



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PALERMO

DOTTORATO DI RICERCA IN

*Storia e Didattica delle Matematiche della Fisica e della Chimica*

CICLO: XXII

SETTORE SCIENTIFICO DISCIPLINARE: FIS/08

# Sperimentazione di una proposta didattica sulla distribuzione di Maxwell e prospettive di ricerca sul Fattore di Boltzmann

ONOFRIO ROSARIO BATTAGLIA

Tutor

*Prof. Claudio Fazio*

Coordinatore

*Prof. Filippo Spagnolo*

febbraio 2011



## Sommario

La ricerca descritta nella presente tesi è incentrata su due argomenti di notevole importanza per la comprensione delle basi della meccanica statistica e più in generale per la comprensione dei modelli di descrizione di sistemi complessi relativi ad ambiti disciplinari diversi. I due argomenti sono strettamente connessi e riguardano il Fattore di Boltzmann e la distribuzione di velocità o di energia di un sistema di particelle, conosciuta come distribuzione di Maxwell-Boltzmann.

Il Fattore di Boltzmann riveste una notevole importanza nell'ambito degli aspetti dell'innovazione didattica per la riorganizzazione dei contenuti attraverso l'utilizzo esplicito dei concetti e dei processi unificanti.

Il concetto di distribuzione è alla base di tutta la meccanica statistica ed inoltre è di fondamentale importanza per la comprensione del Fattore di Boltzmann.

Entrambe le tematiche sono state affrontate attraverso lo sviluppo e la progettazione di due percorsi didattici, alternativi a quelli tradizionali, in cui l'attività sperimentale risulta essere l'aspetto fondamentale. La progettazione didattica dei due percorsi si è svolta in parallelo, tuttavia, le fasi della sperimentazione hanno rivelato che il primo percorso, relativo al  $FdB$ , necessita di una profonda comprensione del concetto di distribuzione statistica, del suo significato e di come le distribuzioni influiscono sulla natura dei processi. Di conseguenza nella fase di sperimentazione è stata data priorità al percorso didattico sul concetto di distribuzione che costituisce il nucleo didattico di questa tesi.

*Per aspera sic itur ad astra*

(Seneca, Hercules furens, atto II, v. 437)

...

## Ringraziamenti

...



# Indice

<b>Elenco delle figure</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1 Motivazioni, finalità e obiettivi della ricerca . . . . .	1
1.2 Panoramica sull'impianto progettuale e fasi di sviluppo della ricerca . . . . .	3
1.3 Panoramica sui metodi e criteri di ricerca adottati . . . . .	5
1.4 Formulazione delle domande di ricerca . . . . .	5
1.5 Per orientarsi . . . . .	6
<b>2 Il sistema di riferimento teorico, metodologico e progettuale</b>	<b>7</b>
2.1 Scelte epistemologiche e approccio pedagogico di riferimento . . . . .	7
2.2 Metodologia di ricerca e progettazione . . . . .	11
2.2.1 La Ricerca basata su Progetti . . . . .	11
2.2.2 Il modello dell'Educational Reconstruction . . . . .	13
2.3 Verifica dell'efficacia della proposta didattica . . . . .	15
2.4 Strumenti e metodi per l'analisi dei dati . . . . .	16
2.4.1 Analisi dei testi scritti . . . . .	16
2.4.2 Le interviste . . . . .	17
2.4.3 Le registrazioni . . . . .	17
<b>3 Progettazione della proposta didattica</b>	<b>19</b>
3.1 Lo sviluppo storico-epistemologico del concetto di distribuzione di velocità e/o energia . . . . .	20
3.2 Metodi sperimentali per la determinazione della distribuzione di velocità di un sistema di particelle . . . . .	26
3.3 Risultati di ricerca sulla comprensione del concetto di distribuzione . . . . .	27

<b>4</b>	<b>La proposta didattica</b>	<b>31</b>
4.1	Considerazioni sulla scelta della proposta didattica . . . . .	31
4.2	Il modello . . . . .	33
4.3	Gli esperimenti . . . . .	37
4.3.1	Calibrazione della temperatura di catodo . . . . .	38
4.3.2	Valutazione della distribuzione di velocità . . . . .	39
4.3.2.1	Il diodo . . . . .	39
4.3.2.2	Il triodo . . . . .	43
4.4	Conclusioni . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Il contesto sperimentale e le fasi della sperimentazione</b>	<b>47</b>
5.1	Il contesto sperimentale . . . . .	47
5.1.1	Il campione di studenti . . . . .	47
5.2	Le fasi della sperimentazione . . . . .	48
5.2.1	Fase 1: Il questionario in ingresso . . . . .	48
5.2.1.1	Variabili cognitive oggetto dell'indagine . . . . .	49
5.2.1.2	Criteri d'analisi . . . . .	49
5.2.1.3	Quesiti relativi ad esempi di vita quotidiana . . . . .	50
5.2.1.4	Quesiti relativi al contesto della meccanica statistica . . . . .	53
5.2.1.5	Considerazioni conclusive . . . . .	58
5.2.2	Fase 2: Realizzazione degli interventi . . . . .	59
5.2.2.1	Attività 1: Esempi di distribuzioni . . . . .	59
5.2.2.2	Attività 2: Sistemi di particelle: relazioni fra grandezze macroscopiche e microscopiche. Distribuzione di velocità di un gas perfetto e metodi di misura. . . . .	59
5.2.2.3	Attività 3: L'emissione termoionica e il gas di elettroni: un semplice modello esplicativo . . . . .	60
5.2.2.4	Attività 4: Elettroni in una valvola termoionica: dalla misura della corrente alla distribuzione del gas di elettroni . . . . .	60
5.2.2.5	Attività 5: Discussione conclusiva sui risultati ottenuti . . . . .	64
<b>6</b>	<b>I risultati della sperimentazione</b>	<b>65</b>
6.1	Monitoraggio dello svolgimento della sperimentazione . . . . .	65
6.1.1	Attività 1: Esempi di distribuzioni . . . . .	66



6.1.2	Attività 2: Sistemi di particelle: relazioni fra grandezze macroscopiche e microscopiche. Distribuzione di velocità di un gas perfetto e metodi di misura. . . . .	66
6.1.3	Attività 3: L'emissione termoionica e il gas di elettroni: un semplice modello esplicativo . . . . .	67
6.1.4	Attività 4: Elettroni in una valvola termoionica: dalla misura della corrente alla distribuzione del gas di elettroni . . . . .	67
6.1.5	Attività 5: Discussione conclusiva sui risultati ottenuti . . . . .	72
6.2	Il questionario in uscita ed il confronto ingresso-uscita . . . . .	72
6.2.1	I risultati . . . . .	73
6.2.1.1	Quesiti relativi al contesto di vita quotidiana . . . . .	73
6.2.1.2	Quesiti relativi al contesto della meccanica statistica . . . . .	76
6.3	Discussione . . . . .	80
<b>7</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>83</b>
7.1	Risposte alle domande di ricerca . . . . .	83
7.1.1	Elementi emersi in relazione alla prima domanda di ricerca . . . . .	83
7.1.2	Elementi emersi in relazione alla seconda domanda di ricerca . . . . .	84
7.1.3	Elementi emersi in relazione alla terza domanda di ricerca . . . . .	84
<b>A</b>	<b>Materiale didattico</b>	<b>87</b>
A.1	Linee guida sull'elaborazione dei dati sperimentali . . . . .	88
A.2	Slides relative alla prima fase dell'attività . . . . .	89
<b>B</b>	<b>Il questionario</b>	<b>93</b>
<b>C</b>	<b>Problemi aperti e prospettive di ricerca: la proposta didattica sul Fattore di Boltzmann</b>	<b>101</b>
C.1	I diversi approcci didattici al Fattore di Boltzmann . . . . .	101
C.1.1	I libri di testo . . . . .	101
C.1.2	Le pubblicazioni scientifiche . . . . .	102
C.1.2.1	Il dibattito su American Journal of Physics . . . . .	102
C.1.2.2	Altre pubblicazioni relative a ricerche sperimentali . . . . .	105
C.2	Il nostro approccio al Fattore di Boltzmann ( <i>FdB</i> ) . . . . .	105
C.2.1	Gli esperimenti . . . . .	106
C.2.1.1	Evaporazione di un liquido . . . . .	106

## INDICE

---

C.2.1.2	Flusso di un liquido viscoso . . . . .	109
C.2.1.3	Emissione termionica . . . . .	113
C.2.1.4	La reazione chimica . . . . .	115
C.2.2	Un modello meccanico e la sua la simulazione su NeTLogo . . . . .	118
C.2.3	Una deduzione teorica . . . . .	121
C.2.4	Discussione . . . . .	123
<b>D</b>	<b>Attività svolte durante il dottorato</b>	<b>125</b>
D.1	Corsi . . . . .	125
D.2	Seminari . . . . .	125
D.3	Partecipazioni a congressi . . . . .	125
D.4	Pubblicazioni . . . . .	126
D.4.1	Articoli su riviste internazionali ISI . . . . .	126
D.4.2	Proceedings internazionali . . . . .	127
<b>E</b>	<b>Riconoscimenti e premi</b>	<b>129</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>131</b>

# Elenco delle figure

3.1	Diagramma delle velocità delle molecole prima e dopo l'urto. . . . .	23
4.1	Schema della struttura del diodo. . . . .	34
4.2	Diagramma circuitale con diodo . $V1$ è il generatore che fornisce 1 V d. c., $R_p$ è un potenziometro (0–470) $\Omega$ . $V2$ è un generatore regolabile in tensione (0–30) V. $R_f = 3,2\Omega$ (a $T_{env} = 300\text{K}$ ). . . . .	38
4.3	Rapporto $I/I^*$ in funzione del potenziale ritardante $V_a$ per diverse temperature di filamento. I valori di $I^*$ sono nel range 20 A-800 A. . . . .	39
4.4	Le derivate dei dati riportati in fig. 4.3 per quattro differenti valori della temperatura di filamento. Il fitting è eseguito attraverso l'equazione $y = A \exp(-mv_z^2/2kT_e)$ , dove $A$ e $T_e$ sono i parametri. Ciascuna figura riporta i valori di $T_e$ e $R2$ (il coefficiente di determinazione). Le funzioni di distribuzioni sono normalizzate in modo tale che l'area sotto ciascun curva sia pari ad 1. . . . .	40
4.5	I valori sperimentali della corrente anodica vs. il potenziale di anodo ritardante e i fitting delle curve teoriche descritte dalle eqs. 4.12 e 4.14. . . . .	42
4.6	Diagramma circuitale con il triodo. . . . .	43
4.7	I valori sperimentali della corrente di anodo vs. il potenziale ritardante di anodo e i fitting delle curve teoriche descritte dall' eq. 4.12. . . . .	44
4.8	Calcolo delle derivate dei punti riportati in fig. 4.7 per gli esperimenti 2) e 5). Il fitting dei punti è stato eseguito attraverso l'equazione $y = A \exp(-mv_z^2/2kT_e)$ dove $A$ e $T_e$ sono i parametri. Le funzioni di distribuzione sono normalizzate in modo tale che l'area sotto la curva sia pari a 1. . . . .	45
4.9	I valori sperimentali della corrente di anodo vs. il potenziale ritardante di anodo per il triodo montato a diodo e i fitting delle curve teoriche descritte dell'eq. 4.12. . . . .	46
5.1	Risposte relative alla prima parte de quesito n. 1. . . . .	51

## ELENCO DELLE FIGURE

---

5.2	Risposte relative alla seconda parte del quesito n. 1. . . . .	52
5.3	Risposte relative alla prima parte del quesito n. 2. . . . .	52
5.4	Risposte relative alla seconda parte del quesito n. 2. . . . .	53
5.5	Risposte al quesito n. 3. . . . .	54
5.6	Risposte al quesito n. 4. . . . .	55
5.7	Risposte al quesito n. 5. . . . .	56
5.8	Risposte al quesito n. 6. . . . .	56
5.9	Risposte al quesito n. 7. . . . .	58
6.1	Confronto ingresso-uscita relativo alla prima parte de quesito n. 1. $\chi^2 = 1,34$ ; $p = 0,7$ . . . . .	73
6.2	Confronto ingresso-uscita relativo alla seconda parte de quesito n. 1. $\chi^2 =$ $22,09$ ; $p = 0,0001$ . . . . .	74
6.3	Confronto ingresso-uscita relativo alla prima parte de quesito n. 2. $\chi^2 =$ $23,95$ ; $p = 2,5 \cdot 10^{-5}$ . . . . .	75
6.4	Confronto ingresso-uscita relativo alla seconda parte de quesito n. 2. $\chi^2 =$ $13,17$ ; $p = 0,0043$ . . . . .	76
6.5	Confronto ingresso-uscita relativo al quesito n. 3. $\chi^2 = 7,05$ ; $p = 0,07$ . . . . .	77
6.6	Confronto ingresso-uscita relativo al quesito n. 4. $\chi^2 = 30,19$ ; $p = 2,8 \cdot 10^{-7}$ . . . . .	78
6.7	Confronto ingresso-uscita relativo al quesito n. 5. $\chi^2 = 25,42$ ; $p = 1,3 \cdot 10^{-5}$ . . . . .	78
6.8	Confronto ingresso-uscita relativo al quesito n. 6. $\chi^2 = 9,16$ ; $p = 0,03$ . . . . .	79
6.9	Confronto ingresso-uscita relativo al quesito n. 7. $\chi^2 = 56,95$ ; $p = 2,6 \cdot 10^{-12}$ . . . . .	80
B.1	. . . . .	94
C.1	Apparato sperimentale con i sensori di pressione e di temperatura; (A) beuta contenente aria, (B) beuta contenente aria con un piccolo volume di liquido. . . . .	107
C.2	Frazione delle molecole di vapore vs. $kT$ per l'acqua (diamanti) e per l'etanolo (croci) con le rispettive curve di fitting. . . . .	108
C.3	Apparato sperimentale per le misure di fluidità. . . . .	111
C.4	Logaritmo naturale dei valori numerici di fluidità (in $\text{mPoise}^{-1}$ ) vs. $1/kT$ in acqua ed etanolo e curve di fitting ottimo. . . . .	112
C.5	Diagramma circuitale con il diodo <i>EZ81</i> . Nel caso del diodo <i>FP400</i> , il catodo coincide con il filamento. . . . .	113

## ELENCO DELLE FIGURE

---

C.6	Logaritmo naturale dei valori numerici della corrente di anodo (in $\mu\text{A}$ ) vs. $1/kT$ per i diodi <i>EZ81</i> and <i>FP400</i> e le curve di fitting in accordo con le eqs. C.12 e C.13. . . . .	114
C.7	L'apparato sperimentale per la reazione a tempo della formaldeide. . . . .	117
C.8	Spettro di assorbanza della soluzione A&B (a $T = 294\text{K}$ ) prima (a) e dopo (b) che la reazione chimica si è conclusa. Il picco di assorbanza a lunghezza d'onda 552,4 nm. . . . .	117
C.9	Assorbanza della soluzione A&B a 552 nm vs. il tempo a due diversi valori di temperatura. . . . .	118
C.10	Logaritmo naturale dei valori numerici del reciproco degli intervalli di tempo misurati (in $\text{s}^{-1}$ ) vs. $1/kT$ , e fitting. . . . .	119
C.11	Modello meccanico di un sistema a due livelli . . . . .	119
C.12	Interfaccia su NetLogo della simulazione del sistema a due livelli . . . . .	120
C.13	I Risultati della simulazione: rapporto di popolazione, $n_{high}/n_{low}$ in funzione del rapporto $\langle E_{kin} \rangle / mgh$ . . . . .	120
C.14	Ingradimento della prima parte della fig. C.13 . . . . .	121
C.15	Grafico della distribuzione dell'energia cinetica confrontato con l'energia potenziale del sistema a due livelli . . . . .	122



# 1

## Introduzione

### 1.1 Motivazioni, finalità e obiettivi della ricerca

Un compito rilevante della didattica delle scienze è quello di fornire agli studenti framework unificatori per la descrizione e l'interpretazione dei fenomeni naturali riguardanti diversi campi della scienza. Questi framework hanno il ruolo di concetti unificanti, cioè regole, proprietà generali che trascendono i confini disciplinari e si mostrano utili nella spiegazione di teorie ed osservazioni sperimentali diversi. Tali concetti e processi devono fornire connessioni tra le discipline scientifiche tradizionali e possedere un campo di applicazione molto ampio. Alcuni dei processi e dei concetti che appartengono allo standard prima definito sono: i concetti di sistema e sottosistema, la caratterizzazione dei modelli, le leggi di conservazione.

Gli studenti tendono ad interpretare i fenomeni separatamente, e l'esigenza di descrizione e spiegazioni unitarie (o quanto meno non contraddittorie) non è molto spesso riconosciuta come obiettivo di base di una conoscenza. Le forze ad esempio sono percepite come proprietà degli oggetti e non come il risultato dell'interazione fra corpi. Non è riconosciuta spesso la differenza fra parti di un sistema ed il sistema nella sua interezza. I modelli vengono percepiti come copie della realtà e non come rappresentazioni concettuali della realtà stessa.

I concetti unificanti a cui si fa riferimento nella presente tesi servono a spiegare in modo unitario una serie di diverse fenomenologie e risultati sperimentali relativi a processi di sistemi materiali. Ad esempio attraverso il principio di conservazione dell'energia si può avere una visione unitaria di fenomeni e di esperimenti apparentemente molto diversi fra loro e se ne può dare una interpretazione unitaria. Si perviene in questo modo al concetto unificante per cui fenomeni apparentemente molto diversi possano essere spiegati attraverso l'idea di bilancio energetico. Inoltre, il secondo principio della termodinamica ha ambiti di applicazioni vastissimi

## 1. INTRODUZIONE

---

e introduce il concetto unificante di freccia del tempo, ovvero del verso lungo il quale tutti i fenomeni fisici devono evolvere naturalmente.

La ricerca è incentrata su due argomenti di notevole importanza per la comprensione delle basi della meccanica statistica e più in generale per la comprensione dei modelli di descrizione di sistemi complessi relativi ad ambiti disciplinari diversi. I due argomenti sono strettamente connessi e riguardano il Fattore di Boltzmann e la distribuzione di velocità o di energia di un sistema di particelle, conosciuta come distribuzione di Maxwell-Boltzmann.

Il Fattore di Boltzmann ( $FdB$ ) riveste una notevole importanza nell'ambito degli aspetti dell'innovazione didattica per la riorganizzazione dei contenuti attraverso l'utilizzo esplicito dei concetti e dei processi unificanti. Esso può essere definito come una legge capace di descrivere il comportamento di tutti i sistemi naturali (Fisici, chimici o biologici) a temperatura costante  $T$ . Inoltre, introduce la nozione di sistema come rappresentazione ed interpretazione di diversi fenomeni fisici e conduce ad una interpretazione unificatrice di molti fenomeni modellizzabili come un sistema ad una certa temperatura caratterizzato da due stati separati da una gap di energia. Affinché la transizione fra i due stati si attivi risulta necessario superare questa gap. Tale sistema inoltre può interagire con l'ambiente secondo uno scambio di energia e/o materia.

Il concetto di distribuzione è alla base di tutta la meccanica statistica ed inoltre è di fondamentale importanza per la comprensione del Fattore di Boltzmann.

L'obiettivo principale della meccanica statistica è di stabilire e di interpretare le leggi fenomenologiche che descrivono le proprietà fisiche dei sistemi macroscopici, costituiti da un numero  $N$  grande di particelle, ossia con un numero di gradi di libertà grande, partendo dalle leggi che governano il comportamento delle particelle costituenti e impiegando i concetti della teoria della probabilità. Nella sua formulazione generale la Meccanica statistica riguarda i sistemi fisici in equilibrio termodinamico e consente di derivare le leggi della termodinamica, di prevedere le deviazioni delle condizioni di equilibrio e, in linea di principio, di calcolare le equazioni di stato. Essa si applica dunque allo studio di gas, liquidi, elettroliti, plasmi, radiazione elettromagnetica, ecc.

La meccanica classica affronta con successo lo studio di sistemi semplici, cioè dotati di un numero piccolo di gradi di libertà. In linea di principio è possibile estenderne l'applicazione ai sistemi macroscopici; nel caso classico ad esempio, note le condizioni iniziali, i parametri come la massa e la carica elettrica e i potenziali di interazione delle particelle che costituiscono il sistema, le equazioni del moto consentono di prevedere l'evoluzione futura del sistema e di conoscerne la storia passata. Questa strada non viene seguita per almeno tre motivi, ciascuno dei quali è di per sé sufficiente a impedirne o a sconsigliarne il perseguimento:



## 1.2 Panoramica sull'impianto progettuale e fasi di sviluppo della ricerca

---

- È praticamente impossibile conoscere esattamente le condizioni iniziali delle particelle di un sistema macroscopico.
- Qualora lo stato iniziale fosse esattamente noto, l'integrazione delle  $sN$  equazioni del moto, con  $s$  il numero di gradi di libertà e  $N$  il numero di particelle, sarebbe praticamente impossibile.
- Qualora le difficoltà sopra indicate fossero superabili, il risultato sarebbe illeggibile e il dettaglio sovrabbondante e non significativo.

In conclusione, quando il numero delle particelle di un sistema cresce, la descrizione dettagliata diventa così complicata da nascondere le regolarità del comportamento a scala macroscopica. La descrizione statistica al contrario fa emergere le regolarità termodinamiche.

In questa ottica, la distribuzione statistica acquista un ruolo fondamentale per la descrizione e la comprensione di una grande vastità di fenomeni, ed è la forma di tali distribuzioni che rende comprensibile la forma del  $FdB$ .

La ricerca descritta in questa tesi ha avuto inizio con lo studio di una proposta didattica relativa all'introduzione del  $FdB$  a livello di scuola secondaria e del primo anno di un corso di laurea universitario (nell'ambito del corso di termodinamica di corsi di laurea a carattere scientifico).

Lo sviluppo della proposta didattica ha messo in evidenza come alcuni dei suoi aspetti fondamentali siano in qualche modo subordinati proprio al concetto di distribuzione di velocità o di energia di un sistema di particelle. In particolare, il concetto di distribuzione diventa essenziale sia per ricavare teoricamente il  $FdB$  che per verificarne la validità attraverso una simulazione al computer. Per questa ragione il progetto di ricerca è stato ampliato all'analisi dei fattori che caratterizzano la comprensione del concetto di distribuzione statistica.

## 1.2 Panoramica sull'impianto progettuale e fasi di sviluppo della ricerca

Lo studio del  $FdB$  e della distribuzione statistica di Maxwell-Boltzmann richiede la conoscenza di formalismi matematici sicuramente non padroneggiati dagli studenti della scuola secondaria ma molto spesso neanche dagli studenti del primo anno dei corsi di laurea a carattere scientifico. Questa metodologia classica di studio è spesso motivo di insuccessi da parte degli studenti i quali concentrandosi sugli aspetti matematici della tematica affrontata non riescono

## 1. INTRODUZIONE

---

a comprenderne il significato fisico. Inoltre, anche quei testi che affrontano queste tematiche facendo riferimento a possibili esperimenti fanno soltanto dei cenni senza chiarirne la giusta importanza e ponendo poca attenzione ai dettagli. In definitiva lo studente nella maggior parte dei casi trascura l'aspetto sperimentale riducendo l'argomento a una serie di formule matematiche.

Queste motivazioni ci hanno spinto ad affrontare entrambe le tematiche attraverso lo sviluppo e la progettazione di due percorsi didattici, alternativi a quelli tradizionali, in cui l'attività sperimentale risulta essere l'aspetto fondamentale. Una buona parte della nostra attività di ricerca, quindi, è consistita nella progettazione e nello sviluppo di esperimenti innovativi, realizzabili con strutture non sofisticate alla portata anche dei laboratori della scuola secondaria superiore di secondo grado.

In questa ottica, lo studio del  $FdB$  è stato affrontato attraverso lo sviluppo di una serie di esperimenti relativi ad ambiti diversi della fisica, interpretabili attraverso un unico modello e caratterizzati dall'elevata semplicità di realizzazione. Parte di questi esperimenti sono stati ispirati dai lavori di ricerca di Feynman, il quale ha affrontato queste tematiche da un punto vista prettamente teorico. Per una maggiore chiarezza e una maggiore fruibilità tale modello, è stato inoltre implementato al calcolatore attraverso una simulazione in ambiente NetLogo.

Lo studio della distribuzione di Maxwell-Boltzmann è stato affrontato attraverso lo sviluppo di un set-up sperimentale che facesse uso delle valvole termoioniche, ritenuto una giusta mediazione tra accuratezza dei risultati e complessità dell'apparato sperimentale. Esistono infatti metodi ed apparati che permettono di ottenere risultati più precisi ma che risultano essere troppo sofisticati e costosi per i nostri scopi didattici (ad esempio l'apparato a raggi molecolari). Tuttavia, bisogna notare il minore costo e la maggiore semplicità costruttiva e di realizzazione dell'apparato da noi utilizzato ha come conseguenza lo studio di un modello fisico-matematico più sofisticato e una elaborazione dei dati sperimentali più complessa.

Nei successivi capitoli si mostrerà nel dettaglio la proposta didattica sulle distribuzioni di Maxwell-Boltzmann e la relativa sperimentazione con i risultati, mentre la proposta didattica sul Fattore di Boltzmann, sperimentata solo parzialmente presso il corso di "Didattica della Fisica" della scuola SISIS di Palermo durante l'anno accademico 2008/2009, è stata interamente riportata in appendice alla voce "Problemi aperti e prospettive di ricerca...". Infatti, mentre la progettazione didattica dei due percorsi si è svolta in parallelo, le fasi della sperimentazione hanno rivelato che il primo percorso, relativo al  $FdB$ , necessita di una profonda comprensione del concetto di distribuzione statistica, del suo significato e di come le distribuzioni influiscono sulla natura dei processi. Di conseguenza nella fase di sperimentazione è stata data priorità al percorso didattico sul concetto di distribuzione che costituisce il nucleo didattico di questa tesi.

La sequenza didattica sulle distribuzioni è stata sperimentata, durante l'anno accademico 2009/2010, presso l'Università degli Studi di Palermo, all'interno di un seminario attivato per gli studenti dei corsi di laurea in Ingegneria Elettronica, Ingegneria delle Telecomunicazione, Ingegneria informatica.

### 1.3 Panoramica sui metodi e criteri di ricerca adottati

Lo studio si contestualizza nel quadro teorico/epistemologico del costruttivismo. La natura e l'ampiezza dei problemi da affrontare e risolvere impone la necessità di individuare un metodo ricerca che sia compatibile con le finalità del progetto, risulti efficiente, eviti il rischio di un eccessiva dispersione e contribuisca a mantenere fisso il timone della ricerca. A tal fine, a partire da un attenta analisi, si è definito un approccio metodologico che adatta e integra gli elementi che caratterizzano due metodologie di ricerca che attualmente stimolano l'interesse dei ricercatori nel campo: la ricerca basata su progetti (Design Based Research: DBR) e la ricerca orientata alla produzione di sequenze d'insegnamento/apprendimento (teaching/learning sequences: TLS). La metodologia di ricerca rientra nel quadro della Educational Reconstruction, che permette di studiare i fenomeni didattici progettando e realizzando ambienti di apprendimento, artefatti, sequenze di insegnamento/apprendimento che il ricercatore sperimenta, valuta, rielabora e sviluppa in contesti educativi autentici.

La ricostruzione didattica è stata sviluppata analizzando il contenuto fisico, la letteratura inerente a tale argomento e le rappresentazioni agli studenti nel campo, progettando e sperimentando un percorso didattico (TLS) e (Teaching Experiment, TE).

### 1.4 Formulazione delle domande di ricerca

Le domande cui la ricerca intende fornire una risposta possono essere così formulate:

- Quali sono le concezioni degli studenti di un corso di laurea a carattere scientifico relativamente al concetto di distribuzione statistica, utilizzata in contesti diversi, in riferimento alla capacità di ottenere informazioni dalla lettura di un istogramma, alla capacità di confronto e alla capacità di rappresentazione grafica di un set di dati?
- In che modo e con quali benefici può un percorso didattico, sviluppato su una tematica specifica, avere delle ricadute positive su contesti diversi che fanno riferimento agli stessi concetti di base?

## 1. INTRODUZIONE

---

- Un percorso didattico incentrato su un'attività sperimentale può aiutare lo studente nella comprensione di argomenti generalmente sviluppati attraverso l'ausilio degli strumenti matematici?

### 1.5 Per orientarsi

Nel prossimo capitolo si delineeranno il quadro teorico di riferimento, la metodologia di ricerca e di progettazione del percorso didattico. Nel capitolo 3 sono affrontati gli argomenti che definiscono la progettazione del percorso didattico con particolare riferimento allo sviluppo storico-epistemologico degli argomenti trattati, all'analisi delle pubblicazioni scientifiche inerenti la tematica in oggetto, ad alcuni aspetti dello sviluppo cognitivo del concetto di distribuzione. Nel capitolo 4 è riportata l'analisi del contenuto disciplinare secondo una specifica evoluzione concettuale da cui si è preso spunto per la redazione del percorso didattico. Nel capitolo 5 sono descritti il contesto sperimentale e le fasi in cui la sperimentazione è avvenuta. Infine nel capitolo 6 sono riportati i risultati della sperimentazione, sia per la parte che riguarda il monitoraggio in itinere che il confronto ingresso-uscita.

## 2

# Il sistema di riferimento teorico, metodologico e progettuale

Questo capitolo è dedicato all'analisi del quadro teorico nel quale si inserisce la presente ricerca. Verranno affrontati sia il problema della scelta epistemologica di base sia quello della prospettiva didattica. La visione epistemologica della presente ricerca è quella del costruttivismo socio-culturale che coniuga i modelli cognitivi di Piaget e Vygotsky.

La metodologia di ricerca e di progettazione è basata sul modello della “*Ricerca Basata su Progetti (DBR)*” e dell’“*Educational Reconstruction*”.

## 2.1 Scelte epistemologiche e approccio pedagogico di riferimento

La teoria dell'apprendimento all'interno della quale si inserisce questo progetto di ricerca è quella del costruttivismo. La didattica costruttivista è uno dei paradigmi pedagogici più innovativi, i cui principi fondamentali sono ispirati dalla psicologia costruttivista, la quale a sua volta è espressione della filosofia omonima.

Il termine costruttivista significa considerare l'allievo attore del processo di apprendimento: è il soggetto che impara e che costruisce le proprie conoscenze.

Per capire quali siano le caratteristiche principali di questo modello, occorre partire dall'idea che gli allievi sono portatori di concezioni personali sulla realtà che li circonda. Tali concezioni sono gli strumenti mentali che gli allievi usano per decodificare informazioni, affrontare problemi, prendere decisioni. Si tratta di concezioni di senso comune che funzionano nell'ambito

## **2. IL SISTEMA DI RIFERIMENTO TEORICO, METODOLOGICO E PROGETTUALE**

---

della vita quotidiana ma che, di norma, ostacolano l'acquisizione del sapere scientifico. Esse sono però gli strumenti mentali di cui l'allievo dispone e che dovrebbe trasformare, modificare oppure sostituire con altre idee, concetti, modi di ragionare più adeguati, più vicini a quelli scientifici.

Secondo il costruttivismo, l'insegnante può aiutare l'allievo, può offrirgli situazioni di apprendimento che lo portino ad usare le proprie concezioni per affrontare situazioni problematiche, in modo da poterne saggiare l'adeguatezza. Queste situazioni diventano occasioni di apprendimento quando l'allievo diventa consapevole dell'inadeguatezza delle proprie concezioni e sente l'esigenza di acquisirne altre più adeguate, più vicine a quelle scientifiche.

Le situazioni di apprendimento devono quindi essere situazioni problematiche che vanno affrontate non dal singolo allievo (non si tratta di risolvere un problema), ma dal gruppo classe nel suo insieme. Tale approccio può essere schematizzato dicendo che gli allievi devono essere messi in condizione di lavorare come lavorano gli scienziati e il gruppo classe deve funzionare come un gruppo di ricercatori novizi guidati da un ricercatore esperto: l'insegnante(1).

Il costruttivismo, e con esso i modelli e le applicazioni pedagogiche che da tale teoria derivano, si è sviluppato sotto diverse forme. Si parla di costruttivismo interazionista per Piaget e Ausubel, che considerano l'interazione del soggetto (e dei suoi schemi mentali più interni) con i dati provenienti da un non meglio definito ambiente esterno, mentre si parla di costruttivismo socio-culturale per Vygotskij e Leont'ev che considerano l'apprendimento come un processo di costruzione di significati socialmente negoziati(2).

Il modello di apprendimento individuale proposto da Piaget si fonda su due principi generali, organizzazione e adattamento, attraverso i quali avviene lo sviluppo cognitivo e biologico dell'individuo, e su alcuni concetti quali: schema mentale, assimilazione, accomodamento, equilibrio. Secondo Piaget la mente è organizzata in strutture complesse e integrate. La struttura di livello più semplice è lo schema, definito da Piaget come una rappresentazione mentale di un definito insieme di percezioni, idee e/o azioni. Gli schemi compongono una più generale e complessa struttura ovvero sistemi organizzati di azioni o pensieri che ci permettono di rappresentare o pensare agli oggetti e agli eventi(3).

Piaget rileva che, affinché gli individui possano sopravvivere è necessario un processo di adattamento tra la rappresentazione dell'ambiente (gli schemi) e l'ambiente stesso. Il processo di costruzione di nuove conoscenze coincide, dunque, con il processo di modifica degli schemi preesistenti diventati inadeguati. Pertanto, l'apprendimento assolve essenzialmente una funzione adattativa. Lo scopo dell'adattamento è quello di mantenere l'equilibrio tra rappresentazione mentale e realtà esterna(4).

## 2.1 Scelte epistemologiche e approccio pedagogico di riferimento

---

Vi sono due processi mediante i quali si verifica l'adattamento: l'assimilazione e l'accomodamento. L'assimilazione si verifica quando una nuova conoscenza viene incorporata in uno schema mentale preesistente, senza una sostanziale riorganizzazione delle strutture mentali. L'assimilazione, spesso, implica il tentativo di comprendere qualcosa di nuovo utilizzando le conoscenze che già possediamo. In alcuni casi ciò può implicare una distorsione della nuova informazione al fine di adattarla agli schemi preesistenti. Laddove la nuova informazione non può essere assimilata negli schemi preesistenti, si verifica uno squilibrio. In questo caso è necessaria una modifica più sostanziale degli schemi che determina una riorganizzazione delle strutture mentali attraverso il processo di accomodamento.

Il processo di adattamento degli schemi mentali introduce l'idea di cambiamento concettuale che rappresenta uno dei presupposti fondamentali della didattica costruttivista.

Per Vygotsky (1978), l'apprendimento deriva direttamente dalle interazioni sociali. Uno dei concetti fondamentali introdotti da Vygotsky è la nozione di Zona di Sviluppo Prossimale (Zone of Proximal Development, ZPD). Nelle parole di Vygotsky: "La Zona di Sviluppo Prossimale è la distanza tra l'effettivo livello di sviluppo, determinato tramite la risoluzione autonoma di un problema, ed il livello potenziale di sviluppo, determinato attraverso la risoluzione di un problema sotto la guida di un adulto o di pari più capaci." In termini più semplici, la ZPD è la zona che separa le conoscenze che uno studente ha già da quelle che dovrà apprendere. Se, in relazione a un dato compito, lo studente si trova all'interno della ZPD, egli riuscirà ad eseguire il compito con l'assistenza di un istruttore e, successivamente, ad internalizzarlo. A tale attività di assistenza, laddove essa sia strutturata e sistematica, Bruner (1966) si riferisce con il termine "scaffolding" (impalcatura), che possiamo tradurre con il termine "supporto".

Secondo Vygotskij, lo studente è una sorta di apprendista, uno scienziato che indaga continuamente la realtà. Attraverso la sperimentazione lo studente è in grado di imparare. Quanto più il soggetto diventa parte attiva di questo fenomeno, tanto più l'apprendimento è efficace.

Una volta appurato che la didattica costruttivista mira a sviluppare competenze, cercando di incoraggiare la partecipazione attiva dello studente, è naturale chiedersi quale forma debba prendere questa partecipazione.

È evidente che, all'interno delle strutture educative, lo strumento più semplice, efficace e di facile applicazione è la discussione. La discussione e il confronto permettono di perfezionare i propri costrutti mentali. Quando è coinvolto anche il confronto con altre idee od opinioni si parla invece di conflitto sociocognitivo. Il conflitto risiede allora nell'interazione con gli altri aggiungendo così la dimensione sociale<sup>(5)</sup>. La discussione costringe il singolo individuo a rimodellare i propri costrutti mentali e gli permette di contestualizzare le conoscenze all'interno

## 2. IL SISTEMA DI RIFERIMENTO TEORICO, METODOLOGICO E PROGETTUALE

---

dell'ambiente sociale. Ogni volta che lo studente esprime le nozioni acquisite, lo farà in una forma leggermente diversa, perché inevitabilmente deve adattarsi alle esigenze dell'ascoltatore e del contesto. Ciò lo aiuta a comprendere sempre meglio il concetto acquisito, e questo vale sia per il discente che per il docente. È in virtù di questo meccanismo che insegnando si padroneggia sempre più la materia.

La discussione in classe può avvenire in vari modi, ma possiamo individuare due modi estremi ed opposti di proporre una discussione:

- La discussione tra pari: utile perché permette agli studenti di confrontare i propri costrutti mentali tra pari, senza dover sempre tener conto di quello che l'insegnante si aspetta che venga detto. Così facendo si demolisce almeno uno dei costrutti che spesso ostacola l'apprendimento per significato: l'idea che lo studente si fa delle aspettative dell'insegnante.
- La discussione collettiva: utile perché, anche se limita o condiziona le espressioni degli studenti, permette di sfruttare a pieno l'esperienza del docente. Per dirla alla Vygotsky, la diversità dei ruoli tra docente e discente è considerata una risorsa perché fa aumentare ulteriormente il numero di zone di sviluppo prossimali che interagiscono l'una con l'altra<sup>(5)</sup>.

In termini didattici il supporto da fornire agli studenti è costituito dall'insieme delle attività di mediazione, dei materiali, degli strumenti, degli artefatti predisposti dall'insegnante al fine di favorire l'apprendimento.

La posizione epistemologica nella quale si inserisce la presente ricerca è una mediazione tra le due prospettive discusse sopra, che possiamo identificare con il termine socio-costruttivista il cui principale ispiratore è Bruner.

Le sue riflessioni sullo sviluppo cognitivo sembrano caratterizzate dal tentativo di integrare il pensiero di Piaget e di Vygotskij, ovvero l'approccio centrato sulle strutture cognitive individuali con la posizione socioculturale. Bruner<sup>(6)</sup> considera tre diversi sistemi di rappresentazione della conoscenza, che sono interdipendenti e compresenti nei diversi momenti della vita dell'individuo: il sistema attivo in cui prevale il pensiero centrato sull'azione (si impara a fare una cosa attraverso la pratica e la sperimentazione); il sistema iconico che è legato agli stimoli provenienti dalla vista e dall'udito e dà origine all'apprendimento per osservazione (si impara guardando fare qualcosa e imitando l'azione); il sistema simbolico che, attraverso l'uso di simboli, permette di condividere il significato. Il gioco tra questi molteplici percorsi di



attribuzione di significato tra generazioni, individui e gruppi implica un'idea distributiva della cultura intesa come organizzazione della diversità. Non si tratta semplicemente di accettare che gli individui non sono tutti uguali, ma di instaurare un confronto programmatico e costante. In questa prospettiva si sviluppa la psicologia dell'apprendimento di Bruner, che tende a coniugare l'ambito situazionale e contestuale della cultura con lo sviluppo ontogenetico.

## 2.2 Metodologia di ricerca e progettazione

In passato, nell'ambito della ricerca educativa, si sono sviluppate due linee di ricerca parallele. La prima che aveva come obiettivo la comprensione di come gli studenti apprendono e l'altra che, invece, mirava alla progettazione di percorsi formativi e strategie didattiche finalizzate a favorire l'apprendimento. Possiamo affermare che la prima era centrata sullo studente, mentre la seconda sul contenuto disciplinare. In tempi più recenti si sono sviluppate e progressivamente sistematizzate diverse metodologie di indagine che includono entrambe le finalità. Progressi nella comprensione e nell'apprendimento delle scienze appaiono possibili solo se vi è un bilanciamento tra le due prospettive. Pertanto, la progettazione di sequenze di insegnamento/apprendimento che abbiano successo necessita di entrambe le posizioni(7). Questo lavoro di ricerca, come verrà successivamente chiarito, si inserisce in questa prospettiva. In questo paragrafo verrà illustrata la metodologia di ricerca e di progettazione utilizzati nella presente ricerca. I punti di riferimento teorici sono quelli del modello della "*Ricerca Basata su Progetti (DBR)*" e dell' "*Educational Reconstruction*" (ricostruzione educativa).

### 2.2.1 La Ricerca basata su Progetti

Le basi teoriche e metodologiche della *DBR* possono essere ricavate dai report del gruppo di lavoro denominato Design-Based Research Collective(8) e da alcuni speciali dedicati a tale metodologia(9). Il gruppo di lavoro precisa che la *DBR* si basa sulle cinque caratteristiche illustrate di seguito.

1. La *DBR* si pone due obiettivi: progettare ambienti di apprendimento e sviluppare teorie o "prototeorie" dell'apprendimento. Tali obiettivi sono strettamente interconnessi.
2. Lo sviluppo e l'attuazione del progetto e la ricerca che scaturisce dal controllo delle sue qualità hanno luogo attraverso continui cicli di progettazione, attuazione, analisi e riprogettazione(10, 11).

## 2. IL SISTEMA DI RIFERIMENTO TEORICO, METODOLOGICO E PROGETTUALE

---

3. La ricerca progettuale deve condurre a teorie condivisibili che aiutino a comunicare agli operatori e ai progettisti informazioni rilevanti sia sotto il profilo della progettazione che delle implicazioni educative.
4. La ricerca deve render conto di come il progetto funziona in scenari autentici (naturalistici). Essa deve documentare non soltanto successi e fallimenti, ma deve anche focalizzare l'attenzione sulle interazioni che possano affinare la nostra comprensione delle problematiche d'apprendimento coinvolte.
5. Lo sviluppo delle rendicontazioni deve basarsi su metodi che documentino e colleghino processi di attuazione del progetto didattico con risultati pertinenti.

