

Università degli Studi di Palermo
Facoltà di Scienze della Formazione

Dottorato di Ricerca in Psicologia
Ciclo XXII – Settore Disciplinare M-PSI/01

**ANALISI DELLE COMPONENTI COGNITIVE
IMPLICATE NELLA SOLUZIONE DEI PROBLEMI
ARITMETICI**

Tesi di Dottorato di
Rossana Maria La Porta

Tutor

Prof. Antonella D'Amico

Coordinatore

Prof. Girolamo Lo Verso

A.A. 2009/2010

A mio padre

Indice

Introduzione	6
 <i>Parte prima: Contributi teorici sulla soluzione dei problemi aritmetici</i>	
Capitolo primo:	
La soluzione dei problemi aritmetici	9
1.1 Introduzione storica	9
1.1.1 Studi sul Problem Solving	9
1.1.2 Dal problem solving allo studio dei problemi aritmetici	12
1.2 Principali metodi di studio della soluzione dei problemi aritmetici	13
1.2.1 Studi sulle caratteristiche dei problemi	14
1.2.2 Studi sulle caratteristiche dei solutori	20
1.3 I principali aspetti indagati sulla soluzione dei problemi matematici	
 Capitolo secondo:	
Modelli cognitivi sulla soluzione dei problemi	22
2.1 Il modello di Mayer	22
2.2 Il modello di Riley	25
2.3 Il modello di Kintsch e Greeno	28
2.4 Il modello di Hegarty, Mayer e Monk	35
2.5 Il modello di Lucangeli, Tressoldi e Cendron	38
2.5.1 Applicazioni del modello	42
 Capitolo terzo:	
Comprensione del testo e soluzione dei problemi aritmetici	44
3.1 Introduzione	44
3.2 La comprensione del testo	45
3.2.1 Caratteristiche del testo che influenzano la comprensione	46
3.2.2 Caratteristiche del lettore	49
3.2.3 Modelli della comprensione del testo	53
3.3 La comprensione del testo nell'attività di risoluzione dei problemi	57
3.3.1 Caratteristiche del testo del problema	58
3.3.2 Caratteristiche del solutore	59
3.4 Conclusioni	60
 Capitolo Quarto:	
Componenti cognitive nella soluzione dei problemi aritmetici	62
4.1 Introduzione	62
4.2 Rappresentazione	62
4.2.1 Analisi teorica della rappresentazione	63
4.2.2 Analisi delle strategie di rappresentazione dei solutori	66
4.2.3 Questioni aperte	68
4.3 Categorizzazione	69
4.3.1 Questioni aperte	70
4.4 Pianificazione	73
4.4.1 Questioni aperte	75

Parte seconda: contributi empirici sulle abilità coinvolte nella soluzione dei problemi aritmetici

Capitolo Quinto:

Approfondimento empirico sulla comprensione del testo nell'attività di risoluzione dei problemi	78
5.1 Sommario	78
5.2 Introduzione	78
5.3 Studio 1	80
5.3.1 Partecipanti, materiali e procedura	80
5.3.2 Risultati	84
5.3.3 Discussione	88
5.4 Studio 2	89
5.4.1 Obiettivi	89
5.4.2 Partecipanti, materiali e procedura	90
5.4.3 Analisi delle componenti della comprensione del testo utili per la soluzione del problema	91
5.4.4 Risultati e discussione	93
5.5 Conclusioni	100

Capitolo Sesto:

Analisi di rappresentazione, categorizzazione, pianificazione nell'attività di soluzione dei problemi aritmetici	102
6.1 Sommario	102
6.2 Introduzione	102
6.3 Metodo	105
6.4 Risultati generali	114
6.5 Discussione	119
6.6 Risultati delle analisi sulle singole componenti	121
6.6.1 Rappresentazione e soluzione dei problemi	121
6.6.2 Categorizzazione e soluzione dei problemi	125
6.6.3 Pianificazione e soluzione dei problemi	128
6.7 Conclusioni generali	130

Capitolo settimo:

Descrizione e valutazione di un modello per la soluzione dei problemi aritmetici	135
7.1 Sommario	135
7.2 Introduzione	136
7.3 Verifica del modello di Lucangeli e Coll. (1998)	136
7.3.1 Metodo	136
7.3.2 Risultati	138
7.4 Un modello teorico alternativo della relazione fra le componenti	141
7.5 Valutazione empirica del modello	145
7.5.1 Metodo	145
7.5.2 Risultati	146
7.5.3 Discussione	148
7.6 Un modello dei predittori della comprensione	150
7.7 Valutazione empirica del modello	152
7.7.1 Metodo	152

7.7.2 Risultati e discussione	154
7.8 Conclusioni	155
Conclusioni Generali	159
Appendice	162
Bibliografia	166

Introduzione

La soluzione dei problemi matematici costituisce un particolare aspetto del problem solving che include nel processo di soluzione l'elaborazione di dati numerici. Tale attività cognitiva è comunemente coinvolta nell'ambito dei problemi aritmetici scolastici, quei compiti, cioè, che si risolvono tramite strategie e procedure di tipo matematico e che sono presentati attraverso un testo verbale, per lo più di tipo narrativo. Tali problemi sono definiti in letteratura “*routinari*”, sono cioè compiti che si risolvono mediante l'applicazione di regole note o algoritmi e si contrappongono a problemi di tipo “*non routinario*” (o ad *insight*), cioè problemi non usualmente incontrati che si risolvono mediante euristiche. La presente trattazione verterà, in particolare, sulla soluzione di problemi di tipo routinario in bambini di scuola primaria.

Questa attività scolastica è particolarmente rilevante nei bambini perché coinvolge diversi tipi di conoscenza e diverse abilità cognitive di base: dalla conoscenza dei concetti matematici alla conoscenza verbale fino alle abilità di ragionamento. Un aspetto fondamentale dei problemi aritmetici è, infatti, la presentazione mediante testo narrativo. Il testo costituisce allo stesso tempo la “cornice” e la “struttura” del problema. È cornice in quanto presenta il compito matematico attraverso una situazione concreta, e questo favorisce il *transfert* del ragionamento dalla situazione reale alla situazione del problema. È struttura in quanto per mezzo della presentazione verbale viene a strutturarsi la relazione fra i dati. In altre parole il testo verbale “traduce” l'espressione matematica formale, che altrimenti sarebbe inaccessibile a bambini di scuola primaria. Per questi motivi i problemi costituiscono un aspetto importante dell'apprendimento, come sottolineano anche le direttive del MIUR.

L'attività di soluzione dei problemi aritmetici nei bambini interessa anche la ricerca psicologica di base, in quanto fornisce dati importanti su apprendimento, ragionamento, sviluppo cognitivo, ecc., e la ricerca applicata, che fornisce indicazioni importanti per l'attività didattica, per il riconoscimento e trattamento di difficoltà specifiche, ecc.

Le ricerche condotte su questo argomento ad oggi sono molteplici, ma, nonostante ciò, alcuni aspetti dell'attività di soluzione dei problemi aritmetici restano ancora da chiarire.

L'obiettivo della presente ricerca è, pertanto, quello di approfondire le caratteristiche e la funzione specifica di alcune componenti cognitive coinvolte nella soluzione dei problemi matematici, con implicazioni sia teoriche che applicative e cliniche.

La prima parte del lavoro di tesi è incentrata sull'analisi dei principali studi condotti su questo argomento. In particolare, il primo capitolo fornisce un inquadramento generale dell'argomento del punto di vista storico, metodologico e dei principali aspetti messi in luce. Il secondo capitolo fornisce, poi, un quadro dei principali modelli cognitivi che sono stati elaborati su questo argomento. Il terzo capitolo introduce alcuni concetti fondamentali sulla comprensione del testo e li esamina in funzione della comprensione del testo di un problema matematico. Il quarto capitolo esamina le componenti di rappresentazione, categorizzazione e pianificazione del problema, evidenziando alcuni problemi aperti circa la natura e la funzione specifica di tali componenti.

Nella seconda parte della tesi vengono descritti metodologie e risultati di tre studi empirici. In particolare, il primo studio (quinto capitolo) approfondisce la funzione della comprensione del testo durante l'attività di soluzione. Il secondo studio (sesto capitolo) analizza ruolo delle componenti di rappresentazione, categorizzazione e pianificazione del problema. Infine nel settimo capitolo si propone un'ipotesi su come queste componenti si integrano in un modello complessivo.

Nella conclusioni sono, infine, discusse le implicazioni specifiche e generali rispetto ai risultati ottenuti e si evidenziano le questioni ancora aperte nonché le prospettive future della ricerca in materia.

Parte prima
Contributi teorici sulla soluzione dei problemi
aritmetici

Capitolo Primo

La soluzione dei problemi aritmetici

1.1 Introduzione storica

1.1.1 Studi sul problem solving

L'interesse della ricerca psicologica per la soluzione dei problemi aritmetici si iscrive in un processo di cambiamento ed evoluzione degli studi sul problem solving. Il problem solving (attività di soluzione dei problemi) costituisce un settore di ricerca d'elezione per la psicologia sperimentale. Gli studi sulla soluzione dei problemi ricoprono una particolare importanza nella storia della psicologia in quanto, per la prima volta, gli studi sul pensiero si focalizzavano su un oggetto originale e peculiare dalla nascente disciplina psicologica. Fino ad allora le ricerche sul pensiero umano si erano focalizzate su oggetti derivati da altre discipline, come la filosofia, la logica, la teoria della probabilità, ecc. In ragione dell'importanza storica di questi studi, questo paragrafo è dedicato ad una breve descrizione dei principali approcci allo studio del problem solving.

Storicamente, lo studio del problem solving è legato a due orientamenti fondamentali: gli studi degli psicologi della *Gestalt*, prevalentemente sviluppati in Europa e gli studi dello *Human Information Processing* (HIP) negli Stati Uniti.

La psicologia della Gestalt si sviluppa in Germania all'inizio del ventesimo secolo. I maggiori esponenti di questo indirizzo si possono individuare in Max Wertheimer, Wolfgang Köhler, Kurt Koffka e Karl Duncker. Questi studiosi si dedicarono allo studio dei problemi per far luce sul *pensiero produttivo*; i tipici problemi studiati dai gestaltisti, infatti, sono quelli per la cui

soluzione occorre “vedere” una nuova struttura (ristrutturazione), problemi che vengono definiti “insight problems”.

Le prime ricerche in materia furono condotte da Köhler (1921) sul comportamento delle scimmie antropoidi in una situazione problematica. Le sue si posero in aperto contrasto con i famosi studi di Thorndike (1898) sull'apprendimento per “prove ed errori”. Osservando il comportamento delle scimmie in una situazione problematica, Köhler si rese conto che, dopo aver effettuato una serie di prove infruttuose, in certi casi avveniva qualcosa di improvviso ed inaspettato, che risolveva il problema. Köhler definì questo fenomeno “insight”, che letteralmente significa “l'atto di vedere dentro” e indica il momento in cui la situazione si riorganizza, diventa trasparente e i suoi tratti essenziali, con i loro reciproci rapporti, vengono colti chiaramente dal soggetto.

Köhler non nega che esista un apprendimento per prove ed errori, ma sostiene che un momento fondamentale della soluzione del problema è quello in cui l'animale *ristruttura* la situazione per raggiungere l'obiettivo. Quando ciò avviene, il comportamento dello scimpanzé muta direzione, diventa *produttivo* fino al raggiungimento dell'obiettivo. Da qua la definizione dei Gestaltisti di *pensiero produttivo*, un pensiero che porta ad un'idea nuova, originale, contrapposto ad un pensiero *riproduttivo*, cioè limitato alle strategie apprese in precedenza.

Mentre Köhler e Wertheimer, che si occuparono prevalentemente del momento in cui il pensiero lavora in modo produttivo, un altro gestaltista, Karl Duncker, dedicò i suoi studi a tutto ciò che avviene nel processo di risoluzione del problema, dal momento in cui il problema viene posto fino a quello in cui il soggetto arriva alla soluzione.

Gli studi di Duncker si focalizzarono sull'influenza esercitata dalle esperienze precedenti nei processi di soluzione. In base a questi studi Duncker elaborò un concetto di grande importanza: la *fissità funzionale*. Come sostiene anche Wertheimer, il primo approccio per la soluzione del problema è cercare nella memoria come ci si è comportati in circostanze analoghe. Questa analisi, definita da Duncker *analisi della situazione*, è volta ad individuare le funzioni di un oggetto in una determinata situazione, così che l'oggetto possa essere usato per risolvere il problema. Tuttavia ogni oggetto ha potenzialmente molteplici funzioni, e può capitare di non rendersi conto che uno specifico oggetto, in una

specifica situazione, potrebbe essere utile per giungere alla soluzione, proprio perché non si riconosce quella funzione in particolare. E' questo il fenomeno della fissità funzionale, ed è causato dalla *fissità* della mente del soggetto sulla *funzione* prevalente dell'oggetto. In altre parole, i soggetti spesso sono così abituati a vedere una specifica funzione di un oggetto da non riuscire a vederne altre, che potrebbero essere d'aiuto in situazioni problematiche.

Si descriveranno adesso gli aspetti essenziali dell'altra teoria cardine nello studio della soluzione dei problemi, la teoria dell'elaborazione dell'informazione.

Nell'ambito della teoria dell'elaborazione dell'informazione, o *human information processing* (HIP), il soggetto umano è concepito come un elaboratore di informazioni e il calcolatore è considerato un modello per il funzionamento della mente. Miller, Galanter e Pribram sono gli autori di uno dei testi più influenti di questo approccio: *Piani e strutture del comportamento* (1960; trad. it. 1992). Miller e i suoi colleghi concepivano l'azione come un comportamento strutturato, piuttosto che una semplice sequenza di risposte. Miller reputava errato il modello stimolo-risposta di tipo sequenziale della teoria associazionista, e, in luogo di un modello sequenziale, egli proponeva un modello *top-down*: il comportamento è dato da una configurazione di unità che vengono gestite "dall'alto". Un modello top-down si sviluppa a partire dalla distinzione fra unità di comportamento *molecolari* e *molari* (Tolman, 1948). La caratteristica delle unità molari è che possono essere portate a termine in vari modi, e queste differenze sono legate alle unità molecolari dell'azione: la stessa unità molare può essere costituita da una varietà di unità molecolari diverse. Esistono diversi livelli per descrivere un comportamento, si può, dunque, sostenere che il comportamento è organizzato gerarchicamente. I processi che regolano il comportamento "dall'alto" sono chiamati *piani*, che costituiscono quindi le istruzioni per l'esecuzione dell'azione; il comportamento può essere compreso solo in funzione del piano che lo regola.

Nell'ambito dell'HIP, e in generale della psicologia cognitivista, non è stata concepita una teoria specifica del problem solving, ma sono stati elaborati dei modelli relativi a differenti aspetti del processo di soluzione. L'obiettivo dei modelli, in questo ambito, è quello di individuare le regole di trasformazione che portano da una fase di input ad una fase di output.

Uno dei modelli più noti è quello di Newell e Simon, degli anni '50, delineato in seguito alla costruzione di *General Problem Solver* (GPS), un programma per calcolatore in grado di risolvere i problemi mediante processi simili a quelli del ragionamento umano. Il loro modello teorico per la soluzione dei problemi ha costituito un punto di riferimento per molte aree di ricerca della psicologia cognitivista. Per Simon, le componenti fondamentali nel processo di problem solving sono tre: un sistema che elabora informazioni (*Information Processing System*), cioè, il solutore del problema, che può essere umano o artificiale; lo spazio del problema (*problem space*), cioè come il solutore si rappresenta il problema; l'ambiente del compito (*task environment*), cioè il problema così come è concepito dallo sperimentatore.

Il sistema di elaborazione è un sistema complesso e attivo in grado di ricevere, recuperare, memorizzare, trasformare le informazioni e opera attraverso una "ricerca sequenziale", procedendo *step by step*.

Lo spazio del problema è composto dallo "*stato iniziale*", cioè il modo in cui il solutore descrive le condizioni di partenza; dallo "*stato obiettivo*" (*goal state*), cioè il modo in cui vengono descritti gli esiti, ovvero la condizione-obiettivo; dagli "*operatori*", cioè le mosse o le operazioni per passare da uno stato all'altro; dagli "*stati intermedi*", cioè gli stati che si ottengono applicando un operatore a uno stato in funzione del raggiungimento dell'obiettivo finale.

L'ambiente del compito determina il comportamento del solutore, in quanto definisce le mosse lecite, ne orienta la direzione ed è pertanto responsabile della rappresentazione che il soggetto si fa dello spazio problematico.

Elemento centrale dell'attività di problem solving è la ricerca di tutti i possibili passaggi all'interno dello spazio problematico. La risoluzione del problema consiste, infatti, nell'individuare una possibile successione di operatori che permette il raggiungimento dello stato finale.

La descrizione sopra riportata dei due approcci storici allo studio della soluzione dei problemi si è resa necessaria non solo per l'importanza storica che tali studi rivestono, ma anche perché tali approcci presentano, come vedremo più avanti, importanti implicazioni per lo studio della soluzione dei problemi aritmetici nei bambini.

1.1.2 Dal problem solving allo studio dei problemi aritmetici

A partire dagli anni '70 lo studio sulla soluzione dei problemi si spostò dai problemi *semanticamente poveri*, che per essere risolti non richiedono il riferimento a specifiche conoscenze precedenti, a quelli *semanticamente ricchi*, che implicano il riferimento ad una base di conoscenza ricca e articolata (Castellani, 1999).

Il passaggio dall'esame di attività cognitive semplici a quello di attività cognitive complesse è legato ad un percorso evolutivo della psicologia del pensiero, che si può osservare anche in altri campi della ricerca psicologica; i dati forniti dalla ricerca relativa alle situazioni semplificate, tipicamente studiate in laboratorio, forniscono una buona base di partenza per estendere l'analisi a situazioni più complesse e più vicine alla vita reale.

Sul piano metodologico il cambiamento è importante, perché implica, in luogo di un metodo sperimentale in senso classico, un metodo di studio fenomenologico, in base al quale la ricerca muove da una differenza osservata nella realtà per risalire ai processi che la generano. Gli esperimenti non vengono abbandonati, ma vengono messi a punto cercando per quanto più possibile di simulare quanto avviene nella realtà.

Lo spostamento di attenzione dai processi di ragionamento in quanto tali alla loro interazione con le strutture di conoscenza ha determinato l'emergere di un "nuovo" oggetto di studio .

L'interesse per lo studio dei problemi matematici si iscrive in un contesto di evoluzione degli studi classici sul problem solving. Negli studi descritti in precedenza l'obiettivo era quello della formulazione di una teoria generale sul problem solving, con una concezione delle abilità di risoluzione strettamente dominio-generale. Le ricerche successive, invece, iniziarono a focalizzarsi sul ruolo dominio-specifico della conoscenza e dei processi, basandosi anche sull'osservazione del comportamento di soggetti "esperti".

La nuova prospettiva dominio-specifica e l'interesse verso il ruolo della conoscenza nei processi di soluzione dei problemi determina l'applicazione di questi studi in vari ambiti conoscitivi, tra cui, in particolare, quello matematico.

1.2 Principali metodi di studio della soluzione dei problemi matematici

Nel primo paragrafo sono stati descritti alcuni studi della teoria comportamentale, della teoria della Gestalt e della teoria cognitivista perché di enorme valore storico per lo sviluppo delle ricerche sul problem solving. Oltre a questi, diversi altri approcci hanno fornito indicazioni importanti sulle abilità connesse alla soluzione dei problemi. L'approccio psicometrico classico consiste nel misurare le differenze individuali tramite test di intelligenza. L'approccio è particolarmente importante per valutare le abilità di base che possono essere connesse con la soluzione dei problemi. Complessivamente tuttavia, se tale approccio fornisce importanti informazioni di carattere generale, presenta alcuni limiti nel predire il successo nella prestazione dei soggetti, in altre parole, non coglie in maniera specifica le strategie di soluzione di un solutore capace e le differenze con solutori meno abili.

L'approccio neuropsicologico analizza gli effetti di lesioni cerebrali sulle prestazioni dei soggetti. Tramite questo approccio è stato osservato (Luria e Tsvetkova, 1967) che pazienti frontali non si soffermano ad analizzare il compito e iniziano direttamente con strategie risolutive soffermandosi solo su gli aspetti che hanno catturato la loro attenzione. Sono incapaci di formulare un piano di soluzione ma mantengono la capacità di eseguire le operazioni. Differentemente pazienti con lesioni posteriori analizzano a lungo il testo del problema, ma non riescono a risolverlo perché non interpretano correttamente i termini relazionali o quantitativi. La difficoltà principale è dovuta all'afasia semantica che non permette una corretta traduzione dei termini.

Per quanto riguarda lo studio della soluzione dei problemi matematici, comunque, va sottolineato che gli studi più approfonditi e dettagliati derivano dall'approccio cognitivista. A partire dai primi studi di Newell e Simon sul *General Problem Solver*, sono stati descritti numerosi modelli in particolare sulla soluzione dei problemi aritmetici, che verranno analizzati più approfonditamente nel secondo capitolo. Su questi modelli va detto che molto frequentemente rimangono dei modelli teorici oppure vengono implementati su programmi di simulazione al computer. Alcuni modelli di simulazione hanno cercato di

riprodurre il processo di rappresentazione interna del soggetto e le strategie implicate nella soluzione del problema.

Si osserverà, tuttavia, che tali modelli e simulazioni, essendo straordinariamente dettagliati, finiscono col diventare poco utili per l'aspetto applicativo e clinico.

L'obiettivo principale di questo lavoro è l'analisi dei processi cognitivi che vengono attivati durante la soluzione di un problema. Il nostro interesse, in particolare, si focalizza sulla soluzione dei problemi che tipicamente vengono proposti a scuola, al fine di individuare le cause delle difficoltà che alcuni studenti presentano. Pertanto l'approccio scelto in questo lavoro, tenta di superare il limiti di un approccio strettamente psicometrico da un lato e strettamente cognitivo dall'altro, misurando le differenze individuali nelle prestazioni e rapportandole a modelli cognitivi con maggiore capacità esplicativa. Questa modalità di analisi, vicina a diversi studi condotti nel contesto italiano (Passolunghi, Cornoldi e Lonciari, 1996; Lucangeli e Cornoldi, 1995; Lucangeli, Tressoldi e Cendron, 1998) consente più facilmente di individuare le cause delle difficoltà e di conseguenza fornisce indicazioni utili per la didattica e per la clinica. Per tale motivo verranno di seguito descritti i metodi di indagine a cui si è fatto principalmente riferimento in questo lavoro.

1.2.1 Studi sulle caratteristiche dei problemi

Il presente paragrafo e quello seguente (studi sui soggetti) descrivono due diverse prospettive per lo studio della soluzione dei problemi aritmetici. L'analisi della difficoltà nella soluzione può essere focalizzata sui compiti che i soggetti svolgono. In questo caso l'interesse del ricercatore sarà l'analisi delle caratteristiche che rendono un compito più o meno difficile da risolvere, pertanto verranno confrontate le prestazioni dei soggetti rispetto a problemi differenti. L'altra prospettiva è quella delle differenze fra i soggetti. In questo caso l'interesse del ricercatore sarà quello di confrontare le caratteristiche dei soggetti che risolvono bene un problema rispetto ai soggetti non risolvono, pertanto verranno confrontate le prestazioni dei soggetti rispetto ad uno stesso compito.

Va sottolineato che il lavoro di ricerca oggetto della presente tesi e descritto nei capitoli successivi si focalizza principalmente sulle componenti

cognitive nella soluzione dei problemi, e adotta pertanto una prospettiva di studio sulle differenze fra soggetti. Cionondimeno, in questo paragrafo verrà fatta qualche considerazione sugli studi sui problemi, sia per interesse storico, sia perché questi studi introducono alcune riflessioni sulla misurazione dell'abilità di soluzione dei problemi.

Negli studi sulle differenze tra i problemi ci si focalizza sulle prestazioni di uno stesso soggetto rispetto a compiti diversi (ma che sottendono gli stessi concetti matematici), nel tentativo di analizzare quali caratteristiche del compito creano maggiori difficoltà e quali invece agevolano il processo di soluzione. Analizzando le principali ricerche sui fattori che influenzano la difficoltà di risoluzione nei compiti, è possibile individuare due principali sezioni. La prima riguarda fattori globali del compito, la seconda fattori specifici.

Gli studi sui fattori globali del compito comprendono ricerche sulle caratteristiche strutturali della formulazione del problema e sull'effetto della disponibilità di aiuti concreti per la rappresentazione del problema.

Nel primo caso vengono analizzate variabili tipo la lunghezza del problema, la complessità grammaticale, l'ordine delle frasi del problema. I risultati di questi studi hanno indicato che una grande proporzione di varianza nella difficoltà dei problemi può essere spiegata da questi fattori (Loftus & Suppes, 1972; Jerman, 1974)

Un altro fattore che è stato esaminato in letteratura è la disponibilità di materiali concreti come supporto nella soluzione di problemi. In molti studi è stato osservato che l'uso di blocchi o pupazzi o figure, facilita la soluzione del problema, soprattutto nei bambini più piccoli (Greeno & Riley, 1981; Steffe & Johnson, 1971). Un'ulteriore conferma a questi studi è data dal lavoro di Carpenter, Hiebert e Moser (1981) che ha mostrato che, dando ai bambini la possibilità di scegliere se risolvere il problema con o senza blocchi logici, i bambini di prima elementare preferivano usare i blocchi. Alcuni dati suggeriscono che la sola osservazione (senza manipolazione) di concrete rappresentazioni del problema migliora la prestazione nei problemi (Ibarra & Lindvall, 1979).

Sebbene l'analisi delle caratteristiche globali dei problemi abbia fornito dati molto importanti per la predizione delle difficoltà, differenze significative sono state trovate tra problemi in cui questi fattori erano tenuti costanti. Pertanto, alcune analisi sulla soluzione dei problemi matematici, si sono focalizzate su

caratteristiche più specifiche dei problemi. Le principali scoperte sono state che la comprensione delle relazioni fra le quantità descritte è strettamente legata alla “struttura concettuale” del problema. Per comprendere cosa si intende per struttura concettuale del problema si farà riferimento ad un lavoro di classificazione dei problemi che è stato particolarmente apprezzato ed utilizzato in numerose ricerche sulla soluzione dei problemi.

<i>AZIONE</i>	<i>RELAZIONE STATICA</i>
<p>CAMBIA</p> <p>Insieme sconosciuto: “risultato”</p> <p>1. Giorgio aveva 3 biglie. Poi Marco gli ha dato 5 biglie in più. Quante biglie ha adesso Giorgio?</p> <p>2. Giorgio aveva 8 biglie. Poi ha dato 5 biglie a Marco. Quante biglie ha adesso Giorgio?</p> <p>Insieme sconosciuto: “cambio”</p> <p>3. Giorgio aveva 3 biglie. Poi Marco gli ha dato alcune biglie. Adesso Giorgio ha 8 biglie. Quante biglie gli ha dato Marco?</p> <p>4. Giorgio ha 8 biglie. Poi egli dà alcune biglie a Marco. Adesso Giorgio ha 3 biglie. Quante biglie ha dato a Marco?</p> <p>Insieme sconosciuto: “inizio”</p> <p>5. Giorgio aveva alcune biglie. Poi Marco gli ha dato 5 biglie in più. Adesso Giorgio ha 8 biglie. Quante biglie aveva Giorgio all’inizio?</p> <p>6. Giorgio aveva alcune biglie. Poi ha dato 5 biglie a Marco. Adesso Giorgio ha 3 biglie. Quante biglie aveva Giorgio all’inizio?</p> <p>EQUALIZZA</p> <p>1. Giorgio ha 3 biglie. Marco ha 8 biglie. Cosa dovrebbe fare Giorgio per avere tante biglie quante ne ha Marco?</p> <p>2. Giorgio ha 8 biglie. Marco ha 3 biglie. Cosa dovrebbe fare Giorgio per avere tante biglie quante ne ha Marco?</p>	<p>COMBINA</p> <p>Insieme sconosciuto: “combina”</p> <p>1. Giorgio ha 3 biglie. Marco ha 5 biglie. Quante biglie hanno insieme?</p> <p>Insieme sconosciuto: “subset”</p> <p>2. Giorgio e Marco hanno 8 biglie insieme. Giorgio ha 3 biglie. Quante biglie ha Marco?</p> <p>CONFRONTA</p> <p>Insieme sconosciuto: “differenza”</p> <p>1. Giorgio ha 8 biglie. Marco ha 5 biglie. Quante biglie ha Giorgio più di Marco?</p> <p>2. Giorgio ha 8 biglie. Marco ha 5 biglie. Quante biglie ha Marco meno di Giorgio?</p> <p>Insieme sconosciuto: “subset più grande”</p> <p>3. Giorgio ha 3 biglie. Marco ha 5 biglie più di Giorgio. Quanta biglie ha Marco?</p> <p>4. Giorgio ha 8 biglie. Marco ha 5 biglie meno di Giorgio. Quante biglie ha Marco?</p> <p>Insieme sconosciuto: “subset più piccolo”</p> <p>5. Giorgio ha 8 biglie. Egli ha 5 biglie più di Marco. Quante biglie ha Marco?</p> <p>6. Giorgio ha 3 biglie Egli ha 5 biglie meno di Marco. Quante biglie ha Marco?</p>

Tab. 1.1 Classificazione delle possibili tipologie di problemi

Alcuni ricercatori (Heller e Greeno, 1978; Carpenter e Moser, 1981) utilizzando problemi risolvibili con un'unica operazione di sottrazione o addizione, hanno individuato tutte le formulazioni che è possibile ottenere attraverso la modificazione di due parametri: la struttura semantica e la posizione dell'incognita. Questi due parametri costituiscono quella che gli autori chiamano "struttura concettuale del problema" (traduzione mia). In altre parole, mantenendo la stessa struttura algebrica dei problemi (addizione $5 + 3$ e sottrazione $8 - 5$), è possibile ottenere ben 16 formulazioni che differiscono per la struttura concettuale.

Nella tabella 1.1 è riportata la classificazione dei problemi elaborata dagli autori. "Cambia", "Equalizza", "Combina" e "Confronta", esprimono le quattro possibili relazioni semantiche dei problemi cioè gli incrementi, decrementi, combinazioni o confronti che riguardano gli oggetti menzionati nel testo.

Nelle prime due categorie di problemi, *cambia* ed *equalizza*, l'addizione e la sottrazione sono *azioni* che causano l'incremento o il decremento di una certa quantità, mentre le categorie *combina* e *confronta*, comportano relazioni statiche fra due o più quantità.

