni (!), se Perelomov rimarrà un fondamentale punto di riferimento per la grande e feconda corrente delle generalizzazioni grup-pali, non si può fare a meno di citare il gruppo formato da Ali, Antoine e Gazeau come centrale nello sviluppo ulteriore degli stati coerenti, in questi ultimi 20-25 anni.

1.2 Struttura della tesi

Dopo avere fornito con questa introduzione un primo approccio al campo degli stati coerenti, affronteremo nel prossimo capitolo lo studio della letteratura secondaria disponibile nel settore. Il duplice intento cui è volta questa panoramica è di presentare le fonti secondarie d'interesse storico, ma anche fornire un quadro orientativo per il lettore interessato ad accostare questo ampio e affascinante soggetto, con un occhio particolare all'utilizzabilità didattica del materiale considerato.

Nel capitolo successivo presenteremo i risultati della ricerca storica sugli stati coerenti canonici. Tutte le successive molteplici evoluzioni di questo concetto si radicano nel terreno storico che sarà delineato in questo capitolo.

Il capitolo successivo è dedicato all'intervista ai Proff. Gazeau e Ali: descrizione del contesto e trascrizione integrale. L'inter-

vista in formato audio e video è anche presente integralmente nel CD allegato.

Seguiranno nel capitolo 5 alcune considerazioni generali a carattere più sociologico sulle comunità dei ricercatori in tale campo.

Una prima appendice contiene un documento rilevante di cui non si ha notizia di pubblicazione: un resoconto del Prof. Feng sull'unico convegno che si sia rivolto solo agli stati coerenti, quello di Oak Ridge, nel '93.

Nelle altre appendici si troverà prima di tutto un richiamo ai principi della meccanica quantistica non relativistica, pensato essenzialmente per i matematici e un'appendice sugli stati coerenti canonici volta a introdurre al cuore del tema gli studiosi non specialisti del settore. In chiusura a quest'ultima appendice sarà data una semplice definizione di stati *squeezed* e una molto più dettagliata descrizione delle *wavelets*, destinata a dare un'idea di questi campi così spesso citati nella tesi.

Capitolo 2

La letteratura

Come abbiamo già avuto modo di accennare, la letteratura primaria è sterminata e, solo considerandone gli aspetti fisici, spazia dalla fisica molecolare, atomica, nucleare e dello stato solido, all'elettrodinamica quantistica, agli integrali funzionali (“Path integrals”) e, nello spirito che caratterizza gli stati coerenti di connettere classico-macroscopico con quantistico, alla fisica statistica, ai problemi di quantizzazione e alla problematica del limite termodinamico. Di questo materiale documentario selezioneremo soltanto gli articoli-chiave d'interesse generale per questo settore.

Per quanto concerne la letteratura secondaria, questa è quasi solamente composta di manuali e rassegne disciplinari, i cosiddetti articoli di *review*. In questi casi gli autori mirano, naturalmente, alla raccolta e alla ristrutturazione delle conoscenze acquisite, ai fini di unificare il quadro teorico e a fini didattici.

A questo proposito è bene chiarire subito che quando si parla di aspetti didattici, nel panorama attuale degli stati coerenti, s'intendono anche qui due cose: o la didattica degli stati coerenti canonici o quella delle loro generalizzazioni. La prima è molto ampia, moltissimi libri di ottica quantistica o fisica matematica la trattano. La seconda è estremamente tecnica e rivolta generalmente ad ambiti di dottorato se non oltre. Ciò che manca quasi completamente è il termine intermedio: la didattica a livello di laurea specialistica che introduca alle varie generalizzazioni degli stati coerenti.

Dal punto di vista storico, invece, sia i libri sia gli articoli di rassegna presentano due aspetti: il primo aspetto concerne l'esame cronologico dei contributi relativi ad una linea o un aspetto della ricerca, la rassegna in senso stretto, questa rappresenta la fonte secondaria vera e propria. L'altro aspetto, invece, è relativo all'esposizione di un quadro concettuale che ingloba, in genere ampliandolo, il quadro concettuale cui si è fatto riferimento nella rassegna: questo fa assurgere *ipso facto* lo scritto in esame a una fonte-chiave di tipo primario.

Vi è un'anomalia eccellente a questo schema: il libro di Klauder e Skagerstam. Questo, oltre a presentare un importante articolo di rassegna, è una raccolta molto vasta e accurata di articoli chiave del settore, e perciò rappresenta il singolo contributo per noi più rilevante relativo al periodo 1960-1985.

Tornando alla composizione generale delle fonti secondarie, citiamo adesso le eccezioni: due articoli a carattere storico (sebbene scritti da non-storici) e gli atti di un convegno. Gli

articoli sono di Dodonov [41] in cui vengono fra l'altro affrontate questioni di storia degli stati coerenti, e di Nieto [40] sulla nascita di tali stati. Nessuno dei due riveste un ruolo centrale nella nostra ricerca, sebbene il primo fornisca importanti suggerimenti. Gli atti del convegno di Oak Ridge [39] sono interessanti in particolare per il carattere di unicità di questo convegno.

Esaminiamo allora adesso le fonti cui si è fatto riferimento tenendo a mente il doppio obiettivo che si prefigge questa panoramica: da un lato desideravamo presentare le fonti rilevanti per gli aspetti più specificamente storici, ma allo stesso tempo desideriamo presentare delle “recensioni” capaci di orientare il lettore che voglia accostarsi a quest'affascinante mondo o al docente che voglia farne uso didattico.

2.1 Il manuale di Klauder e Sudarshan (1968)

La prima di queste in ordine cronologico è un manuale: [25] Klauder J. R. & Sudarshan E.C.G.(1968). *Fundamentals of Quantum Optics*. New York: Benjamin. Questo è uno dei primi libri in cui compaiono gli stati coerenti¹ nella forma che assumono nel 60-'63. Si tratta di un manuale di ottica quantistica che è considerato un classico del settore. E' ripubblicato oggi dalla Dover.

¹Sappiamo che esiste almeno un libro precedente, scritto da Louisell e pubblicato nel 1964 [30]. Non ci è stato però possibile consultarlo.

Nella seconda parte del libro (capp. 7-10) gli autori presentano la teoria quantistica della radiazione elettromagnetica affrontata tramite gli stati coerenti. In particolare il capitolo 7 sviluppa la teoria degli stati coerenti *per sé*, prima per l'oscillatore armonico, poi per più gradi di libertà e infine per infiniti gradi di libertà, applicandola al campo elettromagnetico. Per un'idea abbastanza precisa di tale contenuto si può fare riferimento all'appendice sugli stati coerenti canonici.

Questo testo ha tutte le caratteristiche di un classico: in prima battuta certamente fornisce la trattazione generale di un campo, l'ottica quantistica, descritto con grande autorevolezza dai suoi autori, i quali sono due fra gli attori principali del settore. Soprattutto questo è un libro chiarissimo, lineare, la teoria è sviluppata in modo da fornire un mosaico in cui ogni pezzo trova il suo significato. Anche la notazione è agevole. Si tratta di un libro di lettura molto piacevole.

Per quanto concerne il suo ruolo nella nostra ricerca, oltre a fornire uno spaccato delle conoscenze del primo settennio degli anni '60, il testo presenta un'interessante bibliografia sinteticamente commentata, che nella parte relativa al capitolo 7 fornisce, fra l'altro, alcune indicazioni rilevanti riguardo al periodo 1926-'60, periodo che verrà vieppiù trascurato nelle pubblicazioni sugli stati coerenti che seguiranno. Che successivamente questo periodo cada un po' nell'oblio è naturalmente comprensibile, infatti, come abbiamo già detto, le pubblicazioni di cui parleremo sono praticamente soltanto pubblicazioni tecniche e non storiche: dal questo punto di vista disciplinare tutto si può ben fare iniziare con gli stati

coerenti canonici del '63, con l'aggiunta del dovuto omaggio a Schrödinger, naturalmente... E' la stessa dinamica per cui un'introduzione alla meccanica quantistica può partire dal '25-'26 con Schrödinger e il gruppo di Copenhagen... fatto salvo naturalmente che l'ipotesi dei quanti è stata introdotta da Planck!

2.2 La raccolta e rassegna di Klauder e Skagerstam (1985)

[23] Klauder J.R. & Skagerstam B.-S. (1985). *Coherent States - Applications in Physics and Mathematical Physics*. Singapore, World Scientific. 911pp.

Il grande classico, primo libro interamente dedicato agli stati coerenti, scritto dal più rilevante dei suoi padri, è usato a tutt'oggi come riferimento in questo campo. Ha un carattere prevalentemente fisico.

In più di novecento pagine contiene *A Coherent-State Primer*, un ampio articolo di rassegna degli autori, e una raccolta di quasi settanta articoli originali sugli stati coerenti. Questa raccolta è generalmente considerata una selezione accurata degli articoli più rilevanti del periodo considerato. A questo proposito un paio di appunti vanno però fatti.

Il primo è che Schrödinger non viene mai citato! Nella raccolta non è presente l'articolo originario né il suo lavoro è citato nel *review*. A essere più precisi Klauder non cita Schrödinger *neanche* negli otto articoli a suo nome della rac-

colta. D'altro canto, l'articolo di Schrödinger viene citato almeno dall'articolo [15] di Glauber del 1963 in poi, e lo stesso Klauder lo cita nel suo libro con Sudarshan del '68, e quindi Klauder è sicuramente consapevole della sua esistenza e del suo valore. Possiamo forse ritenere che l'autore principale della raccolta intende quest'ultima meramente come uno strumento per la ricerca, motivo per il quale può permettersi il lusso di non ammettere un contributo fondamentale dal punto di vista storico, ma che è stato completamente metabolizzato sul piano tecnico. Cionondimeno resta l'impressione che siano necessari altri motivi che possano giustificare una tale assenza eccellente.

Una seconda obiezione riguarda Perelomov che è presente unicamente con il fondamentale [20]; a giustificazione di questo fatto va detto che molto frequentemente quest'ultimo ha pubblicato in russo. D'altro canto Perelomov avrà una influenza molto più ampia solo a partire dalla pubblicazione, l'anno successivo, del suo manuale. In generale, comunque, la situazione politica (ed economica) non ha certo favorito lo scambio fra i due blocchi, come vedremo anche nel caso del simposio di Oak Ridge.

Le considerazioni fatte su questo libro sono facilmente rivolte soltanto alla figura di Klauder nella misura in cui è difficile supporre che le scelte strategiche fossero fatte anche da Skagerstam, quest'ultimo essendo, infatti, ben più giovane (il suo primo articolo legato agli stati coerenti è del '78), e avendo inciso molto meno in questo settore rispetto a Klauder, che è il singolo ricercatore che ha più contribuito a questo campo.

2.2.1 L'articolo di rassegna

Questa rassegna (90 pp. e 204 elementi di bibliografia) ha il ruolo, centrale per i futuri sviluppi dell'area, di raccogliere per la prima volta la già sterminata letteratura (ca. 1000 articoli) e comporla in un quadro complessivo. Il criterio guida è quello che Klauder aveva già tracciato in [11], la sua teoria delle rappresentazioni continue, ossia, come vedremo nel prossimo capitolo, la sua concezione del tutto generale di rappresentazione (continua e completa) dello spazio di Hilbert degli stati su uno spazio di "etichette", ossia gli indici degli stati coerenti.

2.2.2 La raccolta di articoli

La grande maggioranza del libro ospita sessantanove ristampe di articoli originali (1960-1985) sugli stati coerenti, divise in dieci sezioni (fra parentesi il numero di articoli presenti nella sezione e alcuni autori rilevanti):

1. General Developments (17). (Klauder, Glauber, Sudarshan, Barut e Girardello, Perelomov, Skagerstam,...)
2. Coherent States and Quantum Mechanics (11). (Nieto, Glauber,...)
3. Path Integrals and Coherent States (6). (Klauder,...)
4. Pseudospin Techniques (3). (aa.vv.)
5. Applications in Condensed Matter Physics (6). (aa.vv.)

6. Applications in Thermodynamics (4). (Gilmore, Skagerstam,...)
7. Applications in Atomic Physics (4). (Gilmore,...)
8. Applications in Nuclear Physics (4). (Gilmore, Feng,...)
9. Applications in Elementary Particle Physics (6). (aa.vv.)
10. Applications in Quantum Field Theory (8). (aa.vv.)

Di questa raccolta elenchiamo gli autori presenti: la cifra fra parentesi indica il numero di articoli presenti in raccolta di cui sono autori o co-autori.

Autori principali:

Klauder (8); Carruthers (5); Glauber (4); Skagerstam (4); Gilmore (4); Nieto (4); Eriksson (2); Feng (2); Greco (2); Hepp (2); Lieb(2); Papanicolaou (2); Srivastava (2); Barut e Girardello(1); Daubechies (1); Perelomov (1); Sudarshan (1).

Altri autori presenti con un singolo titolo:

Aragone, Arecchi, Bhaumik D., Bhaumik K., Blaizot, Bluemel, Botke, Bowden, Cahill, Chalbaud, Chung, Courtens, Cummings, Curci, De Facio, Dutta-Roy, Dy, Feldman, Fowler, Garrazana, Gomatam, Greco, Hammer, Hillery, Hioe, Hollenhorst, Hongoh, Horn, Janssen, Jevicki, Johnston, Kahn, Kashiwa, Kuratsuji, Langer, Mead, Moncrief, Mukunda, Narducci, Ni, Ohnuki, Onofri, Orland, Palumbo, Pancheri-Srivastava, Pottinger, Radcliffe, Rasetti M., Salamo', Scalapino, Shankar, Shibata, Shih, Shrauner, Silver, Simmons, Stelte, Sugar, Suzu-

ki, Takahashi, Thomas, Toyoda, Tuft, Unruh, Wang Y.K., Wang Y.-P., Weiner, Wildermuth, Yaffe, Zubairy.

Collaborazioni fra autori principali:

Klauder-Daubechies (1), Skagerstam-Eriksson (2), Feng-Gilmore: (2), Nieto-Simmons (1), Nieto-Carruthers (2).

2.3 Il manuale di Perelomov (1986)

[31] Perelomov A.M. (1986). *Generalized Coherent States and their Applications*. Berlin: Springer-Verlag.

Questo è il primo manuale a trattare in modo sistematico ed esclusivo la problematica degli stati coerenti. E' un manuale rivolto ai ricercatori che raccoglie in 320 pagine e 284 elementi di bibliografia un ampio spettro dei risultati allora noti in questo settore. L'elemento unificante è quello degli stati coerenti per arbitrari gruppi di Lie, generalizzazione da lui ottenuta nel 1972 [20]. Sebbene il taglio sia, quindi, fisico-matematico, il libro presenta come terza parte (circa novanta pagine) svariate applicazioni alla fisica.

Per questa sua primogenitura, questo manuale, avrà anche un rilevante ruolo nel circoscritto campo della didattica degli stati coerenti, almeno per i quindici anni che lo separano dal successivo manuale di Ali, Antoine e Gazeau. Anche quest'ultimo, in realtà, è un testo di ricerca, ma a parte questi, per gli aspetti puramente didattici sarà disponibile quasi soltanto materiale sugli stati coerenti canonici (tipicamente come capitoli in manuali di ottica quantistica). Significativamente,

comunque, il manuale di Perelomov nasce da una serie di corsi che l'autore ha tenuto nella sua università di Mosca.

Un'altra considerazione da fare riguarda il carattere eminentemente matematico che lo contraddistingue. Questo carattere lo fa considerare un elemento piuttosto isolato fino all'articolo di rassegna [36] di Ali et al. del 1995.

2.4 L'articolo di rassegna di Zhang, Feng e Gilmore (1990)

[35] Zhang W-M., Feng D. H. & Gilmore R. (1990). *Coherent states: Theory and some applications*, Rev. Mod. Phys., **62**, 867-927.

Questo importante articolo di rassegna fotografa il panorama degli stati coerenti in fisica, nel loro primo quarto di secolo di vita. In sessantuno pagine e ben 209 elementi di bibliografia gli autori offrono un quadro molto ampio delle applicazioni fisiche degli stati coerenti: è da notare che oltre alle applicazioni più tradizionali (stati coerenti di campo, atomici, integrali funzionali...) è presente un'ampia sezione relativa a problemi statistici e termodinamici. Infine in questa rassegna trovano adeguato spazio anche gli *squeezed states*, stati che avevano visto la luce nel decennio che si era appena concluso.

Oltre all'utile lavoro di rassegna gli autori, ricercatori fra i più rilevanti del settore delle generalizzazioni gruppali, introducono una ricetta generale per ottenere gli stati coerenti rel-

ativi a partire dal gruppo dinamico di un dato sistema fisico. Si tratta quindi di un'importante procedura *costruttiva*.

2.5 Gli atti del simposio di Oak Ridge (1994)

[39] Klauder J. R., Feng D. H. & Strayer M. R. (Eds.). (1994). *Coherent States: Past, Present, and Future : Proceedings of the International Symposium Oak Ridge Nat'L Lab 14-17 June 1993*. Singapore: World Scientific.

Sono gli atti del convegno tenuto a Oak Ridge, Tennessee, dal 14 al 17 giugno del 1993; la pubblicazione è del 1994. Questo convegno, a carattere celebrativo, è l'unico interamente dedicato agli stati coerenti. Naturalmente vi sono stati altri convegni su *wavelets* e stati *squeezed* che hanno anche trattato di stati coerenti; vi è anche l'importante ciclo di workshop sui metodi geometrici in fisica di Białowieża, in Polonia, che ha trattato spesso di stati coerenti, visto che del suo comitato scieintifico hanno fatto stabilmente parte Ali e Gazeau. Questo convegno, però, ha un valore centrale perché ha raccolto sostanzialmente tutti i padri fondatori e i ricercatori più rilevanti, per fornire un quadro il più possibile completo di questo settore.

Il libro contiene il contributo di ogni oratore (anche di un ricercatore che non aveva potuto partecipare), oltre alla prefazione e a un discorso, di scarso rilievo per la nostra ricerca, di A. S. Wightman alla cena sociale.

I contributi hanno carattere prevalentemente fisico. Fra i padri del campo spiccano le presenze di Glauber, Lieb, Nieto, Skagerstam, Sudarshan, Zhang, Feng e le assenze Gilmore e Perelomov. Sono anche presenti Antoine e la madre delle *wavelets*: Ingrid Daubechies.

Glauber, Lieb e Sudarshan contribuiscono con interventi a carattere più generale, di rassegna.

Klauder è il curatore degli atti, insieme a Feng e Strayer, ma non presenta nessun contributo, poiché oltre ad essere uno degli organizzatori, è anche moderatore (cfr. il resoconto di Feng in appendice).

Sull'assenza di Gilmore e Perelomov il Prof. Antoine mi ha riferito che in quel periodo Gilmore non si occupava più di stati coerenti, bensì di teoria delle catastrofi, e che Perelomov, come la maggioranza dei russi all'epoca, non poteva viaggiare in occidente per motivi politici ed economici. A supportare questa spiegazione Antoine adduce la considerazione che Perelomov ha partecipato ai *workshops* a Białowieża, essendo all'interno del blocco sovietico.

2.6 L'articolo di rassegna di Ali, Antoine, Gazeau e Mueller (1995)

[36] Ali S. T., Antoine J.-P., Gazeau J.-P. & Mueller U. A. (1995). *Coherent states and their generalizations: A mathematical overview*, Rev. Math. Phys., Vol 7 , Issue 7, 1013-1104.

Importante rassegna degli stati coerenti in fisica-matematica (92 pagine, 137 richiami bibliografici), fanno il punto sul cambiamento di prospettiva che ha subito il problema di generalizzare gli stati coerenti. Il taglio è matematico.

Gli autori partono dall'ormai assestata teoria degli stati coerenti su gruppi di Lie generali, e ne introducono una generalizzazione associando gli stati coerenti a certe rappresentazioni di gruppi che hanno la proprietà di essere a quadrato integrabile su dati spazi omogenei. Nella seconda sezione presentano svariate applicazioni (nel senso della fisica-matematica) secondo i tre ampi gruppi degli stati coerenti alla Gilmore-Perelomov, dei gruppi relativistici e delle *wavelets* (continue). Propongono, infine, un'ulteriore generalizzazione degli stati coerenti propriamente *non gruppale*, giacché basata su *frames* continui e spazi di Hilbert a "reproducing kernel".

Dal punto di vista tecnico questo articolo è stato reso superato dal libro dei primi tre autori (2000), si può anzi dire che ne rappresenta una prima fase. Sia di quest'articolo sia del libro si parla nell'intervista presente in appendice.

2.7 L'articolo storico di Nieto (1997)

[40] Nieto M.M. (1997). *The discovery of squeezed states - in 1927*. arXiv:quant-ph/9708012v1

Uno dei padri degli stati coerenti propone in un breve articolo (sei pagine) una propria scoperta sulla nascita degli stati *squeezed* e una breve descrizione della scoperta degli stati

coerenti. Dichiara in uscita un lavoro più ampio, di cui non ho trovato traccia. La questione (solo in merito agli stati *squeezed*) sarà ripresa in un articolo di Dodonov del 2007. Sulla piattaforma arXiv, risulta ancora che l'articolo debba essere pubblicato negli atti del convegno *5th International Conference on Squeezed States and Uncertainty Relations*.

2.8 Il manuale di Ali, Antoine e Gazeau (2000)

[32] Ali S. T., Antoine J.-P. & Gazeau J.-P. (2000). *Coherent states, wavelets and their generalizations*. Springer.

E' questo l'ampio (420 pagine) libro di taglio fisico-matematico che completa il lavoro iniziato in [36] e che mira a presentare in un'ampia prospettiva sia gli stati coerenti sia le *wavelets*.