Dall'esame di queste caratteristiche emergono i lineamenti, le ipotesi, ma anche alcune soluzioni operative, su cui tale metodologia fonda le sue basi. Innanzitutto vi è il riconoscimento della natura complessa del processo d'insegnamento/apprendimento. La complessità è il frutto delle interazioni che coinvolgono un gran numero di variabili. Le variabili caratterizzano sia il contesto sociale (il gruppo di allievi e il contesto più generale cui essi appartengono) cui sono rivolti gli interventi educativi, sia il progetto didattico, sia i soggetti che hanno il compito di gestire e applicare il nella pratica il progetto (insegnanti, ricercatori). La consapevolezza della natura irriducibile delle interazioni tra le diverse variabili in gioco implica diverse conseguenze. In primo luogo, il riconoscimento dell'influenza critica del particolare contesto sugli esiti degli interventi formativi. Da ciò discende la necessità di un'accurata valutazione e discriminazione dei risultati che dipendono dal particolare contesto e di quelli che sono, invece, generalizzabili.

In secondo luogo, la necessità di implementare metodologie di analisi che possano rendere conto delle interazioni tra le numerose variabili in gioco.

Da tutto ciò deriva la circostanza che tale metodologia tende a privilegiare criteri di valutazione di tipo interno, piuttosto che esterno (basati, ad esempio, sul confronto con un gruppo di controllo). Inoltre, la complessità delle interazioni in gioco impone la necessità di predisporre un diversificato set di strumenti di analisi e controllo dell'apprendimento (sia quantitativi che qualitativi).

Un altro aspetto che caratterizza esplicitamente la *DBR* è il suo carattere intenzionale, ovvero il fatto che l'implementazione dell'ambiente didattico si prefigge lo scopo di perturbare significativamente il contesto in cui è applicato, in modo da produrre delle modificazioni misurabili. L'analisi di tali modificazioni permette da un lato di valutare l'efficacia delle soluzioni didattiche, dall'altro di accrescere le conoscenze teoriche sui processi d'insegnamento/apprendimento.

Un'ultima caratteristica riguarda la flessibilità. Il progetto da mettere in atto non è rigido bensì flessibile, in quanto può subire adattamenti sulla base dei riscontri sperimentali. L'esigenza di flessibilità determina anche la natura ciclica della metodologia che si concretizza nella caratteristica descritta al precedente punto 2.

È utile sottolineare che un ambito d'applicazione particolarmente diffuso della *DBR* riguarda la costruzione di ambienti di apprendimento centrati sull'uso delle tecnologie della comunicazione e dell'informazione. A tal riguardo K. D. Squire (2005) ha sottolineato il contributo determinante che le ricerche basate su tale metodologia stanno fornendo in termini di precisazione dei collegamenti tra quadri teorici ed esigenze della pratica didattica.

### 2.2.2 Il modello dell'Educational Reconstruction

Il modello dell'Educational Reconstruction (ER) è stato sviluppato a partire dalla metà degli anni '90 da un gruppo di ricercatori tedeschi(12, 13, 14). Esso risponde alla richiesta di amalgamare due filoni di ricerca in didattica delle scienze: il pedagogico, di stampo europeo, che pone l'attenzione sul miglioramento della pratica dell'insegnamento, e l'empirico, di stampo americano, orientato agli specifici risultati di apprendimento dell'organizzazione dei contenuti al curriculum(15). In seno al filone europeo, è stata espressa l'esigenza di ripensare anche i contenuti scientifici per ricostruirli da una prospettiva didattica(16): in questo contesto si stabilizza il modello della ER, combinando la tradizione ermeneutica sui contenuti scientifici con un approccio costruttivista all'insegnamento/apprendimento.

All'interno di tale modello di progettazione vi è, infatti, il tentativo di coniugare l'aspetto formativo dell'azione didattica, che ha come finalità primaria quella dello sviluppo integrale della personalità del discente, con l'aspetto più squisitamente didattico, legato al processo analitico di trasposizione della conoscenza scientifica. Dal punto di vista procedurale il modello della ER si articola in tre fasi:

- analisi della struttura dei contenuti: analisi delle pubblicazioni, chiarificazione dei concetti di base, ecc;
- costruzione dell'istruzione;
- indagine empirica sul processo di apprendimento;

Le tre componenti del modello sono strettamente connesse tra loro. Nella fase iniziale della progettazione didattica, la struttura dei contenuti deve essere trasformata in struttura per l'istruzione, dunque il contenuto scientifico viene analizzato al fine di trasformarlo in un contenuto

## 2. IL SISTEMA DI RIFERIMENTO TEORICO, METODOLOGICO E PROGETTUALE

---

disciplinare per l'insegnamento. Questo avviene attraverso una fase detta di elementarizzazione del contenuto nella quale vengono evidenziati i nodi concettuali tenendo conto della complessa struttura delle esigenze di chi apprende. Per far ciò si procede ad una analisi dei libri di testo, di articoli scientifici, di quello che è stato lo sviluppo storico-epistemologico dei contenuti e della significatività educativa di quel contenuto.

Alla fase della progettazione didattica segue quella di costruzione della struttura per l'istruzione a partire dalle conoscenze preesistenti negli studenti. Queste, infatti, non sono viste come ostacoli di apprendimento, ma punti di partenza per promuovere conoscenza. In questo senso il modello dell'ER si inserisce in un quadro di riferimento epistemologico costruttivista(17, 18). L'apprendimento è visto come costruzione della propria conoscenza a partire da quella preesistente. Inoltre, la conoscenza scientifica è considerata come costruzione umana(19): non vi è una verità immutabile nella struttura dei contenuti di una particolare area, ma un consenso di una particolare comunità di scienziati; ogni presentazione di questo consenso, anche quella che troviamo nei libri di testo, è una ricostruzione idiosincratca degli scopi impliciti o espliciti degli autori. Di conseguenza la struttura del contenuto scientifico per l'istruzione deve essere costruito da chi progetta i curricula o dall'insegnante sulla base delle finalità che vuole raggiungere con l'insegnamento di quel particolare contenuto disciplinare. In altre parole, nell'ambito dell'ER "la conoscenza scientifica va ricostruita da una prospettiva didattica"(14).

Molti insegnanti pensano che la struttura del contenuto per l'istruzione deve essere più semplice della struttura del contenuto scientifico per poter essere compreso dagli studenti. Essi procedono attraverso una riduzione della struttura del contenuto scientifico. Nell'ambito dell'ER non è così, piuttosto la struttura del contenuto per l'istruzione è più complessa rispetto a quella scientifica. È necessario, infatti, inserire la conoscenza astratta in vari contesti per incontrare le potenzialità degli studenti e superarne le loro difficoltà.

Infine, la progettazione didattica, nell'ambito di tale metodo, si basa oltre che sulle concezioni pre-istruzione anche su studi empirici sui processi d'apprendimento e sugli interessi degli studenti. In questa fase si considerano in particolare anche il ruolo dei metodi didattici, degli esperimenti e di altri supporti didattici(7). Ne consegue che la validazione e la sperimentazione dei materiali e delle attività per l'istruzione (terza fase dell'ER) sono intimamente connesse con la loro progettazione. Sviluppo dei materiali per l'istruzione e attività di ricerca, dunque, risultano essere, secondo il modello dell'ER, collegate tra loro.

Sulla base del modello progettuale dell'ER, la progettazione di questa ricerca si è basata su una triplice analisi: un'analisi disciplinare dei contenuti, di tipo storico ed epistemologico, un'analisi degli studi empirici precedenti rispetto alla presente ricerca e infine un'a-

nalisi psico-pedagogica, finalizzata a individuare conoscenze spontanee e potenziali difficoltà d'apprendimento.

L'intero disegno sperimentale è stato sviluppato in quattro fasi: la progettazione del percorso didattico, la costruzione della sequenza di insegnamento/apprendimento e degli strumenti didattici, la sua sperimentazione e l'analisi dei risultati.

### 2.3 Verifica dell'efficacia della proposta didattica

Il processo progettuale e il processo di verifica sono strettamente correlati per diverse ragioni. Da un canto, i riferimenti teorici su cui si basa il progetto determinano la scelta dei criteri e degli strumenti di analisi del processo d'insegnamento/apprendimento, dall'altro le prime fasi d'indagine influenzano la calibrazione del progetto didattico, e infine gli aspetti dell'apprendimento che si intendono sottoporre ad analisi influenzano la strutturazione e l'organizzazione del percorso formativo.

L'analisi globale si basa su un confronto di tipo ingresso/uscita. Essa è effettuata sulla base dell'analisi e del confronto tra un test iniziale, somministrato agli studenti nella fase della progettazione della ricerca, per studiare i modelli spontanei e le loro eventuali difficoltà di apprendimento dei contenuti proposti, ed un test finale uguale a quello iniziale, al fine di confrontare i risultati. L'analisi locale si realizza attraverso un monitoraggio effettuato durante lo sviluppo delle singole attività. Nello specifico, essa è effettuata sulla base dei dati raccolti durante le singole attività previste nella sequenza. Durante la sperimentazione in classe, infatti, sono stati ricavati dati inerenti il processo di apprendimento degli alunni di vario tipo: interviste del tipo "focus group", registrazioni audio e schede di lavoro. Le registrazioni riguardano tutti gli interventi in classe mentre le interviste, del tipo focus group, sono state effettuate a campione.

Dal momento che quasi tutte le attività in classe sono state costruite sul lavoro di gruppo, si è analizzato come l'interazione tra pari può favorire l'apprendimento degli studenti e come la collaborazione contribuisca all'apprendimento individuale(20) attraverso l'analisi dell'interazione nell'ambito delle conversazioni che avvengono in classe durante le attività didattiche.

In questa ricerca, le dinamiche di interazione degli studenti durante le interviste di gruppo saranno analizzate in termini di assimilazione delle risorse e/o accomodamento dei modelli. Infine, le interviste di gruppo, e le conversazioni degli studenti tra loro e con il ricercatore-intervistatore sono esaminate per indagare le modalità con cui gli studenti collaborano nelle attività che hanno come finalità la costruzione di modelli scientifici.

### 2.4 Strumenti e metodi per l'analisi dei dati

Gli strumenti e i metodi che ci accingiamo a descrivere servono da una parte a constatare il livello di comprensione dei temi e i concetti trattati dall'altra parte a verificare l'efficacia del percorso didattico progettato e sperimentato.

#### 2.4.1 Analisi dei testi scritti

Il questionario, come verrà precisato meglio successivamente, è strutturato in modo tale da richiedere una diversa classificazione in dipendenza del quesito stesso. Questa scelta ha come conseguenza una diversificazione dei metodi con i quali i diversi quesiti sono analizzati. Alcuni sono analizzati sulla base di una categorizzazione a priori basata su uno specifico modello di crescita cognitiva riguardante i temi trattati (vedi par. 3.3).

Altri sono analizzati secondo l'approccio fenomenografico(21, 22). La fenomenografia pone l'accento sui differenti modi in cui la persona può relazionarsi con l'oggetto di conoscenza per apprendere(23). Questo può essere comunicato al ricercatore in differenti modi, in particolare attraverso il linguaggio(24). Gli studi fenomenografici hanno ripetutamente mostrato che ciascun fenomeno, concetto o principio può essere pensato in un numero limitato di modi differenti e che ciò permette di operare categorizzazioni delle descrizioni dei soggetti analizzati.

Le categorie possono essere tratte dalle risposte degli studenti a domande aperte(25), da interviste strutturate(26, 27) o da fogli di lavoro precedentemente predisposti. L'aspetto che caratterizza l'approccio fenomenografico (e che lo distingue dagli altri) consiste nel fatto che non vengono assunte "a priori" categorie nelle quali inquadrare le risposte attese, bensì vengono create categorie di risposte "a posteriori", basate sui dati ottenuti nell'indagine mediante successivi confronti e riordinamenti dei dati stessi. La categorizzazione fenomenografica è contestualizzata: il contesto in cui l'interazione avviene lo differenzia da altri anche analoghi.

Questo tipo di analisi oltre che per i modi di pensare i fenomeni è stato utilizzato per valutare aspetti relativi all'insegnamento/apprendimento, prevalentemente nel campo della didattica della fisica(27, 28): esso consente infatti di ricavare informazioni qualitative sulle concezioni degli studenti e di valutare l'apprendimento dell'argomento stesso, e quindi l'efficacia del metodo di insegnamento utilizzato. Ciò nel caso si scelga come disegno sperimentale la modalità del test-retest e si utilizzino questionari aperti, somministrati a studenti prima e dopo lo studio dell'argomento. In questo contesto di analisi dati vi è la possibilità di studiare anche l'influenza di variabili di contesto, come, ad esempio, le strategie didattiche, gli strumenti utilizzati o le tipologie di verifica. Tutto ciò può essere utile durante la fase di progettazione.

Nel presente lavoro l'approccio fenomenografico permette nella fase iniziale di analisi delle idee spontanee degli studenti, di individuare delle categorie(25, 26, 27) riguardanti le concezioni degli studenti riguardo le distribuzioni nell'ambito, più specifico, della meccanica statistica.

Il processo di categorizzazione ha seguito le seguenti linee guida:

1. le categorie sono state estratte dalle risposte degli studenti, senza tenere conto di categorie predeterminate;
2. le categorie sono distinguibili, mutuamente esclusive, in numero limitato;

Il processo di categorizzazione è stato svolto in modo iterativo: sono state inizialmente identificate le categorie utilizzando un piccolo numero di questionari scelti a caso, delineando similarità e differenze nelle risposte, quindi si sono confrontati i restanti dati per l'estensione delle categorie ed il riordinamenti dei dati stessi. Le risposte degli studenti sono state analizzate separatamente da più persone e le categorie individuate sono state messe a confronto, discusse e riviste ripetutamente fino al raggiungimento di un accordo.

### 2.4.2 Le interviste

Le interviste permettono di tenere sotto controllo lo svolgimento delle attività. Il tipo di intervista scelto può essere classificato come semistrutturato (il ricercatore parte da una griglia di domande ma si lascia guidare dalle risposte degli intervistati) e più vicino al focus-group che all'intervista singola. Il numero di partecipanti, infatti, è sempre stato di almeno 3 elementi.

### 2.4.3 Le registrazioni

Le registrazioni audio sono state effettuate durante alcuni interventi in classe e sono state più volte riascoltate per l'individuazione degli episodi critici. In particolare sono state eseguite sia durante la fase di laboratorio che durante l'elaborazione dei dati sperimentali. Gli episodi critici sono stati selezionati cercando i momenti dai quali evincere quando e/o come l'uso di strumenti e materiali strutturati piuttosto che la discussione permette lo sviluppo di capacità operative, di osservazione, di descrizione, di interpretazione. L'attenzione è rivolta soprattutto alle dinamiche di contrattazione di significati che vengono evidenziate dai dibattiti fra gli studenti, sia quando queste si sono svolte fra una coppia che quando il gruppo era più numeroso. Come sessioni rappresentative sono stati considerati episodi critici piuttosto brevi, ciò perchè l'interesse non era rivolto a capire l'evoluzione delle epistemologie o i cambiamenti di strutture ontologiche, bensì a caratterizzare gli sviluppi concettuali locali, i cambiamenti di strategie di osservazione,

## **2. IL SISTEMA DI RIFERIMENTO TEORICO, METODOLOGICO E PROGETTUALE**

---

le semplici modifiche dei modelli descrittivi e interpretativi, che possono avvenire in poco tempo con brevi scambi di opinioni.



### 3

## Progettazione della proposta didattica

Molte ricerche hanno indagato in che misura la comprensione dei concetti fisici possa essere influenzata dalle difficoltà concettuali connesse alla loro rappresentazione matematica. Le rappresentazioni matematiche sono alla base delle descrizioni scientifiche e molto spesso gli studenti mostrano difficoltà nella comprensione dell'utilizzo e dei limiti di tali rappresentazioni.

Il concetto di distribuzione è il nucleo fondante della statistica ed è un componente fondamentale del pensiero statistico. Nella fisica, questa è come una lente che ci permette di guardar con maggiore nitidezza gli errori nell'analisi dei dati sperimentali e la dinamica dei sistemi formati da molti corpi (la meccanica statistica). La ricerca, tuttavia, ci mostra con forte evidenza quanto la comprensione del concetto di distribuzione sia molto più complessa e difficile(29): diversi studi sperimentali mostrano come sia gli insegnanti che gli studenti evidenziano intuizioni diverse, misconcezioni e comprensioni incomplete o superficiali sulle distribuzioni.

Nei programmi di fisica, gli studenti incontrano per la prima volta il concetto di distribuzione durante l'apprendimento degli aspetti che riguardano le misure e gli effetti degli errori accidentali. Sotto l'ipotesi di distribuzione casuale degli errori, è introdotta la distribuzione normale e i parametri che la caratterizzano: valore medio e deviazione standard. Gli studenti incontrano ancora il concetto di distribuzione studiando la teoria cinetica dei gas. In questo caso, la distribuzione riguarda la variazione di una variabile fisica (energia, velocità) tra le singole particelle che costituiscono un campione di molecole. I contesti prima menzionati sono molto diversi; nel primo caso è analizzato un oggetto fisico (per esempio un pendolo) ed è misurata una delle sue caratteristiche per ottenere un set di valori differenti affetti dagli errori sperimentali.

### 3. PROGETTAZIONE DELLA PROPOSTA DIDATTICA

---

tali; nel secondo caso le distribuzioni vengono fuori dalla stessa caratteristica (per esempio la velocità delle molecole) in un campione del sistema analizzato. Approfondendo il concetto di distribuzione non è difficile rilevare analogie tra le due procedure di campionamento, ma non è raro trovare studenti che guardano le distribuzioni di velocità molecolari come conseguenza degli errori coinvolti nella valutazione della velocità stessa.

Molti articoli di ricerca discutono su come gli studenti imparano l'uso delle rappresentazioni scientifiche e matematiche, come ad esempio grafici lineari ed equazioni, indagando il ruolo del contesto sia da un punto di vista sintattico che semantico.

Nella presente ricerca, la progettazione della proposta didattica da sperimentare cura in particolare modo l'aspetto delle distribuzioni di una grandezza fisica in un sistema campione di particelle. Tuttavia, attraverso il questionario si vogliono indagare anche le conoscenze e le competenze relative al concetto di distribuzione applicata a contesti di vita comune.

A tal fine nei prossimi paragrafi la nostra attenzione sarà rivolta ai seguenti aspetti: lo sviluppo storico-epistemologico del concetto di distribuzione con particolare riferimento all'approccio dato da Maxwell e da Boltzmann, le pubblicazioni scientifiche riguardanti i metodi sperimentali attraverso cui determinare la distribuzione di velocità di un gas di particelle e i risultati della ricerca sulla comprensione del concetto di distribuzione.

#### 3.1 Lo sviluppo storico-epistemologico del concetto di distribuzione di velocità e/o energia

Di solito la nascita della teoria cinetica dei gas si attribuisce ad un breve lavoro del 1856 del chimico tedesco Kronig. Il lavoro in realtà non conteneva molte innovazioni. Il lavoro decisivo fu quello di Clausius del 1857. Egli definisce il gas perfetto e utilizza per primo la grandezza "valore medio della velocità". In tutti questi lavori non è presente tuttavia l'idea che le particelle potessero avere una certa distribuzione di velocità, anzi si riteneva che i continui e innumerevoli urti portassero ad una uniformità delle velocità. Soltanto con Maxwell cambia questo modo di pensare, ritenendo al contrario che gli innumerevoli urti portassero ad una ben definita distribuzione statistica della grandezza di interesse (velocità o energia)<sup>(30)</sup>.

Nella prima memoria "Illustrations of the Dynamical Theory of Gases" (1859), composta di tre parti, Maxwell si pone il problema di come siano distribuite le velocità e non soltanto di quale sia il valore medio.

Dimostrazione della distribuzione o ripartizione delle velocità:

### 3.1 Lo sviluppo storico-epistemologico del concetto di distribuzione di velocità e/o energia

---

“Se moltissime particelle sferiche uguali fossero in moto in un recipiente perfettamente elastico, avverrebbero delle collisioni fra le particelle e le loro velocità verrebbero alterate ad ogni collisione; cosicché dopo un certo tempo l’energia cinetica sarà suddivisa fra le particelle secondo qualche legge regolare, poiché il numero medio di particelle la cui velocità è compresa entro certi limiti è determinabile, benché la velocità di ogni particella cambi ad ogni collisione.

Vediamo adesso come Maxwell affronta il problema in quella che lui definisce “Proposizione IV”:

“PROPOSIZIONE IV - Trovare il numero medio di particelle le cui velocità sono comprese entro limiti definiti, dopo un gran numero di collisioni fra un gran numero di particelle uguali. Sia  $N$  il numero totale di particelle. Siano  $v_x, v_y, v_z$ , le componenti delle velocità di ogni particella in tre direzioni ortogonali, e sia  $N \cdot g(v_x)dv_x$  il numero di particelle per le quali  $v_x$  giace fra  $v_x$  e  $v_x + dv_x$  dove  $g(v_x)$  è una funzione di  $v_x$  da determinare. Il numero di particelle per cui  $v_y$  giace fra  $v_y$  e  $v_y + dv_y$  sarà  $N \cdot g(v_y)dv_y$  e il numero per cui  $v_z$  giace fra  $v_z$  e  $v_z + dv_z$  sarà  $N \cdot g(v_z)dv_z$  dove  $g$  indica sempre la stessa funzione. ora l’esistenza della velocità  $v_x$  non modifica in alcun modo quelle delle velocità  $v_y$  e  $v_z$  poiché queste sono tutte ad angoli retti l’una dall’altra e indipendenti, cosicché il numero di particelle la cui velocità giace fra  $v_x$  e  $v_x + dv_x$  e anche tra  $v_y$  e  $v_y + dv_y$  e anche tra  $v_z$  e  $v_z + dv_z$  è

$$N \cdot g(v_x)g(v_y)g(v_z)dv_xdv_ydv_z \quad (3.1)$$

Se poniamo che le  $N$  particelle partano dall’origine allo stesso istante, allora questo sarà il numero nell’elemento di volume  $dv_xdv_ydv_z$  dopo l’unità di tempo, e il numero riferito all’unità di volume sarà  $N \cdot g(v_x)g(v_y)g(v_z)$  Ma le direzioni delle coordinate sono perfettamente arbitrarie, e perciò questo numero deve dipendere dalla sola distanza dall’origine, cioè

$$g(v_x)g(v_y)g(v_z) = f_o(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \quad (3.2)$$

Risolvendo questa equazione funzionale, si perviene a

$$g(v_x) = Ce^{v_x^2} f_o(v^2) = C^3 e^{v^2} \quad (3.3)$$

Se poniamo  $A$  positivo, il numero di particelle cresce con la velocità, e troveremo l’intero numero di particelle infinito. Poniamo perciò  $A$  negativo”

Maxwell, dunque, non fa alcun ragionamento di tipo probabilistico, anche se l’ipotesi che le componenti delle velocità poiché ortogonali e indipendenti non si influenzino reciprocamente risulta essere molto ambigua, poiché non viene aggiunto alcun elemento chiarificatore della frase

### 3. PROGETTAZIONE DELLA PROPOSTA DIDATTICA

---

stessa. Tale frase quindi potrebbe essere interpretata come “linearmente indipendenti” (termine mutuato dall’algebra lineare) oppure come “statisticamente indipendenti”, cioè la probabilità di avere una data velocità in una direzione non dipende dalle velocità nelle altre direzioni.

La logica con cui Maxwell deriva la nota distribuzione non è del tutto nuova. Precedentemente, Hershel aveva pubblicato un articolo sulla teoria della probabilità in cui vengono usate le stesse ipotesi fatte da Maxwell, però con un preciso riferimento alla indipendenza statistica. Molti ritengono quindi che Maxwell si sia ispirato proprio a questo lavoro di Hershel.

Nella seconda memoria “On the Dynamical Theory of Gases” (1866) il problema della distribuzione di velocità viene affrontato ancora. Maxwell riferendosi al lavoro del 1859/60 sulla parte della derivazione della distribuzione di velocità afferma:

*“I have given an investigation of this case, founded on the assumption that the probability of a molecule having a velocity resolved parallel to  $x$  lying between given limits is not in any way affected by the knowledge that the molecule has a given velocity resolved parallel to  $y$ . As this assumption may appear precarious, I shall now determine the form of the function in a different manner.”*

Maxwell quindi nel citare il suo stesso lavoro del 1859, sembrerebbe chiarire il senso da dare alla parola “indipendenti”. Tuttavia questa ipotesi risulta essere a suo parere “dubbia”.

Pertanto Maxwell in “On the final Distribution of Velocity among the Molecules of Two Systems acting on one another according to any Law of Force” propone una diversa dimostrazione per ricavare la nota legge della distribuzione di velocità. Ancora una volta non sembra far uso dei concetti della teoria delle probabilità. In particolare Maxwell si occupa dello studio degli effetti dei continui urti fra particelle, ragionando in termini puramente meccanici e pervenendo alla seguente conclusione:

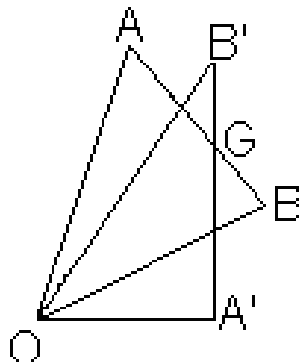
*“When the number of pairs of molecules which change their velocities from  $OA, OB$ , to  $OA', OB'$  is equal to the number which change from  $OA', OB'$  to  $OA, OB$ , then the final distribution of velocity will be obtained, which will not be altered by subsequent exchanges”*

*“This final distribution of velocity is attained only when the molecules have had a great number of encounters, but the great rapidity with which the encounters succeed each other is such that in all motions and changes of the gaseous system except the most violent, the form of the distribution of velocity is only slightly changed.”*

In pratica Maxwell usa quello che oggi viene chiamato “bilancio dettagliato”, e giustifica tale utilizzo con la necessità che la funzione di distribuzione sia stazionaria. Il bilancio dettagliato è una delle più importanti assunzioni dell’indipendenza probabilistica ed è usato per i fondamenti della teoria cinetica e della meccanica statistica.

### 3.1 Lo sviluppo storico-epistemologico del concetto di distribuzione di velocità e/o energia

---



**Figura 3.1:** Diagramma delle velocità delle molecole prima e dopo l'urto.

Proprio nello stesso periodo della seconda memoria di Maxwell compaiono i primi contributi di Boltzmann alla teoria cinetica dei gas ed in particolare alla definizione della distribuzione che porterà anche il suo nome. Boltzmann darà un assetto completo alla teoria cinetica dei gas fra il 1866 e il 1872.

Boltzmann prende le mosse nel 1866 da un programma strettamente meccanicistico:

*“Scopo di questo articolo è di fornire una dimostrazione completamente generale, puramente analitica della seconda legge della termodinamica, e di scoprire il teorema in meccanica che ad essa corrisponde.”*

Successivamente si converte ad un punto di vista cinetico, cioè alla considerazione della funzione distribuzione (sulla scia di Maxwell) al posto dell'insieme completo delle variabili delle molecole. Così nel 1868 pubblica la prima di una serie di voluminose memorie in cui i risultati di Maxwell vengono estesi anche a sistemi non di tipo gas di molecole. Egli partendo da considerazioni di tipo meccanico stabilisce l'equazione per la variazione temporale della funzione di distribuzione delle velocità delle molecole. Il più noto dei risultati di Boltzmann, il *“teorema H”* ha come diretta conseguenza che qualunque distribuzione iniziale di velocità delle molecole evolve verso lo stato di equilibrio, corrispondente alla legge di distribuzione trovata precedentemente e con altre considerazioni da Maxwell. Questa legge viene generalizzata da Boltzmann in modo da essere applicata a qualunque sistema fisico in cui le forze interatomiche e i campi esterni devono essere tenuti in conto; se  $\epsilon$  denota l'energia totale di ogni molecola, la legge di distribuzione è

$$f_0 = Ae^{-\beta\epsilon} \quad (3.4)$$

### 3. PROGETTAZIONE DELLA PROPOSTA DIDATTICA

---

che si riduce a quella trovata da Maxwell nel caso in cui non vi sia interazione fra le molecole ed  $\epsilon$  sia costituita dalla sola energia cinetica.

La terza memoria di Maxwell “On the Final State of a System of Molecules in motion subject to forces of any kind.” (1873) è relativamente breve ed è pubblicata su *Nature*.

Ancora una volta propone una dimostrazione della distribuzione di velocità in cui fa uso di concetti mutuati dalla meccanica, come la conservazione dell’energia cinetica, e l’ipotesi seconda la quale in una situazione stazionaria una coppia di molecole scambia le velocità con un’altra coppia. In pratica propone ancora il bilancio dettagliato, senza però fare dei riferimenti espliciti alla teoria della probabilità.

Nel 1877 Boltzmann ritorna sul problema della determinazione della distribuzione di velocità di un sistema di particelle. L’approccio precedentemente usato, di tipo meccanicistico, è messo notevolmente in crisi a causa di tutta una serie di paradossi proposti da diversi studiosi. Diventa sempre più pressante la necessità di introdurre aspetti di tipo probabilistico, e definire la relazione tra *stati microscopici* e *stati macroscopici*. La teoria cinetica sviluppata precedentemente da Boltzmann si basa sulla seconda tipologia di stati. Ma ad uno stato macroscopico assegnato non corrisponde un solo stato microscopico. Vi è invece un numero altissimo dei secondi compatibile con esso.

Il nuovo approccio consiste nello studiare tutto il complesso delle configurazioni microscopiche compatibili con lo stato macroscopico del sistema, e prende in considerazione non già il singolo sistema, ma un insieme puramente concettuale costituito da un gran numero di sistemi identici tutti nel medesimo stato macroscopico ma ciascuna in una diversa configurazione microscopica. A questo punto si introduce quindi il concetto di probabilità da assegnare ad uno stato macroscopico in corrispondenza del numero di stati microscopici compatibili.

Al concetto di proprietà media di un sistema, intesa come media durante un periodo molto lungo, si sostituisce un nuovo concetto, come comportamento medio di un insieme puramente ideale composto da un gran numero di sistemi identici. La questione dell’equivalenza di queste due definizioni costituisce ancora oggi uno dei problemi fondamentali relativi ai fondamenti della meccanica statistica.

Il problema che Boltzmann si pone è dunque quello di calcolare il numero di modi distinti in cui uno stesso stato macroscopico può essere realizzato; quanto più numerosi sono gli stati microscopici che corrispondono ad uno stato macroscopico, tanto più quest’ultimo sarà probabile. Queste considerazioni portano Boltzmann a trovare come distribuzione più probabile ancora quella determinata precedentemente analoga a quella trovata da Maxwell.

### 3.1 Lo sviluppo storico-epistemologico del concetto di distribuzione di velocità e/o energia

---

Boltzmann getta le basi per il nuovo modo di concepire gli aspetti della termodinamica e contribuisce al lento e difficoltoso passaggio dalla teoria cinetica dei gas alla meccanica statistica vera e propria. Sarà successivamente Gibbs a completare definitivamente questo passaggio definendone gli aspetti formali attraverso gli insiemi statistici.

Nella quarta memoria “On Boltzmann’s Theorem on the average distribution of Energy in a system of material points” (1879) la metodologia di dimostrazione della distribuzione cambia significativamente. In questa memoria Maxwell getta le basi per quella che sarà la meccanica statistica secondo l’impostazione di Gibbs.

*“.....In the statistical investigation of the motion, we confine our attention to the number of these systems which at a given time are in a phase such that the variables which define it lie within given limits. If the number of systems which are in a given phase (...) does not vary the time, the distribution of the systems is said to be steady.”*

Maxwell propone un metodo alternativo a quello utilizzato da Boltzmann che evidente non trova pienamente convincente.

*“In the statistical method of investigation, we do not follow the system during its motion, but we fix our attention on a particular phase, and ascertain whether the system is in that phase or not, and also when it enters the phase and when it leaves it. Boltzmann defines the probability of the systems being in the phase (a,b) as the ratio of the aggregate time during which it is in that phase to the whole time of the motion, the whole time being supposed to be very great. I prefer to suppose that there are a great many systems the properties of which are the same,..... The motion of each system is of course independent of the other systems.”*

Lo sviluppo storico ed epistemologico descritto in queste pagine mostra come il cammino verso la definizione del concetto di distribuzione sia stato prettamente teorico. Ciascuno degli approcci prima descritti presenta inoltre difficoltà e incongruenze. Infatti sia l’approccio di Maxwell che quello di Boltzmann obbligano a ragionare in termini probabilisti e quindi ad utilizzare gli strumenti tipici di questa metodica. Ciò nonostante l’analisi precedente ci consente di affermare che entrambi, seppur per motivi diversi, non furono mai pienamente consapevoli e convinti della procedure di dimostrazioni utilizzate. Altri nodi concettuali non pienamente soddisfacenti riguardano aspetti molto tecnici della procedura di dimostrazione usata da Boltzmann. Il primo aspetto riguarda l’uso del calcolo combinatorio il quale richiede l’utilizzo dell’approssimazione del logaritmo fattoriale, approssimazione non sempre possibile. Il secondo aspetto riguarda la questione dell’equivalenza fra medie temporali e statistiche, questione ancora oggi oggetto di discussione nell’ambito dei fondamenti teorici della meccanica statistica (ipotesi ergodica).

## 3.2 Metodi sperimentali per la determinazione della distribuzione di velocità di un sistema di particelle

Le prime evidenze sperimentali sulla distribuzione di velocità di un sistema di particelle sono successive ai trattati di Maxwell di molti anni. La prima verifica della legge di Maxwell è del 1909 ad opera di Brown attraverso l'utilizzo delle valvole termoioniche, altre metodologie sono state individuate da Stern(31), Zartman(32), Miller e Kusch(33).

La ricerca di un metodo sperimentale per l'individuazione della distribuzione di velocità di un gas di particelle ha indotto diversi ricercatori a progettare e realizzare diversi apparati adatti allo scopo. Questi possono essere suddivisi in due grandi categorie: quelli di tipo meccanico e quelli di tipo elettromagnetico. A questi ultimi fanno riferimento quelli che impiegano le valvole termoioniche. Negli anni le pubblicazioni scientifiche riguardanti tali tematiche sono state numerose ed hanno subito una progressiva trasformazione rispetto agli scopi proposti. Dall'interesse per la ricerca di base si è passati alla ricerca nel campo delle applicazioni tecnologiche come l'elettronica e le telecomunicazioni.

In questo paragrafo metteremo in rassegna le pubblicazioni scientifiche maggiormente significative da cui si è preso spunto per definire i caratteri essenziali delle proposte sperimentali nella presente ricerca.

Fra i lavori di ricerca di base, fondamentali e rappresentativi di tutta una serie di lavori successivi, che fanno uso di sistemi meccanici, abbiamo il lavoro di I. F. Zartmann, "*A direct measurement of molecular velocities*" pubblicato su *Physical Review* nel 1931. In questo lavoro Zartmann affronta il problema della selezione delle velocità delle molecole di un gas e definisce un metodo di tipo meccanico molto efficiente e preciso ma complesso da realizzare e concettualmente molto impegnativo.

Un'altra serie di lavori fanno capo, invece, ai metodi di selezione di tipo elettromagnetico che utilizzano le valvole termoioniche. Fra questi il più rappresentativo è quello di L. H. Germer del 1925, "*The distribution of initial velocities among thermionic electrons*" pubblicato mentre questi lavorava ai laboratori Bell. Altri esempi sono forniti da J. G. Dodd "*An experiment on electron emission*" con un lavoro pubblicato su *American Journal of Physics* nel 1970 e da K. Turvey "*Test of validity of Maxwellian statistics for electrons thermionically emitted from an oxide cathode*" pubblicato su *European Journal of Physics* nel 1989. In tutti quest'ultimi lavori gli autori individuano un percorso attraverso il quale verificare la validità della legge di Maxwell in riferimento al gas di elettroni, senza però mostrare l'effettiva forma della distribuzione.



### **3.3 Risultati di ricerca sulla comprensione del concetto di distribuzione**

---

Alcuni altri esempi rappresentativi sono dati da A. N. Meansurov et al. “*Experimental study of Maxwell’s velocity distribution for thermoelectrons in practical work in general physics*” lavoro pubblicato nel 1974 da V. I. Lenin Moscow Pedagogical Institute, da E. H. Hirsh “*Abnormal electron temperatures and electron reflection in the cylindrical thermionic diode*” pubblicato su Journal of Physics D: Applied Physics nel 2002 ed infine da A. A. Azooz “*An experiment on thermionic emission back to the good old triode*” pubblicato su European Journal of Physics nel 2007. Questi lavori vanno oltre la semplice verifica della legge di Maxwell-Boltzmann, mostrando la forma effettiva della distribuzione. Tuttavia quasi tutti fanno uso di apparati molto costosi e complessi non ritrovabili nei comuni laboratori didattici anche di livello universitario. Il lavoro di Azooz, sebbene faccia uso di strumentazioni di basso costo propone risultati, ritenuti da chi scrive, non pienamente soddisfacenti e coerenti. Questi perviene infatti alla conclusione secondo la quale, nel caso di gas di elettroni emessi termionicamente, sia possibile distinguere la distribuzione di Fermi da quella di Maxwell.

Esiste un’altra categoria, anche essa di tipo elettromagnetico, di cui un esempio è dato dal lavoro di M. D. Sturge et al “*An experiment to demonstrate the canonical distribution*” pubblicato su American Journal of Physics nel 1999 in cui la selezione è fatta ancora attraverso l’uso di campi elettrici ma all’interno della materia, in particolare nei semiconduttori. In questo caso il dispositivo utilizzato è un transistor opportunamente polarizzato. Questo apparato sperimentale, seppur semplice da un punto di vista costruttivo, risulta essere complesso da un punto di vista concettuale per le difficoltà legate allo studio degli elettroni all’interno di strutture con bande di energia come la banda di valenza e di conduzione.

Infine il lavoro di J. Brody et al “*Observing the Maxwell-Boltzmann distribution in led emission spectra*” del 2010 pubblicato su American Journal of Physics rappresenta un ulteriore esempio di apparato sperimentale per la verifica della legge di Maxwell-Boltzmann. Gli autori fanno uso dei dispositivi led e ne analizzano lo spettro di emissione. Anche questo apparato richiede, per una corretta comprensione, conoscenze sia fisiche che matematiche troppo avanzate, in riferimento agli scopi didattici che la nostra ricerca si propone.

### **3.3 Risultati di ricerca sulla comprensione del concetto di distribuzione**

La comprensione di un grafico è di solito definita “interpretazione” (34) o identificazione del “significato di un grafico” (35). Un recente lavoro di revisione(36) analizza alcuni punti di vista di ricercatori provenienti da diverse discipline sulla comprensione dei grafici e sottolinea tre

### 3. PROGETTAZIONE DELLA PROPOSTA DIDATTICA

---

componenti principali nel processo di comprensione del grafico che mostrano una progressione di attenzione dalle caratteristiche locali alle caratteristiche globali di un grafico.

La prima componente è relativa alle modalità con cui avviene la traduzione in grafici di tabelle di dati, cioè le modalità con cui avviene un cambiamento nella forma di comunicazione e che comporta la comprensione di un sistema di convenzioni (vedi ad esempio, (37)) oltre che l'identificazione delle sue caratteristiche strutturali. La seconda fase, detta interpretazione, richiede di manipolare le informazioni lette in un grafico attraverso confronti, calcoli e in generale attraverso la riorganizzazione delle informazioni. Infine, la comprensione completa del grafico richiede la capacità di mettere in relazione le informazioni contenute nel grafico al contesto, individuando tendenze e facendo previsioni.

Il processo per arrivare alla descrizione della situazione descritta da un dato grafico è spesso caratterizzato come inferenza(38); esso attribuisce un significato specifico al grafico inserendolo in un contesto.

È stato evidenziato inoltre che molti studenti in grado di riportare i dati in forma grafica, molto spesso non riescono ad operare il processo inverso, cioè non riescono a “vedere” nel grafico le caratteristiche del set di dati. Alcune ricerche evidenziano che le differenze rilevate fra gli studenti nella capacità di comprensione dei grafici, sono molto spesso connesse con la loro familiarità rispetto alle situazioni analizzate o la loro rilevanza nella vita di ogni giorno. In realtà, i risultati di ricerche che analizzano le capacità degli esperti nella comprensione dei grafici mostrano come queste siano molto diverse nel caso in cui il grafico in esame coinvolge o meno il loro settore di competenza. Infatti, una ricerca che coinvolge docenti di scienze e di matematica(39) riporta che, in alcuni casi, questi non sono stati in grado di connettere efficacemente i grafici ai fenomeni naturali, a causa della non conoscenza dei fenomeni descritti nei grafici; di contro, i professionisti in una qualche disciplina sono stati in grado di leggere i grafici che descrivono situazioni nei loro rispettivi campi di appartenenza. La conclusione rilevante di tali ricerche è che una efficace lettura di un grafico richiede sia familiarità con le convenzioni ed i segni utilizzati nel grafico, che la familiarità con i contesti che tali grafici possono esprimere(39).

Come conseguenza, una piena comprensione della comunicazione attraverso il linguaggio grafico richiede contemporaneamente una comprensione della sua sintassi e della sua semantica.

Per quanto riguarda il concetto di distribuzione, molti studi hanno analizzato la stretta connessione tra tale concetto ed il concetto di “variazione di un set di dati”(40) inteso come la descrizione e la misura della variabilità delle caratteristiche osservabili (41). Diversi testi di statistica definiscono la distribuzione di una variabile come “i valori da essa acquisiti e

### **3.3 Risultati di ricerca sulla comprensione del concetto di distribuzione**

---

quanto spesso tali valori vengono acquisiti”(42). La distribuzione risultante mostra alcune caratteristiche di base come ad esempio forma, centro e dispersione.

Gli studi che analizzano i legami tra la variazione e lo sviluppo dei concetti di distribuzione tra gli studenti di diversi livelli di età hanno ancora una volta, sottolineato il ruolo significativo della comprensione del contesto al fine di poter ragionare sulle modalità di variazione dei dati(43). Reciprocamente, il riconoscimento di alcuni aspetti base di una distribuzione è fondamentale per la comprensione delle modalità di variazione di un set di dati, giungendo alla conclusione che variabilità e forma di una distribuzione sono concetti che dovrebbero essere sviluppati in parallelo(44, 45).