All'interno di questa classificazione è possibile osservare altre differenze relative alla posizione dell'incognita. Questi problemi, infatti, sono caratterizzati da tre subset o *sottoinsiemi*. Ogni sottoinsieme è stato etichettato dagli autori in base al preciso ruolo nel contesto dell'insieme. Per esempio i problemi di tipo *cambia* sono costituiti da un primo sottoinsieme, definito *inizio*, poi dal sottoinsieme *cambio* e infine dal sottoinsieme *risultato*. In questo tipo di problemi l'incognita può essere collocata nell'insieme *risultato*, ma anche negli insiemi *cambio* e *inizio*, come si può vedere dalla tabella. Questa costruzione non può essere ugualmente eseguita su tutte e quattro le categorie, comunque, quello che si ottiene alla fine è la classificazione di sedici diversi tipi di problemi di addizione e sottrazione, aventi tutti la stessa struttura algebrica.

Sono stati condotti alcuni studi (e.g. Carpenter et al., 1981 Riley et al. 1981,1983) per valutare le differenze nelle prestazioni nella soluzione dei problemi riportati in tabella 1.2.

Nella tabella 1.2. sono riportati i risultati dello studio di Riley del 1981, che mostrano la proporzione di bambini che risolvono correttamente il problema

(**k** = bambini frequentanti le scuola dell'infanzia, **1, 2 e 3** = bambini frequentanti

Tipo	Grado			
	k	1	2	3
<i>Cambia (1)</i>	.87	1.00	1.00	1.00
<i>Cambia (2)</i>	1.00	1.00	1.00	1.00
<i>Cambia (3)</i>	.61	.56	1.00	1.00
<i>Cambia (4)</i>	.91	.78	1.00	1.00
<i>Cambia (5)</i>	.09	.28	.80	.95
<i>Cambia (6)</i>	.22	.39	.70	.80
<i>Combina (1)</i>	1.00	1.00	1.00	1.00
<i>Combina (2)</i>	.22	.39	.70	1.00
<i>Confronta (1)</i>	.17	.28	.85	1.00
<i>Confronta (2)</i>	.04	.22	.75	1.00
<i>Confronta (3)</i>	.13	.17	.80	1.00
<i>Confronta (4)</i>	.17	.28	.90	.95
<i>Confronta (5)</i>	.17	.11	.65	.75
<i>Confronta (6)</i>	.00	.06	.35	.75

Tab 1.2.

le prime tre classi di scuola primaria).

I risultati principali di questi studi indicano che entrambe le variabili, struttura semantica e identità del valore sconosciuto, risultano cruciali per la difficoltà relativa dei compiti e quindi per la loro risoluzione. In generale, col diminuire dell'età dei bambini la difficoltà di risoluzione aumenta, e questo non è un risultato sorprendente.

L'evidenza che i problemi con diversa struttura semantica comportano una diversa difficoltà nella risoluzione, nonostante questi problemi richiedano le stesse operazioni, suggerisce chiaramente che la soluzione dei problemi richiede qualcosa di più che la semplice conoscenza delle operazioni. Carpenter et al. (1981) sostengono che, per i bambini, il fattore determinante per la scelta della strategia di soluzione è la struttura del problema. Riley et al. (1983) ipotizzano che le quattro diverse strutture semantiche corrispondano a quattro diversi concetti: cambiare, equalizzare, confrontare e combinare. Sulla base di questi risultati, si potrebbe ipotizzare che i quattro concetti emergano in tempi differenti durante lo sviluppo cognitivo, questo spiegherebbe le diverse prestazioni di bambini di età differente, ma i risultati di ulteriori indagini ci dimostrano che questa visione è troppo semplicistica. Infatti, la prima evidenza che questi concetti non sono acquisiti in maniera sequenziale, ci è data dal fatto che problemi con la stessa struttura semantica, variano a loro volta per difficoltà. È l'altra variabile che abbiamo preso in considerazione che entra in gioco in questo caso; infatti,

prendendo ad esempio un problema di tipo *cambia*, anche bambini molto piccoli non presentano alcuna difficoltà a risolvere il problema quando l'insieme *partenza* e *cambia* sono noti e la richiesta è quella di trovare l'insieme *risultato* (problemi *cambia* 1. e 2. nella tabella). Tuttavia i bambini cominciano ad avere qualche difficoltà quando sono noti gli insiemi *partenza* e *risultato* e bisogna individuare l'insieme *cambia* (problemi *cambia* 3. e 4.). Infine i problemi *cambia* 5. e 6. creano difficoltà a quasi tutti i bambini, anche rispetto ai problemi *combina* 2. e confronta 1.

Nel complesso, questo lavoro di categorizzazione è utile per fare una riflessione sulla complessità dello studio sulle formulazioni dei problemi. Da due semplici strutture algebriche si ottengono sedici diverse formulazioni dei problemi, semplicemente manipolando le due variabili descritte. Le sedici formulazioni dei problemi sono essenziali, non vengono introdotti termini o concetti differenti. Queste stesse formulazioni potrebbero differire ulteriormente se venissero inseriti termini nuovi, parole con differenti frequenze d'uso, frasi di contesto superflue per la soluzione del problema, o ancora dati superflui. Le possibili formulazioni verbali di un semplice problema matematico sono praticamente infinite. Consideriamo poi che anche le strutture algebriche dei problemi matematici sono praticamente infinite. Pertanto, lo studio delle differenze fra i problemi e delle difficoltà specifiche che queste determinano, risulta estremamente complesso per il coinvolgimento di un grandissimo numero di variabili.

Tuttavia, nonostante la complessità della misurazione, questo approccio risulta particolarmente utile ed interessante per le implicazioni che determina nella didattica dei problemi matematici.

1.2.2 Studi sulle caratteristiche dei solutori

Come anticipato nel precedente paragrafo, gli studi sui soggetti prendono in considerazione le differenze fra soggetti diversi nella soluzione del problema aritmetico. Alla base di questo approccio vi è quindi l'interesse a comprendere perché alcuni soggetti risolvono i problemi con facilità mentre altri non vi riescono, quali abilità cognitive sviluppano i buoni solutori, quali strategie stanno alla base della soluzione del problema.

Numerosi studi hanno messo in luce le differenze fra gli individui che risolvono problemi di matematica. In questo paragrafo verranno brevemente descritte alcune delle metodologie impiegate, mentre ulteriori aspetti delle differenze fra i soggetti saranno riprese nel corso di questa trattazione, come è stato anticipato, infatti, l'approccio delle differenze fra i soggetti è quello seguito nei nostri studi.

Molti paradigmi sperimentali in questo contesto consistono nel confronto delle prestazioni fra *buoni* e *cattivi solutori di problemi*. In questo caso vengono valutati e confrontati soggetti di simile livello scolastico, per esempio bambini frequentanti la stessa classe, e si misura l'abilità di risolvere i problemi. In base alle prestazioni, i soggetti vengono poi assegnati ai due gruppi, buoni o cattivi solutori. A questo punto, si possono analizzare le differenze di prestazione fra i gruppi rispetto alle variabili che la ricerca ha previsto di misurare. Nel caso dell'esempio si tiene sotto controllo la variabile "livello di istruzione" perché per costruzione i gruppi sono costituiti da bambini frequentanti la stessa classe.

Una prospettiva differente è invece confrontare i soggetti esperti con quelli che non lo sono. Infatti in questo caso la discriminante principale fra chi può essere definito un esperto e chi invece è un novizio, risiede proprio nel livello di conoscenza e di esperienza in un settore specifico. La metodologia di ricerca tipicamente adottata in questo caso è il cosiddetto *expert-novice paradigm*, in base al quale si scelgono due gruppi di soggetti, rispettivamente esperti e inesperti e si sottopone a entrambi i gruppi uno stesso problema. A questo punto si possono valutare le differenti prestazioni fornite dai gruppi. Un esempio interessante di questo approccio è dato dallo studio di Chi e altri (Chi, Feltovich e Glaser, 1981), di cui si parlerà più approfonditamente in seguito, in cui erano messa e a confronto le prestazioni di docenti universitari di fisica ("esperti" nella risoluzione di problemi di fisica) e studenti del primo anno del corso di laurea in fisica (che possiamo definire "novizio", chiaramente se confrontati con i docenti universitari). In questa prospettiva possono anche essere messi a confronto le prestazioni di bambini di diverse età nel problem solving matematico, per esempio bambini di prima elementare, che possiamo considerare novizi e bambini di quarta elementare, che possiamo per certi versi considerare "esperti" nel risolvere problemi.

Capitolo Secondo

Modelli cognitivi per la soluzione dei problemi aritmetici

2.1 Il modello di Mayer

Il modello di Mayer (1983, 1987; Mayer, Larkin & Kadane, 1984) è uno dei primi ad essere stato elaborato in questo ambito. La teoria principale di riferimento del modello è quella dell'HIP, che ipotizza, come abbiamo visto nel primo capitolo, che l'informazione venga elaborata attraverso un certo numero di stadi per giungere alla soluzione del problema. Il modello prevede due fasi fondamentali, la *codifica del problema* e il *processo di ricerca*, che a loro volta comprendono due sottoprocessi: la *traduzione* e la *comprensione*; la *pianificazione* e il *calcolo*. (tab. 2.1) All'interno di ogni fase possono essere distinti vari processi cognitivi, ognuno caratterizzato da un tipo particolare di conoscenza.

Processi	Sottoprocessi	Tipi di conoscenza
Codifica del problema	Traduzione	Linguistica e semantica
	Integrazione	Conoscenza degli schemi
Processo di ricerca	Pianificazione	Conoscenza delle strategie
	Esecuzione	Conoscenza degli algoritmi - Calcolo

Tab. 2.1 Teoria di Mayer

Il lavoro di analisi dei diversi livelli di conoscenza condotto da Mayer e collaboratori (1984) è particolarmente significativo, perché mette in evidenza dei concetti che possono sembrare scontati, ma che in realtà spesso sono stati ignorati, soprattutto in ambito scolastico. Infatti, come evidenziano gli autori, molto spesso si considera indispensabile per la soluzione di problemi matematici, la conoscenza

degli algoritmi di calcolo, e l'indagine dei ricercatori si sofferma esclusivamente sull'analisi dei livelli di tali algoritmi.

Quello che si ignora spesso è che, nel processo di soluzione di un problema matematico, sono richiesti diversi tipi di conoscenza, relativi ai vari stadi di soluzione.

Analizziamo l'interessante proposta di Mayer e al. (1984), attraverso un semplice esempio, riportato dagli stessi autori, il problema dell'astronauta:

Un astronauta necessita di 2,2 libbre di ossigeno al giorno quando si trova nello spazio. Quante libbre di ossigeno sono necessarie ad un gruppo di tre astronauti durante un viaggio nello spazio di cinque giorni?

Il primo stadio che Mayer e collaboratori individuano, per la soluzione di problemi simili a quello sopra riportato, è quello di *traduzione*, cioè una analisi frase per frase che consente di ottenere una rappresentazione interna del problema. In altre parole un bambino che si trova davanti ad un problema deve per prima cosa leggerne il testo e comprendere ogni parola e frase. A questo stadio è legato un tipo di conoscenza *linguistica* e *semantica*. La conoscenza linguistica è indispensabile per poter distinguere fra variabili, operatori e numeri, la conoscenza semantica permette, invece, di inferire le implicazioni di una determinata espressione. Pertanto, un solutore con una adeguata conoscenza linguistica, posto dinnanzi al problema dell'astronauta, saprà che "astronauta" è un nome e che la frase "un gruppo di tre astronauti" si riferisce alla stessa variabile. La sua conoscenza semantica, invece, gli permetterà di riconoscere che la parola "astronauta" si riferisce ad un uomo che viaggia nello spazio, che la parola "ossigeno" si riferisce ad una sostanza indispensabile per la sopravvivenza di questo uomo nello spazio. Alla fine di questa fase il solutore avrà costruito una rappresentazione del problema tipo:

(libbre di ossigeno al giorno) = 2,2

(numero di astronauti) = 3

(numero di giorni) = 5

(ossigeno totale) = ?

Lo stadio successivo è quello della *comprensione*, in cui le rappresentazioni interne frammentarie, ottenute nello stadio precedente vengono

organizzate in una struttura integrata e coerente. In questa fase è necessaria una conoscenza *schematica*, che permette di riconoscere il tipo di problema. In altre parole in questa fase il solutore ha bisogno di uno schema, cioè una struttura che chiarisce le relazioni interne fra le variabili del problema. Pertanto nel processo di comprensione il solutore avrà come input dei pezzi di informazione, provenienti dalla precedente fase di traduzione, e come output una rappresentazione integrata, e per far questo farà riferimento ad uno schema che fornisce una rappresentazione unificata della relazione fra le variabili. Nell'esempio dell'astronauta, il solutore può decidere che si tratti di un problema del tipo : $(quantità\ totale) = (quantità\ per\ unità) \times (numero\ di\ unità)$ e in questo caso le relazioni che andrà ad individuare potrebbero essere : $ossigeno\ totale = (quantità\ di\ ossigeno\ al\ giorno\ per\ astronauta) \times (numero\ di\ giorni) \times (numero\ di\ astronauti)$.

Il terzo stadio è quello della pianificazione, in cui viene elaborato un piano per giungere alla risposta. La conoscenza necessaria a questo punto è quella *strategica*, che si riferisce alla capacità del solutore di stabilire e monitorare un piano per trovare il valore sconosciuto. Il piano, nel caso del problema dell'astronauta potrebbe essere : *moltiplica (numero di giorni) per (numero astronauti), poi moltiplica il risultato per (quantità di ossigeno per astronauta), il risultato ottenuto sarà la risposta.*

L'ultimo stadio è quello di calcolo in cui si dovrebbero applicare le regole stabilite nello stadio precedente. Il tipo di conoscenza richiesto a questo punto è *algoritmico*, è necessario cioè conoscere e applicare gli algoritmi di calcolo opportuni per ottenere il valore sconosciuto. Il solutore dovrà quindi sapere come eseguire operazioni aritmetiche come 3×5 o $2,2 \times 15$. Pertanto la conoscenza di algoritmi si riferisce alla conoscenza di *come* fare qualcosa, per esempio, come eseguire una procedura.

Le implicazioni della proposta degli autori sono importanti, perché evidenziano come una fonte delle differenze tra le persone nelle abilità matematiche vada ricercata nel livello di "conoscenza" del problema, che include diversi livelli e fattori. Se un bambino posto davanti al problema dell'astronauta non riesce a trovarne la soluzione, non si può genericamente concludere che non sappia applicare le regole della moltiplicazione, perché la sua carenza potrebbe risiedere nella comprensione delle proposizioni che esprimono la relazione fra

variabili, oppure nella conoscenza dei tipi di problema, o nella conoscenza di strategie appropriate, o ancora nella capacità di applicare gli algoritmi algebrici.

2.2 Il modello di Riley

Nella prospettiva di Riley et al. (1983) la soluzione dei problemi matematici prevede tre principali tipi di conoscenza:

- Lo *schema del problema*, necessario per la comprensione delle relazioni semantiche.
- Lo *schema dell'azione*, costituito dalla conoscenza del modello di azioni interessate nel processo di soluzione.
- La *conoscenza strategica*, necessaria per costruire un piano di soluzione del problema.

Queste tre componenti della conoscenza sono ritenute indispensabili dagli autori per una corretta soluzione del problema. Le difficoltà dei bambini nel risolvere i problemi può essere dovuta all'assenza di una o più di queste componenti.

L'analisi che gli autori conducono sui differenti livelli di abilità nel problem solving si basano sui dati ottenuti da Riley (1981) nello studio evolutivo sulle prestazioni in problemi di tipo *cambia* (descritto nel primo capitolo). Il principale fattore che gli autori individuano per spiegare le differenze è l'acquisizione di maggiori abilità nel *rappresentare* le informazioni del problema, e quindi a livello dello *schema del problema*. Questa ipotesi si contrappone con quella che prevede che le difficoltà dei bambini siano dovute alla mancanza di conoscenza delle azioni necessarie per risolvere il problema (quindi il livello dello schema dell'azione). Alcuni studi (e.g. Hudson, 1980) dimostrano chiaramente che alcuni problemi, che risultano difficili nella loro versione originaria, sono resi più semplici cambiando il testo in maniera opportuna. Questi studi sono presi dagli autori a sostegno delle loro ipotesi, come essi stessi spiegano: «Noi ipotizziamo che l'acquisizione dell'abilità sia primariamente dovuta ad un miglioramento del bambino nella comprensione del problema, cioè, della sua abilità nel rappresentare *le relazioni fra le quantità* descritte nella

situazione problematica, in modo da rendere disponibili le procedure di soluzione.» (Riley et al., 1983).

Riley ha ideato un modello computazionale delle procedure di soluzione che comprende un processo di rappresentazione delle informazioni del problema. Il modello cerca di simulare le prestazioni di bambini con diversi livelli di abilità. I livelli di abilità sono stati desunti dai diversi pattern di prestazione, tipici di bambini a differenti età. I pattern di prestazione sono riportati in tabella 2.1; i livelli di prestazione individuati sono tre, un + indica una risposta corretta, mentre NR indica che non è stata data risposta. Un numero tra virgolette indica l'errore caratteristico per quel problema.

L'analisi di Riley dei processi coinvolti in un problema *cambia*, consiste in tre modelli che simulano i diversi livelli delle prestazioni dei bambini. Le strutture di conoscenza e le procedure rappresentate in questi modelli rappresentano ipotesi sui tipi di componenti del processo necessari per spiegare i differenti pattern di prestazioni. Le differenze principali fra i tre modelli sono legate al modo in cui l'informazione è rappresentata e manipolata.

Tipi di problemi	Livello di prestazione		
	1	2	3
<i>Cambia 1</i>	+	+	+
<i>Cambia 2</i>	+	+	+
<i>Cambia 3</i>	“8”	+	+
<i>Cambia 4</i>	+	+	+
<i>Cambia 5</i>	“5”	“5”	+
<i>Cambia 6</i>	NR	NR	+

Tab. 2.1

Modello (1). Il modello (1) descrive il più basso livello di prestazione. La conoscenza di cui dispone il modello per risolvere i problemi include schemi d'azione (vedi modello teorico di riferimento), procedure per la pianificazione, e semplici schemi per rappresentare l'informazione. Queste conoscenze sono sufficienti per risolvere i problemi *cambia* (1), (2) e (4), ma non per i restanti problemi. Questi tre problemi hanno delle caratteristiche in comune che permettono al modello (1) di arrivare alla soluzione del problema: la prima è che

L'azione richiesta per risolvere il problema può essere selezionata sulla base delle caratteristiche limitate del problema, la seconda è che il sottoinsieme *soluzione* è disponibile per un'ispezione diretta al momento in cui la domanda è posta. Per esempio per risolvere *cambia* (4) è sufficiente ridurre l'insieme iniziale di Giorgio da otto a tre blocchi, in risposta alla frase "*adesso Giorgio ha tre biglie*", di conseguenza i sottoinsiemi *cambia* e *risultato* si ritrovano fisicamente separati. Così il modello può facilmente identificare il sottoinsieme *cambia* quando viene chiesto "*quante biglie ha dato a Marco?*". La differenza con il problema *cambia* (3) è che in questo caso il subset *soluzione* non è disponibile per una ispezione diretta. La difficoltà del modello sta nel rappresentare adeguatamente il problema, e non nell'applicare le procedure corrette. Il modello rappresenta correttamente "*Giorgio ha tre biglie*", poi cerca di aggiungere blocchi in risposta a "*Poi Marco gli ha dato alcune biglie*", ma non è espresso quante, per cui il modello non fa nulla e la rappresentazione rimane quella iniziale. La frase successiva, "*Adesso Giorgio ha 8 biglie*" induce il modello a creare una rappresentazione di otto blocchi: il modello conta i tre blocchi iniziali e continua ad aggiungere blocchi fini a otto. Il sottoinsieme *risultato* conterrà una rappresentazione in cui l'identità è Giorgio e la quantità è otto, e il modello darà la risposta sbagliata "otto". Per risolvere il problema *cambia* (3) correttamente, il modello, o il bambino, dovrebbe rappresentare, internamente, un'informazione addizionale per i sottoinsiemi del problema. Questo probabilmente spiega perché i problemi *cambia* (3) sono generalmente più difficili per i bambini piccoli, rispetto a *cambia* (4), anche se entrambi i problemi hanno il sottoinsieme *cambia* ignoto.

Modello (2). La differenza principale fra il modello (1) e il modello (2) è che il modello (2) rappresenta internamente delle informazioni addizionali della situazione del problema, cioè mantiene in memoria i ruoli strutturali per ciascun item. Questo gli permette di dare la risposta corretta al problema *cambia* (3). Tuttavia, anche se il modello ha una più completa rappresentazione interna, è ancora carente di una importante abilità per una analisi top-down dalla rappresentazione del problema. Questo si può osservare nella prestazione in *cambia* (5), in cui da la risposta sbagliata *cinque*. Il modello riceve la prima frase, "*Giorgio aveva alcune biglie*", e prova a creare un set di blocchi per rappresentare le quantità ma realizza che questa non è specificata, così non fa niente. La seconda frase porta il modello a mettere cinque blocchi per Giorgio, ma

siccome il modello non era riuscito a rappresentare correttamente il sottoinsieme *inizio*, i nuovi cinque blocchi non sono rappresentati come un cambio nell'insieme iniziale, ma solo come un set di cinque blocchi appartenenti a Giorgio. Quando il modello riceve “*adesso Giorgio ha 8 biglie*”, aumenterà il set di cinque fino a otto, in questo modo il set di cinque blocchi è stato identificato come sottoinsieme *inizio*, sebbene fosse in realtà *cambio*, e questo spiega perché il modello risponde “*cinque*” quando viene chiesto “*Quante biglie aveva Giorgio all'inizio?*”

Modello (3). Come il modello (2) il modello (3) ha uno schema *cambia* per il mantenimento di una rappresentazione del problema. In più il modello può usare questo schema in maniera top-down per costruire una rappresentazione dell'intero problema prima di risolverlo. Questo permette al modello di lavorare con quantità il cui valore è sconosciuto, come richiedono i problemi (5) e (6).

In sintesi, il modello con più dettagliati schemi di rappresentazione e schemi di azione più sofisticati rappresenta il livello di abilità di soluzione più avanzato. Il modello (1) comprende le relazioni quantitative attraverso un semplice schema che limita la rappresentazione del problema ad una disposizione esterna. Il modello (2) ha una schema per mantenere una rappresentazione interna e manipolare l'insieme di quantità, aumentandolo o diminuendolo. Il modello (3) ha uno schema per la rappresentazione interna delle caratteristiche e utilizza questo schema in maniera top-down. I modelli più avanzati, (2) e (3) hanno anche molti schemi di azione per produrre e manipolare le informazioni quantitative e una più ricca comprensione delle relazioni fra i numeri.

2.3 Il modello di Kintsch e Greeno

Kintsch e Greeno (1985) hanno elaborato un modello che tratta sia gli aspetti della comprensione del testo, sia aspetti della risoluzione dei problemi, facendo riferimento a due precedenti lavori, una teoria dell'elaborazione del testo di van Dijk e Kintsch (1983) e le ipotesi sulla conoscenza semantica per la comprensione del testo del problema (Riley, Greeno & Heller, 1983). Una descrizione del modello è fornita in figura 3.1.

Gli autori, nella costruzione del modello, fanno riferimento alla classificazione di problemi che abbiamo descritto in precedenza (Heller & Greeno, 1978). Il modello, a partire da questi problemi, costruisce una rappresentazione mettendo in evidenza elementi chiave come i gruppi di oggetti, le quantità e le proprietà che distinguono questi gruppi, e le relazioni fra essi.

La rappresentazione del problema. La rappresentazione del problema, per questi autori, è duplice, da un lato abbiamo il *testo base*, che rappresenta l'input testuale, dall'altro il *modello del problema*, una rappresentazione astratta del problema. Il primo è una *struttura proposizionale* che si ottiene costruendo una coerente rappresentazione concettuale del testo, chiamata *microstruttura*, e poi derivando da questa una *macrostruttura gerarchica*, che corrisponde alle idee essenziali espresse nel testo. Il secondo è un'elaborazione del testo che include inferenze fatte dal lettore per mezzo della conoscenza circa l'argomento.

E' in pratica una rappresentazione del contenuto del testo, indipendente dalla specifica formulazione, che contiene gli elementi rilevanti tratti del testo base ma integrati con le conoscenze precedenti. Questa è la forma più adatta per l'applicazione delle strategie di calcolo.

Questa duplice rappresentazione viene costruita attraverso le varie fasi dell'elaborazione dell'informazione.

La costruzione del testo base avviene trasformando l'input verbale in una serie di proposizioni che costituiscono la rappresentazione concettuale del significato. Queste proposizioni vengono organizzate in una macrostruttura che evidenzia i concetti salienti generali. Nel caso dei problemi matematici i concetti salienti sono costituiti dall'analisi dei dati e dalle relazioni fra i dati.

La costruzione del modello del problema avviene per mezzo di un processo di inferenza del lettore, che, partendo dal testo base, individua informazioni necessarie per la soluzione che non sono comprese nel testo base e nello stesso tempo esclude le informazioni che non sono rilevanti.

Le due componenti fondamentali del modello sono una serie di *strutture di conoscenza* e una serie di *strategie* che permettono l'uso di queste conoscenze per la costruzione della rappresentazione e soluzione del problema.

STRUTTURE DI CONOSCENZA	STRATEGIE									
<p><u>FRAMES PROPOSIZIONALI</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Esistenziale • Quantità • Possesso • Confronta • Tempo <p><u>SCHEMA DEGLI INSIEMI</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Oggetto • Quantità • Specificazioni • Ruolo <p><u>SCHEMA DI ORDINE MAGGIORE</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Schema "trasferisci fuori e trasferisci dentro" → <table border="1" data-bbox="587 882 756 958"> <tr><td>1 start set</td></tr> <tr><td>2 transfer set</td></tr> <tr><td>3 result set</td></tr> </table> • Schema "parte-tutto" → <table border="1" data-bbox="587 1003 756 1079"> <tr><td>1 sub set 1</td></tr> <tr><td>2 sub set 2</td></tr> <tr><td>3 superset</td></tr> </table> • Schema "più di meno di" → <table border="1" data-bbox="587 1160 756 1236"> <tr><td>1 large set</td></tr> <tr><td>2 small set</td></tr> <tr><td>3 difference</td></tr> </table> 	1 start set	2 transfer set	3 result set	1 sub set 1	2 sub set 2	3 superset	1 large set	2 small set	3 difference	<p><u>CREA L'INSIEME</u></p> <p><u>TRASFERISCI</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Sub-strategia "result-set" <p><u>FAI LA DIFFERENZA</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Sub-strategia "large-set" • Sub-strategia "small-set" <p><u>SUPERSET</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Sub-strategia "sub-set"
1 start set										
2 transfer set										
3 result set										
1 sub set 1										
2 sub set 2										
3 superset										
1 large set										
2 small set										
3 difference										

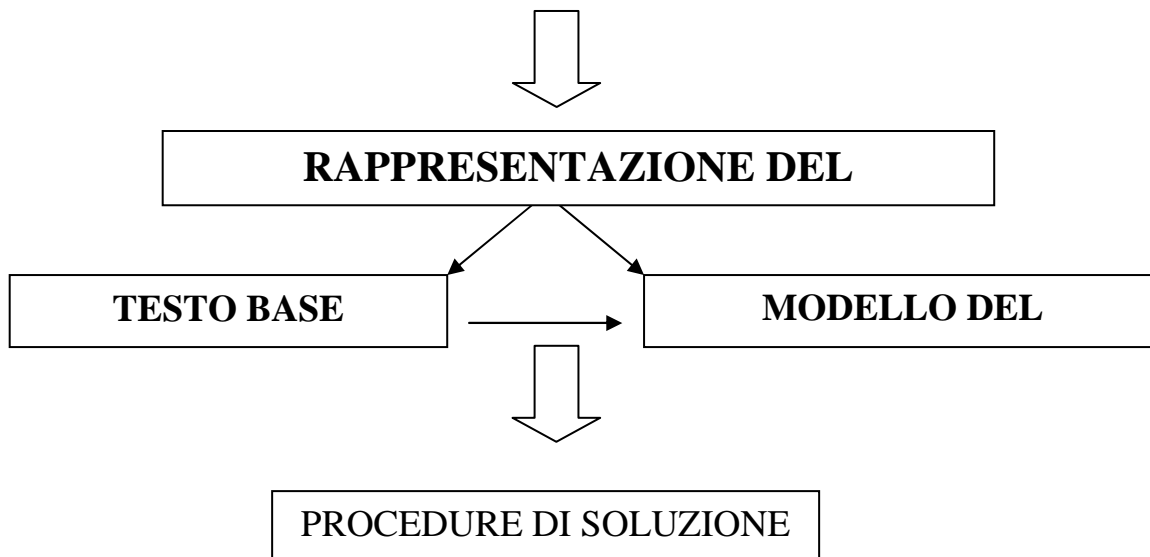


Fig. 2.1 Modello di Kintsch e Greeno

Le strutture di conoscenza. Le strutture di conoscenza sono di tre tipi, e sono necessarie sia per la rappresentazione sia per la soluzione del problema:

- *frame* proposizionali,
- schema del sottoinsieme,
- schema di ordine maggiore.

La prima è costituita da un set di *frame* proposizionali, necessaria per tradurre il testo in proposizioni. La seconda è costituita da una serie di schemi, che permettono la rappresentazione delle proprietà e relazioni fra i dati. Questi schemi sono necessari per la costruzione delle macrostrutture e del modello del problema. La terza è una struttura di conoscenza di ordine più alto, costituita da un insieme di schemi che rappresentano le operazioni in forma generale. Vediamo come lavorano queste strutture più nel dettaglio, riferendoci ad uno dei problemi-tipo utilizzati dagli autori. Il problema è *Combina num. 1* della tabella 3.1 riportata in precedenza:

Giorgio ha tre biglie
Marco ha cinque biglie
Quante biglie hanno insieme?