Si può parlare di completamento dell'articolo di rassegna per diversi aspetti: dal punto di vista della ricerca sugli stati coerenti è ampliato il quadro, pur molto generale, ampio e strutturato, che era lì esposto. Precisamente viene introdotto per la prima volta in un libro o rassegna l'approccio secondo le "positive operator-valued measures" (misure a valori in operatori positivi). Queste misure operatoriali, già ben note in meccanica quantistica, sono legate sia agli spazi di Hilbert a "reproducing kernel", sia a certe rappresentazioni di gruppi e permettono di fornire una definizione più generale e ricca di stati coerenti, ma anche una piena integrazione con la teoria delle *wavelets*.

D'altro canto il libro presenta un più vasto dispiegamento delle applicazioni (sempre nel senso fisico-matematico del termine). Infine il libro presenta in questo quadro la teoria delle *wavelets*, anche quelle discrete, e affronta in generale il problema della discretizzazione. Per questi aspetti, quindi, fuoriesce dai limiti del presente lavoro.

Fra gli aspetti di maggiore interesse per noi c'è da citare che il libro si caratterizza anche per un'attenzione ai riferimenti bibliografici che ambisce di presentare con buona completezza, nel proprio settore: ne conta ben 94 concernenti libri e tesi e 290 riguardanti gli articoli. Indicazioni storiche non banali sono anche presenti nel capitolo introduttivo.

E' senza dubbio un libro di ricerca, ma punta anche a essere anche un testo introduttivo... nella misura in cui, però, la teoria degli operatori in spazi di Hilbert, e la teoria delle rappresentazioni di gruppi, sono date per scontate!

Valgono anche qui le osservazioni fatte per il libro di Perelomov riguardo agli aspetti didattici. È un libro sorto da una serie di corsi e seminari tenuti dagli autori in varie parti del mondo. Come abbiamo già notato per l'articolo di rassegna, della genesi di questo libro si parla nell'intervista ad Ali e Gazeau.

Dalla simpaticissima prefazione dovuta al Prof. Ali abbiamo estratto la citazione presente in dedica.

2.9 L'articolo storico di Dodonov (2002)

[41] Dodonov V.V. (2002). *'Nonclassical' states in quantum optics: a 'squeezed' review of the first 75 years*. Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics (J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.) **4**, R1-R33 (33 pp.)

Un altro degli studiosi rilevanti in ottica quantistica, dopo Nieto, scrive quest'articolo di medie dimensioni concentrandosi sulla storia degli stati *squeezed*, prestando anche una certa attenzione agli stati coerenti. L'obiettivo dichiarato è rintracciare il momento in cui singoli concetti sono emersi per la prima volta nel panorama dell'ottica quantistica. L'apparato di riferimenti assume valore centrale coinvolgendo la metà dell'articolo in 451 elementi!

2.10 Il manuale di Gazeau (2009)

[33] Gazeau, J.-P. (2009). *Coherent States in Quantum Physics*. Wiley-VCH, Berlin.

Terminiamo questa rassegna con questo manuale, arrivato alla fine dello scorso anno a cambiare in modo sostanziale il panorama, da molti punti di vista. La prima parte è un eccellente manuale sugli stati coerenti in fisica, la seconda presenta un'ampia rassegna sul problema della quantizzazione tramite stati coerenti. A questa divisione corrispondono due anime piuttosto distinte.

Della seconda parte è facile cogliere l'essenza: è questa una rassegna di un ambito specifico, seppure di grande ril-

evanza. Le nostre osservazioni saranno quindi da intendersi prevalentemente focalizzate sulla prima parte.

Il livello è sempre molto elevato, e sicuramente il manuale punta a essere uno strumento nelle mani dei ricercatori. Sicuramente lo è per i ricercatori di altri settori della fisica, i quali hanno bisogno di un manuale chiaro e modulare utilizzabile ai loro fini specifici. Da questo punto di vista spicca la presenza di un capitolo dedicato alla *quantum information*, campo che nell'ultimo decennio ha acquisito grande rilevanza.

D'altro canto, però, è un testo molto rilevante anche per la teoria generale degli stati coerenti. In questo, infatti, non solo è introdotto per la prima volta in una rassegna o manuale l'interpretazione probabilistica degli stati coerenti, ma tutto il quadro è introdotto ed esposto alla luce di questo punto di vista, con benefici di semplicità.

Siamo arrivati, quindi, all'ultimo aspetto importante di questo lavoro: è un'esposizione chiara, che procede gradualmente dal semplice al complesso. L'unico pre-requisito che si richiede è la conoscenza della meccanica quantistica, il che, naturalmente, è il minimo che si possa richiedere, per un libro sugli stati coerenti in meccanica quantistica. A dimostrare che tale pre-requisito è effettivo, e non soltanto dichiarato, testimoniano le appendici che, seppure brevemente, introducono alla teoria della probabilità e ai gruppi di Lie.

Da questa descrizione sarà quindi chiaro che il manuale è utilizzabile didatticamente in ambito di laurea specialistica in fisica, previa un'opportuna selezione del materiale della prima parte. Vale la pena evidenziare che di laurea in fisica si

sta trattando, più che altro per rilevare che l'unico possibile equivalente in ambito matematico, il testo che lo stesso autore ha scritto con Ali e Antoine, più difficilmente si presta a svolgere lo stesso compito. Questo è dovuto alla maggiore complessità, in parte, ma soprattutto all'assenza di un'adeguata contestualizzazione nell'ambito della fisica quantistica, problematica che in un corso di laurea in matematica non si può sicuramente dare per scontata.

Anche questo libro è nato da una serie di corsi tenuti dall'autore in varie parti del mondo. Il materiale, infine, è stato raccolto per un periodo molto lungo, come racconta lo stesso autore nell'intervista.

Capitolo 3

La storia degli stati coerenti canonici

3.1 Schrödinger, 1926

Su una cosa sono proprio tutti d'accordo: gli stati coerenti hanno visto la luce nel 1926 nell'articolo di Schrödinger *Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik* comparso su *Die Naturwissenschaften* [6]. E d'altro canto è realmente difficile pensare di retrodatare una tale nascita. Basta ricordare che Schrödinger era nel pieno dello sviluppo della sua meccanica ondulatoria: delle quattro “comunicazioni” di cui si compone *Quantisierung als Eigenwertproblem* [2], [3], [5], [7] (Quantizzazione come problema agli autovalori) ne erano già apparse due (su *Annalen der Physik*, 13 marzo e 6 aprile) oltre ad essere apparso *Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen* [4] (Sulla

relazione fra la meccanica quantistica di Heisenberg, Born, e Jordan, e la mia) (4 maggio, stessa rivista). Questi primi tre lavori fornivano l'impostazione generale (a partire dall'atomo d'idrogeno) mentre in [6] Schrödinger affrontava per la prima volta l'oscillatore armonico.

Nelle tre pagine di cui si compone quest'articolo (quattro nella versione inglese) Schrödinger scrive direttamente le “vibrazioni proprie” dell' “oscillatore lineare di Planck” in funzione dei ben noti polinomi di Hermite. Fino ad allora l'obiettivo centrale di Schrödinger era stato quello di convincere che l'equazione da lui sviluppata descrive la realtà quantistica in modo più fondamentale della meccanica delle matrici, di cui ha appena dimostrato l'equivalenza, e che i numeri interi sorgono come epifenomeno da una struttura intrinsecamente continua, esattamente come i numeri interi di nodi in una corda vibrante continua. Eppure liquidando in poche battute questa questione, Schrödinger passa immediatamente a considerare il problema della transizione alla meccanica macroscopica considerando un numero $A \gg 1$ (dal nostro punto di vista A è la parte reale di z , cioè Schrödinger considera la sola traslazione lungo la coordinata spaziale e non quella rispetto al momento) che lui considera un “numero quantico elevato” e la sovrapposizione di vibrazioni proprie con coefficienti: $A^n/\sqrt{2^n n!}$ e dimostrando che questo pacchetto è una gaussiana alta e stretta che oscilla secondo le regole dell'oscillatore armonico classico. L'autore rileva che questo pacchetto *non si espande nel tempo*. A questo proposito è interessante citare l'osservazione di Glauber [18] che Schrödinger in quei

momenti iniziali riteneva che la funzione d'onda rappresentasse la struttura della particella in un senso molto più esplicito (concreto) rispetto alle concezioni attuali, e quindi cercasse soluzioni che non si espandono e che seguono traiettorie classiche.

Sullo spostamento d'interessi sopra descritto è possibile avere un *insight* grazie alla corrispondenza che l'autore tenne con Lorentz e che si trova raccolta in [8] *Letters on Wave Mechanics - Schrödinger, Planck, Einstein, Lorentz*. Precisamente Lorentz analizza le bozze di stampa dei tre articoli sopra citati e ne fa un'accurata e acuta analisi, cominciando da considerazioni equilibrate dei pro e dei contro dell'approccio matriciale e ondulatorio che Schrödinger ha appena dimostrato equivalenti. Quello che a noi però interessa maggiormente è la terza considerazione¹:

¹Lorentz inizia considerando l'equazione di Schrödinger, che allora per l'atomo d'idrogeno si presentava nella forma indipendente dal tempo:

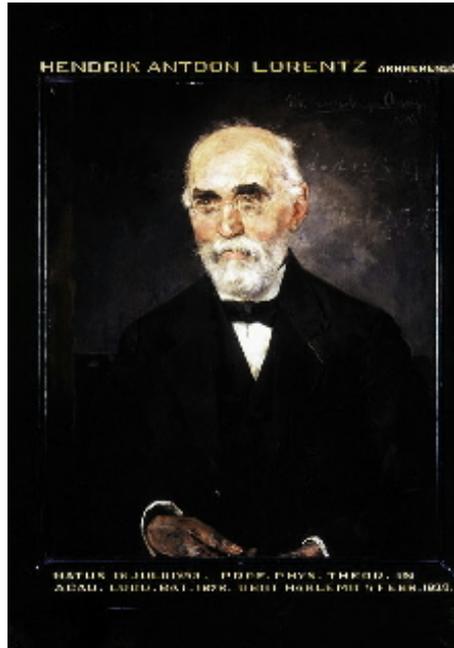
$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2m}{h^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) \psi = 0$$

e scrive le relazioni:

Per la velocità u della particella: (2) $u = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E + \frac{e^2}{r} \right)}$.

Per la sua lunghezza d'onda *variabile punto a punto*: (3) $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{h} \sqrt{2m \left(E + \frac{e^2}{r} \right)}$.

A questa, per ottenere aggiunge la considerazione di Schrödinger sulla velocità u della particella come velocità di gruppo delle onde che la rappresentano e ottiene per la frequenza d'onda (corrispondente alla velocità di fase, non di gruppo): (6) $\nu = \frac{1}{h} (E_0 + E)$, con E_0 costante arbitraria.



Lorentz dipinto da Menso Kamerlingh Onnes (1916).

(P.D.) Fonte: <http://www.luf.nl/site/start.asp?paginaID=345>

3. Your conjecture that the transformation which our dynamics will have to undergo will be similar to the transition from ray optics to wave optics sounds very tempting, but I have some doubts about it.

If I have understood you correctly, then a “particle”, an electron for example, would be comparable to a wave packet which moves with the group velocity.

But a wave packet can never stay together and remain confined to a small volume in the long

run. The slightest dispersion in the medium will pull it apart in the direction of propagation, and even without that dispersion it will always spread more and more in the transverse direction. Because of this unavoidable blurring a wave packet does not seem to me to be very suitable for representing things to which we want to ascribe a rather permanent individual existence.

As you yourself remark, the blurring in question is far advanced in the field of the H-atom. A wave packet can hold together for some time only if its dimensions are large compared to the wave length. Since, however, the wave length determined by (3) is of the order of magnitude of the Bohr elliptic orbit, there can be no question of having a wave packet that is small compared to the dimensions of such an ellipse and which is moving along this line.

Naturally, if you assign a large positive value to the constant E in (6) and (2), (one can think of $E = mc^2$), you can reach an arbitrarily high frequency ν with correspondingly large propagation velocity ω , but you cannot change the wave length given by (3) at all.

H. A. Lorentz. Haarlem, 27 May 1926



Schrödinger nel 1933.

Fonte (P.D.): http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1933/schrodinger-bio.html

3. *Allow me to send you, in an enclosure, a copy of a short note in which something is carried through for the simple case of the oscillator which is also an urgent requirement for all more complicated cases, where however it encounters great computational difficulties. (It would be nicest if it could be carried through in general², but for the present that is hopeless.) It is a question of really establishing the wave groups (or wave packets) which mediate the transition to macroscopic mechanics when one goes to large quantum numbers. You see from the text of the note, which was*

²Indicazioni di enfasi di Schrödinger.

written before I received your letter, how much I too was concerned about the “staying together” of these wave packets. I am very fortunate that now I can at least point to a simple example where, contrary to all reasonable conjectures, it still proves right.

E. Schrödinger. Zürich, 6 June 1926

Non sappiamo la data in cui Schrödinger invia l'articolo, né quella in cui Naturwissenschaften lo riceve, ma dato che sarà pubblicato il 9 luglio, è quasi certo che l'articolo nella sua forma finale fosse già stato inviato alla rivista e che la breve nota cui Schrödinger fa riferimento sia proprio l'articolo nella sua forma finale.

Schrödinger termina l'articolo prevedendo che, analogamente a quanto fatto, si potrà affrontare il problema dell'atomo d'idrogeno e ottenere le ellissi di Keplero. A dire il vero rileva anche le difficoltà tecniche di un tale calcolo. Tali difficoltà sono uno dei motivi per cui tale problema fosse sì risolto, ma soltanto settanta anni dopo, da Klauder [22].

Ciò su cui desideriamo porre l'accento è che Schrödinger, nella lettera come nell'articolo, ha tracciato un campo di ricerca generale: per rispettare il principio di corrispondenza si possono cercare quegli stati quantistici che, sotto certe condizioni (“numeri quantici elevati”), si comportano come stati classici. È appena il caso di notare come il principio di corrispondenza fosse centrale nei primi sviluppi della meccanica quantistica e che, lentamente, sia scivolato in secondo piano

per favorire un completo sviluppo e assiomatizzazione della meccanica quantistica. Il motivo di tale spostamento com'è ben noto è che contrariamente alla relatività, che si riduce naturalmente alla meccanica newtoniana, la meccanica quantistica ha rapporti molto più complessi con la meccanica classica, rapporti che sono ancora oggetto di studio. In generale sia le difficoltà tecniche che questo spostamento d'interessi sono probabilmente le cause principali di circa trentacinque anni di limbo, in cui questo programma di ricerca di Schrödinger non sarà ulteriormente sviluppato.

3.2 L' "età di mezzo" e Von Neumann

Sebbene, come abbiamo detto, il programma di Schrödinger per un trentennio non ebbe sostanzialmente seguito, gli stati da lui studiati non furono mai dimenticati. Anzi si può dire che divennero patrimonio comune, e, sotto la forma di "stati dell'oscillatore armonico spostato", "pacchetti stazionari", o di "stati a incertezza minima", hanno fatto parte della formazione di ogni fisico tramite, ad esempio, classici manuali di meccanica quantistica come quelli di Schiff [29] *Quantum Mechanics*, di Dirac [26] *The Principles of Quantum Mechanics* o, per gli aspetti matematici e fondazionali, di von Neumann [28] *Mathematical foundations of Quantum Mechanics*. Con un giudizio forse un po' severo Glauber [18] dice che questi stati avevano conservato solo un valore didattico, e dal punto

di vista della ricerca erano considerati più una curiosità che qualcosa che potesse essere fondamentale.



John von Neumann 1943-'45. Durante il periodo a Los Alamos.

(P.D.) Fonte: <http://commons.wikimedia.org/wiki/>

File:JohnvonNeumann-LosAlamos.jpg

Almeno incidentalmente non si può sfuggire al confronto fra i due professori di matematica, l'uno, Dirac, alla cattedra Lucasiana di Cambridge, l'altro, von Neumann, membro dell'*Institute for Advanced Study* di Princeton. Per molti versi questo raffronto fra giganti è il confronto di due discipline: la fisica teorica e la fisica matematica. Nel testo citato von Neumann chiarisce polemicamente il suo punto di vista sul lavoro di Dirac dicendo che esso ha certamente il pregio di una grande chiarezza ed eleganza, ma che questo è ottenuto a scapito della correttezza matematica (l'ipotesi "fittizia" che ogni operatore hermitiano sia diagonalizzabile richiede la contraddittoria "funzione" δ , ad esempio); e conclude dicendo che

se non fossero disponibili altre trattazioni non ci sarebbe nulla da obiettare, ma viceversa è disponibile la sua formulazione, matematicamente corretta.

A quanto sappiamo von Neumann è l'unico in questo periodo che oltre a trattare gli stati di Schrödinger, considera anche il programma di ricerca cui si è fatto riferimento. Nel suo fondamentale testo, von Neumann, oltre a riformulare la struttura teorica, infatti, considera vari aspetti fondamentali, fra cui la questione della corrispondenza macroscopico-microscopico e il problema della misura. In particolar modo, considerando la misura contemporanea delle osservabili canoniche posizione-momento e gli stati scoperti da Schrödinger, von Neumann dimostra ([28] p.407) che un sottoinsieme discreto di tali stati, una griglia di stati con $z = \sqrt{\pi}(l + im)$ con l e m interi, forma un insieme *completo*³. Più precisamente dimostra che la procedura di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt applicata a questi stati sulla griglia conduce a una base (ortogonale). Questo è un passo teorico fondamentale: è solo su questa base che si può fondare il programma di Schrödinger. Se, infatti, vi fossero stati del sistema non descrivibili tramite sovrapposizione di stati di Schrödinger, questi ultimi non potrebbero ambire a essere quel ponte cercato fra classico e quantistico, lascerebbero un residuo di stati irrimediabilmente quantistici.

³Ricordiamo che $\text{Re}(z)$ è essenzialmente lo spostamento in coordinata e $\text{Im}(z)$ lo spostamento in quantità di moto dell'oscillatore armonico, di cui z etichetta lo stato ground.

3.3 Klauder, 1960-'63

Come dicevo von Neumann rappresenta un'eccezione e tale resterà fino al 1960 quando un ventottenne studente, John Klauder, raccoglie il testimone pubblicando un articolo su *Annals of Physics* [9]. Quest'articolo riassume la tesi di dottorato che Klauder ha appena terminato, sotto la direzione di John Wheeler, ai Palmer Physical Laboratories di Princeton.



John Klauder nel 1951.

Fonte: <http://www.phys.ufl.edu/~klauder/>

L'interesse principale del lavoro di tesi è di proporre una migliore formulazione variazionale (alla Feynman) dei campi fermionici (spinoriali): quello che Klauder ottiene è una formulazione unica per campi bosonici e fermionici. Per costru-

ire questi integrali funzionali egli utilizza gli stati⁴ $|z\rangle$ interpretando il piano complesso come uno *spazio di rappresentazione* degli stati. Affinché ciò sia possibile, dimostra l'(over-)completezza di tale famiglia: è il primo ad ricavare la risoluzione dell'identità per tali stati nella forma odierna: $\pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |z\rangle \langle z| d\operatorname{Re} z d\operatorname{Im} z = 1$. Con tale strumento egli può scrivere i prodotti scalari fra gli stati (per calcolare i propagatori) come integrali sul piano complesso.

Tre anni dopo Klauder pubblica due articoli fondamentali su *Journal of Mathematical Physics*: la sua teoria delle rappresentazioni continue [11], [12].

Incominciamo ad analizzare le quattro dense pagine che costituiscono il primo di questi articoli: *Continuous-Representation Theory I. Postulates of Continuous-Representation Theory*.

Per prima cosa Klauder espone il problema della rappresentazione nella sua prospettiva: fare corrispondere a ogni vettore unitario Ψ dello spazio astratto degli stati \mathfrak{H} una sua rappresentazione funzionale $\psi(z)$, questa funzione essendo definita su un certo spazio di "etichette". Per fissare le idee si considerino gli esempi ordinari di rappresentazioni: la funzione d'onda di Schrödinger, parametrizzata sullo spazio euclideo ordinario, oppure, data qualsiasi base ortogonale, la fun-

⁴Klauder introduce: $|z\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-\frac{1}{2}} z^n |n\rangle$ senza ulteriori indicazioni. Nella bibliografia cita von Neumann [28] (indicando però come anno il 1953. Nell'edizione del '55 non si fa menzione di questa edizione), ma non cita Schrödinger.

Nella discussione sono stati adottati simboli leggermente diversi, per permettere uniformità di lettura.

zione (che si riduce alla successione) delle componenti del vettore dato sulla base.

La richiesta di Klauder è che si possa parametrizzare *la dinamica* del sistema (o a qualsiasi altro gruppo di Lie di automorfismi) con corrispondenti trasformazioni nello spazio delle etichette. Questo significa richiedere che alla continuità delle trasformazioni del vettore di stato corrisponda la continuità nelle variazioni dello spazio dei parametri, e questo mette subito fuori gioco le ordinarie basi discrete. D'altro canto questo vuol dire anche richiedere che stati infinitamente vicini corrispondano a etichette a distanza infinitesima, e questo significa mettere fuori gioco anche la rappresentazione di Schrödinger, in quanto la “base” posizione è composta di stati fra loro ortogonali ($\langle x, x' \rangle = 0$ se $x \neq x'$).

Klauder quindi introduce i postulati della teoria della rappresentazione continua:

Consideriamo l'insieme di etichette \mathcal{L} e la mappa \mathcal{M} che associa ad elementi di \mathcal{L} vettori unitari di $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}$, si richiede che:

1. \mathcal{C} sia connesso per archi (nella metrica della norma)
2. \mathcal{L} sia uno spazio di Hausdorff e \mathcal{M} sia una mappa suiettiva e continua (debolmente)
3. $\overline{\text{span}\mathcal{C}} = \mathcal{H}$, ossia esiste una risoluzione dell'identità.