Alcuni ricercatori hanno efficacemente analizzato lo sviluppo cognitivo del concetto di distribuzione, utilizzando come strumento di analisi, la “Structure of observed Learning outcomes” (SoLo) Taxonomy(46, 47, 48) che identifica un modello a diversi livelli, descrittivi lo sviluppo graduale verso una visione di insieme di un set di dati “aggregate view”(49). La descrizione di tali livelli è riportata da Pegg(46).

Il par. 5.2.1.2 descrive le modalità con cui tale modello a livelli è stato adattato alla nostra ricerca per descrivere, nell’ambito dei contesti analizzati, come gli studenti abbiano collegato le variabili descritte da set di dati concreti e loro rappresentazioni formali attraverso le distribuzioni.



## 4

# La proposta didattica

In questo capitolo saranno descritte le motivazioni che ci hanno condotto alla scelta del tema trattato nella presente ricerca, la proposta didattica e il suo sviluppo concettuale nei suoi aspetti contenutistici.

## 4.1 Considerazioni sulla scelta della proposta didattica

La distribuzione di Maxwell-Boltzmann è un tema rilevante dei corsi di termodinamica e meccanica statistica poiché mostra come le proprietà misurabili dei gas siano derivabili dalla media delle velocità di tutte le molecole nel gas.

L'analisi storico-epistemologica, prima descritta, dimostra come sia Maxwell che Boltzmann abbiano affrontato il problema soltanto da un punto di vista teorico. Essi ricavano la distribuzione di velocità di un gas perfetto facendo delle considerazioni basate su un ben definito modello. Anche i libri di testo difficilmente propongono lo studio delle distribuzioni di velocità o di energia basandosi su una metodologia sperimentale.

Di notevole importanza è l'ambito all'interno del quale lo strumento distribuzione è utilizzato. Nell'ambito delle scienze statistiche, ad esempio, risulta utile fare una distinzione fra la statistica descrittiva attraverso cui si studia un fenomeno aleatorio ma ben definito e la statistica inferenziale in cui il fenomeno aleatorio è anche sconosciuto. Nel primo caso si possono soltanto identificare alcune caratteristiche dei fenomeni collettivi. Nel secondo caso, osservando un certo comportamento e attraverso i concetti della teoria delle probabilità, si tenta di risalire alla conoscenza delle parti mancanti.

La distribuzione può essere vista, inoltre, come una lente attraverso cui osservare le variazioni che avvengono nel modo reale, dopo però averli rappresentati sotto forma di set di dati(50).

#### 4. LA PROPOSTA DIDATTICA

---

I set di dati non sono altro che le frequenze con cui una data grandezza può essere ripartita pervenendo quindi ad una distribuzione di frequenze. Ma questa variabilità dei dati da dove ha origine? In generale possiamo affermare che queste variazioni sui dati o sono reali, cioè caratteristici di un dato sistema, oppure indotte, ad esempio a causa degli strumenti di misura. In relazione a come si perviene ad una data distribuzione è possibile distinguere fra quelle teoriche e quelle empiriche o di frequenza.

Le distribuzioni empiriche contengono le variazioni che si possono osservare direttamente in un set di dati. In questo caso, non si fanno in alcun modo delle inferenze, ma soltanto una descrizione dei dati raccolti.

Nel caso del secondo approccio, di tipo teorico, attraverso un modello che fa uso della teoria delle probabilità si cerca di interpretare un dato fenomeno con una distribuzione che può essere ad esempio quella parametrica, o quella normale, ecc. Nel cercare di adattare la distribuzione ottenuta da un modello a dei dati sperimentali risulta spesso indispensabile fare delle inferenze statistiche.

Questa distinzione fra approccio probabilistico o soltanto statistico è spesso presente nei manuali e non solo. Inoltre in molti casi, non si fa sufficientemente chiarezza sul significato statistico o probabilistico da assegnare alle funzioni matematiche utilizzate.

Anche l'analisi dei lavori di Maxwell mette in evidenza l'ambiguità prima menzionate. L'interpretazione moderna dei suoi lavori converge spesso verso una giustificazione delle ipotesi di tipo probabilistico, nonostante egli (forse) non abbia mai veramente accettato gli strumenti della teoria della probabilità e si sia mosso con una certa indecisione utilizzando concetti di tipo probabilistico senza mai farne riferimento esplicito.

È noto che Maxwell deriva la legge di distribuzione nel 1860, ma Miller e Kusch(33) hanno eseguito la prima rigorosa dimostrazione sperimentale, ancora valida oggi, quasi 100 anni dopo. Altri esperimenti sono stati condotti(51) utilizzando diversi analizzatori meccanici di particelle per selezionare le velocità in una vasta gamma. Esperimenti per scopi didattici(52) usano simulazioni meccaniche in cui le molecole sono rappresentate come palline di metallo o di vetro agitate da un vibratore meccanico, facendole rimbalzare all'interno di un certo volume.

Come descritto nel capitolo precedente diverse sono state negli ultimi anni le pubblicazioni scientifiche nelle quali è stato affrontato il problema della determinazione sperimentale della distribuzione di un sistema di particelle. Questi sistemi possono essere suddivisi in due grandi categorie: la prima che fa uso di apparati di tipo meccanico, la seconda di tipo elettromagnetico. La prima tipologia di apparati risulta essere molto più complessa sia costruttivamente che dal punto di vista della comprensione del funzionamento. Tali metodi richiedono apparecchiature

sofisticate e costose. Come emerge dall'analisi delle pubblicazioni, anche i metodi che fanno uso di sistemi elettromagnetici spesso risultano complessi o non pienamente coerenti. Alcuni, infatti, utilizzano apparati di difficile reperibilità nei laboratori didattici universitari altri hanno come obiettivo soltanto la verifica della distribuzione di Maxwell ma non permettono di determinarla esplicitamente.

La nostra proposta didattica nasce dalla necessità di approcciarsi alla tematica delle distribuzioni attraverso un metodo sperimentale e fa uso dei metodi della famiglia "elettromagnetici".

Si propone un percorso sperimentale e di analisi dei risultati sperimentali in cui gli studenti possano concentrarsi sulla funzione di distribuzione molto più che sulle difficoltà derivanti dalla complessità del fenomeno di emissione termoionica. A partire da una analisi sperimentale si risale alla distribuzione statistica del gas di elettroni emessi per effetto termoionico, rappresentativa di una caratteristica intrinseca del sistema studiato. La nostra analisi cerca di chiarire inoltre la natura del sistema analizzato, considerandolo come un campione rappresentativo dell'intera popolazione motivo per il quale è necessario fare delle inferenze di tipo statistico. Per fare questo bisogna definire un modello per il sistema studiato e definire quindi la distribuzione di probabilità a cui questo deve obbedire.

Nei prossimi paragrafi saranno descritti i dettagli fisici e concettuali della nostra proposta. In particolare sarà descritta la procedura attraverso la quale ricavare la distribuzione, descrivendone gli aspetti teorici, le tecniche di misura, i limiti e i punti di forza della metodologia usata, le approssimazioni e l'interpretazione coerente dei risultati.

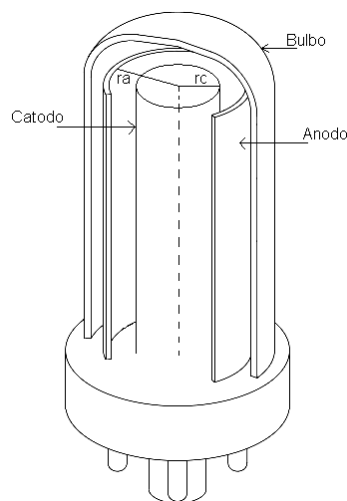
## 4.2 Il modello

In tubi a vuoto, come diodi e triodi, la selezione di elettroni emessi entro un dato intervallo di velocità può essere facilmente effettuata utilizzando i potenziali ritardanti e misurando le variazioni nella corrente elettronica. In questo modo, analizzando le variazioni di corrente in un tubo a vuoto ad una temperatura appropriata per l'emissione termoionica è possibile determinare la distribuzione del gas di elettroni e mostrare come questa verifichi la legge di Maxwell.

È stato dimostrato da L. H. Germer(53) e O. W. Richardson(54) attraverso degli esperimenti divenuti ormai storici che la distribuzione di velocità iniziale di elettroni termoionici in alto vuoto ha, con buona approssimazione, componenti di velocità che seguono la legge di Maxwell-Boltzmann. Infatti mentre gli elettroni all'interno di un conduttore si comportano come un gas di Fermi degenere, quelli emessi dalla superficie costituiscono la componente più

## 4. LA PROPOSTA DIDATTICA

---



**Figura 4.1:** Schema della struttura del diodo.

energetica, localizzabile nella coda della distribuzione suddetta la quale può approssimarsi ad una distribuzione di Maxwell-Boltzmann opportunamente definita.

Gli elettroni liberi in un metallo a temperatura  $T$ , che riescono a superare una barriera di  $\phi$  volt al di sopra del livello di Fermi, forniscono una densità di corrente  $J_0$ , descritta dall'equazione di Richardson(vedi rif. (54))

$$J_0 = AT^2 e^{-e\phi/kT} \quad (4.1)$$

dove  $A = 120,4 \text{ A cm}^{-2} \text{ K}^{-2}$ ,  $\phi$  è l'effettiva barriera misurata rispetto al livello di Fermi ed  $e$  la carica dell'elettrone.

In molte pubblicazioni, ormai datate, è affrontato il fenomeno della corrente termoionica in tubi a vuoto sia da un punto di vista teorico(55) che sperimentale(56), quando fra gli elettrodi è applicato un potenziale ritardante,  $V_r$ , (ottenuto, ad esempio, fissando a zero il potenziale di anodo e positivo il potenziale di catodo). In questo caso il campo elettrico impedisce agli elettroni con energia  $< eV_r$  di raggiungere l'anodo.

Per costruire un modello della dinamica degli elettroni, si considera un diodo con una geometria regolare e una spaziatura catodo anodo abbastanza piccola anche per minimizzare gli effetti della carica spaziale (vedi fig. 4.1). In questa condizione, può essere assunta come una buona approssimazione la geometria piana.

Nella nostra approssimazione, un certo potenziale ritardante  $V_r = V$  influenza solo una componente della velocità dell'elettrone (diciamo la componente  $z$ ,  $v_z$ ) e un elettrone può



raggiunge la superficie dell'anodo se

$$v_z^2 - 2eV/m \geq 0 \quad (4.2)$$

dove  $e$  e  $m$  sono rispettivamente la carica e la massa dell'elettrone.

Ne consegue che la corrente elettronica,  $I$ , nella direzione di  $z$  perpendicolare alla superficie  $S$  di un tubo a vuoto è

$$I = eS \int_{v_{z \min}}^{\infty} n(v_z) v_z dv_z \quad (4.3)$$

dove  $n(v_z)$  rappresenta il numero di elettroni che hanno velocità compresa nell'intervallo  $v_z$  e  $v_z + dv_z$ , e  $v_{z \min} = \sqrt{2eV/m}$ . Se indichiamo

$$\varepsilon = \varepsilon(v_z) = mv_z^2/2 \quad (4.4)$$

abbiamo  $d\varepsilon = mv_z dv_z$ , e attraverso un cambio di variabile esprimiamo  $n(v_z)$  come  $n(\varepsilon)$  e otteniamo

$$I = \frac{e}{m} S \int_{eV}^{\infty} n(\varepsilon) d\varepsilon \quad (4.5)$$

dove  $n(\varepsilon)$  è normalizzata così che

$$\int_0^{\infty} n(\varepsilon) d\varepsilon = n_0 = I_0 \frac{m}{Se} \quad (4.6)$$

dove  $n_0$  sono il numero di elettroni termionici che raggiungono l'anodo per unità di superficie e unità di tempo quando  $V = 0$  e la corrente è  $I_0$ .

Se il potenziale ritardante  $V$  è incrementato a  $(V + \Delta V)$ , si avrà un ulteriore abbassamento nella corrente

$$\Delta I = \frac{e}{m} S \left[ \int_{eV}^{\infty} n(\varepsilon) d\varepsilon - \int_{e(V+\Delta V)}^{\infty} n(\varepsilon) d\varepsilon \right]. \quad (4.7)$$

Il secondo integrale sulla destra della eq. 4.7 può essere espanso secondo Taylor intorno al punto  $eV = \varepsilon$  e, considerando solo i primi due termini di tale espansione, nel limite di  $\Delta V \rightarrow 0$ , ne segue che

$$n(\varepsilon) \propto -\frac{dI}{d\varepsilon}. \quad (4.8)$$

In accordo con l'eq. 4.8, la distribuzione di velocità può essere ottenuta, differenziando la corrente anodica rispetto alla tensione ritardante di anodo per ogni valore di tensione anodica (energia). Pertanto, le misure della corrente anodica in funzione della tensione di ritardante,

#### 4. LA PROPOSTA DIDATTICA

---

accompagnata da un adeguato metodo di derivazione numerica, può condurre alla valutazione della distribuzione di velocità degli elettroni.

Alcuni esperimenti(57, 58) sull'emissione termoionica hanno fatto notare la necessità di prendere in considerazione molti fattori al fine di spiegare coerentemente le caratteristiche  $I - V$  del diodo, affermando che due sono i fattori principali che devono essere presi in considerazione(59). Il primo riguarda l'effettiva differenza di potenziale catodo-anodo che è pari alla somma del potenziale applicato ritardante esterno  $V_a$  e il potenziale di contatto catodo-anodo,  $\Delta\phi = (\phi_c - \phi_a)$ . Così, gli elettroni per raggiungere l'anodo devono avere energia

$$\varepsilon \geq eV_r = e(V_a + \Delta\phi). \quad (4.9)$$

Poiché il termine  $\Delta\phi$  può essere considerato costante a temperatura costante  $T$ , questo non influenza la nostra operazione di derivazione dell'eq. 4.8, poiché

$$d\varepsilon = e dV_a. \quad (4.10)$$

Il secondo fattore è legato agli effetti della carica spaziale (tra catodo e anodo) che genera una barriera di potenziale,  $\delta$ , modificando l'effettiva differenza di potenziale catodo-anodo. Nel caso di bassa densità di corrente, si può trascurare questo potenziale, ma ad alta densità di corrente dobbiamo tenere conto di questo fattore che influenza le caratteristiche  $I - V$ .

Se consideriamo che gli elettroni emessi a temperatura  $T$  lasciano il catodo con velocità distribuite secondo la legge di Maxwell, la funzione  $n(v_z)$  rappresenterà la parte di velocità positive della distribuzione gaussiana che descrive ogni componente di velocità di un elettrone, vale a dire

$$n(v_z) = C e^{-(1/2)mv_z^2/kT} = C e^{-\varepsilon/kT} \quad (4.11)$$

dove  $C$  è una costante e abbiamo effettuato il cambio di variabile indicato nella eq. 4.4. Come conseguenza, nel caso di geometria piana, l'eq. 4.5 può essere scritta come

$$I = \frac{e}{m} S [C \int_{eV_r}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\varepsilon] = I_0 e^{-eV_r/kT} = I_0 e^{-e(V_a + \Delta\phi)/kT} = I^* e^{-eV_a/kT} \quad (4.12)$$

dove  $I_0$  è il valore della corrente a  $V_r = 0$  e  $I^*$  è una costante,

$$I^* = I_0 e^{-\Delta\phi/kT}. \quad (4.13)$$

Se prendiamo in considerazione la simmetria cilindrica e indichiamo, rispettivamente, con  $r_c$  e  $r_a$  il raggio del catodo e dell'anodo, la corrente che raggiunge l'anodo al potenziale ritardante  $V_r$  è data da

$$I = I_0 \left\{ R [e^{-\eta}] \operatorname{erf} [\eta / (R^2 - 1)]^{1/2} + 1 - \operatorname{erf} \{ \eta / [1 - (1/R^2)] \}^{1/2} \right\} \quad (4.14)$$

dove  $R = r_a/r_c$  e  $\eta$  è il potenziale ritardante ridotto, definito come

$$\eta = eV_r/kT \quad (4.15)$$

e  $erf(x)$  è la funzione errore definita come

$$erf(x) = (2/\pi^{1/2}) \int_0^x e^{-x^2} dx \quad (4.16)$$

Dobbiamo tenere conto che le due funzioni di errore nell'eq. 4.14 differiscono dall'unità per meno dell' 1% (vedi refs.(55) e (57)) se

$$[\eta/(R^2 - 1)]^{1/2} > 1.83 \quad (4.17)$$

e, in questo caso, le eqs. 4.12 e 4.14 mostrano la stessa forma.

Tuttavia, le eqs. 4.12 e 4.14 sono approssimate a causa di molti fattori noti, quali l'effetto Schottky (60), la non uniformità di  $\phi$ , la variazione di  $\phi$  in funzione della temperatura, della carica spaziale e così via, impedendo che la densità di corrente misurata obbedisca esattamente a queste equazioni. A causa del gran numero di questi fattori, non è facile individuare il loro ruolo per spiegare le differenze tra le evidenze sperimentali e la teoria. Per questi motivi, la ricerca di condizioni adeguate di temperatura in cui la loro influenza può essere trascurata è un problema rilevante.

Gli esperimenti descritti nella sezione successiva sono finalizzati a trovare le migliori condizioni che rendono evidenti le caratteristiche Maxwelliane delle velocità degli elettroni termoionici, avendo come principale obiettivo la progettazione di un esperimento adeguato agli studenti dei corsi di laurea a carattere scientifico, nonché a livello di scuola superiore di secondo grado.

## 4.3 Gli esperimenti

Descriviamo adesso due esperimenti partendo dal più semplice (sia da un punto di vista concettuale che dal punto di vista sperimentale) che fanno uso dei diodi. L'analisi dei risultati rende evidenti sia i limiti del metodo che la metodologia di progettazione di un esperimento più complesso che verifichi la nostra ipotesi di validità della distribuzione di Maxwell per un range di temperature più elevato.

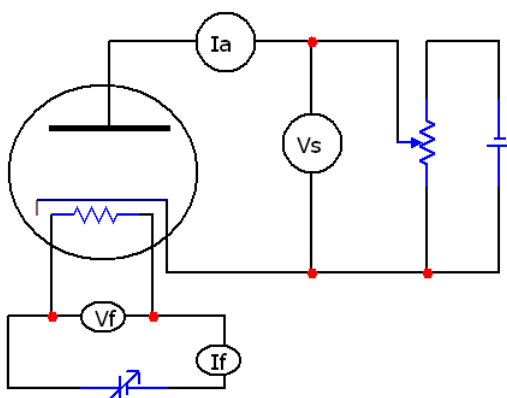
Il nostro primo esperimento fa uso di un tipico diodo commerciale 12AX3 formato da un catodo cilindrico in nichel ricoperto da ossido<sup>1</sup> di raggio  $r_c = (2,93 \pm 0,05)$  mm, che racchiude

---

<sup>1</sup>La superficie del catodo è ricoperta da uno strato di ossido di bario, questo comporta un basso valore del lavoro di estrazione (1-1,9 eV (61)) rispetto al tungsteno 4,5 eV.

## 4. LA PROPOSTA DIDATTICA

un filamento in tungsteno riscaldato elettricamente e un anodo cilindrico di raggio  $r_a = (4,39 \pm 0,05)$  mm. La distanza fra catodo ed anodo è di  $(1,5 \pm 0,1)$  mm. La figura 4.2 mostra il diagramma del circuito. Un generatore di tensione regolabile è usato per riscaldare il filamento e due multimetri digitali misurano la corrente di filamento,  $I_f$ , e la tensione di filamento  $V_f$ . Il generatore di tensione,  $V_s$ , provvede a regolare la tensione ritardante dell'anodo. Gli scopi didattici del nostro esperimento, ci impongono di misurare la corrente di anodo con un micro-amperometro,  $I_a$ , con una risoluzione di  $0,1 \mu\text{A}$ . I dati di corrente molto bassa sono stati misurati con un millimicro-amperometro.



**Figura 4.2:** Diagramma circuitale con diodo.  $V_1$  è il generatore che fornisce 1 V d. c.,  $R_p$  è un potenziometro ( $0 - 470$ ) $\Omega$ .  $V_2$  è un generatore regolabile in tensione ( $0 - 30$ ) V.  $R_f = 3,2 \Omega$  (a  $T_{env} = 300$  K).

### 4.3.1 Calibrazione della temperatura di catodo

La temperatura del catodo è stata stimata attraverso una legge fenomenologica relativa alla temperatura di filamento,  $T_f$ , a partire dai valori di resistenza del filamento stesso. Questa legge mette in relazione la  $T_f$  al rapporto fra la resistenza di filamento a data temperatura e la resistenza al valore di temperatura di 300 K,  $R_{env}$ . Nel caso di filamento in tungsteno ( $R_{env} = 3,2 \Omega$ ), questa può essere scritta come(62)

$$T_f = 103,898 + 214,930 \frac{R}{R_{env}} + 2,994 \left( \frac{R}{R_{env}} \right)^2 + 0,0433 \left( \frac{R}{R_{env}} \right)^3 + \dots \quad (4.18)$$

Nel nostro esperimento la temperatura di filamento è incrementata variando il valore di tensione,  $V_f$ , e la resistenza di filamento è ottenuta misurando il corrispondente valore di corrente,  $I_f$ . Con riferimento alle caratteristiche del nostro diodo, la corrente e la tensione di filamento variano, rispettivamente, nell'intervallo  $0,47$  A- $0,63$  A e  $8,00$  V- $13,50$  V.

La temperatura di filamento valutata usando l'eq. 4.18 sono in buono accordo con la valutazione indipendente fornita usando la legge di radiazione del corpo nero di un filamento in tungsteno e considerando la potenza dissipata nel filamento come principalmente dovuta alla radiazione in accordo con

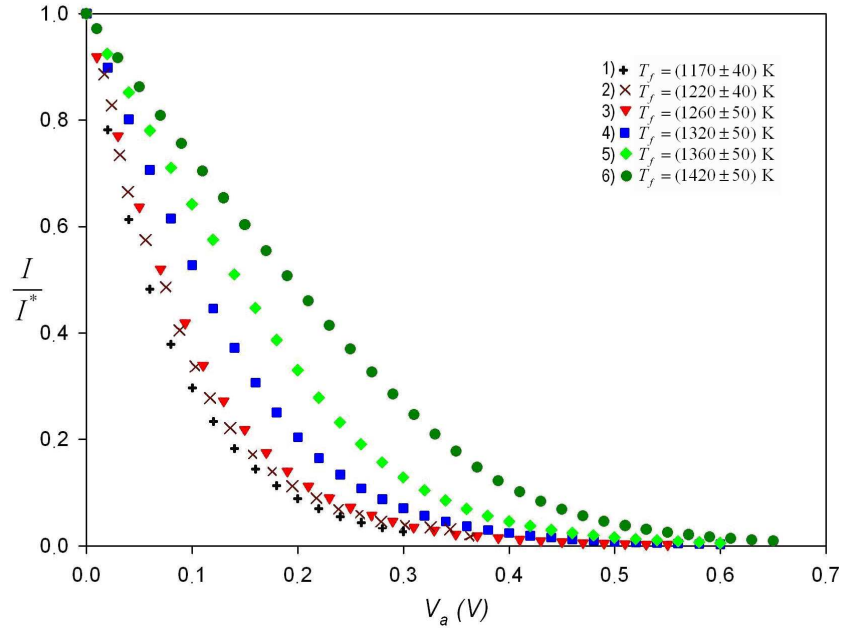
$$I_f V_f \approx \sigma S \gamma T_f^4 \quad (4.19)$$

dove  $S$  è la superficie di filamento,  $\gamma$  l'emissività del tungsteno e  $\sigma$  la costante di Stefan.

### 4.3.2 Valutazione della distribuzione di velocità

#### 4.3.2.1 Il diodo

Il set di esperimenti è stato realizzato fissando la temperatura di filamento e variando il potenziale ritardante dell'anodo da zero fino al valore minimo di corrente corrispondente alla sensibilità del nostro micro-amperometro. La figura 4.3 mostra il rapporto tra la corrente di anodo  $I$  ad un dato potenziale di anodo  $V_a$  e il valore  $I^*$  ( $V_a = 0 V$ ) in funzione del potenziale ritardante,  $V_a$ , per diversi valori di temperatura di filamento



**Figura 4.3:** Rapporto  $I/I^*$  in funzione del potenziale ritardante  $V_a$  per diverse temperature di filamento. I valori di  $I^*$  sono nel range 20 A-800 A.

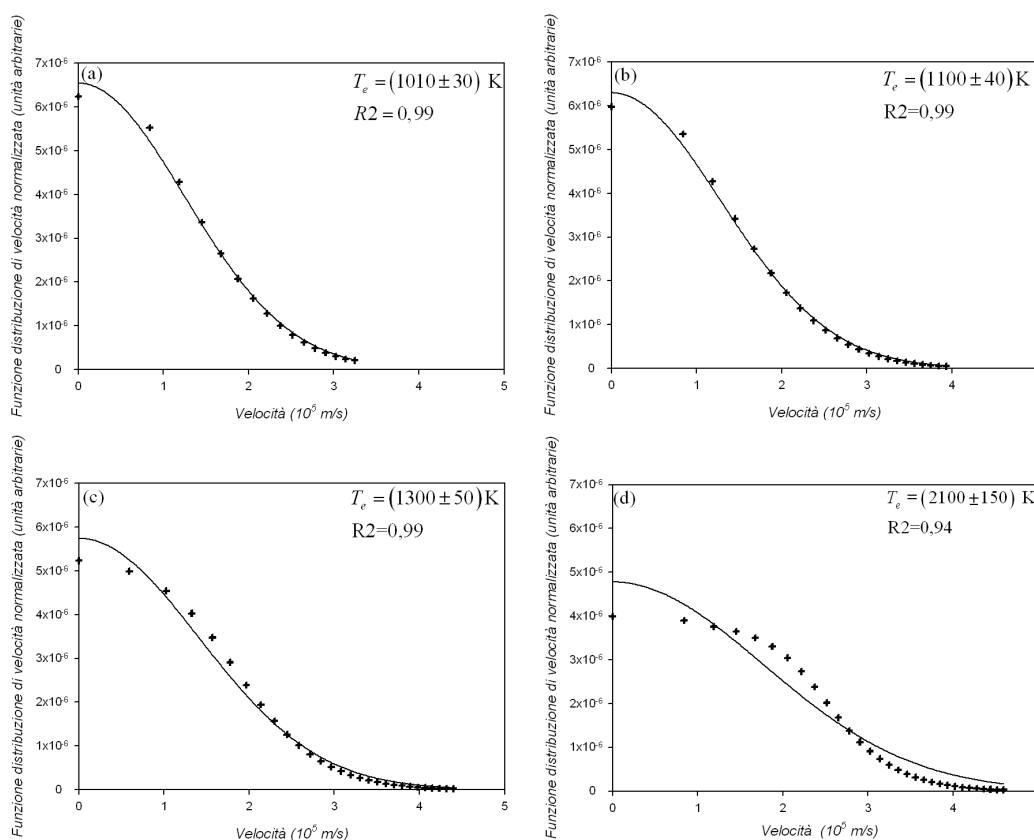
Al fine di indagare sulla forma della funzione di distribuzione  $n(v_z)$  abbiamo seguito due fasi parallele:

## 4. LA PROPOSTA DIDATTICA

---

1. calcolo delle derivate numeriche dei dati riportati in fig. 4.3, attraverso le eqs. 4.3, 4.5, 4.8 e fitting dei punti derivati con la funzione semi-maxwelliana;
2. fitting dei dati di corrente come funzione del potenziale ritardante attraverso le eqs. 4.12 e 4.14.

Come è stato mostrato nelle eqs. 4.3, 4.5 e 4.8 nell'approssimazione di geometria planare, la funzione di distribuzione di velocità degli elettroni è direttamente proporzionale alla derivata prima della funzione  $V_a - I$ . La finalità didattica del nostro esperimento, ci obbliga ad effettuare la derivazione numerica dei nostri dati sperimentali utilizzando metodi semplici riportati in letteratura come differenza finite centrate.



**Figura 4.4:** Le derivate dei dati riportati in fig. 4.3 per quattro differenti valori della temperatura di filamento. Il fitting è eseguito attraverso l'equazione  $y = A \exp(-mv_z^2/2kT_e)$ , dove  $A$  e  $T_e$  sono i parametri. Ciascuna figura riporta i valori di  $T_e$  e  $R2$  (il coefficiente di determinazione). Le funzioni di distribuzioni sono normalizzate in modo tale che l'area sotto ciascun curva sia pari ad 1.

La figura 4.4 riporta i punti derivati vs. la componente di velocità degli elettroni  $v_z = \sqrt{2eV_a/m}$  e la curva di fitting per quattro temperature.

Il coefficiente di determinazione  $R^2$ <sup>1</sup> indica un buon accordo per i tre fitting rappresentati in figs. 4.4(a), 4.4(b), 4.4(c). In questi casi, i valori della temperatura degli elettroni  $T_e$  sono in buono accordo (le differenze sono meno del 15 %) con le temperature di filamento valutate in accordo con eq. 4.18. Per i tre più alti valori di temperatura di filamento, i parametri di fitting non sono soddisfacenti (fig. 4.4(d) rappresenta un caso di cattivo fitting); i valori della temperatura di elettroni,  $T_e$ , sono molto diversi dai corrispondenti valori  $T_f$  (più del 30%), e in due casi molto più grandi di  $T_f$ . A causa del riscaldamento indiretto del catodo, il valore di  $T_f$ , ottenuto dall'eq. 4.18 può essere considerato come un limite superiore delle possibili temperature degli elettroni  $T_e$ , e pertanto questi risultati sono difficilmente spiegabili.

Comunque, le componenti delle velocità degli elettroni nella direzione perpendicolare alla superficie del catodo sono distribuite in accordo con la legge semi-maxwelliana per i primi tre valori della temperatura di filamento, mentre il valore più alto della temperatura di filamento non mostra un buon accordo con l'ipotesi di distribuzione maxwelliana.

Come secondo metodo, abbiamo realizzato un fitting diretto della corrente anodica  $I$ , che, sotto l'ipotesi di velocità distribuita secondo Maxwell, dovrebbe aver un buon fitting con le eqs. 4.12 e 4.14 rispettivamente nel caso di geometria planare e cilindrica.

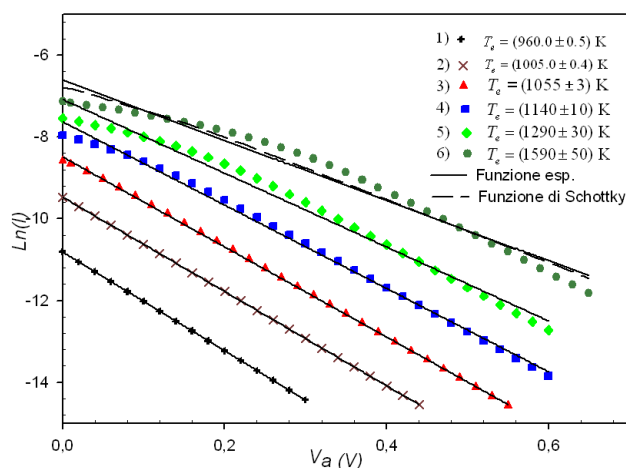
La figura 4.5 mostra i grafici di  $\ln(I)$  vs. il potenziale ritardante di anodo,  $V_a$  e le curve di fitting rappresentate dall'equazione eqs. 4.12 e 4.14. I punti sperimentali per i tre più bassi valori di temperatura [esperimenti 1), 2), 3)] mostrano un buon fitting con la semplice funzione esponenziale eq. 4.12. In questi tre casi la condizione 4.17 è soddisfatta per valori molto bassi del potenziale di anodo ed eqs. 4.12 e 4.14 mostrano la stessa forma. Il coefficiente di determinazione  $R^2$  è pari a 0,99 per questi tre fitting. I dati degli esperimenti per i più alti valori di temperature (esperimenti 4), 5), 6)) non sono in accordo con entrambe le curve teoriche. Per questi fitting, abbiamo ottenuto bassi valori di  $R^2$  e i valori stimati di  $T_e$  sono molto diversi da quelli valutati attraverso l'eq. 4.18 e negli ultimi due casi più alti di  $T_f$ . Come conseguenza, possiamo concludere che gli elettroni mostrano un comportamento maxwelliano soltanto alle più basse temperature del nostro esperimento corrispondenti al range di 100 K.

Le differenze nei valori di temperatura degli elettroni,  $T_e$ , ottenute attraverso le procedure di fitting riportati nelle figs. 4.4 e 4.5 possono essere addebitate agli errori introdotti dal metodo di derivazione numerica che non è particolarmente accurato a causa del basso numero

---

<sup>1</sup>Il coefficiente di determinazione  $R^2$  indica la proporzione di variabilità in un insieme di dati interpretabili con il fitting(63)

#### 4. LA PROPOSTA DIDATTICA



**Figura 4.5:** I valori sperimentali della corrente anodica vs. il potenziale di anodo ritardante e i fitting delle curve teoriche descritte dalle eqs. 4.12 e 4.14.

di punti sperimentali. Altri esperimenti riportati in letteratura(64) mostrano le temperature degli elettroni valutati con il metodo dei potenziali ritardanti più basse rispetto alle temperature di filamento nel range di 10%-16%.

In sintesi, entrambi i nostri metodi di modellizzazione (il primo che fa uso dell'eq. 4.8 e il semplice modello planare e il secondo che usa l'eq. 4.14 e il modello cilindrico più accurato) ci permettono di concludere che gli elettroni mostrano un comportamento maxwelliano solo nel range di 100 K corrispondente alle nostre temperature più basse. La deviazione dai dati sperimentali della corrente di anodo dalla curva teorica eq. 4.12 e eq. 4.14 per alti valori di temperatura  $T_f$ , conduce all'ipotesi che questi dati possono essere fortemente affetti dalla carica spaziale (la mutua repulsione degli elettroni nello spazio tra gli elettrodi) nel caso di alta densità di carica, a causa del basso valori di corrente per alti valori di  $V_a$  o elevata emissione di elettroni per alti valori di  $T_f$ . In ogni caso, alti valori dei potenziali ritardanti, producono l'effetto di modificare il lavoro di estrazione del catodo (Schottky effect). Per questi motivi, abbiamo progettato un nuovo set di esperimenti che fanno uso del triodo con una griglia polarizzata a un piccolo potenziale positivo rispetto al catodo, al fine di ridurre l'effetto della carica spaziale e schermare il catodo dalla variazione di potenziale dell'anodo.



## 4.3.2.2 Il triodo

Il diagramma di fig. 4.6 mostra il circuito su cui è stato montato il triodo commerciale (6J5). La distanza fra catodo ed anodo è dello stesso ordine di grandezza del diodo e fra questi due è posizionato un terzo elettrodo (la griglia).

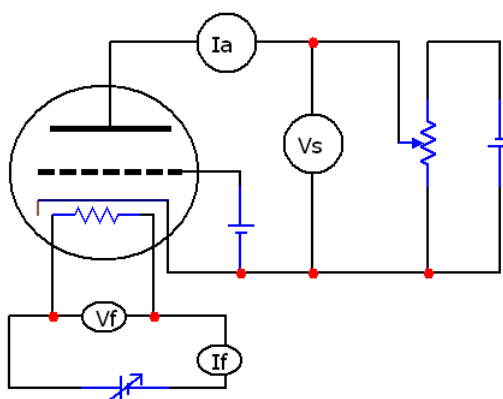


Figura 4.6: Diagramma circuitale con il triodo.

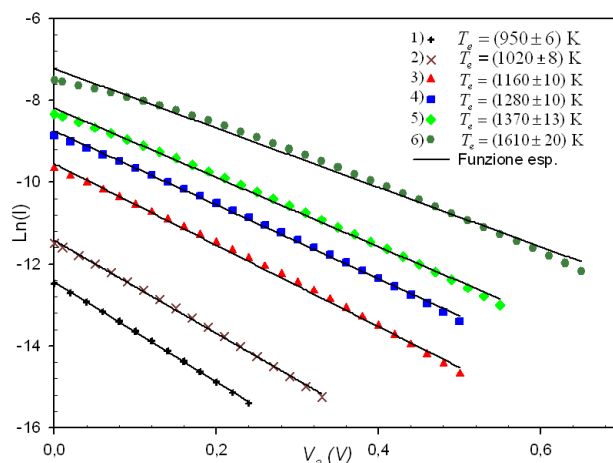
La griglia è stata polarizzata positivamente attraverso un generatore di tensione  $V_g = 1\text{ V}$  e un potenziale ritardante,  $V_a$ , è stato applicato tra catodo ed anodo. Il ruolo della griglia è duplice: dirigere gli elettroni emessi dal catodo verso l'anodo e schermare il catodo dalla tensione di anodo. Come conseguenza, il catodo non è influenzato dalla variazione del potenziale di anodo durante le misure e gli effetti della carica spaziale sono parzialmente ridotti. Il primo effetto rappresenta un importante vantaggio del triodo sul diodo per questi tipi di esperimenti, specialmente nel caso di catodo rivestito in ossido.

Sebbene non sia stata fatta una sistematica indagine sugli effetti della tensione di griglia sulle curve  $I - V$ , abbiamo verificato che la tensione di griglia nel range  $(1 \pm 0,5)\text{V}$  non ha modificato la forma della corrente anodica, in accordo con altri risultati indipendenti (vedi ref.(58)).

La figura 4.7 mostra  $\ln(I)$  vs.  $V_a$  e le curve di fitting rappresentate dall'eq. 4.12. Il coefficiente di determinazione  $R^2$  è pari a 0,99 per i primi cinque esperimenti e 0,97 per l'esperimento 6). Possiamo allora concludere che la distribuzione di velocità degli elettroni può essere considerata di Maxwell in un range delle temperature degli elettroni intorno a 400 K.

La figura 4.8 mostra il grafico dei punti derivati a partire dai dati di fig. 4.7 vs. la componente della velocità degli elettroni  $v_z = \sqrt{2eV_a/m}$  per i due esperimenti con temperature estreme che mostrano un buon fitting [esperimenti 1) e 5)]. Di questi dati è stato fatto il fitting

#### 4. LA PROPOSTA DIDATTICA



**Figura 4.7:** I valori sperimentali della corrente di anodo vs. il potenziale ritardante di anodo e i fitting delle curve teoriche descritte dall' eq. 4.12.

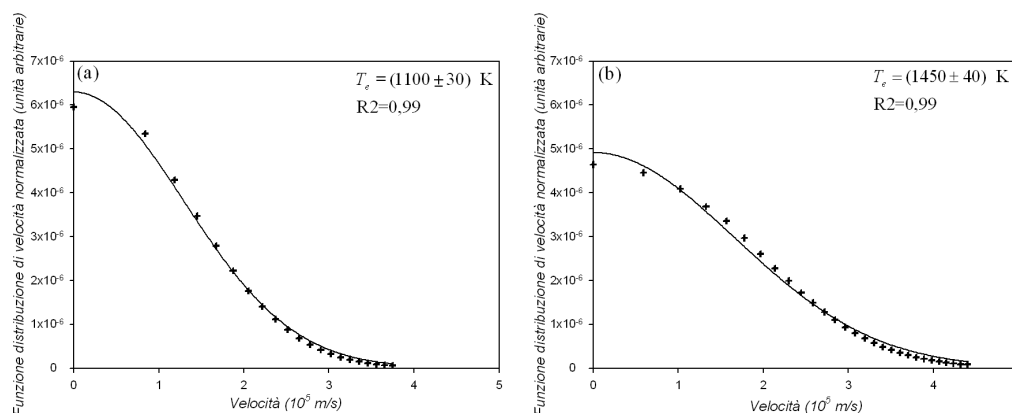
attraverso la parte positiva della funzione di Maxwell e come parametro di fitting è stata scelta la temperatura degli elettroni  $T_e$ .

Le curve sembrano adattarsi bene ai punti sperimentali e mostrano in maniera evidente le peculiari caratteristiche delle distribuzioni di Maxwell a diverse temperature. Inoltre le differenze nei valori di  $T_e$  riportati in figs. 4.7 e 4.8 possono essere addebitate agli errori introdotti dal semplice metodo usato per la derivazione numerica.

Al fine di rendere evidente che la diversa forma delle curve di fig. 4.7 (rispetto alle equivalenti curve per il diodo) può essere addebitata al ruolo della griglia, il triodo è stato montato come un diodo connettendo l'anodo alla griglia (così che il catodo si comporta da emettitore e anodo + griglia rappresenta il collettore degli elettroni emessi). La figura 4.9 mostra i grafici di  $\ln(I)$  vs.  $V_a$  per le stesse temperature di filamento dei dati riportati in fig. 4.7.

Attraverso la comparazione delle figs. 4.5 e 4.9 possiamo notare facilmente la loro somiglianza. Si può osservare come soltanto per i primi due esperimenti il fitting esponenziale è adeguato e ciò avviene soltanto per temperature entro circa i 100 K. Dunque, possiamo concludere che negli esperimenti riportati in fig. 4.7 la tensione positiva di griglia ha l'effetto di ridurre la carica spaziale e di schermare il catodo, permettendo l'indagine della distribuzione di velocità degli elettroni emessi in un range di temperature più ampio.

Data la finalità didattica degli esperimenti, abbiamo scelto i tubi a vuoto commerciali e strumenti di misurazione facilmente disponibili. Gli esperimenti che fanno uso dei diodi mostrano



**Figura 4.8:** Calcolo delle derivate dei punti riportati in fig. 4.7 per gli esperimenti 2) e 5). Il fitting dei punti è stato eseguito attraverso l'equazione  $y = A \exp(-mv_z^2/2kT_e)$  dove  $A$  e  $T_e$  sono i parametri. Le funzioni di distribuzione sono normalizzate in modo tale che l'area sotto la curva sia pari a 1.

che la distribuzione di Maxwell può essere dedotta solo in una ristretta gamma di temperature (non più di 100 K). Per aumentare tale intervallo si dovrebbe abbassare la temperatura del filamento (e di conseguenza la densità di corrente) con la necessità di utilizzare un più accurato micro-amperometro di quelli normalmente a disposizione nei laboratori universitari. Gli esperimenti che fanno uso del triodo ci permettono di ampliare la gamma in cui gli elettroni sono distribuiti secondo Maxwell. Di conseguenza, gli studenti possono utilizzare una vasta gamma di curve per confrontare le deviazioni standard, le percentuali di elettroni a velocità alta o bassa e tutte le caratteristiche che differenziano le distribuzioni di velocità a diverse temperature. Inoltre, in una tale gamma di temperature e per le caratteristiche del nostro triodo una semplice modellazione piana della geometria è sufficiente e non è necessario utilizzare la più complicata approssimazione di geometria cilindrica.