Frames proposizionali. I frames proposizionali vengono costruiti per mezzo di una semplice analisi grammaticale. In questo modo otteniamo una traduzione dei termini del testo in proposizioni all'interno di uno schema. Nel caso dell'esempio avremo per prima cosa dei nomi propri, Giorgio e Marco, che indicano l'esistenza di alcuni individui. Nel modello questo frame viene chiamato "*esistenziale*"; ogni nome viene associato ad una variabile, per esempio x e y che permette di riferirsi all'individuo in altre proposizioni. L'analisi del testo prosegue individuando delle quantità associate ad oggetti, per esempio, *tre biglie*, oppure, *quante biglie*. Il frame in questo caso è detto "*quantità*", la proposizione che ne deriva è, nel primo caso <numero> <nome comune>, e il significato derivato è che esiste un oggetto: <biglia> in una certa quantità: <tre>, nel secondo caso l'<aggettivo> *quante* associato al <nome comune> *biglie*, ci darà un altro significato, e cioè che esiste un oggetto: <biglia> ma la quantità è ignota, in questo modo è stato individuato l'obiettivo del problema, cioè trovare questa quantità. Altri frame individuati dagli autori sono "*possesso*" e "*tempo*". Per esempio il frame di possesso è innescato dal verbo *ha* (*tre biglie*). Un ulteriore

frame è “*confronta*”, che non è usato nell’esempio di sopra, ma viene attivato quando nel testo sono presenti proposizioni tipo “*ha n biglie più di*” o “*ha n biglie meno di*”.

Schema degli insiemi. E’ un elemento fondamentale della conoscenza per la rappresentazione del problema e, in particolare, degli insiemi che costituiscono il testo. Ogni insieme è rappresentato da quattro attributi. L’*oggetto* determina l’insieme, è indicato da un nome comune che indica il tipo di oggetto che l’insieme contiene. La *quantità* ci dà indicazioni sulla cardinalità dell’insieme e può essere indicata da un numero o da termini tipo “ALCUNI” o “QUANTI?”. La *specificazione* ci dà informazioni che distinguono un insieme dagli altri, per esempio sul proprietario dell’insieme, sul tempo o sulla localizzazione dell’azione. Il *ruolo* ci dà indicazioni sulle relazioni dell’insieme in un contesto più ampio che include gli altri insiemi. Nel problema *combina num 1*, il primo insieme è: *Giorgio ha tre biglie*. In questo caso lo schema degli insiemi si attiverà individuando l’oggetto, <un nome comune>, e quindi le *biglie*. Poi individuerà la quantità, <un numero>, *tre*. Poi andrà a cercare le specificazioni dell’oggetto, <il proprietario>, <il tempo dell’azione>, e quindi *Giorgio*, e il tempo è quello presente, come indica il presente indicativo dal verbo avere. Il ruolo, in questo caso rimane indefinito, perché non è stata posta ancora alcuna domanda. Come vedremo in seguito, appena completata l’analisi schematica dei tre insiemi, si potrà assegnare un ruolo ad ogni sottoinsieme, nel caso dell’esempio, il primo sarà un *subset*, così come il secondo, mentre l’ultimo sarà un *superset*.

Schema di ordine maggiore. Come si può vedere dall’esempio riportato in precedenza, i problemi studiati da Kintsch e Greeno sono suddivisi in tre insiemi. Le relazioni fra questi insiemi sono cruciali per decidere come risolvere il problema. Il modello prevede cinque schemi di ordine più alto, usati per analizzare le relazioni fra gli schemi e inserirle nella rappresentazione del problema. Lo schema definito “*trasferire*” (*transfer*), è necessario per la rappresentazione dei problemi di tipo “*cambia*”, riportati nella tabella 3.1. Per prima cosa, in ognuno di questi problemi, abbiamo un insieme iniziale, definito “*inizio*” (*start set*), in cui constatiamo una certa quantità di oggetti. Nel secondo insieme una certa quantità dello stesso oggetto viene data al soggetto del primo insieme. Questo insieme è definito “*cambio*” (*transfer set*). In questo modo si è venuto a creare un nuovo insieme, l’ultimo, che è chiamato dagli autori

“risultato” (*result set*). Questa è una delle due possibili configurazioni dello schema, detta “*trasferire dentro*”, in cui la quantità di oggetti del primo insieme, viene ampliata in seguito all’azione presente nel secondo insieme. Nel secondo caso, “*trasferire fuori*”, l’insieme di oggetti iniziale viene ridotto, in quanto è il soggetto del primo insieme a dare una quantità di oggetti al soggetto del secondo insieme. Sono delle proposizioni particolari che permettono di innescare il corretto schema. In questo caso, la schema *trasferire*, è attivato dal verbo *dare* (poi Marco gli dà altre cinque biglie).

Lo schema “*parte-tutto*” viene applicato nel caso dei problemi “*combina*”, riportati nella tabella 3.1. Anche questi sono formati da tre insiemi, di cui due, detti *subset*, sono caratterizzati dal verbo avere, e indicano ciascuno la quantità di oggetti posseduta da un soggetto. Il *superset* specifica l’insieme che contiene gli oggetti appartenenti ad entrambi i soggetti.

Gli schemi “*più di*” e “*meno di*” vengono attivati da proposizioni tipo “*ha più di*”, questa proposizione permette anche assegnare il ruolo di *insieme più piccolo* e *insieme più grande* ai due insiemi precedenti.

Le strategie. Oltre le strutture di conoscenza, che abbiamo appena visto, sono previste nel modello alcune *strategie di comprensione*. Il testo base viene costruito organizzando le proposizioni del testo in una struttura coerente, sulla base degli appropriati schemi di conoscenza: sono le strategie che permettono la scelta dello schema più appropriato da utilizzare per questo scopo.

In genere, le strategie sono innescate dalle proposizioni che si incontrano leggendo il testo. Alcune strategie richiedono l’attivazione di substrategie.

La strategia “*crea l’insieme*” (*make-set*) è attivata quando le proposizioni del testo ci danno indicazioni circa la “quantità” di un tipo di oggetto. L’azione che questa strategia prevede è quella di formare una struttura di dati che rappresenti un insieme specifico, che evidenzia l’oggetto, la quantità, le specificazioni e il ruolo, come prevede lo *schema dell’insieme*. Infatti, nei problemi di questo tipo, gli schemi di insiemi sono sempre utilizzati per costruire la struttura di base dell’informazione. Possiamo dire che il testo base è costituito da una concatenazione di vari schemi di insiemi.

La strategia *trasferisci* (*transfer-set*) è attivata quando una proposizione contiene il verbo *dare*. Il soggetto del verbo, con questa strategia, viene assegnato all’insieme “*trasferisci fuori*”, mentre l’altro soggetto del problema è assegnato

all'insieme "*inizio*". Come possiamo notare, questa strategia lavora per assegnare i ruoli in accordo con uno schema *trasferire dentro* o *trasferire fuori*.

La strategia "*fai la differenza*" (*difference*) è attivata da una proposizione tipo "*ha più di*" o "*ha meno di*", e lavora, appunto, in accordo con uno schema *più di* o *meno di*. Questa strategia assegna alla proposizione *ha più di* il ruolo di insieme *differenza*, inoltre attiva due substrategie "*trova l'insieme più grande*" e "*trova l'insieme più piccolo*", che assegnano il ruolo appropriato ai due insiemi che vengono confrontati.

La strategia "*superset*" è attivata da proposizioni tipo "*hanno insieme*", seguendo lo schema "*parte-tutto*". All'insieme che contiene questa proposizione è assegnato il ruolo di *superset*. Questo ruolo permette di individuare la quantità di oggetti appartenenti ai due soggetti insieme. Vengono inoltre attivate, in questo caso, due substrategie. Queste hanno il ruolo di individuare i due sottoschemi di oggetti che saranno poi accoppiati per determinare il *superset*.

Abbiamo così analizzato nel dettaglio le strutture di conoscenza e le strategie che Kintsch e Greeno hanno inserito nel loro modello. Queste strutture sono considerate dagli autori indispensabili per la rappresentazione del problema. Alla rappresentazione del problema fa seguito l'applicazione delle appropriate procedure, per giungere alla risoluzione. Anche in questo caso gli autori delineano, in maniera molto chiara, le possibili procedure da applicare. Si tratta in realtà di semplici strategie di conto, in quanto tutti i problemi studiati da Kintsch e Greeno si risolvono applicando una semplice addizione o sottrazione. Un esempio di queste procedure descritte è la procedura "*conta tutto*", che corrisponde all'addizione. Per applicare questa procedura a due quantità menzionate in un problema è necessario costruire un insieme contando la prima quantità, poi costruire un secondo insieme contando la seconda quantità, infine unire i due insiemi e contare tutto.

L'obiettivo degli autori era quello di sviluppare un modello che costruisse una rappresentazione dei problemi matematici in cui trovassero posto le informazioni necessarie per una soluzione corretta, basandosi su un modello generale dell'analisi del testo.

Il modello fornisce un quadro dei processi di analisi valido per ogni distinto problema riportato in tabella 1.1. Vengono messe in luce in questo modo le differenze di analisi che ogni problema comporta, incluse le richieste a carico

della memoria a breve termine. Queste differenze possono spiegare le differenze di prestazione in questi compiti particolari, infatti le predizioni del modello sono in genere supportate dai dati empirici.

Tuttavia il modello si limita a delineare un livello di prestazione sufficiente a risolvere ognuno dei problemi della tabella, senza individuare dei profili differenti, corrispondenti ai livelli di performance riscontrati empiricamente. Ma come gli stessi autori sottolineano il modello si presta a tali estensioni.

2.4 Il modello di Hegarty, Mayer e Monk

Hegarty, Mayer e Monk (1995) hanno delineato un processo di comprensione di un problema matematico che comprende vari stadi. La novità di questo modello, rispetto a quelli già presentati è il fatto che questo prevede due possibili approcci per la costruzione di una rappresentazione del problema. Come vedremo, è presumibile che i cattivi solutori utilizzino un approccio differente rispetto ai buoni solutori.

Nel descrivere questo modello gli autori partono dai risultati di uno studio che coinvolse soggetti adulti (studenti di college). In questo studio furono presentate ai soggetti due tipologie di problemi aritmetici simili a quelli riportati in tab. 2.2. che gli autori definirono “coerenti” e “incoerenti”. Come si può osservare, i problemi differiscono perché nella versione “coerente” il termine relazione *più* è coerente, appunto, con l’operazione da eseguire, cioè l’addizione; nella versione incoerente al contrario, il termine relazionale *meno* non corrisponde all’operazione da eseguire, che è sempre un’addizione.

VERSIONE COERENTE	<i>A Lucky il burro costa 65 centesimi la confezione. A Vons il burro costa la confezione 2 centesimi in più che a Lucky Se dovessi comprare 4 confezioni di burro, quanto pagherei a Vons?</i>
VERSIONE INCOERENTE	<i>A Lucky il burro costa 65 centesimi la confezione. Questo è 2 centesimi <u>meno</u> del costo di una confezione di burro a Vons. Se dovessi comprare 4 confezioni di burro, quanto pagherei a Vons?</i>
<i>Tab. 2.2 Versione Coerente e versione Incoerente del problema utilizzato nello studio di Hegarty (1995)</i>	

I risultati dello studio dimostrarono che i soggetti compivano un numero significativamente maggiore di errori nei problemi di tipo incoerente. Gli autori dedussero che il termine relazionale incoerente, in questo caso *meno*, con maggiore probabilità suggeriva l'utilizzo dell'operazione sbagliata, cioè la sottrazione. Queste osservazioni sono importanti per introdurre la descrizione del modello di comprensione del problema elaborato dagli autori.

Per risolvere un problema un solutore costruisce un *testo base*, estrae una rappresentazione dei concetti matematici e sviluppa un piano di soluzione. Di seguito si analizzano nel dettaglio questi processi.

Costruzione del testo base. Per costruire il testo base, il solutore deve rappresentare il contenuto di ogni proposizione nel testo ed integrarla con le altre informazioni della rappresentazione in via di costruzione. In molte teorie della comprensione del testo (Just & Carpenter, 1987; van Dijk & Kintsch, 1983) si assume che il testo venga analizzato in maniera incrementale. In questo modello, si immagina che il testo di un problema matematico sia processato allo stesso modo: per incrementi successivi. In ciascun incremento il solutore legge una frase che esprime una parte di informazione sulle variabili del problema.

Per prima cosa il soggetto rappresenta la frase singola. In questo momento il soggetto utilizza la propria conoscenza delle affermazioni che sono contenute tipicamente nei problemi matematici, come suggerisce lo studio di Mayer (1981). Queste conoscenze comprendono *assegnazioni*, che esprimono il valore di una certa variabile (per esempio: *Costo del burro a Lucky = 65 cent.*); *relazioni*, che esprimono le relazioni quantitative tra due variabili (per esempio : *Costo del burro a Lucky = 2 cent. meno di costo del burro a Vons*) e *domande*, che indicano che il valore di una certa variabile è sconosciuto (per esempio : *Costo del burro a Vons = ?*).

Così il primo compito del solutore è tradurre ogni frase in una rappresentazione interna integrata in modo da ottenere una rappresentazione a rete semantica. Fino a questo momento gli autori non prevedono una differenza fra i buoni e cattivi solutori.

Costruzione di una rappresentazione dei concetti matematici. La seconda fase è guidata dall'obiettivo di risolvere il problema e consiste nella rappresentazione dei concetti matematici. Gli autori postulano che in questa fase emergano le differenze fra i buoni e i cattivi solutori.

Nell'approccio dei cattivi solutori, questo secondo stadio consiste nell'osservazione di *fatti chiave*, come i numeri o *parole chiave*, come “*meno*” nella frase relazionale del problema del burro. Hegarty et al., inoltre ipotizzano che in questa fase i cattivi solutori eliminino tutte le informazioni dal testo base, fatta eccezione delle *parole chiave* e dei *numeri*.

Al contrario, i buoni solutori del problema, in questa fase cercano di costruire e aggiornare un *modello del problema*. Il modello del problema, è una rappresentazione *centrata sull'oggetto*, che vuol dire, in altre parole, che il buon solutore cercherà di determinare se la singola affermazione che sta analizzando si riferisce a un nuovo oggetto o all'oggetto che è già stato rappresentato nel modello del problema. Gli autori immaginano che il modello del problema sia caratterizzato da una serie di simboli, che rappresentano le variabili, posizionati su una colonna di numeri (Lewis, 1989). Quando il solutore legge la prima frase del problema, il costo del burro a Lucky, costruisce una rappresentazione di una colonna di numeri, con il simbolo di Lucky posizionato al numero 65 di questa colonna. La seconda frase del problema si riferisce a due quantità. Ma il solutore nella precedente fase di analisi semantica ha determinato che il pronome “*Questo*” si riferisce al “*prezzo del burro a Lucky*”, e in questo modo non aggiunge il dato nella colonna di valori. Aggiungerà invece il simbolo che rappresenta il prezzo del burro a Vons. Poiché la frase indica che il prezzo del burro a Lucky è due unità *meno* del burro a Vons, il solutore collocherà il simbolo di Vons due unità più in basso del simbolo di Lucky. In questo modo il modello del problema contiene due simboli che rappresentano i prezzi del burro nelle due città, ma anche la relazione fra questi due prezzi, che è fornita dalla posizione relativa occupata dai simboli.

Riassumendo, i buoni solutori di problemi costruiscono un modello del problema, cambiando il formato della loro rappresentazione da una rappresentazione semantica delle frasi a una rappresentazione basata sull'oggetto. Al contrario, i cattivi solutori, passano da una rappresentazione semantica ad una rappresentazione più povera, che contiene meno informazioni e che può essere la causa di una erronea rappresentazione delle relazioni.

Costruzione di un piano di soluzione. Una volta che il solutore ha rappresentato le informazioni che reputava rilevanti per la soluzione del problema, è pronto per pianificare i calcoli aritmetici necessari per risolvere il problema. Come abbiamo visto nel capitolo precedente, è probabile che i cattivi solutori, che

hanno costruito una rappresentazione impoverita del problema inferiscono dalla presenza del termine “meno” un procedimento di sottrazione, costruendo così un piano di soluzione errato, in cui vengono sottratti 2 cent. dal prezzo del burro a Lucky.

Dall'altra parte i solutori più abili, che hanno costruito un modello del problema che include la corretta rappresentazione delle relazioni fra il costo del burro, costruiscono sulla base di questo un corretto piano di soluzione.

Inoltre gli autori ipotizzano che una rappresentazione basata sul modello del problema, non solo garantisce un accurato piano di soluzione, ma permette di mantenere il modello del problema in memoria e monitorare il processo di soluzione. Per esempio, il solutore può inferire dal modello qualitativo del problema, che il costo del burro a Vons è maggiore di quello di Lucky. In questo modo, se i calcoli danno un costo per unità minore di 65 cent., immediatamente il solutore individua un errore nei calcoli e ri-analizza il piano di soluzione.

Abbiamo così descritto un completo modello che fornisce una spiegazione dettagliata delle differenze fra buoni e cattivi solutori di problemi.

2.5 Il modello di Lucangeli, Tressoldi e Cendron

Il modello di Lucangeli, Tressoldi e Cendron (1998) è particolarmente interessante in questo panorama, in quanto si configura come la sintesi di numerose e articolate ricerche su questo argomento, che tuttavia non pervenivano a modelli unitari.

Una ricerca condotta da questi autori ha condotto alla formulazione di un modello che comprende cinque componenti come predittori fondamentali dell'abilità di soluzione dei problemi. Si descrive di seguito la ricerca che ha portato alla formulazione del modello.

Il primo luogo gli autori hanno individuato alcune abilità ritenute in letteratura fondamentali per la soluzione dei problemi. Sono state scelte sette abilità, tra quelle che mostravano maggiore supporto empirico: la *comprensione del testo*, la *rappresentazione del problema*, la *categorizzazione del problema*, la *pianificazione*, la *previsione del risultato*, e l' *autovalutazione delle procedure e dei calcoli*.

La comprensione semantica del testo, come si può rilevare anche dagli studi descritti in precedenza, è un aspetto del problem solving ampiamente indagato. Questi autori, ritengono che per comprendere il testo del problema occorre la maggior parte dei processi cognitivi implicati nella comprensione di un qualunque testo scritto, e in più la conoscenza del significato di alcuni termini di particolare importanza per un testo matematico, come “*più di*” o “*meno di*” ecc.

La rappresentazione del problema è un'altra abilità di particolare importanza per la soluzione dei problemi matematici. Secondo gli autori questa attività implica la costruzione di un modello mentale. Secondo Mayer (1992) l'informazione tratta dal testo viene integrata in una struttura unificata, dove il valore di ogni differente variabile viene strutturato con le altre e con la quantità che deve essere individuata. Questa abilità sembra essere fondamentale per guidare le scelte successive verso la soluzione del problema. Una rappresentazione sbagliata o parziale della relazione fra le variabili possa pesantemente influenzare il piano di soluzione e la scelta dei calcoli. Gli autori rilevano, altresì, come non vi sia accordo in letterature sulle caratteristiche di questa rappresentazione mentale, ma c'è un certo accordo nel sostenere che la rappresentazione visiva ha un ruolo fondamentale nell'organizzazione delle informazioni raccolte dal testo.

La terza abilità scelta dagli autori è la capacità di categorizzare il problema, cioè la capacità di riconoscerne la struttura profonda. L'importanza di questa componente è stata documentata su soggetti adulti, esperti (Hinsley, Hayes e Simon, 1977; Chi, Feltovich e Glaser, 1981), ma questa abilità è stata osservata anche in bambini. Per esempio confrontando bambini di terza primaria con bambini di quinta è stato osservato che i primi classificano i problemi in base alle caratteristiche superficiali del compito, come la lunghezza dell'enunciato, i nomi o gli oggetti menzionati nel testo, mentre i secondi classificano in funzione dello schema e la soluzione (Morales, Shute e Pellegrino, 1985).

La quarta abilità menzionata è la capacità di individuare un piano di soluzione. Anche questa abilità è indagata ampiamente in molti studi ed è riconosciuta come indispensabile in ogni problema matematico che richiede almeno due *step* per arrivare alla soluzione.

Le ultime tre abilità considerate riguardano l'aspetto metacognitivo del processo di risoluzione del problema: la stima del risultato, la valutazione delle

proprie scelte sulle procedure e la valutazione delle proprie scelte nei calcoli. La stima della soluzione può essere considerata una abilità metacognitiva perché comporta un riferimento alle passate esperienze con problemi simili da parte del solutore. L'autovalutazione è la capacità di monitorare la propria prestazione prendendo in considerazione le proprie capacità di risoluzione dei problemi.

La ricerca condotta da Lucangeli et al, per la validazione del modello ha coinvolto bambini dalla terza classe primaria alla seconda media. I problemi utilizzati sono stati scelti da testi scolastici di matematica e giudicati idonei dagli insegnanti. Furono somministrati ai bambini una versione di problemi standard, e una versione di problemi "partitivi". I problemi partitivi erano accompagnati da domande a risposta multipla: ognuna delle sette componenti scelte dai ricercatori era indagata con una specifica domanda a cui facevano seguito quattro possibili risposte. I bambini dovevano leggere il testo del problema, poi rispondere alle domande e infine risolvere il problema. Si riporta di seguito un esempio dei problemi utilizzati nella ricerca e delle domande a risposta multipla:

Esempio di problema per bambini di quarta elementare:

In una scuola elementare ci sono 3 classi quarte: quarta A, quarta B e quarta C. Nella quarta C ci sono 20 bambini, nella quarta B ci sono 6 bambini in meno. Nella quarta A ci sono 3 bambini in più rispetto alla quarta B. Quanti bambini ci sono in tutto?

Esempio di questionario relativo all'abilità di *comprensione*:

Scegli la frase con l'informazione più importante per la soluzione:

- *Nella quarta B ci sono 6 bambini meno della quarta C e 3 meno della quarta A (corretta)*
- *Nella scuola ci sono classi con differenti numeri di bambini (irrilevante)*
- *Nella quarta B ci sono 6 bambini in più della quarta C (sbagliata)*
- *Nella quarta A ci sono 3 bambini meno che nella quarta B (parziale)*

Lo scopo principale di questa ricerca consisteva nell'individuare un modello economico dei predittori della soluzione, cioè, il modello con il massimo della varianza spiegata e il minimo numero di variabili. Attraverso una regressione gerarchica multipla, i ricercatori hanno trovato che due abilità, previsione del risultato e autovalutazione dei calcoli, non apportavano un incremento significativo della varianza, sono state pertanto scartate dal modello.

Le restanti cinque componenti cognitive, comprensione del testo, rappresentazione del problema, categorizzazione del problema, pianificazione e autovalutazione, spiegano più del 50% della varianza della soluzione. Questo risultato conferma che queste cinque abilità cognitive sono coinvolte nel processo di soluzione del problema, e che tutte insieme danno un importante contributo alla qualità della prestazione.

Per valutare le relazioni reciproche fra le cinque variabili del modello, inoltre, è stata condotta una path analysis, testando la bontà dell'adattamento delle diverse relazioni, mantenendo la *comprensione* come prima variabile e la *soluzione* come ultima. Il modello con il migliore adattamento, riportato nella figura 2.2, è quello in cui la *comprensione* influenza direttamente la rappresentazione, la categorizzazione e la pianificazione, senza tuttavia postulare una relazione reciproca fra queste ultime. Dopo la fase di comprensione, quindi, ogni altra componente apporta un contributo unico per la soluzione, la somma di questi singoli contributi è cruciale per il raggiungimento della soluzione.

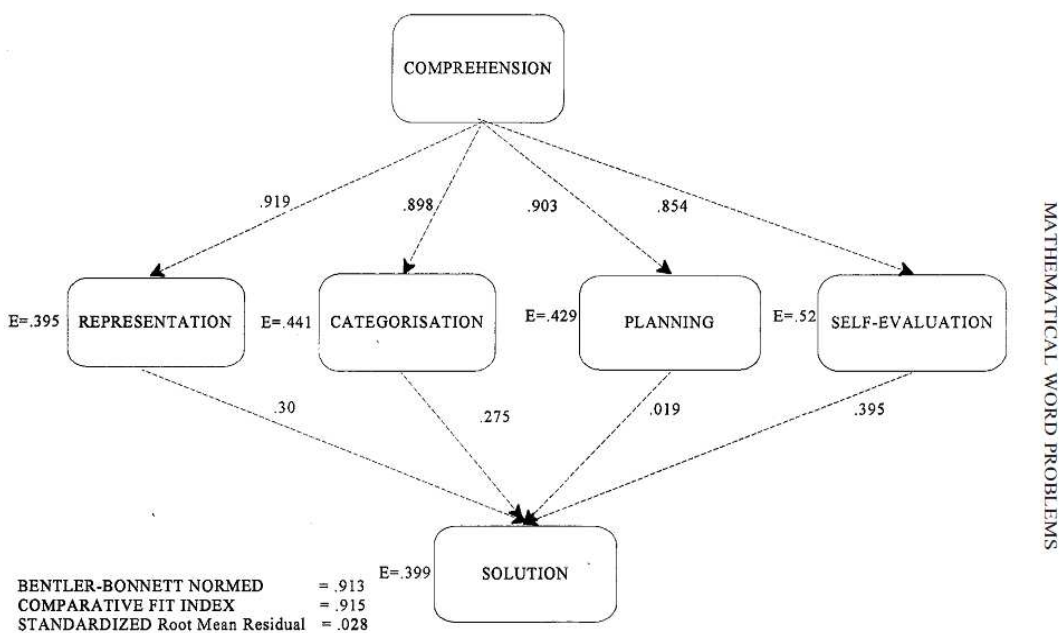


Fig. 2.2 Modello a cinque componenti della soluzione

2.5.1 Applicazioni del modello

Come si osservava all'inizio del paragrafo, questo modello ha una particolare importanza perché si presta a delle importanti applicazioni. Per prima

cosa si osservi che l'implicazione più importante di questo studio è che la comprensione, gerarchicamente sovraordinata alle altre abilità, agisce direttamente su ciascuna di esse, mentre le restanti quattro abilità risultando non correlate, danno un contributo unico alla soluzione, senza nessuna dipendenza reciproca. Questo conferma l'esistenza di profili differenti di difficoltà e di componenti cognitive alla base di esse. Infatti, se è probabile aspettarsi che i bambini con difficoltà di comprensione non riescano a proseguire verso la soluzione, è altrettanto possibile che ci siano bambini che, pur avendo compreso il problema, facciano errori in fase di integrazione, di pianificazione o di scelta nello schema di soluzione, ecc. E naturalmente, essendoci fonti di difficoltà diverse, gli interventi educativi devono orientarsi seguendo i differenti profili.

Lucangeli Tressoldi e Cendron (1998b) a questo fine hanno messo a punto uno strumento di valutazione (SPM, test delle abilità di soluzione dei problemi matematici) che permette una dettagliata analisi delle difficoltà nella soluzione dei problemi matematici e offre importanti informazioni per gli interventi educativi.

Il test è rivolto a bambini dalla terza primaria fino alla terza secondaria di secondo grado. Per ogni classe sono previsti quattro problemi, scomposti nelle cinque componenti del modello. Dopo aver letto il problema, il bambino deve scegliere una risposta fra quattro alternative per le componenti comprensione, rappresentazione e categorizzazione. Le quattro alternative sono costruite in modo tale che una risposta risulta irrilevante, una errata, una parziale ed una corretta. Il punteggio massimo è attribuito alla risposta corretta, punteggi intermedi sono attribuiti via via fino alla risposta irrilevante (considerata più grave della risposta errata perché esprime una completa assenza di analisi del testo). La domanda sulla comprensione richiede di individuare la frase che contiene le informazioni più importanti per risolvere il problema; la domanda sulla rappresentazione richiede di scegliere l'immagine che rappresenta esattamente il problema. La domanda sulla categorizzazione richiede di individuare fra quattro quale problema andrebbe risolto come il primo. La domanda di pianificazione richiede di ordinare le fasi del problema numerandole in ordine crescente. Dopo che il problema è stato risolto, la domanda sull'autovalutazione richiede di esprimere un giudizio sull'esecuzione del problema. Il punteggio di questa componente deve essere calcolato in rapporto all'effettiva risoluzione del problema.

Individuare i diversi profili di difficoltà quindi implica la possibilità di progettare interventi specifici. Infatti, sempre sulla base del modello sono stati costruiti diversi programmi di trattamento carta-matita, come: “Risolvere problemi aritmetici” (Passolunghi e Bizzarro, 2005), “Problemi senza problemi” (Perticone, 2008) e “Risolvere problemi in sei mosse” di (De Candia, Cibinel e Lucangeli, 2009). Sulla base del modello è stato anche costruito il software “Risolvere problemi aritmetici” (D'Amico, Passolunghi e La Porta, 2009) che costituisce, in questo contesto, una novità, trattandosi di uno strumento multimediale. Come è ormai noto e condiviso, i bambini trovano un forte incentivo nell'utilizzo di supporti informatici per l'apprendimento: la possibilità dei supporti multimediali di veicolare i contenuti trattati mediante l'uso di immagini, suoni, parlato ed animazioni, rende infatti più dinamiche, stimolanti e partecipative le sessioni di apprendimento che se ne servono.

Capitolo Terzo

Comprensione del testo e soluzione dei problemi aritmetici

3.1 Introduzione

La “comprensione del problema” è, probabilmente, l’aspetto maggiormente indagato nello studio della risoluzione dei problemi matematici. Qualunque modello che tenti di delineare gli *steps* coinvolti nel processo di soluzione, deve necessariamente fare i conti con il concetto della comprensione, come si può osservare anche nei modelli descritti in precedenza.

Il concetto della comprensione di un problema può includere vari aspetti; il primo è la comprensione del contenuto del testo, in altre parole, il significato del brano. Questo implica tutte le complesse abilità necessarie a comprendere un testo scritto, dalla conoscenza dei singoli termini alle conoscenze sintattiche che rendono conto della costruzione delle frasi, alle abilità inferenziali, che permettono di elaborare informazioni non esplicitamente presenti nel testo, ecc. Ma la comprensione del testo di un problema matematico è analoga o equivalente alla comprensione di un qualunque testo verbale? Esistono aspetti della comprensione del testo che sono particolarmente rilevanti per la comprensione del testo matematico? Esistono meccanismi di comprensione specifici per il testo del problema?

Il testo di un problema presenta alcune peculiarità rispetto ad un qualsiasi testo scritto, in primo luogo esso contiene dei numeri, generalmente scritti in codice arabo, che, se rilevanti al fine della risoluzione del problema, vengono denominati *dati*. In secondo luogo, il testo del problema contiene i termini che esprimono le relazioni quantitative tra le informazioni presentate. La comprensione del problema implica quindi anche la corretta analisi di tali termini

relazionali, che, a discrezione dell'insegnante, possono essere definiti come *parole chiave* o *parole magiche*, ecc. È quindi plausibile pensare che gli aspetti della comprensione del testo necessari a processare queste informazioni siano particolarmente importanti per comprendere il testo del problema.