Il primo punto, come anticipato, comporta l'aver messo fuori gioco le basi ortogonali, anche quelle continue. Il terzo punto, nel caso che \mathcal{C} sia localmente compatto, comporta

l'esistenza di una misura per cui si abbia $\forall \Psi \in \mathcal{H}$:

$$\Psi = \int_{\mathcal{C}} \langle \Phi, \Psi \rangle \Phi d\mu(\Phi)$$

La rappresentazione continua che ne segue è allora:

$$\psi(\Phi) := \langle \Phi, \Psi \rangle \text{ o } \psi(l) := \langle \Phi(l), \Psi \rangle$$

Viceversa una certa funzione $\psi(\Phi')$ rappresenta uno stato soltanto se soddisfa l'equazione:

$$\psi(\Phi') = \int_{\mathcal{C}} K(\Phi', \Phi) \psi(\Phi) d\mu(\Phi)$$

con *reproducing kernel* $K(\Phi', \Phi) = \langle \Phi, \Psi \rangle$. Il postulato 1 comporta che $\psi(\Phi)$ è continua su \mathcal{C} il postulato 2 che $\psi(l)$ è continua su \mathcal{L} . Il postulato 3 invece garantisce che queste funzioni forniscono una rappresentazione dell'intero \mathcal{H} .

Klauder inoltre osserva come i postulati 1 e 3 caratterizzano le famiglie *overcomplete* di stati (sistema di generatori non minimali) e descrive varie opportunità che si aprono grazie alla loro utilizzazione.

Se nel primo di questi due articoli Klauder si è occupato delle caratteristiche matematiche che devono possedere queste speciali famiglie di stati, nel secondo [12] *Continuous-Representation Theory II. Generalized Relation Between Quantum and Classical Dynamics* invece si occupa del senso fisico che è possibile dare loro. Beninteso, come testimoniato dall'articolo del '60, nello sviluppare queste idee Klauder ha seguito il percorso inverso: il suo punto di partenza è stato,

in quel lavoro come in questo, il principio di azione, il suo interesse originario è la dinamica del sistema fisico.

È noto che ordinariamente l'estremale dell'integrale d'azione:

$$I = \int \left[i\hbar \left\langle \Phi, \frac{d\Phi}{dt} \right\rangle - \langle \Phi, H\Phi \rangle \right] dt$$

calcolato sui vettori unitari di \mathcal{H} conduce come equazioni di Euler-Lagrange all'equazione di Schrödinger. In questo articolo Klauder considera cosa succede se anziché considerare generici vettori unitari si confinano le Φ ad appartenere a un certo insieme \mathcal{C} , nel senso dell'articolo precedente. Studiando vari casi, dal più semplice della particella libera, a quello della particella in potenziale, a evoluzioni generali descritte da gruppi di Lie unitari ed altri esempi, Klauder mostra come i casi per cui esiste una contropartita classica sono descritti tramite un opportuno insieme \mathcal{C} e un corrispondente spazio delle fasi di etichette. In questo caso le etichette assumono il valore di variabili dinamiche classiche, tramite le quali l'integrale d'azione assume la forma classica abituale:

$$I = \int [p\dot{q} - H(p, q)] dt$$

Quindi l'estremale calcolato soltanto su \mathcal{C} , che fornisce la dinamica quantistica dei vettori di \mathcal{C} , corrisponde alle ordinarie equazioni classiche di Hamilton nello spazio delle etichette. Klauder quindi interpreta il problema della quantizzazione nel seguente modo: *la meccanica classica può essere vista come un sottocaso della meccanica quantistica*, nel senso che la dinamica classica di un sistema è l'espressione, nel comodo

spazio delle etichette, della vera dinamica quantistica, qualora ci si limiti a muoversi in \mathcal{C} . A fianco a questi casi ci sono, naturalmente, i sistemi irriducibilmente quantistici, per questi non esiste la possibilità di esprimere l'intera dinamica in questo modo. Il problema della quantizzazione si pone in prima battuta, quindi, solo come un problema di *reinterpretazione* delle variabili dinamiche classiche come etichette di certi stati quantistici; a questa prima fase segue poi una seconda che richiede l'ampliamento, tramite vari metodi, del dominio del funzionale d'azione fino ad includere la completa dinamica quantistica del sistema.

Abbiamo riportato con un certo dettaglio le idee di Klauder per condividere con lettore la forte impressione che queste possono provocare: prima ancora degli articoli di Glauber, prima ancora che il termine "stati coerenti" fosse coniato, Klauder nel primo di questi due articoli ha stabilito una struttura generale che non solo ingloberà gli stati di Glauber, ma che caratterizzerà tutte le loro generalizzazioni fino ad oggi⁵. Nel secondo di questi, poi, ha affrontato nello stesso grado di generalità la dinamica di questi sistemi rispetto al capitale problema della corrispondenza col caso classico. Naturalmente i postulati che egli ha usato non sono costruttivi,

⁵In seguito [34] Klauder riformulerà i postulati chiedendo che \mathcal{L} sia uno spazio topologico tale che ogni suo sottospazio finito-dimensionale sia localmente euclideo, che la mappa sia fortemente continua e che esista una misura positiva dl per cui $\int_{\mathcal{L}} |l\rangle \langle l| dl = I$. Come si vede sono più che altro correzioni tecniche, non sostanziali.

e quindi lasciano inesplorato il modo in cui costruire queste famiglie di stati, come applicarle, ecc. Il vero avvio a questa esplorazione sarà dato dopo che, ribaltando la prospettiva di Klauder, Glauber partirà dal dettagliato caso concreto dei suoi stati coerenti. Questi daranno il via, tramite la generalizzazione dell'una o dell'altra proprietà, all'esplorazione del mondo di cui Klauder ha, però, stabilito i confini.

3.4 Glauber e Sudarshan, 1963

Per quelle coincidenze che sembrano avere il duplice contraddittorio carattere della casualità e della necessità, negli stessi giorni (26 dicembre 1962) in cui *Journal of Mathematical Physics* riceveva i due lavori di Klauder, *Physical Review Letters* riceveva (27 dicembre) da Roy Jay Glauber una lettera intitolata *Photon correlations* [14].



Roy Glauber nel 2005 al momento della consegna del premio Nobel.

P.D. Fonte: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Roy_Glauber_Dec_10_2005.jpg

Glauber, all'epoca era un trentasettenne affermato ricercatore nel campo dell'elettrodinamica quantistica. La sua carriera era iniziata appena diciottenne (!) a Los Alamos calcolando la massa critica della bomba, ed era proseguita conseguendo Bachelor e dottorato ad Harvard, quest'ultimo sotto la guida di Schwinger. È certamente significativo che la radice comune di Glauber e Klauder fosse l'elettrodinamica quantistica di Schwinger, ma è certo che il carattere con cui i due esploravano questo campo non poteva essere più diverso: Klauder studiando questioni di carattere generale in teoria dei campi, legate a principi variazionali; Glauber studiando questioni concrete legate al campo elettromagnetico, tenendo ben presenti i risultati sperimentali. Fra questi risultati, i più recenti e interessanti erano ottenuti sul maser, che è una sorgente di microonde o onde radio generate per emissione stimolata in cavità risonante, il cui primo esemplare aveva visto la luce nel 1953. Glauber si riferisce al maser e non al laser poiché i primi "maser ottici", come venivano chiamati i primi laser, furono costruiti nel 1960, e quindi naturalmente non avevano ancora prodotto un'adeguata messe di dati sperimentali. Lo sviluppo del maser, d'altro canto, era andato di pari passo con lo sviluppo delle tecniche di rivelazione di coincidenza per i fotoni, e aveva prodotto importanti risultati, indicanti eccezionali valori della correlazione nei tempi

di arrivo dei fotoni. Queste tecniche hanno effettivamente traghettato l'ottica sperimentale classica a quella quantistica e hanno, di fatto, fondato il campo dell'ottica quantistica. Una delle domande teoriche più rilevanti del periodo era dunque quale fosse l'operatore densità che descriveva un tale campo elettromagnetico.

In questa temperie arriva quindi la lettera di Glauber. Egli considera qui il campo elettrico descritto non più tramite la canonica base di Fock dei modi del campo, ma partendo da questa e dagli stati di Schrödinger, egli definisce *stati coerenti* gli stati:

$$|\alpha_k\rangle = e^{-\frac{|\alpha_k|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_k^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

dove α_k sono numeri complessi e il pedice k indica, com'è consuetudine, vettore d'onda e polarizzazione. Delle proprietà di questi stati Glauber usa solo la risoluzione dell'identità:

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha_k\rangle \langle \alpha_k| d^{(2)}\alpha_k = 1$$

per ottenere l'operatore densità generale della radiazione nella forma⁶:

$$\rho = \int \int \Pi_k \mathcal{P}(\alpha_k, \alpha'_k) |\alpha_k\rangle \langle \alpha'_k| d^{(2)}\alpha_k d^{(2)}\alpha'_k$$

Tale operatore densità è completamente calcolato nel caso di raggio di luce incoerente. Glauber considera poi il problema della correlazione dei fotoni. Definisce inoltre *luce perfettamente coerente* quella che si può fattorizzare come:

$$\Pi_k |\alpha_k\rangle \langle \alpha_k|$$

Considera allora l'operatore densità del maser e in opposizione a Mandel e Wolf, argomenta correttamente che tale operatore densità non può essere simile a quello della radiazione incoerente ma, semmai, molto simile al caso perfettamente coerente.

È con quest'articolo, quindi, che nasce il termine "Stato coerente"; è quindi chiaro il senso del termine: il concetto ottico di luce coerente è riportato ai singoli stati quantistici in cui tale stato può essere fattorizzato.

⁶Per fissare le idee si consideri il generico stato puro del campo $|\psi\rangle = \Pi_k p_k |\psi_k\rangle$ di operatore densità $|\psi\rangle \langle \psi| = \Pi_k |p_k|^2 |\psi_k\rangle \langle \psi_k|$, e si consideri inoltre lo sviluppo in stati coerenti del singolo modo $|\psi_k\rangle = \int P(\alpha_k) |\alpha_k\rangle d^{(2)}\alpha_k$. Con queste posizioni si trova per il generico stato puro, l'operatore densità:

$$|\psi\rangle \langle \psi| = \Pi_k |p_k|^2 \int \int P(\alpha_k) \overline{P(\alpha'_k)} |\alpha_k\rangle \langle \alpha'_k| d^{(2)}\alpha_k d^{(2)}\alpha'_k$$

ossia quanto espresso da Glauber, con $\mathcal{P}(\alpha_k, \alpha'_k) = |p_k|^2 P(\alpha_k) \overline{P(\alpha'_k)}$.

Le miscele statistiche, invece, si presentano come sovrapposizioni di tali stati puri, e la sommatoria dei tre fattori qui considerati non è in generale fattorizzabile a sua volta.

Consideriamo adesso il successivo importante contributo, quello di Ennackal Chandy George Sudarshan [17]: *Equivalence of semiclassical and quantum mechanical description of statistical light beams*. Ricevuto il primo marzo 1963 da *Physical Review Letters*, dopo che Sudarshan aveva letto la lettera precedente di Glauber, che cita, ma prima che potesse leggere su *Physical Review* i due articoli successivi di Glauber di cui parleremo, che furono pubblicati nei numeri di giugno e settembre.

Sudarshan era un trentunenne indiano formatosi a Madras, che aveva conseguito il dottorato all'Università di Rochester e aveva, anche lui significativamente, svolto ricerca con Schwinger a Harvard, con una borsa post-dottorato.

In questa lettera Sudarshan compie il passo successivo rispetto a Glauber. Scrivendo lo stato coerente $|z\rangle = |re^{i\theta}\rangle$, e usando la proprietà degli stati coerenti:

$$\int \frac{d\theta}{2\pi} |re^{i\theta}\rangle \langle re^{i\theta}| = e^{-r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n!} |n\rangle \langle n|$$

scrive il generico operatore densità a un grado di libertà

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \rho(n, n') |n\rangle \langle n'|$$

nella forma diagonale:

$$\rho = \int d^2z \phi(z) |z\rangle \langle z|$$

(la relazione fra $\rho(n, n')$ e $\phi(z)$ è complicata e poco illuminante). È un fatto ben noto che da una diagonalizzazione

discendono sempre grandi semplificazioni tecniche; in questo caso se O è un operatore normalmente ordinato, ad esempio $O = (a^\dagger)^\lambda a^\mu$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{N}$, sfruttando il fatto che gli stati coerenti sono autostati dell'operatore di annichilazione, il suo valore di aspettazione vale:

$$\text{Tr}(\rho O) = \int d^2z \phi(z) \bar{z}^\lambda z^\mu$$

Questo corrisponde al valore di aspettazione della funzione complessa classica $\bar{z}^\lambda z^\mu$ per una funzione di distribuzione $\phi(z)$ sul piano complesso. Quindi, conclude Sudarshan, ogni stato statistico quantistico può essere descritto biunivocamente da una distribuzione di probabilità classica⁷!

Prego il lettore di considerare l'importanza teorica della conclusione cui è giunto Sudarshan. Questo non è un contributo meramente tecnico, bensì è l'identificazione di una proprietà strutturale, una proprietà che s'iscrive nel solco del progetto di Klauder di esprimere la irrinunciabile ricchezza del mondo quantistico in uno spazio di etichette cui si applicano le regole del mondo classico. O per lo meno lo sarebbe del tutto se la corrispondenza non fosse biunivoca, ma lasciasse spazio a stati quantistici non descrivibili classicamente; su quest'aspetto torneremo fra poco.

Fra le conseguenze di quest'affinità di programma è da notare che è comprensibile come siano proprio questi due ricercatori a collaborare per la stesura di quel libro che uscirà

⁷Il caso a infiniti gradi di libertà del campo elettromagnetico si ottiene per semplice generalizzazione da questo.

quattro anni dopo e che, come abbiamo già detto, resterà un punto di riferimento del settore per molti anni.

Un mese e mezzo dopo avere ricevuto da Glauber la prima lettera (l'11 febbraio 1963), *Physical Review* riceve dallo stesso autore l'articolo [15] *The Quantum Theory of Optical Coherence* che sarà seguito il 29 aprile da [16] *Coherent and Incoherent States of the Radiation Field*. Questi articoli sono il pieno sviluppo delle idee introdotte nella lettera⁸.

Non entreremo nel dettaglio dell'analisi di questi articoli per due ordini di motivi: l'interesse generale che li caratterizza è quello di ampliare il concetto classico di coerenza, basato sulla misura di intensità in fenomeni d'interferenza, a un concetto intrinsecamente quantistico di coerenza, capace di dare adeguata descrizione del maser. Questo interesse, di fondamento per l'ottica quantistica, esula però dal nostro campo di studio. Per quanto concerne invece propriamente gli stati coerenti e le loro proprietà, completamente sviluppate nel secondo di questi articoli, si rimanda all'appendice sugli stati coerenti canonici, poiché è proprio questa la forma in cui Glauber li presenta in quest'articolo.

Ciò che invece è necessario dire è che Glauber in questo secondo articolo introduce anch'egli la rappresentazione diagonale su stati coerenti, come Sudarshan, chiamandola “rapp-

⁸Gli articoli e le lettere di Klauder, Glauber e Sudarshan sono presenti nella raccolta [23]. I soli articoli di Glauber e la lettera di Sudarshan possono anche essere letti in un formato più adeguato in [24]. Questa ultima referenza, essendo focalizzata sulla coerenza in ottica, infatti, non contiene i lavori di Klauder che abbiamo citato.

representazione P ". Con questo nome, o al più come "rappresentazione diagonale di Glauber-Sudarshan" sarà nota in seguito, sebbene, propriamente, sia stata introdotta da Sudarshan. Su questo problema è opportuno citare direttamente Glauber:

During the completion of the present paper a note by Sudarshan has appeared which deals with some of the problems of photon statistics that have been treated here. Sudarshan has observed the existence of what we have called the P representation of the density operator and has stated its connection with the representation based on the n -quantum states. To that extent, his work agrees with ours in Secs. VII and IX. He has, however, made a number of statements which appear to attach an altogether different interpretation to the P representation. In particular, he regards its existence as demonstrating the "complete equivalence" of the classical and quantum mechanical approaches to photon statistics. He states further that there is a "one-to-one correspondence" between the weight functions P and the probability distributions for the held amplitudes of classical theory.

The relation between the P representation and classical theory has already been discussed at some length in Secs. VII-IX. We have shown there that the weight function $P(\alpha)$ is, in general, an in-

trinsically quantum-mechanical structure and not derivable from classical arguments. In the limit $\hbar \rightarrow 0$, which corresponds to large amplitudes of excitation for the modes, the weight functions $P(\alpha)$ may approach classical probability functions as asymptotic forms. Since infinitely many quantum states of the field may approach the same asymptotic form, it is clear that the correspondence between the weight functions $P(\alpha)$ and classical probability distributions is not at all one-to-one.

3.4.1 La controversia del Nobel

Si sarebbe potuto senza dubbio concludere qui questo capitolo dedicato alla storia degli stati coerenti canonici, ma è necessario citare un recente evento che a questa si riferisce: l'inevitabile controversia sull'attribuzione del premio Nobel. Nel 2005, infatti, fu attribuito il premio Nobel a Glauber "per il suo contributo alla teoria quantistica della coerenza ottica"⁹. Ritenendo ingiusta l'esclusione di Sudarshan, svariati fisici indiani scrissero una lettera di protesta all'Accademia Reale di Svezia¹⁰. Anche Sudarshan scrisse all'Accademia svedese una lettera di cui presentiamo alcuni estratti¹¹:

⁹http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2005/index.html#

¹⁰Cfr. il quotidiano in lingua inglese *Hindustan Times*:

<http://www.hindustantimes.com/News-Feed/science/Indian-physicist-cries-foul-over-Nobel-miss/Article1-213327.aspx>

¹¹Dalla rivista quindicinale indiana in lingua inglese *Frontline*:
<http://www.flonnet.com/fl2224/stories/20051202002610200.htm>

In the announcement of the 2005 Physics Nobel Prize, the Swedish Royal Academy has chosen R.J. Glauber to be awarded half of the prize¹². The prize winners are chosen by the Royal Academy, but no one has the right to take my discoveries and formulations and ascribe them to someone else!

[...] The correct formulation of the quantum mechanical treatment of optics was carried out by me in my paper in 1963. In that I showed that every state can be represented in the diagonal form. [...] This diagonal representation is valid for all fields.

[...] The irony of the situation is that in spite of all these facts being available in print, the diagonal representation instead of being referred to as the Sudarshan representation is dubbed as either the P-Representation (as if Glauber discovered and named it first) or at best as ‘Glauber-Sudarshan’ Representation.

[...] While the distinction of introducing coherent states as basic entities to describe optical fields certainly goes to Glauber, the possibility of using them to describe ‘all’ optical fields (of all intensities) through the diagonal representation is

¹²Il premio è stato diviso, infatti, in due parti, una è stata attribuita a Glauber, e l'altra condivisa dai fisici John Hall e Theodor Hänsch for their contributions to the development of laser-based precision spectroscopy, including the optical frequency comb technique.

certainly due to Sudarshan. Thus there is no need to 'extract' the classical limit [as stated in the Nobel citation]. Sudarshan's work is not merely a mathematical formalism. It is the basic theory underlying all optical fields. All the quantum features are brought out in his diagonal representation.

Se l'affermazione che il premio era stato attribuito a un altro per il proprio lavoro sembra esagerata dal risentimento di Sudarshan, il problema sembra nondimeno esserci: è indubbio infatti che Glauber ha dato complessivamente un grande contributo per vari aspetti alla questione della coerenza, ma è anche vero che il grande successo di "pubblico" della sua teoria potrebbe avere fatto sottovalutare il contributo cruciale di Sudarshan. La mia opinione è che la questione andrebbe spostata al problema generale della politica di attribuzione del Nobel, infatti, più volte è capitato che l'Accademia abbia premiato chi ha dato maggiori contributi, piuttosto che coloro che hanno prodotto singoli risultati di fondamento. Ma su questa differente questione lascio volentieri al lettore l'onere di argomentare la propria opinione.

Capitolo 4

Intervista ad Ali e Gazeau

4.1 Introduzione. Il contesto

L'intervista ai Proff. Ali e Gazeau si è svolta nell'ambito di una loro visita per collaborazione di ricerca con il Prof. Bagarello. La visita si è svolta dal 10 al 16 gennaio 2010 e l'intervista si è svolta mercoledì 13, presso il Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici dell'Università degli Studi di Palermo. La sua durata è di circa un'ora e mezza.

Dell'intervista è stata fatta una registrazione audio e una video. Le registrazioni sono disponibili su DVD-ROM allegato alla versione cartacea della tesi. La registrazione audio è stata per comodità divisa in tre parti ed è anche disponibile all'indirizzo

<http://www.unipa.it/~bagarell/ricerca/attivitascientifica.htm> e

all'indirizzo http://math.unipa.it/~grim/dott_HD_index.htm

I ricercatori avevano precedentemente accolto con molto favore l'idea di una intervista sulla storia degli stati coerenti. Non è stato stabilito anticipatamente uno schema di domande prefissato. All'incontro ha partecipato anche il Prof. Bagarello in qualità di spettatore.

4.2 Terminologia della trascrizione

Descriviamo adesso rapidamente i simboli e la terminologia adottati nella trascrizione dell'intervista.

“A”: Prof. Ali

“G”: Prof. Gazeau

“B”: Prof. Bagarello

“Q”: Dott. Calabrese nel ruolo di intervistatore.

“...”: Ha due significati: all'interno di una frase significa pausa o esitazione laddove al termine o al principio della frase indica una sovrapposizione di voci, queste sono trascritte in modo sequenziale, ma sono pronunziate contemporaneamente.