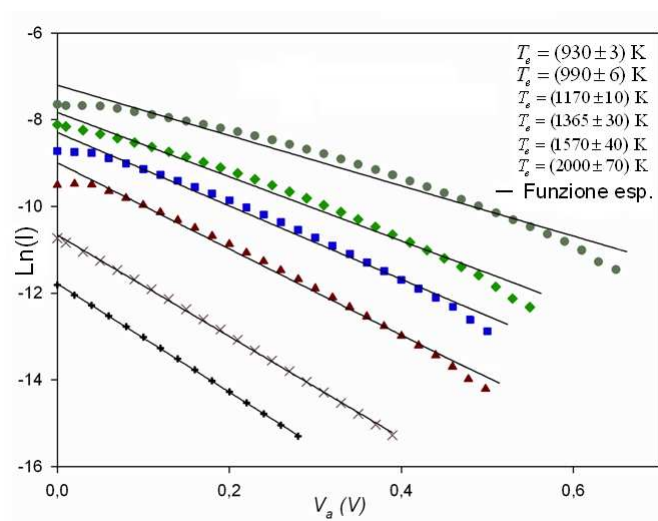
## 4.4 Conclusioni

La proposta qui tracciata nella sua evoluzione concettuale e contenutistica, tenuto conto dei risultati del questionario somministrato all'inizio della sperimentazione (risultati riportati nel prossimo capitolo), è stata quindi tradotta in specifiche attività di classe. Tali attività possono essere così sintetizzate:

1. Esempi di distribuzione:
  - variabilità indotta da un sistema di misura;

#### 4. LA PROPOSTA DIDATTICA

---



**Figura 4.9:** I valori sperimentali della corrente di anodo vs. il potenziale ritardante di anodo per il triodo montato a diodo e i fitting delle curve teoriche descritte dell'eq. 4.12.

- variabilità intrinseca dei componenti del set di dati;
2. Sistemi di particelle: relazioni fra grandezze macroscopiche e microscopiche. Distribuzione di velocità di un gas perfetto e metodi di misura.
  3. L'emissione termoionica e il gas di elettroni: un semplice modello esplicativo
  4. Elettroni in una valvola termoionica: dalla misura della corrente alla distribuzione del gas di elettroni
  5. Discussione conclusiva sui risultati ottenuti.

## 5

# Il contesto sperimentale e le fasi della sperimentazione

In questo capitolo sono descritti il contesto all'interno del quale è stata sperimentata la ricerca e le fasi della sperimentazione della proposta didattica precedentemente descritta.

## 5.1 Il contesto sperimentale

Tutta la sperimentazione è stata sviluppata nell'ambito di un seminario dal titolo “*Un esperimento sull'emissione termoionica: la distribuzione di velocità degli elettroni emessi in un tubo a vuoto*” attivato presso la facoltà di Ingegneria dell'Università di Palermo, svolto nel periodo che va da marzo a maggio 2010. Tale attività seminariale ha visto coinvolti tre corsi di laurea: Ingegneria Elettronica, Ingegneria Informatica ed Ingegneria delle Telecomunicazioni.

Secondo quanto stabilito dai rispettivi consigli di corso di laurea, sono stati riconosciuti un massimo di 2 CFU da assegnare agli studenti che hanno frequentato interamente il corso. In particolare sono stati assegnati sia sulla base della percentuale di ore frequentate sia sulla base della valutazione della relazione finale in cui ogni allievo ha descritto l'attività sperimentale svolta ed i risultati ottenuti. Inoltre bisognava conseguire almeno la sufficienza nel test finale.

### 5.1.1 Il campione di studenti

Al seminario hanno partecipato 43 allievi ed ha avuto una durata di 12 ore.

Gli allievi hanno formato un gruppo molto variegato sia in termini di età che per corso di laurea: 32 del corso di laurea di primo livello e 11 del corso di laurea specialistica suddivisi fra i corsi precedentemente citati. Gli allievi avevano tutti affrontato i corsi di analisi matematica,

## **5. IL CONTESTO SPERIMENTALE E LE FASI DELLA SPERIMENTAZIONE**

di calcolo numerico, e i corsi di fisica generale. Buona parte di loro aveva già affrontato il problema delle distribuzioni statistiche, ma solo in termini di funzioni continue nell'ambito dei corsi generali di fisica.

La progettazione delle attività ha tenuto conto del livello medio di conoscenza di uno studente universitario delle lauree di I livello, considerando come prerequisito essenziale le conoscenze di fisica classica (meccanica ed elettromagnetismo), analisi matematica, analisi numerica e competenze sull'utilizzo di software quale il foglio di calcolo. In realtà, durante l'attività, spesso è stato necessario richiamare diversi concetti, soprattutto riguardanti l'analisi numerica e l'utilizzo del foglio di calcolo. Inoltre, anche l'attività sperimentale ha richiesto un notevole impegno da parte degli studenti i quali hanno dimostrato di non essere sufficientemente abituati all'uso di apparecchiature ed all'attività di laboratorio in generale.

### **5.2 Le fasi della sperimentazione**

La sperimentazione è strutturata secondo le seguenti fasi:

1. Somministrazione di un test di ingresso tramite il quale evidenziare le conoscenze già acquisite dallo studente in riferimento ai temi trattati della proposta didattica e da cui trarre informazioni per una migliore calibrazione degli interventi.
2. Realizzazione degli interventi in classe progettati sulla base della proposta didattica descritta nel capitolo precedente e dei risultati del questionario in ingresso. Gli interventi sono strutturati in modo tale da analizzare e allo stesso tempo stimolare l'acquisizione delle tematiche oggetto della nostra ricerca.

#### **5.2.1 Fase 1: Il questionario in ingresso**

Il questionario, riportato per esteso in appendice B, è suddiviso in due sezioni: la prima utile ad indagare le conoscenze e le competenze degli studenti in merito ad aspetti delle distribuzioni riguardo ad esempi di vita quotidiana, la seconda sezione utile ad indagare le competenze riguardanti le distribuzioni statistiche di grandezze fisiche, quali velocità ed energia di sistemi di particelle.

I quesiti n. 1 e n. 2 fanno riferimento alla prima sezione, mentre i quesiti dal n. 3 al n. 7 si riferiscono alla seconda sezione nel contesto del gas di particelle libere. Il tempo messo a disposizione degli allievi per rispondere ai quesiti è stato di un'ora.

### 5.2.1.1 Variabili cognitive oggetto dell'indagine

All'interno del panorama delle competenze che ogni singolo studente dovrebbe possedere si è deciso di indagarne la comprensione del concetto di distribuzione sia in aspetti che sono indipendenti dal contesto che in aspetti fortemente dipendenti dal campo di applicazione. I primi fanno riferimento alle seguenti variabili cognitive e sono analizzate sia nel contesto riguardante esempi di vita quotidiana che nel contesto della meccanica statistica.

- la capacità di ottenere una o più informazioni dalla lettura di una distribuzione, considerate rispettivamente come capacità di base o avanzate;
- la capacità di costruzione di una distribuzione a partire da un set di dati.
- la capacità di confrontare diverse distribuzioni

Le variabili cognitive relative ad aspetti fortemente dipendenti dal campo di applicazione sono descritte successivamente assieme ai relativi quesiti.

### 5.2.1.2 Criteri d'analisi

Ogni quesito è stato progettato in modo da tenere conto delle variabili cognitive che si volevano analizzare. La caratterizzazione di tali variabili cognitive è stata effettuata utilizzando diversi criteri di classificazione e di analisi. I criteri di classificazione sono stati decisi sia attraverso un'analisi a-priori sulla base delle considerazioni riportate nel par. 3.3, sia attraverso l'analisi fenomenografica descritta nel par. 2.4.1. In particolare i quesiti n. 1, n. 2 e n. 3, sono stati analizzati secondo il modello dell'analisi a-priori, mentre i quesiti dal n. 4 al n. 7 secondo un'analisi fenomenografica.

In riferimento all'analisi a-priori, prima menzionata, la capacità di costruzione delle distribuzioni a partire da tabelle di valori è stata valutata secondo una categorizzazione su quattro livelli come di seguito descritti:

- Livello 0 : non risponde o tentativo parziale
- Livello 1: ciascun dato è riportato individualmente
- Livello 2: istogramma di frequenze di dati uguali
- Livello 3: istogramma di frequenze in intervalli uguali.

## **5. IL CONTESTO SPERIMENTALE E LE FASI DELLA SPERIMENTAZIONE**

La capacità di ottenere una o più informazioni, come valore medio, variabilità, ecc., a partire dalla lettura di una distribuzione, e la capacità di confronto fra due distribuzioni, è stata analizzata attraverso la seguente categorizzazione:

- Livello 0: Pre-strutturale (Non fa riferimento a elementi chiave della distribuzione, Considerazioni generali che non presentano alcuna considerazione significativa sulla variazione)
- Livello 1: Uni-strutturale (Si focalizza su un elemento chiave della distribuzione come il centro, la variabilità, la densità, asimmetria o valori anomali, Individua almeno una caratteristica di una variazione all'interno del gruppo o la variazione tra i gruppi, spesso utilizza termini non corretti o confusi)
- Livello 2: Multi-strutturale (Si concentra su più di un elemento chiave della distribuzione, individua più caratteristiche di una variazione sia all'interno del gruppo che tra la variazione del gruppo e discute senza legarli)
- Livello 3: Relazionale (Sviluppa legami relazionali tra i diversi elementi chiave della distribuzione, descrive chiaramente le fonti di variazione e collega le diverse fonti).

Per quanto riguarda i quesiti dal n. 4 in poi, si è proceduto ad una categorizzazione per ogni singolo quesito secondo la procedura fenomenografica, riportata nell'analisi dei singoli quesiti.

I risultati mostrati nei paragrafi successivi sono stati ottenuti sulla base delle variabili cognitive qui esposte e sulla base dei criteri di categorizzazione prima descritti.

### **5.2.1.3 Quesiti relativi ad esempi di vita quotidiana**

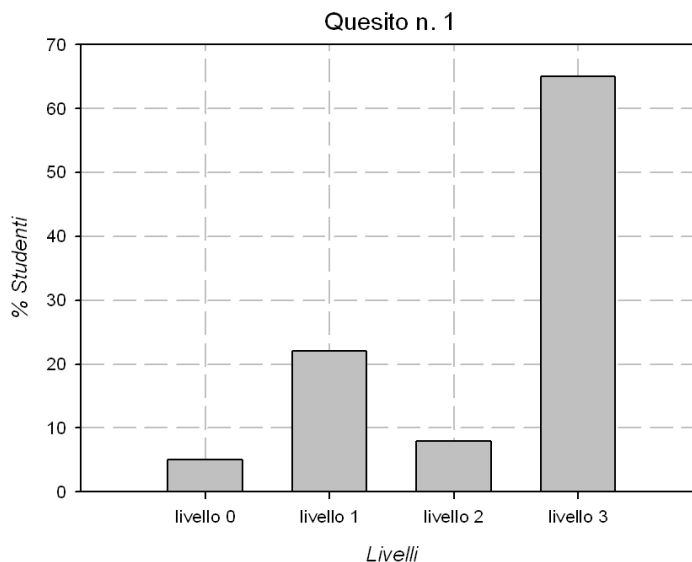
I quesiti n. 1 e n. 2 introducono problematiche legate al concetto di distribuzione in un contesto di vita quotidiana.

#### **Quesito n. 1**

Nella prima parte del quesito n. 1 è presentata una tabella di dati con le stature di un campione di trenta studenti. È chiesto di rappresentare graficamente tale tabella e descrivere le informazioni derivanti da questa analisi. La fig. 5.1 mostra la classificazione delle risposte nei differenti livelli prima descritti. Il 65% degli allievi è stato capace di rappresentare la tabella di dati in istogrammi scegliendo in maniera appropriata gli intervalli e identificando la barra dove è collocato il valore medio.

Nella seconda parte del quesito n. 1 è richiesto di analizzare due istogrammi rappresentanti la distribuzione delle stature di due differenti campioni di 30 studenti e di compararle. In accordo con la procedura prima descritta le risposte degli allievi sono classificate prendendo





**Figura 5.1:** Risposte relative alla prima parte de quesito n. 1.

in considerazione la descrizione di entrambe le distribuzioni e anche gli elementi considerati rilevanti nel confronto come il concetto di variazione. La fig. 5.2 mostra i risultati. La maggior parte ha identificato il range di variazione dei dati come principale differenza tra i due istogrammi ma non ha riferito alcuna informazione sul valore medio. Circa il 44% del campione si è limitato a descrivere un solo parametro caratteristico della distribuzione. Inoltre quasi la metà del campione (49%) non ha risposto o ha risposto in maniera errata. In maniera molto evidente è mostrato come vi siano difficoltà ad individuare il valore medio della seconda distribuzione. Ciò può essere interpretabile in riferimento al comune modo di pensare per cui il valore medio viene associato al dato presente con maggiore frequenza.

### Quesito n. 2

La prima parte del quesito n. 2 presenta una tabella di dati concernenti 20 misure successive del periodo di un dato pendolo. Agli allievi è chiesto di rappresentarle opportunamente in un grafico e dedurre tutte le possibili informazioni da tale grafico.

La fig. 5.3 rappresenta la classificazione delle risposte degli studenti. Tale grafico mostra che la maggior parte degli studenti ha rappresentato un istogramma di frequenze dei dati. Questo risultato non è in accordo con quello di fig. 5.1 e una delle ragioni di questa contraddizione può essere legata al tipologia con cui i dati sono stati forniti. I dati delle stature presentati in ordine crescente, infatti, mostrano di stimolare meglio gli studenti nell'organizzazione in grafico

## 5. IL CONTESTO SPERIMENTALE E LE FASI DELLA SPERIMENTAZIONE

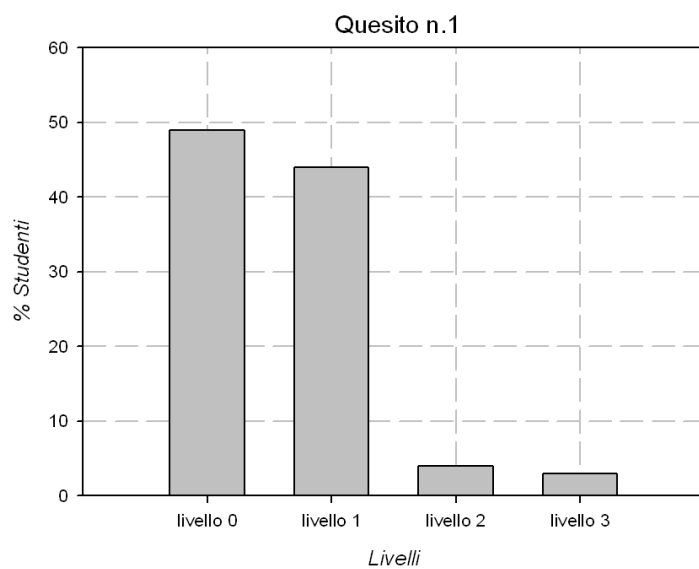


Figura 5.2: Risposte relative alla seconda parte del quesito n. 1.

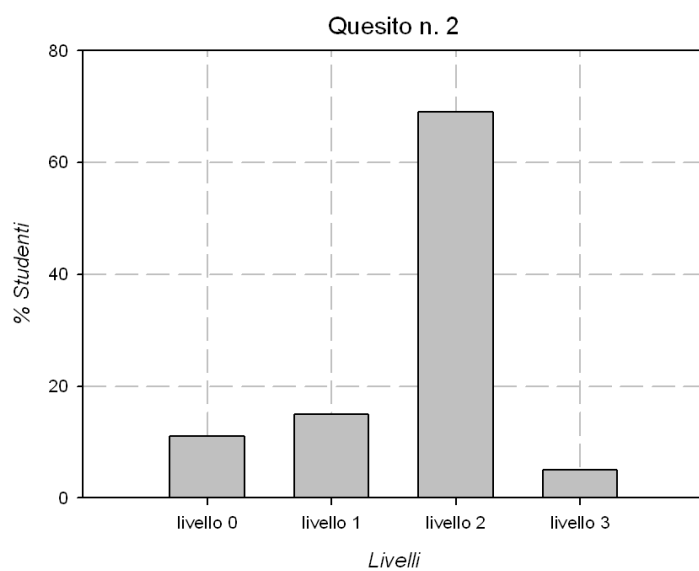
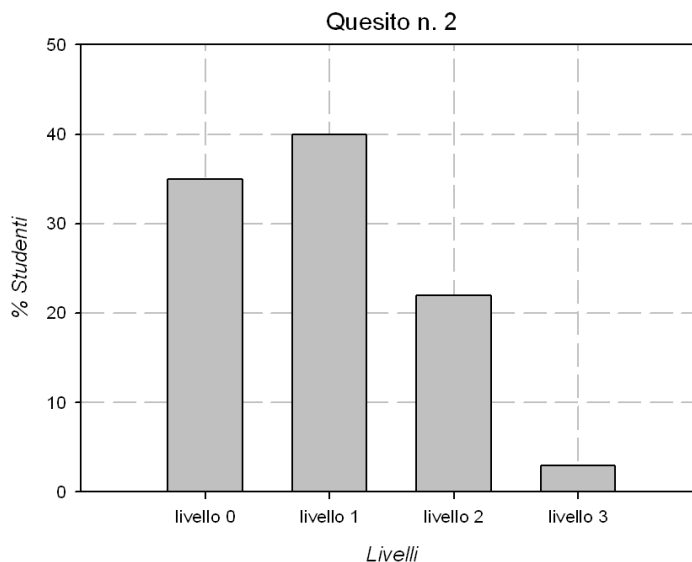


Figura 5.3: Risposte relative alla prima parte del quesito n. 2.



**Figura 5.4:** Risposte relative alla seconda parte del quesito n. 2.

dei dati distribuiti in intervalli uguali. La presentazione dei tempi in serie sembra indirizzare l'attenzione degli studenti maggiormente sul singolo dato che nell'analisi globale del set di dati.

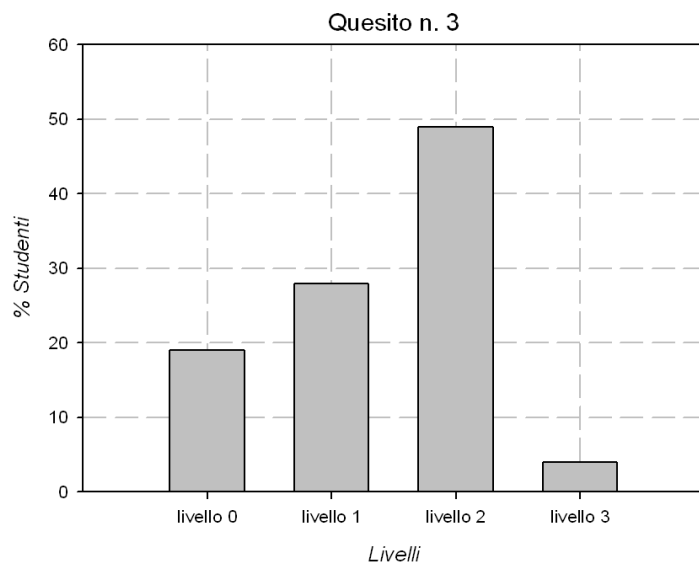
Nella seconda parte del quesito n. 2 è richiesto di confrontare un dato grafico (che fornisce una distribuzione dello stesso set di dati) con il grafico precedentemente costruito dagli studenti chiedendo di riflettere sulle analogie e sulle differenze. I risultati mostrati in fig. 5.4 indicano che in questo caso il 62% del campione è riuscito ad individuare una o più informazioni sulle distribuzioni ed a compararle correttamente.

#### 5.2.1.4 Quesiti relativi al contesto della meccanica statistica

##### Quesito n. 3

Il quesito n. 3 mostra una immagine di un modello di un gas di particelle libere in movimento all'interno di una scatola. Nella prima parte è richiesto di descrivere le caratteristiche della distribuzione attraverso le informazioni che si possono dedurre dalla lettura del grafico della distribuzione, mentre nella seconda parte si richiede di analizzare e comparare due differenti distribuzioni dello stesso sistema di particelle sotto condizioni differenti. Le due questioni sono state analizzate in parallelo poiché ottenere un sufficiente numero di informazioni è un prerequisito per evidenziare un adeguato numero di caratteristiche che differenziano le due distribuzioni. La fig. 5.5 mostra la classificazione delle risposte. In questo caso quasi il 50% degli allievi ha mostrato di sapere individuare almeno due grandezze fondamentali delle distribuzioni

## 5. IL CONTESTO SPERIMENTALE E LE FASI DELLA SPERIMENTAZIONE



**Figura 5.5:** Risposte al quesito n. 3.

ed alcuni, circa il 4%, sono riusciti anche a trovare delle relazioni fra tali parametri. Forse il contesto del gas di particelle già in qualche modo studiato contribuisce ad una maggiore comprensione del fenomeno.

### Quesito n. 4

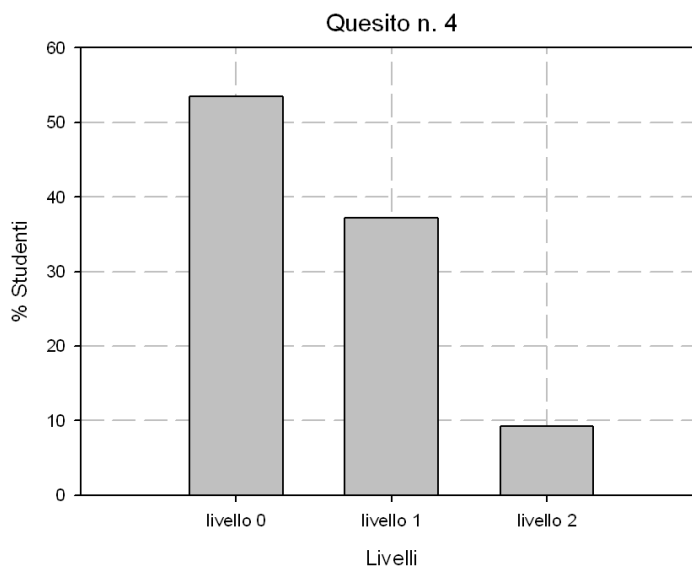
Il quesito n. 4 introduce un apparato sperimentale attraverso cui determinare la distribuzione di velocità di un gas di ioni. Il quesito chiede di descriverne il funzionamento e anche se non richiesto esplicitamente di individuare il metodo di selezione attraverso cui discriminare le velocità delle particelle.

Le risposte sono state categorizzate nei seguenti livelli:

- Livello 0: Non risponde o solo parzialmente;
- Livello 1: Descrive l'apparato ma non dà indicazioni sul metodo di selezione;
- Livello 2: individua il metodo di selezione;

Come si evince dal grafico in fig. 5.6, è stata constatata la scarsa capacità degli allievi nell'individuare il metodo attraverso cui ottenere una distribuzione in un caso reale.

Infatti, soltanto circa il 9% del campione è stato in grado di individuare il metodo di selezione con cui determinare coerentemente la distribuzione e anche la relativa forma. Le risposte degli studenti mostrano che la maggior parte di essi non ha cognizione del fatto che un sistema di particelle possa avere delle velocità distribuite in qualche determinato modo, ed inoltre



**Figura 5.6:** Risposte al quesito n. 4.

sottolinea la notevole difficoltà nel determinare una modalità con cui discriminare le diverse velocità.

#### **Quesito n. 5**

Il quesito n. 5 chiede agli studenti di prevedere il risultato attraverso la determinazione del grafico che si viene a formare sul tamburo rotante relativo all'apparato prima descritto. A partire da tale grafico bisogna inoltre determinare la forma funzionale della distribuzione.

Le risposte sono state categorizzate nei seguenti livelli:

- Livello 0: Non risponde o solo parzialmente;
- Livello 1: Individua qualcosa di uniforme o un punto;
- Livello 2: Individua una distribuzione;
- Livello 3: Individua la distribuzione corretta;

Anche in questo caso, come si evince dalla fig. 5.7, la maggior parte degli allievi (più del 50%) non ha risposto e soltanto il 20% circa ha individuato una distribuzione anche se non corretta. Possiamo dedurre allora che le difficoltà riscontrate nel quesito precedente vengono ancor più confermate dal presente quesito. Bisogna evidenziare che una considerevole parte degli allievi (circa il 55%) ha ritenuto che le particelle si debbano distribuire sullo schermo in

## 5. IL CONTESTO SPERIMENTALE E LE FASI DELLA SPERIMENTAZIONE

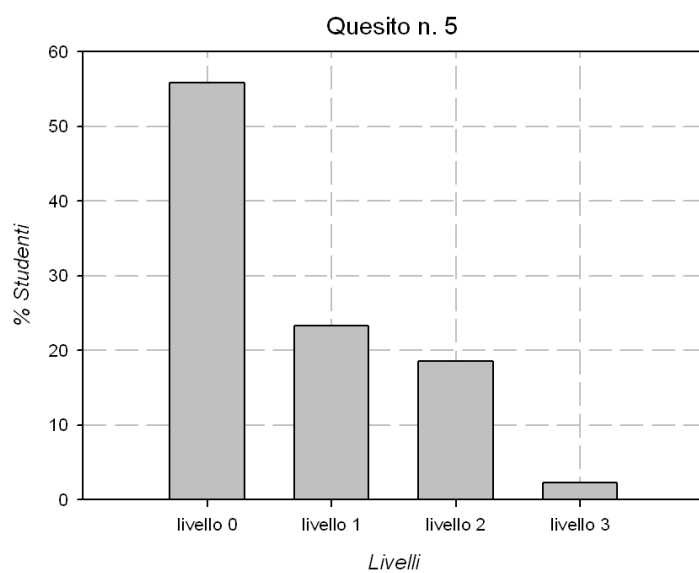


Figura 5.7: Risposte al quesito n. 5.

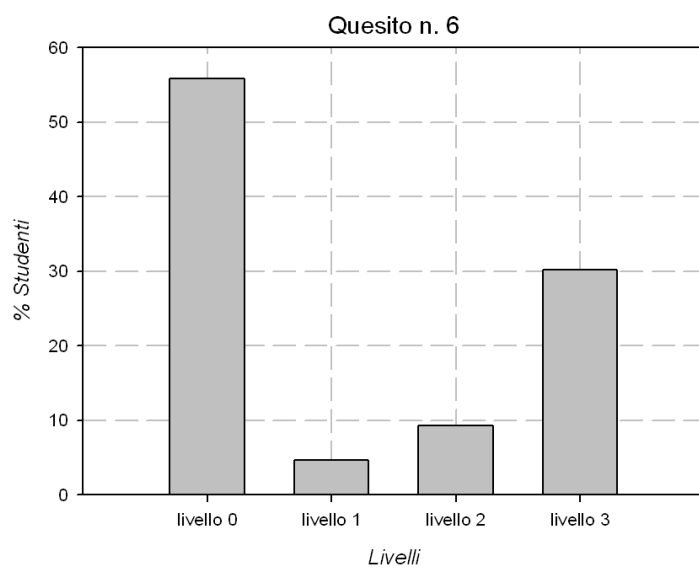


Figura 5.8: Risposte al quesito n. 6.

qualche modo, non individuando il metodo di selezione e mostrando come ci siano notevoli difficoltà legate proprio alla comprensione del metodo sperimentale descritto.

### Quesito n. 6

Attraverso il quesito n. 6 è chiesto di confrontare tre distribuzioni di velocità normalizzate e di mettere in relazione le rispettive temperature dei sistemi di particelle di riferimento. Attraverso il quesito n. 6 si vuole analizzare la capacità di ottenere informazioni dalla lettura di una distribuzione e le competenze necessarie per confrontare coerentemente quest'ultime.

Le risposte sono state categorizzate nei seguenti livelli:

- Livello 0: Non individua alcuna informazione sulla distribuzione;
- Livello 1: Individua alcune informazioni ma non la varianza e neanche il legame con la temperatura. Fa un confronto non corretto;
- Livello 2: Individua la varianza e le confronta correttamente ma non conosce il legame con la temperatura;
- Livello 3: Individua la varianza, confronta correttamente e conosce il legame con la temperatura;

Come mostra la fig. 5.8 circa il 55% non è riuscito ad ottenere alcuna informazione e quindi non è riuscito a fare un confronto significativo. Tuttavia circa il 40% ha individuato la varianza in maniera corretta ma soltanto il 30% riesce a legarla alla temperatura.

### Quesito n. 7

Nel quesito n. 7 è chiesto di determinare la corrente elettronica in un tubo a vuoto nel caso in cui gli elettroni siano emessi tutti con la stessa velocità. Quest'ultimo quesito indaga la capacità predittive di individuazione della distribuzione e la classificazione delle risposte è la seguente:

- Livello 0: Non risponde;
- Livello 1: La corrente non dipende dalla velocità degli elettroni;
- Livello 2: La corrente dipende dalle velocità ma non si conosce la relazione;
- Livello 3: La forma della corrente è costante fino ad un certo valore di tensione in cui diventa nulla;

Come mostra la fig. 5.9 soltanto il 3% degli allievi è riuscito ad individuare la giusta relazione. La maggior parte (circa 65%) non ha risposto e il 25% ha ritenuto corrente distribuzione elettronica variabili indipendenti

## 5. IL CONTESTO SPERIMENTALE E LE FASI DELLA SPERIMENTAZIONE

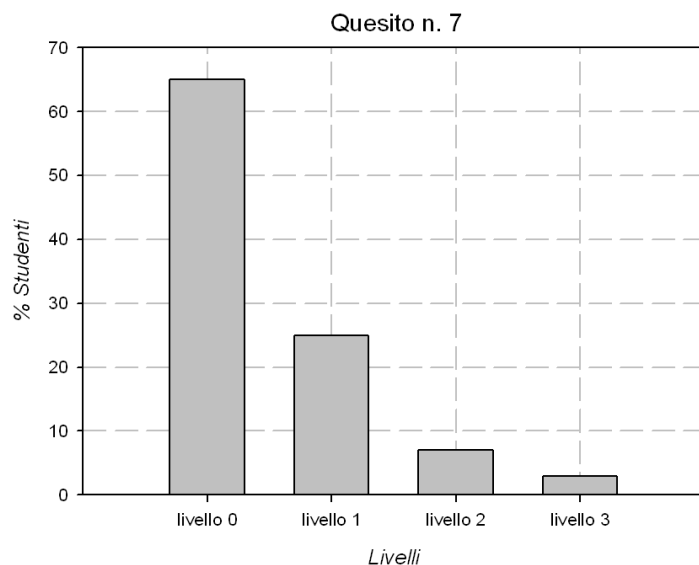


Figura 5.9: Risposte al quesito n. 7.

### 5.2.1.5 Considerazioni conclusive

Dei sette quesiti, i primi tre sono stati affrontati mediamente con minore difficoltà.

Questi quesiti, seppur facciano riferimento a contesti diversi, evidenziano i medesimi aspetti e cioè: la capacità di rappresentare in maniera appropriata un set di dati e la capacità di ottenere una o più informazioni a partire dalla lettura di una data distribuzione.

I risultati ottenuti concordano tutti sull'importanza della conoscenza del contesto, mostrando come questo influisca sulle scelte fatte dagli studenti. Una maggiore facilità sia ad ottenere informazioni che a confrontarle è stata mostrata nel caso della distribuzione del gas di particelle che risulta essere anche la più usuale e la più comunemente studiata dal nostro target di studenti.

I risultati mostrano inoltre che la modalità con cui i dati vengono forniti risulta essere importante per la costruzione di un istogramma. Ad esempio, la disposizione in ordine crescente delle altezze degli studenti, rispetto ad una disposizione casuale, come avviene nel caso del periodo del pendolo, induce più facilmente alla rappresentazione per intervalli.

I quesiti dal n. 4 in poi sono risultati i più complessi, nonostante questi argomenti fossero stati già in qualche modo affrontati nello studio della fisica generale. Pochissimi studenti sono riusciti a comprendere il sistema di selezione e ancora meno la effettiva distribuzione, nonostante tutti avessero studiato sia la distribuzione di velocità delle componenti che quella dei moduli. Una buona percentuale è riuscita ad individuare informazioni a partire dal confronto



fra distribuzioni, individuando correttamente il legame fra la varianza e la temperatura. Questo a riprova del fatto che tali argomenti erano stati già affrontati durante il loro percorso di studi ma solo dal punto di vista della formalizzazione matematica.

### 5.2.2 Fase 2: Realizzazione degli interventi

La proposta didattica prima descritta è stata realizzata attraverso la suddivisione in cinque attività. Alcune di queste attività sono state svolte come lezioni frontali aperte altre come attività di laboratorio. Gli argomenti da trattare durante le lezioni frontali partecipate,<sup>1</sup> sono individuati attraverso dei quesiti rivolti agli allievi in modo tale da renderli il più possibile partecipi. Le attività di laboratorio sono di due tipologie: una di tipo sperimentale, in cui sono utilizzate soprattutto apparecchiature di tipo elettrico ed un'altra di tipo informatico, che richiede l'utilizzo dei computer e dei relativi software. L'attività sperimentale è basata sul metodo precedentemente descritto attraverso cui determinare la distribuzione statistica di velocità degli elettroni nel vuoto in equilibrio con il catodo, emessi per effetto termoionico.

#### 5.2.2.1 Attività 1: Esempi di distribuzioni

Durante questa attività il concetto di distribuzione è presentato secondo due aspetti: l'aspetto riguardante l'analisi e la rappresentazione degli errori durante una fase di misura; l'aspetto riguardante la rappresentazione di una grandezza fisica associata ad un sistema di particelle come proprietà intrinseca del suddetto sistema. Attraverso degli esempi appartenenti ad entrambe le categorie si riflette sulle analogie e sulle differenze.

#### 5.2.2.2 Attività 2: Sistemi di particelle: relazioni fra grandezze macroscopiche e microscopiche. Distribuzione di velocità di un gas perfetto e metodi di misura.

In questa attività è messo in evidenza come la meccanica statistica rappresenti un diverso approccio ai fenomeni studiati nell'ambito della termodinamica e come i soli concetti della meccanica classica non siano sufficienti e adeguati quando il sistema che si vuole studiare è formato da un numero elevatissimo di particelle.

Successivamente è affrontato il problema dei metodi sperimentali di selezione delle velocità, attraverso un breve excursus storico, e si propone un esempio di selettore meccanico delle velocità di un gas, l'apparato a "raggi molecolari". Tale metodo risulta essere diverso sia da

---

<sup>1</sup>Con lezione frontale partecipata si intendono delle lezioni rivolte a fornire informazioni ma con un ampio coinvolgimento degli studenti attraverso domande e stimoli di discussione

## **5. IL CONTESTO SPERIMENTALE E LE FASI DELLA SPERIMENTAZIONE**

quello presente nel test in ingresso sia da quello utilizzato durante l'attività. Tutte e tre i metodi presentano comunque aspetti simili permettendo di raggiungere obiettivi analoghi. In questo modo, è possibile constatare se gli allievi riescono ad individuare i caratteri essenziali, comuni a tutti i metodi di selezione, legate alla distribuzione di un gas di particelle e trasportare queste competenze in ambiti analoghi.

### **5.2.2.3 Attività 3: L'emissione termoionica e il gas di elettroni: un semplice modello esplicativo**

Durante questa attività l'attenzione è indirizzata verso un particolare gas di particelle, il gas di elettroni. Risulta necessario dare alcune informazioni di base sul funzionamento delle valvole con particolare riferimento alla legge di Richardson, alle caratteristiche costruttive, ed alcuni effetti di ordine superiore come l'effetto Schottky. Definite queste premesse gli allievi sono guidati verso la individuazione di un semplice modello del suddetto gas attraverso la seguente richiesta:

*“Individua le caratteristiche fondamentali del gas di elettroni emessi per effetto termionico e costruisci un modello per descriverlo”.*

Un tipico modello a cui si può pervenire ha le seguenti caratteristiche:

- Geometria a facce piane e parallele
- Gas di elettroni liberi nel vuoto in equilibrio termico con il catodo
- Elettroni distribuiti secondo Maxwell-Boltzmann
- Densità di carica spaziale trascurabile

Questo modello porta ad una espressione della corrente in funzione della tensione che è di tipo esponenziale. Nella fase successiva gli allievi hanno il compito di verificare sperimentalmente la bontà del modello prima descritto.

### **5.2.2.4 Attività 4: Elettroni in una valvola termoionica: dalla misura della corrente alla distribuzione del gas di elettroni**

Durante questa attività gli allievi sono guidati verso l'individuazione della distribuzione del gas di elettroni. Al modello fisico-matematico del gas individuato precedentemente bisogna associare un metodo analitico per potere risalire alla distribuzione. A questo aspetto è dedicata molta attenzione.

La forma della distribuzione dipende fortemente dalla geometria, pertanto bisogna definire tale forma in dipendenza della geometria prima individuata.

Il metodo di selezione per l'individuazione della distribuzione ha come responsabile il campo elettrico applicato fra catodo ed anodo. Questo, opposto al moto degli elettroni, permette di selezionare tutti quegli elettroni che hanno energia sufficiente a superare la barriera di potenziale.

A questo punto viene posto il problema di come queste caratteristiche ci possano aiutare a costruire un selezionatore di velocità. Gli studenti sono così indirizzati ad analizzare le conseguenze di una variazione del campo elettrico e quindi della differenza di potenziale e stimolati a prevedere il tipo di distribuzione che si aspettano di trovare (in dipendenza al tipo di geometria prima definita)

In questa fase si cerca di condurre gli studenti attraverso ragionamenti non ben formalizzati da un punto di vista matematico, verso una quantificazione del metodo di selezione. Questi aspetti richiedono tuttavia, per essere ben compresi, un approfondimento più formale da proporre agli studenti e nel caso fosse necessario attraverso un intervento del docente. L'approfondimento matematico porta alla seguente relazione:

$$n(\varepsilon) \propto -\frac{dI}{d\varepsilon}. \quad (5.1)$$

e cioè che la distribuzione di energia può essere trovata attraverso la derivata della corrente termoionica rispetto all'energia e quindi rispetto al potenziale, il tutto cambiato di segno. Si perviene o si dimostra come l'ipotesi di geometria piana significhi considerare una distribuzione unidimensionale relativa al vettore velocità perpendicolare alla superficie di emissione degli elettroni.

Una volta caratterizzato il metodo di selezione ed il percorso matematico-analitico che ci consente di trovare la distribuzione, gli studenti iniziano il lavoro sperimentale.

A tal fine l'intera classe è suddivisa in gruppi di lavoro ognuno formato al più da cinque elementi. Ad ogni gruppo è assegnato un tavolo e tutta la strumentazione necessaria sul quale predisporre e montare il circuito di misura. Vengono fornite le schede per guidare gli allievi nelle operazioni di raccolta delle misure. Per prima cosa è chiesto agli studenti di verificare la legge di Richardson attraverso la seguente richiesta:

*“Predisponi il circuito di misura con la strumentazione fornita e verifica se la corrente della valvola in tuo possesso obbedisce alla legge di Richardson”.*

In questo modo si ha la certezza del buon funzionamento dell'apparato e ogni allievo può prendere confidenza con la strumentazione di misura.

## 5. IL CONTESTO SPERIMENTALE E LE FASI DELLA SPERIMENTAZIONE

Gli studenti lavorano su due tipologie di apparati sperimentali. Una in cui il dispositivo elettronico è un diodo e un'altra in cui è un triodo. Secondo quanto definito precedentemente ogni gruppo deve definire un protocollo sperimentale di raccolta dei dati necessari all'individuazione delle distribuzioni. Si chiede di raccogliere quattro serie di misure, cioè quattro caratteristiche I-V del diodo e del triodo, corrispondenti a quattro temperature diverse del catodo. Il confronto fra queste curve ci darà indicazioni su quali sono le grandezze che caratterizzano le distribuzioni a temperature diverse.

Ogni gruppo deve lavorare sia con l'apparato sperimentale in cui è presente il diodo sia in quello in cui è presente il triodo. Gli studenti sono lasciati liberi di agire sulla tensione di griglia, la quale è responsabile del miglioramento nell'individuazione delle distribuzioni e si chiede di confrontare i risultati ottenuti e di individuare i motivi delle eventuali differenze.

Infatti, i due diversi apparati mettono in evidenza come nel caso del triodo si riescano ad ottenere delle distribuzioni più attendibili ed a temperature più elevate. È ben noto infatti che la distribuzione di Maxwell è rigorosamente valida nel caso in cui si possa ipotizzare che le particelle possano interagire fra loro soltanto attraverso gli urti. Questa ipotesi nel caso delle valvole non è sempre verificata poiché la continua emissione di elettroni può provocare un accumulo di carica (la carica spaziale) in cui l'interazione può diventare rilevante. L'utilizzo del triodo, con il suo elettrodo griglia consente polarizzato opportunamente, consente di "spazzare via" la carica spaziale e ridurre quindi l'interazione fra gli elettroni.

In questa fase gli studenti devono essere in grado di pianificare l'indagine, lavorando come tanti gruppi di ricerca confrontando fra loro l'approccio utilizzato e i risultati ottenuti.

L'obiettivo dell'analisi dei dati sperimentali è quello di determinare la distribuzione di velocità degli elettroni emessi dal catodo. Il set di misure permette di confrontare le distribuzioni a temperature diverse. I dati sperimentali raccolti durante la precedente fase necessitano di una elaborazione. Questa fase richiede l'utilizzo dei computer e del foglio di calcolo.