In considerazione di tutto questo, l'ultima domanda che ci poniamo è: comprendere il testo o il contenuto di un problema matematico è sufficiente per risolverlo?

I paragrafi dedicati alla comprensione del problema analizzeranno le problematiche descritte:

- Caratteristiche della comprensione del testo: descrizione delle componenti che permettono al lettore di comprendere il contenuto del testo scritto;

- Quali aspetti della comprensione del testo intervengono maggiormente nella comprensione del testo del problema;

- Cosa avviene dopo la comprensione del contenuto? Cosa rende il testo del problema un testo speciale? Esistono meccanismi di comprensione specifici per il testo del problema?

3.2 La comprensione del testo

Comprendere ciò che si legge è qualcosa che va ben oltre il riconoscimento di un segno grafico e va ancora oltre alla capacità di sapere enunciare tale segno.

Questa riflessione iniziale, di cruciale importanza per la spiegazione dei processi di comprensione della lettura, non è scontata come potrebbe apparire. Fino a non molti anni fa, infatti, insegnanti ed educatori consideravano concluso l'apprendimento della lettura non appena lo studente avesse imparato a leggere ad alta voce in maniera fluente. Oggi, al contrario, diverse evidenze ci suggeriscono che ad una lettura fluente non sempre corrisponde una adeguata comprensione del testo letto e viceversa, ad una lettura stentata può comunque corrispondere una buona comprensione. La comprensione del testo, infatti, è intesa come capacità di rappresentarsi il contenuto di ciò che si sta leggendo in maniera coerente e in collegamento con le conoscenze che il lettore già possiede.

I processi di decodifica, cioè la capacità di riconoscere e pronunciare correttamente le parole di un testo, sono condizione necessaria per la comprensione ma non sufficiente. Tali processi permettono, infatti, l'accesso al significato delle parole: ma il riconoscimento della parola è solo il primo passo per la comprensione del testo. Probabilmente è un'esperienza comune quella di leggere un testo ad alta voce, magari in presenza di altre persone, ed essere talmente impegnati a leggere correttamente da non aver compreso quasi nulla alla fine della lettura. Questa semplice constatazione permette di capire quanta differenza ci può essere fra la decodifica dei segni e la comprensione del testo, pur trattandosi di processi strettamente interdipendenti.

Gli studi sulla comprensione del testo hanno subito un importante cambiamento di prospettiva intorno agli anni sessanta quando si passò da una concezione dell'apprendimento come processo passivo (l'apprendimento avviene tramite l'esposizione passiva agli stimoli e viene misurato tramite i parametri della quantità e dell'accuratezza) ad una concezione attiva dell'apprendimento, secondo la quale il soggetto che apprende opera una elaborazione dei dati che provengono dall'ambiente.

Questo cambiamento determinò il passaggio da una concezione della comprensione come un processo di astrazione di un significato intrinsecamente posseduto dal testo, ad un processo che mette sullo stesso piano lettore e testo: il lettore si serve delle proprie conoscenze e degli indizi estrapolati dal testo per avanzare delle ipotesi sul significato di ciò che sta leggendo. La comprensione è considerata un processo *attivo*, in quanto il soggetto ha un ruolo attivo, *costruttivo*, in quanto il significato viene costruito gradualmente mentre si legge, e *dinamico*, in quanto vi è una continua interazione fra le informazioni in entrata e le conoscenze preesistenti.

3.2.1 Caratteristiche del testo che influenzano la comprensione

Così come per i problemi aritmetici, come descritto nel primo capitolo, anche per lo studio della comprensione del testo si possono assumere due punti di osservazione. Da un lato l'analisi delle caratteristiche del testo, che ostacolano o facilitano la comprensione, dall'altro lato le caratteristiche del soggetto che legge. Anche in questo caso, la prospettiva che maggiormente verrà approfondita è

quella del lettore, tuttavia si accenneranno brevemente alcune considerazioni sulle caratteristiche del testo, che permettono anche di ragionare sulle caratteristiche peculiari del testo del problema.

Dai risultati di diversi studi si può evidenziare che la minore o maggiore comprensibilità di un testo può essere collegata ad una molteplicità di fattori, che intervengono a livello della parola, della frase o del brano.

Il livello della parola, indica che un brano può creare maggiori o minori difficoltà dal punto di vista lessicale. La difficoltà di una parola dipende da fattori quali il numero di componenti semantiche che la contraddistinguono e la sua frequenza d'uso. Le "componenti semantiche" di una parola sono le caratteristiche che definiscono il significato di quella parola. Se per esempio prendiamo la parola "ragazzo" vediamo che essa è definita dalle componenti "maschio-adulto-umano". Il numero di componenti che definisce una parola influisce sulla comprensibilità, in altre parole, i termini che necessitano di numerose componenti per essere definiti, o "spiegati", risultano più difficili da comprendere.

Un altro fattore che determina il livello di comprensibilità di una parola è la frequenza d'uso, cioè la frequenza con la quale la parola compare nel lessico: parole meno frequenti risultano di difficile comprensione rispetto a quelle più frequenti.

Il secondo livello in cui intervengono fattori di difficoltà è quello sintattico, le difficoltà in questo caso possono risiedere nella dissonanza fra la struttura della frase e le strategie messe in atto dal lettore per la comprensione. In altre parole, il lettore utilizza delle strategie di analisi del testo, ma può avvenire che il testo è incongruente rispetto alle strategie utilizzate, pertanto il soggetto dovrà ricorrere a strategie più sofisticate e questo costituisce una fonte di difficoltà. Teoricamente, il lettore, man mano che acquisisce expertise nella comprensione del testo, sviluppa delle strategie più complesse che gli consentono di analizzare i testi incongruenti con le strategie più semplici.

Nell'ambito della ricerca sono state descritte diverse strategie che presumibilmente vengono messe in atto dal sistema cognitivo per costruire il significato della frase. Chiaramente in questa sede non ci si soffermerà nello specifico di ogni strategia, ma si forniranno solo alcuni esempi. Una strategia è, per esempio, "cerca di attaccare ogni nuova parola al costituente precedente". In base a questa regola, frasi in cui i costituenti sono separati risultano più complesse

di quelle in cui i costituenti sono contigui, perché questo può creare maggiori ambiguità. Altra regola è “assumi che la prima proposizione è una principale, a meno che non sia marcata a livello del verbo principale come subordinata”, in base a questa regola una frase del tipo “*Matteo mangia la frutta prima di guardare la televisione*” risulta più facile di “*prima di guardare la televisione Matteo mangia la frutta*” in quanto la prima risulta in accordo con la strategia.

Altri esempi di difficoltà sintattica sono le frasi avversative, per esempio quelle introdotte dalla congiunzione *sebbene*. Questo è dimostrato da studi di carattere evolutivo, infatti bambini di età inferiore ad otto anni hanno difficoltà a comprendere frasi del tipo “sebbene il cancello fosse chiuso, il cane è scappato”. O ancora, le frasi passive risultano più complesse di quelle attive, probabilmente perché contraddicono la regola: “ogni sequenza nome-verbo-nome corrisponde alla sequenza attore-azione-oggetto”. La spiegazione di queste difficoltà può essere quindi che il soggetto, in questo caso i soggetti più piccoli, non hanno ancora definito una strategia più raffinata che consente di analizzare frasi passive o avversative, la strategia più elementare che possiedono non è congruente con la frase e quindi il testo risulta di difficile comprensione.

Un altro livello di analisi per le difficoltà di comprensione è quello del testo. In questo caso, uno dei fattori principali per prevedere la complessità è la “*coerenza testuale*”: più un testo è coerente più il lettore sarà in grado di costruire un adeguato modello del suo significato (Anderson e Armbruster, 1986).

La coerenza del testo può essere considerata dal punto di vista globale e dal punto di vista locale: la coerenza globale si riferisce alle caratteristiche del testo che facilitano la costruzione di una struttura in grado di raccogliere e ordinare i contenuti essenziali, la coerenza locale si riferisce a legami più semplici che collegano i concetti all’interno delle frasi o tra frasi contigue.

Per quanto riguarda la *coerenza globale*, un fattore che facilita la comprensione è la presenza di schemi concettuali generali, all’interno dei quali inserire i contenuti specifici. Un altro esempio per valutare la coerenza globale è tenere conto del genere letterario del brano e in funzione di questo individuare la struttura più adatta per quel genere: più il testo aderisce alla struttura letteraria di quel genere, maggiore sarà la sua coerenza globale e questo andrà a sua volta ad influenzare i processi di comprensione del brano.

La *coerenza locale* dipende da quando siano rese esplicite le connessioni fra le singole frasi all'interno del testo, risulta quindi proporzionale all'uso di pronomi connettivi, particelle avversative, ecc. testi maggiormente coesi, che presentano connessioni esplicite facilitano il lettore nella costruzione di un modello coerente per l'interpretazione del testo. Al contrario, dover rileggere ripetutamente un passaggio per creare dei legami logici, dover ricercare molte informazioni in memoria e dover trarre un gran numero di inferenze porta ad un grande dispendio di energie cognitive che vengono sottratte ad altri livelli di elaborazione.

3.2.2 *Caratteristiche del lettore nella comprensione del testo*

Nel paragrafo precedente abbiamo visto come la dimensione del testo può essere scomposta in diverse variabili o punti di osservazione, in questo paragrafo, invece, ci soffermeremo sulla dimensione del lettore e sulle variabili che favoriscono una efficace comprensione del testo.

Esiste ormai un comune accordo nel considerare elementi che rendono un lettore abile nel comprendere un testo, i seguenti quattro fattori:

- il corretto funzionamento del sistema di elaborazione delle informazioni;
- la ricchezza di conoscenze preesistenti;
- l'atteggiamento nei confronti del compito;
- l'uso attivo di strategie.

I primi due fattori riguardano in maniera particolare il ruolo della memoria: la memoria di lavoro è alla base del corretto funzionamento del sistema di elaborazione delle informazioni mentre la memoria a lungo termine è rilevante per spiegare il fattore delle conoscenze precedenti. È evidente come esista una stretta interdipendenza fra i due fattori, così come esiste un stretto legame fra memoria di lavoro e memoria a lungo termine (Baddley, 2000)

Per quanto riguarda il primo fattore, è importante citare gli studi che hanno messo in relazione la comprensione del testo con delle prove di memoria di lavoro. Negli anni ottanta Daneman e Carpenter (1980) elaborarono una prova che misurasse contemporaneamente il mantenimento dell'informazione e la sua elaborazione, nota come *Listening Span Test*. La prova restituisce una misura della ritenzione dell'informazione e, contemporaneamente, una misura della

capacità di elaborare una nuova informazione in ingresso attivando conoscenze a lungo termine, pertanto ciò che viene misurato non è la semplice ritenzione passiva dell'informazione a breve termine, ma anche l'elaborazione delle informazioni in entrata. Le autrici osservarono che i risultati ottenuti da soggetti nel *listening span test* presentavano correlazioni molto alte con compiti di comprensione del testo e conclusero che la capacità di memoria di lavoro è fondamentale per la comprensione del testo. Le differenze fra buoni e cattivi lettori possono essere in parte spiegate in funzione della efficienza nei meccanismi di elaborazione dell'informazione: i cattivi lettori potrebbero avere una difficoltà nel mantenere attive le informazioni importanti oppure nel ricodificare le informazioni in unità significative in modo da non sovraccaricare il sistema.

Numerosi studi successivi (Glanzer, Dorfman e Kaplan, 1981; Siegel e Ryan, 1989; Yuill, Oakhill, e Parkin 1989) condotti con metodologie differenti, confermarono i risultati ottenuti da Daneman e Carpenter, sottolineando l'importanza della memoria di lavoro e in particolare dell'esecutivo centrale nei processi di comprensione di lettura (Baddley, 1996).

Più recentemente, Engle et al. (Cantor e Engle, 1993; Conway e Engle, 1994) hanno osservato che differenze nei risultati al *listening span test* possono essere ascrivibili ad una diversa abilità nell'inibire le informazioni non importanti. Questa abilità risulta fondamentale per limitare il carico attentivo del sistema cognitivo: non tutti gli elementi processati dal sistema possono essere attivati ugualmente e contemporaneamente, il sistema cognitivo per essere efficiente ha la necessità di risparmiare le risorse attentive, per far questo è dunque necessario che il sistema discrimini fra informazioni rilevanti e irrilevanti e questo sistema viene identificato appunto nell'esecutivo centrale. Pertanto, questa abilità è stata messa in relazione con la comprensione del testo (Gernsbacher, 1997; Gernsbacher, Varner e Faust, 1990) specificando ulteriormente i meccanismi che il sistema di elaborazione delle informazioni mette in funzione nella lettura, come vedremo più avanti.

Il secondo fattore determinante per la comprensione del testo riguarda le conoscenze in possesso del lettore, da quelle lessicali fino a quelle che riguardano lo specifico argomento della lettura. L'influenza delle conoscenze precedenti del lettore per la comprensione di un nuovo brano è facilmente intuibile. In primo

luogo, se il lettore non fosse a conoscenza del significato della maggior parte delle parole contenute nel brano non sarebbe in grado di comprendere il significato delle singole frasi e del brano nel complesso. Inoltre, come messo in evidenza nelle ricerche di Hayes e Tierney (1982), le differenze nella comprensione del brano fra lettori sono dovute in gran parte alle conoscenze che i soggetti possiedono circa il contenuto del testo, e moltissime ricerche in questo ambito evidenziano la strettissima relazione esistente fra variabili socio-culturali e risultati in prove di comprensione del testo.

Il fattore delle conoscenze pregresse del lettore rimanda a due concetti fondamentali per l'analisi della comprensione del testo: la nozione di schema e il concetto di inferenza.

Uno "schema" è una rappresentazione mentale che il soggetto attiva nel momento della lettura di un brano, che risente delle conoscenze e delle influenze culturali personali. Secondo Bartlett (1932) gli schemi sono strutture astratte in cui le conoscenze sono organizzate e messe in relazione tra loro. Le informazioni che si acquisiscono nel corso dell'esperienza vengono sottoposte ad una elaborazione che le organizza in schemi, e in questo modo vengono immagazzinate in memoria. Lo schema viene attivato in maniera inconsapevole e permette, nel caso della comprensione di lettura, di attivare i possibili contenuti inerenti al testo, discriminare le informazioni importanti da quelli irrilevanti, organizzare le informazioni in entrata dando loro un ordine e mettendole in relazione tra loro, trarre delle inferenze, facilitare la memorizzazione.

Connessa alla nozione di schema è la capacità di trarre inferenze. Questa funzione consiste nel dedurre nuove informazioni a partire dagli indizi presenti nel testo e dalle proprie conoscenze. Trarre inferenze è fondamentale per la comprensione del testo, poiché in nessun brano possono essere esplicitate tutte le informazioni per poterlo comprendere. Possono essere osservate diverse tipologie di processi inferenziali. Per esempio, un tipo di inferenza molto comune, che avviene durante la lettura di un brano, è quella del recupero del significato di una parola ignota in base al contesto in cui è inserita. Un altro tipo di inferenza potrebbe essere stabilire che due espressioni fanno riferimento allo stesso personaggio anche quando questo è sottinteso. Ancora, tramite l'inferenza vengono create connessioni fra le frasi anche quando queste non sono esplicite. La funzione principale dell'inferenza è infatti quella di creare legami di significato.

La natura probabilistica dei processi inferenziali rende imprecisa la previsione della frequenza e della collocazione delle inferenze all'interno di un brano. Il numero di inferenze compiute dipende dal soggetto, dalle proprie conoscenze, dal tipo di approccio al compito, per esempio dal grado di approfondimento che il soggetto dedica alla lettura, dal tipo di testo. Questa capacità, inoltre, è strettamente legata al livello di maturità raggiunto nella lettura, infatti bambini piccoli compiono un minore numero di inferenze rispetto a quelli più grandi. Allo stesso modo la capacità di trarre inferenze sembra essere una variabile discriminante fra lettori con buone e cattive abilità di comprensione del testo.

Si accennerà solo brevemente al terzo e al quarto fattore, non perché la rilevanza per la comprensione del testo sia inferiore a quella di fattori descritti, ma perché è necessario restringere la trattazione agli obiettivi del presente lavoro.

L'atteggiamento nei confronti del compito è un fattore di evidente importanza: il testo, a prescindere dalle sue caratteristiche e dal suo grado di difficoltà è sempre a disposizione del lettore. Dipende da quest'ultimo avere un atteggiamento più o meno passivo o motivato nei confronti del compito. Il lettore può scegliere di soffermarsi su alcuni punti, rileggere passi, scorrere velocemente alcune parti. Questo presuppone che il lettore possa variare modalità di lettura a seconda degli scopi per cui legge, focalizzare l'attenzione in base all'importanza attribuita ai passi del brano, operare le opportune inferenze. L'interesse del lettore, il suo gusto, le sue preferenze e aspettative lo guidano e facilitano nell'accesso al significato del testo.

Ultimo fattore di fondamentale rilevanza nella comprensione del testo è l'uso attivo di strategie o, per usare un termine più specifico ed insieme completo, la metacognizione. Va fatta un'opportuna distinzione fra le strategie descritte nel paragrafo precedente per spiegare i processi di comprensione della struttura sintattica del brano e le strategie meta cognitive; le prime, infatti sono strategie implicite, che si sviluppano con l'aumentare dell'expertise del lettore nella comprensione, le seconde sono strategie *attive*, utilizzate consapevolmente dal soggetto per migliorare l'elaborazione, la memorizzazione e la comprensione del brano.

Il termine "metacognizione" significa "riflessione sui processi mentali" ed indica da una parte il grado di consapevolezza da parte del soggetto delle proprie

attività cognitive, e dall'altra il controllo che egli è in grado di esercitare su di esse. Questo fattore sembra avere una grande rilevanza nel processo di comprensione. L'aspetto fondamentale dei processi metacognitivi è che essendo processi attivi e consapevoli possono essere potenziati attraverso training di sostegno e di recupero per la comprensione della lettura.

Il ruolo della metacognizione è di fondamentale importanza anche nella comprensione dei problemi aritmetici, ma, come è stato accennato nel primo capitolo, è stato scelto di non approfondire questo aspetto ma di soffermarci sulle componenti più propriamente cognitive. Pertanto si rimanda ad altri lavori per l'approfondimento del ruolo della metacognizione nella comprensione del testo e nella soluzione dei problemi matematici.

3.2.3 Modelli per la comprensione del testo

Un modello cognitivo molto rilevante per l'interpretazione della comprensione del testo è senz'altro quello proposto da Kintsch e van Dijk (1978) che spiega efficacemente come un lettore possa comprendere il testo a livello superficiale, ma non riuscire a cogliere il senso profondo di ciò che ha letto. Gli autori infatti, individuano due unità di analisi della comprensione: **l'argomento** e la **proposizione**. La comprensione di un testo si verifica mediante la formazione di due livelli di strutture: la *microstruttura*, livello in cui vengono estrapolate le proposizioni dal testo e articolate in una struttura coerente, e la *macrostruttura*: livello al quale si forma una versione corretta della microstruttura. La microstruttura ha una forma *proposizionale* e *schematica* che contiene in sé le informazioni salienti del testo (predicato, soggetto, oggetto). L'aspetto interessante di tale traduzione proposizionale è dato dal fatto che si tratta di una modalità "economica" di estrazione delle informazioni rilevanti. Infatti, uno stesso concetto, può essere espresso con frasi dalla forma grammaticale differente, ma avrà sempre la stessa forma proposizionale. Ad esempio le frasi "Mario mangia la pasta", e "la pasta è mangiata da Mario" si traducono in una identica struttura proposizionale (MANGIARE, MARIO, PASTA). Le proposizioni estrapolate dal testo che formano le microstrutture sono poste in un magazzino di elaborazione a ritenzione limitata, un sistema di memoria di lavoro.

Più microstrutture sono collegate tra loro a formare la *macrostruttura*. Il collegamento tra le diverse microstrutture avviene in base al principio della “coerenza locale”. La costruzione della macrostruttura del testo, coincide con la comprensione del suo significato generale, e avviene tramite l’integrazione del materiale della microstruttura con le conoscenze preesistenti. In questa fase si ha pertanto un coinvolgimento della memoria a lungo termine.

Parlando della memoria di lavoro nella comprensione del testo, è stato evidenziato come una funzione fondamentale dell’esecutivo centrale sia quella di *inibizione* delle informazioni irrilevanti. Coerentemente a questa concezione della memoria di lavoro, è stato delineato (Gernsbacher, 1997; Gernsbacher, Varner e Faust, 1990) un modello di comprensione del testo. Secondo il modello, la costruzione del significato del testo avviene in maniera progressiva. Sin dalla prima frase il lettore comincia a delineare il significato generale del brano. Proseguendo la lettura, egli continuerà ad assimilare le informazioni in modo tale che, se sono coerenti con quelle precedenti, proseguirà nella costruzione della struttura precedentemente delineata; se viene riscontrata una incongruenza, modificherà la struttura che ha costruito. In questo processo di assimilazione o di modifica un meccanismo di fondamentale importanza è l’attivazione delle informazioni importanti e l’inibizione delle informazioni irrilevanti, ovvero l’inibizione di informazioni che in un primo momento sono state ritenute importanti e che, in base all’avanzamento della costruzione del significato, non lo sono più.

Nella sintetica descrizione di alcuni modelli sulla comprensione del testo, è fondamentale inserire il lavoro condotto in Italia dal Gruppo MT. Sin dagli anni ottanta questo gruppo di studio si occupa di comprensione del testo elaborando modelli di analisi e strumenti di valutazione (Cornoldi e Colpo, 1981; Cornoldi e Colpo, 1995; Cornoldi; De Beni e Gruppo MT, 1989; Cornoldi e Oakhill, 1995; Meneghetti, De Beni, Cornoldi e Carretti, 2003).

I lavori citati sono particolarmente importanti perché coniugano in maniera ottimale la sistematizzazione teorica del concetto di comprensione del testo, il problema della misurazione di tale abilità, che consente la discriminazione di un disturbo specifico della comprensione del testo, sottolineando e dimostrando (Cornoldi e Colpo, 1998) l’importanza della distinzione fra abilità di decodifica e di comprensione del testo, e infine l’importanza dell’intervento di sostegno e di

recupero. In altre parole, il pregio del lavoro del gruppo MT è che non si è fermato all'elaborazione teorica di un modello interpretativo, ma ha coniugato questo con l'aspetto applicativo, attraverso un costante lavoro di aggiornamento e revisione delle conoscenze acquisite.

Dal punto di vista teorico, questi ricercatori hanno recentemente elaborato un modello multicomponenziale della comprensione del testo, che sintetizza il lungo lavoro sull'argomento con i più recenti risultati della ricerca internazionale sulla comprensione del testo.

Il modello è composto dalle 10 aree, rappresentate nella figura 3.1. Gli autori ritengono che il lettore in primo luogo debba padroneggiare il primo nucleo narrativo del testo riconoscendo *personaggi, luoghi, tempi e fatti*, e per quanto riguarda i fatti debba riconoscerne i nessi principali (*sequenze*). In secondo luogo, il lettore deve possedere delle abilità psicolinguistiche di base, che vanno dalla comprensione della parola all'elaborazione dei nessi grammaticali e sintattici, e in queste abilità individuano la componente *struttura sintattica*. Altra competenza fondamentale è quella di trarre *inferenze* e cogliere i nessi all'interno del brano (*collegamenti*). Quanto il lettore possiede queste competenze è messo nella condizione di riconoscere la *gerarchia del testo*, cioè di attribuire diversi gradi di importanza alle parti del testo e, dopo aver raccolto le informazioni sufficienti, di costruire un *modello mentale* del testo, cioè una rappresentazione generale del contenuto del testo. Infine, il lettore deve possedere abilità meta cognitive che gli consentano di riconoscere le caratteristiche del testo (*sensibilità al testo*), di adattare la lettura alle diverse richieste del compito o ai suoi scopi (*flessibilità*), e monitorare il processo di lettura, individuando quando la comprensione non è soddisfacente (*errori e incongruenze*). Come si può riscontrare dalla figura 3.1, le dieci abilità descritte hanno delle relazioni specifiche e costituiscono tre nuclei principali di abilità: componenti di contenuto, componenti di elaborazione e componenti meta cognitive. Anche dal punto di vista della valutazione psicometrica, il Gruppo MT (Cornoldi, Colpo e gruppo MT, 1981, 1995, 1998) ha sviluppato uno strumento che consente di misurare la comprensione del testo, nella condizione che appare più congeniale sia per il bambino (viene consentita la lettura silente, viene permessa la riletture del brano, e non vi sono grossi limiti di tempo) sia per lo sperimentatore o il valutatore (facile somministrazione, facile interpretazione, ottima validità di costruito e discriminante).

La prova di comprensione consiste nella presentazione di un brano da leggere, seguito da domande a risposta multipla sul testo. Il punteggio quantitativo che si ottiene dalla somministrazione è dato dal numero di risposte corrette totali.

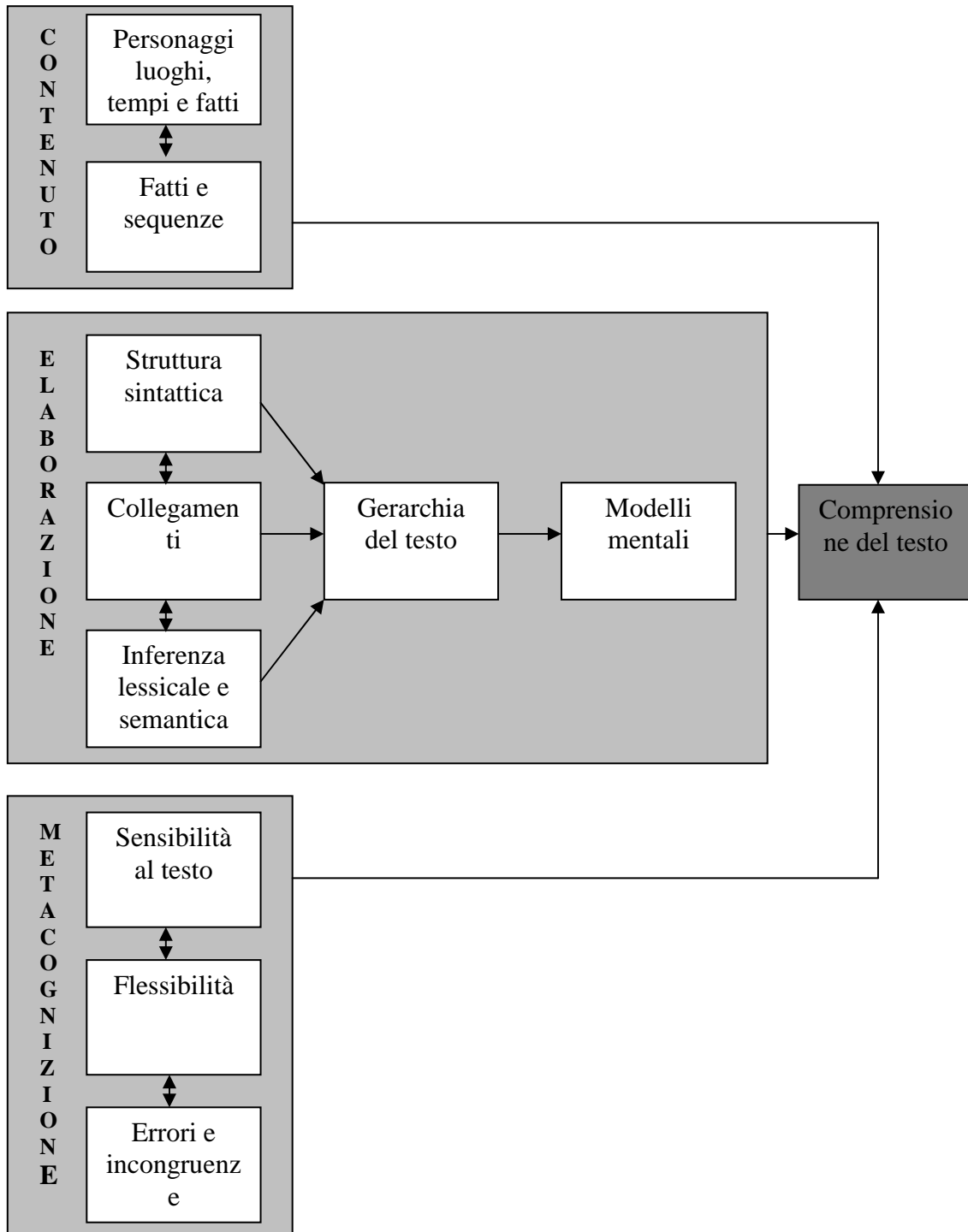


Fig. 3.1 schema descrittivo della relazione fra le diverse aree della comprensione del testo.

Le prove sono correlate da dati normativi aggiornati, raccolti in diverse Provincie

del nord, centro e sud d'Italia, che consentono trasformare il punteggio ottenuto in punti percentili o punti standard.

L'ultimo aggiornamento delle prove, inoltre, include testi di tipologia differente, per valutare la sensibilità al testo e costituisce un primo tentativo di classificare gli item in funzione delle componenti del processo di comprensione, che abbiamo ampiamente discusso in questo capitolo. Tale classificazione, può essere utilizzata per un'analisi qualitativa della prestazione del bambino e per delineare eventuali tipologie di difficoltà specifiche, anche se, come gli stessi autori suggeriscono, non va considerata una classificazione esauriente e va usata con flessibilità.

Nella tabella 2.1 sono descritte brevemente le categorie inserite nelle prove di approfondimento.

LABEL	AREA	FUNZIONE
IL	Inferenza lessicale	Capacità di inferire il significato delle parole in base al contesto
IS	Inferenza semantica	Capacità di utilizzare conoscenze precedenti per capire cose non dette, ma implicite nel testo
SS	Struttura Sintattica	Capacità di seguire la struttura sintattica del periodo.
CI-SI	Correggere Incongruenze, Sospendere Ipotesi	Capacità di rivedere le interpretazioni precedenti utilizzando le informazioni successive
SL	Significato Letterale	Saper cogliere il significato letterale della frase, saper tradurre in parafrasi
MA-RP	Modifica Approccio, Ricerca Particolari	Modificare l'approccio al testo, saper ricercare particolari
PLT	Personaggi, Luoghi, Tempi	Saper individuare personaggi, ruoli, ambienti, luoghi, durata degli eventi, ecc.
ARE-SC	Azioni, Risposte, Eventi, Sequenza	Saper individuare azioni, risposte interne, eventi e seguire la sequenza dei fatti
EP	Elementi Principali	Cogliere gli elementi principali del brano, saper attribuire agli elementi vari gradi di importanza.
ST	Struttura Testo	Cogliere la struttura del testo, individuare le parti in cui si articola un testo

Tab 2.1

3.3 La comprensione del testo nell'attività di risoluzione dei problemi

La descrizione di caratteristiche e modelli della comprensione del testo è molto utile per introdurre un ragionamento sulla comprensione del testo del problema. In questo paragrafo si prenderanno in considerazione alcune delle variabili della comprensione del testo, descritte in precedenza, e si analizzeranno

in funzione dell'attività di risoluzione dei problemi aritmetici. Verranno anche presi in considerazione i modelli di comprensione del testo che sono stati descritti brevemente per analizzare quali implicazioni possano avere nella soluzione dei problemi.