In generale tutto quanto non è contenuto verbale è indicato fra parentesi quadre. In dettaglio:

“[...]”: Significa che vi è un contenuto verbale non comprensibile (debole, rumoroso, voci sovrapposte, ecc.).

“[?]”: Significa che il termine precedente è stato riconosciuto, ma non in modo certo.

“[termini?]”: Significa che i termini fra parentesi sono compatibili con un contenuto verbale poco riconoscibile.

“[nota]”: Nota del curatore (il Dott. Calabrese in assenza di diverse indicazioni).

“[mm:ss]”: Tempo in Minuti:Secondi dall’inizio della parte (delle tre in cui è divisa la registrazione).

“...”: has two meanings: when present inside a sentence means pause or hesitation, whereas at the beginning or at the end of it, means that other voices are overlapping: these are written sequentially, but are pronounced at the same time.

In general everything that is not verbal content is put in square brackets. In detail:

“[...]”: Means that the verbal content is not understandable (too weak, noisy, overlapping, etc.)

“[?]”: Means that the previous term has been recognized, but not unambiguously.

“[terms?]”: Means that the terms in brackets are compatible with a verbal content not easily recognisable.

“[terms]”: Editing remark.

“[mm:ss]”: Is the time in Minutes:Seconds from the beginning of the part (out of three of which the recording is composed).

4.3 Trascrizione dell’intervista

Q.: Prof Ali, Prof Gazeau, welcome here in Palermo, and thank you for your willingness to participate to this interview

on the history of coherent states. We can, maybe, start with a description of what's your personal experience in this field. Maybe we can start with Prof Ali.

A.: My personal experience. I started out in this field long time ago, and it wasn't through coherent states: we were studying quantum mechanics on phase space, and trying to understand if one could reformulate quantum mechanics in terms of position and momentum at the same time. You realise that quantum mechanics, the standard formulation of quantum mechanics, is either exclusively on position space or exclusively on momentum space. But, for some time, people have tried to develop a formulation of quantum mechanics which would be based on phase space, and this is what I started out looking at, together with Prof Prugovečki in Toronto; and then, once we started doing that, it became clear very quickly that the objects that we were using to get this description, were indeed the coherent states. First of all, the canonical coherent states as one understands them, then the whole family of the coherent states got into it.

Q.: When was this about? ... The year.

A.: This was in around 1975, when I went to Toronto to work with Prof Prugovečki.

Q.: At that time coherent states were from quantum optics, there were canonical coherent states and then some generalisations, group generalisations.

A.: Yes, indeed. By that time, it's just a just a couple of years, I suppose, before that Perelomov's papers on coherent states had already appeared, which put the whole thing on a

group theoretical basis. Yes, but of course canonical coherent states and related squeezed states and things like that [...], were known in quantum optics already and people were using them.

[2:41]

G.: On my side. First time I heard about coherent states was at [...] in a colloquium in Nijmegen, in one of the first sessions of the *International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics*, actually it was the first time I participated in the [/ in that?] colloquium. And there were held there [?] some talks on coherent states, particularly from the French professor in Nice, Rocca, a friend of Lévy-Leblond, he gave a talk on coherent states in statistical physics, but of course I didn't understand anything. And he was speaking to Lévy-Leblond, and I knew him, already from his works and also personally because he was professor [...city?] and in some sense, I was interested by the term "coherent states" but I didn't know at all, what it was. At that moment I was working in atomic physics, trying to give analytic expressions for matrix elements, transition matrix elements, in multiphoton processes in atomic physics, for instance for the hydrogen atoms. You know, for the hydrogen atoms, where we have interactions with the electromagnetic fields, quantised electromagnetic fields, the hydrogen atom can go from one level to another one, and we have to calculate the probability of that event or another event, so it's interesting to calculate in a complete manner the matrix elements. And little by little I was aware that this was connected with group theo-

ry, and I started to establish some complete expressions, by using the rather elaborate formalism of distributions on Lie groups. And again, there, I found that we could express each level state by some action of distribution on the ground state. And it was made by means of integrals of the Lie group, and so on. And I was trying to see what was the origin of this kind of property, and this was the reason why I went back to coherent states later, because I could see that the way of constructing coherent states was in some sense similar. So it was why I came interested in coherent states, I would say really around the end of the 80s. A long time after I made this kind of calculation for the hydrogen atom.

Q.: Can we say that the background was optic physics?

[6:23]

G.: No, not at all. Of course there is quantum optics when we calculate the interactions of atoms with electromagnetic fields. But it wasn't connected with coherent states in optics.

Q.: I meant... in the sense, quantum optics instead of quantum electrodynamics.

G.: No, it was quantum electrodynamics.

Q.: All right, thank you.

G.: It wasn't connected with the coherent states in quantum optics. I became interested really in coherent states, *stricto sensu*, later, when I went to Lyon, I was invited to give a talk on hydrogen atom to mathematicians; it was nearly '85, '86, maybe later, at that moment they told me, one of the mathematicians told me, "We are very interested in coherent states", so for me it was again something interesting to

have a look on, [...] and I started to see what was written in coherent states. I knew already Jean-Pierre Antoine, before Jean-Pierre Antoine I met Twareque [Ali] and I started a bit to work on coherent states with Twareque and Jean-Pierre; and we became aware of a huge literature at the end of the 80s. It was really the beginning [?] of working explicitly on coherent states, by meeting, at the end of the 80s, Twareque and Jean-Pierre.

Q.: OK, I will ask you to describe this cooperation later. At this moment, maybe, Prof Ali can say something more before meeting you, before the start of this cooperation.

[8:27]

A.: Well, you see, once we've discovered that the phase space quantum mechanics that we were trying to develop involved coherent states and that very soon it became clear that the group that was involved, I mean that [?] one could consider the Galilei group itself to be the origin of these coherent states. So then the question arose could one extend this to the relativistic domain, in other words, could one find analogous coherent states using the Poincaré group, and build a sort of phase space quantum mechanics for relativistic systems? And again with Prof Prugovečki I worked on this and we had quite a bit of success in this, in that we could find the whole class of analogous coherent states for the Galilei group. And these were different, only when we look at [?] Perelomov's description of coherent states. What we were doing was rather different. You see, Perelomov was building coherent states basically on, what we now understand, on the

basis of square integrability of a certain group representation. Whereas what we needed was to go from the group to a homogeneous space. So, this is what we did for the Poincaré group, that we looked at a certain homogeneous space, which had properties of a phase space and it was a question of building coherent states on this homogeneous space. So we were able to build a certain family of coherent states over there and with that get what we now call relativistic quantum mechanics on phase space. It's a sort of a natural extension of non-relativistic quantum mechanics on phase space.

Q.: This, you said, you started around '75, when this was set...

[10:18]

A.: Well, you see I started out in Toronto when I first came to Canada in 1975 working with Prugovečki until 1978 when I went to this small province in Canada: Prince Edward Island. Not many people know about it. It's a little isle in the Atlantic, but it's a province by itself. I had a position there for one year and after that I went to Germany, but we continued this collaboration with Prof Prugovečki and by then there were a couple of other students of his who already joined, and there was also Prof Frank Schroeck from Florida who sort of collaborated with us also. So already, there was a group developing.

Q.: May I ask you what was your background, and Prof Prugovečki's as well, before starting this line of research? Purely mathematical physics or whatever?

[11:37]

A.: I have done my PhD on basically foundations of quantum mechanics. What we called fuzzy observables, but not in the sense of not exactly [?], but fuzzy observables in the sense that “observables, which don’t take on sharp values”, so we developed this sort of theory of fuzzy observables in quantum mechanics for my thesis. And that led to the concept of using positive operator-valued measures for observables in physics, and then we found out that in the Ludwig group in Germany another people has done a lot of work in that area. So we needed connection with that. That’s what I did for my thesis actually and then came to work with Prof Prugovečki as a post-doc.

Q.: Where you a student of Prof Prugovečki?

[12:37]

A.: No, in fact, I was a student in the United States, in Rochester, with Prof Emch, Gérard Emch. I was a post-doctoral fellow, with Prof Prugovečki for three years. Then once I got into this, at one point there were certain questions I had with [...] unbounded operators of a certain type, and I knew that Prof Jean-Pierre Antoine had worked on these things, this kind of unbounded operators, the Gelfand triple and things like that. So, once he came to Montréal and we discussed this with him, and he later invited me to Louvain-la-Neuve to spend some time there, and that’s where I met Prof Gazeau and we started this work together.

Q.: Do you mean from a purely operational point of view or algebraic point of view? Because Prof Antoine works a lot on algebras of operators, so I didn’t understand if the

approach at that time was operator analysis or...

[13:50]

A.: It was like this: that when we were studying coherent states for the Poincaré group we obtained the huge representation which we were trying to decompose, and in this decomposition certain unbounded operators appeared, and it seemed that to put the whole thing in proper perspective one needed this Gelfand triple, of which I did not know very much, so this is why I asked Prof Jean-Pierre Antoine, who had done a lot of work on studying this whole thing about Gelfand triples and all that.

[14:30]

G.: And if you remember your first paper with Jean-Pierre was on the Poincaré group.

A.: It was in one dimension.

G.: Yes, one dimension. It was published in Journal of Physics A, maybe?

A.: No, it's *Annales de l'Institut Henri Poincaré*.

G.: *Annales*, yes, *Annales*...

A.: ...*Henri Poincaré*. It specifically dealt with this operator.

G.: ...The first one, the first one...

A.: Yes.

G.: The second one, [...] because at that time I was working on anti-de Sitter space-time. I was in Los Angeles for two years working with Fronsdal and also Flato. You know, trying to [...] [write] quantum field theory on “anti-de Sitter space-time”, not “de Sitter”. Also a common point was in

some sense Stephan De Bièvre, because Stephan De Bièvre... I met him for the first time, I think, in Varna [, Bulgaria] in '86 there was a colloquium in Varna. Stephan De Bièvre also worked with Prugovečki, he worked with Emch. And I was working on coherent states for another type of group which was in the scope of Perelomov, that type of groups, on which Perelomov's construction has to be adapted, it's not the same, and so, I don't remember in which way, but anyway Stephan De Bièvre also was connected in some sense with Jean-Pierre Antoine, with Twareque Ali. I invited to Paris Stephan De Bièvre, he got a position there, so, you know, we started to interact at different levels, when we really worked together, I think starting in '88

A.: '89

G.: But we started the work in '88.

A.: '89 was the year that I was in Louvain-La-Neuve so that's when we started.

G.: Yes, but I didn't know. Before, I didn't know when I started to work on your paper.

A.: Ah, OK.

G.: ... with Jean-Pierre.

Q.: Can you say that at that moment, in some sense, there was the emergence of a community working on this?

G.: Yes, yes... of three persons!

[Laughs]

Q.: Not more?... That's the question, I mean.

[16:52]

A.: Let me add something. Around that time also Gross-

mann, Morlet, Paul... they published their paper on the square integrability of certain representations of non-unimodular groups, and, you know, they wanted to get the wavelet transform from the group-theoretical point of view and they published this beautiful paper at that time. And then we read that paper and we realized that there was an immediate connection to coherent states, the way that we were looking at them.

Q.: You said “that time”... the year?...

A.: Yes I think this paper came out, I think, around 1988, or in December but I don't remember exactly... around that time. So, I was in Louvain-la-Neuve in 1989, so it's around that time that this paper came out and I became aware of wavelets. Thierry Paul had just published his thesis on wavelets at that time. So this was the time when the wavelet community was beginning, you know, a large wavelet community was beginning to form, and we sort of got linked to this community also.

[18:04]

G.: You mean the [...]. First this was on... if I remember... some coherent states for $SL(2, \mathbb{R})$ in the half plane realization,

A.: Not that, not that, the other one, there was [...]....

G.: ...his PhD was on $SL(2, \mathbb{R})$...

A.: Ok, I see...

[18:35]

G.: ...maybe, maybe '85, because I met him when he was very young, we had a discussion in my laboratory, I was not in

mathematical physics, but I was in a laboratory of chemical physics, [...] my calculation in atomic physics before '83. After I joined the mathematical physics group with Rideau, that was in my university Paris 7, the other one was in the other university, Paris 6.

A.: But then a number of other students came into the picture, Antoine had several students who worked on different groups, I mean mathematical groups, developing coherent states and wavelet-like transforms for these groups, so very soon there was a very large community of students and certain researchers working around this, for more than ten years.

Q.: So, but is this little Louvain-la-Neuve community... had it some equivalents? Can we say that there was some kind of school in Louvain-la-Neuve?... Or had you students, or cooperations, in the places where you were?... Is there an equivalent of Louvain-la-Neuve?

[20:00]

A.: ...I don't... You see, in my case I had a couple of students, one after the other, who did their thesis on coherent state-like structures, and wavelet-like structures but [this] wasn't a group in the same sense that they had in Louvain-la-Neuve. I mean in Louvain-la-Neuve they were quite a few people working together and [...peer?] of this. I think the same is...

G.: ...Connected with wavelets.

A.: Connected with wavelets. But, I don't know, I mean, in his case... [...]

G.: No, because I had other fields, quantum field theory in anti de Sitter-space time, I continued, I started at the beginning of the '90s to work on quasi-crystals, so, you know, I had students mainly in other fields. But, I remember, because I was starting strongly in coherent states... so I decided to learn by teaching coherent states; and my first teaching was done, I think, in Bujumbura[, Burundi]. For a colloquium, it was in '89, I prepared something just by using the book of Perelomov. And this was the way for me to enter in the subject [?]. But I entered [through?...] our first paper, I didn't know, you know, really about coherent states, so at the same time I learned by teaching. By teaching and [...] I gave lectures in many places, and increased, because of the material.

Q.: But did you know the book of Klauder and Skagerstam, at that time?

G.: Yes, yes.

Q.: But you choose the one of Perelomov...

G.:... it was a recent book [?], also, I extracted from papers I found in the book by Klauder.

Q.: Yes, but, I mean, at that time.

G.: Yes, yes, at that time.

[22:09]

A.: We were all aware of that work by Klauder and Sudarshan... that [?] physicists... Glauber, as well as Perelomov, and there were lot of other papers that came out around, on that sort of similar topics. Yes, sure indeed, we were aware of them but I think what we succeeded in doing, it was differ-

ent from the other people. In mathematical terms is that we started developing coherent states on a homogeneous space of the group, rather than on the whole group itself. Because that's what is interesting to physics most of the times. You need to get families of coherent states which live on a certain homogeneous space, not on the whole group. And so this, I think, was what we focused on, mainly.

[22:59]

G.: Yes, but in parallel I was interested in physical contexts, this is a reason why I worked on lots of [...] papers, not, of course, from all papers but I was interested in, for instance, the application in statistical physics. I discovered the works by Lieb and Hepp; and also, I think, we should speak about the early episode of Białowieża, because I think, yes, I started to give a talk on common work, I think it was in '89 or '88, on coherent states of the Poincaré group, in Czechoslovakia, in a winter school, in the mountains in Czechoslovakia...

A.: Brno? [...]

G.: No, no ,no, it was... I am completely unable to pronounce that name [?]

[discussion about the name of the place: "Shnittke"?]

G.: ... and because I was invited there by...

A.: Tolar?

[24:07]

G.: No, no, no, it wasn't connected with Tolar, it was connected with Sucek, Sucek [Onkuvesh?] from [short interruption in the recording]. They proposed... Sucek proposed to me, to come in '87 in [...], he contacted me in Varna [?]

because I gave a talk on anti-de Sitter space-time for quantisation, and he proposed to me to come to the school, so I went there [...] and I went back there in '88. And in '88 I gave a talk on coherent states on the Poincaré group, I think. I don't remember exactly, '88 or '89, but there I met Anatol [Odziejewicz] because when I was giving my talk about coherent states for the Poincaré group, common work, I saw [short interruption in the recording] this man raising his hand: "But, I did, we did already!" [Laughs] So, of course I told: "OK, so maybe we have to discuss it afterwards" you know it's not very pleasant when someone tells you: "But we did already!". Of course he didn't do...

A.: ...exactly the same.

G.: ... But it's a [wisher?] way you know to... [...]

[25:31]

G.: If you give a talk, the probability to have a Russian raising his hand and telling: "But it was already done by..."... But when you have a look on the paper, usually you have some common words, not common content. So, anyway, I started to discuss with Odziejewicz and I decided to invite him, he gave me his papers, and he came to Paris in '90, and in '91 he invited me, during a week in March '91, to give a talk in Białystok so I went there and it was the beginning of the story for me, and also for other people [?]. Afterwards he invited me to come back in July '91 for the workshop in Białowieża, but at that time it wasn't a really international workshop. It was confined to Poland and to some other countries from the eastern bloc. But in '91 people came from Paris, you came,

and it was the beginning, I think, of the international extension of this workshop. And it was, during that years, partially devoted to coherent states.

[27:01]

A.: Yes, I know, I must add that this is a different way of looking at coherent states. It is that we and [?] Prof Odziejewicz probably also wants to... now [?] look at this thing... it's a kind of maps from the complex unit disk to a Hilbert space with certain properties, and this was the way in which he looked at and studied coherent states. Which brought in [short interruption in the recording] a lot of complex analysis, and holomorphic functions into the picture, so this was a different way of looking at coherent states, which of course, I personally learned a lot from. And then also trying to do something related to that, there are many things that we have done since then with [?] similar groups, this kind of approach [...] similar groups, this sort of approach, I, look, see that's another direction in which coherent states developed, this complex analytic direction.

[28:05]

Q.: So we are in '90...

A.: '91, '92

G.: '91, '92, [...] to beginning of those contacts with the workshop, and with many other people working on coherent states who were invited; for instance: Perelomov... Emch went there... and many many people... Prugovečki went there...

A.: Even Glauber.

G.: Glauber came also [...]....

A.: Glauber [...] was there, so you know...

Q.: It wasn't [...] to, let's say, mathematical physics...
point of view ...

A.: No, it was wider...

G.: It's still wider...

A.: It's still considerably wider.

Q.: Still, I don't think applications were at the centre of
the attention.

[28:59]

G.: There were some talks on applications, but, I would
say, most of the community comes from mathematics, or
mathematical physics, I would say from mathematics. And
many people come from Russia or from Bialorussia, because
the contacts of Anatol with these people are very strong.

Q.: Yes, the strong [Russian] school of mathematical physics.

A.: This is highly theoretical maybe there... Most of the
time there were excellent lectures but with a mathematical
content, and even when they are on physical topics they tend
to be highly mathematical and theoretical. I mean, there were
[...] more experimental things on quantum optics, and things
like that, we discussed, but that's not very often.

G.: [At that time?] it wasn't also politically correct to ask
questions about concrete models, concrete examples [...]

A.: Yes, this was [...]

[...]

G.: ...About existence theorems and so on [...]

[30:12]

[End of Part I - Beginning of Part II]

Q.: So, these were the early '90s, then what happened?

G.: We started a series of papers on the Poincaré group, and other groups, de Sitter, we started to explore other groups, by adopting that rule of square integrability, and also we started to examine the question of quantisation [short interruption in the recording] by using the coherent states, at that time, and specially for the Poincaré group... and it was developing [...] we have a series of long papers, and particularly a review paper which appeared in...

Q.: ...in '95, this one?

G.: on that same time it was the beginning of the book, you know [that] one?

Q.: Yes this was I wanted to ask you, the passage from this review to the book, and what happened in between...

G.: I think Jean-Pierre [Antoine] [was?] contacted by Springer [Prof. Antoine maintains instead that Prof. Ali was contacted], after this paper. This paper is well [?] quoted...

A.: ...Yes, it's this paper, after... we just started, you know, we had done a certain amount of work in this area, it was time to write the review paper, so we collaborated for... The review paper took a bit of time, so after the review paper came out then a couple of publishing houses wanted us to write a book on that, and Springer was one of those, and so we agreed to write a book for Springer, and so we did.

Q.: This was the first review with this point of view, maybe, mathematical physics, because before, in 1990, there was the review by Zhang, Feng and Gilmore.

[2:02]

A.: ... Gilmore [...], yes, yes, but this was more physical.

G.: ... exactly, exactly. ... more physical, and with coherent states only pertaining to the scope of Perelomov, coherent states which are constructed from, I think, the Perelomov method. But some of them were found before Perelomov, you know, for instance the spin, the so-called spin coherent states, depending on the field [?] they are called the Bloch states, spin coherent states or atomic coherent states, and they were found at the end of 60s, the beginning of the 70s, by Gilmore and also by Radcliffe, so different people. And they, I think Gilmore, already was, I don't remember [...], but I think he was thinking in terms of group theory, but not Radcliffe, I don't think so.

[3:06]

A.: No, Gilmore also had it, but it was a different sort of approach... Sorry, no, Gilmore, the group theory was there, but people had different approaches to this. What we analysed [was?] two mathematical quantities that we sort of abstracted from the whole thing. One was this square integrable group representation, then if we could extend aspects of that, and go from the whole group to a quotient space of the group. This was the one thing. The other thing that one realises, is that this isn't apparent in Perelomov, because, you see, Perelomov does not insist on the resolution of the identity. He defines his coherent states in a certain way, via a group, but leaves it at that, there's no further constraint on the system, OK, but we always, because physical reasons,

always put the constraint that the set of coherent states have to satisfy a resolution of the identity.

G.: Or, that it's a frame.

[4:13]

A.: Or, that it's a frame. Now, as soon as you do that, you realise that you can invent a whole structure inside a reproducing kernel Hilbert space. And then there are associated functional analytic objects, that come up like positive operator valued measures, and all these things. So we were able to exploit the original things, and that also with the connection with quantisation theory. [...]...

G.: ...With wavelets...

[4:37]

A.: ...With wavelets quantisation [?] and Berezin-Toeplitz quantisation, that's all of that things of Berezin's work, on the one hand, and then signal analysis. This being so [?], we saw the natural link between these things: quantisation theory, signal processing, wavelets; all of these things [were?] somehow connected.