Attraverso delle schede guida (riportate in appendice) si chiede agli allievi di preparare un foglio di calcolo su cui riportare i risultati trovati, di essere in grado di trovare soluzioni alternative e di scegliere la giusta sequenza da utilizzare. Le operazioni da eseguire possono essere descritte sinteticamente secondo questa sequenza:

- Costruire il grafico corrente - temperature e fai il fitting di tale grafico attraverso la legge di Richardson. Individuare i parametri di fitting, con particolare riferimento al parametro legato al lavoro di estrazione Tale parametro infatti è tabulato e lo studente può in questo

modo avere un riferimento sulla bontà dei dati raccolti e quindi sulla corretta esecuzione della procedura di raccolta dei dati sperimentali;

- Costruire i grafici corrente - tensione, uno per ogni temperatura (almeno quattro) sia per il diodo che per il triodo. Fare il fitting non lineare di questi grafici con le curve esponenziali prime descritte e verifica il modello. Come parametro di fitting in questo caso è possibile determinare la temperatura del catodo.
- Implementare le derivate numeriche della corrente rispetto alla tensione con uno dei metodi proposti (derivate in avanti, indietro o centrali). Fare gli opportuni cambi di variabile per avere una rappresentazione coerente della distribuzione. (È necessario infatti passare dai potenziali alle velocità)
- Rendere le distribuzioni omogenee in modo da poterle confrontare (Si chiede di normalizzarle attraverso il metodo dell'integrazione numerica)
- Costruire il grafico delle distribuzioni trovate e fai il fitting di tali curve attraverso la distribuzione di Maxwell che ritieni opportuna. Verificare la bontà dei fitting attraverso lo scarto quadratico.

Lo studente è messo nelle condizioni di verificare il modello precedentemente individuato, di riflettere sui limiti di tale modello, sulle modifiche eventualmente da apportare per una corretta interpretazione dei dati sperimentali. Inoltre aver definito un metodo operativo attraverso cui determinare la distribuzione rende quest'ultima un concetto meno astratto.

La determinazione delle curve di distribuzione a diverse temperature ha l'ulteriore scopo di individuare una temperatura massima al di sopra della quale la distribuzione di Maxwell non è più verificata.

Una ulteriore verifica a cui lo studente è indirizzato riguarda il confronto fra la stima della temperatura di filamento e quella del catodo. Quest'ultima infatti deve necessariamente essere più bassa. Si osserva invece che questa differenza si va sempre più assottigliando quanto più il fitting dei dati sperimentali con la legge di Maxwell peggiora. In questo modo lo studente è indotto a riflettere sulle motivazioni del disaccordo.

Le misure ottenute nel caso del triodo sono confrontate con quelle del diodo in modo tale da verificare se nel primo caso ci sia un ampliamento del range di temperature per cui la distribuzione di Maxwell è ancora verificata. In questa fase lo studente fa un notevole uso della strumentazione informatica. Un obiettivo secondario di questa attività è quello di far acquisire allo studente una metodologia di ricerca e di analisi dei dati sperimentali attraverso i metodi

## **5. IL CONTESTO SPERIMENTALE E LE FASI DELLA SPERIMENTAZIONE**

numerici e gli strumenti informatici. Lo studente deve utilizzare abilità diverse come implementare algoritmi, sapere rappresentare correttamente i dati sperimentali, sapere individuare le informazioni essenziali in un grafico.

### **5.2.2.5 Attività 5: Discussione conclusiva sui risultati ottenuti**

In questa fase ogni gruppo può esporre i risultati trovati e le riflessioni nate durante l'attività. In un primo momento queste discussioni avvengono fra i gruppi di lavoro e successivamente i gruppi relazionano alla classe. Agli allievi è chiesto di saper diagnosticare i problemi che hanno portato a risultati non compatibili con il modello individuato, commentare in modo critico gli esperimenti individuando i limiti del metodo e delle apparecchiature utilizzate, formulare congetture per interpretare correttamente i risultati trovati, saper discutere e confrontarsi tra pari con gli altri gruppi di lavoro senza che si abbia l'inibizione di quando ci si rivolge al docente, formulare argomentazioni coerenti al fine di migliorare la comprensione delle problematiche affrontate.

## 6

# I risultati della sperimentazione

L'efficacia della proposta didattica è stata valutata sia attraverso il monitoraggio in itinere sia attraverso il confronto tra i risultati del questionario d'ingresso e del questionario d'uscita. Dall'analisi di ogni singola attività facente parte della sperimentazione si sono ottenute le informazioni utili al monitoraggio in itinere.

### 6.1 Monitoraggio dello svolgimento della sperimentazione

La stragrande maggioranza degli allievi ha mostrato nei confronti dell'attività un notevole interesse sia per la tematica trattata che per il modo con cui il seminario è stato organizzato. Quasi tutti si sono fatti coinvolgere facilmente dall'attività di laboratorio, a cui tuttavia non erano abituati. In particolare, i tubi a vuoto, che in parte gli allievi conoscevano per impieghi nel campo delle telecomunicazioni, hanno suscitato molta curiosità forse per la diversa modalità con cui sono stati utilizzati. Anche l'attività di elaborazione dei dati è risultata quasi completamente nuova a molti e forse per questo molto apprezzata.

L'approccio metodologico della sequenza presupponeva che gli studenti realizzassero delle attività in piccolo gruppo, e riportassero le loro osservazioni di tipo descrittivo ed esplicativo al fine di redigere una relazione finale, discutendo i risultati all'interno del gruppo (durante le attività) e/o con il ricercatore (di solito alla fine di ciascuna fase della sequenza). Una discussione in grande gruppo ha completato infine tutte le fasi della sequenza.

Di seguito vengono riportati alcuni elementi dei percorsi di apprendimento emersi durante le discussioni per lo più in piccolo gruppo. L'obiettivo è quello di documentare le difficoltà e i progressi nell'apprendimento in relazione alle attività formative svolte e alle interazioni con i docente. A questo scopo, verranno riportate alcune trascrizioni delle discussioni tra studenti di

## **6. I RISULTATI DELLA SPERIMENTAZIONE**

---

uno stesso gruppo che svolgevano un compito assegnato e tra studenti e ricercatore o domande poste dagli studenti.

È stato analizzato il processo di apprendimento degli allievi durante lo svolgimento delle singole attività della sequenza didattica, documentando le difficoltà e i progressi nell'apprendimento in relazione alle attività e alle interazioni con il ricercatore. A questo scopo, vengono riportate alcune trascrizioni delle discussioni tra studenti e tra studenti e ricercatore.

La stesura della relazione di laboratorio, ha comportato una continua revisione da parte del docente da cui è stato possibile ottenere informazioni sull'andamento della sperimentazione.

Le prime due attività non hanno consentito di ottenere particolari informazioni, poiché sono servite ad introdurre la tematica ed a fornire le informazioni essenziali per lo svolgimento del restante percorso didattico. A partire dall'attività n. 3 invece la maggiore interazione fra studenti e docente ha permesso di cogliere le caratteristiche essenziali del progresso nell'apprendimento.

### **6.1.1 Attività 1: Esempi di distribuzioni**

Durante questa attività sono stati mostrati diversi esempi di distribuzioni in ambiti molto diversi: rappresentazione degli errori nelle operazioni di misura, rappresentazione di dati statistici soprattutto in ambito sociale, rappresentazione della velocità o energia di un sistema di particelle.

Quasi tutti gli studenti hanno mostrato di conoscere almeno parzialmente le tematiche prima citate e contemporaneamente di considerarle molto diverse e lontane fra loro. Soprattutto in una prima fase hanno mostrato notevoli difficoltà ad inquadrare gli aspetti comuni ai diversi ambiti di applicazione.

### **6.1.2 Attività 2: Sistemi di particelle: relazioni fra grandezze macroscopiche e microscopiche. Distribuzione di velocità di un gas perfetto e metodi di misura.**

Questa attività ha avuto lo scopo di richiamare gli aspetti fondamentali dell'approccio della meccanica statistica ai sistemi formati da un elevato numero di particelle, rappresentandolo come alternativo all'approccio termodinamico.

Inoltre si è posto il problema pratico di come determinare sperimentalmente la distribuzione di un tale sistema e si è descritto un breve excursus storico sui metodi di selezione delle velocità di un sistema di particelle. A tal proposito è stato proposto uno degli apparati sperimentali più



## 6.1 Monitoraggio dello svolgimento della sperimentazione

---

noti conosciuto come apparato a raggi molecolari ed in un primo momento è stato mostrato un diagramma rappresentativo di tale sistema, chiedendo di descriverne il funzionamento.

Mentre nella prima parte più teorica quasi tutti hanno mostrato di comprendere i ragionamenti fatti, dimostrando di conoscere già l'argomento, nella seconda parte, inerente l'apparato sperimentale, quasi tutti hanno mostrato di avere notevoli difficoltà a comprenderne il principio di funzionamento. In effetti queste difficoltà erano state già messe in evidenza dal test d'ingresso, dove si chiedeva di descrivere un apparato simile a questo e quindi è stato necessario l'intervento del docente per mostrare nei dettagli gli aspetti fondamentali del meccanismo di selezione di tale apparato.

### 6.1.3 Attività 3: L'emissione termoionica e il gas di elettroni: un semplice modello esplicativo

Questa attività si è svolta nei termini di una lezione partecipata in cui si è cercato di rendere gli studenti il più possibile partecipi all'approfondimento della tematica. Inizialmente è stato presentato un modello semplice e adeguato alla descrizione del gas di elettroni emessi dal metallo per effetto del riscaldamento. L'obiettivo è quello di dimostrare se è possibile descrivere tale gas in termini della distribuzione di Maxwell-Boltzmann e, in caso affermativo, quali sono le ipotesi che devono essere soddisfatte. Si è posto quindi il seguente quesito:

*“Individua le caratteristiche fondamentali del gas di elettroni emessi dal catodo per effetto termoionico”*

A molti studenti è stato difficile considerare l'insieme di elettroni come un gas alla stregua di qualsiasi altro gas studiato in termodinamica. La maggior parte si è concentrata sull'interazione fra gli elettroni, con particolare riferimento all'interazione elettrostatica. Nessuno si è posto il problema di definire una geometria da assegnare al sistema tubo a vuoto e di come questa influenzasse la forma della distribuzione. Alcuni studenti avevano già affrontato lo studio della distribuzione di Fermi e pertanto hanno ritenuto acriticamente di associare questa al gas di elettroni.

### 6.1.4 Attività 4: Elettroni in una valvola termoionica: dalla misura della corrente alla distribuzione del gas di elettroni

Questa attività può essere suddivisa in tre parti: un primo momento che ha come obiettivo l'individuazione e lo sviluppo del modello fisico-matematico che conduce al legame tra corrente

## 6. I RISULTATI DELLA SPERIMENTAZIONE

---

anodica e distribuzione di velocità degli elettroni, un secondo momento di raccolta dei dati sperimentali ed un terzo momento di elaborazione ed analisi dei dati raccolti.

Durante la prima parte è stato chiesto di individuare in che modo la valvola elettronica potesse essere usata come selezionatore di velocità in analogia con il selezionatore meccanico studiato precedentemente. Diversi studenti hanno facilmente individuato la tensione o il campo elettrico applicato fra i due elettrodi come il responsabile della selezione degli elettroni rispetto alle velocità. A tal riguardo bisogna notare che il metodo di selezione di tipo meccanico, presentato nella precedente attività, era risultato molto più difficile da comprendere e questo concorda anche con i risultati del questionario in ingresso.

Per quanto riguarda l'individuazione del percorso analitico è risultato necessario l'intervento del docente poiché nessuno studente è stato in grado di determinarlo.

La seconda parte riguarda l'attività di laboratorio. Attraverso l'attività di laboratorio gli studenti hanno potuto verificare il modello precedentemente descritto. Durante la raccolta dei dati sperimentali è stato possibile intervistare gli studenti e in alcuni casi anche registrare le discussioni tra gli elementi di uno stesso gruppo di lavoro e fra gruppi diversi.

Si è potuto constatare che le operazioni legate al metodo di misura, hanno distolto parzialmente e temporaneamente l'attenzione degli studenti dall'obiettivo ultimo dell'attività, la determinazione della distribuzione di velocità degli elettroni. Infatti nonostante il tentativo di semplificare il più possibile le operazioni di misura, attraverso la progettazione di un set-up sperimentale con pochi e ben conosciuti componenti e predisponendo su ogni tavolo delle schede con le indicazioni essenziali, molti studenti hanno incontrato difficoltà, anche soltanto nella fase di montaggio del circuito.

Ad ogni gruppo è stato chiesto di riflettere sul legame fra la funzione corrente-tensione e la distribuzione di velocità degli elettroni all'interno del tubo a vuoto. In particolare è stato chiesto:

*“Se gli elettroni venissero emessi dal catodo con uguale velocità quale sarebbe la funzione corrente-tensione?”*

La maggior parte ha dimostrato di avere molta difficoltà ad individuare la precisa relazione, difficoltà che era stata già riscontrata nelle risposte al questionario in ingresso. Bisogna notare tuttavia che in molti casi la difficoltà è legata al preciso preconetto che una variazione di tensione debba avere necessariamente come conseguenza una relativa variazione di corrente. Molti studenti hanno proposto ragionamenti che fanno uso del principio di conservazione dell'energia meccanica, individuando un valore di tensione al di sopra del quale non vi è più corrente senza

## 6.1 Monitoraggio dello svolgimento della sperimentazione

---

però individuare in che modo si arrivi a questo valore zero di corrente. Altri invece hanno presentato difficoltà legate al significato da dare alle distribuzioni ritenendo di rappresentare con una distribuzione costante gli elettroni emessi tutti con la stessa velocità. In definitiva pochi hanno individuato il corretto andamento di corrente costante fino ad un ben preciso valore della tensione.

Il terzo momento di questa attività ha avuto come obiettivo l'analisi e l'elaborazione dei dati sperimentali attraverso cui ogni gruppo ha redatto una relazione che riportava i risultati ottenuti e le proprie conclusioni.

Gli studenti hanno predisposto il foglio di calcolo secondo le linee guida fornite. Molti di loro hanno mostrato di non padroneggiare a sufficienza i metodi numerici e le loro implementazioni sul foglio di calcolo. Per questi motivi, spesso, la loro attenzione è stata concentrata molto più sulle tecniche di elaborazione che sul risultato che si voleva raggiungere. Nonostante ciò l'analisi delle relazioni, redatte durante l'ultima fase dell'attività, ha permesso di trarre informazioni sull'avanzamento delle loro conoscenze sull'argomento trattato.

L'impostazione generale che quasi tutti hanno dato alla relazione stata la seguente: una breve introduzione sui metodi della meccanica statistica per la descrizione dei sistemi, cenni storici con particolare riferimento ai metodi sperimentali di selezione, descrizione del modello fisico-matematico, dettagli sul metodo sperimentale usato, analisi dei dati e conclusioni.

Bisogna notare che molti studenti hanno evidenziato la maggiore complessità dei sistemi meccanici di selezione rispetto al metodo da noi proposto. Molte relazioni riportano come esempio di selezionatore delle velocità l'apparato a dischi rotanti anche se evidente che la comprensione di tale apparato non è sempre chiara ed esaustiva, così come lo è invece il metodo dei campi elettrici ritardanti. Ad esempio:

*“La presenza di tale tensione ha un effetto filtrante nel senso in cui maggiore è la tensione minore sarà la corrente anodica, e quindi una quantità minore di elettroni arriverà all'anodo. Tale effetto ritardante è dovuto al generarsi di un campo elettrico tra anodo-catodo che si oppone al moto degli elettroni. Questa proprietà filtrante non era ben evidente nell'apparato a raggi molecolari descritto precedentemente.”*

Inoltre, rispetto al modello fisico-matematico quasi tutti hanno individuato correttamente le ipotesi di lavoro e quindi anche i limiti del metodo usato. È da evidenziare che l'elevata mole di passaggi analitici e operazioni da svolgere, per passare dalla corrente alla distribuzione, ha comportato uno sbilanciamento dell'attenzione più all'aspetto operativo che al significato fisico del legame fra la corrente misurata e la distribuzione di velocità degli elettroni. Di contro,

## 6. I RISULTATI DELLA SPERIMENTAZIONE

---

la semplicità del metodo di selezione attraverso i potenziali ritardanti ha permesso a tutti di cogliere il significato di sistema di particelle con velocità distribuite secondo una certa legge.

Dalle relazioni è possibile individuare alcune riflessioni che dimostrano come alla fine del percorso il problema posto precedente sulla forma analitica della corrente nel caso di distribuzione uniforme abbia trovato delle risposte più convincenti e precise. Ad esempio uno studente riporta nella sua relazione:

*“Per la misura della distribuzione delle velocità applichiamo un campo...: aumentando questo campo, se tutti gli elettroni avessero uguale velocità, si dovrebbe osservare, superata una certa intensità di campo, un azzeramento della corrente. In realtà siccome gli elettroni hanno velocità diverse, un certo numero di elettroni riesce comunque a raggiungere l’anodo”*

e ancora

*“...le velocità del gas di elettroni, in direzione normale alla superficie anodica, non sono le stesse in quanto se fossero le stesse (in modulo) allora avremmo trovato un andamento della corrente anodica, in funzione della tensione ritardante, del tipo a gradino, con la discontinuità centrata nel valore della tensione di soglia ritardante (tale da non permettere a nessun elettrone di raggiungere l’anodo).”*

Una piccola percentuale ha individuato un andamento lineare con cui la corrente possa arrivare a zero.

Come ho avuto modo di constatare e come si evince da alcune frasi riportate sulle relazioni, le misure al variare della temperatura hanno sicuramente chiarito il legame di quest’ultima con la velocità degli elettroni migliorando anche la comprensione della lettura delle distribuzioni.

*“Osservando i grafici delle varie distribuzioni di velocità si è potuto osservare che al crescere della temperatura corrisponde un sensibile aumento di media e varianza (la concentrazione di elettroni attorno alla media risulta maggiore per basse temperature”*

e ancora

*“..Sovrapponendo le due curve si nota come all’aumentare della temperatura, aumentano gli elettroni con velocità più alta, mentre diminuiscono quelli con velocità più bassa. Inoltre la curva si allarga e si abbassa.”*

e

*“Facendo riferimento ai grafici normalizzati risulta evidente come, al variare della temperatura di filamento, risulta più probabile che gli elettroni difficilmente possano superare la velocità di  $4 \cdot 10^5$  m/s. Tuttavia all’aumentare della temperatura di filamento risulta possibile raggiungere anche i  $6 \cdot 10^5$  m/s.”*

## 6.1 Monitoraggio dello svolgimento della sperimentazione

---

Per quanto riguarda la problematica delle alte temperature per cui non si riscontra più un buon fitting fra i dati sperimentali e la legge di Maxwell-Boltzmann sono state trovate diverse spiegazioni; alcuni studenti hanno riportato come motivazione l'elevata densità di carica spaziale che conduce ad una elevata interazione fra gli elettroni, violando quindi una delle ipotesi fondamentali del modello inizialmente descritto. Altri hanno ritenuto che la spiegazione risieda nella natura fermionica degli elettroni i quali per tale ragione, soprattutto alle alte temperature, devono obbedire alla legge di Fermi. Ad esempio:

*“All'aumentare della temperatura non vale più l'approssimazione di gas ideale, e la legge di M-B si allontana da quella di Fermi-Dirac, a cui obbediscono gli elettroni.”*

e ancora:

*“Per alti valori di tensione di filamento notiamo comportamenti differenti della distribuzione delle velocità... In tal caso le distribuzioni di velocità trovate si discostano maggiormente dall'andamento teorico di Maxwell-Boltzmann.”*

*Ciò è dovuto ai seguenti fattori:*

- 1. all'aumentare della tensione di filamento aumenta la temperatura del catodo e quindi aumenta l'emissione di elettroni e dunque la densità di carica spaziale non risulta più trascurabile e ciò comporta che le particelle cominciano a interagire tra loro;*
- 2. la nube di elettroni avvolge l'anodo e di conseguenza il triodo (o il diodo) entra in saturazione.”*

Come si evince da quasi tutte le relazioni la procedura di normalizzazione ha acquisito un significato maggiore della semplice operazione matematica, diventando necessaria per il confronto fra le varie distribuzioni ottenute al variare della temperatura.

*“..A questo punto, per poter confrontare, tra loro le curve dei diversi esperimenti, è necessario normalizzare tali curve. Per fare questo eseguiamo un'integrazione numerica col metodo dei trapezi. A questo punto possiamo rappresentare in dei grafici le curve di distribuzione delle velocità”*

e

*“A questo punto, per completare l'esperimento, è necessario poter paragonare tra loro i vari grafici, trovando il valore di  $K$  che mi dà la corretta espressione della funzione di distribuzione.”*

dove con  $K$  lo studente intende la costante di normalizzazione.

Quasi nessuno ha fatto cenno alla possibilità di estendere il range di temperature in cui la distribuzione segue ancora la legge di Maxwell-Boltzmann attraverso una opportuna tensione

## 6. I RISULTATI DELLA SPERIMENTAZIONE

---

applicata alla griglia tranne che in linea del tutto teorica. Alcuni fanno cenno ad un ipotetico effetto regolatore

*“La funzione della griglia è quella di regolare il flusso di elettroni che giungono all’anodo, nel senso che parte degli elettroni emessi dal catodo saranno catturati dalla griglia.”*

In effetti, le misure sperimentali che gli studenti hanno riportato, nel caso del triodo, non evidenziano in alcun modo un possibile miglioramento ma anzi possono riscontrarsi maggiori discrepanze legate forse alla maggiore complicazione dell’apparato sperimentale.

### 6.1.5 Attività 5: Discussione conclusiva sui risultati ottenuti

Durante la discussione conclusiva gli studenti hanno potuto scambiarsi opinioni e commenti sui lavori eseguiti durante l’attività.

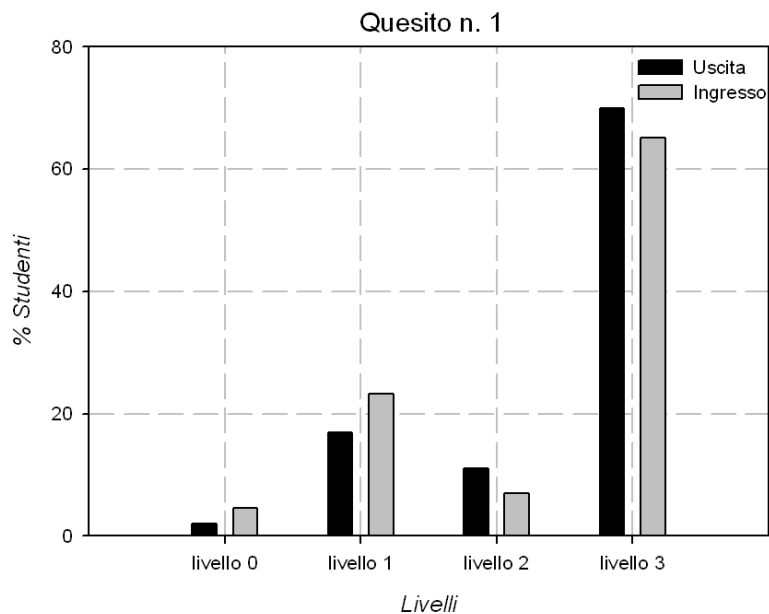
Inoltre, ogni studente ha potuto descrivere e commentare la propria relazione. Durante questa attività è stato messo in evidenza il punto di vista degli studenti sugli argomenti trattati.

Tutte le relazioni sono state strutturate con una introduzione storica sui metodi di selezione per la verifica della distribuzione di Maxwell-Boltzman e con una dettagliata descrizione del modello fisico matematico del gas di elettroni. Successivamente sono stati riportati i dati sperimentali e l’elaborazione. Bisogna notare che l’elaborazione dei dati è risultata molto complessa perché ha coinvolto problematiche diverse ed in alcuni casi ha distolto dall’obiettivo principale. Tuttavia proprio queste problematiche hanno consentito agli studenti di raggiungere degli obiettivi secondari che consistono nell’acquisizione di competenze nell’utilizzo delle procedure di calcolo numerico e degli strumenti informatici necessari all’implementazione di tali procedure. La maggioranza degli studenti è riuscita a determinare le distribuzioni del gas di elettroni individuandone le caratteristiche fondamentali eseguendo anche degli opportuni confronti rispetto alla temperatura e rispetto all’apparato sperimentale usato. Alcuni, invece, non sono riusciti nell’intento a causa di una cattiva procedura di raccolta dei dati sperimentali.

## 6.2 Il questionario in uscita ed il confronto ingresso-uscita

Il questionario somministrato in uscita è uguale al questionario in ingresso, pertanto l’analisi è stata eseguita sulla base delle variabili cognitive e dei criteri di valutazione descritti nel capitolo precedente. Anche la classificazione in livelli è stata identica a quella già proposta per il questionario in ingresso.

Il confronto fra i quesiti dei questionari è stata eseguito assieme allo studio della significatività statistica. Si è scelto di utilizzare il test non parametrico del  $\chi^2$  considerando come ipotesi



**Figura 6.1:** Confronto ingresso-uscita relativo alla prima parte de quesito n. 1.  $\chi^2 = 1,34$ ;  $p = 0,7$ .

nulla,  $H_0$ , quella per cui le differenze fra ingresso ed uscita delle risposte fornite non sono statisticamente significative e come livello di significatività un valore della probabilità  $p < 0,05$ . In particolare quando la condizione prima enunciata risulta essere verificata siamo sicuri di poter scartare l'ipotesi nulla e quindi ritenere significativo il confronto fra le distribuzioni in ingresso ed in uscita.

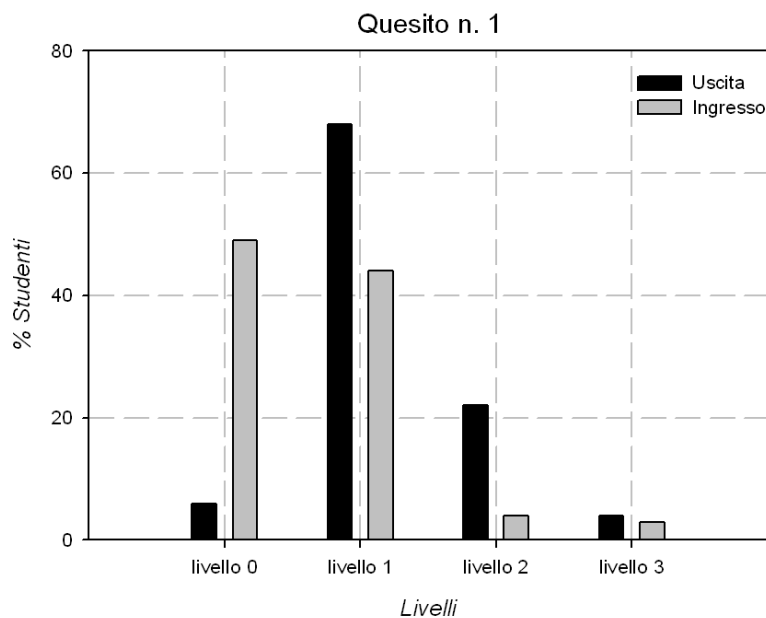
## 6.2.1 I risultati

### 6.2.1.1 Quesiti relativi al contesto di vita quotidiana

I primi due quesiti fanno riferimento all'utilizzo delle distribuzioni in un contesto di vita quotidiana.

#### Quesito n.1

Nel quesito n. 1 si descrive un campione di altezze di trenta studenti. Nella prima parte del quesito è chiesto di costruire la distribuzione a partire da una tabella di altezze, inoltre è chiesto di fornire le informazioni che da tale grafico è possibile dedurre. La fig. 6.1 mostra il grafico del confronto fra le risposte fornite in ingresso e quelle in uscita. Il test del  $\chi^2$  in questo caso evidenzia la non significatività delle differenze fra le risposte fornite in ingresso e in uscita non permettendoci quindi di fare ulteriori commenti. Ci limitiamo ad evidenziare come



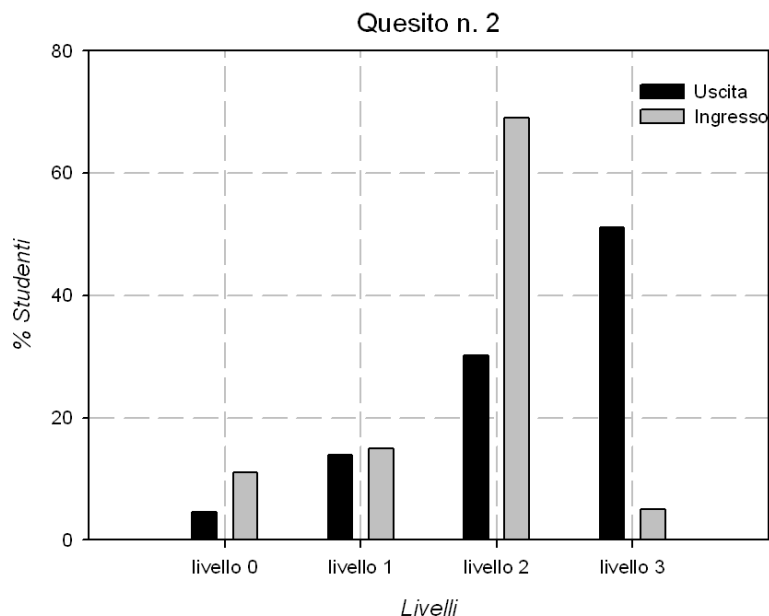
**Figura 6.2:** Confronto ingresso-uscita relativo alla seconda parte de quesito n. 1.  $\chi^2 = 22,09; p = 0,0001$ .

già nel questionario in ingresso la maggior parte degli studenti (il 65%) aveva individuato una forma corretta di rappresentazione e che il 30% di questi mantiene comunque la modalità di rappresentazione dei grafici sui livelli 1 e 2.

La seconda parte del quesito n. 1 chiede agli studenti di analizzare due istogrammi relativi a distribuzioni di due campioni differenti di trenta studenti e quindi di effettuare un confronto. Ancora una volta sono stati presi in considerazione gli elementi rilevanti per il confronto come la variazione. In questo caso le differenze risultano essere statisticamente significative. Come mostra la fig. 6.2 quasi il 70% del campione si limita a descrivere un solo parametro caratteristico della distribuzione. Anche in questo caso la maggior parte di loro identifica come parametro la variazione detta anche larghezza della curva. Rispetto al questionario in ingresso non riscontriamo notevoli differenze. Infatti anche in ingresso gli studenti erano risultati classificabili principalmente come “unistrutturali” tuttavia adesso riscontriamo un minore numero di allievi che non riporta alcuna risposta, (soltanto il 6%), ed un discreto aumento degli allievi classificabili come “multistrutturali” (dal 4% al 22%) i quali riportano informazioni anche su quale siano i valori più frequenti o probabili.

### Quesito n.2





**Figura 6.3:** Confronto ingresso-uscita relativo alla prima parte de quesito n. 2.  $\chi^2 = 23,95; p = 2,5 \cdot 10^{-5}$ .

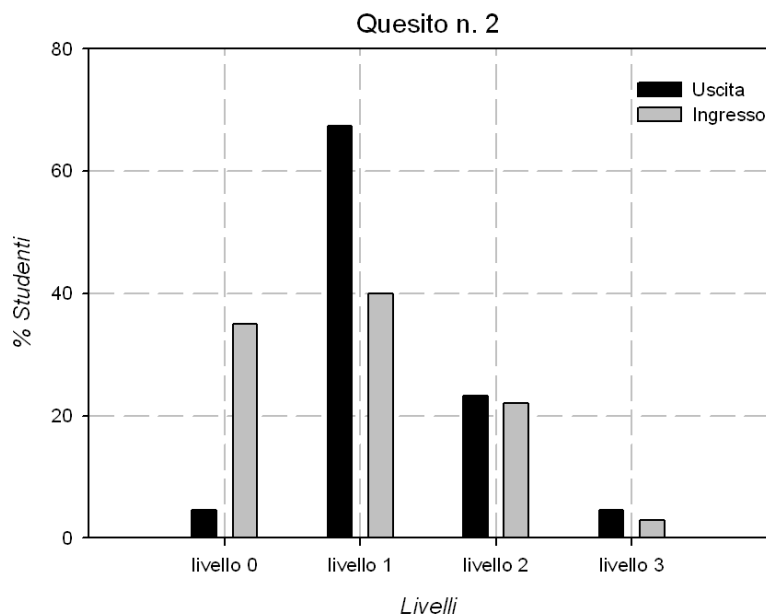
Come mostrato nel capitolo precedente, il secondo quesito è molto simile al primo e fa riferimento ad un campione di misure di periodo di un dato pendolo. Gli studenti a partire da una tabella di dati riportati in successione di registrazione devono costruire il grafico che più ritengono opportuno al fine di ottenere delle informazioni sulla bontà delle misure. Anche in questo caso il test di significatività ci consente di scartare l'ipotesi nulla e di procedere quindi al confronto. La fig. 6.3 mostra i risultati del confronto evidenziando come la maggior parte del campione il 53% abbia rappresentato opportunamente i dati scegliendo opportuni intervallo all'interno del quale ripartire i dati stessi. Rispetto al questionario in ingresso, in cui gli allievi avevano principalmente costruito l'istogramma con ogni dato riportato secondo la frequenza con cui compariva, si è avuto un notevole miglioramento.

Nella seconda parte del quesito n. 2 è chiesto di confrontare un dato grafico (che fornisce una distribuzione dello stesso set di dati) con il loro precedente grafico mettendo in evidenza le analogie e le differenze.

Le differenze sono statisticamente significative anche se i risultati riportati in fig. 6.4 non evidenziano particolari novità rispetto all'ingresso. La maggior parte del campione risulta classificabile sul livello "unistrutturale" seppur con un aumento dal 40% al 66%. Anche in questo caso il numero di allievi che non fornivano risposta è diminuito al 5%.

## 6. I RISULTATI DELLA SPERIMENTAZIONE

---



**Figura 6.4:** Confronto ingresso-uscita relativo alla seconda parte de quesito n. 2.  $\chi^2 = 13,17; p = 0,0043$ .

### 6.2.1.2 Quesiti relativi al contesto della meccanica statistica

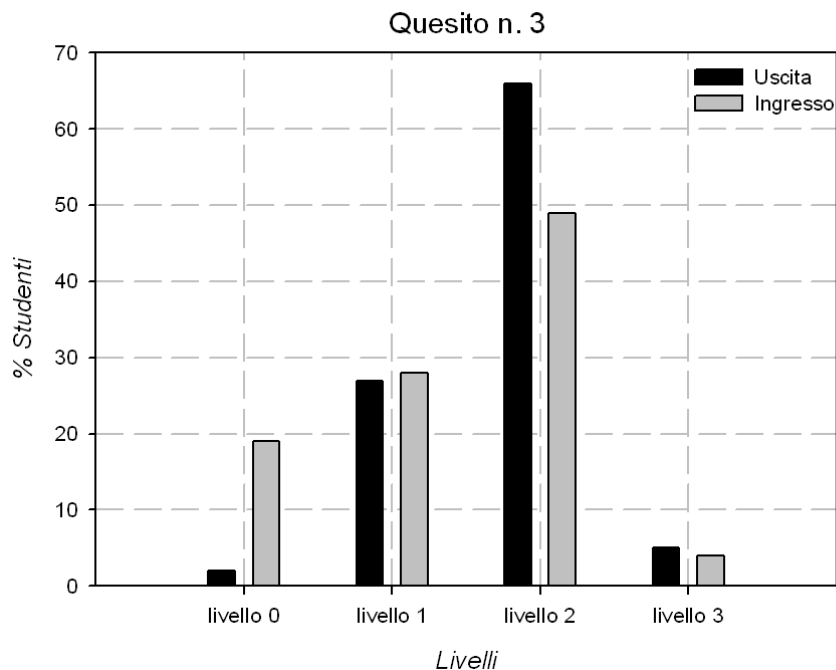
A partire da quesito n. 3 il tema trattato riguarda prima il gas di particelle generico e successivamente quello di elettroni.

#### Quesito n. 3

Il quesito n. 3 mostra una immagine di un modello di un gas di particelle libere in movimento all'interno di una scatola e il relativo istogramma delle velocità. Nella prima parte è richiesto di descrivere le caratteristiche della distribuzione attraverso le informazioni che si possono dedurre dalla lettura del grafico della distribuzione mentre nella seconda parte di analizzare e comparare due differenti distribuzioni dello stesso sistema di particelle sotto condizioni differenti. Le due questioni sono state analizzate in parallelo poiché le caratteristiche individuate e confrontate risultano le stesse.

Il test del  $\chi^2$  indica differenze fra ingresso e uscita non del tutto statisticamente significative. In realtà dalla fig. 6.5 si può comunque apprezzare che c'è stato sia un aumento degli studenti che sono riusciti ad individuare e quindi confrontare più elementi caratteristici delle distribuzioni, come varianza e velocità più probabile, sia una notevole diminuzione degli studenti che non avevano individuato alcun elemento caratteristico.

#### Quesito n. 4



**Figura 6.5:** Confronto ingresso-uscita relativo al quesito n. 3.  $\chi^2 = 7,05$ ;  $p = 0,07$ .

Il quesito n. 4 entra nello specifico del tipo di gas di particelle e mostra un apparato sperimentale storico, attraverso cui determinare la distribuzione di velocità di un gas di ioni. Il quesito chiede di descriverne il funzionamento e quindi individuare il metodo di selezione attraverso cui discriminare le velocità delle particelle. L'ipotesi nulla può essere scartata e come si evince dalla fig. 6.6 c'è stato un notevole miglioramento rispetto all'ingresso. Seppur tale apparato non sia mai stato descritto durante l'attività, tutti gli studenti sono stati in grado almeno di descrivere correttamente l'apparato, inoltre il 40% di essi è riuscito ad individuare il metodo di selezione esplicitandolo chiaramente nelle proprie risposte. Dalle risposte è risultato evidente come l'individuazione del metodo di selezione nella descrizione dell'apparato abbia acquisito, rispetto all'ingresso, una consistente priorità.

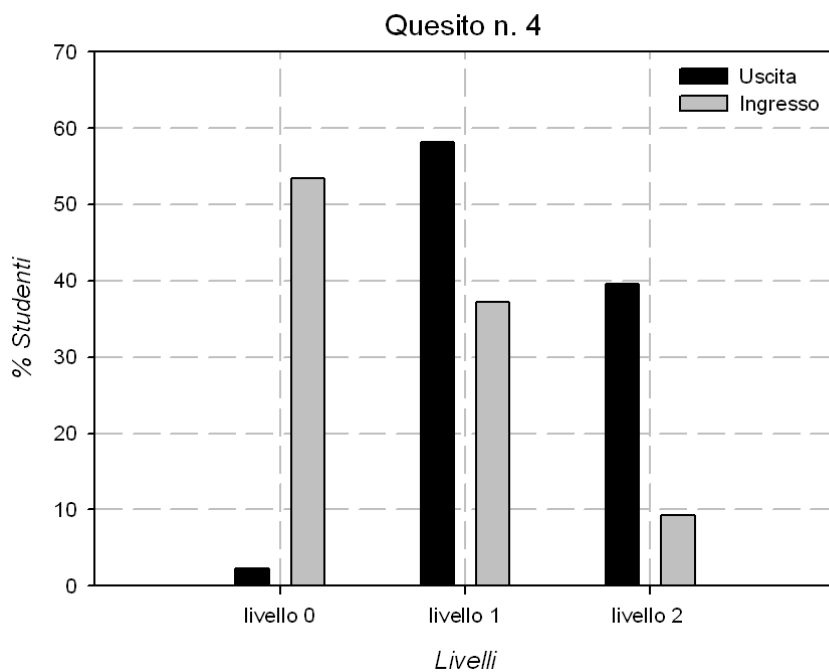
#### Quesito n. 5

Il quesito n. 5, strettamente connesso al precedente, chiede di determinare il grafico che si viene a formare sul tamburo rotante e dedurre da questo la forma della distribuzione.