3.3.1 Caratteristiche del testo del problema

Parlando delle caratteristiche del testo che influenzano la comprensione, sono stati distinti tre livelli: parola, frase e testo. Nella soluzione dei problemi aritmetici, il livello della parola è certamente importante, ma soltanto per alcune categorie di parole, come i termini relazionali. Un'altra gamma di parole, che costituiscono la cornice narrativa del problema, potrebbero essere ininfluenti, perché, in teoria, costituiscono la struttura superficiale del problema e non la struttura profonda. La difficoltà legata al livello del testo potrebbe essere moderata, in quanto la coerenza globale è normalmente rispettata (in genere i testi dei problemi sono coerenti con la tipica struttura di un problema), il fattore di difficoltà potrebbe risiedere al livello di coerenza locale, nel caso di frasi non ben coese, connettivi ambigui, ecc. Un altro fattore di difficoltà potrebbe osservarsi a livello della frase, nel caso in cui i testi presentino strutture sintattiche complesse (frasi avversative, negative, passive, ecc.) e i bambini non posseggano le giuste strategie di analisi. Si possono trovare in diversi studi (Hegarty, Mayer & Green, 1992; De Corte, Verschaffel & Pauwels, 1990) esempi di come la formulazione sintattica del testo e la presenza di termini relazionali, cioè locuzioni che esprimono una relazione numerica fra due variabili, possono causare difficoltà nella soluzione del problema. Si ricorderà dal secondo capitolo lo studio di Hegarty, Mayer e Monk (1995) che dimostra come alcuni soggetti, anche adulti, hanno difficoltà a risolvere problemi matematici che contengono formulazioni relazionali "incoerenti". Hegarty et al., si riferiscono a questa versione col termine "incoerente" perché la parola chiave relazionale "meno" nel testo induce alcuni soggetti a utilizzare una operazione aritmetica inappropriata: la sottrazione piuttosto che la corretta addizione. Nella versione "coerente" del problema, invece, il termine relazionale *più* favorisce l'utilizzo della corretta operazione, cioè l'addizione. Alle considerazioni degli autori si potrebbe aggiungere che il problema "incoerente" crea una maggiore difficoltà a livello della coerenza locale

(connessione fra le frasi complessa) e di struttura sintattica (potrebbe essere ambiguo a cosa si riferisce il pronome) e questo potrebbe comportare la mancanza di una strategia di analisi adeguata con la conseguenza di una scelta “superficiale”: l’impiego dell’operazione suggerita del termine “meno”.

Questi risultati supportano l’idea che i processi di comprensione del testo giocano un ruolo fondamentale nella soluzione dei problemi matematici.

Un concetto rimarcato da diversi ricercatori e discusso più volte in questa sede, è che non risolvere il problema non implica che il soggetto non abbia compreso i concetti matematici che ne stanno alla base. E un chiaro esempio di questo è fornito anche dal lavoro di Greeno e collaboratori (1980; Riley, Greeno & Heller, 1983) sulla classificazione delle possibili tipologie di problemi. Con questi problemi questi ricercatori hanno anche dimostrato che i bambini possono risolvere facilmente un problema che contiene una sola variabile, come il problema di tipo A in tabella 3.2, ma, se il problema presenta una relazione fra variabili come nel caso del problema B, gli errori dei bambini aumentano in modo considerevole. Dal momento che i due problemi hanno la stessa struttura matematica, ma differiscono nella formulazione verbale e strutturale, la causa dell’errore di comprensione va ricercato nel testo del problema, nella sua formulazione.

Problema A	Problema B
<i>Giorgio ha 3 caramelle;</i>	<i>Giorgio ha 3 caramelle;</i>
<i>Luca gli dà 4 caramelle;</i>	<i>Luca ha 4 caramelle più di Giorgio;</i>
<i>Quante caramelle ha adesso Giorgio?</i>	<i>Quante caramelle ha Luca?</i>

Tab. 3.2 Esempio di problema ad una variabile (A) e a due variabili (B)

3.3.2 Caratteristiche del solutore del problema

In questo paragrafo si analizzeranno alcune delle variabili. Analizzando i fattori legati al soggetto nella comprensione del testo, è stato descritto come una variabile fondamentale sia il corretto funzionamento del sistema di elaborazione delle informazioni, in particolare della memoria di lavoro e come Gernsbacher (1997) abbia descritto la comprensione come un processo di progressiva selezione delle informazioni rilevanti ed inibizione delle informazioni irrilevanti. Anche studi specifici sui problemi (Passolunghi e Pazzaglia, 2004; Swanson, 2004) hanno analizzato il ruolo della memoria di lavoro, confermando l’idea di

Gernsbacher: il funzionamento del sistema esecutivo centrale, in particolare le componenti di *updating* e *inibizione*, sono strettamente correlati con l'abilità nel risolvere i problemi.

Anche il modello della comprensione di Kintsch e van Dijk (1978) si presta ad essere applicato allo studio della comprensione dei problemi, infatti gli stessi autori hanno, in seguito, descritto un modello specifico per la soluzione di problemi aritmetici di addizione e sottrazione, specificando le strategie che consentono di comprendere le diverse formulazioni del testo.

A proposito delle variabili legate al soggetto che contribuiscono alla comprensione del testo, abbiamo visto nel paragrafo precedente il modello multicomponentiale delineato da De Beni e altri (2003) (fig. 3.1). Il modello è composto da dieci aree che contribuiscono ad una adeguata comprensione del testo scritto. Queste aree sono suddivise in tre categorie fondamentali: *contenuto*, *elaborazione* e *metacognizione*. Volendo individuare delle aree della comprensione del testo che sono particolarmente rilevanti per l'attività di soluzione dei problemi, potrebbero essere quelle relative alla categoria "elaborazione" e alla categoria "metacognizione". La prima comprende le aree fondamentali per l'analisi della frase, dei collegamenti fra le frasi, per i processi inferenziali e in un momento successivo, per l'elaborazione di uno schema del testo (modelli mentali). La seconda comprende la capacità di avere un approccio flessibile al testo e di autovalutazione. La categoria "contenuto", presumibilmente, è l'area meno rilevante per l'attività di risoluzione, se non addirittura compromettente, perché per la risoluzione del problema la storia, i personaggi, i tempi, sono soltanto la cornice semantica della struttura algebrica del problema.

3.4 Conclusioni

In questo capitolo sono state analizzate alcune caratteristiche della comprensione del testo e sono state fatte alcune riflessioni sulla comprensione del testo del problema matematico. Ci siamo soffermati in maniera particolare sugli studi del gruppo MT. Come si può riscontrare dalle sintetiche descrizioni sui modelli di comprensione, il lavoro di questi ricercatori si discosta dagli altri studi descritti, per prima cosa perché il punto di partenza è l'analisi delle prestazioni dei

soggetti, al contrario di altri lavori che partono da complessi e dettagliati modelli teorici che in alcuni casi rimangono soltanto teorici, oppure vengono implementati su programmi di simulazione del comportamento. Altra caratteristica di questi studi è un livello di analisi maggiormente “molare” rispetto agli altri descritti, che si configurano come estremamente “molecolari”. Questo probabilmente porta a risultati meno ricchi e dettagliati, ma, come è stato accennato, perviene comunque a risultati molto significativi, anche dal punto di vista della valutazione e del trattamento.

Per tali motivi, nel presente lavoro, l’approccio scelto per analizzare la comprensione dei problemi è vicino alla prospettiva del Gruppo MT; si ritiene infatti che il fine principale di queste ricerche debba essere l’applicabilità, la fruibilità da parte di educatori, insegnanti e altri operatori nel settore dell’apprendimento scolastico. La descrizione e il confronto fra i diversi modelli di soluzione dei problemi aritmetici del capitolo successivo chiarirà ulteriormente queste considerazioni.

Riprendendo i quesiti posti nell’introduzione del presente capitolo facciamo un’ultima considerazione teorica a proposito della comprensione. la comprensione del problema coincide con la comprensione del testo del problema? È l’analisi del testo, per mezzo delle abilità del lettore descritte, che determina l’adeguata comprensione del problema? Oppure la comprensione del problema coinvolge altri meccanismi, maggiormente specifici?

Come abbiamo visto, analizzando il modello stadiale di Mayer, per questo autore la comprensione del problema avviene in una fase secondaria, immediatamente dopo una fase di *traduzione* parola per parola. È una fase quindi che si colloca ad un livello più profondo di elaborazione, che può essere vista come l’anello fondamentale che conduce alla formulazione del piano per la soluzione.

Si rimanda, dunque ai successivi capitoli per un approfondimento teorico ed empirico della questione.

Capitolo quarto

Componenti cognitive nella soluzione dei problemi aritmetici

4.1 Introduzione

Il precedente capitolo è stato esclusivamente dedicato alla comprensione del testo e in particolare alla comprensione del testo del problema, in quanto si tratta di un'attività fondamentale per la soluzione dei problemi e nel contempo un'attività estremamente complessa.

In questo capitolo verranno prese in analisi le componenti rappresentazione, categorizzazione e pianificazione, considerate fondamentali e specifiche per la risoluzione dei problemi aritmetici.

Per ogni componente verranno analizzati alcuni studi che hanno contribuito a definirne la funzione e si cercherà di evidenziare lo specifico contributo che la componente fornisce alla soluzione del problema aritmetico. Infine saranno messi in luce eventuali problemi aperti o criticità sulla definizione teorica di ciascuna componente e sulla sua misurazione.

4.2 Rappresentazione

La rappresentazione, costituisce un aspetto della capacità di risolvere i problemi aritmetici piuttosto controverso, a partire dalla sua definizione.

In alcune ricerche si fa riferimento alle rappresentazioni grafiche, in altre ad una rappresentazione mentale, cognitiva interna. Questa prima grande questione può essere chiarita analizzando diversi punti di osservazione della questione. È indispensabile, infatti, distinguere fra modelli teorici delle abilità necessarie per la soluzione del problema matematico (Mayer, 1981; Hegarty;

Mayer e Monk, 1995), e strategie di risoluzione spontanee prodotte dal solutore (Hegarty e Kozhevnikov, 1999; van Garderen e Montague, 2003). Questa precisazione è utile proprio perché chiarisce la distinzione fra rappresentazione mentale e grafica: se ci muoviamo nell'ambito dei modelli teorici il riferimento è esclusivamente alle rappresentazioni mentali e la controversia in questo caso può riguardare le caratteristiche e i contenuti di tale rappresentazione. Se analizziamo invece le strategie utilizzate dal solutore oppure le metodologie di risoluzione del problema che vengono insegnate, possiamo fare riferimento a rappresentazioni concrete o grafiche, che possono essere più o meno funzionali alla soluzione del problema.

Tuttavia, il punto di convergenza fra i due livelli può essere individuato nell'operationalizzazione del modello teorico, nel senso che, sia la produzione spontanea del solutore, sia le strategie didattiche funzionali, possono essere considerate degli "indicatori" di un'attività cognitiva sottostante.

Nei paragrafi seguenti si prenderanno in considerazione alcuni studi che hanno delineato dal punto di vista teorico la componente rappresentazione, studi che hanno considerato le strategie di rappresentazione grafica impiegate dai solutori e studi che riportano i risultati dell'utilizzo di rappresentazioni o schemi che facilitano la risoluzione del problema. Infine si descriverà il punto di osservazione impiegato nella presente ricerca per l'analisi della componente "rappresentazione".

4.2.1 Analisi teorica della rappresentazione

In questo paragrafo si riprenderanno alcuni concetti dei modelli descritti nel secondo capitolo soffermandoci principalmente sul concetto di rappresentazione. I primi ad introdurre il concetto di "rappresentazione" cognitiva per descrivere l'attività di soluzione dei problemi, furono gli psicologi di orientamento cognitivista (*HIP*) che abbiamo descritto nel primo capitolo. All'interno di questo approccio, la rappresentazione che il solutore si crea sul problema viene definita "spazio del problema". Si ricorderà dal primo capitolo che questa rappresentazione comprende le condizioni di partenza, gli obiettivi da raggiungere, gli stati intermedi, che permettono di raggiungere gli obiettivi e le mosse, o le operazioni che consentono di passare da uno stato all'altro.

Naturalmente la rappresentazione del problema di una persona non sarà necessariamente uguale a quello di un'altra persona.

Mayer (1981; 1992), nell'ambito dell'*HIP*, ha elaborato uno dei primi modelli di soluzione dei problemi aritmetici, che è stato descritto nel secondo capitolo. Nel suo modello, come abbiamo visto, non c'è una componente o fase specifica relativa alla rappresentazione. Mayer, tuttavia, afferma che perché ci sia effettivamente la comprensione, è necessario che ciascuna informazione, semplice o complessa, sia messa in relazione con tutte le altre, per ottenere una *rappresentazione* cognitiva dell'intera situazione del problema. Secondo Mayer il solutore inizia a costruire una rappresentazione interna del problema a partire dal testo verbale (processo di *traduzione*) e prosegue con l'integrazione coerente di tutte le informazioni processate (processo di *integrazione*) e infine perviene ad una rappresentazione interna del piano di soluzione (processo di *pianificazione*). Come si potrà rilevare, la concezione di Mayer della rappresentazione è simile alla definizione di *problem space*, cioè una costruzione interna che contiene gli elementi del problema, le relazioni fra gli elementi e il piano di soluzione.

Nel secondo capitolo è stato descritto l'imponente lavoro di analisi dell'attività di soluzione dei problemi matematici condotta da Riley e i suoi collaboratori (Heller e Greeno, 1978; Riley, Greeno e Heller, 1983; Riley e Greeno, 1988). L'osservazione principale di questi autori era che i problemi matematici sono caratterizzati dal fatto che la stessa struttura aritmetica formale può essere descritta attraverso differenti strutture semantiche. La prima fase del processo di soluzione consiste in una analisi del testo che ha come esito una rappresentazione interna e globale degli insiemi e delle relazioni fra gli insiemi (uno schema), sulla base di questa rappresentazione sono poi scelte le operazioni da eseguire. L'analisi del testo è quindi fondamentale perché avvenga la rappresentazione, ma, dal momento che la struttura aritmetica del problema può essere formulata secondo diverse strutture semantiche, queste differenti strutture semantiche daranno origine a rappresentazioni interne più o meno complesse e numerose. Ma, come abbiamo visto nel secondo capitolo, questa attivazione dipende dagli schemi posseduti dal solutore: i bambini più piccoli non possiedono schemi complessi e conseguentemente la scelta dell'operazione risulterà errata. In questo modo gli autori spiegano perché alcune formulazioni del problema risultano più difficili di altre per la risoluzione: a causa di schemi semantici poco

sviluppati, il solutore meno esperto, o più giovane, non riesce a costruire un'appropriata rappresentazione delle strutture semantiche più complesse.

Similmente a Riley e altri (1983), De Corte e altri (De Corte e Verschaffel, 1985a; De Corte, Verschaffel e De Win 1985b) considerano la rappresentazione il primo stadio del processo di soluzione, che viene costruita a partire da una complessa attività di analisi del testo, guidata dall'obiettivo; tale rappresentazione è globale, astratta e mentale e comprende gli insiemi e relazioni fra gli insiemi. Questi ricercatori però, danno una differente spiegazione delle differenze fra le formulazioni dei problemi con stessa struttura matematica nella risoluzione. Secondo la loro ipotesi (De Corte e Verschaffel e Pauwels, 1990) , solutori meno abili risolvono il problema in maniera impulsiva passando direttamente al calcolo dei numeri senza una attenta lettura della formulazione del problema. In altre parole, mentre secondo l'ipotesi di Riley i cattivi solutori creano una rappresentazione errata del problema, secondo De Corte, i cattivi solutori non creano una rappresentazione del problema e saltano direttamente al calcolo dei numeri. I risultati degli studi di questi ricercatori tuttavia non consentono di chiarire quale delle due spiegazioni sia verosimile. Nel loro studio infatti dimostrano che i problemi più complessi richiedono una maggiore analisi semantica, misurata con il numero di fissazioni oculari sulle parole del testo e determinano un minor numero di risposte esatte. Questo risultato dimostra che la struttura semantica del problema gioca un ruolo fondamentale per la soluzione, in accordo con Riley e altri. Tuttavia, i risultati non mostrano effetti dell'abilità del solutore sull'analisi del testo, infatti i solutori più abili spendono meno tempo a processare sia le parole che i numeri rispetto ai meno abili, diversamente dall'ipotesi degli autori che prevedeva una analisi del testo superficiale, e quindi più rapida, dei cattivi solutori.

Come si ricorderà, anche secondo Hegarty e altri (Hegarty, Mayer e Monk, 1995) la rappresentazione è un costrutto mentale elaborato a partire dai processi di comprensione del testo. I cattivi solutori processerebbero il testo tramite la strategia di traduzione diretta, basata sull'analisi dei numeri e delle parole chiave del testo, che in alcuni casi (problemi incoerenti) potrebbe generare una rappresentazione del problema errata; i buoni solutori, invece, processerebbero il testo tramite la strategia del modello del problema, che consente di pervenire ad una corretta rappresentazione grazie ad un'analisi del testo più ricca di elementi.

Questi ricercatori dimostrano la loro ipotesi tramite studi di fissazione oculare in cui si evidenzia che i cattivi solutori compiono, in valore assoluto, un numero maggiore di fissazioni oculari rispetto ai buoni solutori, ma, in proporzione, fissano maggiormente i numeri e i termini relazionali e meno i nomi delle variabili rispetto ai buoni solutori.

Come è possibile rilevare in tutti gli studi citati, la rappresentazione è un costrutto mentale, interno, costruita a partire dall'analisi semantica del testo e che comprende le relazioni tra gli elementi del problema. Non si tratta di una componente specifica o una fase del processo di soluzione, ma l'esito di più processi di analisi del problema.

Differente, rispetto a queste posizioni, è la concezione della rappresentazione nel modello di Lucangeli e altri (1998), anche questo descritto nel secondo capitolo. Come si potrà ricordare infatti, nel citato modello, la "rappresentazione" è una componente cognitiva che contribuisce alla soluzione del problema nel contesto di un più ampio numero di componenti che complessivamente determinano la soluzione. La rappresentazione, similmente agli altri modelli cognitivi descritti, è esito di processi di comprensione del testo, ma diversamente da tali modelli è una componente distinta e separata dalle componenti restanti, che, come abbiamo visto, riguardano la categorizzazione, la pianificazione e l'autovalutazione. Rileviamo la differenza, per esempio, con la definizione di rappresentazione data da Mayer che implica tutte le varie fasi del processo di soluzione: rappresentazione delle informazioni del testo, rappresentazione dello schema e rappresentazione delle azioni da svolgere per risolvere il problema.

4.2.2 Analisi delle strategie di rappresentazione dei solutori

Alcuni studi hanno messo in relazione l'abilità di soluzione dei problemi matematici con l'abilità di formare una rappresentazione mentale di un oggetto e di manipolare tale oggetto.

Secondo Krutetskii (1976) gli individui possono essere divisi in tre gruppi in funzione di come processano le informazioni matematiche. I verbalizzatori, preferiscono una modalità verbale-logica, i visualizzatori, che preferiscono usare immagini visive e i misti, che non hanno una tendenza definita nell'una o

nell'altra direzione. Altri studi in seguito dimostrarono che l'uso della strategia visiva non sempre è efficace, e che in certi caso conduce a soluzioni dei problemi errate. Questi autori conclusero che i verbalizzatori spesso sono più abili dei visualizzatori in compiti matematici. (Lean e Clements, 1981). In definitiva, sebbene le abilità visuo-spaziali siano correlate positivamente con l'apprendimento matematico, la preferenza "visiva" nel processare le informazioni non correla con abilità matematica.

Ricerche più recenti hanno dimostrato che l'abilità di rappresentazione può essere distinta in due modalità, la modalità visiva e la modalità spaziale (Logie, 1995). Queste evidenze hanno rinnovato l'interesse di alcuni ricercatori ad indagare gli aspetti dell'apprendimento matematico in relazione alle modalità di visualizzazione. Hegarty e Kozhevnikov (1999), preferiscono invece distinguere le modalità di rappresentazione dei problemi in schematico (più connessa ad una visualizzazione di tipo spaziale) e pittorico. Pertanto questi autori hanno condotto una ricerca per verificare se l'uso di rappresentazioni schematiche/spaziali è connesso a buoni risultati nella soluzione dei problemi, mentre l'uso di visualizzazioni pittoriche è connessa a risultati scadenti. I soggetti di questo studio erano liberi di risolvere il problema a piacimento, gli sperimentatori codificavano la presenza o l'assenza di una rappresentazione. Coerentemente con gli studi citati, l'uso di una strategia rappresentativa non mostrava correlazioni con la soluzione dei problemi. Ma quando le strategie dei soggetti vengono classificate in pittoriche e schematiche emergono differenze significative nella soluzione dei problemi. Inoltre, l'indice di rappresentazione complessivo mostra correlazioni con il sub-test relazioni spaziali della batteria di valutazione delle abilità mentali primarie (PMA, Turstone e Turstone 1947), ma questa correlazione si perde quando la rappresentazione viene categorizzata in pittorica e schematica. Al contrario in questo caso, emerge una correlazione significativa fra rappresentazione schematiche e sub-test disegno con cubi della scala WISC-R (Wechsler, 1976). In uno studio più recente (van Garderen e Montague, 2003) viene confermato che la risoluzione del problema è positivamente correlata con modalità di rappresentazione schematica e negativamente con modalità di rappresentazione pittorica. In aggiunta, in questo studio emerge che studenti particolarmente dotati utilizzano in maniera significativamente maggiore

rappresentazioni visuo-spaziali mentre studenti con disturbo dell'apprendimento utilizzano in maniera significativamente maggiore rappresentazioni pittoriche.

4.2.3 *Rappresentazione: questioni aperte*

In conclusione, la letteratura è concorde nel riconoscere il ruolo fondamentale della abilità di rappresentazione per la competenza nella soluzione dei problemi matematici. Concordano altresì sul fatto che la rappresentazione del problema è interna, mentale. Non è chiaro, tuttavia, il contenuto di questa rappresentazione: può contenere gli “oggetti” del problema, oppure proposizioni. Abbiamo visto che soggetti “visualizzatori” in genere hanno prestazioni più scadenti rispetto a soggetti “verbalizzatori”, ma all'interno dei soggetti visualizzatori, soggetti “schematici” hanno prestazioni migliori di soggetti “pittorici”. Si è anche potuto osservare che i training educativi e di recupero mirati possono elicitarne l'uso di rappresentazioni schematiche, più efficaci per la soluzione dei problemi.

Un'altra questione aperta riguarda la natura di tale rappresentazione.

Nei modelli che sono stati descritti (Riley, Greeno e Heller, 1983) la rappresentazione viene assimilata al concetto di schema, ma questo genera alcune ambiguità, in quanto può essere considerato sovrapponibile al concetto di “categoria” del problema: in questo modo si verrebbe a creare una sovrapposizione fra “rappresentazione” e “categorizzazione”. Inoltre la maggiore abilità nel rappresentare il problema, e quindi nel risolverlo, risiederebbe nello sviluppo di un numero sempre maggiore di schemi. Ma considerando la generatività dei problemi matematici, questo numero sarebbe pressoché illimitato.

In altre ricerche la rappresentazione viene assimilata al concetto di modello mentale, ma questo crea altrettante difficoltà, sia per la necessità di una definizione più dettagliata e concreta del concetto di modello mentale. Anche nel citato modello di Lucangeli, Tressoldi e Cendron, (1998) è poco chiaro cosa sia la componente rappresentazione, gli autori infatti parlano di modello mentale e di attività di integrazione delle informazioni, in altre sedi parlano di rappresentazione dello schema. Questa poca chiarezza si riflette a livello della misurazione della componente, non è chiaro, infatti perché questo modello mentale o schema venga misurato con rappresentazioni grafiche. In alcuni casi, i

problemi del test SPM (Lucangeli et al, 1998), descritto nel secondo capitolo, presenta delle rappresentazioni accompagnate dal testo, a causa della tipologia del problema che ne rende difficile la rappresentazione grafica. Questo genera alcune perplessità su cosa stia effettivamente misurando l'indice di rappresentazione.

Viste le difficoltà esposte nel trovare una definizione univoca per "rappresentazione del problema", e considerando che è indispensabile avere una definizione per poter misurare tale abilità, nel presente lavoro per la rappresentazione intenderà una rappresentazione mentale degli elementi del problema come. Negli studi che descriveremo in seguito la rappresentazione è stata misurata tramite una prova in cui si richiede di produrre graficamente una rappresentazione del problema. La rappresentazione corretta è quella in cui tutti gli elementi (dati) del problema sono presenti.

4.3 Categorizzazione

La capacità di categorizzazione è definita in letteratura come quella capacità che, attraverso il riconoscimento delle somiglianze e delle differenze tra schemi di soluzione, consente di individuare come simili i problemi che si risolvono allo stesso modo, e dunque di riconoscerli appartenenti alla stessa "categoria" (Lucangeli, Tressoldi & Cendron, 1998a).

In una ricerca di Passolunghi, Cornoldi e Lonciari (1996) la capacità di categorizzazione si è dimostrata uno dei fattori più importanti per predire il successo nella soluzione dei problemi. Anche la ricerca di Lucangeli e Cornoldi (1995) aveva l'obiettivo di verificare se la fase di categorizzazione fosse in relazione con la prestazione nella soluzione dei problemi. Per analizzare l'abilità di categorizzazione è stato proposto un compito di classificazione in cui il soggetto doveva raggruppare i problemi simili e poi indicare il criterio utilizzato. Nella valutazione del compito sono stati distinti criteri che potevano essere legati alla struttura superficiale, per esempio l'oggetto menzionato nel testo, da quelli riferibili alla struttura profonda, per esempio le operazioni logiche e matematiche necessarie per la soluzione. I risultati sono simili a quelli ottenuti dalla ricerca di Passolunghi et al. (1996), cioè, che l'abilità di categorizzazione è un buon predittore dell'abilità di problem solving e che i solutori poco esperti sono

influenzati dalla struttura superficiale del testo, mentre i più esperti basano la categorizzazione su caratteristiche più profonde. Tuttavia, tutti i bambini fino all'inizio della quarta elementare sembrano propendere per una classificazione di tipo superficiale, benché siano comunque riscontrabili alcune differenze fra buoni e cattivi solutori.

Lo studio pionieristico di Chi, Feltovich e Glaser (1981) esamina l'esistenza di categorie come base per la rappresentazione del problema e le differenze fra le categorie usate da esperti e da novizi. L'obiettivo dello studio è quello di determinare i tipi di categorie che i soggetti "impongono" al problema. I soggetti coinvolti erano ricercatori del dipartimento di fisica, che costituivano il campione di esperti, e studenti del primo anno di fisica, che costituivano i novizi. Le istruzioni date erano di classificare 24 problemi di fisica in base alle analogie di soluzione. Ai soggetti non era permesso di risolvere i problemi prima di categorizzarli. In seguito veniva chiesto ai soggetti di spiegare i motivi dei loro raggruppamenti. Si osservò che sia esperti che novizi erano abbastanza abili a fornire una categorizzazione stabile entro la seconda prova, questo vuol dire che per entrambi i gruppi la categorizzazione non era casuale ma basata su qualche rappresentazione significativa. Tuttavia, conducendo un'analisi qualitativa delle categorie, emergono alcune differenze sostanziali fra i gruppi. I problemi classificati insieme dalla maggior parte dei novizi rivelano analogie nella *struttura superficiale*. Per caratteristiche superficiali gli autori intendono: gli *oggetti*, riferiti ai problemi, per esempio una molla, un piano inclinato; i *termini fisici* menzionati come attrito, centro della massa; la *configurazione fisica* descritta nel problema, come un corpo su un piano inclinato. Al contrario la classificazione degli esperti sembra seguire i principali principi fisici che sottostanno alla soluzione di ogni problema. Nel complesso questo importante studio suggerisce che gli esperti siano abili nel "vedere" le analogie sottostanti ad un gran numero di problemi, mentre i novizi "vedono" i problemi come dissimili quando le caratteristiche superficiali sono diverse. Ma in ogni caso tutti i soggetti mostrano di saper categorizzare i problemi, ancor prima di pervenire alla soluzione.

4.3.1 Categorizzazione: questioni aperte

Rispetto alla rappresentazione, la componente categorizzazione comporta meno difficoltà nella definizione. Vanno tuttavia esplicitati alcuni aspetti al fine di escludere ambiguità o incertezze, anche nella misurazione.

L'abilità di categorizzazione nella soluzione di problemi aritmetici è considerata la capacità di individuare la struttura profonda del problema. La struttura profonda di un problema solitamente viene contrapposta alla struttura superficiale, che è data da aspetti quali la storia narrata, i personaggi, ecc. L'abilità di categorizzazione consiste quindi nell'attivare una "categoria" utile per la risoluzione del problema.

Consideriamo il seguente problema:

Matteo ha mangiato 5 dolcini alla panna e 3 al cioccolato. Quanti dolcini ha mangiato in tutto?

Un bravo solutore dovrebbe individuare per il problema la categoria "problema additivo". Un solutore meno abile potrebbe individuare la categoria "problema dei dolcini". È evidente come nel primo caso, la categoria risulta utile per la risoluzione del problema, in quanto categorizzare il problema come "additivo" implica utilizzare il corretto algoritmo per la soluzione. La categoria "problema dei dolcini", al contrario, non fornisce alcun aiuto per la soluzione del problema.

Queste riflessioni derivano dallo studio di Chi (1981), che abbiamo descritto, condotto su soggetti adulti. Il processo equivalente, nella risoluzione dei problemi aritmetici nei bambini di scuola primaria, dovrebbe essere la categorizzazione del problema in funzione dello schema risolutivo, anche quando questo è costituito da un insieme di operazioni.