Q.: When did it happen?

A.: This was, OK, let's see [...],...

G.: [...] beginning of the 90s.

A.: Yes, yes.

G.: Now it is in continuous development.

[5:13]

A.: Now our book is precisely based on this philosophy that if we look at it from this point of view then all these things come into the picture.

G.: And in parallel I continued to give these lectures and I really constructed, you know, this set of lectures on coherent states because I was invited to give lectures for PhD students in Strasbourg in '95, and I came back in '96. I started to give also the same type of lectures in Paris at the *École Normale Supérieure*, for two years. And I gave these kinds of lectures in Louvain-la Neuve, I gave in [EFS?] and the result [...].

A.: Still we can find some of your lectures, two on four, on the web.

[6:15]

G.: Yes because I came back also to Strasbourg, but later, [...] I gave also in Brazil [...]. And each time I became aware that we could also approach the coherent state construction, not in the group theoretical way, but just by considering in some sense the reproducing kernel Hilbert space, but even without [...] that worked, and little by little we approached also the probabilistic content of coherent states, which is in my opinion very important, you have a very interesting duality. But this corresponds to very recent works, with Twareque, and also [Barvaraily?...]. There is a duality in each construction of coherent states, you know this kind of probabilistic content is very important. And this, also, allows us to go back to quantum optics, in the sense that this probability content is connected with the probability of counting something, of measuring something [...].

[7:44]

A.: You see there is a very interesting aspect of coherent states in this connection, for example, if you take the classical

binomial distribution or if you take the classical negative binomial distribution, in classical statistics, ordinary statistics, or you take the Poisson distribution, now, corresponding to each one of these kind of distributions, discrete distributions, you can write down the coherent state, which follows naturally, and in some sense it's like the square root of the whole distribution... which is really [?] interesting.

[8:20]

G.: And I think there is also something which is very deep behind this, to understand the relation between classical physics and quantum physics.

Q.: Classical statistics?

A.: Yes, classical statistics, Poisson distribution, you may consider that telephone switchboard and just observe the number of telephone calls coming in at a given time. That's a Poisson distribution. And this corresponds to canonical coherent states in a rather natural way. And so we readily [?] see another situation with the binomial distribution [...] you have the spin coherent states coming in.

[8:59]

G.: So you have a really new point of view on coherent states. So you don't need at all group theory at a certain moment. Again we go back, in some sense, to signal analysis. We can delete completely the physical context, we are not forced to speak about phase space and so on. We can enlarge the scope, we can just deal with measure spaces, and POVM, and behind the notion of POVM, there is the analysis of measure sets, from different points of view, so it is really very large.

So we need quantum mechanics, in some sense, to extend the formalism [...]. For instance we can like this quantise my... pullover.

[Laughs]

Q.: What's the coherent state of your pullover?

G.: You can quantise the states with only two elements.

Q.: So, this was about the book, wasn't it?

A.: Even beyond that book...

Q.: ...even beyond.

A.: The book was writing down in some sort of coherent way what we knew up to then.

[10:22]

G.: [...] in part in wavelet analysis also. So it is a book where we put together [?] the two domains, and I think this is also the originality of the book. To put together all these things [?] which were not known by many many people.

A.: Even now you see people... I have given these lectures in different places, even recently, last year, around May-June, I was in Bangalore in India, and I gave the whole series of lectures on the continuous wavelet transform in the context of coherent states. And there were people from signal analysis, people who do day to day image processing, and for most of them this was a new way of looking at it which they had not considered before. It seems like people in image processing, signal processing, image analysis and all of that, they don't really use group theory that much.

[11:35]

G.: [this leads?] to discretisation problems [...], problems of convergence, they adopt different criteria...

A.: ...That's right.

Q.: Is it also a problem of formation? I mean, studying... it's probably that they do not study group theory, if they are more [...] engineering and so on...

G.: [...] quantum mechanics... so they don't know [?] that formalism. But now, when you start to introduce the concept of the resolution of the identity, continuous resolution of the identity to physicists, a large, large majority of people do not understand what it really is. They know the resolution of the identity for an orthonormal basis, it is in every textbook in quantum mechanics. But as soon as you go to some integral, with objects that are non-orthogonal they are lost, they don't understand [?]...

Q.: This leads us naturally to frames, what can you say about that?

[12:42]

G.: ...if people have just a physics background, they have some difficulty to... of course they will accept. But they have some difficulties to manipulate this kind of objects [?].

A.: No, but I must say also in the signal processing community people who deal with frames all the time, deal with discrete frames [?], they hardly ever look at continuous frames, which are coherent states. So, we had a paper in the 90s, I forget exactly when this was, it was... Two papers... one in the *Annales [de l'Institut] Henri Poincaré* ...it was three papers... two [3] [4] in the *Annales Henry Poincaré*, and one

[two: [5] [6] - *Prof. Antoine's correction*] in the *Annals of Physics*, which studied frames from this point of view, but continuous frames, which were a sort of extensions of the notion of coherent states, as we think [?]. But somehow that's not objects which people who really work in frame theory deal with very much. You see, I mean, from our point of view, you can take a continuous frame and build a measure with respect to which it resolves the identity. You can take a discrete measure, a measure which is supported on a discrete number of points, and then that leads to a distribution, it's a unifying concept.

[14:10]

Q.: Let's go back to the story, in a sense, can you fix important points, such... we can speak for instance about Oak Ridge in '93, or other points that were important for this history, can you say something about your relationship with other important events in the field, in these years between 90s and the first years of 21st century?

[14:56]

G.: [...] Jean-Pierre Antoine was there.

A.: Jean-Pierre Antoine was more connected to the [...]

Q.: Was it felt as something important?

G.: At that time for me, you know, I was new in that subject. So I didn't know a lot of the community. And there was that series of workshops in Białowieża, but also Colloquia on group-theoretical methods in physics, at that time it was [Evrié?], and there were many talks about coherent states at that time. I have some books of that series I think that it's

interesting to see... There were also a series of colloquia on squeezed states...

A.: Yes.

G.: I can't remember when they started. They started under the [...] of [...Key?] and another person [...].

A.: ...[Ken?]... Yes.

[15:57]

G.: ... and they were also speaking a lot about coherent states, but more oriented to quantum optics and quantum measurements and so on. Of course afterwards... no, at the same time, at the beginning of the '90s, in '94, people started to work on Quantum groups, the q-fashion, you know, and many people generalized the notion of coherent state within this context [short interruption in the recording], q-coherent states. And this was the beginning of huge papers, very technical, you know, you take the object and you start to generalize... So I participated, even I was one of the organisers, of a series of colloquia in [Haarlem?] on quantum groups, and there were people speaking about q-coherent states in different ways, it was also in the 90s, lots and lots of papers on quantum groups, and so on. You can find still many papers, but it is not, now, only "q" but it's "q", "p", " η ", " ϑ ", " Ψ ", "deformation" and also the corresponding coherent state, and so on. And in quantum optics people started to, of course to, generalize the notion of coherent states with squeezed states, but also with non-linear coherent states. This was done, non-linear coherent states, I think people started to work on that at the end of the 80s, beginning of the 90s, Russian people

like of course Manko, Dodonov, [other two names]

[17:57]

A.: There was also the work of Sudarshan and these Indians... Sudarshan, and these people and a whole group in Madras, looked at non-linear coherent states.

G.: You mean [Verolivissa...?].

A.: No, in India: Agarwal, Sudarshan...

G.: Ah these people... In Montréal... No, are you talking in Montréal?

A.: No, Madras.

G.: Ah yes, OK, OK. Yes, of course... Agarwal also introduced the notion of photon added coherent states, and also...

A.: Photon added coherent states and then *even* and *odd* coherent states [...].

G.. But they are people really coming from quantum optics, they know very well quantum optics, what is the connection with experimental physics, and so on... Agarwal particularly.

[18:47]

A.: Yes, there is yet another direction in which the canonical coherent states have been generalised, you see, when you look at [?] canonical coherent states, there are certain number of properties that they have; and depending on which properties you want to retain in that generalisation and which properties you give up, you get one kind of generalisation or another. So there this generalisation which is the generalisation of this concept of minimal uncertainty states, because the

canonical coherent states are minimal uncertainty states. So then one tries to construct similar states which will satisfy a kind of minimal uncertainty with respect to other operators. And this led to the development of the so-called intelligent states, and there is a whole literature [...] that.

[19:33]

Q.: Squeezed states, as well.

A.: Well, squeezed states are also minimal uncertainty states, in a different way, then you have the...

Q.: ... $\Delta q \Delta p$ [...] the ellipse.

A.: [...] the squeezing [...]

G.: [...], yes...

A.: ...yes, but is still a minimal uncertainty state, yes.

[20:01]

G.: Also you have a specific vocabulary. Each time some object in physics, particular objects, develops within a domain like, for instance, quantum computation, quantum information, people again introduce a new language, a new vocabulary, they want to [...short interruption in the recording] common [...] with specific language. But when you have a look on those works very often you find the same mathematical object, but it is dressed in different clothes.

A.: [...] in quantum information, quantum computing, lots of these ideas from coherent states have been used or rediscovered...

G.: Specially the notion of POVM, but they use the term POVM.

A.: Yes, [there is?] a kind of interesting names for POVM,

for example in the signal processing community they often [refer to them?] as Daubechies operators. Now POVMs were observed and used in physics long before Daubechies was born.

Q.: [to G.] You didn't say anything about an important paper of '98 you wrote with Prof Klauder... I'm interested in knowing something about it.

[21:41]

G.: This was [...] I invited Klauder [...] in Paris, and I was giving a lecture on coherent states, and Klauder saw a paper I wrote with someone in Montréal, Champagne, Bernard Champagne, where I was using, you know, the idea of Odziejewicz to put... but this idea certainly other people in another context use it, in quantum optics is connected with the Box function. Instead of using integers, and factorials of integers, which is used in standard coherent states: $z^n/\sqrt{n!}$, you just replace $\sqrt{n!}$ by something else which is a function of n . But in the paper by Odziejewicz about coherent states map he introduced, in some sense, this kind of factorial associated to sequences of numbers: x_0, x_1, x_2, x_3 and so on. So like this, you can introduce a factorial. And the idea of Klauder was to continue the previous work he did, before, about the requirements for coherent states. The requirements for coherent states - it was a paper by Klauder he made in '95 - we should have the continuity from the phase space, complex plane, to the Hilbert space in which the coherent states live, the second requirement is the resolution of the unity, the third one is temporal stability, and we just added a fourth one: the ac-

tion identity. Which was connected with the specific form we gave to the square root of $x_n!$. And also we made some extension of that to continuous spectra, because we interpreted the sequence of numbers as the spectrum of some Hamiltonian, which was involved in temporal stability. So it was [...]. Yes. I think the paper was well quoted because of the name of Klauder.

[Laughs]

[24:35]

G.: Afterwards... we did [a sequel to?] this paper for the application of those coherent states for the infinite square well, with Jean-Pierre Antoine, with Karol Penson, with Monceau, and also with John Klauder, of course, you have the “Klauder effect”... Ah yes! If you put the name of Klauder [...]

Q.: What can you say about the person? Your cooperation with him.

[25:12]

A.: Sorry, may I just interject, a [...common/comment], observation [...] that in that paper there was another thing that was rather radically different from all other descriptions of coherent states in which... you see, the resolution of the identity in standard coherent state theory, or coherent state theory that we knew up to then, was always via a proper measure, an actual measure on the space. Now that was replaced, for the Klauder kind of coherent states, that was replaced by a Bohr measure, which is not really a measure in the measure theoretic sense, it's a kind of distribution, on ...

G.: [... not] remember [laughing]

A.: ... it's a sort of distribution on the system, [it was?] defined as a limit or something like that. So it's a different kind of the resolution of the identity which was put in it. It's called a Bohr measure, but it's not really a measure in the...

G.: ...You have to average in order...

A.: Yes, yes.

G.: ...[...] like the power. You know when you aren't able to define the energy, you can still define the power, and the power is defined in the way that you integrate on some interval, you divide by the length of the interval, afterward you take the length of the interval [...infinity?]. And you still have the concept of power for many, many objects, but you don't have the concept of energy. The same.

A.: Yes, and of course this, with this definition of measure... the natural Hilbert spaces that it generates are no longer separable. However the coherent states, they sort of pick out of these huge non-separable Hilbert spaces a separable subspace. That's fascinating, that's fascinating from a mathematical point of view.

[27:01]

G.: Yes, and it should be. And [...] because [...] at a certain moment, by all those they [?] searches about loop gravity. And they had a paper by... it was a paper presenting the [...] model, understand what they do in loop quantum gravity. You know those people they try to give the space-time the reality in terms of observables, in terms of quantum operators and spectra. The main developer of this kind of things

is Carlo Rovelli, another person in United States, Ashtekar, also some people in Germany. So you have a community of people working on that, and they wrote rather well and they have an incredible rate of citations. Yes because, you know, as soon of you touch gravity and... Still the dream of ...

[...]

Q.: ...unification...

G.: ... dream of... about Physics in terms of pure numbers. [...] Anyway they are quite isolated in the gravity community. It's like non-commutative geometry, Connes' non-commutative geometry, they are respected, but they are quite isolated. So you have people working on covariant quantisation of gravity, you have people working in loop quantum gravity, you have people working in string theory, superstring, and you can see, you know, the communication between people is not so good. You are part of different communities and... But anyway, I was interested by the paper by Ashtekar and another person, and again there is this kind of measure which is involved. So it's very interesting to see if it's possible to quantise the real line, like the space, which is a toy, it's a toy model... by just using a specific type of coherent states, which are, actually, issued from the coherent states on the circle... I will speak about the coherent states on the circle, because it's a very interesting story... and you just adapt those coherent states, and you can quantise with them the real line in order to get...

B.: Maybe we have to change the batteries.

Q.: Maybe we can have a break.

[30:17 - break]

[*End of Part II - Beginning of Part III*]

Q.: You were talking about, maybe, coherent states on the circle or something like that?

G.: This is also a very interesting story, because I think the first ones [already?] to define properly coherent states on the circle, were Stéphane Debièvre with someone from Valladolid.

A.: Yes, yes.

G.: they presented this in Białowieża [...] but it was published in the proceedings¹. And few years afterwards there was a paper from Łódź in Poland: Kowalski, Rembielinski and Papaloucas, someone from Greece. And they published a paper in Journal of Physics A, I think, about the coherent states on the circle². Of course I didn't think quoted the paper by Debièvre and Fernandez, that's the name of the other one, or Rodriguez [González] and they became very famous, very quoted for that, you know, those people from Łódź.

[1:24]

¹De Bièvre, S. and González, J.A. (1993) *Semiclassical behaviour of coherent states on the circle*, in Quantization and Coherent States Methods in Physics (eds Odziejewicz, A. et al.), World Scientific, Singapore.

Gonzalez and del Olmo in the article: De Bièvre, S. and del Olmo M. A. (1998) *Coherent state on the circle* <http://fr.arxiv.org/abs/quant-ph/9809020v1> concerning the introduction of coherent states on the circle, make also reference to the following article: S. De Bièvre and J. A. González, (1992) *Semiclassical behaviour of the Weyl correspondence on the circle*, in Group theoretical methods in physics I, Ciemat, Madrid.

²Kowalski, K., Rembielinski, J. and Papaloucas, L.C. (1996) *Coherent states for a quantum particle on a circle*, J. Phys. A: Math. Gen., 29, 4149.

And now they continue to produce papers, they extended the construction to the sphere, but they didn't acknowledge the fact that the construction was already done, with different methods by people before them, because it was published in proceedings and not in a regular journal. These [are ...] this kind of persons, you know, they don't accept the fact... if you publish a new result, just you put on arXiv, I think the result should be acknowledged by those people who first [... claim? publicly...] these people, no, they refuse, it should be published. Sometimes it will not be published because you now, the referees, and so on, and so on, they won't accept, and so on. But what is the connection with loop quantum gravity? They became very famous also, because those people in loop quantum gravity, they use this kind of coherent states to develop the theory of space-time objects as operators with spectrum. They use to some extent the works by those people in Łódź. They are good works; of course now they published again by repeating "we are the first to have done this" and "to have done this". But those people came to Białowieża also, and also came to Białowieża a mathematician called Hall.

A.: Brian Hall.

[3:13]

G.: Yes, who extended the works of the Polish persons to the sphere, to higher dimensional spheres. So it was also a kind of construction of coherent states in some directions. And that work was, I repeat, used a lot by people in loop quantum gravity. But in loop quantum gravity, you know, it's incredibly technical, at a certain moment, you know, you

don't follow. You have some person from [...] who also was a student of Karstrup [Hans A.] [Gianni?] became quite famous also within the context of loop quantum gravity, by using this kind of coherent states. So it's another direction. But I want also to add... so if I speak too much... that the motivation of the paper with Champagne about the sequence of numbers, you know. Why I wanted to use the sequence of numbers to build the coherent states? Because I was working on quasi-crystals, and working within the context of quasi-crystals, I would work on the concept of tau-integers or beta-integers, that means algebraic irrational numbers, which replace the integers, when you choose as a basis, instead of 2 or 3 or... you choose algebraic integers like the golden mean and so on. So for me, I wanted to see what happens if it was possible to find the measure for the resolution of the identity when you replace n by those beta-integers. So you wanted the original motivation of... when we did this paper with Klauder it was, in some sense also the result of this kind of exploration, but, of course, it was impossible to solve the moment problem for this kind of numbers. It's not possible... Actually it does not exist, we have to try something else.

Q.: OK. Have you got anything more to say about last decade. What happened in your view of this field?

[5:55]

A.: All right. You see there, from a personal point of view, there are several directions in which I would like to look at coherent states, also you see, coherent states are applied in many different areas, of course, of physical applications, in-

interesting physical applications, in different areas, and there's a lot of mathematics that comes out of these things. For example, recently, studying Landau levels and coherent states associated with that... [there is a?] lot of beautiful mathematics associated to that... But there are other things also, you see, most of the time when people talk about coherent states, they talk about what one might call scalar coherent states. But then there is another whole family of coherent states with people in nuclear physics have looked at before, these are the so-called vector coherent states. So, sometimes they can also be given, be seen as having a group theoretical origin and this is interesting to consider also, that's one direction.

[7:04]

Secondly, what I think is, what is interesting to me now, is extending them in another way. Sometimes we want to build coherent states using certain families of matrices, so one has an algebra of matrices over which one is trying to build coherent states. So that one can ask a question of if it is possible to build coherent states over, let's say, an arbitrary C^* -algebra, or many arbitrary C^* -algebras and families of C^* -algebras. This is an interesting question and something that we have learned recently, very recently, it's that it is possible to extend the notion of coherent states, which are objects in certain Hilbert spaces. Vector coherent states are also objects in certain Hilbert spaces. So to go from Hilbert spaces to Hilbert modules, and a Hilbert module is like a Hilbert space except that the scalar product is not defined

over the complexes, it is defined over a C^* -algebra. So, you see, a Hilbert space is trivially a Hilbert module, because the scalar product is defined over the complexes, which is also a C^* -algebra, but a very trivial sort C^* -algebra, a simple sort of C^* -algebra...

Q.: Commutative, and so on...

[8:23]

A.: Yes, commutative, and so on... So we have been studying this question for some time and already something that you can see, is all the known coherent states can be sort of embedded inside coherent states built over Hilbert modules... So in some sense it's an interesting kind of generalisation. What sort of physical applications it might have, what unknown mathematical questions it might relate to, that's still not so clear; but one knows, for example, that quantum groups, that natural framework for discussing quantum groups is Hilbert modules. So, perhaps, one can relate some of these coherent states to quantum groups, this might be one possibility. There is also the possibility of relating this to non-commutative geometries we have some vague idea of what is still to be done. So this is one interesting, to me at least, interesting direction in which I would like to prosecute. But apart from that, what has happened in the field of coherent states, you know, quantum optics journals are always talking about new coherent states being, you know... proposing new coherent states... other types of coherent states... but these are mathematically within the class that we all know, they are new in the sense that they come with different physical appli-

cations, new physical applications. So that's, I suppose, how to feel this progressing... And of course, people in quantum information theory, people in quantum computing, are using coherent states, particularly coherent states coming from compact groups in an essential way, so that's another way.

Q.: What's the connexion? I really can't figure it out.

[10:19]

A.: I personally don't know so much about it, but I have seen the use of spin coherent states in quantum optics [?...]

Q.: Ah, Bloch states...

A.: Yes, that is one type of coherent states, and whether there is a systematic theory behind it, I don't really know.

G.: You have [...] several papers, several works, for the use of coherent states in quantum computation, in quantum information. One person in the line of Perelomov, a Russian Soviet physicist, or mathematical physicist, his name is Klyachko, he is professor in Ankara. And he made some interesting works about coherent states in quantum information, mathematically [...] testing. The impossibility of using coherent states coming from Perelomov's construction to quantum information.

[11:39]

Some other people, they tried, for instance, to entangle systems where instead of orthonormal states they put non-orthogonal states, like coherent states.

So you have a lot and a lot of researches like these, and also you have of course the use of POVM. Because what is a POVM? It's a measurement apparatus where the pointer

does not go to a state which is orthogonal exactly to another one... So it's the reason why POVM... normally if the pointer goes to states which are orthogonal to each other, you have a "projector operator valued measure", not "positive operator valued measure". Positive operator valued measure is a lot more general, it gives you a lot of more freedom: it's actually the reality. You know the construction of orthogonal states in physics is not so obvious...

Q.: It's the exception.

[13:06]

G.: ...sure, you have a lot of noise, a lot of things, in reality you never have exactly a pure state. So you have to enlarge the mathematical context to POVM.