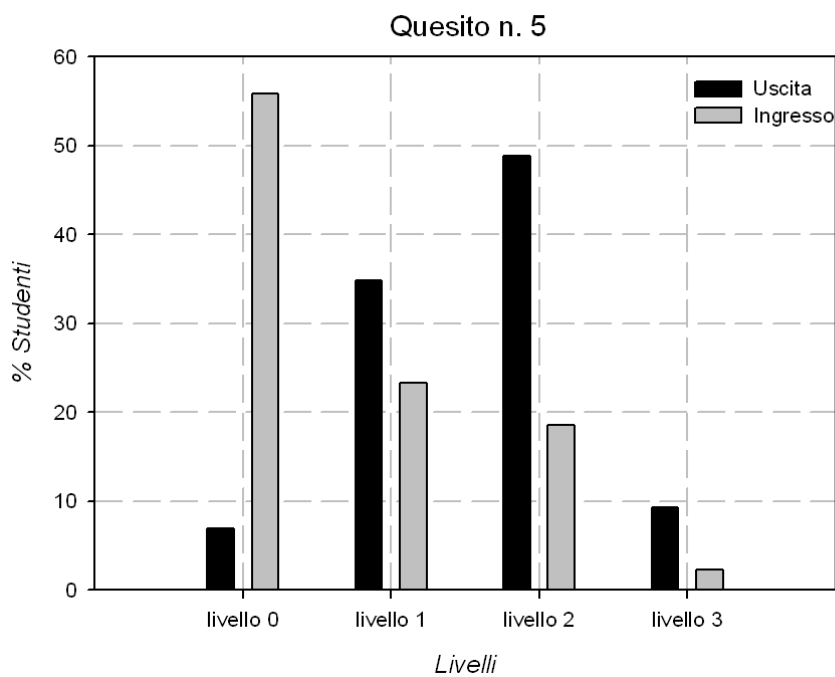
La significatività statistica è verificata e la fig. 6.7 mostra i risultati di tale confronto. Anche in questo caso le risposte degli studenti evidenziano un notevole miglioramento. Mentre nel questionario in ingresso nessun allievo era riuscito ad individuare la distribuzione corretta adesso il 9% riporta il grafico della distribuzione di Maxwell-Boltzmann relativa ai moduli. Inoltre

## 6. I RISULTATI DELLA SPERIMENTAZIONE

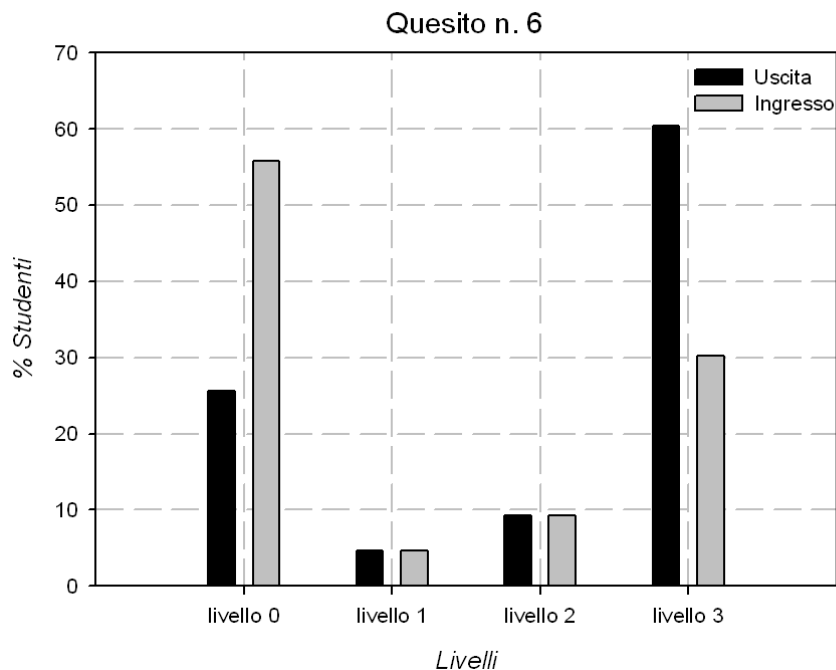
---



**Figura 6.6:** Confronto ingresso-uscita relativo al quesito n. 4.  $\chi^2 = 30,19; p = 2,8 \cdot 10^{-7}$ .



**Figura 6.7:** Confronto ingresso-uscita relativo al quesito n. 5.  $\chi^2 = 25,42; p = 1,3 \cdot 10^{-5}$



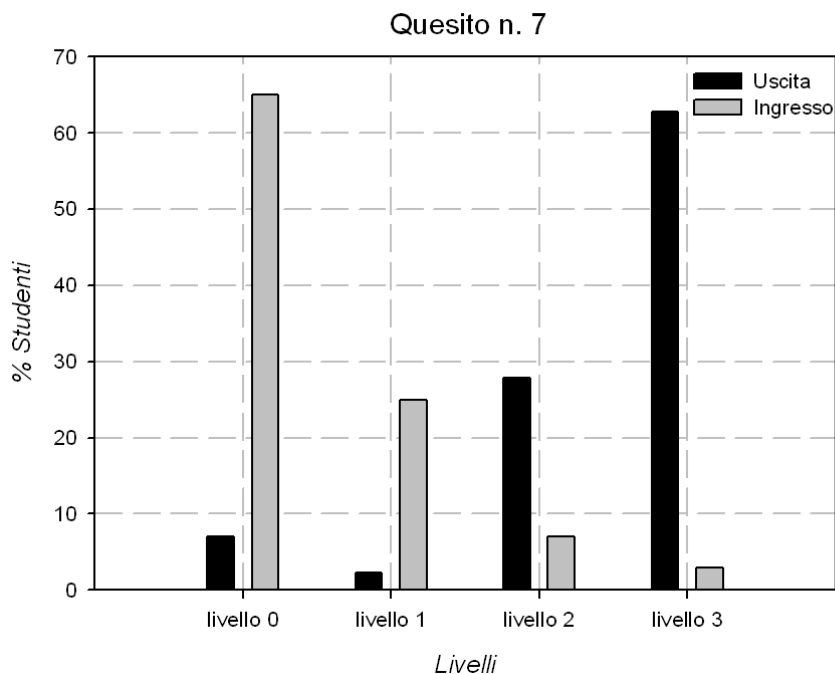
**Figura 6.8:** Confronto ingresso-uscita relativo al quesito n. 6.  $\chi^2 = 9,16; p = 0,03$ .

una buona percentuale il 49% riesce ad individuare una qualche distribuzione superando parzialmente gli ostacoli legati al tipo di metodo di selezione. Bisogna evidenziare che sembrerebbe esserci una discrepanza fra tale risultato e quello precedente sull'individuazione del metodo di selezione. Infatti la percentuale di quelli che individuano una qualche distribuzione (49%) è più alta rispetto a chi individua il metodo di selezione (40%). Questo fatto mostra una qualche incoerenza spiegabile forse con il fatto che una parte degli studenti sia stata influenzata nel cercare di determinare una distribuzione senza vere capito bene le cause.

#### **Quesito n. 6**

Il quesito n. 6 mostra tre distribuzioni di velocità normalizzate e chiede di confrontarle in relazione alle rispettive temperature dei sistemi di particelle che queste descrivono. Come mostra la fig. 6.8 il miglioramento rispetto allo stesso quesito posto all'ingresso risulta notevole, sia perché è diminuita la percentuale di coloro che non riuscivano a individuare una risposta sia perché il 60% è riuscito ad individuare correttamente la varianza ed ha saputo metterla in relazione con la temperatura. Le risposte rientranti in quest'ultima percentuale risultano essere ben argomentate ed esaustive.

#### **Quesito n. 7**



**Figura 6.9:** Confronto ingresso-uscita relativo al quesito n. 7.  $\chi^2 = 56,95$ ;  $p = 2,6 \cdot 10^{-12}$

L'ultimo quesito il n. 7 chiede di determinare la corrente elettronica in un tubo a vuoto nel caso in cui gli elettroni emessi siano emessi tutti con la stessa velocità. Questo quesito ripropone in parte la condizione sperimentale in cui gli studenti si sono trovati ad operare, ribaltando però la logica della problematica. In questo caso si suppone di conoscere la distribuzione e si chiede quale possa essere la conseguente forma della corrente in funzione della tensione. Tal quesito in ingresso era risultato sicuramente il più difficile; infatti una altissima percentuale di studenti non era stata in grado di rispondere. Adesso in uscita troviamo una situazione ribaltata. Infatti come mostra la fig. 6.9 più del 60% ha individuato correttamente la forma della corrente dimostrando di avere compreso lo stretto legame tra corrente e distribuzione di velocità e quindi anche le evidenze sperimentali che la distribuzione comporta.

### 6.3 Discussione

Il monitoraggio in itinere ha dimostrato il notevole coinvolgimento della maggior parte degli studenti nei confronti del seminario. Molti hanno manifestato apprezzamento soprattutto per l'attività di laboratorio ed in generale per il modo in cui le tematiche sono state affrontate. Sia l'attività di laboratorio che l'elaborazione dei dati sperimentali è risultata molto impegnativa

ma allo stesso tempo gratificante. Bisogna notare tuttavia che proprio questo notevole impegno è stato in molto casi motivo di distrazione dall'obiettivo principale, polarizzando l'attenzione degli studenti verso problematiche di tipo sperimentale o di tipo computazionale. Questo ha permesso però di raggiungere obiettivi di apprendimento "secondari" riguardanti competenze nella esecuzione di esperimenti in laboratorio e nella elaborazione dei dati sperimentali attraverso procedure numeriche.

I risultati ottenuti e descritti nel presente capitolo possono essere distinti in due categorie: la prima fa riferimento alle conoscenze e competenze specifiche relative al tema trattato, la seconda fa riferimento a conoscenze e competenze che sono state trasferite in contesti diversi anche se riguardanti gli stessi concetti di base.

Alla prima categoria fa riferimento la comprensione del concetto di distribuzione di una variabile fisica di un sistema di particelle. Questo aspetto è stato analizzato sotto diversi punti vista. È stata analizzata la capacità di rappresentazione di un set di dati sotto forma di una distribuzione, la capacità di lettura e di confronto.

Una notevole importanza è stata data alla procedura sperimentale attraverso cui ottenere una distribuzione di un sistema di particelle. Si ritiene infatti che l'elevata astrazione del concetto di distribuzione sia causa di notevoli difficoltà di apprendimento e per questo motivo imponga un approccio più concreto che permetta operativamente di attenersi alla funzione di distribuzione.

In riferimento alla lettura di un grafico, alla rappresentazione di una distribuzione di particelle, gli studenti hanno dimostrato di avere già approfondito queste tematiche sufficientemente, riuscendo ad ottenere più informazioni soprattutto nel caso di rappresentazione ad istogrammi. Per quanto riguarda il confronto i migliori risultati sono stati ottenuti ancora nel caso della rappresentazione ad istogrammi mentre nel caso delle funzioni continue con particolare riferimento alla temperatura è stato notato un notevole miglioramento rispetto all'ingresso già durante le fasi di elaborazione dei dati sperimentali. Come precedentemente accennato l'esperimento è risultato relativamente semplice nella realizzazione e tutti gli studenti hanno compreso il suo significato concettuale di selezionatore di velocità. Il metodo dei potenziali ritardanti è risultato più facilmente comprensibile rispetto ai sistemi meccanici di selezione e anche l'approfondimento di questa metodologia ha avuto delle ricadute positive nella comprensione dei sistemi di selezione meccanici.

Di notevole importanza è risultato il contesto all'interno del quale presentare le problematiche. Questo è risultato evidente dai migliori risultati ottenuti nel caso di distribuzioni applicata al sistema di particelle (gas) piuttosto che alle altre applicazioni in contesti di vita quotidiana.

## **6. I RISULTATI DELLA SPERIMENTAZIONE**

---

Tuttavia bisogna evidenziare che il confronto ingresso uscita mostra come ci sia stato un parziale trasferimento di competenze da ambiti specifici della meccanica statistica agli altri contesti, riscontrabile in particolare modo nella capacità di costruzione di istogrammi a partire da una tabella di dati. Di contro la capacità di ottenere informazioni dalla lettura degli istogrammi e la capacità di confronto in ambiti di vita quotidiana è sostanzialmente rimasta immutata, essendo buona già in partenza.



# 7

## Conclusioni

### 7.1 Risposte alle domande di ricerca

#### 7.1.1 Elementi emersi in relazione alla prima domanda di ricerca

Nella prima domanda di ricerca si pone il problema di quale sia lo stato di maturità raggiunto dagli studenti di un corso di laurea a carattere scientifico relativamente al concetto di distribuzione statistica, utilizzata in contesti diversi. Tale maturità è stata analizzata in riferimento alla capacità di ottenere informazioni dalla lettura di un istogramma, alla capacità di confronto e alla capacità di rappresentazione grafica di un set di dati.

La risposta a questa domanda è stata ottenuta principalmente attraverso l'analisi del questionario in ingresso ed, in particolare, attraverso i primi tre quesiti.

I primi due quesiti si riferiscono ad un contesto di vita quotidiana e mostrano nella maggior parte dei casi una buona attitudine a rappresentare i dati sotto forma di istogrammi attraverso una opportuna scelta degli intervalli entro cui inserire i valori. A tal proposito si nota che i migliori risultati si evidenziano nel caso di dati forniti in maniera ordinata. Questo infatti stimola gli studenti verso una rappresentazione in cui l'asse dei valori è suddiviso in intervalli più o meno opportuni. Le risposte date mostrano inoltre scarsa capacità di lettura e di confronto degli istogrammi (al più riescono ad ottenere e/o confrontare una sola informazione).

Il terzo quesito fa riferimento all'ambito della meccanica statistica e mostra una alta percentuale di studenti che riescono ad ottenere più informazioni dalla lettura degli istogrammi. Anche la capacità di confronto risulta essere buona. Anche il quesito n. 6, il quale fa riferimento a distribuzioni continue di tipo gaussiano, richiede capacità di lettura e di confronto delle distribuzioni avendo come prerequisito la conoscenza della relazione fra varianza e temperatura.

## 7. CONCLUSIONI

---

In questo caso pochi studenti sono riusciti ad individuare la giusta relazione anche se riescono a confrontare correttamente le varianze.

Questi risultati mostrano come sia importante il contesto all'interno del quale gli stessi concetti vengono trattati e come sia importante la modalità di rappresentazione. Infatti i risultati migliori sono ottenuti proprio nel contesto più conosciuto e familiare del gas di particelle studiato sicuramente nei corsi di fisica generale nell'ambito della termodinamica e della teoria cinetica dei gas e nel caso di rappresentazione ad istogramma, la più intuitiva.

### 7.1.2 Elementi emersi in relazione alla seconda domanda di ricerca

Nella seconda domanda di ricerca ci si chiede in che modo, e con quali benefici, può un percorso didattico sviluppato su di una tematica specifica avere delle ricadute su contesti diversi che fanno riferimento agli stessi concetti di base. La nostra proposta didattica, infatti, è stata sviluppata attorno ad una tematica ben specifica che riguarda la distribuzione statistica del gas di elettroni emessi per effetto termoionico. Tuttavia gli argomenti ed i concetti trattati possono essere applicati, con le dovute considerazioni e con i dovuti limiti, anche ad altri contesti come, lo studio di fenomeni sociali o l'analisi degli errori sperimentali. Per queste ragioni, in entrambi i questionari alcuni quesiti non riguardano specificatamente il tema trattato ma si riferiscono a contesti di vita quotidiana. Dal confronto fra i due questionari emerge sicuramente un notevole miglioramento in riferimento alle tematiche relative all'ambito della meccanica statistica, si può notare tuttavia un significativo miglioramento anche negli altri ambiti. In particolare si è riscontrato un miglioramento nella rappresentazione di tabelle di dati sotto la forma di distribuzione mentre per quanto riguarda la raccolta di informazioni dalla lettura di un istogramma non sono stati evidenziati significativi miglioramenti.

### 7.1.3 Elementi emersi in relazione alla terza domanda di ricerca

Nella terza domanda di ricerca ci si chiede se un percorso didattico incentrato su di un'attività sperimentale può aiutare lo studente nella comprensione di argomenti generalmente trattati solo con l'ausilio degli strumenti matematici. A tal riguardo è evidente sia dal confronto fra i questionari che dal monitoraggio in itinere che la procedura sperimentale attraverso cui determinare la distribuzione del gas di elettroni ha portato un notevole miglioramento della comprensione del concetto di distribuzione. Dal monitoraggio in itinere, ma anche dalle risposte ai questionari è emerso che la metodologia sperimentale della selezione delle velocità attraverso i campi elettrici è risultata la più semplice fra quelle studiate. Essa inoltre ha permesso di

## **7.1 Risposte alle domande di ricerca**

---

comprendere il significato concettuale di sistema di particelle caratterizzato da un set di velocità distribuite secondo una particolare legge.



## Appendice A

# Materiale didattico

Di seguito riportiamo il materiale utilizzato durante lo svolgimento dell'attività didattica. In particolare le linee guida fornite agli studenti per agevolarli nella elaborazione dei dati sperimentali e le slides utilizzate per l'esposizione dei contenuti relativi alla prima fase dell'attività didattica.

### A.1 Linee guida sull'elaborazione dei dati sperimentali

Al fine di ottenere le curve delle distribuzioni di velocità risulta necessaria una elaborazione dei dati ottenuti in laboratorio.

In particolare i passi da seguire sono:

1. Verifica della legge di Richardson sui dati: corrente di anodo  $y$  e temperatura di filamento  $x$  per il diodo e/o per il triodo. Quindi rappresentazione grafica dei dati su indicati e fitting attraverso la legge di Richardson, ad esempio con OpenOffice.Calc mediante il risolutore non lineare che trovate fra gli strumenti. Dal fitting si potrà risalire al valore del lavoro di estrazione che dovrà essere compreso nell'intervallo 1 - 2 eV come si evince dai valori tabulati.
2. Rappresentazione grafica dei dati corrente-tensione (caratteristiche I-V) e fitting. Quindi stima della temperatura dal parametro del fitting. Tale temperatura si dovrà confrontare con la temperatura trovata attraverso la legge polinomiale
3. Operazione di derivazione della corrente rispetto alla tensione. Questa operazione può essere svolta mediante la derivazione numerica del primo ordine. Le derivate saranno, per ovvi motivi, quella in avanti per il primo punto, quella all'indietro per l'ultimo e quella centrale per tutti i punti intermedi. Si ricordi che la distribuzione è data dalla derivata cambiata di segno.

Le espressioni da utilizzare sono:

$$\begin{aligned} f'(x_i) &\cong \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} \\ f'(x_i) &\cong \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} \\ f'(x_i) &\cong \frac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{x_{i+1}-x_{i-1}} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

4. Operazione di integrazione numerica della curva ottenuta dalle derivate  $y$  e dalle velocità  $x$ , al fine di normalizzare tutte le curve ottenute e poterle confrontare. In particolare nel caso del diodo si dovranno determinare quattro distribuzioni, mentre nel caso del triodo due, quella a temperatura più bassa e quella a temperatura più alta. Come metodo di integrazione si può usare il metodo dei trapezi.

Generico elemento  $i$ -esimo di area:

$$\frac{(x_{i+1} - x_i)(y_i + y_{i+1})}{2} \quad (\text{A.2})$$

## A.2 Slides relative alla prima fase dell'attività

---

5. Rappresentazione grafica delle curve derivata normalizzata - velocità, e fitting di tale curve con la legge della distribuzione di velocità unidimensionale.

Tutti i parametri dei fitting si dovranno determinare attraverso la minimizzazione dello scarto quadratico:

$$\sum (y_{c,i} - y_{m,i})^2 \tag{A.3}$$

dove  $y_{c,i}$  e  $y_{m,i}$  sono rispettivamente i valori calcolati e misurati.

## A.2 Slides relative alla prima fase dell'attività

### Un esperimento sull'emissione termoionica: la distribuzione di velocità degli elettroni emessi in un tubo a vuoto

O R Battaglia

UoP\_PERG (University of Palermo\_Physics Education Research Group)

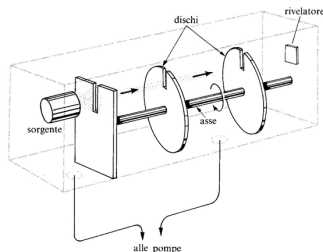
Dipartimento di Fisica e Tecnologie Relative, Università di Palermo, Italia

## LA MECCANICA STATISTICA

Utilizzo della meccanica classica:

- Praticamente impossibile conoscere esattamente le condizioni iniziali;
- Qualora lo stato iniziale fosse esattamente noto, l'integrazione delle sN equazioni del moto, da condursi necessariamente con metodi numerici, sarebbe praticamente impossibile;
- Qualora le difficoltà sopra indicate fossero superabili, il risultato sarebbe illeggibile e il dettaglio sovrabbondante e non significativo.

## APPARATO A RAGGI MOLECOLARI



Apparato a raggi molecolari per studiare la distribuzione delle velocità molecolari con un selettore di velocità. Durante il tempo che il raggio molecolare impiega per raggiungere il secondo disco, la fessura si è spostata in una posizione tale che il raggio non può attraversare il disco.

## LA MECCANICA STATISTICA

- Indispensabile per interpretare le proprietà della materia nei suoi tre stati e i cambiamenti di stato
- Interpreta e/o stabilisce le leggi fenomenologiche che descrivono le proprietà fisiche dei sistemi macroscopici, costituiti da un numero  $N$  grande di particelle, impiegando i concetti della teoria delle probabilità.  
(In alternativa alla termodinamica)

## GLI ESPERIMENTI

L'esecuzione di esperimenti che evidenziano le distribuzioni di energia e velocità di un sistema di particelle in equilibrio ad una data temperatura  $T$  è molto complessa nel caso di gas.

Esperimenti storici sono riportati nei libri di testo [Stern (1920), Zartman (1931), Miller e Kusch (1955)]

Storicamente l'effetto termoionico risulta essere il primo esperimento di validazione della teoria di Maxwell Boltzmann sulle distribuzioni statistiche [Brown, 1909]

## LE VALVOLE TERMOIONICHE

Il tubo elettronico o valvola termoionica come importante esempio di storia della tecnologia elettronica ma anche spunto per diversi tipi di indagine sperimentale in fisica come:

- lavoro di estrazione dei metalli;
- differenza di potenziale dovuta al contatto fra metalli diversi;
- distribuzione statistica degli elettroni, ecc..



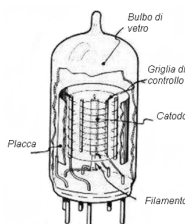
## LE VALVOLE TERMOIONICHE

Il tipico diodo attraverso cui studiare l'effetto termoionico è composto da due o più cilindri metallici (catodo, anodo, griglia) (concentrici posti molti vicini fra loro).

All'interno del catodo viene fatto passare un filamento percorso da corrente che riscalda il catodo stesso.

Quest'ultimo portato ad una data temperatura emette elettroni secondo la legge di Richardson - Dushman.

L'emissione avviene nel vuoto.



$$I = AT^2 e^{-\frac{\phi}{kT}}$$

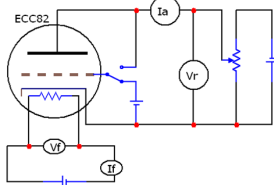
## OBIETTIVO DELL'ATTIVITA'

Nell'attività proposta si mostrerà un metodo sperimentale semplice attraverso cui trovare la funzione di distribuzione statistica del gas di elettroni emessi nel vuoto

## SET - UP SPERIMENTALE

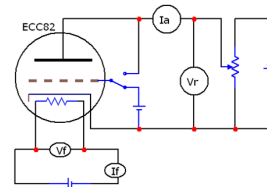
L'esperimento viene eseguito attraverso il seguente circuito elettrico.

Il tubo usato è un diodo o un triodo a riscaldamento indiretto di filamento specificate dal costruttore.



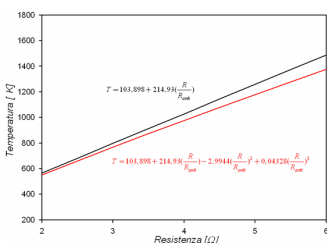
## SET - UP SPERIMENTALE

Per data corrente di filamento (che fissa la temperatura  $T$ ) si applica un potenziale ritardante fra anodo e catodo che ne varia la corrente di anodica.



## STIMA DELLA TEMPERATURA

La temperatura di filamento ( $T_{\text{filamento}} > T_{\text{catodo}}$ ) è stimata attraverso la seguente relazione fenomenologica:

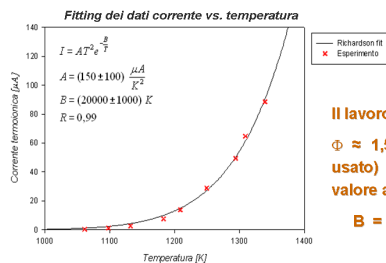


$$T = a_0 + a_1 \frac{R}{R_{mb}} + a_2 \left( \frac{R}{R_{mb}} \right)^2 + a_3 \left( \frac{R}{R_{mb}} \right)^3$$

La resistenza di filamento è calcolata a diverse temperature

$R_{mb}$  Resistenza a temperatura ambiente

## ATTENDIBILITA' DEI DATI SPERIMENTALI

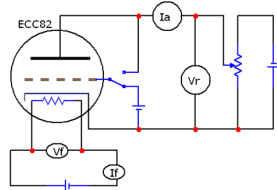
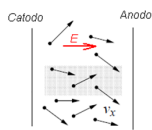


Il lavoro di estrazione,  $\phi \approx 1,5$  eV, (per il diodo usato) corrisponde ad un valore accettato di  $B = (\phi/k) \approx 17400$  K.

La sovrastima del lavoro di estrazione ottenuto ( $\phi \approx 1,7$ ) dipende dalla sovrastima sulla temperatura.

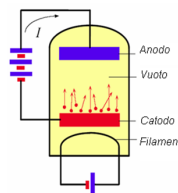
[ SET - UP SPERIMENTALE ]

In tal modo si seleziono le componenti della velocità perpendicolari alla superficie del catodo emittente



[ MODELLO ]

- Geometria a facce piane e parallele  
(Approfondimento per la geometria cilindrica attraverso la funzione di Schottky)
- Gas di elettroni liberi nel vuoto in equilibrio termico con il catodo.
- Elettroni distribuiti secondo MB
- Densità di carica spaziale trascurabile



Con tali approssimazioni  $I(V) = Ae^{-\frac{eV}{kT}}$

[ MODELLO MATEMATICO ]

La corrente in direzione  $x$  perpendicolare alle facce catodo ed anodo è data da:

$$I = eS \int_0^{\infty} v_x n(v_x) dv_x$$

Dove  $e$  indica la carica dell'elettrone,  $S$  superficie,  $n(v_x)$  distribuzione unidimensionale delle velocità

Poiché siamo interessati al moto nella direzione  $x$  indichiamo con

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m v_x^2$$

e con  $f(\varepsilon)$  la sua funzione di distribuzione

avremo  $n(v_x) = g(\varepsilon) f(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{dv_x} = A \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} f(\varepsilon) m v_x = \sqrt{2mA} f(\varepsilon)$

[ MODELLO MATEMATICO ]

Da cui

$$n(v_x) \propto f(\varepsilon) \quad e \quad I \propto \frac{e}{m} S \int_0^{\infty} f(\varepsilon) d\varepsilon$$

Nel caso in cui venga applicato un potenziale ritardante

$$I \propto \frac{e}{m} S \int_{eV}^{\infty} f(\varepsilon) d\varepsilon$$

e derivando rispetto all'energia  $\varepsilon$

$$f(\varepsilon) \propto \frac{m}{eS} \frac{dI}{d\varepsilon}$$

## Appendice B

# Il questionario

Di seguito riportiamo il questionario utilizzato sia nella verifica iniziale che in quella d'uscita.

## B. IL QUESTIONARIO

---

COGNOME E NOME.....

Corso di Laurea.....Anno.....

### I. QUESITO

Di seguito sono riportate le misure delle altezze di un gruppo di 30 studenti.

1.1 Rappresentare in un grafico precisando le scelte fatte.

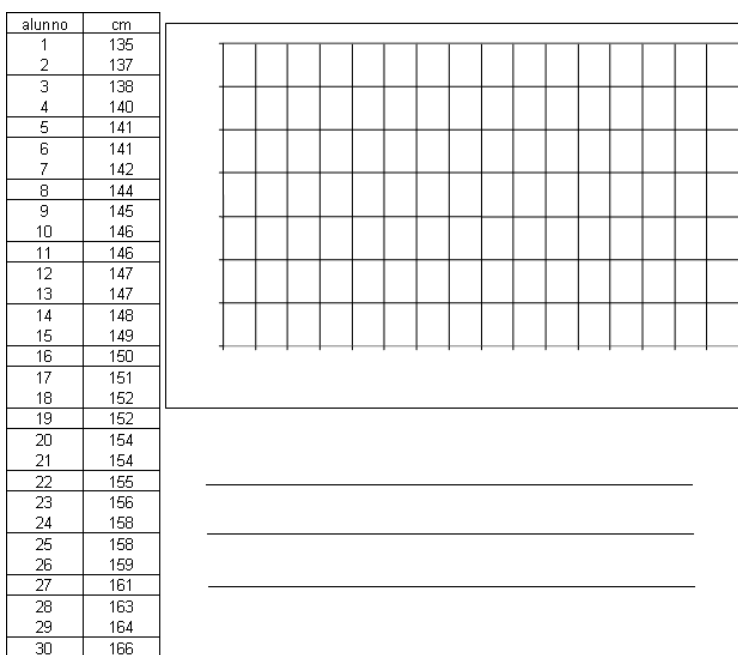


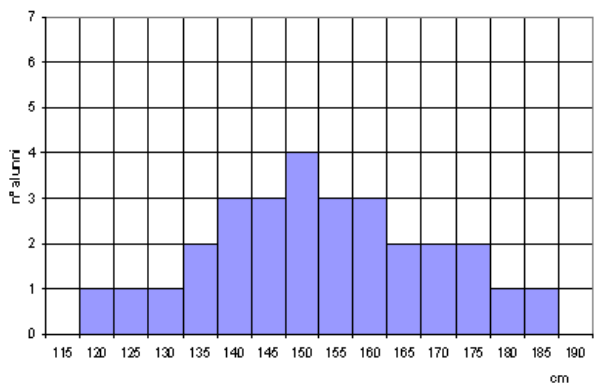
Figura B.1

1.2 Quali informazioni puoi dedurre dal grafico?

.....

1.3 Confronta il grafico precedente con quello qui di seguito riportato. Quali informazioni deduci dal confronto sui due grafici relativi alle altezze di due diversi gruppi di studenti?

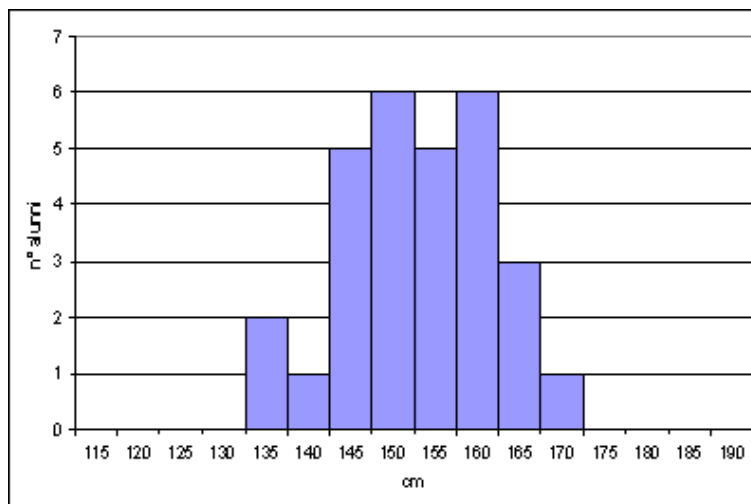
.....



1.4 Che cosa caratterizza la distribuzione delle altezze dei due diversi campioni di studenti?

.....

1.5 Confronta il grafico precedente (B.1) con quello qui di seguito riportato. Quale tra le due distribuzioni mostra una maggiore variabilità? Giustifica la tua risposta.



.....

## II. QUESITO

Di seguito sono riportate le misure sperimentali del periodo di un dato pendolo effettuate in un laboratorio da 20 studenti.

## B. IL QUESTIONARIO

---

2.1 Se vuoi individuare quanti studenti hanno ottenuto un valore vicino a quello fornito dal costruttore, che tipo di rappresentazione dei dati riporteresti in un grafico? Motiva la tua scelta.

Misura n°	T(sec)
1	1,9
2	2,0
3	1,8
4	1,9
5	2,1
6	2,0
7	2,2
8	2,1
9	1,8
10	2,3
11	2,4
12	1,5
13	2,1
14	2,1
15	2,2
16	2,1
17	2,5
18	2,0
19	1,9
20	1,8

2.2 A cosa è dovuta a tuo avviso la variabilità dei dati?

.....  
 .....

2.3 Una classe con studenti più accurati, che tipo di grafico otterrebbe?

.....  
 .....

2.4 Un alunno ha rappresentato i dati delle misure sperimentali nel seguente modo: ha raggruppato i valori del periodo in 5 gruppi, ogni gruppo contenente le misure del pendolo in un dato intervallo corrispondente a 0.2 sec. Quindi ha rappresentato tali intervalli sull'asse delle ascisse e il numero di misure corrispondenti ad ogni intervallo sull'asse delle ordinate. Prova a rappresentare lo stesso grafico

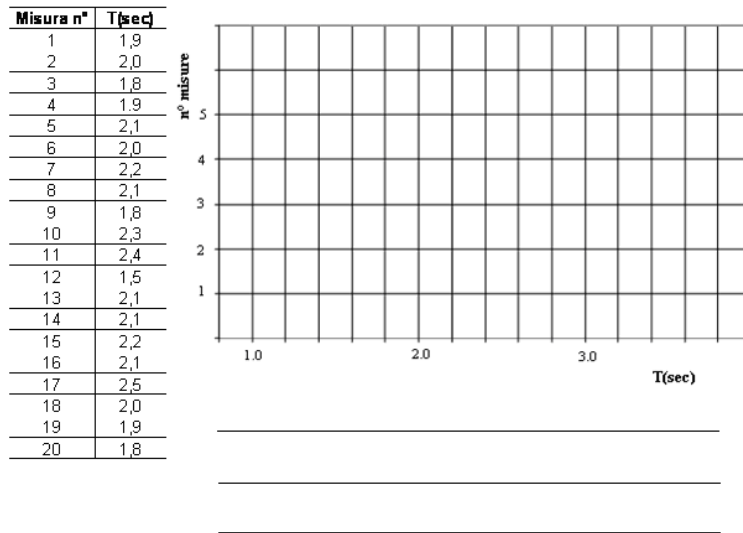
2.5 Confronta tale grafico con quello tracciato precedentemente. Che analogie/differenze rilevi tra i due grafici?

.....  
 .....

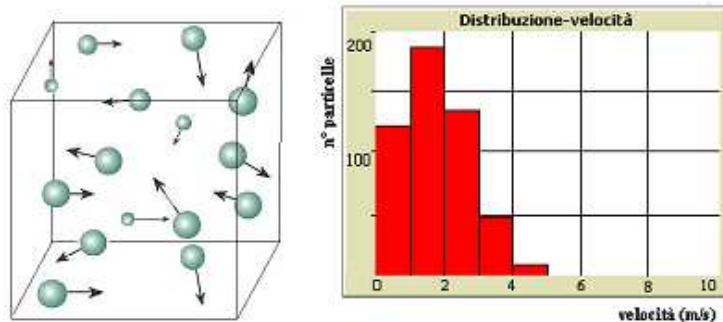
2.6 Se i due grafici sono diversi, pensi ci sia un vantaggio nell'utilizzare una delle due diverse rappresentazioni?

.....  
 .....

### III QUESITO



Nell'immagine seguente è rappresentata una piccola porzione di un modello di gas costituito da 500 particelle che si muovono liberamente all'interno di una scatola. Per ogni particella è rappresentata una freccia la cui dimensione è proporzionale al modulo della velocità della particella e direzione e verso coincidono con quelli del vettore velocità della particella stessa. Il grafico a destra rappresenta la distribuzione di velocità delle particelle di gas.



3.1 Che tipo di informazioni puoi dedurre dall'istogramma delle velocità?

.....  
 .....

3.2 Quali sono i valori della velocità più probabili? E quelli meno probabili?

.....

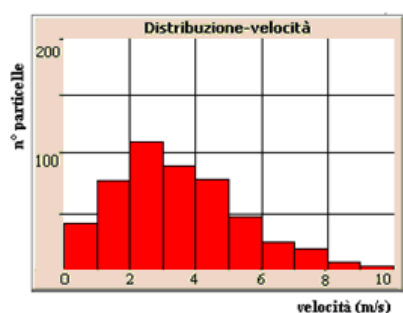
3.3 Qual è la velocità massima delle particelle di gas?

.....

## B. IL QUESTIONARIO

---

3.4 Confronta l'istogramma precedente con quello riportato qui di seguito. Quali informazioni deduci dal confronto sui due grafici relativi allo stesso sistema di particelle in condizioni diverse?




---



---



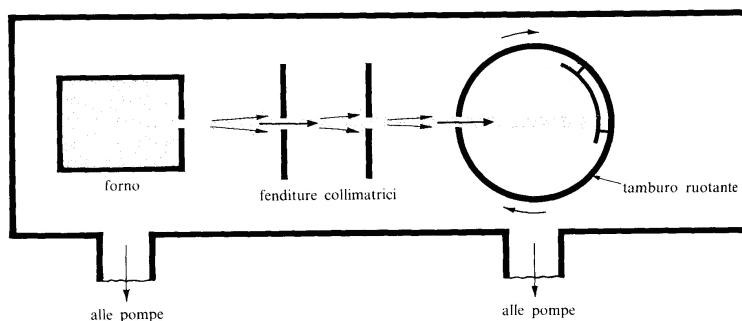
---



---

### IV QUESITO

Un tipico apparato per lo studio delle distribuzioni di velocità è il seguente



In tale apparato un forno emette atomi di argento i quali vengono collimati su uno schermo che può ruotare.

Descrivi cosa succede all'interno dell'apparato

.....

.....

### V QUESITO

Rappresenta graficamente la figura che secondo te si verrà a formare sullo schermo dell'apparato precedente.

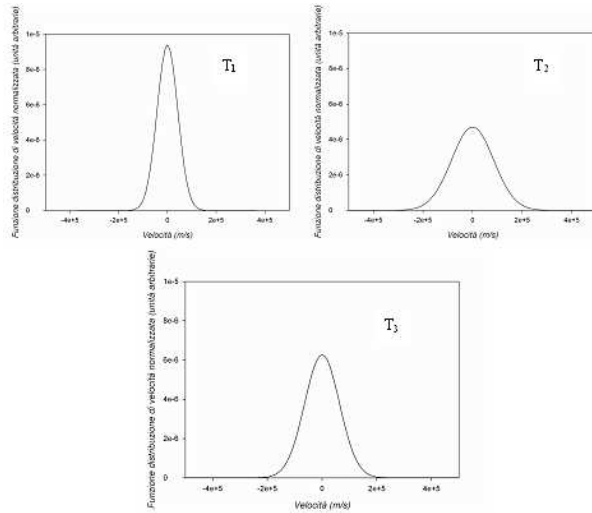
.....

.....

### VI QUESITO

Osserva le seguenti curve, rappresentanti tre distribuzioni di velocità di Maxwell-Boltzmann a tre temperature diverse:





Dire in che relazione stanno le temperature motivando la tua risposta.

.....  
 .....  
 .....

**VII QUESITO**

Nel caso in cui gli elettroni emessi dal catodo e raccolti dall'anodo venissero emessi tutti con uguale velocità, quale sarebbe l'espressione analitica o il grafico della corrente anodica in funzione della tensione?

.....  
 .....



## Appendice C

# Problemi aperti e prospettive di ricerca: la proposta didattica sul Fattore di Boltzmann

Il Fattore di Boltzmann (FdB) è alla base di una innumerevole quantità di fenomeni descrivibili nell'ambito della termodinamica e della meccanica statistica, sia classica che quantistica. Esso regola il comportamento di tutti i sistemi in natura che scambiano energia con il proprio ambiente. Le ragioni del perchè l'espressione abbia questa forma specifica implicano una approfondita analisi matematica, la cui logica risulta essere di difficile comprensione stante la preparazione degli studenti della scuola superiore o del primo livello universitario.

È stato sottolineato che, nell'analisi dei sistemi naturali (Fisici, chimici o biologici) a temperatura costante, il fattore di Boltzmann determina il prezzo che un sistema deve pagare per prendere in prestito energia dall'ambiente con cui interagisce(65). Inoltre, esso collega il mondo meccanico microscopico con il mondo macroscopico termodinamico mettendo in relazione l'energia del sistema delle molecole con la temperatura dell'ambiente.

### C.1 I diversi approcci didattici al Fattore di Boltzmann

#### C.1.1 I libri di testo

I testi universitari utilizzano diversi approcci e argomentazioni per la derivazione del FdB: la maggior parte di essi, con riferimento ai lavori Feynman (66), utilizzano l'atmosfera esponenziale come giustificazione euristica, altri analizzano gli stati quasi-continui del bagno termico(67, 68).

## C. PROBLEMI APERTI E PROSPETTIVE DI RICERCA: LA PROPOSTA DIDATTICA SUL FATTORE DI BOLTZMANN

---

Altri ancora utilizzano il metodo della distribuzione più probabile (69). Tutti questi metodi sono complessi sia da un punto di vista concettuale che matematico, e possono essere considerati idonei per un corso specifico di Meccanica Statistica.

### C.1.2 Le pubblicazioni scientifiche

Nei successivi paragrafi saranno analizzati le più recenti pubblicazioni scientifiche sul tema in oggetto utili per la progettazione di una nuova proposta didattica sul Fattore di Boltzmann.

#### C.1.2.1 Il dibattito su *American Journal of Physics*

Nel numero di febbraio dl 1995 è comparso su *American Journal of Physics*, fra le “questions and answers”, un quesito riguardante proprio il Fattore di Boltzmann: in tale quesito si chiedeva una modalità attraverso cui spiegare l’origine del Fattore di Boltzmann nella maniera più semplice possibile. La richiesta diede vita ad un interessante dibattito che delineò approcci didattici diversi.

In una prima risposta, riportata nel numero di ottobre dello stesso anno, H. S. Zapolsky propone la derivazione data da Maxwell in “*Illustration of the Dynamical Theory of Gases*” per la determinazione dell’omonima distribuzione. Tale metodo, ritenuto poco conosciuto fra i fisici, è molto originale, ma comporta la risoluzione di equazioni differenziali, che lo stesso Maxwell non risolve esplicitamente, e quindi risulta essere ancora complesso dal punto di vista matematico.

Sempre nello stesso numero è riportata una seconda risposta da parte di C. A. Whitney il quale, consapevole delle difficoltà degli studenti legate alle manipolazioni matematiche, propone una procedura euristica che consiste di tre step:

1. Studiare il rimescolamento casuale delle pedine su un tavolo per il gioco della dama
2. Trasformare il problema del lancio di una moneta sbilanciata
3. Derivare il rapporto di popolazione, trovando l’espressione esponenziale del Fattore di Boltzmann

Il primo step riguarda la costruzione di un processo che simula il rimescolamento di energia tra atomi e porta alla distribuzione di Boltzmann. Per far questo egli immagina il tavolo del gioco della dama con  $N$  quadrati, rappresentanti  $N$  atomi in un bagno termico. Egli suppone di sistemare  $M$  pedine in quadrati selezionati casualmente. Un dato quadrato ha  $m$  pedine, e

le pedine rappresentano una certa quantità di energia. Se  $n(m)$  è il numero di quadrati con  $m$  pedine, la conservazione dell'energia comporta,  $E = \sum en(e)$ .

Il rimescolamento della quantità di energia tra gli atomi è simulata in questo modo:

- selezionare un quadrato casualmente attraverso un processo che considera tutti i quadrati con uguale probabilità e chiamare tale quadrato “quadrato donatore”.
- selezionare un quadrato ricevitore allo stesso modo;
- prendere una pedina dal donatore e passarla al ricevitore.

In questo modo è costruito un diagramma della distribuzione delle pedine tra i quadrati, il grafico  $n(e)$ , rappresenta il numero di quadrati con varie quantità di pedine e equivalentemente il numero di atomi con diversi valori di energia.

Considerando una dama molta grande osserviamo che la forma dell'istogramma che si viene a formare è approssimativamente quella esponenziale. I quadrati vuoti o gli atomi nello stato di energia più basso sono sempre i più numerosi e l'istogramma decresce monotonicamente.

Successivamente come secondo passo l'autore propone un metodo simile al primo che egli ritiene più semplice. Il sistema adesso è rappresentato da una serie di lettere  $S$  e  $C$  che possiamo leggere da sinistra verso destra e che partono sempre con  $S$ . Ciascuna  $S$  è seguita da una serie di lettere  $C$  che rappresentano nella modellizzazione precedente, il numero di pedine in un quadrato. Il numero di lettere  $S$  quindi è  $N$ , cioè il numero di quadrati ed il numero di lettere  $C$  è  $E$  cioè l'energia totale. Il problema consiste allora nel sapere in una lunga serie di  $S$  e  $C$ , qual è la probabilità che, selezionata una arbitraria  $S$  segue una certa quantità di lettere  $C$ . Tale metodo consiste, per esempio, nel trovare le probabilità di una certa serie di risultati nel lancio di una moneta. Se indichiamo con le lettere  $S$  e  $C$  le due possibilità possiamo chiederci: data una serie random di  $S$  e  $C$  qual è la probabilità,  $n(e)$ , che ad una  $S$  segua una serie di  $e$   $C$ ? Questa probabilità si dimostra facilmente ed ha la forma del Fattore di Boltzmann.