Nella menzionata ricerca di Passolunghi e Cornoldi (1996) la categorizzazione è risultata il migliore predittore dell'abilità di risoluzione dei problemi si è cercato di valutare la capacità di categorizzare i problemi in base alla struttura risolutiva piuttosto che ad altre caratteristiche (struttura superficiale). Nella ricerca veniva richiesto ai bambini di classificare un gruppo di problemi in base alla struttura risolutiva. Va sottolineato che questa richiesta è piuttosto diversa da quella dello studio su soggetti adulti di Chi e altri. In quel caso infatti si richiedeva soltanto di categorizzare i problemi liberamente e si indagava la

modalità secondo cui i problemi erano categorizzati. Nel caso dello studio sui bambini si richiedeva, invece, di raggruppare i problemi in base alla struttura risolutiva, cioè alle operazioni necessarie per risolvere i problemi stessi. I bambini non erano quindi liberi di raggruppare i problemi in base ad un criterio a scelta. Il limite della ricerca di Passolunghi e altri è la difficoltà nello stabilire se stiamo misurando effettivamente la capacità di categorizzare. È chiaro che un bambino che individua la struttura risolutiva del problema, lo ha anche in qualche modo pianificato e risolto.

Anche nella ricerca di Lucangeli e altri (1998) viene misurata l'abilità di categorizzare i problemi, ma in questo caso la procedura è differente, i bambini leggono un problema e poi, nella sezione della categorizzazione, viene chiesto loro di indicare quale problema, fra quattro elencati, risolverebbero come quello che è stato letto precedentemente. In questo caso l'esercizio consiste nell'accoppiare due problemi in base ad una categoria, ma ancora una volta la categoria è imposta dal compito stesso. Per cui non si misura la capacità del bambino di individuare una categoria "funzionale" o meno. Anche in questo caso, quindi, la misura della categorizzazione è imprescindibile dalla capacità di risolvere il problema.

Se ci interessa la capacità di classificare i problemi in base a criteri diversi e mettere in relazione questa capacità con l'abilità di soluzione dei problemi, dovremmo chiedere ai bambini di classificare spontaneamente gruppi di problemi, in base ad un criterio da loro scelto. Solo in questo modo la prova potrà essere analoga a quella elaborata per gli adulti da Chi e altri. Per ottenere questa misura è stata messa a punto una prova che richiedeva a bambini di scuola primaria di raggruppare problemi in coppie, in base ad un criterio a scelta. Questa prova verrà descritta più dettagliatamente nel capitolo che riporta uno studio di approfondimento delle componenti del problema.

4.4 Pianificazione

La pianificazione, componente descritta anche nel modello di Mayer (1981) che abbiamo in precedenza riportato, è la capacità che si rende necessaria, una volta compreso il problema e la sua struttura, per elaborare un vero piano

d'azione, che deve essere poi tradotto in operazioni e calcoli nella corretta sequenza per giungere alla soluzione.

Si ricorderà, dal modello classico di Mayer, la distinzione tra due grandi momenti nel processo di soluzione di un problema: il processo di *codifica* e il processo di *ricerca*. Seguendo questo modello, sembrerebbe che le abilità di cui abbiamo parlato, rappresentazione e categorizzazione, comprendendo anche la comprensione del testo, si riferiscano ad una fase più generale di comprensione del problema, o, riprendendo la terminologia usata da Mayer, di *codifica* del problema. Le competenze di pianificazione sembrano invece rientrare in una fase più generale di *ricerca* della soluzione, che comprende quindi le abilità di scelta delle strategie di soluzione.

Secondo Mayer et al. (1984) nella fase di pianificazione è richiesta una conoscenza di tipo strategico, cioè la capacità di riconoscere e stabilire gli obiettivi e la conoscenza delle procedure che sono utili per raggiungere tali obiettivi. Come è stato già ampiamente discusso, sono state condotte molte ricerche per individuare le strategie usate nella soluzione di problemi matematici (Mayer et al., 1984; Riley et al., 1983; Hegarty et al., 1995). Per risolvere un problema del tipo : $(8 + 3x)/2 = 3x - 11$, Mayer propone che possano essere applicate due distinte strategie: una “strategia di riduzione” (*reduce strategy*) che implica il tentativo di svolgere ogni operazione presente e l’eliminazione delle parentesi il più presto possibile, e una “strategia di isolamento” (*isolate strategy*) che implica il tentativo di spostare tutte le x da una parte e i numeri dell’altra parte dell’equazione. Mayer ha ipotizzato che quando un problema è espresso verbalmente, i soggetti più probabilmente utilizzeranno una strategia di riduzione , mentre se il compito è presentato sotto forma di equazione, la strategia utilizzata sarà probabilmente quella di isolamento. In un esperimento un campione di soggetti è stato diviso in due gruppi, al primo gruppo sono stati sottoposti dei problemi in forma di equazioni simili a quella riportata sopra, al secondo sono state sottoposte le stesse equazioni, ma espresse in parole. Benché i soggetti di entrambi i gruppi possedessero adeguate conoscenze di algebra, quando il problema è stato presentato in forma verbale i soggetti hanno prevalentemente usato la strategia di riduzione, nell’altro caso è stata applicata prevalentemente una strategia di isolamento.

Per quanto riguarda la misurazione dell'abilità di pianificazione sono stati impiegati metodi diversi. In alcuni studi (De Groot, 1965), si è cercato di indagare la pianificazione durante la soluzione di un problema, usando il metodo del "pensare ad alta voce". Tuttavia i risultati hanno evidenziato che, sebbene questa tecnica sia molto efficace per studiare le strategie di tipo generale, esse risulta poco informativa per quando riguarda il modo in cui i soggetti prendono le decisioni. Probabilmente accade che i soggetti, anche parlando ad alta voce, diano per scontati i motivi delle loro decisioni e i ragionamenti sottostanti le decisioni prese rimangono ambigui.

Spesso l'abilità di pianificazione viene misurata per mezzo di test classici, come la torre di Hanoi, il test dei labirinti (Porteus 1950) ed altri. Tuttavia, a causa della complessità del concetto di pianificazione, questo tipo di test ne riesce a misurare solo alcuni aspetti e non ne offre una valutazione globale (Lucangeli et al., 1995). A conferma di questo, in uno studio di Passolunghi e altri (1996) è stata misurata la pianificazione in relazione all'abilità di risoluzione di problemi aritmetici. I test per la misurazione della pianificazione impiegati nello studio erano il test dei labirinti di Porteus e il test della torre di Londra (Shallice, 1982) e il protocollo di analisi fu quello di un confronto fra gruppi (buoni e cattivi solutori). I risultati di questo studio mostrarono che entrambe le prove di pianificazione impiegate non erano in relazione con l'abilità nella soluzione dei problemi. Tuttavia, in un altro studio, specificatamente predisposto per approfondire il ruolo della componente pianificazione (Passolunghi, 1999) in problemi *routinari* e non *routinari* sono stati evidenziati risultati diversi. In questo caso i test di pianificazione impiegati erano il test della torre di Hanoi e ancora una volta il test della torre di Londra. In questo caso, il test della torre di Londra è risultato un buon predittore della soluzione di problemi di tipo non routinario, e alcuni indici del test della torre di Hanoi si sono rivelati predittori della soluzione di problemi aritmetici (quelli di cui ci occupiamo nel presente lavoro). Va precisato che gli indici di pianificazione significativi includevano il numero di mosse non pertinenti (cioè quelle che allontanano dalla soluzione). In realtà per interpretare questo risultato andrebbe chiarita quale sia la fase della pianificazione, se quella che precede la prova o quella in cui si tenta (per prove ed errori) di arrivare alla soluzione. Questo genere di test, pur fornendo risultati molto interessanti riguardo le abilità cognitive sottostanti la capacità di risolvere i

problemi, non ci dice molto sulla modalità di pianificazione specifica che avviene nel momento in cui si risolve un problema matematico.

Lo studio di Lucangeli e altri (1998), citato numerose volte in questo lavoro, fornisce delle indicazioni sull'abilità specifica di pianificazione del problema. In questo studio la pianificazione è stata misurata richiedendo ai bambini di ordinare gli step di risoluzione del problema, assegnando un numero crescente. Si ricorderà che la pianificazione risulta uno delle cinque componenti che predicono la soluzione del problema. Il risultato quindi ci fornisce indicazioni circa il peso della pianificazione specifica del problema. Si segnala che nel complesso delle variabili misurate in tale studio, la pianificazione riportava il peso fattoriale più basso (vedi figura 2.1).

4.4.1 Pianificazione: questioni aperte

Come si potrà notare, la componente della pianificazione è quella che comporta minori difficoltà di definizione. La pianificazione è definita infatti come la capacità di elaborare un piano strategico per arrivare alla soluzione. La definizione è derivata dagli studi classici sul problem solving ma ben si adatta al contesto della soluzione dei problemi matematici. Anche nel caso dei problemi matematici è indispensabile individuare un piano di soluzione quando il problema richieda più operazioni per trovare la soluzione.

L'unica ambiguità che potrebbe creare il concetto di pianificazione è relativa ad un concetto di pianificazione più generico e di carattere metacognitivo, del tipo "cosa è necessario fare per risolvere un problema", in questo senso la pianificazione potrebbe essere considerata come la procedura che i bambini apprendono a scuola per risolvere il problema: leggere attentamente il testo, individuare i dati, sottolinearli, ricopiarli nel quaderno nella sezione "dati", individuare la domanda del problema, trascriverla nel quaderno, indicare la procedura, disegnare un diagramma, scrivere le operazioni in colonna, ecc., scrivere la risposta. Anche questo potrebbe essere considerato un procedimento di pianificazione.

Per non generare confusione, nel presente studio è stata considerata "pianificazione del problema" la capacità di individuare la giusta sequenza di

operazioni necessaria per trovare la soluzione. Una misura di tale abilità potrebbe essere l'esame degli *step* del problema che il bambino ha eseguito correttamente.

Un altro modo di considerare la pianificazione potrebbe essere quello di individuare le incognite necessarie per risolvere il problema, cioè una sorta di una ricerca dei valori ignoti che è necessario trovare per ottenere il risultato finale. Si prenda ad esempio un problema del genere:

La mamma oggi ha acquistato un chilo di pane che costa € 1,60, 6 uova a € 0,20 l'uno e una rivista a € 2,50. Quando è rientrata a casa aveva ancora con sé € 4,70. Quanti soldi aveva la mamma quando è uscita di casa?

il processo di pianificazione potrebbe lavorare in questo modo: “*devo trovare i soldi complessivi della mamma, quale dato mi serve? Quanto ha ancora? Ce l'ho, quanto ha speso? Manca. Devo trovare quanto ha speso la mamma, quale dato mi serve? Il prezzo del pane? Ce l'ho. Il prezzo della rivista? Ce l'ho. Il prezzo delle uova? Manca. Devo trovare il prezzo delle uova, quale dato mi serve? Prezzo unitario delle uova? Ce l'ho. Numero di uova? Ce l'ho. Posso calcolare il prezzo delle uova. Ora posso trovare quanto ha speso la mamma e quanti soldi aveva in tutto all'inizio!*”. Per ottenere una misura che rispecchiasse questo aspetto della pianificazione del problema è stata creata una prova che richiedeva a bambini di scuola elementare di individuare i passi necessari per risolvere il problema e spiegarli verbalmente per iscritto. Si è ritenuto che questa misura potesse rispecchiare con una certa fedeltà il processo che abbiamo descritto. Questa prova è stata impiegata in uno studio sulla valutazione delle componenti cognitive coinvolte nella soluzione dei problemi aritmetici, che verrà descritto più avanti.

Parte seconda

*Analisi della soluzione dei problemi aritmetici:
contributi empirici*

Capitolo Quinto

Approfondimento empirico sulla comprensione del testo nell'attività di risoluzione dei problemi

5.1 Sommario

Nel presente capitolo viene descritto uno studio sulla comprensione del testo nell'attività di soluzione dei problemi aritmetici. I problemi aritmetici, infatti, pur essendo un'attività che riguarda principalmente l'area matematica, hanno la peculiarità di essere presentati attraverso un testo verbale. Per questo motivo lo studio si sofferma sull'aspetto della comprensione del testo che caratterizza questa attività. Gli obiettivi dello studio sono: A. valutare il peso della comprensione del testo sull'attività di soluzione dei problemi rispetto ad altre abilità rilevanti (matematica, ragionamento non verbale e vocabolario); B. valutare se esistono aspetti della comprensione del testo particolarmente importanti nella soluzione dei problemi; C. valutare meccanismi di comprensione più specifici per il testo del problema aritmetico. Ad una prima analisi condotta su un campione di 114 soggetti frequentanti la quarta e quinta classe primaria, segue un approfondimento condotto su un gruppo ristretto (57 soggetti) composto dai soli bambini frequentanti la quarta primaria. I risultati mostrano che la comprensione del testo ha un ruolo fondamentale nella soluzione dei problemi, in modo particolare l'analisi della *struttura sintattica* del testo e la comprensione degli aspetti numerici del problema.

5.2 Introduzione

Come è stato descritto nel secondo capitolo, la comprensione del testo è un aspetto fondamentale nella soluzione dei problemi aritmetici, proprio perché questi sono presentati tramite un testo verbale che costituisce la cornice e la struttura dei dati numerici da elaborare. “Cornice” in quanto il testo verbale fornisce un contesto, una storia all’interno della quale deve svolgersi l’attività di soluzione del problema. “Struttura” in quanto la formulazione verbale rende conto anche, e soprattutto, della relazione fra i dati. Proprio questa struttura indica il percorso necessario per trovare la soluzione.

A partire dagli anni ottanta, l’interesse scientifico per l’attività di soluzione dei problemi matematici, ha messo in evidenza come la comprensione del problema non fosse esclusivamente legata alla comprensione degli algoritmi di calcolo o comunque della struttura matematica del problema (Mayer, 1983; 1987; Mayer, Larkin e Kadane, 1984). Come è stato descritto nei capitoli precedenti, questi primi studi hanno aperto la strada a numerose ricerche sulla soluzione dei problemi matematici e hanno analizzato, anche molto dettagliatamente, il ruolo della comprensione del testo del problema (Riley, Greeno e Heller, 1983; Kintsch e Greeno, 1985; De Corte, Verschaffel e De Win, 1985; ecc.). Tali modelli cognitivi, tuttavia, erano destinati ad essere implementati su programmi di simulazione e raramente furono direttamente verificati su soggetti umani.

Ricerche più recenti, hanno iniziato a verificare sperimentalmente le componenti cognitive coinvolte nell’attività di risoluzione in soggetti adulti o bambini (Passolunghi, Cornoldi, Lonciari, 1996; Passolunghi, 1999; Lucangeli, Tresoldi e Cendron, 1998), sottolineando il ruolo fondamentale assunto dalla comprensione del testo. Questi studi, pur pervenendo a risultati meno dettagliati e approfonditi, hanno ottenuto risultati importanti circa le componenti cognitive coinvolte. La prospettiva di analisi adottata nel presente studio si avvicina a queste ricerche con l’obiettivo di approfondire i risultati ottenuti. In particolare saranno analizzati gli aspetti specifici della comprensione del testo narrativo in funzione dell’abilità di risoluzione dei problemi. Inoltre saranno approfonditi i meccanismi specifici che intervengono nella comprensione di un testo “speciale” quale è il testo del problema, differenziando tra la comprensione degli aspetti linguistici e quella dei dati numerici.

Nello studio verranno descritte due studi, il primo riguarda i risultati generali ottenuti sul campione complessivo di 114 soggetti, la seconda riporta gli

obiettivi specifici dello studio analizzati su un campione ristretto di 57 soggetti. La seconda analisi costituisce un approfondimento della prima, reso possibile in quanto i bambini del gruppo ristretto sono stati successivamente sottoposti a prove più approfondite per la misurazione dell'abilità di soluzione dei problemi aritmetici. Questo ha permesso di superare alcuni limiti, legati alla misurazione dall'abilità di soluzione dei problemi aritmetici con un'unica prova.

5.3 Studio 1

5.3.1 Partecipanti, materiali, procedura

Partecipanti

È stato scelto di valutare la comprensione dei problemi aritmetici in bambini frequentanti il secondo biennio della scuola primaria (quarta e quinta primaria), poiché si ritiene che nel corso di questo ciclo si raggiunga la piena maturità per la comprensione dei problema aritmetico.

Sono stati coinvolti nella ricerca 114 bambini, di cui 50 femmine e 64 maschi, frequentanti le classi quarta e quinta primaria in una scuola del territorio palermitano che accoglie utenza di livello socioculturale medio. L'età media è di 118 mesi (112 nelle quarte e 126 nelle quinte). Non sono stati inclusi nel gruppo finale bambini in situazione di handicap; inoltre, sono stati esclusi dal gruppo i soggetti che hanno ottenuto un punteggio inferiore o uguale al 5° percentile al test delle matrici progressive colorate di Raven (1947), descritto di seguito.

Materiali e procedura

Ai bambini è stato richiesto di svolgere una serie di prove che esplorano diverse aree: funzionamento cognitivo generale, comprensione del testo, abilità di calcolo e di soluzione dei problemi. Di seguito si riporta una descrizione delle singole prove.

Abilità di base

- 1) Abilità non verbali (PM47)

Sono state utilizzate le Matrici progressive colorate di Raven (1947). Nella prova, viene richiesto al bambino di completare un disegno scegliendo una tessera tra sei alternative proposte. Alcune prove richiedono un'abilità di tipo puramente percettivo, mentre in altre viene richiesto di completare delle serie logiche. Il test è costituito da tre serie di 12 matrici; il punteggio massimo è uguale a 36 ed il minimo è uguale a 0. La prova riporta dati normativi attraverso i quali è possibile convertire il punteggio grezzo in punteggio percentile. Il test è stato somministrato collettivamente in ciascuna classe.

2) Vocabolario (PMA significato verbale)

E' stato utilizzato il *subtest* "significato verbale" della Batteria PMA (Thurstone e Thurstone, 1968). Il *subtest*, è costituito da due sottoscale, *parole*, in cui il bambino deve indicare il sinonimo di una parola target fra quattro possibili opzioni e *figure*, in cui il bambino deve indicare, fra quattro, il nome di una figura target. Il punteggio massimo alla prova è 60, il punteggio minimo è 0. il test riporta dati normativi per mezzo dei quali è possibile ricavare un punteggio percentile. La somministrazione è stata collettiva.

Prove di livello di apprendimento

3) Comprensione del testo (MT)

E' stato utilizzato il *subtest* di comprensione delle Prove di lettura MT per la scuola elementare (Cornoldi e Colpo, 1981). La prova consiste nella presentazione di un brano da leggere, seguito da 14 domande a scelta multipla sul testo. I brani scelti, "voglia di giocare" e "Omar e Hamed", sono prove approfondite che consentono di individuare alcune caratteristiche e componenti della comprensione del testo. I punteggi al test variano da 0 a 14. Il test è stato somministrato collettivamente in ogni classe.

4) Abilità aritmetiche (MAT-2)

È stata utilizzata la sezione "aritmetica" del test MAT-2. Test di matematica per la Scuola Primaria (Amoretti, Bazzini, Pesci e Reggiani, 2007). Il test esplora tutte le aree della competenza aritmetica (abilità di calcolo, sintassi numerica, problem solving) in base ai programmi didattici della classe di riferimento. Il test viene somministrato collettivamente. Ai bambini è richiesto di

risolvere 15 diversi esercizi costituiti a loro volta da più item. Ogni esercizio è considerato corretto (1 punto) solo se vengono risolti correttamente tutti gli item che lo compongono; il punteggio varia da 0 a 15.

Problemi aritmetici

5) Problemi aritmetici 1

Si tratta di problemi matematici elaborati sulla base dei programmi didattici della quarta e della quinta primaria. I problemi sono stati scelti da un set di problemi precedentemente somministrato ad un gruppo di 17 insegnanti, al fine di valutarne l'adeguatezza per la somministrazione alle classi di riferimento. Questi problemi sono inclusi, inoltre, nella sezione test del software "risolvere i problemi aritmetici" (D'Amico *et al.*, 2009).

Sono state utilizzate due procedure di *scoring* dell'abilità di risoluzione dei problemi. Il primo punteggio, si riferisce al numero di problemi risolti (da 0 a 4). Tale punteggio si basa su un criterio stretto, il bambino ottiene il punto solo se il problema è stato svolto esattamente in ogni suo passaggio. Tuttavia, gli errori nello svolgimento del problema possono essere molto diversi tra loro, dal semplice errore di calcolo alla selezione dei dati, alla combinazione dei dati, ecc.

È stata quindi individuata una seconda modalità di *scoring* maggiormente sensibile alle diverse prestazioni dei soggetti. Tale modalità prevede di assegnare un punto per ogni *step* del problema svolto correttamente, escludendo gli errori di calcolo. Uno *step* svolto correttamente richiede la selezione dei dati pertinenti e la corretta relazione fra i dati, cioè l'esecuzione dell'operazione necessaria.

Il numero massimo di punti così calcolato varia in base al singolo problema in quanto è dato dal numero di passaggi necessari per risolverlo.

Infine i punteggi ottenuti sono stati ponderati in base alla media e la deviazione standard del gruppo di riferimento, quarta o quinta.

6) Problemi aritmetici 2 (somministrati ai soli soggetti frequentanti la quarta, descritti nell'approfondimento)

Per valutare l'abilità di risoluzione dei problemi aritmetici sono stati utilizzati i 18 problemi aritmetici tratti dallo studio di Passolunghi e altri (1996). I problemi sono a difficoltà crescente e richiedono da una a cinque operazioni per la soluzione. La somministrazione è stata collettiva all'interno di ciascuna classe

ed è stata divisa in due sessioni. I problemi divisi nelle due sessioni erano ponderati per difficoltà, al fine di evitare che nella prima sessione rientrassero tutti i problemi più semplici e nella seconda quelli più complessi. Per la correzione è stato attribuito un punto ad ogni problema risolto correttamente, escludendo dalla valutazione gli errori di calcolo.

7) Prova di Comprensione del problema: testo e dati. (CP)

Per valutare l'aspetto specifico della comprensione del dato numerico rispetto alla generica comprensione del testo, è stata preparata appositamente una prova, già impiegata in precedenti analisi (D'Amico e La Porta, 2010) che consentisse di confrontare l'abilità di rispondere a domande che riguardano aspetti narrativi del testo del problema con risposte a domande che riguardano gli aspetti numerici del problema.

Per la costruzione della prova, il punto di partenza sono state le prove MT "il panda" e "l'orso bianco". A queste sono stati aggiunti dei dati numerici che hanno reso il testo un problema aritmetico. Ad esempio nel brano "il panda", che narra della vita e le abitudini dei panda, sono state aggiunte delle informazioni circa l'estinzione dei panda, il numero di panda viventi in cattività e in libertà ed è stata introdotta una domanda finale in cui viene richiesto di calcolare quanti panda sono stati censiti durante l'ultima rilevazione fatta. Questo lavoro ha trasformato il brano MT originario in un problema aritmetico con un testo piuttosto lungo e ricco di informazioni, compresi i cosiddetti "dati superflui", cioè numeri che non sono necessari per risolvere il problema.

Complessivamente nel problema sono presenti 3 dati rilevanti e 3 dati irrilevanti, la selezione dei dati rilevanti rappresenta quindi la principale difficoltà del problema. La risoluzione richiede una somma e una sottrazione. I numeri utilizzati sono interi a 2, 3 o 4 cifre.

Al testo seguono 12 domande a risposta multipla, 6 di queste riguardano gli aspetti della comprensione del testo narrativo, e sono tratte dall'originaria prova MT, le restanti 6 riguardano la comprensione di dati numerici e sono costruite sulla base dei dati inseriti nel testo.

Esempio di domande sul testo:	
TESTO	Tranne che allo zoo di Pechino non si è mai riusciti a far riprodurre in cattività questo graziosissimo animale bianco e nero, <u>che tutti chiamano orso ma che con gli orsi ha solo una lontana parentela, poiché appartiene alla stessa famiglia dei procioni.</u>
DOMANDA SUL TESTO	<p>Possiamo dire che il panda:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. In realtà è proprio un orso di piccole dimensioni 2. <u>Appartiene alla stessa categoria di animali cui appartiene il procione</u> 3. È un animale amico dell'uomo e può vivere nelle nostre case
Esempio di domande sui dati:	
TESTO	Fortunatamente, il numero totale dei panda è aumentato notevolmente rispetto alla verifica passata, avvenuta nel 1988, che aveva contato in tutto 1110 animali.
DOMANDA SUI DATI	<p>Cosa indica il numero 1110?</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. il numero di panda viventi attualmente 2. l'anno in cui sono stati osservati per la prima volta i panda 3. il numero di panda viventi contati nel 1988

Tab. 5.1 Esempi di domande sul testo e sui dati prova CP

Le domande sui dati consistono nell'individuare il giusto referente per ogni dato, cioè il correlato verbale di una certa quantità. Una sola domanda sui dati richiede anche di specificare se il dato in analisi è importante per risolvere il problema o meno. Due domande sui dati riguardano dati superflui, tre riguardano i dati necessari. La domanda finale, invece, consiste nell'individuazione della richiesta del problema. In tabella 3.8 sono riportati esempi di domande sul testo e sui dati.

Il punteggio viene differenziato per domande sul testo (CP/testo) e domande sui dati (CP/dati). Il punteggio massimo, dato dal numero di risposte corrette, è di 6 per ogni scala.

5.3.2 Risultati

In tabella 5.1 sono riportate le statistiche descrittive relative a tutte le prove utilizzate nello studio.

In tabella 5.2 sono riportate le correlazioni tra PM47, PMA, MT, MAT-2, CP/T, CP/D, e il numero di problemi risolti (N° Problemi risolti), il punteggio totale ottenuto alla prova di soluzione dei problemi.

Come è possibile osservare dalla tabella 4.2, i test standardizzati impiegati nello studio hanno una buona correlazione reciproca, $p < .01$.

Relativamente alle prove specificatamente predisposte per gli scopi della ricerca, si può osservare che entrambe le variabili relative alla comprensione del testo del problema (CP/T e CP/D) sono significativamente correlate ai punteggi di tutte le prove standardizzate (con valori di r compresi tra .337 e .515, $p < .01$), nonché tra di loro ($r = .428$, $p < .01$).

Relativamente ai problemi aritmetici proposti, anche questi risultano significativamente correlati con tutte le prove standardizzate (valori di r compresi fra .272 e .537, $p < .01$)

Infine, anche le relazioni tra gli indici di abilità di soluzione dei problemi e le variabili di comprensione del testo del problema (CP/T e CP/D), presentano correlazioni significative ($p < .01$) con valori di r compresi tra .320 e .412.

Poiché tutte le variabili risultano correlate in maniera significativa con gli indici di abilità di soluzione dei problemi, e l'obiettivo principale di questa analisi è quello di valutare la soluzione dei problemi in relazione all'abilità di rispondere a domande sul testo del problema e sui dati del problema, è stato anche calcolata la correlazione parziale fra il numero di problemi risolti correttamente e le variabili CP/T e CP/D, controllando il contributo della comprensione del testo generico e la prova di aritmetica. Con questa procedura si esclude l'influenza delle due variabili controllate nella relazione fra gli indici di comprensione del problema (CP/T e CP/D) e la soluzione di problemi. I risultati, riportati in tab. 5.3 e 5.4, ci danno delle indicazioni sulla specificità delle relazioni prese in considerazione.

Come è possibile osservare, tramite la procedura descritta, la relazione fra CP/T e numero di problemi risolti correttamente perde la significatività statistica; al contrario la relazione fra CP/D e problemi risolti mantiene la significatività, con $p < .05$

Prove Standardizzate	MIN	MAX	MEDIA	DS	SKEW	KURT
<i>Abilità non verbali (PM47)</i>	18	36	29,06	4,591	-,569	-,603
<i>Vocabolario (PMA)</i>	34	60	53,02	5,191	-1,430	2,495
<i>Comprensione del testo (MT)</i>	1	14	8,36	3,024	-,187	-,861
<i>Abilità aritmetiche (MAT)</i>	1	18	8,01	3,559	,470	,162
Prova Sperimentale						
<i>Comprensione Problema Testo (CP/T)</i>	1	6	3,86	1,235	-,193	-,479
<i>Comprensione Problema Dati (CP/D)</i>	0	6	4,59	1,442	-,683	-,510
Indici Problemi						
<i>N° Problemi Corretti</i>	,00	4,00	,61	,783	1,390	2,396
<i>Punteggio Totale Problemi</i>	,00	17,00	3,61	3,021	1,551	4,246

Tab. 5.1.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1. <i>Abilità non verbali (PM47)</i>	1							
2. <i>Vocabolario (PMA)</i>	,516**	1						
3. <i>Comprensione del testo (MT)</i>	,405**	,605**	1					
4. <i>Abilità aritmetiche (MAT)</i>	,362**	,340**	,424**	1				
5. <i>Comprensione Problema Testo (CP/T)</i>	,368**	,400**	,482**	,419**	1			
6. <i>Comprensione Problema Dati (CP/D)</i>	,383**	,464**	,515**	,337**	,428**	1		
7. <i>N° Problemi Corretti</i>	,275**	,321**	,383**	,537**	,320**	,390**	1	
8. <i>Punteggio Totale Problemi</i>	,288**	,316**	,315**	,414**	,397**	,412**	,833**	1

Tab. 5.2.

Controllato per		N° Problemi Corretti
<i>Comprensione del testo</i>	<i>Comprensione Problema Testo</i>	,054
<i>Abilità aritmetiche</i>	(CP/T)	
<i>Tab. 5.3</i>		Df = 110

Controllato per		N° Problemi Corretti
<i>Comprensione del testo</i>	<i>Comprensione Problema Dati</i>	,199*
<i>Abilità aritmetiche</i>	(CP/D)	
<i>Tab. 5.4</i>		Df = 110

5.3.3 *Discussione*

I risultati ottenuti consentono di effettuare una serie di riflessioni. In primo luogo, le correlazioni reciproche tra le prove standardizzate, e tra le variabili relative alla comprensione del testo del problema e le prove standardizzate, sottolineano l'importanza delle abilità non verbali, delle competenze lessicali e della comprensione del testo nello svolgimento di compiti aritmetici. A questo proposito va detto che la prova MAT-2, scelta perché contiene diversi compiti aritmetici, che vanno dal calcolo alla risoluzione di brevi problemi, appare, non a caso, altamente correlata con la prova di comprensione del testo.

Questo risultato appare in linea con quelli più volte riportati nella letteratura che vedono una forte associazione tra abilità aritmetiche ed abilità nella comprensione del testo (ad es. D'Amico e Passolunghi, 2009).