A.: People working on the foundations of quantum mechanics have done a lot of work trying to understand positive operator valued measures as, sort of, smeared out versions of projection valued measures. So you can take a set of projection valued measures and add different weights to them or even a continuous family of weights and construct positive operator valued measures. This would mean that instead of measuring some objects or some quantity exactly within a certain set, you are measuring it with a certain probability in that set. And this is one line of work that's being pretty actively pursued by people working in the foundations.

Q.: This is not the most general possibility of building a POVM...

A.: No, this is not.

G.: So, the names, for instance you have, [...] Holevo.

Holevo wrote two books on quantum measurement, and of course Busch [...]

[14:28]

A.: ...the Ludwig group, I think Ludwig's books were published in German and not all of them translated so they are not so widely accessible, so that not everyone is able to read those books. Only some of those papers have been translated into English and published in journals. But Ludwig was also one of the first people who proposed this idea of using positive operator valued measures for quantum observables. But then there were also the work of Brian Davies [Edward Brian Davies], John Lewis, and people over there in the seventies, early seventies, who published a whole series of papers where basically [...] they built a theory of quantum stochastic processes, built on positive operator valued measures.

G.: There's also quantum probability.

Q.: So, quite early.

[15:29]

A.: Yes, quite early. But that's another field, of course. For example, there is this group around Parthasarathy in India, and they have done lots and lots of work on quantum probability theory. There again the basic mathematical object there, is POVM, positive operator valued measures.

Q.: You still didn't say anything about your last book.

G.: Ah! I told it was the result of those lectures I gave... It comes from those lectures I started to give in Bujumbura in '89, and little by little I [...], and of course I had to finish in "catastrophe", because when you sign something you have

to finish, you have a deadline! So at the end it was really a kind of nightmare. Now, I don't open the book, because I am afraid to find errors, mistakes, every time that I open it...

[Laughs] [16:57]

Q.: First editions have always... it's unavoidable.

B.: And also the second, and the third...

Q.: Yes, but less, anyway, because you have got reactions from the readers... All right... Excuse me if I come back to this question, which is important to me. It seems to me that you are speaking about different communities maybe interacting, growing for some years, interacting, and then maybe decreasing... coming from different backgrounds, physics, applications, and so on, and sometimes maybe having difficulties in relating to one another. So, can we speak about a single community? We can't, I think from your...

[18:12]

A.: I wouldn't say so, because the communities are so diverse, you see, on the one hand you have coherent states, there is a link to Kähler geometry and all of that, very esoteric differential geometric people, and then on the other hand you have people doing actual experiments ...

Q.: ...With lasers...

A.: ...With lasers! And all that, in the laboratory. And except, perhaps, on a social level, there's no professional interaction between these two groups [...].

G.: And they don't quote each other.

A.: And they don't quote, they don't necessarily...

G.: ... [...] they don't understand even the [...]

A.: ...no they don't even be aware, you see. A physicist working in the laboratory with lasers and creating squeezed states, squeezed coherent states, it's not necessarily aware of, you know, whether the Kähler structure is global or only local... It doesn't make sense to him. [...].

Q.: One can say, as well, that there is not particular reference, journal, where to publish this material, it's widespread...

[19:17]

A.: ...No, no, you publish in whatever field you are working in, you try to publish in that journal.

G.: No, I think it would be necessary in the next future to organize the equivalent of Oak Ridge...

Q.: Congress.

G.: ... yes, in order to try to gather all people, using the word "coherent states". I think it would be valuable to...

B.: [...] Paris?

G.: ... I mean... I already organized a few colloquia, but I'm tired... No, Palermo!

[Laughs]

A.: But it seems you're talking about all people using the term "coherent states", so you might call psychologists, psychiatrists... [that kind of?] people too...

Q.: Coherent emotional states...

G.: No, you have to select...

[20:19]

A.: Yes, so, it's not really a community in the sense of a community that interacts with each other, that necessarily know each other's work, it's not really that... I mean it's a

concept that was taken over and exploited in different ways, by different communities, of different groups, that's the way we have to look at it...

G.: ... Even the name, the words "Coherent states" ...

A.: ...means different things...

G.: ...[...] Gaussian states...

A.: ...Gaborons, Wavelets.

G.: ... yes, yes, you have different words for that, and also you have people using "Coherent states" only for Glauber states.

A.: Glauber states and nothing else.

G.: ...they don't want to accept the name "Coherent states", for other types or sets of [?] states.

[21:11]

Q.: What do you think is the perception from outside of the coherent states "non-community", by respect to people who work on coherent states. Do you think it is perceived as a field, with different possibilities, different approaches, but still that can provide something to physics and mathematics, or is it felt as something, let's say, "not so necessary", or anything like that, you understand. What's the perception from outside? What's your experience on that?

G.: ...From outside [...] the community again [...] for instance in cosmology, in... because I am in a laboratory of cosmology and astroparticles, so where people coming from high energy physics and so on... You know, they don't know, once I gave just a very short introduction to coherent states... you

see, they are interested but... you know... except those people who tried to construct the wave function for the universe...

[Laughs]

G.: ...and, yes!...

B.: And they succeeded...

[22:34]

G.: ...yes, but the problem is: what is the Schrödinger equation [...] ... the time, what is the time for this... So, but anyway, some people... and they use, some of them, use the notion of coherent states. They [...] the universe is a coherent state.

Q.: In some sense it's simple, because it's not an open system, is it?

[Laughs]

Q.: Anyway, I think it's recognized, I'm just asking your opinion on that, it's recognised as a field with its full interest, but simply aside from [beside] the others...

G.: ...yes, yes, [...]...

Q.: ...I don't think it's marginalized or anything like that.

[23:19]

A.: You know it's not necessarily marginalized, but I think by and large the perception is... is that it's a useful tool, and from time to time you can use it, if necessary, and all that, but rather than that [?] it's not a field in itself, that should be studied, or that... It's only when people need something specific in some area of coherent states that they are likely to read about it and apply it, or use it.

Q.: All right. Even, maybe, people who work in that field

for a certain period... write papers on particular solutions and so on... and then go back working on his original field...

G.: Yes, yes...

Q.: ... is it possible to say that?

A.: That is possible too. And also, you see, once you start working with coherent states, you immediately realise that there are many way... many avenues of departure that arise from coherent states and people go into those kind of things.

[24:24]

G.: Yes and also you have... when people are meeting [...], you know, they accept less... we change, you know, the definition, we change the content of the word coherent states, you know... so you can have, like this, a kind of “autistic” community. They don’t want to hear of what is done in some direction, but for them it should be like this and nothing else. I was quoting those people from Łódz about coherent states on the circle, you know, for them coherent states on the circle [...]

A.: [...] time...

[25:11]

G.: [...] strange...

Q.: So, do you think a new Oak Ridge could be done? In this...

G.: ...I think [...] to put them in a stadium [...] ...
[Laughing]

Q.: [Laughing] ... violence, and so on...

G.: No, no, in the sense of... [Laughing]

A.: It would be good to have a general kind of meeting where people working in different areas of coherent states would come together and just see...

G.: ...open-mindedly...

A.: ... yes, and see all the different facets, all the different ways in which this concept has developed and has been used. That's fascinating! So, if one could have a meeting like that, I think that would be very interesting.

G.: Yes, yes...Something which mixes historical development...

A.: Yes.

G.: ...like you are doing...

Q.: [Laughs]

[26:05]

G.: ...and also the different directions, the intersections, you know, a kind of very complex graph of interactions. But for instance you can find on the web very nice demonstrations, you can play with these, about Glauber coherent states, or standard coherent states, or Schrödinger coherent states. Because actually they were proposed by Schrödinger; not called coherent states, I don't know...

Q.: ...'26.

A.: ... 1926... he talked about... I mean, I just know [?] he was interested in the transition from quantum to classical [...]

G.: Yes, yes [...]

Q.: We've got the letters where Lorentz asks Schrödinger

about the fact that normal particles are not spreading waves but are localised.

G.: Yes. Now, if you look the web, now, you write “coherent states” and you have, I think in Wikipedia, the link, it’s a demonstration.

[<http://web.ift.uib.no/AMOS/MOV/HO/> obtained as a result of a link in Wikipedia’s article on Coherent States. External Links - Glauber States: Coherent states of Quantum Harmonic Oscillator]

G.: And... Did you try?

Q.: No, not yet.

[27:17]

G.: Oh it’s very interesting because you can see... it’s very interesting to show this to students... because according to the construction of coherent states, again, it’s made with Poisson law, and in the Poisson law the parameter is connected with the energy of the parameter of the coherent state. If you change the energy, we’ll see... and it gives also the time evolution of the coherent state. So, but if you perturb a little bit the Poisson law you start to get decoherence for the coherent state. And you can see very easily on... I put on my book the reference.

B.: Is this one? [Showing it at the computer]

G.: Yes, I think it’s...[working at the computer with B.] ...go, go...here, here... down, down... just at the end...I think it’s, again...

[28:23]

Q.: Who wrote this? [Wikipedia's article on coherent states] Is he a well known person?

A.: I don't know who wrote it but it's not a very comprehensive article, it's very focussed in one direction.

Q.: Why don't you propose, to...

A.: We were discussing that, maybe, it's a question of time, also. You know, it takes a lot of time to do this...But I wrote an article for the Encyclopaedia of mathematics...

Q.: That's what I was saying, you can use as a...

A.: ...Yes, but I think that for the Wikipedia one should do something more... I mean, something less mathematical. In the sense that... Yes... one has to think about it.

Q.: It can be done...

[29:13]

G.: [still working at the computer] ... oh, now it's a lot better, now. So you can see, you change the Poisson law [here?]. So this is the time evolution when you don't have the Poisson law... I think... and you can choose the energy of course... [...] if you change the energy... [...] If you change the Poisson law...

Q.: ...you decohere...

G.: ...time evolution of the state which is still an infinite superpositionn of Fock states, but we have changed the Poisson law, and so you don't have... you know the state will not keep [...]

A.: Yes, yes...

G.: Very interesting...

Q.: Good. So, thank you for your participation to this interview...

A.: ...It was our pleasure, thank you very much...

G.: ...With best regards from coherent states...

[Laughs]

Q.: We've got even music now...

A.: Our coherent regards!

[Laughs]

[30:46]

Riportiamo adesso una bibliografia relativa all'intervista, suggerita dal Prof. Antoine.

Bibliografia dell'intervista

- [1] Ali S. T. & Antoine J-P. (1989). *Coherent states of the 1+1 dimensional Poincaré group: Square integrability and a relativistic Weyl transform*. Annales de l'Institut H. Poincaré, **51**, 23–44.
- [2] Ali S. T., Antoine J-P. & Gazeau J-P. (1990). *De Sitter to Poincaré contraction and relativistic coherent states*. Annales de l'Institut H. Poincaré, **52**, 83–111.
- [3] Ali S. T., Antoine J-P. & Gazeau J-P. (1991a). *Square integrability of group representations on homogeneous spaces I. Reproducing triples and frames*. Annales de l'Institut H. Poincaré, **55**, 829–856.
- [4] Ali S. T., Antoine J-P. & Gazeau J-P. (1991b). *Square integrability of group representations on homogeneous spaces II. Coherent and quasi-coherent states -The case of the Poincaré group*. Annales de l'Institut H. Poincaré, **55**, 857–890.

-
- [5] Ali S. T., Antoine J-P. & Gazeau J-P. (1993a). *Continuous frames in Hilbert space*. Annals of Physics, **222**, 1–37.
- [6] Ali S. T., Antoine J-P. & Gazeau J-P. (1993b). *Relativistic quantum frames*. Annals of Physics, **222**, 38–88.
- [7] Antoine J-P., Gazeau J-P., Monceau P., Klauder J. R. & Penson K. (2001). *Temporally stable coherent states for infinite well and Pöschl-Teller potentials*. Journal of Mathematical Physics, **42**, 2349–2387.
- [8] Odziejewicz A. (1992). *Coherent states and geometric quantization*. Communications in Mathematical Physics, **150**, 385–413.
- [9] Hall B. & Mitchell J. J. (2002). *Coherent states on spheres*. Journal of Mathematical Physics, **43**, 1211–1236.
- [10] Antoine J-P. & Vandergheynst P. (1998). *Wavelets on the n -sphere and other manifolds*. Journal of Mathematical Physics, **39**, 3987–4008.
- [11] Giavarini G. & Onofri E. (1989). *Generalized coherent states and Berry's phase*. Journal of Mathematical Physics, **30**, 659–663.
- [12] Gazeau J-P. & Klauder J. R. (1999). *Coherent states for systems with discrete and continuous spectrum*. Journal of Physics A: Mathematical and General, **32**, 123–132.

-
- [13] Ali S. T. & Engliš M. (2005). *Quantization methods: A guide for physicists and analysts*. Reviews in Mathematical Physics, **17**, 391–490.
- [14] Bernier D. & Taylor K. F. (1996). *Wavelets from square-integrable representations*. SIAM Journal on Mathematical Analysis, **27**, 594–608.
- [15] Führ. H. (2005). *Abstract Harmonic Analysis of Continuous Wavelet Transforms*. Springer Lecture Notes Math. **1863**.

Capitolo 5

La/le comunità

Questo capitolo sarà dedicato ad alcune considerazioni a carattere maggiormente sociologico, si cercherà di rispondere a domande quali: esiste una singola comunità di ricercatori in questo campo o sono molteplici? In che riviste pubblicano? Che tipo di convegni organizzano?

Per cominciare analizzeremo dettagliatamente le riviste coinvolte nella raccolta di Klauder e Skagerstam. Questa, per la sua rappresentatività, è uno strumento che permette un'indicativa analisi delle riviste coinvolte nello sviluppo del settore, per il periodo 1960-1985. Seguiranno considerazioni meno analitiche sul periodo successivo, sviluppate dalle bibliografie delle altre fonti considerate nel capitolo 2.

Le considerazioni sulle riviste, infine, ci condurranno naturalmente a un'analisi più generale della comunità dei ricercatori in questo settore.

5.1 Analisi della raccolta di Klauder e Skagerstam

Articoli dalla rassegna: Klauder J.R. & Skagerstam B.-S. (1985) *Coherent States - Applications in Physics and Mathematical Physics*. Singapore, World Scientific.

Sono inserite come elemento singolo dell'elenco le riviste che ospitano due o più articoli della raccolta (eccezione *Phys.Rev.C*, e *Phys.Lett.*), le altre riviste sono raccolte all'ultimo punto. Fra parentesi è riportato il periodo di esistenza della rivista.

Useremo per comodità anche un personale elenco, sotto riportato, di codici relativi ad autori presenti nella raccolta con più di un articolo o di autori particolarmente rilevanti (Barut-Girardello, Daubechies, Perelomov, Sudarshan); questo al fine di potere riferire questi contributi più rilevanti alle riviste in cui sono stati pubblicati. Nei codici autori la cifra fra parentesi riguarda il numero di articoli di cui sono autori o co-autori presenti in raccolta.

Codici Autori:

BG(1): Barut-Girardello; **C**(5): Carruthers; **D**(1): Daubechies; **E**(2): Eriksson; **F**(2): Feng; **Gi**(4): Gilmore; **Gl**(4): Glauber; **Gr**(2): Greco; **H**(2): Hepp; **K**(8): Klauder; **L**(2): Lieb; **N**(4): Nieto; **Pa**(2): Papanicolaou; **Pe**(1): Perelomov; **Su**(1): Sudarshan; **Sk**(4): Skagerstam; **Sr**(2): Srivastava.

Gli articoli saranno citati secondo i criteri adottati nel libro di Klauder e Skagerstam, così, ad esempio, #II.5 **Gl** (1963) significa che nella rivista considerata Glauber ha pub-

blicato l'articolo che è riportato in raccolta come quinto della sezione II (General developments). Codici non in neretto sono usati, senza essere dichiarati, per i coautori non appartenenti alla categoria dei principali.

- **Physical Review - Series II. (6).** *Phys. Rev.*

APS - American Physical Society (USA) (1913 - 1969)

#II.5 **G1** (1963); #II.7 **G1** (1963); #XI.1 (1965); #VI.1 **C-Dy** (1966); #VI.2 (1966); #VI.3 (1968)

Argomenti: ottica quantistica, materia condensata, elettrodinamica quantistica.

- **Physical Review - Series III: A-D.** *Phys. Rev.*

APS - American Physical Society (USA) (1970-)

- **Physical Review A (PRA) - Atomic, molecular, and optical physics. (6).** *Phys. Rev. A*

#VIII.1 **Gi-etAl** (1972); #VIII.2 (1973); #VIII.3 **H-L** (1973); #VIII.4 (1975); #IV.4 (1982); #VI.6 **K** (1984)

Argomenti: fisica atomica, ottica quantistica, statistica quantistica.

- **Physical Review B (PRB) - Condensed matter and materials physics. (2).** *Phys. Rev. B*

#VI.4 (1970); #V.3 **M-P** (1983)

- **Physical Review C (PRC) - Nuclear Physics.**
(1). *Phys. Rev. C*

#IV.3 (1981)

- **Physical Review D (PRD) - Particles, fields, gravitation, and cosmology.** (10). *Phys. Rev. D*

#XI.2 (1971); #X.2 (1974); #III.5 (1978); #XI.4 **E-Sk** (1978); #XI.5 (1978); #III.8 (1979); #IV.2 **K** (1979); #III.9 (1980); #X.4 **E-M-Sk** (1981); #XI.8 (1983)

Argomenti: integrali i percorso, campi.

- **Physical Review Letters (PRL).** (7). *Phys. Rev. Lett.*

APS - American Physical Society (**USA**) (**1958-**)

#II.4 **G1** (1963); #II.6 **Su** (1963); #III.1 **C-N** (1965); #III.7 **N-Si** (1978); #X.3 **Cu-Gr-Sr** (1979); #V.2 (1980); #IV.6 **K-D** (1984)

Argomenti: ottica quantistica, meccanica quantistica generale, integrali i percorso, cromodinamica quantistica.

- **Journal of Mathematical Physics.** (7). *J. Math. Phys.*

AIP - American Institute of Physics (**USA**) (**1960-**)

#II.2 **K** (1963); #II.3 **K** (1963); #II.8 **K** (1967); #II.9 **K** (1970); #II.13 (1975); #II.14 (1976); #II.16 (1977)

Argomenti: meccanica quantistica (teoria dei gruppi, stati coerenti di spin).

- **Physics Letters. (1).** *Phys. Lett.*

Elsevier (NL) (Apr 1962 - Dic 1966)

#III.3 GI (1966)

- **Physics Letters B - Nuclear Physics and Particle Physics. (5).** *Phys. Lett. B*

Nuclear Physics and Particle Physics

Elsevier (NL) Vol. 24-, (Gennaio 1967-)

#XI.3 (1974); #XI.6 Gr-Pa-PS-Sr (1978); #XI.7 (1978);

#IX.2 Gi-F (1978); #X.5 C-Sh (1983)

Phys. Lett. A : General Physics, Nonlinear Science, Statistical Physics, Atomic, Molecular and Cluster Physics, Plasma and Fluid Physics, Condensed Matter, Cross-disciplinary Physics, Biological Physics, Nanosciences, Quantum Physics

Argomenti: fisica nucleare, teoria quantistica dei campi, fisica delle particelle elementari.

- **Communications in Mathematical Physics. (4).** *Commun. Math. Phys.*

Springer (DE) (1965-)

#II.10 BG (1971); #II.12 P (1972); #VII.1L (1973);

#III.4 H (1974)

Argomenti: meccanica quantistica (teoria dei gruppi), statistica quantistica ('71-'74).

- **Annals of Physics. (4).** *Ann. Phys.*

Elsevier (**NL**) (ma pubblicato a N.Y.) (**1957-**)

#II.1 **K** (1960); #X.1 (1971); #III.6 (1978); #V.1 **P**
(1979)

Argomenti: stati coerenti di spin, integrali i percorso,
fisica delle particelle elementari.

- **Journal of Physics A (3) - (Mathematical and General. *J. Phys. A***

IOP-Institute of Physics (**UK**)

Argomenti: meccanica quantistica (teoria dei gruppi), stati
coerenti di spin, statistica quantistica.

General Physics (1968-1972). *Gen. Phys.*

#II.11 (1971)

Mathematical, Nuclear and General (1973-1974)

Mathematical and General (1975-2006). *Math. Gen.*

#II.15 (1976); #II.17 **Sk** (1985)

Mathematical and Theoretical (2007-)

- **Nuclear Physics A (2)**

Nuclear and Hadronic Physics

Elsevier (**NL**) (**1966-**)

#IX.3 **Gi-F** (1978); #IX.4 (1979)

- **Progress of theoretical physics (2)**

(**JP**)

Prog.Theor.Phys. Vol. 1- (1946 -)

#IV.1 (1978)

Prog.Theor.Phys.Suppl. No. 1- (1955-)
#IV.5 (1983)

• **Altre riviste e Atti di convegno**

#*Am.J.Phys.* - III.2 **C-N** (1965);
#*Rev.Mod.Phys.* - III.10 (1982)
#Atti di convegno - III.11 **N** (1983)
#*J.Phys.Soc.Japan* - VI.5 (1975)
#*Int.J.Theor.Phys.* - VII.1(1975);
#Libro collettaneo - VII.3 **Gi** (1980)
#*Z.Phys.* - VII.4 **Sk** (1984);
#*Sov.J.Nucl.Phys.* - IX.1 (1977);
#Atti di convegno - X.6 **C** (1984)

Dall'analisi delle riviste che pubblicano gli articoli più rappresentativi del primo periodo (1960-'85) emerge quindi, fra l'altro, che la famiglia *APS-Physical Review* è ampiamente dominante, seguono a distanza *Journal of Mathematical Physics* (AIP, USA), e a ruota *Communications in Mathematical Physics* (Springer, USA) e *Physics Letters B* (Elsevier, NL), *Annals of Physics* (Elsevier, USA), *Journal of Physics A* (IOP,UK). Numericamente è presente una maggioranza di articoli concernenti settori specifici (applicativi) piuttosto che riguardanti lo sviluppo teorico generale. Vi è una marcata prevalenza di riviste statunitensi, ma questo è naturalmente una caratteristica generale della ricerca di alto livello in fisica, nella seconda metà del secolo scorso.