Nello stesso numero della rivista viene proposta una ulteriore soluzione, da parte di J. H. Hannay che fa ancora uso di considerazioni probabilistiche. Tale soluzione è molto simile alla precedente. Egli considera un gran numero di pali verticali ciascuno contenente  $N$  mattoni identici. I mattoni rappresentano “pezzi di energia” e i pali i sistemi interagenti. Ancora una volta si propone di scambiare in maniera casuale tali mattoni tra un palo e l'altro.

Sempre nello stesso numero viene fornita una ulteriore derivazione che lo stesso autore H. S. Leff propone come argomentazione plausibile ma non come dimostrazione.

## C. PROBLEMI APERTI E PROSPETTIVE DI RICERCA: LA PROPOSTA DIDATTICA SUL FATTORE DI BOLTZMANN

---

Consideriamo un sistema  $S$  con due stati: lo stato 1 con energia  $E_1$  e lo stato 2 con energia  $E_2 > E_1$ . Quando  $S$  scambia energia con il bagno termico a temperatura  $T$ , vi è una probabilità  $P_1$  che  $S$  sia nello stato 1 e una corrispondente probabilità  $P_2 = 1 - P_1$  che si trovi nello stato 2. Ci aspettiamo che queste due probabilità dipendano da  $E_1$ ,  $E_2$ , e  $T$ . Poiché lo zero dell'energia è arbitrario le probabilità  $P_1$  e  $P_2$  devono dipendere soltanto dalla differenza  $\Delta E = E_2 - E_1$ .

Se  $S$  è nello stato 2 può decadere nello stato 1 con un rilascio di energia al bagno termico. Se è nello stato 2 può assorbire energia dal bagno termico passando allo stato 1. Le probabilità  $P_1$  e  $P_2$  possono essere viste come indicatori della frazione di tempo passata nello stato 1 o nello stato 2. Se  $T$  è bassa, ci si aspetta che  $P_1$  possa incrementare. Allo stesso modo per un dato valore di  $T$  e un grande valore di  $\Delta E$  ci aspettiamo un grande valore di  $P_1$  poiché è necessaria una maggiore riserva di energia per portare  $S$  allo stato 2 o alternativamente lo stato  $s$  spende un maggiore frazione di tempo allo stato 1. In linea di principio un incremento di  $T$  può essere compensato da un corrispondente incremento di  $\Delta E$  e viceversa. Questo fatto suggerisce che le probabilità sono funzioni di  $\frac{\Delta E}{T}$ .

Per bassi valori di  $T$ ,  $\frac{\Delta E}{T} \rightarrow \infty$ , la riserva di energia non è sufficiente a far passare il sistema allo stato 2. Allora  $P_1(\infty) = 1$  e  $P_2(\infty) = 0$ . Da un punto di vista matematico è equivalente al limite per  $\Delta E \rightarrow \infty$ .

Nel limite di  $T$  elevato, la riserva può facilmente fornire energia al sistema per far raggiungere lo stato 2, ma la transizione allo stato è presente continuamente. Quindi con queste transizioni,  $S$  non può spendere più tempo nello stato 2 che nello stato 1 cioè  $P_1(0) = P_2(0)$ . Equivalentemente il limite per  $\Delta E \rightarrow 0$  per fissata temperatura.

Evidentemente,  $P_2(\frac{\Delta E}{T})$  è una funzione decrescente di  $\frac{\Delta E}{T}$ , con  $P_2(0) = 1/2$  e  $P_2(\infty) = 0$ , che suggerisce un comportamento esponenziale. La scelta di queste funzioni deve quindi verificare tutte le condizioni precedenti compreso il fatto che lo scambio di  $\Delta E$  con  $-\Delta E$  non deve comportare uno scambio delle due probabilità viste prima e che le stesse probabilità devono essere comprese nell'intervallo  $[0, 1]$ .

Risulta facile verificare che le uniche funzioni, che verificano tutte le condizioni prima descritte sono:

$$P_2\left(\frac{\Delta E}{T}\right) = \frac{e^{(-\frac{b\Delta E}{T})}}{D} \quad (C.1)$$

e

$$P_1\left(\frac{\Delta E}{T}\right) = \frac{1}{1 + e^{(-b\Delta E/T)}} \quad (C.2)$$

Queste espressioni fatte le opportune modifiche rappresentano proprio il Fattore di Boltzmann.

### C.1.2.2 Altre pubblicazioni relative a ricerche sperimentali

Sono stati pubblicati alcuni esperimenti a carattere didattico che hanno come riferimento gli studi teorici fatti da Einstein sulle sospensioni colloidali e l'equilibrio di sedimentazione, e sono stati realizzati sperimentalmente per la prima volta da Perrin. Essi consistono nell'analisi del comportamento di sfere di plastica sospese in un liquido leggermente più denso dell'acqua(70). Viene mostrato che la concentrazione delle sfere ad altezze diverse mostra di obbedire alla distribuzione Boltzmann.

Alcune strumentazioni commerciali(71, 72) illustrano il moto casuale di molecole in agitazione attraverso un sistema di piccole palline. Più recentemente, è stata costruita, una macchina di Boltzmann, “*il simulatore canonico*”, come modello di funzionamento di un sistema quantistico a due livelli in un bagno a temperatura costante(52). Questo esperimento permette di analizzare quantitativamente alcuni principi fondamentali della meccanica statistica, nei sistemi micro-canonici e canonici.

## C.2 Il nostro approccio al Fattore di Boltzmann ( $FdB$ )

La nostra proposta didattica affronta lo studio del  $FdB$  utilizzando esperimenti, simulazioni e una deduzione teorica finalizzate ai seguenti obiettivi:

1. mettere in evidenza che l'oggetto della meccanica statistica è quello di derivare le leggi del comportamento macroscopico dal sottostante comportamento microscopico, fornendo un modello teorico che potrebbe spiegare in che modo tali leggi emergono dalla dinamica microscopica;
2. applicare un'approccio pedagogico fondato sulla visualizzazione e modellazione, dal momento che è ben noto il loro ruolo rilevante nel campo della comprensione della fisica da parte dell'allievo(73).

Sono stati elaborati alcuni esperimenti e simulazioni rivolti direttamente a derivare la sua espressione matematica e illustrare i concetti fondamentali su cui essa si fonda. Gli esperimenti utilizzano apparati facilmente disponibili, e le simulazioni sono sviluppate in ambiente NetLogo che, oltre ad avere una interfaccia user-friendly, permette una facile interazione con l'algoritmo. L'approccio pedagogico fornito dalla presente ricerca consente un supporto per l'introduzione del  $FdB$  sia a livello di scuola secondaria che universitario, per studenti che non possiedono un background in meccanica statistica.

## C. PROBLEMI APERTI E PROSPETTIVE DI RICERCA: LA PROPOSTA DIDATTICA SUL FATTORE DI BOLTZMANN

---

L'obiettivo è quello di evidenziare il ruolo svolto dal  $FdB$  nel descrivere fenomeni diversi attraverso il meccanismo unificante di funzionamento descritto da un sistema a due livelli. Il nostro approccio al  $FdB$ , può essere considerato complementare alla unificazione teorica fatta da Feynman per diversi fenomeni(66), e prende spunto dalla discussione di alcuni risultati sperimentali relativi ad ambiti diversi della fisica (fluidodinamica, reazioni elettriche e chimiche). La descrizione di questi risultati delinea, la dipendenza dalla temperatura di una specifica variabile macroscopica. Segue un modello meccanico rappresentativo di tutti i fenomeni visti, implementato attraverso il software NetLogo ed infine una descrizione matematica semplificata che spiega il comportamento microscopico di questi sistemi.

### C.2.1 Gli esperimenti

Proponiamo quattro esperimenti in cui vengono analizzati rispettivamente la evaporazione di un liquido, il flusso dei liquidi viscosi, la emissione termoionica in un diodo a vuoto e una reazione chimica tra due soluzioni.

#### C.2.1.1 Evaporazione di un liquido

L'evaporazione di un liquido può essere descritta in termini di un sistema a due livelli. Infatti il processo di evaporazione è caratterizzato dalla transizione di molecole dallo stato di liquido a quello di vapore. Ad una data temperatura  $T$ , lo stato di equilibrio fra liquido e vapore è caratterizzato da un flusso netto di molecole tra i due stati pari a zero e da una definita pressione di vapore.

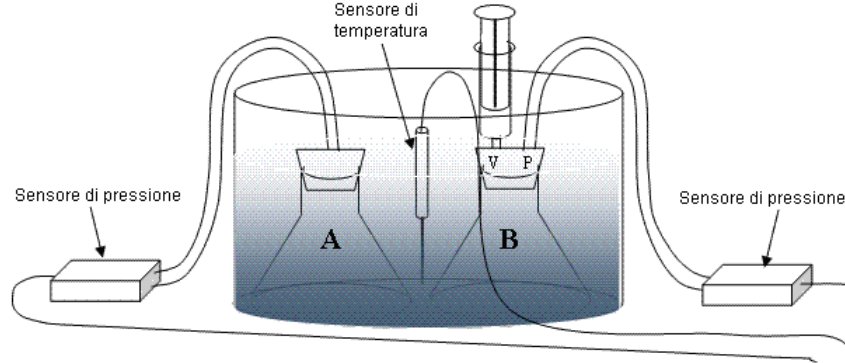
Il nostro esperimento è finalizzato ad ottenere la relazione tra la concentrazione delle molecole di vapore all'equilibrio e la temperatura, utilizzando l'apparato sperimentale mostrato in fig. C.1

Le due beute Erlenmeyer, uguali e sigillate con tappi di gomma, sono posizionate in un bagno d'acqua per la regolazione della temperatura. Le pressioni dei gas (aria) contenuti nelle due beute sono monitorate attraverso i sensori di pressione (inseriti nelle beute attraverso i tappi di gomma), la temperatura è misurata utilizzando un sensore di temperatura a semiconduttore. Attraverso due valvole e una siringa, inserita nel tappo della beuta  $B$ , può essere introdotto un certo volume di liquido nella beuta stessa.

Le condizioni iniziali sono  $P_A = P_B = P_0$  (pressione atmosferica) alla temperatura ambiente  $T_0$ . Quindi, attraverso la siringa, inseriamo un piccolo volume di liquido nella beuta  $B$  e chiudiamo la valvola. Poiché il volume di liquido aggiunto è piccolo comparato con il volume



## C.2 Il nostro approccio al Fattore di Boltzmann ( $FdB$ )



**Figura C.1:** Apparato sperimentale con i sensori di pressione e di temperatura; (A) beuta contenente aria, (B) beuta contenente aria con un piccolo volume di liquido.

della beuta (meno dello 0,5%) possiamo ignorare la differenza di volume occupato dal gas nelle due beute.

Il liquido nella beuta B inizierà ad evaporare fino a quando si stabilisce l'equilibrio fra liquido e vapore. Allora la pressione parziale del vapore,  $P_v$ , può essere ottenuta dalla differenza di pressione fra i gas contenuti nelle due beute.

$$P_v = P_B - P_A \quad (\text{C.3})$$

Nel range di temperatura del nostro esperimento, le densità di vapore sono molto basse(74); conseguentemente, i vapori possono essere approssimati ad un gas ideale. La legge dei gas perfetti, applicata al gas contenuto nelle due beute, sarà

$$P_A(T) = \frac{N_A}{V} kT \quad (\text{C.4})$$

$$P_B(T) = \frac{N_A + N_v(T)}{V} kT \quad (\text{C.5})$$

dove  $N_A$  è il numero di molecole d'aria nella beuta A (uguale al numero di molecole d'aria nella beuta B),  $N_v(T)$  è il numero di molecole di vapore a temperatura  $T$ ,  $V$  è il volume della beuta e  $k$  è la costante di Boltzmann.

Dalle equazioni C.3 - C.5, otteniamo

$$P_v(T) = \frac{N_v(T)}{V} kT \quad (\text{C.6})$$

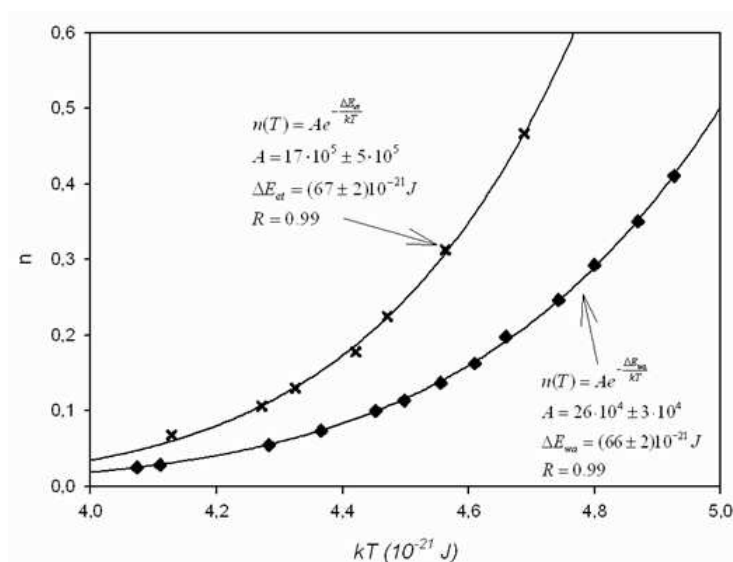
$$\frac{P_v(T)}{P_A(T)} = \frac{N_v(T)}{N_A} = n(T) \quad (\text{C.7})$$

## C. PROBLEMI APERTI E PROSPETTIVE DI RICERCA: LA PROPOSTA DIDATTICA SUL FATTORE DI BOLTZMANN

dove  $n(T)$  rappresenta il rapporto tra il numero di molecole di vapore e il numero di molecole di aria.

Attraverso un lento incremento della temperatura del bagno termico e misurando  $P_A$  e  $P_B$  a diverse temperature, possiamo ottenere il corrispondente numero di molecole di vapore.

L'esperimento è realizzato per due diversi liquidi: acqua ed etanolo. Le misure della pressione di vapore per l'acqua necessitano di una correzione, poiché l'aria contenuta in entrambe le beute non è secca ma contiene diverse molecole di acqua che contribuiscono al numero totale  $N_v(T)$ . Questo valore può essere dedotto dalla umidità relativa del laboratorio e sommarla alle misure di  $P_v(T)$  nell'equazione C.7.



**Figura C.2:** Frazione delle molecole di vapore vs.  $kT$  per l'acqua (diamanti) e per l'etanolo (croci) con le rispettive curve di fitting.

La fig. C.2 mostra i valori di  $n(T)$  (ottenuta dai valori sperimentali di pressione) in funzione dell'energia  $kT$ . Ciascun valore è il valore medio di cinque differenti serie di misure. Gli errori statistici sono più bassi dell' 1%.

Il fitting dei dati è eseguito attraverso l'equazione

$$n(T) = A e^{-\Delta E/kT} \quad (C.8)$$

dove  $A$  e  $\Delta E$  sono i parametri da determinare.  $\Delta E$  può essere interpretato come il valore medio di energia da fornire alle molecole per effettuare la transizione da liquido a vapore.

La fig. C.2 mostra che il  $FdB$  è una buona approssimazione della relazione funzionale evidenziata dagli esperimenti. Attraverso il fitting dei dati sperimentali, otteniamo  $\Delta E_{ac} =$

## C.2 Il nostro approccio al Fattore di Boltzmann (*FdB*)

$(66 \pm 2) \cdot 10^{-21}$  J per l'acqua e  $\Delta E_{et} = (67 \pm 2) \cdot 10^{-21}$  J per l'etanolo (corrispondente rispettivamente a  $(39,7 \pm 1,2)$  kJ mole<sup>-1</sup> e  $(40,3 \pm 1,2)$  kJ mole<sup>-1</sup>). Questi valori sono dello stesso ordine di grandezza delle energie di legame intermolecolare dei liquidi caratterizzati dai forti legami ad idrogeno, come l'acqua e l'etanolo, e in buon accordo con i valori tabulati per entrambi i liquidi ( $40,6$  kJ mole<sup>-1</sup> per l'acqua e  $39,4$  kJ mole<sup>-1</sup> per l'etanolo).

Come mostra l'esperimento appena descritto, l'evaporazione è un esempio di processo di attivazione in cui una piccola frazione di particelle acquista molto più energia rispetto al valore medio. Infatti, nel range di temperature dei nostri esperimenti, il rapporto  $\frac{kT}{E_{ac}}$  varia nel range  $0,060 - 0,075$  per l'acqua e  $(0,059 - 0,074)$  per l'etanolo). Nell'ambito della termodinamica, la pressione del vapore all'equilibrio  $P_v$ , ottenuta integrando l'equazione di Clausius-Clapeyron, può essere espressa nella forma

$$P_v(T) = C e^{-\frac{\lambda}{RT}} \quad (\text{C.9})$$

dove  $C$  è la costante di integrazione,  $\lambda$  è il calore latente per mole (considerato costante nel range di temperature analizzate) e  $R$  è la costante dei gas ideali. Come conseguenza, l'equazione C.7 potrebbe essere espressa nella forma

$$\frac{P_v(T)}{P_A(t)} = n(T) = \frac{C e^{-\frac{\lambda}{RT}}}{\frac{N_{mol}RT}{V_A}} \propto \frac{C e^{-\frac{\lambda}{RT}}}{T} \quad (\text{C.10})$$

dove  $N_{mol}$  è il numero di molecole di gas nella beuta  $A$  mentre  $C$  è una costante. La variazione rispetto al termine  $T^{-1}$  è così piccola che, ai fini della nostra proposta didattica e nel range delle temperature analizzate, possiamo concludere che l'espressione esponenziale C.10 fornisce una buona descrizione dei nostri dati sperimentali.

### C.2.1.2 Flusso di un liquido viscoso

La viscosità di un fluido è definita come la resistenza di taglio di un fluido o di flusso ed è una misura della proprietà adesivo/coesivo di attrito del fluido. In termini macroscopici, questa resistenza può essere attribuita all'attrito esercitato quando i livelli di fluidi tentano di scivolare tra loro.

La dipendenza della viscosità di un materiale o in una soluzione dalla temperatura non è semplice perché si verificano molti fattori che ne determinano il suo valore, e la sua interpretazione microscopica è stata oggetto di molti studi di ricerca fin dai primi decenni del XX secolo. I pionieristici studi di Eyring(75) descrivono la viscosità del flusso come un processo in cui, ad

## C. PROBLEMI APERTI E PROSPETTIVE DI RICERCA: LA PROPOSTA DIDATTICA SUL FATTORE DI BOLTZMANN

---

una data temperatura  $T$ , gli strati di molecole scorrono uno sull'altro. In particolare, una molecola in uno strato si muove rispetto alle molecole più prossime quando questa occasionalmente acquista una “energia di attivazione”, cioè l'energia necessaria per “scivolare” oltre la barriera di potenziale derivante dalla interazione con i suoi prossimi vicini.

Una semplice spiegazione della viscosità di un liquido è stata approfondita nella *Absolute Rate Theory*(76), dove Eyring ed alcuni collaboratori hanno proposto l'equazione  $\eta = Ae^{E_{vis}/kT}$ , valida per i liquidi newtoniani, dove  $\eta$  è la viscosità del liquido,  $A$  è una costante (dipendente da alcune proprietà geometriche delle molecole di liquido e da altri parametri)  $E_{vis}$  è l'energia di attivazione, cioè il valore della barriera di potenziale che la molecola deve vincere per scorrere, e  $k$  è la costante di Boltzmann. La Absolute Rate Theory di Eyring è stata usata per costruire il modello che con successo spiega la viscosità dei liquidi newtoniani, anche in regime di alta pressione(77). Per spiegare la dipendenza dalla temperatura della viscosità in sistemi formati da liquidi complessi, come materiale fuso o vetro, sono state sviluppate diverse teorie, come quella di Adam e Gibbs(78, 79, 80), che si riferisce alla viscosità attraverso la entropia configurazionale di sistemi a singolo elemento, riorganizzate in configurazioni alternative a seconda delle fluttuazioni di entalpia. Una espressione di  $\eta(T)$  è determinata in modo molto simile(81) a quella proposta da Eyring, dove  $E_{vis}$  è la barriera di energia che ostacola il riassetto di un singolo elemento (per esempio un segmento monomero in un vetro polimerico) e  $A$  dipende dal numero minimo di elementi che devono simultaneamente sovrastare la loro individuale barriera di energia.

Al fine di rendere evidente la presenza del  $FdB$  nel processo di viscosità di un fluido, è conveniente studiare la dipendenza dalla temperatura del reciproco della viscosità,  $1/\eta$ , (cioè la fluidità,  $F$ ), che è

$$F = Ce^{-\frac{E_{vis}}{kT}}. \quad (C.11)$$

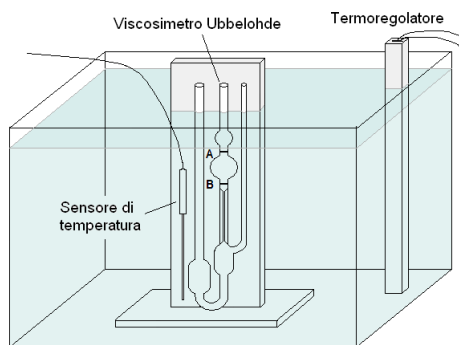
La fluidità può essere misurata studiando la resistenza che un fluido ha quando scorre sottoposto alla forza di gravità. Questo viene fatto utilizzando dispositivi chiamati viscosimetri idrostatici che si basano sulla pressione generata dalla massa di fluido per fornire forza motrice per il flusso del liquido attraverso un tubo capillare. Per le nostre misure abbiamo usato un viscosimetro idrostatico di tipo Ubbelohde, composto da tre tubi di vetro in cui quello centrale contiene il capillare<sup>1</sup>. Usando questo tipo di viscosimetro la  $F$  può essere facilmente misurata attraverso la misura del tempo,  $t$ , per un dato volume di fluido di densità  $\rho$ , che impiega a

---

<sup>1</sup>Per una descrizione dettagliata del viscosimetro Ubbelohde vedere, ad esempio, la guida sul sito della Louisiana State University: <http://macro.lsu.edu/howto/IntrinsicVisc.doc>

## C.2 Il nostro approccio al Fattore di Boltzmann ( $FdB$ )

fluire attraverso il tubo capillare calibrato, di lunghezza  $l$  e di raggio  $R$ . In realtà, applicando l'equazione generalizzata di Bernoulli, nel caso di regime costante, la viscosità uniforme di un liquido sotto la gravità(82) risulta  $F = \frac{8l}{\rho g R^2} \frac{1}{t}$ , dove  $g$  è l'accelerazione di gravità. La figura C.3 mostra l'apparato sperimentale. Il viscosimetro è fissato ad una bacchetta rigida e piazzata in uno spazioso contenitore di vetro pieno di acqua, la cui temperatura può essere variata attraverso un termoregolatore. Un sensore di temperatura a semiconduttore monitora la temperatura dell'acqua nei pressi del viscosimetro. Le misure consistono nella valutazione del tempo che il fluido impiega a scorrere tra due riferimenti,  $A$  e  $B$ , piazzati prima del capillare, attraverso un cronografo digitale dotato di una sensibilità pari a  $0,01s$ . Il costruttore del viscosimetro provvede a fornire una costante di calibrazione, basata sulla relazione  $F(t)$  prima riportata, che permette di ottenere, per un dato liquido, il valore della fluidità alla temperatura  $T$  attraverso un semplice prodotto della costante per il valore del tempo misurato<sup>1</sup>.



**Figura C.3:** Apparato sperimentale per le misure di fluidità.

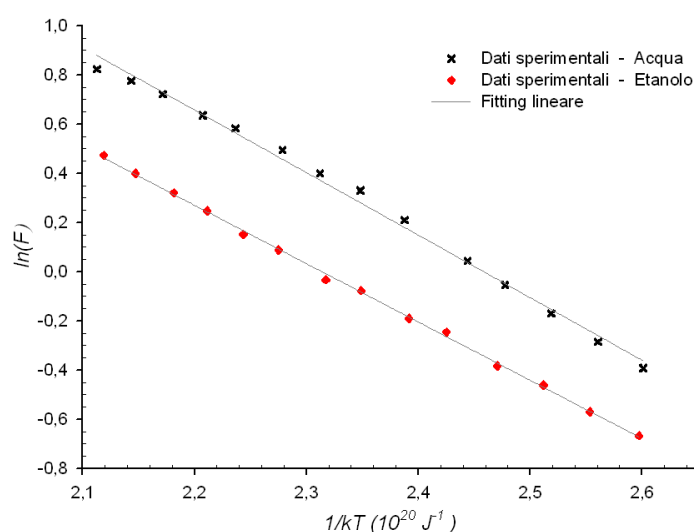
Nella presente proposta abbiamo studiato la fluidità dell'acqua distillata e dell'alcool etilico puro al 96% (etanolo)(83). Tutte le misure sono state realizzate dopo che il bagno termico ha raggiunto una data temperatura e il liquido è stato tenuto nel viscosimetro per almeno cinque minuti, così da raggiungere l'equilibrio termico. Le misure sono state ripetute diverse volte e per ciascuna temperatura è stato considerato il valore medio. I tempi tipici ottenuti per l'acqua e l'etanolo a  $T = 303\text{ K}$  sono, rispettivamente,  $442\text{ s}$  e  $434\text{ s}$ . A  $T = 343\text{ K}$  questi si riducono, rispettivamente, a  $241\text{ s}$  e  $205\text{ s}$ . La figura C.4 mostra i nostri risultati, riportati come logaritmo naturale dei valori numerici di  $F$  ( $\text{mPoise}^{-1}$ ) vs.  $1/kT$ , per entrambi i campioni acqua e etanolo, e le curve di migliore fitting dei dati sperimentali. La dipendenza lineare del logaritmo naturale della fluidità come una funzione di  $1/kT$  è rivelata per entrambe le sostanze fluide, dando

<sup>1</sup>Il viscosimetro Ubbelohde fornisce le misure della viscosità cinematica. Il costruttore fornisce i diversi valori della costante di calibrazione.

## C. PROBLEMI APERTI E PROSPETTIVE DI RICERCA: LA PROPOSTA DIDATTICA SUL FATTORE DI BOLTZMANN

---

l'evidenza della dipendenza esponenziale di  $F$  rispetto a  $1/kT$ , nel nostro range di temperature. Questo è in accordo con l'eq. C.11, e dalla pendenza del fitting lineare possiamo stimare il valore dell'energia di attivazione,  $E_{vis}$ , per i nostri campioni di acqua e etanolo. Questi sono rispettivamente per acqua e etanolo  $E_{vis-w} = (2,54 \pm 0,07) \cdot 10^{-20} \text{J}$  ( $0,159 \pm 0,004 \text{ eV}$ ) per molecola e  $E_{vis-e} = (2,37 \pm 0,04) \cdot 10^{-20} \text{J}$  ( $0,148 \pm 0,002 \text{ eV}$ ) per molecola.



**Figura C.4:** Logaritmo naturale dei valori numerici di fluidità (in  $\text{mPoise}^{-1}$ ) vs.  $1/kT$  in acqua ed etanolo e curve di fitting ottimo.

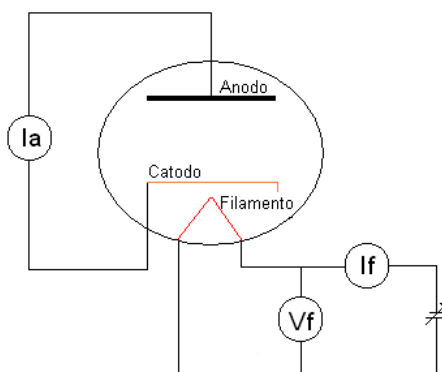
Questi due valori sono confrontabili e sono dello stesso ordine di grandezza della energia di legame intermolecolare di liquidi caratterizzati dal legame ad idrogeno, come acqua e etanolo(84). Il diverso valore di fluidità trovato per i campioni di acqua ed etanolo possono essere addebitati alle diverse proprietà geometriche delle molecole che compongono queste due sostanze. I nostri risultati per  $E_{vis}$  sono in accordo con il ben conosciuto risultato(85, 86), che stima il valore dell'energia di vaporizzazione  $E_{vap}$  nel range  $1/3 - 1/4$  (liquido composto di piccole molecole dove l'unità di flusso viscoso è la stessa molecola).  $E_{vap}$  misura  $7,31 \cdot 10^{-20} \text{J}$  e  $7,03 \cdot 10^{-20} \text{J}$  per molecola, rispettivamente per acqua e etanolo(87). Inoltre si riscontra un ottimo accordo anche con i recenti risultati di simulazioni basate sul modello dell'interazione fra molecole in acqua e in etanolo(88).

### C.2.1.3 Emissione termionica

È ben noto che un metallo riscaldato ad una data temperatura emette elettroni. Questo effetto, conosciuto come emissione termoionica, è descritto dall'equazione di Richardson-Dushman(89, 90) che fornisce la corrente anodica  $I$ , in funzione della temperatura  $T$  in un tubo a vuoto. Di seguito viene proposto un esperimento, che fa uso di due differenti diodi:

1. diodo a riscaldamento indiretto  $EZ81$ <sup>1</sup> composto da un anodo cilindrico contenente un catodo concentrico rivestito in ossido riscaldato da un filamento in tungsteno posto assialmente al catodo;
2. diodo a riscaldamento diretto  $FP400$ <sup>2</sup>, formato da un anodo cilindrico all'interno del quale è posto un filamento in tungsteno assiale all'anodo, che è anche il catodo del diodo.

In questo modo si ha la possibilità di evidenziare le differenti barriere di potenziale per l'estrazione degli elettroni dal metallo che dipendono direttamente dal materiale di cui è composto il catodo. La figura C.5 rappresenta il diagramma circuitale. Un generatore d.c., fornisce una tensione regolabile 1) da 3,0 a 6,0 V, 2) da 1,0 a 4,0 V per i diodi  $EZ81$  e  $FP400$ , rispettivamente. Due multimetri digitali sono usati per misurare la corrente e la tensione di filamento.



**Figura C.5:** Diagramma circuitale con il diodo  $EZ81$ . Nel caso del diodo  $FP400$ , il catodo coincide con il filamento.

Se l'anodo e il catodo sono connessi direttamente (vedi fig. C.5), tutti gli elettroni emessi dal catodo raggiungono liberamente l'anodo, indipendentemente dalla loro energia cinetica, e la

<sup>1</sup> Philips EZ81 Data handbook: <http://tds1.duncanamps.com/show.php?des=EZ81>

<sup>2</sup> General Electric FP400 Data handbook:

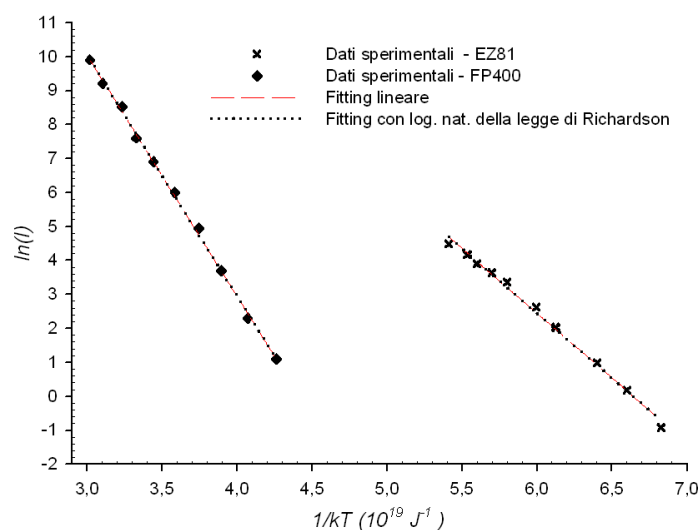
<http://www.mif.pg.gda.pl/homepages/frank/sheets/141/f/FP400.pdf>

## C. PROBLEMI APERTI E PROSPETTIVE DI RICERCA: LA PROPOSTA DIDATTICA SUL FATTORE DI BOLTZMANN

corrente anodica può essere misurata attraverso un altro multimetro digitale. Questa corrente è descritta dall'equazione di Richardson-Dushman(91, 92)

$$I_A = AT^2 e^{-\frac{E_e}{kT}} \quad (C.12)$$

dove  $A$  è una costante fortemente dipendente dal materiale e dalla forma del catodo,  $E_e$  è il lavoro di estrazione dl catodo e  $k$  è la costante di Boltzmann. La temperatura del catodo è spesso valutata attraverso la legge di Stefan-Boltzmann(57). Per le nostre misure usiamo invece una legge fenomenologica(93) relativa alla temperatura di filamento attraverso il rapporto tra una data resistenza,  $R$ , e il valore della resistenza  $R_{env}$  a 300 K.<sup>1</sup> La figura C.6 mostra il logaritmo naturale dei valori della corrente anodica,  $I$  (in  $\mu\text{A}$ ), come funzione di  $1/kT$  per i diodi  $EZ81$  e  $FP400$ . Sono stati eseguiti i fitting dei dati sperimentali attraverso il logaritmo naturale dell'eq. C.12, così come il logaritmo naturale della seguente espressione più semplice, contiene solo il fattore di Boltzmann:



**Figura C.6:** Logaritmo naturale dei valori numerici della corrente di anodo (in  $\mu\text{A}$ ) vs.  $1/kT$  per i diodi  $EZ81$  and  $FP400$  e le curve di fitting in accordo con le eqs. C.12 e C.13.

$$I = C e^{-\frac{E_e}{kT}} \quad (C.13)$$

Il confronto dei due fitting riportati in fig. C.6 mostra che nel range delle temperature analizzate è possibile trascurare nell'eq. C.12 il termine  $T^2$  rispetto al fattore esponenziale. Ai fini

<sup>1</sup>Quando è usato il diodo  $EZ81$   $R_{env}$  può essere misurata direttamente con un ohmetro. Per il diodo  $FP400$   $R_{env}$  è calcolata attraverso i parametri geometrici del filamento.



## C.2 Il nostro approccio al Fattore di Boltzmann (*FdB*)

della nostra proposta a carattere didattico, possiamo concludere che l'espressione esponenziale C.13 fornisce una buona descrizione dei nostri dati sperimentali

Per il diodo *FP400* otteniamo un valore del lavoro di estrazione  $E_e = (7,1 \pm 0,2) \cdot 10^{-19} \text{J}$  ( $4,43 \pm 0,12 \text{ eV}$ ) per elettrone in buon accordo con i valori tabulati per catodi in tungsteno riscaldati direttamente(61). I valori ottenuti di  $E_e = (3,8 \pm 0,2) \cdot 10^{-19} \text{J}$  ( $2,37 \pm 0,12 \text{ eV}$ ) per elettrone nel diodo *EZ81* sono più alti dei tipici valori del lavoro di estrazione trovati in letteratura per diodi con catodo ricoperto da uno strato di ossido (vedi ref.(57) e Ref. (61), p. 44). Questo può essere spiegato considerando che nell'eq. C.13 la  $T$  dovrebbe essere la temperatura del catodo, mentre usiamo quella del filamento. Questa temperatura è più alta rispetto a quella del catodo nel caso di riscaldamento indiretto come il diodo *EZ81* e questo comporta una sovrastima di  $E_e$ .

### C.2.1.4 La reazione chimica

Un semplice modello della reazione chimica descrive questo processo come il risultato di collisioni tra le molecole reagenti. In particolare, una reazione chimica tra due molecole reagenti  $a$  e  $b$  si può sviluppare soltanto quando queste collidono e allo stesso tempo soddisfano le due seguenti condizioni:

- $a$  e  $b$  devono possedere una sufficiente energia media (fattore energia);
- $a$  e  $b$  devono collidere secondo un appropriato angolo (fattore sterico).

Trascurando, per ragioni di semplicità, il fattore sterico, e considerando costante la concentrazione dei reagenti, la velocità di reazione,  $u$ , dipende soltanto dalla frazione delle effettive collisioni per unità di tempo delle molecole reagenti aventi energia cinetica maggiore dell'energia di attivazione  $E_a$ .

Questa è espressa dalla equazione di Arrhenius, che valuta la dipendenza della velocità di reazione (spesso conosciuta *reaction rate constant* dalla temperatura:

$$u = Ae^{-\frac{E_a}{kT}} \quad (\text{C.14})$$

dove  $A$  è la costante di reazione specifica<sup>1</sup>(94), che si misura in  $\text{s}^{-1}$  e  $k$  è la costante di Boltzmann.

Per le nostre misure scegliamo un esperimento chimico classico, conosciuto come “formaldehyde clock reaction”(95). Questo spesso è usato nella didattica delle scienze per mostrare

---

<sup>1</sup>In accordo con la più complessa Transition State Theory,  $A$  dipende linearmente da  $T$ . Usiamo la semplice espressione di Arrhenius, con  $A$  costante.

## C. PROBLEMI APERTI E PROSPETTIVE DI RICERCA: LA PROPOSTA DIDATTICA SUL FATTORE DI BOLTZMANN

---

la cinetica chimica in azione e consiste nel mescolare due soluzioni (soluzione *A*, contenente ioni solfito ( $SO_3^{2-}$ ) e ioni bisolfito ( $HSO_3^-$ ) in acqua, e soluzione *B*, contenente formaldeide ( $HCHO$ ) e fenolftalina ( $C_{20}H_{14}O_4$ ), in acqua). La prima di queste reazioni non è visibile, ma dopo un breve intervallo di tempo, il liquido cambia improvvisamente in una tonalità di rosa, mostrando che è avvenuta una reazione durante un certo intervallo di tempo che può essere facilmente misurato.

La dipendenza dalla temperatura della velocità di reazione della formaldeide è usualmente stimata studiando l'intervallo di tempo,  $\delta t$ , trascorso tra la miscelazione della soluzione e l'istante in cui il composto diventa rosa. In breve, durante il tempo  $\delta t$ , vengono prodotti gli ioni idrossido ( $OH^-$ ) che reagiscono rapidamente con gli ioni bisolfito, mantenendo il *pH* della miscela praticamente costante. Dopo  $\delta t$ , gli ioni bisolfito sono esausti e il miscuglio improvvisamente diventa basico. In seguito alle reazioni si osserva un forte aumento del valore del *pH* della miscela (96), e la miscela cambia colore, a causa della presenza di fenolftalina. La velocità di reazione è spesso studiata analizzando il *pH* del miscuglio durante e dopo  $\Delta t$ (97, 98), a temperature differenti. Un altro metodo, più semplice, consiste nel misurare direttamente  $\delta t$  con un cronografo, partendo dall'istante in cui la miscela cambia colore. Al fine di minimizzare le incertezze presenti in quest'ultimo metodo<sup>1</sup>, usiamo una tecnica parzialmente modificata e rileviamo l'istante in cui la fenolftalina comincia a diventare rosa studiando la luce assorbita dalla miscela con uno spettrometro collegato ad un computer. L'apparato sperimentale è mostrato in fig. C.7 e consiste di un contenitore di vetro cilindrico, contenente 100 ml di soluzione *A*, posta in un contenitore di vetro più grande riempito di acqua, in cui la temperatura può essere controllata attraverso un termoregolatore. Una fibra ottica connessa allo spettrometro è posta dentro il cilindro, assieme al sensore di temperatura a semiconduttore che monitora la temperatura della soluzione. Una sorgente di luce bianca è posta vicino al contenitore, come mostrato in fig. C.7. La soluzione *B*, 100 ml, è posta in un altro cilindro, dove può reagire in equilibrio con il bagno termico ad una certa temperatura. Attraverso lo spettrometro, possiamo studiare l'assorbanza della luce della miscela dal momento in cui la soluzione *B* è miscelata alla soluzione *A*.

Al fine di determinare l'esatta lunghezza d'onda della luce per le misure di assorbanza, per prima cosa studiamo l'assorbanza della soluzione *A* & *B* come una funzione della lunghezza d'onda della luce, a una data temperatura. I nostri risultati sono mostrati rispettivamente in

---

<sup>1</sup>La principale fonte di incertezza risiede nella necessità di visualizzare l'istante esatto in cui la soluzione cambia colore

## C.2 Il nostro approccio al Fattore di Boltzmann ( $FdB$ )

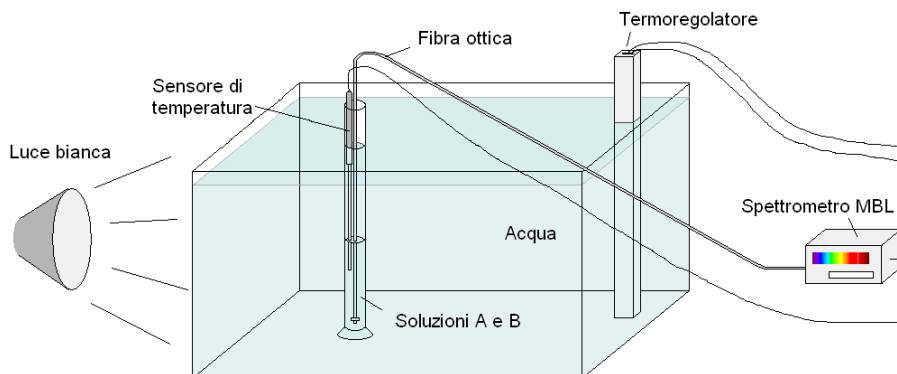


Figura C.7: L'apparato sperimentale per la reazione a tempo della formaldeide.

figs. C.8a e C.8b, e riportano un esempio di spettro di assorbanza misurato durante la reazione e dopo che questa finisce (i.e., quando la miscela è diventata rosa).