Infine, il risultato che emerge in questo studio è la correlazione tra gli indici di abilità di risoluzione e la capacità di rispondere alle domande sui dati del problema. Ciò indica che la capacità di soluzione dei problemi è fortemente legata alla capacità di comprendere il significato delle informazioni numeriche presenti nel testo, e in maniera maggiore alla capacità di comprenderne i generici aspetti narrativi.

È necessario sottolineare tuttavia che la comprensione del dato implica la contestualizzazione di tale elemento e non una mera estrapolazione del dato dal testo e dal contesto del problema. In questo senso, il nostro risultato è coerente con quello di Hegarty *et al.* (1995), descritto nel terzo capitolo, in quanto, rispondere correttamente alle domande sui dati implica porre l'attenzione sul

significato verbale dei numeri, associando ogni numero alla corretta variabile. Le domande sui dati, inoltre, implicano la riflessione su ciò che è necessario trovare per risolvere il problema.

Questo risultato fornisce, quindi, delle indicazioni importanti sul tipo di comprensione necessaria per la corretta soluzione del problema. Comprendere il significato del dato sembra essere maggiormente rilevante rispetto alla comprensione dei diversi aspetti del testo. Possiamo immaginare che la lettura del testo del problema sia orientata dalla presenza dei dati e su di questi si realizzi la costruzione del significato del problema.

5.4 Studio 2

5.4.1 Obiettivi

Il secondo studio riguarda un sottogruppo del campione descritto nello

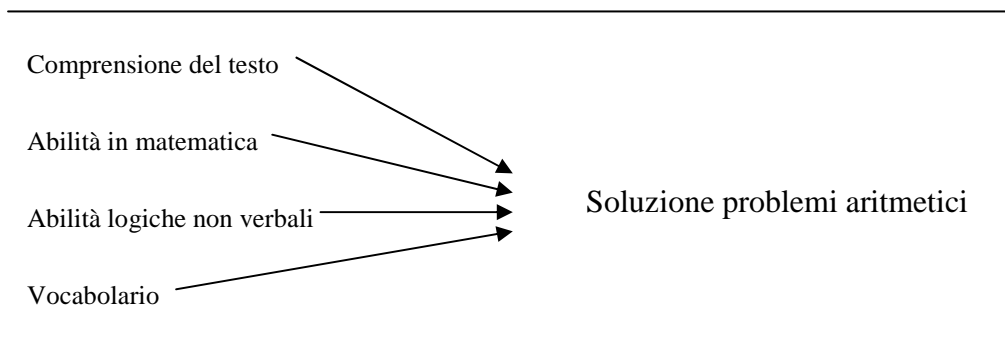


Fig. 5.1 Le abilità misurate in relazione alla soluzione dei problemi aritmetici

studio 1, costituito dai bambini frequentanti la quarta primaria.

Questo studio di approfondimento ha riguardato tre sotto-obiettivi:

A. Valutare la relazione fra abilità di soluzione dei problemi aritmetici e comprensione del testo generico, rispetto alle altre abilità misurate nello studio. In particolare, dai risultati della prima analisi è stata osservata una correlazione positiva tra soluzione dei problemi e comprensione del testo, questo approfondimento invece ha l'obiettivo di valutare la specificità della relazione rispetto alle altre abilità considerate, all'interno di un modello causale (fig. 5.1).

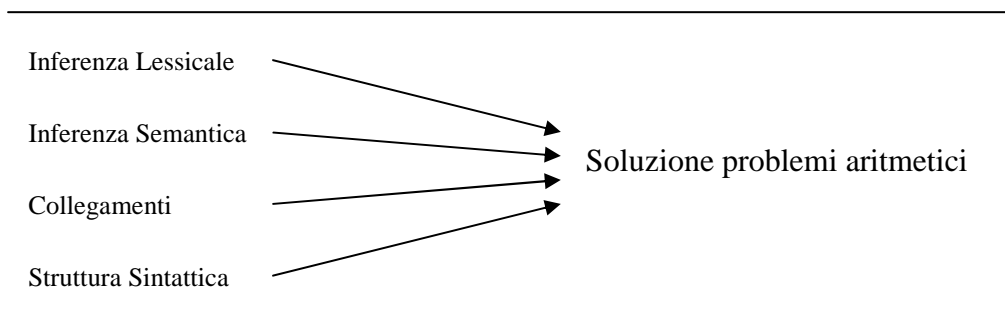


Fig. 5.2 Aree della comprensione del testo in relazione alla soluzione dei problemi

B. Verificare se esistono aspetti della comprensione del testo che sono maggiormente correlati alla soluzione dei problemi aritmetici. Come sarà descritto nella sezione strumenti, i punteggi ottenuti dai bambini alle due prove di comprensione sono stati classificati secondo le aree di inferenza lessicale, inferenza semantica, collegamenti e struttura sintattica. L'obiettivo è quello di analizzare in che misura i quattro indici spiegano la capacità di risolvere i problemi e se alcuni indici la spiegano più di altri (fig. 5.2).

C. approfondire la relazione fra comprensione del dato numerico e comprensione degli aspetti narrativi del testo del problema aritmetico, tramite la prova sperimentale CP, così come è stato fatto con il campione generale.

5.4.2 Metodo

Partecipanti

I bambini coinvolti sono 57, 25 femmine e 32 maschi, età media 112 mesi. Va specificato che le rilevazioni dei dati hanno avuto inizio quando i soggetti stavano per concludere la quarta classe primaria e sono terminati quando frequentavano la quinta.

Strumenti

Gli strumenti utilizzati sono gli stessi descritti per il campione generale. Ai 57 soggetti di approfondimento sono stati altresì somministrate, una nuova prova di soluzione dei problemi aritmetici e una prova di comprensione MT per la quinta classe primaria.

Inoltre, è sembrato utile ripetere la prova MT, adeguandola al livello scolastico dei soggetti, per avere dati più robusti, dal momento che l'analisi riguarda in particolare la componente della comprensione del testo. Pertanto i dati riportati faranno riferimento alla somministrazione di due prove per la comprensione del testo, una avvenuta alla fine della frequenza della quarta primaria e una durante il periodo intermedio della quinta. Su entrambe le prove MT è stata condotta un'analisi sui diversi aspetti della comprensione che viene di seguito descritta.

5.4.3 Analisi delle componenti della comprensione del testo utili per la soluzione del problema

Per analizzare e, conseguentemente, misurare l'influenza dei diversi aspetti della comprensione sulla soluzione dei problemi, si è fatto riferimento alle prove di comprensione MT. In particolare sono state utilizzate le prove di tipo approfondito, che permettono di condurre una analisi qualitativa dei singoli item contenuti nel test.

Per prima cosa è stata condotta un'analisi delle dieci categorie in cui è stata suddivisa la prova degli stessi autori, riportate in tabella 4.1. Tuttavia, l'analisi di tali categorie risulta essere poco informativa ai fini dei nostri interessi di ricerca a causa di un eccesso di analiticità. Infatti, ogni categoria generalmente è presente una sola volta nel test, o al massimo due; a ciò si aggiunga che alcuni item sono etichettati con un insieme di più categorie, e questo complica ulteriormente l'analisi. Quindi l'unica analisi possibile, utilizzando la prova nella sua struttura originale, è per singoli item. Si consideri che ogni item, viene assegnato ad una categoria perché quest'ultima risulta l'aspetto saliente per l'analisi del brano; tale aspetto, tuttavia, in genere non è "puro", poiché in concreto può accadere che l'item implichi vari aspetti della comprensione del testo.

Il nostro interesse si è spostato, quindi, sull'individuazione di raggruppamenti più sintetici degli item. Partendo sempre dalla classificazione proposta degli stessi autori, si è cercato di ricavare dei gruppi di item che rientrassero in un'area comune secondo l'aspetto che risultava saliente per rispondere alla domanda. Sono stati esclusi dall'analisi item di tipo

preminentemente metacognitivo perché, come è stato spiegato, il presente lavoro si focalizza su aspetti cognitivi del problem solving, tralasciando l'approfondimento di altri aspetti, tra cui quelli metacognitivi. Come già stato osservato, in ogni domanda diversi aspetti della comprensione coesistono, tuttavia si può facilmente rilevare che alcuni di questi hanno rilevanza maggiore in certi item e minore in altri. Per esempio, l'inferenza, pur essendo sempre presente nel processo di comprensione, risulta maggiore in alcuni item in cui il significato della frase o della parola va inferito dal contesto, perché non espresso esplicitamente. Gli item con queste caratteristiche sono stati classificati come "item di inferenza". Gli item che richiedono prioritariamente una analisi sintattica accurata, possibilmente perché la costruzione della frase non è lineare (vedi paragrafo sulle caratteristiche del brano che influenzano la comprensione), o che richiedono di fare collegamenti fra diverse informazioni processate nel testo, rientrano nella categoria di "item di analisi del brano".

Queste due categorie principali sono state suddivise a loro volta in due aree: inferenza lessicale e inferenza semantica, a seconda se è necessario inferire il significato di un termine o di un concetto generale e struttura sintattica e ricerca informazioni (o collegamenti) a seconda se l'analisi del brano riguarda una singola frase oppure diverse frasi presentate nel brano (*fig. 5.3*).

Una ulteriore differenza che intercorre tra gli item è la "difficoltà di riconoscimento della frase target", cioè la difficoltà nell'individuazione della frase da processare per rispondere alla domanda; gli item di inferenza si differenziano

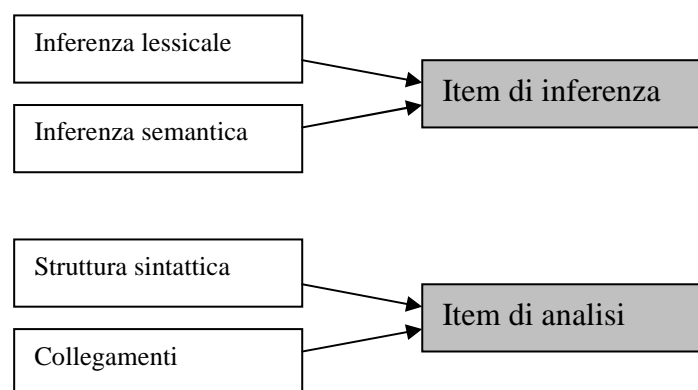


Fig. 5.3 : le aree di classificazione degli Item

rispetto a questa caratteristica in quanto la difficoltà di riconoscimento della frase target è più bassa negli item di inferenza lessicale e più alta negli item di inferenza semantica. Anche gli item di analisi si differenziano per questo aspetto, infatti il riconoscimento della frase target negli item di struttura sintattica è più immediato rispetto agli item di collegamento nel testo, in cui, per definizione, la difficoltà principale sta nell'integrare diverse informazioni processate nel corso della lettura.

Per sintetizzare le caratteristiche degli item, possiamo fare riferimento allo schema riportato in tab. 5.5.

AREA	GRADO DI INFERENZA	GRADO DI ANALISI DELLA STRUTTURA DEL BRANO	DIFFICOLTÀ DI RICONOSCIMENTO DELLA FRASE TARGET
Inferenza lessicale	Alto	Basso	Basso
Inferenza semantica	Alto	Basso	Medio
Struttura sintattica	Basso	Alto	Medio
Ricerca informazioni	Basso	Alto	Alto

Tab. 5.5

5.4.4 Risultati e discussione

5.4.4.1 Quale peso ha la comprensione del testo nella soluzione dei problemi matematici

Nella tabella 5.6 sono riportate le correlazioni fra Problemi aritmetici e comprensione del testo, vocabolario, abilità logiche non verbali e matematica. Come è possibile osservare, tutte le variabili considerate presentano una forte correlazione con Problemi Aritmetici. È possibile, altresì, notare che le correlazioni più elevate sono riportate con la variabile vocabolario ($R^2 = ,598$) e la variabile comprensione del testo ($R^2 = ,585$).

		1	2	3	4	5
1.	Problemi Aritmetici	1				
2.	Comprensione del testo	,585**	1			
3.	Matematica	,504**	,468**	1		
4.	Abilità non verbali	,508**	,366**	,383**	1	
5.	Vocabolario	,598**	,606**	,420**	,480**	1

Tab. 5.6

Per valutare l'entità e la direzionalità di tali correlazioni, è stata effettuata una regressione lineare multipla, metodo *stepwise* (tab 5.7).

Nel primo modello l'unico predittore di Problemi Aritmetici è la variabile vocabolario, che ne spiega il 36 % della varianza. Nel secondo modello, la comprensione del testo migliora dell' 8 % la porzione di varianza spiegata. Infine, nel terzo modello, entra la variabile "abilità non verbali" e il modello complessivamente rende conto di un 48 % di varianza. Si può osservare che in questo modello la comprensione del testo presenta il *beta* maggiore.

modello		B	beta	t	Sig.
3	Vocabolario	,052	,283	2,133	,038
	Comprensione del testo	,110	,325	2,601	,012
	Abilità non verbali	,051	,246	2,173	,034

Tab. 5.7

Mod 1 $R^2 = .36$; $F = 30,1$; $sig < .001$

Mod 2 $R^2 = .44$; $F = 20,9$; $sig < .001$

Mod 3 $R^2 = .48$; $F = 16,5$; $sig < .001$

Anche questi risultati ci permettono di fare una serie di riflessioni di carattere generale.

In primo luogo la prova Problemi Aritmetici mostra ottime correlazioni con tutte le prove standardizzate impiegate, con punteggi significativi che vanno da $R = .508$ a $R = .598$. Questo da un lato conferma alcune delle riflessioni fatte sulla bontà della prova per la misurazione dell'abilità nella soluzione dei problemi aritmetici, dall'altro ci indica che le abilità considerate sono tutte molto significative per la soluzione dei problemi.

Rispetto alla prova di abilità nella soluzione dei problemi utilizzata nella prima analisi, in questo secondo caso si evidenzia maggiormente la correlazione con le abilità di base di tipo verbale (correlazione vocabolario e problemi, $R =$

.60) e non verbale (correlazione fra ragionamento non verbale e problemi, $R = .51$) e con la comprensione del testo ($R = .59$), mettendo chiaramente in luce l'importanza dei processi di tipo verbale e di comprensione del testo per la soluzione dei problemi aritmetici.

L'analisi della regressione conferma ulteriormente questa evidenza, dal momento che i migliori predittori dell'abilità di soluzione dei problemi risultano essere la comprensione del testo e il vocabolario.

L'abilità matematica sorprendentemente non apporta miglioramenti significativi al modello, pur riportando una buona correlazione con la prova di soluzione ($R = .50$). Per una lettura corretta di questo risultato va detto, tuttavia, che in molti casi i bambini hanno incontrato difficoltà nello svolgimento degli esercizi della prova, a causa della poca familiarità con la formulazione dei compiti. Per tale motivo è possibile presumere che i punteggi ottenuti non rispecchino perfettamente l'abilità matematica dei singoli soggetti.

5.4.4.2 *Quali aspetti della comprensione del testo sono maggiormente coinvolti nella soluzione dei problemi*

Nella tabella 5.8 sono riportati le correlazioni presenti fra i quattro indici delle prove di comprensione somministrate rispetto all'abilità di soluzione dei problemi aritmetici.

	PROBLEMI ARITMETICI QUARTA	PROBLEMI ARITMETICI QUINTA
Inferenza Lessicale	,456**	,253
Inferenza Semantica	,371**	,261
Ricerca Informazioni	,280*	,345**
Struttura Sintattica	,555**	,535**

Tab. 5.8

La prima colonna riguarda la prova somministrata in quarta; come si può osservare l'indice che presenta una correlazione maggiore è "struttura sintattica" ($R = .56, p < .01$), seguito da "inferenza lessicale" ($R = .46, p < .01$). Nella seconda colonna sono riportati i risultati ottenuti in quinta. In questo caso le correlazioni degli item di inferenza sono inferiori e non raggiungono livello di

significatività, mentre ottiene una correlazione maggiore l'area "ricerca informazioni" ($R = .35$, $p < .01$). L'indice "struttura sintattica" risulta quello maggiormente correlato ($R = .54$, $p < .01$).

Le differenze nei risultati fra classi quarta e quinta, in particolare nelle aree di inferenza, sono probabilmente legate a differenze qualitative fra le prove, come vedremo nella discussione. In considerazione di queste differenze che potrebbero intercorrere, è stata calcolata la media dei punteggi di area ottenuti nella prova di quarta e nella prova di quinta. Questa procedura ci permette di attenuare le differenze fra le prove e di ottenere una misura più robusta di ogni singola area. Su questi punteggi medi è stata effettuata una regressione lineare multipla con metodo *stepwise*, considerando come predittori i quattro punteggi di area e come variabile dipendente la prova di soluzione dei problemi. In tabella 5.9 sono riportati i risultati di questa analisi.

modello		B	Beta	t	Sig.
1	Struttura Sintattica	,732	,638	6,150	,000
2	Struttura Sintattica	,631	,551	5,017	,000
	Inferenza lessicale	,291	,223	2,034	,047

Tab. 5.9

1. $R^2 = .41$; $F = 37,82$; $sig < .001$

2. $R^2 = .45$; $F = 22,05$; $sig < .001$

Come si può osservare, l'area "struttura sintattica" spiega da sola il 41% della variabilità di Problemi aritmetici, con un F pari a 38. Nel secondo modello entra anche l'area "inferenza lessicale", apportando un miglioramento del 4% al modello.

Come osservato I risultati mostrano una differenza fra la prova somministrata in quarta e la prova somministrata in quinta a livello dell'area *inferenza*, infatti, le correlazioni, significative con $p < .01$, nella prova in quarta, perdono significatività con la prova somministrata in quinta. La differenza fra questi risultati può essere spiegata alla luce di quanto detto a proposito della costruzione delle prove. All'interno di ogni item della prova, infatti, possono coesistere diversi aspetti della comprensione e la classificazione è stata condotta dai giudici secondo l'aspetto che risultava prevalente. Questo chiaramente significa che la categoria potrebbe non risultare esattamente "pura". Un'altra considerazione da fare è che le due prove presentano diverse differenze, sia dal

punto di vista inferenziale, sia dal punto di vista dell'analisi. Per esempio la prova somministrata in quinta presenta un alto numero di termini a bassa frequenza d'uso, e questo, come anche spiegato nel capitolo sulla comprensione del testo, rende più difficile il processo di inferenza lessicale e semantica. In considerazione delle differenze qualitative che le prove presentano, è plausibile una certa differenza nei risultati.

Quello che, tuttavia, sembra particolarmente interessante, forse in misura maggiore in considerazione delle riflessioni fatte sulle differenze fra le prove, è la forte correlazione mantenuta dall'area "struttura sintattica". Questo potrebbe significare che la capacità di analizzare accuratamente la struttura sintattica del brano ha una certa relazione con l'abilità di soluzione dei problemi aritmetici.

Il dato è di per sé interessante, sembra infatti plausibile che aspetti di analisi del brano siano maggiormente rilevanti per la soluzione dei problemi rispetto ad item di inferenza. Analizzando il risultato più in dettaglio osserviamo che l'area "ricerca informazioni", pur presentando in entrambe le prove una correlazione positiva con la soluzione dei problemi, complessivamente non presenta una influenza significativa se messa in relazione agli altri indici. Questo risultato può essere spiegato in considerazione della specificità del testo del problema aritmetico, che generalmente è di ampiezza ridotta, e non richiede l'attività di ricerca di informazioni distribuite in parti distanti del testo, correggere le incongruenze o modificare l'approccio al testo. L'area "ricerca informazioni" implica invece questo tipo di attività, pertanto possiamo supporre che complessivamente questa area, così come è stata individuata nella prova MT, non è particolarmente rilevante per la soluzione del problema.

Per quanto riguarda gli aspetti inferenziali della comprensione osserviamo che l'area della inferenza semantica è quella che risulta meno rilevante per la soluzione del problema aritmetico. Questo si spiega facilmente in funzione delle specificità della attività di soluzione dei problemi, in quanto le inferenze di significato possono avere un peso irrisorio rispetto alla comprensione delle relazioni fra gli aspetti numerici. Se per esempio il testo del problema recita: *"La mamma in previsione dell'arrivo dell'inverno ha comprato 2 maglioni rossi e 3 maglioni verdi per Giacomo. Quanti maglioni ha comprato in tutto?"*, potrebbe avere poca rilevanza che il bambino inferisca correttamente che sta giungendo l'inverno, che presumibilmente il racconto si svolge in un periodo precedente

l'inverno e che in inverno è necessario indossare maglioni di lana. In altre parole, questo tipo di informazioni, ricavate tramite un'inferenza semantica, non dovrebbero avere una influenza particolare sulla soluzione del problema. L'altra area di inferenziale, quella lessicale, invece presenta una correlazione più forte con la soluzione dei problemi aritmetici, tanto che entra nel modello di regressione apportandovi un piccolo miglioramento. Questo risultato può essere spiegato considerando che la comprensione del significato di termini specifici può essere particolarmente importante nella soluzione dei problemi rispetto alla più generale comprensione semantica. Consideriamo ad esempio il seguente problema:

Il papà spende € 45 per fare il pieno nella sua autovettura. Se oggi ha riempito metà tanga, quanto ha speso in tutto?

In questo caso, potrebbe essere particolarmente rilevante che il bambino inferisca correttamente il significato di alcuni termini come autovettura, tanga e pieno. Ma ancora più rilevante, per il problema in questione, è che il bambino inferisca correttamente il significato dei termini “pieno” e “metà”. Non attribuire il significato corretto a tali termini potrebbe compromettere interamente la risoluzione del problema. Possiamo rilevare quindi una differenza importante fra i due tipi di inferenza in funzione della soluzione del problema. Inoltre il peso maggiore dell'inferenza lessicale è coerente con il risultato riportato nel primo studio, in cui si evidenzia il peso dell'indice “vocabolario” rispetto alla soluzione dei problemi. Entrambi i risultati ci indicano complessivamente che comprendere il significato dei termini è una attività rilevante per la soluzione dei problemi e che questa attività risulta più rilevante rispetto alla comprensione del messaggio generale del problema.

5.4.4.3 Comprensione del testo e comprensione degli aspetti numerici

Nelle tabelle 5.10 sono riportate le correlazioni dei due indici con Problemi aritmetici e le altre prove considerate.

	CP/testo	CP/dati
Problemi Aritmetici	,497**	,621**
Abilità non verbali	,396**	,424**
Matematica	,432**	,507**
Vocabolario	,484**	,482**
Struttura Sintattica	,510**	,643**

Tab. 5.10

Come è possibile osservare, sia le domande sul testo narrativo che le domande sui dati del problema sono positivamente correlate all'abilità di soluzione dei problemi e a tutte le altre variabili misurate. Analizzando nel dettaglio l'entità di tali relazioni, osserviamo che la comprensione dei dati del problema presenta una correlazione più forte con Problemi Aritmetici rispetto alla comprensione degli aspetti narrativi. Le variabili "abilità non verbali" e "vocabolario" non presentano differenze elevate fra i due indici. Le variabili "Matematica" e "Struttura sintattica" presentano una correlazione maggiore con l'indice CP/dati.

Per valutare se la relazione fra CP/T e CP/D con Problemi aritmetici non sia mediata dalla comprensione del testo, in particolare dall'indice struttura sintattica, è stata misurata la correlazione fra gli indici CP/testo, CP/dati e problemi aritmetici, controllando il contributo che l'indice struttura sintattica apporta a tale relazione. I risultati dell'analisi sono riportati in tab. 5.11

Tramite questa procedura è possibile osservare che la correlazione fra gli indici diminuisce globalmente, tuttavia, mentre la correlazione di Problemi Aritmetici con l'indice CP/testo perde la significatività statistica, l'indice CP/dati mantiene una correlazione piuttosto forte e significativa con Problemi Aritmetici.

Controllato per		CP/testo	CP/dati
Struttura sintattica	Problemi aritmetici	,259	,357**

Tab. 5.11

La maggiore correlazione dell'indice CP/dati rispetto all'indice CP/testo con l'abilità di soluzione di problemi aritmetici, ci dà informazioni interessanti circa gli aspetti della comprensione più specifici che intervengono nel processo di risoluzione del problema. Se, infatti, è fondamentale la generica comprensione del

testo per l'analisi degli aspetti narrativi del problema, e poi, assume un ruolo più rilevante l'aspetto della comprensione della struttura sintattica, un aspetto ulteriore e specifico per la comprensione del problema è il riconoscimento del dato numerico e della relazione con l'etichetta verbale. In altre parole la capacità di riconoscere il referente verbale di un numero (es. 40 = numero di figurine acquistate) è fondamentale per la soluzione del problema e ne costituisce un aspetto specifico.

Le correlazioni dei due indici con le variabili "abilità non verbali" e "vocabolario" sono sostanzialmente della stessa entità, e questo ci indica che i due indici non presentano differenze circa gli aspetti di tali abilità di abilità di base.

La maggiore correlazione dell'indice CP/dati rispetto al CP/testo con la variabile "matematica" è plausibile in quanto l'indice prende in esame gli aspetti numerici del testo.

Infine la maggiore correlazione di CP/dati con l'indice "struttura sintattica" ci conferma ulteriormente la specificità della comprensione della struttura sintattica del testo per la soluzione dei problemi. In altre parole, i bambini che hanno un punteggio alto nell'indice struttura sintattica, hanno un punteggio alto nella comprensione di aspetti narrativi del problema, e questo è evidente, in quanto struttura sintattica è una parte degli aspetti narrativi del testo. Ma questi bambini hanno anche un punteggio alto nella comprensione degli aspetti numerici del problema e in più la forza di questa relazione è maggiore rispetto alla comprensione degli aspetti narrativi.

Proprio per la chiara relazione che l'abilità di comprendere la struttura sintattica di un testo generico presenta con la capacità di comprendere gli aspetti narrativi e numerici del problema, e per la notevole correlazione che tali indici presentano fra loro, ci potremmo chiedere se la relazione fra CP/testo e CP/dati con Problemi Aritmetici non sia mediata da tale abilità. Per questo motivo è stata calcolata la correlazione fra CP/T e CP/D con Problemi aritmetici controllando il contributo di Struttura sintattica.

I risultati di questa analisi ci indicano che la comprensione di aspetti narrativi del problema è mediata dall'abilità generica di comprendere il testo, particolarmente dall'indice struttura sintattica. Questo risultato è plausibile e ci suggerisce che non c'è una particolare specificità nella comprensione degli aspetti narrativi del testo del problema, ma questa coincide con la comprensione di aspetti

generici della comprensione del testo. Al contrario la comprensione di aspetti numerici del problema è solo parzialmente mediata dalla comprensione della struttura sintattica del testo, pertanto costituisce una abilità specifica e peculiare per la comprensione del problema aritmetico.

5.5 Conclusioni

In conclusione, lo studio descritto, analizza su diversi livelli il ruolo della comprensione del testo nella soluzione dei problemi matematici. Come è stato evidenziato dai risultati, la comprensione del testo è fondamentale nella soluzione del problema; tutti gli aspetti della comprensione del testo sono coinvolti per comprendere la narrazione, la “cornice” verbale del problema. Inoltre la comprensione del testo, insieme alle capacità di riconoscere il significato verbale dei vocaboli (Vocabolario), sono i principali predittori della soluzione di problemi aritmetici, anche in relazione alle abilità matematiche. Questo dato conferma il ruolo fondamentale del testo verbale che, come detto in precedenza, è anche “struttura” del problema, cioè determina la corretta relazione fra i dati.

Inoltre, un aspetto della comprensione che risulta fondamentale è la comprensione della struttura sintattica del testo. Il risultato sembra abbastanza robusto in quanto si evidenzia in due diverse prove di comprensione del testo, nonostante la complessità di questa valutazione. Inoltre, la dissociazione con item di inferenza, indica quali siano le competenze di comprensione specifiche per la soluzione del problema, non tanto l’elaborazione semantica della narrazione del problema, quanto l’analisi sintattica del testo, che potremmo immaginare come la rete di relazioni fra i termini che esplicita la “struttura profonda” del problema. Tornando alla definizione del testo del problema come “cornice” e “struttura” del problema matematico, si può immaginare il sistema delle inferenze come quello che lavora sulla cornice narrativa, il sistema dell’analisi, in particolare la struttura sintattica come quello che lavora sulla struttura profonda. Si potrebbe ipotizzare che questo aspetto risulti particolarmente importante per attribuire analizzare correttamente alcuni termini relazionali fondamentali per i problemi aritmetici, come “in più”, “in tutto”, “in meno”, “resto”.

Questi soli aspetti però non sono sufficienti a spiegare la capacità di risolvere i problemi. Interesse dello studio era infine quello di analizzare cosa subentrasse come elemento specifico nella comprensione di un testo di un problema. Elemento peculiare di un problema matematico è la presenza di dati numerici. Quindi un aspetto specifico della comprensione del problema potrebbe riguardare la comprensione dei dati numerici. I dati raccolti hanno confermato questa ipotesi, il riconoscimento del dato numerico e della relazione con l'etichetta verbale costituisce un aspetto ulteriore e specifico per la comprensione del problema.

Capitolo Sesto

Il ruolo dei processi di rappresentazione, categorizzazione e pianificazione nell'attività di soluzione dei problemi aritmetici

6.1 Sommario

L'obiettivo dello studio descritto è l'analisi delle componenti Rappresentazione, Pianificazione e Categorizzazione nella soluzione del problema aritmetico. Attraverso prove specificatamente predisposte a questo scopo si è valutata la capacità delle componenti di spiegare l'abilità di risoluzione dei problemi. Attraverso prove standardizzate è stato poi valutato il ruolo di alcune abilità cognitive di base (abilità visuo-spaziale, di ragionamento analogico e di pianificazione cognitiva) come predittori delle tre componenti e della soluzione dei problemi aritmetici.

Nello studio sono stati coinvolti 145 soggetti frequentanti il secondo biennio della scuola primaria. I risultati mostrano che complessivamente le componenti considerate sono buoni predittori dell'abilità di soluzione dei problemi aritmetici, mentre risultati meno lineari sono emersi dall'analisi delle abilità cognitive di base come predittori delle componenti.