5.2 Considerazioni generali

E' possibile adesso procedere con alcune considerazioni sulle riviste, che si possono immediatamente verificare per la rassegna citata, ma che si conservano valide in generale. Per cominciare si può notare la presenza di tutte le riviste più importanti: ciò manifesta l'appartenenza di questo settore alla ricerca *mainstream*, la cui rilevanza quindi è ampiamente riconosciuta dalla comunità dei ricercatori.

Una seconda considerazione è che sono rappresentate riviste di tutti i settori. Questo significa che gli articoli sono pubblicati nel campo cui si applicano, e che quindi non esiste un nucleo editoriale su cui la problematica generale degli stati coerenti può convergere. Questo non va considerato un fatto secondario, esistono nel panorama dell'editoria scientifica diverse riviste di settori "trasversali", come quello degli stati coerenti. D'altro canto la produttività del settore è molto alta, da fare pensare più che giustificata commercialmente la nascita di una rivista che vi afferisca. Supponiamo che questo non sia dovuto a carenze editoriali: l'offerta editoriale scientifica, infatti, è troppo fortemente intrecciata al suo pubblico, dato che questo coincide con quello degli autori e dei comitati scientifici editoriali.

La spiegazione più plausibile dell'assenza di una rivista in questo settore, invece, sembra riguardare una questione sociologica più generale, ovverossia la composizione della comunità dei ricercatori che a vario titolo vi afferisce. Vediamo di tracciare la dinamica e la composizione attuale di tale

comunità.

Originariamente, negli anni '60, questa era composta prevalentemente da ottici quantistici; tale gruppo continua a essere presente fino ad oggi. A questo nucleo iniziale si è immediatamente aggiunta una comunità che con questa aveva ampie sovrapposizioni: la comunità dei fisici interessati a questioni generali di meccanica quantistica, soprattutto, ma non solo, quella che faceva uso dello strumento dei gruppi di Lie e quella che si occupava degli integrali funzionali. Anche questa comunità continua a operare fino ad oggi. In seguito, soprattutto dagli anni '70, si sono aggiunti *affiancandosi*, ma spesso senza nessuna sovrapposizione, altri ambiti, legati ad altre applicazioni (sia in fisica teorica che sperimentale): fisica dello stato solido, elettrodinamica quantistica, termodinamica, fisica atomica, nucleare, delle particelle elementari. A questi gruppi si è ancora aggiunta dalla metà degli anni ottanta la comunità di ricerca in analisi dei segnali, e nell'ultimo decennio quello del calcolo quantistico. Tutte questi ambiti applicativi sorgono con interessi focalizzati; per essi gli stati coerenti sono solo uno strumento utile a risolvere determinati problemi, versatile, potente, generale, ma pur sempre uno strumento. Se nel risolvere il problema applicativo si ottengono dei risultati relativi anche a tale strumento, questi sono naturalmente benvenuti, e possono essere pubblicati; ma, esaurito il compito, gli stati coerenti sono destinati a essere riposti nella cassetta degli attrezzi. La distinzione fra un interesse di tipo finale e uno di tipo strumentale è indispensabile per comprendere la dinamica dello sviluppo del settore, e rappresentarsi

la struttura della comunità responsabile di tale sviluppo.

Questa descrizione disegna il seguente quadro: è presente una micro-comunità che, dagli anni '60 a oggi, considera gli stati coerenti come oggetto di ricerca a se stante, e una macro-comunità, frammentata in una molteplicità di comunità *distinte* e fra loro non necessariamente comunicanti, che fa riferimento alla prima per gli aspetti d'interesse specifico. Tale quadro, che emerge dall'analisi della letteratura, è interamente condiviso dai Prof. Ali e dal Prof. Gazeau, come ampiamente documentato nell'intervista.

È quindi chiaro come non possa essere presente né una rivista che raccolga tutto il panorama, poiché nessuno acquisterebbe una rivista di cui può fruire in misura minima, né d'altra parte una rivista che raccolga solo le questioni d'interesse generale, avendo una comunità di utenti troppo ristretta. Le questioni generali, i ricercatori dei vari settori, le cercano negli articoli di rassegna e nei manuali, e questa esigenza, in effetti, è adeguatamente coperta. Se mai fosse possibile raccogliere insieme interessi così vari, questo sarebbe in forma diversa, quale ad esempio quella del convegno. Per il suo carattere sporadico, innanzi tutto, e perché crea un ambiente che consente quegli incontri e quel rapido scambio verbale grazie ai quali è possibile selezionare efficacemente spunti utili alla propria attività di ricerca. Così è stato a Oak Ridge, ad esempio. Significato diverso, invece, hanno gli incontri sugli stati *squeezed*, sulle *wavelets*, o sugli approcci geometrici in fisica di Białowieża. Questi non solo non sono centrati esclusivamente su stati coerenti, ma ne considerano soltanto un aspetto.

Rimane in sospeso una domanda: è proponibile oggi un convegno come quello di Oak Ridge? Il Prof. Gazeau nell'intervista naturalmente non può che esprimere l'auspicio che questo si tenga (e propone, scherzoso, Palermo quale sede), ma ci sono le condizioni?

Ritengo che qualora si volesse organizzare, tale convegno dovrebbe essere articolato in sessioni comuni generali e sessioni settoriali parallele. Questa sembra la struttura secondo la quale le esigenze di tutte le parti della macro-comunità sopra descritta troverebbero soddisfacimento. Ciò naturalmente comporta l'organizzazione di un vero e proprio congresso, di dimensioni sicuramente superiori al convegno di Oak Ridge. Per rispondere adeguatamente a questa domanda mi sembrerebbe necessaria un'analisi di tipo economico, specialmente in un periodo non semplice qual è quello attuale. Naturalmente una tale analisi esula del tutto dai limiti della presente ricerca.

Appendice A

Feng: Resoconto del Simposio di Oak Ridge

Il presente resoconto mi è stato gentilmente fornito dal Prof. Antoine. E' presumibile che sia stato messo a disposizione dei relatori (Antoine è fra questi), forse anche di tutti i partecipanti. Manifestamente è stato reso disponibile dopo il convegno ma prima della pubblicazione degli atti. Non è comunque presente nei *Proceedings*, né ho notizia di una sua pubblicazione in altra forma. Mi è pervenuto sotto forma di file .doc, lo riporto qui con una formattazione leggermente mutata.

Lo scritto mi è pervenuto dal Prof. Antoine come risposta alla mia domanda su come fosse possibile che Klauder, padre fondatore e organizzatore del convegno, non presentasse nulla. La risposta è appunto che gli era stato proposto di tenere un intervento di rassegna sugli integrali funzionali tramite

stati coerenti, ma lui ha declinato a causa del suo ruolo di moderatore.

Andando ben oltre a questo, però, il resoconto è molto interessante per la descrizione di prima mano che fornisce del convegno. Contrariamente a quanto dichiarato negli atti è questo resoconto, e non il discorso di Wightman alla cena sociale, che riesce a fornire un efficace quadro dello spirito del convegno.

A short report on the International Symposium on Coherent States: Past, Present and Future, June 14 - 17, 1993, Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tennessee

Although coherent states were invented immediately after quantum mechanics (by Schroedinger, no less) was proposed, and by now are well recognized to have important applications in quantum optics, field theory, statistical mechanics, the study of quantum-classical correspondence, nuclear physics, condensed matter physics, atomic physics, representation theory of group theoretical methods and literally thousands of papers were published either consciously or subconsciously using this robust concept, there has never been a conference, as far as we are aware of, devoted to this subject until this one! Thus this meeting held at Oak Ridge National Laboratory, sponsored by the theoretical physics groups of Drexel University, University of Florida, Oak Ridge Nation-

al Laboratory, University of Tennessee, Vanderbilt University and the National Science Foundation was an unusual feat in theoretical physics. It was enthusiastically attended by seventy scientists, some are leading experts in their respective subdisciplines of physics, and some are experts in the techniques and development of coherent states as a theoretical tool. This group came from fourteen nations in all corners of the globe. Over forty invited papers were delivered, and all will be collected in a forthcoming Proceedings to be published by the World Scientific Publication Co. in Singapore.

Three of the pioneers of coherent states, Roy Glauber of Harvard (who christened these states as coherent), Elliott Lieb of Princeton and George Sudarshan of the University of Texas at Austin gave reviews of the subject. Their lectures which span a wide spectrum of the field, set the tone of the conference. Although the continuous representation in path integrals were extensively discussed by many speakers, it was unfortunate that modesty and being one of the co-chairman of the conference prevented John Klauder of the University of Florida, who pioneered this in his Ph.D. thesis in the late fifties in giving a review of this subject. Other current exciting developments discussed included the study of what I would refer to as the astronomy of the hydrogen atom, i.e. the study of Kepler motion of the Rydberg electron of hydrogen atom, the important use of coherent states as a computational tool, such as the wavelet theory, the meaning and utilization of group manifolds in studying the classical limit of quantum systems, which is intimately linked to the current revival

in studying quantum-classical correspondence, the use of coherent states to investigate forefront areas of quantum field theory and elementary particle physics, especially the possible exploration of local quantum groups, the new study of coherence in laser systems and the Schroedinger cat problem, the study of the propagation of the wavepackets according to the Van Vleck - propagator and the use of coherent states in mapping between the fermion and boson fields which has important applications in nuclear physics.

Arthur Wightman, the pioneer of axiomatic field theory, gave a very interesting, entertaining and sobering after-dinner-talk. Since Professor Wightman's talk will be part of the proceedings, I shall not repeat its content here.

It is clear that coherent states which have been around for nearly seventy years, will find even more applications in the years to come. All the participants (especially when there were quite a number of very young faces in the audience) felt that we should not wait another 70 years before having the next coherent states conference.

Finally, all the organizers (myself, John Klauder, Mike Strayer of Oak Ridge, Mike Guidry of the University of Tennessee, Michel Vallieres of Drexel and Sait Umar of Vanderbilt) must thank Althea Tate, the Administrative Assistant of the theoretical physics group of Oak Ridge for her superb organizational skills. I hate to think what the conference would be like without her!!

+-----+

Dr. Da Hsuan Feng, M. Russell Wehr Professor of Physics

A. Feng: Resoconto del Simposio di Oak Ridge 120

Dep't of Physics TEL: (215)-895-2719, -2707 (sec't)
and Atmospheric Science FAX: (215)-895-5934,
Drexel University INTERNET: FENG@duvm.ocs.drexel.edu
32nd and Chestnut Streets BITNET: FENG@duvm
Philadelphia, PA 19104
+-----+

Appendice B

Cenni introduttivi alla meccanica quantistica

Descriviamo adesso le basi della meccanica quantistica non relativistica. Si è volutamente ridotta all'osso la materia al fine di fornire rapidamente le idee generali di questa teoria a coloro, quali i matematici di formazione, che possono essere interessati agli stati coerenti senza avere nessuna conoscenza di meccanica quantistica. Fra le questioni generali non citate è necessario rilevare la statistica quantistica (bosoni e fermioni).

B.1 Il problema della quantizzazione

- A ogni sistema fisico corrisponde uno *Spazio degli stati* \mathcal{H} avente struttura di *spazio di Hilbert* complesso (separabile).

B. Cenni introduttivi alla meccanica quantistica 122

Uno spazio di Hilbert è, naturalmente, uno spazio vettoriale su cui è definito un prodotto scalare, che sia topologicamente completo nella norma che questo definisce.

In fisica si usa spesso la notazione di Dirac secondo la quale un vettore dello spazio si indica con la parentesi $|\psi\rangle$ denominata *ket*. Il prodotto scalare fra due vettori $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ è indicato con $\langle\psi|\phi\rangle$ (lineare sul secondo argomento). Per il lemma di Riesz i funzionali lineari e continui sono tutti e soli i funzionali che si possono scrivere come prodotto scalare per qualche vettore $|\psi\rangle$ dello spazio; quindi tali funzionali si possono indicare con il simbolo $\langle\psi|$, tale simbolo è detto *bra*, in modo tale che il prodotto scalare $\langle\psi|\phi\rangle$ si legga *bra-(c)ket*, ossia “parentesi” in inglese.

Una base *Hilbertiana* ortonormale (su uno spazio di Hilbert separabile) è una famiglia di vettori $\{|\phi_n\rangle, n \in \mathbb{N}\}$ ortonormali $\langle\phi_n|\phi_m\rangle = \delta_{nm}$ su cui si possa scomporre in modo unico ogni vettore. Su una tale famiglia: $\sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n\rangle\langle\phi_n| = \mathbf{1}$ (ossia $|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle\phi_n|\psi\rangle |\phi_n\rangle \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}$). La separabilità garantisce che le basi, che certamente esistono, siano numerabili.

- Lo stato del sistema è descritto da una classe di equivalenza dei vettori $|\psi\rangle$ dello spazio degli stati i quali differiscono soltanto per un fattore di fase (globale) $e^{i\alpha}$.

Questo spazio vettoriale “astratto” può ammettere diverse rappresentazioni “concrete”, ad esempio una singola particella nello spazio ordinario, cui corrisponde una classe di vettori di \mathcal{H} , può essere altrettanto bene descritta da una funzione a

B. Cenni introduttivi alla meccanica quantistica 123

quadrato integrabile detta *funzione d'onda* in due modi, sia nella cosiddetta *rappresentazione posizione* $\psi(\mathbf{r}) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ che nell'equivalente *rappresentazione momento* $\tilde{\psi}(\mathbf{p}) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$. Vedremo fra poco il senso di questi nomi. In $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ il prodotto scalare ordinario si scrive: $\langle \psi | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(x) \phi(x) dx$, avendo inteso con la barra il complesso coniugato.

- A ogni quantità misurabile del sistema, detta *osservabile*, corrisponde un *operatore autoaggiunto* dello spazio di Hilbert in sé.

Sappiamo che ogni operatore autoaggiunto \mathbf{A} avente spettro discreto ammette una famiglia di autovettori ($\mathbf{A}|\phi_n\rangle = a_n|\phi_n\rangle$) che sono una base ortonormale. Nella teoria degli operatori è possibile ottenere una più generale decomposizione spettrale per ogni tipo di operatori (autovalori e spettro continuo).

Nel caso continuo di una particella confinata su una retta, la rappresentazione posizione può essere definita facendo corrispondere a un vettore astratto di \mathcal{H} una funzione d'onda $\psi(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ e all'operatore posizione astratto \mathbf{X} un operatore X in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ tale che: $X\psi(x) = x\psi(x)$. La grandezza $|\psi(x)|^2$ rappresenta la densità di probabilità di trovare la particella nel punto x . Analogamente l'operatore momento (o quantità di moto) P è definito in rappresentazione momento come quello per cui: $P\tilde{\psi}(p) = p\tilde{\psi}(p)$. Volendo invece descrivere l'azione dell'operatore momento in rappresentazione posizione si trova: $P\psi(x) = -i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x)$ ossia, com'è spesso il caso, un operatore differenziale. Questi due operatori

B. Cenni introduttivi alla meccanica quantistica 124

non commutano, più precisamente sono legati dalla regola $[X, P] := XP - PX = i\hbar$. Per il suo ruolo centrale nella teoria questa relazione è chiamata *regola di commutazione canonica*.

La questione di come si costruiscono le corrispondenze (sistema fisico-spazio di Hilbert, quantità osservabili-operatori autoaggiunti), in particolare in relazione alla meccanica classica, sebbene sia inquadrata nelle sue linee generali, è ancora oggetto di ricerca.

Il principio secondo cui la meccanica quantistica debba convergere alla meccanica classica nelle condizioni macroscopiche ordinarie è detto *principio di corrispondenza*. Questo è un problema di grande difficoltà data la struttura radicalmente diversa delle due teorie. Un modo di affrontare la questione è proprio quello di considerare stati quantistici particolari che presentano comportamento simile a quello classico: gli stati coerenti. Negli ultimi anni altri approcci si sono sviluppati, e sono per il momento privilegiati, come l'approccio di tipo statistico della *decoerenza*.

Per farsi un'idea del problema si consideri che macroscopico non vuol dire classico: il laser, la superconduttività, la superfluidità sono tutti fenomeni macroscopici intrinsecamente quantistici.

B.2 Evoluzione e misura

Nel caso di sistemi conservativi, indicando con \mathbf{H} l'operatore indipendente dal tempo energia totale, detto *hamiltoniana*, si ha che:

- Il sistema evolve nel tempo tramite l'operatore unitario $V(t) = e^{-i\frac{\mathbf{H}}{\hbar}t}$ i.e. $|\psi(t)\rangle = V(t)|\psi(0)\rangle$. Ciò equivale, in questo caso, alla nota *equazione di Schrödinger*:
$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -i\frac{\mathbf{H}}{\hbar}|\psi(t)\rangle.$$
- I possibili risultati della misura di una data proprietà del sistema sono i valori dello *spettro* dell'operatore cui esso corrisponde.

Il processo di misura *modifica inevitabilmente il sistema* (tranne se il sistema è già in un autostato dell'osservabile misurato) e il risultato della misura su uno stato noto ha un carattere probabilistico:

- La probabilità di ottenere una data misura e la corrispondente alterazione dello stato, si sanno calcolare noti il vettore di stato e l'operatore.

E' fondamentale notare che l'aleatorietà della misura ha un carattere intrinseco, "di principio": esso si presenta anche quando il sistema è *completamente noto*. Si distingue quindi in modo essenziale dall'aleatorietà della statistica classica, la quale si basa su un'impossibilità "pratica" di ottenere tutte le informazioni sul sistema, aleatorietà che può sempre essere

B. Cenni introduttivi alla meccanica quantistica 126

ridotta. Qualora sia necessaria una descrizione più completa di un sistema quantistico, che tenga conto di queste due sorgenti distinte di aleatorietà, è necessario cambiare lo schema sopra visto e descrivere anche gli stati tramite certi operatori dello spazio di Hilbert, i cosiddetti *operatori densità*.

La misura di un'osservabile \mathbf{A} su un dato stato $|\psi\rangle$, abbiamo visto può dare vari risultati (gli autovalori a_n , ad esempio, nel caso discreto), questi avranno una distribuzione statistica con media: $\langle\psi|\mathbf{A}|\psi\rangle$ e deviazione standard l'incertezza: $\langle\Delta\mathbf{A}\rangle_\psi = [\langle\psi|\mathbf{A}^2|\psi\rangle - \langle\psi|\mathbf{A}|\psi\rangle^2]^{1/2}$.

Una delle implicazioni più note della regola di commutazione canonica è la *relazione di indeterminazione di Heisenberg*. Questa afferma che se per due osservabili date vale la regola di commutazione canonica, l'incertezza della misura contemporanea di entrambe le osservabili, su *qualunque stato*, non può scendere sotto $\hbar/2$, ad esempio per posizione e momento:

$$\langle\Delta\mathbf{X}\rangle_\psi \langle\Delta\mathbf{P}\rangle_\psi \geq \frac{\hbar}{2}$$

Una delle proprietà fondamentali degli stati coerenti canonici è che essi sono stati a minima incertezza: $\langle\Delta\mathbf{X}\rangle_z \langle\Delta\mathbf{P}\rangle_z = \hbar/2$.

B.3 L'oscillatore armonico quantistico e i Bosoni

Le regole di quantizzazione canonica permettono di scrivere l'operatore hamiltoniano come: $\mathbf{H} = \frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{X}^2$.

B. Cenni introduttivi alla meccanica quantistica 127

E'opportuno definire l'operatore (non autoaggiunto): $\mathbf{a} := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\beta \mathbf{X} + i \frac{1}{\hbar \beta} \mathbf{P} \right)$ con $\beta := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$. Con questa definizione si ha: $\mathbf{H} = \hbar\omega \left(\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \frac{1}{2} \right)$. L'operatore $\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}$ ha spettro non-degenere \mathbb{N} ; gli autovettori $|n\rangle$ sono i cosiddetti *stati numero*: $\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} |n\rangle = n |n\rangle$. Tali stati numero formano una base ortonormale (giacché $\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}$ è autoaggiunto). Ossia: $\langle n | m \rangle = \delta_{nm}$ e $|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle n | \psi \rangle |n\rangle, \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}$.

Tali stati hanno anche la proprietà di essere autostati dell'hamiltoniana con autovalore $n + 1/2$:

$$\mathbf{H} |n\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle$$

Questo permette di interpretare il numero n come indice del livello energetico o numero di eccitazioni dello stato. Lo stato a minima energia ($E_o = \hbar\omega/2 \neq 0$) è detto stato *fondamentale* o stato *ground*.

L'azione di \mathbf{a} e \mathbf{a}^\dagger può essere scritta come: $\mathbf{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$ e: $\mathbf{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$ (con $\mathbf{a} |0\rangle = 0$). Per questo motivo \mathbf{a} e \mathbf{a}^\dagger sono rispettivamente chiamati operatori *annichilazione* e *creazione* (o *lowering* e *raising operators*).

Lo stato numero dell'oscillatore armonico corrisponde in rappresentazione posizione a una funzione d'onda $\varphi_n(x)$ che è il prodotto di una gaussiana per il polinomio di Hermite di ordine n .

Lo stato fondamentale ha una *densità di probabilità* che corrisponde alla sola gaussiana:

$$|\varphi_o(x)|^2 = \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} e^{-\beta^2 x^2}$$

B. Cenni introduttivi alla meccanica quantistica 128

Essa è normalizzata, centrata in $x = 0$ e ha deviazione standard: $\sigma = 1/\sqrt{2}\beta$.