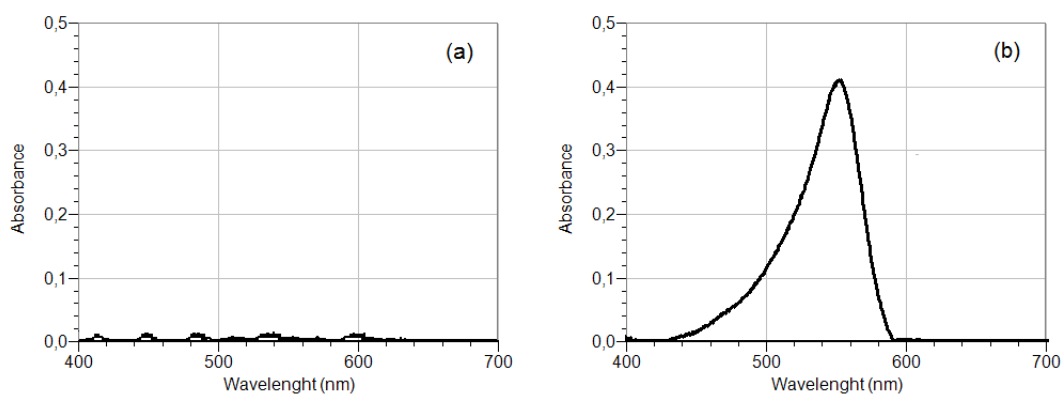


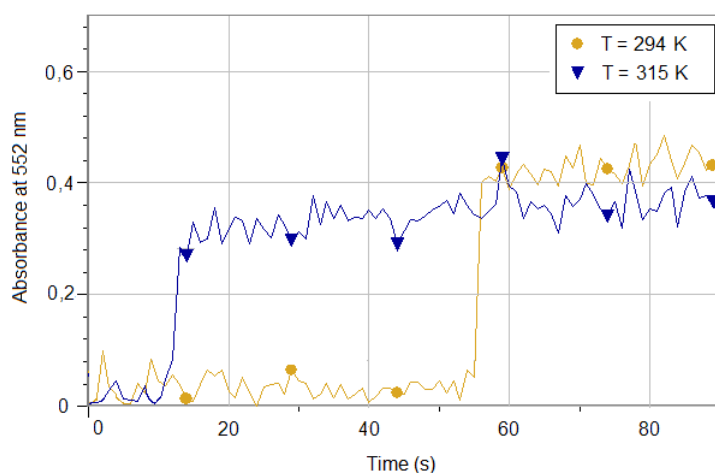
Figura C.8: Spettro di assorbanza della soluzione A&B (a  $T = 294$  K) prima (a) e dopo (b) che la reazione chimica si è conclusa. Il picco di assorbanza a lunghezza d'onda 552,4 nm.

La figura C.8 mostra che lo spettro è quasi piatto durante lo sviluppo della reazione (i.e. non vi è luce assorbita), mentre la fig. C.8b mostra un pronunciato picco di assorbanza intorno a 552 nm quando la reazione si è conclusa e la miscela è diventata color rosa. Le misure di assorbanza come funzione della lunghezza d'onda sono ripetute diverse volte e a differenti temperature. Non sono trovate apprezzabili differenze della lunghezza d'onda di picco rispetto a quella riportata precedentemente. Monitoriamo quindi la velocità di reazione della formaldeide studiando l'assorbanza della soluzione A & B a 552 nm come una funzione del tempo. A ciascuno valore della temperatura, l'esatta durata della reazione è valutata prendendo l'intervallo di tempo tra  $t = 0$  (i.e. quando la soluzione B è posta nella soluzione A e la raccolta

## C. PROBLEMI APERTI E PROSPETTIVE DI RICERCA: LA PROPOSTA DIDATTICA SUL FATTORE DI BOLTZMANN

---

di dati inizia) e l'istante nel quale si ha un rapido incremento della assorbanza a 552 nm rivelato dal sensore, segnalando il momento in cui la soluzione delle due miscela inizia a virare sul rosa. La figura C.9 mostra i risultati ottenuti a due differenti temperature. Dai grafici è evidente che a 294 K la reazione ha una durata maggiore rispetto a quando vengono utilizzate temperature più alte (315 K).



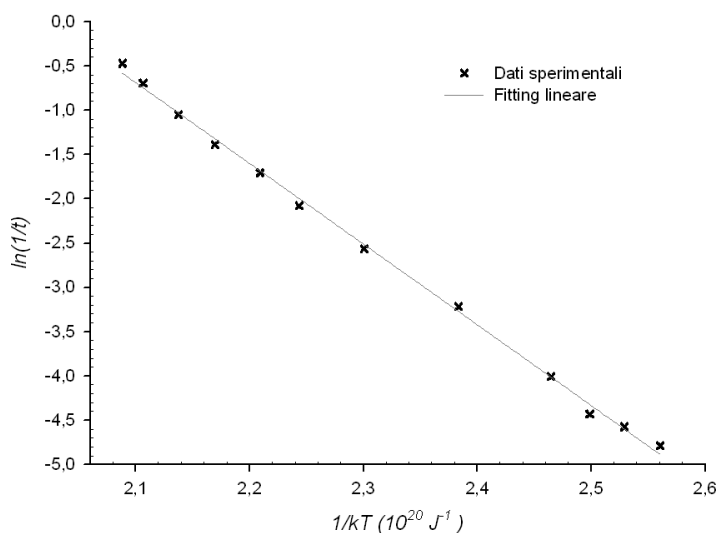
**Figura C.9:** Assorbanza della soluzione A&B a 552 nm vs. il tempo a due diversi valori di temperatura.

Ciascuna misura ad una data temperatura è ripetuta diverse volte e d è preso in considerazione il valore medio. La figura C.10 riporta il logaritmo naturale dei valori numerici del reciproco degli intervalli di tempo misurati ( $s^{-1}$ ) (che sono proporzionali alla velocità di reazione) come funzione di  $1/kT$  per il range di temperature (282 K - 346 K) studiato. Il fitting dei dati è realizzato attraverso una funzione lineare

I nostri risultati sperimentali evidenziano, rispetto al reciproco della temperatura, una dipendenza esponenziale della velocità di reazione in accordo con l'equazione di Arrhenius C.14. I risultati del fitting, mostrano un'energia di attivazione della reazione a tempo della formaldeide pari a  $E_a = (9,1 \pm 0,2) \cdot 10^{-20} J$  ( $0,568 \pm 0,012$  eV), per molecola in ottimo accordo con i valori riportati in letteratura (vedi ref. (96)).

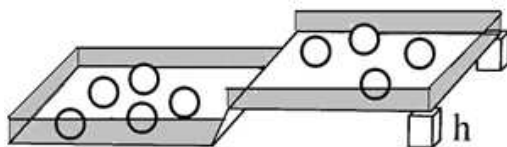
### C.2.2 Un modello meccanico e la sua la simulazione su NeTLogo

Al fine di sviluppare un modello in grado di spiegare il comportamento delle molecole/elettroni degli esperimenti riportati e per comprendere il ruolo dell'energia termica in riferimento ai processi analizzati, è stato sviluppato un modello meccanico di un sistema a due



**Figura C.10:** Logaritmo naturale dei valori numerici del reciproco degli intervalli di tempo misurati (in  $s^{-1}$ ) vs.  $1/kT$ , e fitting.

livelli ed è stato implementato attraverso una simulazione. Esso fornisce una chiara visione delle dinamiche di un sistema meccanico a due livelli e lavora per analogia rispetto agli esperimenti eseguiti. Il modello del sistema è costituito da una scatola contenente alcune piccole sfere rigide libere di muoversi (vedi fig. C.11). L'attrito dell'intero sistema è trascurabile e le sfere possono interagire tra loro e con le pareti della scatola attraverso urti perfettamente elastici. Il box è composto da due parti uguali a diversi livelli, collegati attraverso un piano inclinato. Ogni sfera di massa  $m$  è libera di passare da un livello ad un altro se la sua energia cinetica è sufficiente a fornire la necessaria energia potenziale  $mgh$ , dove  $h$  è il dislivello tra i due piani.

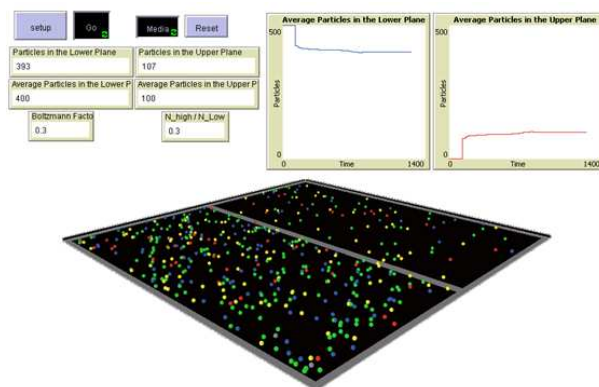


**Figura C.11:** Modello meccanico di un sistema a due livelli

L'implementazione del modello considera  $N$  sfere distribuite casualmente sul piano ed aventi velocità iniziali uguali in modulo e con direzioni orizzontali casuali. Il moto delle sfere è analizzato attraverso semplici metodi di dinamica molecolare per la risoluzione numerica delle equazioni del moto. Dopo ogni urto tra le sfere, vengono calcolati i nuovi valori di velocità

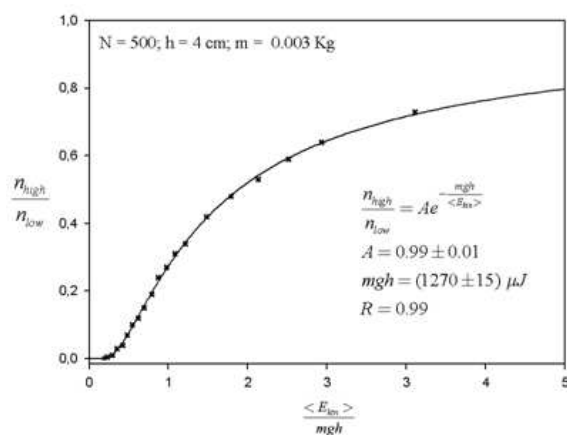
## C. PROBLEMI APERTI E PROSPETTIVE DI RICERCA: LA PROPOSTA DIDATTICA SUL FATTORE DI BOLTZMANN

di ciascuna sfera applicando le leggi di conservazione dell'energia e della quantità di moto. Il programma memorizza il numero di particelle per ogni livello in funzione del tempo. La figura



**Figura C.12:** Interfaccia su NetLogo della simulazione del sistema a due livelli

C.12) mostra l'interfaccia del software di simulazione implementata utilizzando l'ambiente NetLogo <sup>1</sup>. Con tale software possono essere effettuati diversi esperimenti variando i valori di  $h$ , il numero delle sfere o la loro velocità iniziale (e di conseguenza l'energia cinetica media).



**Figura C.13:** I Risultati della simulazione: rapporto di popolazione,  $n_{high}/n_{low}$  in funzione del rapporto  $\langle E_{kin} \rangle / mgh$ .

Alcuni risultati, ottenuti variando l'energia cinetica media per particella  $\langle E_{cin} \rangle$ , sono riportati nelle figure C.13) e C.14). Le simulazioni sono state eseguite con  $N = 500$  sfere rigide con energia cinetica media per particella nell'intervallo  $0 < E_{cin} < 4mgh$ . Per tutte le simulazioni, il programma è stato eseguito fino a quando le oscillazioni del rapporto fra le

<sup>1</sup><http://ccl.northwestern.edu/netlogo/>

due popolazioni,  $n_{high}/n_{low}$ , erano quasi costanti. Come mostrato nelle figure C.13) e C.14),

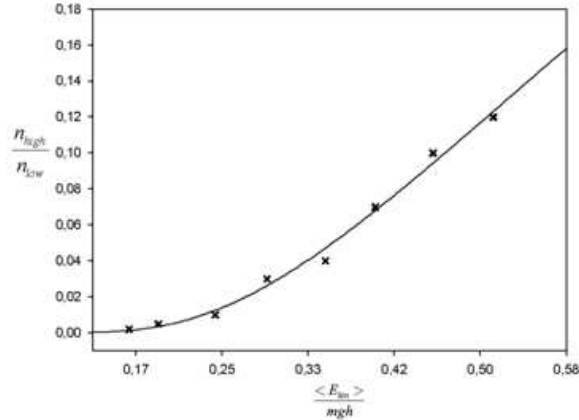


Figura C.14: Ingradimento della prima parte della fig. C.13

è evidente la dipendenza dal fattore di Boltzmann del rapporto  $n_{high}/n_{low}$  così come il suo significato fisico. Il rapporto  $n_{high}/n_{low}$  varia da 0 a 1 in funzione del rapporto  $\langle E_{cin} \rangle / mgh$ : ovvero quando questo rapporto è alto ( $h$  bassa o ad alta energia cinetica), le particelle non “vedono” il cambiamento di livello di energia, per bassi valori del rapporto  $\langle E_{cin} \rangle / mgh$  ( $h$  alta o bassa energia cinetica), il rapporto fra le popolazioni aumenta ad un tasso più elevato. Questo è il caso evidenziato nei nostri esperimenti.

### C.2.3 Una deduzione teorica

Una spiegazione dei risultati della simulazione, basata sulla teoria cinetica dei gas, può essere fornita analizzando più in dettaglio il modello meccanico. È ben noto (99, 100) che la distribuzione della velocità di equilibrio di un sistema bidimensionale di  $N$  sfere rigide (e di conseguenza la sua distribuzione di energia cinetica) è indipendente dalle condizioni iniziali. Si può dimostrare (a partire da considerazioni di teoria cinetica e attraverso delle simulazioni) che, se indichiamo con  $N(v)dv$  il numero di particelle con velocità nell'intervallo  $v \rightarrow v + dv$  e con  $N(\epsilon)d\epsilon$  il numero di particelle con energia cinetica nell'intervallo  $\epsilon \rightarrow \epsilon + d\epsilon$ , queste distribuzioni sono date da

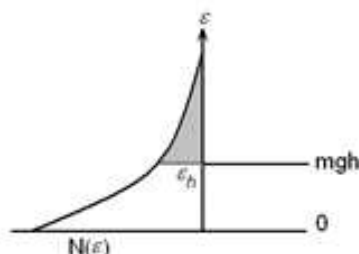
$$N(v)dv = \frac{2Nv}{\langle v^2 \rangle} e^{-\frac{v^2}{\langle v^2 \rangle}} dv \quad N(\epsilon)d\epsilon = (N/\epsilon_m) e^{-\frac{\epsilon}{\epsilon_m}} d\epsilon \quad (C.15)$$

dove  $\langle v^2 \rangle$  è la media del quadrato delle velocità delle particelle e  $\epsilon_m = 1/2m \langle v^2 \rangle$  è l'energia cinetica media. La figura C.15) mostra un grafico della configurazione energetica del nostro modello di sistema, dove sono confrontati i due livelli di energia potenziale con la

## C. PROBLEMI APERTI E PROSPETTIVE DI RICERCA: LA PROPOSTA DIDATTICA SUL FATTORE DI BOLTZMANN

---

distribuzione di energia cinetica. La probabilità,  $P_{12}$ , che le particelle possano transitare dal



**Figura C.15:** Grafico della distribuzione dell'energia cinetica confrontato con l'energia potenziale del sistema a due livelli

livello 1 (energia potenziale zero) al livello 2 (energia potenziale  $mgh$ ) può essere calcolata come la frazione di particelle che hanno un'energia  $\epsilon \geq \epsilon_2$

$$P_{12} = \frac{\int_{\epsilon_2}^{\infty} N(\epsilon) d\epsilon}{\int_0^{\infty} N(\epsilon) d\epsilon} = \frac{N e^{-\frac{\epsilon_2}{\epsilon_m}}}{N} = e^{-\frac{\epsilon_2}{\epsilon_m}} \quad (\text{C.16})$$

Inoltre, poiché l'energia del livello 1 è più bassa del livello 2, la probabilità,  $P_{21}$ , che le particelle possano eseguire la transizione inversa è  $P_{21} = 1$ , poiché tutte le particelle possono fare tale transizione.

$$P_{21} = \frac{\int_0^{\infty} N(\epsilon) d\epsilon}{\int_0^{\infty} N(\epsilon) d\epsilon} = 1 \quad (\text{C.17})$$

All'equilibrio le popolazioni  $N_1$  e  $N_2$  possono essere ottenute attraverso il bilancio dettagliato() in cui si pongono uguali i due flussi di particelle

$$N_1 P_{12} = N_2 P_{21} \quad \frac{N_2}{N_1} = \frac{P_{12}}{P_{21}} = e^{-\frac{\epsilon_2}{\epsilon_m}} \quad (\text{C.18})$$

Considerando che  $\epsilon_2$  è la differenza di energia potenziale tra i due livelli ed il sistema è bidimensionale ( $\epsilon_m = kT$ ), possiamo generalizzare con

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{kT}} \quad (\text{C.19})$$

che è la ben nota espressione del fattore di Boltzmann.

La modellizzazione dei nostri sistemi sperimentali per mezzo di un sistema a due livelli, a nostro parere, fornisce un duplice vantaggio: si presenta un esempio che aiuta a comprendere l'argomento e permette agli studenti di familiarizzare con un modello ampiamente utilizzato



in fisica per la descrizione di semplici sistemi di particelle non interagenti, come spin in campi magnetici, dissociazione di particelle nei liquidi, e molti altri ancora. Sono tutti esempi di processi, la cui attivazione avviene quando le particelle acquistano una energia superiore a “ $kT$ ”. Più alta è la temperatura, più è probabile che questo si verifichi.

### C.2.4 Discussione

La nostra proposta mostra come, le quattro situazioni analizzate attraverso i risultati degli esperimenti riguardanti differenti campi della scienza, possono essere descritte in termini del *FdB* relativo al gap di energia di un sistema a due livelli usato per modellizzare il fenomeno.

La concettuale rilevanza del parametro adimensionale  $\Delta E/kT$  si basa sull’idea del necessario equilibrio tra l’energia necessaria per un processo e la quantità di energia disponibile.

Tale proposta è stata sperimentata parzialmente nell’ambito del corso di “Didattica della fisica II” presso la SISSIS. Le differenti situazioni sperimentali sono state presentate attraverso un percorso problematico, stimolando gli studenti a cercare analogie con altri campi fenomenologici ed a cercare modelli microscopici adatti a descrivere e interpretare i risultati sperimentali.

I primi risultati della sperimentazione hanno messo in evidenza il ruolo fondamentale che la distribuzione di Maxwell-Boltzmann riveste nello sviluppo concettuale della nostra proposta sul *FdB*. Per questo motivo si è ritenuto opportuno dare priorità alla sperimentazione sulla distribuzione di Maxwell.



## Appendice D

# Attività svolte durante il dottorato

### D.1 Corsi

- “Metodi di Ricerca in Didattica delle Matematiche”, Prof. F. Spagnolo, Dott. B. Di Paola, Dott. A. Bonura, Dott. F. Arzarello, Dott.ssa E. Malisani, (1°anno, 16 ore);
- Lezioni del Corso “Didattica della fisica” Corsi SISIS Indirizzo Fisico-Matematico, Prof.ssa R. M. Sperandeo-Mineo, (1°anno, 10 ore);
- Storia della chimica, Prof. R. Zingales, (1°anno, 6 ore).

### D.2 Seminari

- “Epistemologia della fisica”, Prof. G. Giuliani, Prof. G. Ferrante, (1°anno);
- “Apprendimento, linguaggio e matematica: punto di vista delle neuroscienze”, Prof. N. Belluardo, Dott. M. Ferreri, Prof. A. D’Amico, Prof. A. Messina (1°anno, 18 ore).

### D.3 Partecipazioni a congressi

- XCIV Congresso Nazionale della Società Italiana di Fisica, Genova 22-27 settembre 2008, con una relazione dal nome:

*“Il Fattore di Boltzmann attraverso esperimenti e simulazioni”*

## D. ATTIVITÀ SVOLTE DURANTE IL DOTTORATO

---

- XVI International Conference DIDFYZ 15-18 ottobre 2008 Physics Education in the Light of New Scientific Knowledges, Rackova Dolina, the High Tatras, Slovacchia, con una relazione dal nome:

*“The Boltzmann Factor through experiments and simulations”*

- XCV Congresso Nazionale della Società Italiana di Fisica, Bari 28 settembre-3 ottobre 2009, con una relazione dal nome:

*“Un esperimento sull’emissione termoionica: la distribuzione di Maxwell-Boltzmann applicata al gas di elettroni liberi”*

- GIREP-ICPE-MPTL 22-27 agosto 2010 International Conference Teaching and Learning Physics Today: Challenges? Benefits? Université de Reims Champagne Ardenne, Reims, France con un poster dal titolo:

*“Searching for the Maxwell Distribution and the Boltzmann Factor: an Inquiry-Based Approach”*

### D.4 Pubblicazioni

Lo studio svolto durante il dottorato di ricerca ha condotto alla realizzazione di diversi lavori scientifici. La maggior parte di questi hanno fornito la base per la progettazione di entrambe le proposte didattiche esposte nella presente tesi. Alcune di queste pubblicazioni sono state contraddistinte da riconoscimenti e premi.

#### D.4.1 Articoli su riviste internazionali ISI

- **O. R. Battaglia** (2009) “Modelling Thermionic Emission by using a two Level Mechanical System”, *Nuovo Cimento della Società Italiana di Fisica. C*, Vol. **31** C (4), pp. 591-599, ISSN:1826-9885, DOI: 10.1393/NCC/I2009-10321-0;
- **O. R. Battaglia**, A. Bonura, R. M. Sperandeo-Mineo (2009) “A Pedagogical Approach to the Boltzmann Factor through Experiments and Simulations”, *Eur. J. Phys.*, Vol. **30**, pp. 1025-1037, ISSN: 0143-0807, DOI: 10.1088/0143-0807/30/5/011;
- **O. R. Battaglia**, C. Fazio, I. Guastella, R. M. Sperandeo-Mineo (2010) “An Experiment on the Velocity Distribution of Thermionic Electrons”, *Am. J. Phys.*, Vol. **78** (12), pp.1302-1308, DOI: 10.1119/1.3471937;

- **O. R. Battaglia**, I. Guastella C. Fazio (2010) “The Boltzmann Probability as a Unifying Approach to Different Phenomena,” *Am. J. Phys.*, Vol. **78** (12), pp. 1331-1335, DOI: 10.1119 / 1.3493404.

#### D.4.2 Proceedings internazionali

- G. Tarantino, **O. R. Battaglia**, I. Guastella and R. M. Sperandeo-Mineo,  
“*Modelling the dispersion properties of mass linear chains: experiments and simulations*”.  
Proceedings del congresso internazionale G.I.R.E.P., University of Cyprus, Nicosia, 18 -  
22 august, 2008 ISBN 978-9963-689-21-7;
- **O. R. Battaglia**, C. Fazio (2009),  
“*The Boltzmann Factor through Experiments and Simulations*”,  
Proceedings del XVI International conference DIDFYZ, Physics Education In The Light of  
New Scientific Knowledges. 2008 15-18 ottobre 2008 in Rackova Dolina (Slovak Republic),  
Western Tatra Mountains. Nitre, Vol. 361, pp. 362-371, ISBN/ISSN: 978-80-8094-496-4;
- C. Fazio, **O. R. Battaglia**, I. Guastella,  
“*An Introduction to the Boltzmann Factor by Using Information Technology Tools*”.  
Proceedings del Congresso Internazionale Mptl 14 International Workshop on 23-25 sep-  
tember 2009 University of Udine, Italy, ISBN 2-914771-61-4;
- **O. R. Battaglia**, L. Cazzaniga, F. Corni, A. De Ambrosis, C. Fazio, M. Giliberti, O.  
Levrini, M. Michelini-responsible, A. Mossenta, L. Santi, R. M. Sperandeo, A. Stefanel,  
“*Master IDIFO (Innovazione Didattica in Fisica e Orientamento): a community of Italian  
physics education researchers for a community of teachers as a model for a research based  
in-service teacher formation model on modern physics*”.  
Proceedings del congresso internazionale G.I.R.E.P. 2009 Leicester (in stampa).



## Appendice E

### Riconoscimenti e premi

- **O. R. Battaglia**, R. M. Sperandeo Mineo (2008).

*“Il Fattore di Boltzmann attraverso Esperimenti e Simulazioni”*,

riconoscimento come migliore comunicazione per il settore Fisica Generale al Congresso di Fisica (Sif) Genova 2008;

- **O. R. Battaglia**, I. Guastella,

*“Searching for the Maxwell Distribution and the Boltzmann Factor: an Inquiry-Based Approach”*,

miglior poster al Congresso Internazionale G.I.R.E.P., 22-27 agosto 2010, Università de Reims Champagne Ardenne, Reims, France, premiato dalla E.P.S. (European Physical Society).





# Bibliografia

- [1] **La Fisica nella Scuola XXXVI, 2 Supplemento.** pages 3–9, Senigallia, 2003. XL Congresso Nazionale AIF. [8](#)
- [2] B. M. VARISCO. *Costruttivismo Socio-culturale. Genesi filosofiche, sviluppi psico-pedagogici, applicazioni didattiche.* Allyn and Bacon, Needham Heights, MA, 2001. [8](#)
- [3] A. WOOLFOLK. *Educational psychology.* Carrocci, Roma, 2004. [8](#)
- [4] P. D. EGGEN AND D. P. KAUCHAK. *Educational psychology: windows on classrooms.* Upper Saddle River, New York, 2004. [8](#)
- [5] B. LIGORIO. *Come si insegna, come si apprende.* Carrocci Editore, Roma, 2003. [9](#), [10](#)
- [6] J. S. BRUNER. *Verso una teoria dell'istruzione.* Armando Editore, Roma, 1999. [10](#)
- [7] **Science Education Research - An Indispensable prerequisite for improving instructional practice.** Braga, 2006. ESERA Summer School. [11](#), [14](#)
- [8] [www.designbasedresearch.org](http://www.designbasedresearch.org). [11](#)
- [9] *Educational Researcher*, **32**(1), 2003. [11](#)
- [10] K. MCCLAIN K. GRAVEMEIJER P. COBB, M. STEPHAN. **Participating in classroom mathematical practices.** *The Journal of the Learning Sciences*, **10**:113–163, 2001. [11](#)
- [11] A. COLLINS. *Toward a design science of education. In E. Scanlon e T. OShea (a cura di), New directions in educational technology.* Springer, Berlin, 1992. [11](#)
- [12] H. GROPENIEBER U. KATTMANN, R. DUIT AND M. KOMOREK. **A model of Educational Reconstruction.** San Francisco CA, 1995. Paper presented at the Narst annual meeting. [13](#)
- [13] U. KATTMANN R. DUIT, H. GROPENIEBER. *Towards science education research that is relevant for improving practice: The Model of educational reconstruction.* Taylor e Francis, London, in h. e. fischer ed. developing standars in research on science education edition, 2005. [13](#)
- [14] R DUIT. **Science Education Research Internationally: Conceptions, Research Methods, Domains of Research.** *Eurasia Journal of Mathematics, Science and technolog Education*, **3**:3–15, 2007. [13](#), [14](#)
- [15] E. JENKINS. *Research in science education in Europe: Retrospect ad prospect.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherland, in h. behrendt, h. dahncke, r. duit, w. gr edition, 2001. [13](#)
- [16] P. FENSHAM. *Science content as problematic - Issues for Research.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherland, in h. behrendt, h. dahncke, r. duit, w. gr edition, 2001. [13](#)
- [17] D. TREAGUST R. DUIT. *Section 1: Learning.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherland, in b. fraser e k. tobin, eds. international handbook of science education edition, 1998. [14](#)
- [18] D. F. TREAGUST R. DUIT. **Conceptual change: a powerfull framework for improving science teaching and learning.** *International Journal of Science Education*, **25**(6):671–688, 2003. [14](#)
- [19] N. G. LEDERMAN F. ABD-EL-KHALICK. **Improving science teachers' concepiions of nature of science: A critical review of the literature.** *International Journal of Science Education*, **22**(7):665–702, 2000. [14](#)
- [20] R. K. SAWYER. **Group creativity: musical performance and collaboration.** *Psychology of music*, **34**(2):148–165, 2006. [15](#)
- [21] F. MARTON. *Describing and improving learning.* Plenum Press ed. R. R. Schmeck, New York, 1988. [16](#)
- [22] M. F. PANG F. MARTON. *The Idea of Phenomenography and the pedagogy of Conceptual Change in Vosniadou.* S. ed. International HandBook of Research on Conceptual Change, Routledge, New York, 2008. [16](#)
- [23] M. PROSSER AND K. TRIGWELL. *Understanding Learning and Teaching: The experience in higher education.* Open University Press, Buckingham, 1999. [16](#)
- [24] L. SVENSSON. **Theoretical Foundations of Ohe-nomenography.** *Higher Education Research and Development*, **16**:159–171, 1997. [16](#)

## BIBLIOGRAFIA

---

- [25] P. WALKER E R. MILLAR M. PROSSE. **Differences in Students' Perceptions of Learning Physics.** *Physics Education*, **31**:43–48, 1996. [16](#), [17](#)
- [26] F. MARTON. **Phenomenography. A research approach to investigate different understanding of reality.** *Journal of Thought*, **21**:28–49, 1986. [16](#), [17](#)
- [27] E. MARTIN D. LAURILLARD F. MARTON G. MASTERS P. RAMSDEN A. STEPHANOU E. WALSH J. BOWDEN, G. DALL'ALBA. **Displacement, velocity, and frames of reference: Phenomenographic studies of students' understanding and some implications for teaching and assessment.** *Am. J. Phys.*, **60**:262–269, 1992. [16](#), [17](#)
- [28] A. C. INVERNIZZI E. LUNATI P MASCHERETTI L. BORGHI, A. DE AMBROSIS. **Analisi fenomenografica di una sperimentazione in didattica della fisica sui fenomeni di attrito.** *TD Tecnologie Didattiche*, **1**:21–29, 2000. [16](#)
- [29] GARFIELD AND BEN-ZVI. *Developing Students Statistical Reasoning.* Springer, New York, 2008. [19](#)
- [30] S. G. BRUSH. **James Clerk Maxwell and the Kinetic Theory of Gases: A review Based on Recent Historical Studies.** *Am. J. Phys.*, **59**:631–640, 1970. [20](#)
- [31] O. STERN. **Eine direkte Messung der thermischen Molekulargeschwindigkeit.** *Z. Phys.*, **2**:49–56, 1920. [26](#)
- [32] I. F. ZARTMAN. **A direct measurement of molecular velocities.** *Physical Review*, **37**:383–391, 1931. [26](#)
- [33] R. C. MILLER & P. KUSH. **Velocity distributions in Potassium and Thallium Beams.** *Physical Review*, **99**:1314–1321, 1955. [26](#), [32](#)
- [34] C. JANVIER. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Lawrence Erlbaum Associated Publishers, London, 1987. [27](#)
- [35] & T. WRIGHT R. NEMIROVSKY, C. TIERNEY. **Body motion and graphing.** *Cognition and Instruction*, **16**(42):119172, 1998. [27](#)
- [36] F. CURCIO & C. BRIGHT S. FRIEL. **Making sense of graphs: Critical factors influencing. Comprehension and Instructional Implications.** *Journal of Research in Mathematics Education*, **32**(23):124–158, 2001. [27](#)
- [37] S. M. KOSSLYN. *Image and brain: The resolution of the imagery debate.* MA: MIT Press, Cambridge, 1994. [28](#)
- [38] & H. A. SIMON H. J. M. TABACHNECK-SCHIJF, A. M. LEONARDO. **How does an expert use a graph? CaMeRa: a computational model of multiple representations.** *Cognitive Science*, **21**(2):305–350, 1997. [28](#)
- [39] W. M. ROTH. **Reading graphs: contributions to an integrative concept of literacy.** *Journal of Curriculum Studies*, **34**(1):1–24, 2002. [28](#)
- [40] & J. REID C. READING. **An emerging hierarchy of reasoning about distribution: From a variation perspective.** *Statistics Education Research Journal*, **5**(2):46–68, 2006. [28](#)
- [41] C. READING AND M. SHAUGHNESSY. *Reasoning about variation.* In D. Ben-Zvi and J. Garfield (Eds.). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, the challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking edition, 2004. [28](#)
- [42] D. S. MOORE AND G. P. MCCABE. *Introduction to the Practice of Statistics.* W. H. Freeman, New York, 4th ed. edition, 2003. [29](#)
- [43] D. BEN-ZAVI. **Reasoning about variability in comparing distributions.** *Statistics Educational Research Journal*, **3**(2):42–63, 2004. [29](#)
- [44] K. MAKAR & J. CONFREY. **Chunks, clumps and spread out: Secondary pre-service teachers notions of variation and distribution.** Mount Pleasant, Michigan: Central Michigan University, 2003. In C. Lee (Ed.), Proceedings of the Third International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking and Literacy. [29](#)
- [45] R. DELMAS & Y. LIU. **Exploring students understanding of statistical variation teachers notions of variation and distribution.** Mount Pleasant, Michigan: Central Michigan University, 2003. In C. Lee (Ed.), Proceedings of the Third International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking and Literacy. [29](#)
- [46] J. PEGG. *Assessment in mathematics: A developmental approach.* Greenwich, CT: Information Age Publishing, j. royer (ed.), mathematical cognition edition, 2003. [29](#)
- [47] R. CALLINGHAM & M. SHAUGHNESSY J. WATSON, B. KELLY. **The measurement of school students understanding of statistical variation.** *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, **34**(1):1–29, 2003. [29](#)
- [48] M. PEANKUCH. **Characterizing year 11 students evaluation of a statistical process.** *Statistics Education Research Journal*, **4**(2):5–25, 2005. [29](#)

- [49] & K. COLLIS J. BIGGS. *Multimodal learning and the quality of intelligent behaviour*. Laurence Erlbaum Assoc., New Jersey, h. rowe (ed.), intelligence, reconceptualization and measurement edition, 1991. [29](#)
- [50] C. WILD. **The Concept of Distribution**. *Statistics Education Research Journal*, **5**(2):10–26, February 2006. [31](#)
- [51] O. R. FRISCH. **Molecular Beams**. *Sci. American*, **212**:58–75, 1965. [32](#)
- [52] J. J. PRENTIS. **Experiments in statistical mechanics**. *Am. J. Phys.*, **68**, 2000. [32](#), [105](#)
- [53] L. H. GERMER. **The distribution of initial velocities among thermionic electrons**. *Phys. Rev.*, **25**:795–807, 1925. [33](#)
- [54] O. W. RICHARDSON. **The emission of electricity from hot bodies**. *Longman Green and Company*, 1921. [33](#), [34](#)
- [55] VON WALTER SCHOTTKY. **Über den Austritt von Elektronen aus Qliihdrdhten bei verzögerten Potentialen**. *Ann.d. Physik*, **44**:1011–1032, 1914. [34](#), [37](#)
- [56] C. S. HUNG. **Thermionic Emission from Oxide Cathods: Retarding and Accelerating Fields**. *J. of Applied Physics*, **21**:37–44, 1950. [34](#)
- [57] J. G. DODD. **An Experiment on Electron Emission**. *Am. J. Phys.*, **39**:1159–1163, 1971. [36](#), [37](#), [114](#), [115](#)
- [58] K. L. LUKE. **An Experiment on Thermionic Emission Using a Nuvistor Triode**. *Am. J. Phys.*, **42**:847–856, 1974. [36](#), [43](#)
- [59] J. G. DODD. **An Experiment on Electron Emission**. *Am. J. Phys.*, **39**:1159–1163, 1971. [36](#)
- [60] MS. M. SZE. *Physics of Semiconductor Devices*. John Wiley & Sons, New York, 2nd ed. edition, 1981. [37](#)
- [61] K. R. SPANGENBERG. *Vacuum Tubes*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1948. [37](#), [115](#)
- [62] H. A. JONES AND I. LANGMUIR. **The Characteristics of Tungsten Filaments as Functions of Temperature**. *GE Review*, **30**:310–19, 1927. [38](#)
- [63] R. G. D. STEEL AND J. H. TORRIE. *Principles and Procedures of Statistics*. McGraw-Hill, New York, 1960. [41](#)
- [64] C. WAGNER AND H. H. SOONPAA. **A simple picoammeter for thermionic emission measurements**. *Am. J. Phys.*, **62**(5):473–474, 1994. [42](#)
- [65] A. E. ANDRUS J. J. PRENTIS AND T. J. STASEVICH. **Crossover from the exact factor to the Boltzmann factor**. *Am. J. Phys.*, **67**, 1999. [101](#)
- [66] R. B. LEIGHTON R. P. FEYNMAN AND M. SANDS. *The Feynman Lecture on Physics*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1974. [101](#), [106](#)
- [67] R. P. FEYNMAN. *Statistical Mechanics*. Reading, MA: Benjamin, 1974. [101](#)
- [68] J. REIF. *Statistical and Thermal Physics*. McGraw-Hil, New York, 1965. [101](#)
- [69] E. SCHRÖDINGER. *Statistical Thermodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1967. [102](#)
- [70] P. FARAGO M, HORNE AND J. OLIVER. **An experiment to measure Boltzmanns constant**. *Am. J. Phys.*, **41**:344348, 1973. [105](#)
- [71] Molecular Motion Model No. SF-8663 Pasco Scientific 10101 Foothills Blvd, Roseville, CA 957477100. [105](#)
- [72] Molecular Motion Demonstrator No.31365 Central Scientific Company 3300 Cenco Parkway, Franklin Park, IL 60131. [105](#)
- [73] I. GUASTELLA C. FAZIO AND G. TARANTINO. **The elastic body model: a pedagogical approach integrating real time measurements and modelling activities**. *Eur. J. Phys.*, page 9911005, 2007. [105](#)
- [74] R. C. WEAST. *Handbook of Chemistry and Physics*. CRC Press, Cleveland, 1963. [107](#)
- [75] H. EYRING. **Viscosity, Plasticity, and Diffusion as Examples of Absolute Reaction Rates**. *J. Chem. Phys.*, **4**(4):283–291, 1936. [109](#)
- [76] H. EYRING S. GLASSTONE, K. J. LAIDLER. *The Theory of Rate Process: the kinetics of chemical reactions, viscosity, diffusion and electrochemical phenomena*. McGraw-Hill, New York, 1941. [110](#)
- [77] M. J. E. DE M. CARDOSO R. J. MARTINS AND O. E. BARCIA. **A New Model for Calculating the Viscosity of Pure Liquids at High Pressures**. *Ind. Eng. Chem. Res.*, **42**:3824–3830, 2003. [110](#)
- [78] J. H. GIBBS G. ADAM. **On the temperature dependence of cooperative relaxation properties in glass-forming liquids**. *J. Chem. Phys.*, **43**:139–146, 1965. [110](#)

## BIBLIOGRAFIA

---

- [79] P. RICHET. **Viscosity and configurational entropy of silicate melts.** *Geochim. Cosmochim. Acta.*, **48**:471–483, 1984. [110](#)
- [80] P. RICHET Y. BOTTINGA. **Silicate melt structural relaxation: rheology, kinetics, and Adam-Gibbs theory.** *Chem. Geol.*, **128**:129–141, 1996. [110](#)
- [81] M. J. TOPLIS. **Quantitative links between microscopic properties and viscosity of liquids in the system SiO-NaOy.** *Chem. Geol.*, **174**:321–331, 2001. [110](#)
- [82] C. E. SYNOLAKIS & H. S. BADEER. **On combining the Bernoulli and Poiseuille equation - A plea to authors of college physics texts.** *Am. J. Phys.*, **57**(11):1013–1019, 1989. [111](#)
- [83] Dal momento che queste due sostanze hanno diversi intervalli di fluidità nella nostra gamma di temperatura 278 K - 343 K, abbiamo bisogno di usare due diversi tipi di viscosimetro Ubbelohde: un primo, con portata che va da 0,3 a 1 CSt (tipo 0) e un secondo, con portata che va da 0,6 a 3 CSt (tipo 0C). [111](#)
- [84] L. PAULING. *General Chemistry.* Dover Pub., Inc., New York, 1970. [112](#)
- [85] R. H. EWELL & H. EYRING. **Theory of the Viscosity of Liquids as a Function of Temperature and Pressure.** *J. Chem. Phys.*, **5**:726–736, 1937. [112](#)
- [86] W. KAUZMANN AND H. EYRING. **The Viscous Flow of Large Molecules.** *J. Am. Chem. Soc.*, **62**(11):3113–3125, 1940. [112](#)
- [87] D. R. LIDE. *CRC Handbook of Chemistry and Physics.* CRC Press, Boca Raton, FL., 85th edition edition, 2005. [112](#)
- [88] M. Z. SAGHIR A. ABBASI AND M. KAWAJI. **A new approach to evaluate the thermodiffusion factor for associating mixture.** *J. Chem. Phys.*, **130**, 2009. [112](#)
- [89] J. MILLMAN & C. C. HALKIAS. *Electronic Devices and Circuits.* McGraw-Hill, New York, 1967. [113](#)
- [90] P. J. ANGIOLILLO. **On thermionic emission and the use of vacuum tubes in the advanced physics laboratory.** *Am. J. Phys.*, **77**(12):1102–1106, 2009. [113](#)
- [91] G. HEES H. JACOBS AND W. P. CROSSLEY. Washington, 1948. Proc. of the Institute of Radio Engineers. [114](#)
- [92] C. KITTEL. *Introduction to solid state physics.* Wiley, New York, 1966. [114](#)
- [93] H. A. JONES & I. LANGMUIR. **The Characteristics of Tungsten Filaments as Functions of Temperature.** *GE Review*, **39**:Part 1, 310–319; Part II, 354–361; Part III , 408–412, 1927. [114](#)
- [94] H. EYRING. **The Activated Complex in Chemical Reactions.** *J. Chem. Phys.*, **3**(107), 1935. [115](#)
- [95] T. CASSEN. **Faster than a speeding bullet. A freshman kinetics experiment.** *J. Chem. Educ.*, **53**(3):197–198, 1976. [115](#)
- [96] M. OTTENS J. G. M. WINKELMAN AND A. A. C. M. BEENACKERS. **The kinetics of the dehydration of methylene glycol.** *Chem. Eng. Sci.*, **55**:2065–2071, 2000. [116](#), [118](#)
- [97] J. A. POJMAN A. F. TAYLOR G. HU, C. BOUNDS. **Time-Lapse thiol-acrylate polymerization using a pH clock reaction.** *J. Polym. Sci., Part A: Polym. Chem.*, **48**:2955–2959, 2010. [116](#)
- [98] F. T. CHAU AND K. W. MOK. **A computer-enhanced pH study on the formaldehyde-sulphite clock reaction.** *Autom. Chem.*, **14**(3):79–83, 1992. [116](#)
- [99] B. J. ADLER AND T. J. WAINWRIGHT. *Chem. Phys.*, **31**:459464, 1959. [121](#)
- [100] M. L. AIELLO-NICOSIA AND R. M. SPERANDEO-MINEO. *Eur. J. Phys.*, **6**:14853, 1985. [121](#)