Appendice C

Gli stati coerenti canonici

Consideriamo adesso l'oscillatore armonico spostato con un centro in $x_o \neq 0$ e uno *shift* nella quantità di moto $p_o \neq 0$. Questo sistema ha come stato fondamentale $|z\rangle = U(z)|0\rangle$ dove z è un numero complesso legato a x_o e p_o e $U(z) = e^{za^\dagger - \bar{z}a}$.

In un oscillatore armonico centrato nell'origine, se lo stato iniziale è un CCS, esso evolve oscillando senza mutare forma, con ampiezza e frequenza pari a quella dell'oscillatore armonico classico. È questo un motivo per cui sono chiamati coerenti. Sono stati quasi-classici.

Consideriamo adesso i concetti chiave che caratterizzano questi stati. In fisica quantistica lo spazio degli stati del sistema è postulato essere uno spazio di Hilbert separabile; secondo tale prospettiva esistono basi hilbertiane numerabili

(ortonormate) su cui è possibile sviluppare ogni stato del sistema. Sebbene tale approccio sia formalmente adeguato, può essere comodo ricorrere ad altri tipi di famiglie di stati che pur non godendo di tutte le proprietà delle basi hilbertiane, abbiano specifiche proprietà matematiche e fisiche delle quali, in generale, gli elementi di una base hilbertiana non godono.

Più specificamente possiamo partire definendo *stati coerenti canonici* gli autostati normalizzati $|z\rangle$ dell'operatore di annichilazione \mathbf{a} dell'oscillatore armonico:

$$\mathbf{a} |z\rangle = z |z\rangle \quad (\text{C.1})$$

Tali stati formano una famiglia di indice complesso z ; dato che \mathbf{a} è un operatore non autoaggiunto, la sua famiglia di autostati non è in generale ortonormale, più precisamente in questo caso il prodotto scalare fra due distinti stati coerenti non è mai nullo. Essi comunque formano un sistema di generatori dello spazio degli stati, cioè la famiglia è completa ma non minimale (*overcomplete*); scrivendo infatti $z = x + iy$ vale la risoluzione dell'identità:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{C}} |z\rangle \langle z| \, dx \, dy = \mathbf{1} \quad (\text{C.2})$$

Sulla base degli stati numero $|n\rangle$ (cfr. appendice C) gli stati coerenti hanno la forma:

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (\text{C.3})$$

Una delle proprietà fondamentali di cui godono gli stati

coerenti è che¹ definendo canonicamente gli operatori:

$$\mathbf{q} = \frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}} \quad \mathbf{p} = \frac{a-a^\dagger}{i\sqrt{2}} \quad (\text{C.4})$$

per i quali com'è ben noto $[\mathbf{p}, \mathbf{q}] = i\mathbf{1}$, gli stati coerenti minimizzano la relazione d'indeterminazione di Heisenberg:

$$\langle \Delta \mathbf{q} \rangle_z \langle \Delta \mathbf{p} \rangle_z = \frac{1}{2} \quad (\text{C.5})$$

$$\langle \Delta \mathbf{X} \rangle_z \langle \Delta \mathbf{P} \rangle_z = \frac{\hbar}{2} \quad (\text{C.6})$$

È anche possibile studiare le proprietà analitiche degli stati coerenti associando a ogni stato $|\psi\rangle$ la funzione:

$$\psi(z) = \langle z | \psi \rangle := e^{-\frac{|z|^2}{2}} f_\psi(z) \quad (\text{C.7})$$

allora la funzione $f_\psi(z)$ risulta essere analitica intera, e la mappa:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ |\Psi\rangle &\longmapsto \psi(z) \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

che ne risulta può essere usata come punto di partenza per un dato tipo di generalizzazioni.

Le proprietà gruppali degli stati coerenti invece emergono esprimendo tali stati come:

$$|z\rangle = U(z) |0\rangle \quad (\text{C.9})$$

dove:

$$U(z) = e^{za^\dagger - \bar{z}a} \quad (\text{C.10})$$

¹In unità di \hbar .

Ossia gli stati sono ottenuti dall'azione unitaria del gruppo detto di *Weyl-Heisenberg*, che un particolare gruppo di Lie di grande importanza in meccanica quantistica, precisamente il gruppo generato dall'algebra di Lie: $\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger, \mathbf{1}$ o $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{1})$.

E' possibile fare anche un'osservazione di natura radicalmente diversa, di natura probabilistica, ed è questo il punto di partenza per la più recente generalizzazione degli stati coerenti. Precisamente per gli stati coerenti canonici la probabilità:

$$p_{n,z} := |\langle n | z \rangle|^2 = e^{-|z|^2} \frac{|z|^{2n}}{n!} \quad (\text{C.11})$$

rappresenta una distribuzione poissoniana. Quest'osservazione consente di definire altri stati coerenti, a partire da differenti distribuzioni di probabilità cui corrispondono.

Che cosa fanno Glauber, Klauder, e Sudarshan? Essi sviluppano questi stati e le loro proprietà e li applicano al campo elettromagnetico. Considerano infatti il campo elettromagnetico in una scatola cubica (che poi sarà ingrandita all'intero spazio) e i modi (ω o λ) di oscillazione delle onde stazionarie del campo. Questi modi si comportano come oscillatori armonici.

Lo stato che indichiamo come $|n_k\rangle$ è l' $n - mo$ stato energetico del modo k (k è un indice che include vettore d'onda, pulsazione e polarizzazione) - si dice anche che il modo k è popolato da n_k fotoni.

Possiamo quindi definire $|Z\rangle = \prod_k |z_k\rangle$ dove $|z_k\rangle$ sono gli stati coerenti canonici per il modo k . Per questi particolari

stati l'azione dell'operatore campo elettrico è dato da:

$$\tilde{\mathbf{E}}^{(+)}(\vec{r}, t) |Z\rangle = \vec{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{r}, t) |Z\rangle \quad (\text{C.12})$$

dove $\vec{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{r}, t)$ è la soluzione classica dell'equazione di Maxwell.

Questa radiazione, quindi, è coerente nel senso che i contributi quantistici al campo, si sommano in modo da costruire stati con comportamento classico (macroscopico). Le normali onde radio, la luce, ma anche il laser sono ben descritti in questo modo.

Così facendo si è ottenuto di potere applicare tutti gli strumenti teorici dell'ottica classica a particolari stati quantistici... ma d'altro canto sappiamo che tramite la risoluzione dell'identità *ogni stato quantistico* può essere espresso come sovrapposizione di tali stati.

Diamo adesso due semplici definizioni, quelle di stati *squeezed* e di *wavelets*, al fine di agevolare la comprensione del testo.

C.1 Squeezed States

Definiamo operatore di *squeezing*:

$$S(z) := e^{\frac{1}{2}z(a^\dagger)^2 - \frac{1}{2}\bar{z}a^2} \quad (\text{C.13})$$

tramite quest'operatore e l'operatore (C.10) già definito per gli stati coerenti canonici, possiamo definire gli stati *squeezed* come:

$$|z, z'\rangle := U(z) S(z') |0\rangle \quad (\text{C.14})$$

E' chiaro come secondo questa definizione gli stati coerenti canonici sono particolari stati *squeezed*, quelli per cui $z' = 0$.

Gli stati *squeezed* dell'oscillatore armonico hanno tutti la proprietà di saturare la relazione di indeterminazione di Heisenberg. Per essi, però, il rapporto $\Delta x/\Delta p$ è variabile. Questo può esprimersi nello spazio delle fasi tramite una traiettoria ellittica, laddove gli stati coerenti canonici presentano una traiettoria circolare. Si perde in generale l'appartenenza dello stato fondamentale alla famiglia.

Uno stato *squeezed* nell'oscillatore armonico oscilla con valori di aspettazione classici, ma non mantiene in generale la forma.

Naturalmente vi sarebbero moltissime cose da dire su questi stati, ma una tale analisi esula dallo spirito del presente lavoro.

C.2 Wavelets

In teoria dei segnali si utilizza spesso lo spazio $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ per rappresentare, con adeguata struttura matematica, i segnali a energia finita. Per estrarre informazioni da un segnale $\psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ sono disponibili vari strumenti, ad esempio il calcolo dei suoi momenti o la trasformata di Fourier.

Per fissare le idee, si pensi adesso a un segnale sonoro nel tempo. L'analisi di Fourier com'è noto permette di sapere quale è il suo contenuto di frequenze; d'altro canto però tale analisi non fornisce nessuna informazione riguardo all'istante in cui tale frequenza era presente, né tale informazione è rintracciabile nella funzione originaria. Sarebbe quindi utile

avere una trasformazione dipendente da entrambi i parametri che permetta di conoscere, nei limiti del possibile, questi due aspetti contemporaneamente.

A esigenze di questa natura rispondono le wavelets continue, indicate spesso CWT (*Continuous Wavelet Transform*). Esse si sviluppano all'inizio (metà degli anni '80) come stati coerenti associati al gruppo affine sulla retta (traslazioni e dilatazioni) e da questa base sono andate generalizzandosi. Ben presto però (fine anni '80) avviene un cambiamento di prospettiva che indirizza la ricerca sul binario parallelo dell'analisi di multirisoluzione; questa diventa centrale in teoria dei segnali e comporta uno sviluppo esplosivo del settore. Tali wavelets sono usate per l'analisi di segnali e, contrariamente agli stati coerenti, non dispongono di nessun significato fisico altrettanto evidente.

Descriveremo adesso con un certo dettaglio le idee di base delle CWT - anche se applicate al solo caso più semplice del gruppo affine sulla retta - poiché nell'intervista si farà più volte riferimento a questi concetti.

Formalizzando quanto anticipato, l'idea di base è quella di trovare una famiglia a due parametri $\psi_{a,b} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ tali che si possa studiare un dato segnale $\phi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ tramite le sue componenti su questa famiglia:

$$\Phi_\psi(a, b) := \langle \psi_{a,b} | \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi_{a,b}(x)} \phi(x) dx$$

Consideriamo quindi sulla retta reale il gruppo affine $g(a, b)$ definito da: $x = g(a, b) x' := ax' + b$ con inversa $x' =$

$g^{-1}(a, b) x = (x - b)/a$, e introduciamo una funzione test normalizzata $\psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ (che sarà chiamata *mother wavelet*) che ci servirà a caratterizzare il filtro; consideriamone le traslazioni e dilatazioni (posizione e dimensione del filtro) nei due parametri $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$:

$$\psi_{a,b}(x) := \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Se considero l'operatore $U_{a,b}$ che causa tale trasformazione $\psi_{a,b} = U_{a,b}\psi$ si può facilmente vedere che esso è unitario e quindi, fra l'altro, $\|\psi_{a,b}\| = \|\psi\| = 1$. In realtà l'associazione $g(a, b) \longrightarrow U_{a,b}$ preserva le proprietà di gruppo e quindi ne è una *rappresentazione*.

Consideriamo adesso la trasformata di Fourier $\tilde{\psi}(p)$ della $\psi(x)$. Si dimostra che per potere far sì che il segnale $\phi(x)$ possa essere ricostruito a partire dalle $\Phi_\psi(a, b)$ basta che $\psi(x)$ sia una funzione di $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ a media nulla che soddisfi la cosiddetta *condizione di ammissibilità*:

$$c_\psi := 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{\psi}(p)|^2}{|p|} dp < \infty$$

se questa condizione è verificata vale il risultato fondamentale, la risoluzione dell'identità:

$$\frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}^2} |\psi_{a,b}\rangle \langle \psi_{a,b}| \frac{da db}{a^2} = \mathbf{1}$$

ossia vale la *formula di ricostruzione*:

$$\phi(x) = \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}^2} \Phi_\psi(a, b) \psi_{a,b}(x) \frac{da db}{a^2}$$

(quasi ovunque) come desideravamo. Questo comporta che le $\psi_{a,b}(x)$ sono un sistema di generatori (non minimale) dello spazio e in particolare che costituiscono un insieme denso di $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, sono cioè un frame continuo.

La misura:

$$d\mu(a, b) := \frac{da db}{a^2}$$

è detta *misura (sinistra) di Haar* del gruppo affine.

Si dice inoltre che la *rappresentazione* $U_{a,b}$ è *a quadrato integrabile* poiché esiste un vettore $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ tale che:

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\langle \psi | U_{a,b} \psi \rangle|^2 d\mu(a, b) < \infty$$

questa condizione essendo equivalente alla condizione di ammissibilità. Si dimostra inoltre che tale rappresentazione è minimale o *irriducibile*, ossia che non vi sono sottospazi propri stabili per azione di $U_{a,b}$ (eccetto quello che contiene il solo vettore nullo) questa condizione è equivalente al fatto che le $\psi_{a,b}(x)$ costituiscono un insieme denso.

Connesso alla risoluzione dell'identità è anche possibile considerare il cosiddetto *reproducing kernel* cioè la funzione $k(a, b; a', b')$ che soddisfa l'equazione:

$$\Phi_\psi(a, b) = \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}^2} k(a, b; a', b') \Phi_\psi(a', b') \frac{da' db'}{(a')^2}$$

funzione che, grazie alla risoluzione dell'identità, è semplicemente:

$$k(a, b; a', b') = \langle \psi_{a,b} | \psi_{a',b'} \rangle$$

Appendice D

Struttura della bibliografia generale

- Articoli chiave: [1]-[22]
- Raccolte di articoli: [23], [23]
- Manuali: [25]-[33]
- Articoli di rassegna: [34]-[38]
- Atti di convegno: [39]
- Articoli storici: [40], [41]
- Note di corso: [42], [43]
- Articoli generali e introduttivi: [44], [45]

Bibliografia generale

- [1] Schrödinger E. (1926a). *Zur Einsteinschen Gastheorie*, Phys. Zs. **27**, 95-101 (received 15 December 1925, published in issue No. 4/5 of 1 March 1926).
- [2] Schrödinger E. (1926b). *Quantisierung als Eigenwertproblem. (Erste Mitteilung)*, Ann. d. Phys. (4) **79**, 361-376 (received 27 January 1926, published with an addendum of 28 February in issue No. 4 of 13 March 1926).
- [3] Schrödinger E. (1926c). *Quantisierung als Eigenwertproblem. (Zweite Mitteilung)*, Ann. d. Phys. (4) **79**, 489-527 (received 23 February 1926, published in issue No. 6 of 6 April 1926).
- [4] Schrödinger E. (1926d). *Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen*, Ann. d. Phys. (4) **79**, 734-756 (received 18 March 1926, published in issue No. 8 of 4 May 1926).
- [5] Schrödinger E. (1926e). *Quantisierung als Eigenwert-*

- problem. (Dritte Mitteilung)*, Störungstheorie, mit Anwendung auf den Starkeffekt der Balmerlinien, Ann. d. Phys. (4) **80**, 437-490 (received 10 May 1926, published in issue No. 13 of 13 July 1926).
- [6] Schrödinger E. (1926f). *Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik*, Naturwiss. **14** (28), 664-666 (published in the issue of 9 July 1926). Tradotto in inglese: *The Continuous Transition from Micro- to Macro-Mechanics*. In Schrödinger, E. (1928). *Collected Papers in Wave Mechanics*. London: Blackie&Son. pp.41-44.
- [7] Schrödinger E. (1926g). *Quantisierung als Eigenwertproblem. (Vierte Mitteilung)*, Ann. d. Phys. (4) **81**, 109-139 (received 21 June 1926, published in issue No. 18 of 5 September 1926).
- [8] Schrödinger E. (1967). *Letters on Wave Mechanics - Schrödinger, Planck, Einstein, Lorentz*. Ed.: K.Przibram. Philosophical Library.
- [9] Klauder J. R. (1960). *The action option and the Feynman quantization of spinor fields in terms of the ordinary c-numbers*. Ann. of Phys., **11**, 123-168.
- [10] Bargmann V. (1961). *On a Hilbert Space of Analytic Functions and an Associated Integral Transform - Part I*. Commun. Pure & Appl. Math., **14**, 187-214.
- [11] Klauder J. R. (1963a). *Continuous-Representation Theory I. Postulates of Continuous-Representation*

- Theory*. J. Math. Phys. **4**, 1055 (4 pp.).
- [12] Klauder J. R. (1963b). *Continuous-Representation Theory II. Generalized Relation Between Quantum and Classical Dynamics*. J. Math. Phys. **4**, 1058 (16 pp.).
- [13] Segal I.E. (1963). *Mathematical Problems of Relativistic Physics*. Am. Math. Soc., Providence, R.I.
- [14] Glauber R. J. (1963a). *Photon Correlations*. Phys. Rev. Lett., **130**, 2529.
- [15] Glauber R. J. (1963b). *The quantum theory of optical coherence*. Phys.Rev., **130**, 2529.
- [16] Glauber R. J. (1963c). *Coherent and Incoherent States of the Radiation Field*. Phys. Rev., **131** (6), 2766-2788 (23pp.).
- [17] Sudarshan E. C. G. (1963) *Equivalence of semiclassical and quantum mechanical description of statistical light beams*. Phys. Rev. Lett., **10**, 277-279.
- [18] Glauber R. J. (1994). *Some Reflections on Coherence and Ion Trapping*. In: Klauder J. R., Feng D. H. & Strayer M. R. (Eds.). (1994). *Coherent States: Past, Present, and Future : Proceedings of the International Symposium Oak Ridge Nat'L Lab 14-17 June 1993*. Singapore: World Scientific. pp. 193-202.
- [19] Barut A. O. & Girardello L. (1971). *New Coherent States Associated with Non-Compact Groups*. Commun. Math. Phys., **21**, 41.

- [20] Perelomov A. M. (1972), *Coherent states for arbitrary Lie group*. Commun. Math. Phys. **26** 222-236.
- [21] Gilmore R. (1974). *Geometry of symmetrized states*, Ann. Phys. (NY) **74**, 391-463; *On properties of coherent states*, Rev. Mex. Fis. **23**, 143-187.
- [22] Klauder J. R. (1996). *Coherent states for the hydrogen atom*. J. Phys. A: Math. Gen. **29** (12), L293.
- [23] Klauder J. R. & Skagerstam B.-S. (1985). *Coherent States - Applications in Physics and Mathematical Physics*. Singapore, World Scientific.
- [24] Mandel L. & Wolf E. *Ed.s* (1970). *Coherence and Fluctuations of Light*. Vol. I: 1850-1960 & Vol. II: 1961-1966. New York, Dover.
- [25] Klauder J. R. & Sudarshan E. C. G. *Ed.s* (1968). *Fundamentals of Quantum Optics*. New York, Benjamin.
- [26] Dirac P. A. M. (1930 1st ed.) (1935 2nd ed.) (1947 3rd ed.) (1958 4th ed.). *The principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press.
- [27] von Neumann J. (1932). *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Berlin, Springer.
- [28] von Neumann J. (1955) *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton, NJ: Princeton University Press. (Traduzione di Beyer R. T. rivista dall'autore).

- [29] Schiff L. I. (1949 1st ed.) (1955 2nd ed.). *Quantum Mechanics*. New York, McGraw-Hill.
- [30] Louisell W. H. (1964). *Radiation and noise in Quantum Electronics*. McGraw-Hill, New York.
- [31] Perelomov A.M. (1986). *Generalized Coherent States and their Applications*. Berlin: Springer-Verlag.
- [32] Ali S. T., Antoine J.-P. & Gazeau J.-P. (2000). *Coherent states, wavelets and their generalizations*. Springer.
- [33] Gazeau, J.-P. (2009). *Coherent States in Quantum Physics*. Wiley-VCH, Berlin.
- [34] Klauder J. R. & Skagerstam B.-S. (1985). *A Coherent-State Primer*. In Klauder J.R. & Skagerstam B.-S. (1985). *Coherent States - Applications in Physics and Mathematical Physics*. Singapore, World Scientific. (90 pp.)
- [35] Zhang W.-M., Feng D. H. & Gilmore R. (1990). *Coherent states: Theory and some applications*, Rev. Mod. Phys., **62**, 867-927. (61 pp.)
- [36] Ali S. T., Antoine J.-P., Gazeau J.-P. & Mueller U. A. (1995), *Coherent states and their generalizations: A mathematical overview*, Rev. Math. Phys., Vol **7** , Issue 7, 1013-1104. (92 pp.)
- [37] Fujii K. (2002). *Introduction to Coherent States and Quantum Information Theory*. arXiv:quant-ph/0112090v2. (72 pp.)

- [38] Fujii K. (2002b). *Coherent States and Some Topics in Quantum Information Theory: Review*. arXiv:quant-ph/0207178v1.
- [39] Klauder J. R., Feng D. H. & Strayer M. R. (Eds.). (1994). *Coherent States: Past, Present, and Future : Proceedings of the International Symposium Oak Ridge Nat'L Lab 14-17 June 1993*. Singapore: World Scientific.
- [40] Nieto M. M. (1997). *The discovery of squeezed states - in 1927*. arXiv:quant-ph/9708012v1 (6pp)
- [41] Dodonov V. V. (2002). 'Nonclassical' states in quantum optics: a 'squeezed' review of the first 75 years. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics (J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.)* **4**, R1-R33 (33 pp.)
- [42] Gazeau J.-P. (1995). *Les états cohérents. Cours 1997-'98*. Appunti del corso. Université Paris 7 - Denis Diderot.
- [43] Gazeau J.-P. (2006). *États cohérents et repères quantiques: constructions et applications*. Lecture notes (2 lectures/4). Strasbourg, M2/École doctorale de physique et de chimie-physique. Groupe de Physique Théorique de l'IREs. <http://sbgat194.in2p3.fr/~theory/Gazeau/>
- [44] Klauder J. R. (2001). *The Current State of Coherent States*. Contribution to the 7th ICSSUR Conference, June 2001. arXiv:quant-ph/0110108v1 17 Oct 2001

- [45] Ali S. T. (2006). *Coherent States*. In Encyclopedia of Mathematical Physics. Eds., J-P. Francoise, G.L.Naber & T. S. Tsun, Elsevier Academic Press.