6.2 Introduzione

Dall'analisi della letteratura, di cui si è dato un quadro riassuntivo nei capitoli precedenti, si è potuto riscontrare che, nonostante la ricchezza e

completezza dei modelli cognitivi elaborati per spiegare i processi di soluzione dei problemi matematici (Kintsch e Greeno, 1988, Riley, Greeno, Heller, 1983), alcune delle componenti implicate rimangono non chiaramente definite rispetto alla propria natura e funzione. Inoltre tali modelli spesso rimangono soltanto modelli teorici o vengono validati su programmi di simulazione del comportamento solutorio. Gli studi che hanno analizzato tali abilità sperimentalmente, in soggetti adulti o bambini, (Lucangeli, 1998; Passolunghi, 1996; 1999; Swanson, 2003) sono pervenuti a risultati interessanti e utili dal punto di vista applicativo, tuttavia in alcuni casi è stato osservato che gli indicatori della variabile in analisi non fossero esattamente coerenti con la definizione del costrutto, problema evidentemente legato alla misura dell'ambiguità sulla natura e funzione di talune componenti.

Il presente studio si avvicina all'impostazione metodologica di queste ultime ricerche citate, per l'utilità applicativa che ne deriva, e nel contempo prova ad approfondirne alcuni aspetti e a chiarire alcune criticità emerse dalla misurazione delle componenti del problema aritmetico. Presupposto del lavoro è stato il tentativo di delineare una definizione generale delle componenti che ne rendesse possibile l'operazionalizzazione, e di conseguenza, individuare indicatori adeguati per le componenti.

Come è stato discusso nel quarto capitolo, riguardo alla rappresentazione del problema non c'è molta chiarezza né sulla natura né sul contenuto di tale costrutto. Tuttavia, sulla base delle riflessioni fatte in quella sede, è stata creata una prova che, a nostro avviso, rendesse conto in maniera più precisa della rappresentazione mentale del problema. Il primo obiettivo di questo studio riguardo la componente rappresentazione è valutare se la prova da noi predisposta "spiega" l'abilità di risolvere ei problemi.

Il secondo obiettivo riguardo alla componente rappresentazione è indagare quali abilità cognitive di base la influenzano. La nostra ipotesi è che la componente rappresentazione sia legata ad aspetti dell'apprendimento visuo-spaziale (Moses, 1978; Swanson e Sachse-Lee, 2002). L'obiettivo pertanto sarà verificare in che misura gli aspetti dell'apprendimento visuo-spaziale sono in relazione con la rappresentazione del problema e in generale con la capacità di risolvere problemi aritmetici.

Ultimo obiettivo sulla componente rappresentazione riguarda le modalità di rappresentazione pittorica o schematica dei soggetti. Come è stato descritto nel quarto capitolo, infatti, in alcuni studi è stato esaminato se il soggetto utilizzasse rappresentazioni grafiche per risolvere il problema, con l'obiettivo di analizzare le modalità di visualizzazione preferenziale dai soggetti (Hegarty e Kozhevnikov, 1999, van Garderen e Montague, 2003). A differenza di questi studi, in cui i soggetti venivano lasciati liberi di risolvere il problema con le strategie che preferivano, nel presente studio è stato richiesto a tutti i soggetti di rappresentare il problema.

La componente di categorizzazione è la capacità di individuare una categoria a cui il problema appartiene. Si ricorderà dalla ricerca di Chi e altri (1981) che soggetti esperti categorizzano i problemi in base alla struttura risolutiva, mentre soggetti meno esperti categorizzano i problemi in base all'argomento trattato. Nel quarto capitolo sono state descritte alcune criticità legate alla misurazione di tale abilità nei bambini. Per superare tali criticità la prova di categorizzazione che abbiamo elaborato nel presente studio ha l'obiettivo di misurare le modalità di categorizzazione spontanee dei bambini.

Pertanto, il primo obiettivo che riguarda la categorizzazione del problema è valutare in che misura la prova da noi individuata spiega l'abilità di risoluzione dei problemi.

Anche per la categorizzazione, un secondo aspetto indagato è quello delle abilità di base che potrebbero determinare la capacità di categorizzare i problemi. Il secondo obiettivo è quindi quello di valutare in che misura il ragionamento analogico determina la capacità di categorizzazione, e in che misura il ragionamento analogico determini l'abilità di risoluzione dei problemi aritmetici, e se in maniera diretta o mediata.

La componente "pianificazione" non presenta grosse ambiguità nelle definizioni: è la capacità di elaborare un piano per trovare la soluzione. La difficoltà in questo caso è stata quella di individuare una prova che ne cogliesse le specificità e nel contempo discriminasse la pianificazione da altre componenti della abilità di soluzione dei problemi, come è stato discusso nel quarto capitolo .

Come per le altre componenti, anche per la pianificazione il secondo obiettivo è quello di valutare il peso di una abilità di base nella capacità di pianificare un problema aritmetico. L'abilità di base individuata è una prova di

pianificazione cognitiva misurata tramite una prova della scala CAS (Das e Naglieri, 1997).

Riassumendo, l'obiettivo di questo studio è valutare le componenti che spiegano la capacità di soluzione oltre la comprensione del testo. Le componenti approfondite sono la rappresentazione, la categorizzazione e la pianificazione del problema. Per ognuna delle componenti si è cercato di individuare una definizione che permettesse di strutturare una prova sperimentale adeguata. Le prove sono state utilizzate con l'obiettivo generale di valutare la loro influenza sull'abilità di soluzione dei problemi, attraverso misure indipendenti fra loro (cioè non sugli stessi problemi).

Gli obiettivi specifici, legati alle singole componenti, invece sono:

Rappresentazione:

- valutare le relazioni fra componente rappresentazione, abilità visuo-spaziali e soluzione dei problemi
- Valutare se modalità di rappresentazione pittoriche vs schematiche hanno influenza sull'abilità di soluzione dei problemi.

Categorizzazione:

- valutare le relazioni fra componente categorizzazione, ragionamento analogico e soluzione dei problemi

Pianificazione

- Valutare le relazioni fra la componente pianificazione, abilità di pianificazione cognitiva e l'abilità di soluzione dei problemi

6.3 Metodo

6.3.1 Partecipanti

Hanno partecipato alla ricerca 164 soggetti, 78 maschi e 86 femmine, frequentanti la quarta e la quinta classe primaria. La scuola scelta è un istituto comprensivo del territorio palermitano che accoglie utenza di livello socio culturale medio. I criteri di inclusione per il campione finale sono stati:

- assenza di certificazione di handicap;

- punteggio percentile al test delle matrici progressive colorate di Raven non inferiore a 10;
- assenza di grave svantaggio socio-culturale (su indicazione degli insegnanti);

Sono stati esclusi, inoltre, i soggetti che, per diversi motivi, non avessero completato tutte le prove.

Il campione finale è costituito da 145 soggetti (82 femmine, 63 maschi, età media 118 mesi)

6.3.2 Materiali e procedura

Abilità cognitive di base

Abilità logiche non verbali

PM47 - Matrici progressive colorate di Raven (1947). Nella prova viene richiesto al bambino di completare un disegno scegliendo una tessera tra sei alternative proposte. Il test è costituito da tre serie di 12 matrici di complessità crescente. Il punteggio massimo è uguale a 36 ed il minimo è uguale a 0. La prova riporta un'insieme di dati normativi attraverso i quali è possibile convertire il punteggio grezzo in punteggio percentile. Il test è stato somministrato collettivamente in ciascuna classe.

Vocabolario

E' stato utilizzato il *subtest* "significato verbale" della Batteria PMA (Thurstone & Thurstone, 1968). Il *subtest*, è costituito da due sottoscale, *parole*, in cui il bambino deve indicare il sinonimo di una parola target fra quattro possibili opzioni e *figure*, in cui il bambino deve indicare, fra quattro, il nome di una figura target. Il punteggio massimo alla prova è 60, il punteggio minimo è 0. il test riporta dati normativi per mezzo dei quali è possibile ricavare un punteggio percentile. La somministrazione è stata collettiva.

Abilità visuo-spaziali

Per misurare le abilità visuo-spaziali sono state impiegate due prove differenti:

1. *Subtest* “relazioni spaziali” della Batteria PMA (Thurstone e Thurstone, 1968). Il test è costituito da un’unica scala che prevede un compito di rotazione mentale, il bambino deve completare una figura target scegliendo fra 4 possibili alternative. Il punteggio massimo alla prova è 25, il punteggio minimo è 0, anche in questo caso, dati normativi consentono la conversione in punteggio percentile.
2. Test della figura complessa di Rey (Rey, 1959). Il test è uno dei più noti per la valutazione delle abilità visuo-spaziali e consiste nella copia e nella riproduzione a memoria di una figura priva di significato. Nella ricerca è stata misurata solamente la parte di copia. È stato somministrato collettivamente nella singole classi, ai bambini sono state fornite matite colorate per l’esecuzione del test, il che ha permesso di valutare la modalità dell’esecuzione del compito. Sono stati calcolati tre punteggi: tempo di riproduzione, tipo e punteggio globale. I punteggi ottenuti sono stati convertiti in punteggi percentili in funzione dell’età dei soggetti.

Ragionamento analogico

Per misurare l’abilità di ragionamento analogico è stato impiegato il subtest “ragionamento” della batteria PMA (Thurstone e Thurstone, 1968). Il test è costituito da due sottoscale: parole e figure. Nella prima il bambino deve individuare una categoria in modo che tre parole vi siano comprese ed una esclusa; nella seconda il bambino deve individuare un criterio per includere tre figure ed escluderne una. Il punteggio massimo alla prova è 50, il punteggio minimo è 0. Anche questa prova è stata somministrata collettivamente all’interno delle singole classi.

Pianificazione

Per valutare l’abilità di pianificazione cognitiva, cioè la capacità di individuare una strategia efficace per svolgere un compito è stata utilizzata la prova “codici pianificati” del test CAS - *Cognitive Assessment System* (Naglieri e Das, 1997). La prova è composta da due diversi item che presentano una griglia in cui il bambino deve inserire alcuni codici nel più breve tempo possibile. La pianificazione consiste nell’individuare strategie per inserire i codici in maniera più efficace e rapida.

Prove criteriali di apprendimento

Comprensione del testo

E' stato utilizzato il subtest di comprensione delle Prove di lettura MT per la scuola elementare (Cornoldi & Colpo, 1981). La prova consiste nella presentazione di un brano da leggere, seguito da 14 domande a scelta multipla sul testo. Il brano scelto, “voglia di giocare”, è una prova approfondita che permette di individuare alcune caratteristiche e stili nella comprensione del testo. I punteggi al test vanno da 0 a 14. Il test è stato somministrato collettivamente in ogni classe.

Matematica

Per valutare l'apprendimento matematico è stato somministrato il test AC-MT (Cornoldi, Lucangeli e Bellina, 2002) (solo la prova collettiva). Il test restituisce due indici riguardanti le *procedure* (operazioni scritte) e la *conoscenza numerica* (giudizio di numerosità, trasformazione in cifre e l'ordinamento crescente o decrescente di numerosità) i punteggi vanno da 0 a 8 per la parte riguardane le procedure e da 0 a 22 per la parte riguardante la conoscenza numerica. I dati grezzi sono stati standardizzati tramite i punteggi normativi di riferimento.

Prove di soluzione problemi aritmetici:

Prova Problemi Aritmetici

La prova di soluzione dei problemi aritmetici utilizzata è la stessa descritta nel 4 capitolo: 18 problemi aritmetici, somministrati collettivamente all'interno di ciascuna classe e divisi in due sessioni. I problemi divisi nelle due sessioni erano ponderati per difficoltà, al fine di evitare che nella prima sessione rientrassero tutti i problemi più semplici e nella seconda quelli più complessi.

Prova rappresentazione

La prova di rappresentazione è composta da quattro *item*, ogni item è costituito da un problema aritmetico. Nelle istruzioni viene chiesto al bambino di leggere attentamente il testo e poi di immaginare una rappresentazione del problema. Viene poi chiesto di descrivere per iscritto ciò che ha immaginato. In seguito viene detto di rappresentare graficamente il problema, e infine di risolverlo.

L'ultima domanda è di tipo autovalutativo: viene chiesto al bambino se la rappresentazione che ha fatto gli è stata utile per risolvere il problema.

Si riporta un esempio di item prova rappresentazione:

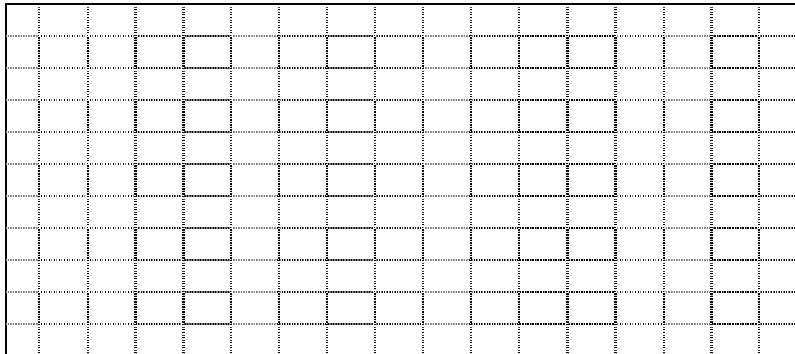
PROBLEMA 4

In una gara di atletica, Giorgio è 4 metri avanti a Tommy e Piero è 3 metri dietro Giorgio. Di quanti metri Piero precede Tommy?

1. Chiudi gli occhi e immagina una rappresentazione del problema nella tua mente.

2. Prova a descrivere cosa hai immaginato:

3. Prova a rappresentare graficamente il problema:



4. Risposta _____

5. Quello che hai immaginato ti è stato utile per risolvere il problema?

SI NO

Scoring. La prova restituisce quattro indici:

- **CORRETTEZZA PROBLEMA:** risposta corretta al problema. Il punteggio è dicotomico per il singolo item (1 punto se il problema è stato risolto correttamente, 0 punti in caso contrario), nella prova complessiva i punteggi vanno da 0 a 4 (somma dei singoli item corretti)

- VALUTAZIONE QUALITATIVA RAPPRESENTAZIONE: pittorica – mista – schematica. Per ogni item è stata fatta una valutazione della tipologia di rappresentazione: se prevalentemente pittorica, schematica o mista, indipendentemente dalla correttezza della rappresentazione. Per ogni item pertanto è stato assegnato un punteggio di 1 ad una delle tre categorie e 0 alle restanti. Per la prova complessiva le tre categorie possono assumere punteggi da 0 a 4 (un punteggio di 4 in una categoria corrisponde ad un punteggio 0 nelle altre due categorie)
- CORRETTEZZA RAPPRESENTAZIONE – RA corr: la rappresentazione contiene tutti gli elementi fondamentali del problema (dati) a prescindere dalla tipologia di rappresentazione.
- AUTOVALUTAZIONE: risposta a item autovalutazione in relazione al punteggio correttezza

Tutti gli indici hanno un punteggio che va da 0 a 4 (un punto per ogni item della prova). Nell'indice "valutazione qualitativa rappresentazione" viene assegnato un punto alla categoria pittorica, mista o schematica a seconda della caratteristica prevalente nella rappresentazione.

Prova categorizzazione

Per studiare la modalità spontanea dei bambini di categorizzare i problemi è stata creata una prova sperimentale costituita da quattro item. Ogni Item è composto da quattro problemi scelti in modo che, a due a due, in base alle possibili combinazioni, avessero in comune l'argomento (o il nome del personaggio, o l'ambientazione), i numeri (o l'unità di misura), l'operazione necessaria per risolvere il problema. In tab 5.2 sono riportate le caratteristiche dei quattro item.

La complessità della struttura narrativa è data dalla quantità di testo presente: complessità bassa, il testo è essenziale, l'indispensabile per la descrizione della relazione fra i dati; complessità media, sono presenti poche informazioni ridondanti; complessità alta, testo lungo e ridondante ricco di frasi descrittive non necessarie per la soluzione del problema. Infine, tre item riportavano problemi risolvibili con una sola operazione e un item (c) presentava problemi risolvibili con due operazioni.

Item	Coppie	Categoria	Descrizione	Complessità struttura narrativa:
A	1-2, 3-4	Struttura superficiale	I biscotti della mamma / Il gioco delle figurine	BASSA
	1-3, 2-4	Struttura profonda	Addizione/sottrazione	
	1-4, 2-3	Numeri	24 – 18 / 12 – 38	
B	1-2, 3-4	Struttura superficiale	Il giardiniere / Lo zoo	MEDIA
	1-3, 2-4	Numeri		
	1-4, 2-3	Struttura profonda/numeri	Divisione/moltiplicazione	
C	1-2, 3-4	Struttura profonda	Moltiplicazione e sottrazione /Moltiplicazione e addizione	BASSA
	1-3, 2-4	Struttura superficiale	Festa compleanno / Pacchetti figurine	
	1-4, 2-3	Numeri	16 - 6 – 67 / 22 – 6 – 36	
D	1-2, 3-4	Unità di misura	Kg / Lt	ALTA
	1-3, 2-4	Struttura profonda	Addizione/ sottrazione	
	1-4, 2-3	Struttura superficiale	Elefanti al circo / La scampagnata	

Tab. 5. 2

Durante le istruzioni veniva chiesto ai bambini di creare, per ogni Item, due coppie di problemi in base ad un criterio scelto da loro, e poi indicare quale fosse il criterio scelto. Non veniva richiesto di risolvere i problemi. Durante la presentazione del compito veniva spiegato con degli esempi cosa significasse categorizzare. Inoltre veniva chiesto loro di individuare un criterio che fosse utile per la soluzione del problema (indicazione presente anche nelle istruzioni scritte). Gli sperimentatori erano attenti a fornire questa spiegazione una volta soltanto, al fine di non suggerire che il criterio fosse quello dell'algoritmo di calcolo.

Per ognuno dei quattro item i bambini hanno fornito 2 coppie, per un totale

La mamma ha preparato 2 teglie di biscotti, nella prima c'erano 24 biscotti al cioccolato e nella seconda 18 biscotti al latte. Quanti biscotti ha preparato in tutto?	La mamma oggi ha preparato 38 biscotti al latte e al cacao. Marco ne ha fatto una scorpacciata, ne ha mangiati ben 12! Quanti biscotti sono rimasti?
Sandro ha comprato 38 figurine e Luca ne ha comprate 12, quante figurine hanno comprato in tutto i due amici?	Sandro ha 24 figurine e gioca a mazzetti con Luca. Alla fine del gioco Sandro perde 18 figurine. Quante gliene restano?
In che modo hai raggruppato questi problemi?	
COPPIA 1: _____	
COPPIA 2: _____	

Esempio della prova di categorizzazione

di 8 accoppiamenti con le relative motivazioni.

È stata fatta una valutazione qualitativa delle risposte fornite dai soggetti, queste le categorie di risposte:

1. accoppiamento non motivato: i problemi vengono accoppiati ma non viene data la motivazione;
2. accoppiamento errato, i problemi sono accoppiati ma la motivazione non è congruente (es. il bambino accoppia i problemi che si risolvono allo stesso modo ma dice che hanno in comune i personaggi, o viceversa);
3. accoppiamento con motivazione superficiale:
 - a. generale (es. “hanno in comune lo stesso argomento”, “parlano della stessa cosa”, “coincidono”, “il senso è uguale”
 - b. specifica (es. “parlano delle figurine”, “parlano della festa di Maria”, “Parlano del giardiniere”, ecc)
4. accoppiamento in base ai dati (es. “hanno in comune i numeri”, “le cifre”, “i dati”, ecc)
5. accoppiamento in base alle parole chiave (piuttosto raro; es “hanno in comune la parola in tutto”)
6. accoppiamento in base all’unità di misura (es. hanno in comune la marca, l’unità di misura, KG – LT, ecc)
7. accoppiamento in base alla struttura profonda:
 - a. generale (es. “hanno in comune la richiesta”, “la domanda”, “l’operazione”, “il risultato”)
 - b. specifica (es. “hanno in comune l’addizione”, “la sottrazione”, “per risolverlo bisogna addizionare”, ecc.

Punteggio: per ogni coppia di problemi, in relazione alla motivazione data, sono stati calcolati 2 tipi di indici:

- Criterio A. 1 punto per ogni coppia basata sulla struttura profonda (operazioni) – 0 punti per qualsiasi altra motivazione. Il punteggio totale va da 0 a 8.
- Criterio B. è basato sulle categorie di risposte fornite dai soggetti. 0 punti per le prime tre categorie descritte; 1 punto per le categorie da 4 a 6; 2 punti per la categoria 7 (struttura profonda). Il punteggio totale va da 0 a 16.

Prova pianificazione

La prova comprende quattro item, ogni item è costituito da un problema aritmetico, risolvibile con più di una operazione (da due a quattro). Ogni problema è seguito da un campo libero dove il bambino deve descrivere verbalmente i passaggi necessari per risolvere il problema, non deve indicare quali operazioni eseguire, ma quali incognite è necessario trovare. In altre parole il bambino deve individuare la, o le, “domande intermedie” del problema. Nella fase di spiegazione e introduzione alla prova si fornivano degli esempi su come svolgere la prova, finché i bambini non avessero capito esattamente come svolgerla.

PROBLEMA 1

Leggi attentamente i problemi seguenti e poi scrivi negli spazi sottostanti tutti i passaggi che faresti per risolverli, nell'ordine giusto.

Gianni oggi ha comprato 5 quaderni di diversi colori a € 1,5. Se Gianni ha pagato con una banconota da 10 €, quanto ha ricevuto di resto?

Esempio prova pianificazione

In questo caso il bambino deve indicare che la *prima cosa* da trovare è il prezzo totale dei quaderni, la *seconda* è il resto. Non necessariamente deve indicare le operazioni.

Punteggio: è stato assegnato un punto per ogni passaggio descritto correttamente. In particolare, il primo problema richiede 2 operazioni per la risoluzione, il secondo problema richiede 4 operazioni, il terzo problema richiede 3 operazioni e il quarto 4 operazioni. I bambini che risolvono un problema con un minor numero di passaggi ottengono comunque il punteggio massimo per quel problema.

6.3.3 Strategie di analisi dei dati

È stata verificata l'assunzione di normalità uni variata delle misure prese in considerazione esaminando gli indici di simmetria a curtosi, sono stati considerati accettabili valori compresi fra -1 e 1 (Barbaranelli e D'Olimpo, 2007)

Dopo queste analisi preliminari è stata valutata la correlazione fra le variabili tramite coefficiente di correlazione di *Person*. È generalmente consigliato di considerare come degni di nota valori di *r* maggiori di .30 (Corbetta, 1999). Considerando che le misure dell'apprendimento e in particolare le prove criteriali sono molto sensibili all'errore (è molto raro con questa tipologia di misure trovare correlazioni superiori a .65), si è scelto di considerare discrete le correlazioni uguali o maggiori a .30, soddisfacenti le correlazioni pari a .40 e ottime le correlazioni superiori o uguali a .50.

Infine è stata effettuata una analisi della regressione per valutare in che misura le variabili scelte spiegano l'abilità di risoluzione dei problemi.

6.4 Risultati generali

Nelle tabelle sono riportati gli indici principali delle componenti prese in considerazione. Per la componente "rappresentazione" si riporta l'indice **RA corr**, che indica la correttezza della rappresentazione, per la componente "categorizzazione" si riporta l'indice **CAT criterio A**, che fornisce una misura della capacità di categorizzare in base alla struttura profonda o superficiale.

La tabella 6.3 riassume le statistiche descrittive delle prove relative alla soluzione dei problemi, gli indici di Skewness mostrano che le distribuzioni delle variabili non si discostano in maniera significativa dalla normalità.

La tabella 6.4 riporta le statistiche descrittive delle prove relative all'apprendimento della lettura (comprensione del testo) e della matematica, suddivisa nei due aspetti delle procedure (operazioni) e conoscenza numerica. Anche in questo caso possiamo ritenere gli indici di normalità accettabili

La tabella 6.5 riporta le statistiche descrittive delle prove che misurano le abilità cognitive di base: abilità logiche non verbali, vocabolario, abilità visuo-spaziali (rotazione mentale e copia di figura priva di significato) ragionamento

analogico e pianificazione cognitiva. Si può notare che la variabile “vocabolario” presenta un indice di simmetria di poco superiore all’unità (-1,1). Questa lievissima asimmetria negativa indica che la prova, come riscontrato in sede di somministrazione, in genere risulta di semplice esecuzione.

	MIN	MAX	M	DS	SKEWNESS	KURTOSIS
Problemi Aritmetici	0	18	8,13	4,469	,362	-,801
RA corr	0	4	1,16	,949	,449	-,705
CAT	0	14	4,07	4,049	,691	-,487
PIAN	0	12	3,71	2,593	,853	,703

Tab.6.3

	MIN	MAX	M	DS	SKEWNESS	KURTOSIS
MT	1	13	8,20	2,724	-,409	-,659
AC-MT operazioni	1	8	5,90	1,757	-,678	-,038
AC-MT conoscenza numerica	4	22	16,96	3,728	-,900	,398

Tab. 6.4

	MIN	MAX	M	DS	SKEWNESS	KURTOSIS	
ABILITÀ LOGICHE NON VERBALI	16	36	28,72	4,827	-,691	-,286	
VOCABOLARIO	21	60	49,37	8,025	-1,104	,973	
ABILITÀ VISUO- SPAZIALI	PMA rel. spaz	1	21	9,54	4,209	,241	-,588
	REY tempo	2,20	11,36	5,08	1,787	,976	,927
	REY tipo	1	5	3,46	,920	-,283	-,113
	REY puntegg	7	36	26,17	5,965	-,747	,034
RAGIONAMENTO ANALOGICO	7	47	33,32	6,615	-,906	1,441	
PIANIFICAZIONE COGNITIVA	14	110	50,50	17,343	,667	,613	

Tab. 6.5

Vengono di seguito riportate le correlazioni generali delle prove impiegate nello studio. Come è possibile osservare dalla tabella 5.6, tutte le variabili misurate presentano correlazioni significative con la prova di soluzione dei problemi aritmetici, ad eccezione dell’indice “tempo” del test della figura complessa di Rey. Le variabili presentano altresì correlazioni reciproche

significative, ad eccezione della prova PMA relazioni spaziali, che non presenta correlazioni significative con la prova di categorizzazione, di comprensione del testo, con l'indice "tempo" della figura complessa di Rey e con il punteggio complessivo alla prova CAS; della variabile Rey "tempo" che non presenta correlazioni significative con gli indici Categorizzazione, Pianificazione, AC-MT operazioni, PM47, Rey "punteggio" e PMA ragionamento; della variabile Rey tipo, che non correla con AC-MT operazioni e con la prova CAS; infine, della prova CAS che non presenta correlazioni significative con gli indici "tipo" e "Punteggio" della figura complessa di Rey.

Per indagare quali variabili spiegano meglio la variabile Problemi Aritmetici, cioè la nostra misura dell'abilità di risoluzione dei problemi aritmetici, è stata condotta una analisi della regressione inserendo Problemi Aritmetici come variabile dipendente, e le altre variabili analizzate come predittori. Complessivamente vengono descritti tre modelli, il primo include come predittori le abilità cognitive di base, il secondo (tab. 6.8) considera le prove che misurano il livello di apprendimento, il terzo (tab. 6.9) analizza le prove delle componenti della soluzione dei problemi: rappresentazione, categorizzazione e pianificazione.

In tab. 6.7 possiamo osservare i risultati ottenuti con un modello di regressione delle abilità di base. le abilità considerate come predittori sono: Abilità logiche non verbali (PM47), Vocabolario (PMA significato verbale), Abilità visuo-spaziali (PMA relazioni spaziali e Figura di Rey Punteggio), Ragionamento analogico (PMA ragionamento), Pianificazione (CAS). Dalla analisi risulta che i predittori di Problemi aritmetici sono Vocabolario, Ragionamento analogico e Abilità logiche non verbali, che complessivamente spiegano il 43% della variabilità di Problemi Aritmetici. Gli indici relativi ad Abilità visuo-spaziali e Pianificazione sono state escluse dall'analisi in quanto non apportano miglioramenti significativi al modello.

Nella tabella 6.8 sono riportati i risultati di una analisi di regressione delle prove di livello di apprendimento considerate, AC-MT conoscenza numerica e operazioni e MT comprensione del testo. Le tre variabili complessivamente spiegano il 45 % della variabilità di Problemi Aritmetici. Più nel dettaglio è possibile osservare che la comprensione del testo migliora il primo modello del 10 % mentre AC-MT operazioni migliora il modello di un ulteriore 3 %.

Infine, nella tabella 6.9 viene preso in analisi il modello delle componenti della soluzione dei problemi, Rappresentazione, Categorizzazione e Pianificazione. Le tre componenti complessivamente spiegano il 37 % della variabilità di Problemi Aritmetici.

Mod.		B	Beta	t	Sig.
3	PMA significato verbale	,479	,360	4,480	,000
	PMA ragionamento	,233	,209	2,659	,009
	PM47	,242	,216	2,635	,009

Tab. 6.7

Mod 1 R² = .35; F =75,5; sig <.001
Mod 2 R² = .40; F =48,2; sig <.001
Mod 3 R² = .43; F =35,8; sig <.001

Mod.		B	Beta	t	Sig.
3	ACMT conoscenza numerica	,315	,317	4,121	,000
	MT	,315	,349	4,924	,000
	ACMT operazioni	,160	,179	2,519	,013

Tab. 6.8

Mod 1 R² = .32; F =65,8; sig <.001
Mod 2 R² = .42; F =51,3; sig <.001
Mod 3 R² = .45; F =37,6; sig <.001

Mod.		B	Beta	t	Sig.
3	PIANIFICAZIONE	,334	,334	4,242	,000
	RAPPRESENTAZIONE	,273	,273	3,589	,000
	CATEGORIZZAZIONE	,111	,195	2,771	,006

Tab. 6.9

Mod 1 R² = .27; F =53,7; sig <.001
Mod 2 R² = .33; F =35,5; sig <.001
Mod 3 R² = .37; F =27,4; sig <.001

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1. PROBL AR	1														
2. RA corr	,464**	1													
3. CAT crit A	,344**	,170*	1												
4. PIAN	,523**	,472**	,308**	1											
5. MT	,545**	,289**	,251**	,373**	1										
6. ACMT op	,426**	,316**	,150	,413**	,280**	1									
7. ACMT c.n.	,561**	,471**	,189*	,453**	,459**	,468**	1								
8. PM47	,530**	,392**	,264**	,330**	,447**	,337**	,479**	1							
9. PMA s verb	,588**	,418**	,251**	,484**	,480**	,476**	,562**	,562**	1						
10. PMA rel_spaz	,282**	,297**	,042	,247**	,163	,179*	,220**	,385**	,402**	1					
11. REY tempo	-,150	-,219**	-,080	-,065	-,165*	,130	-,169*	-,117	-,167*	,018	1				
12. REY tipo	,239**	,205*	,140	,251**	,172*	,127	,200*	,341**	,234**	,175*	-,229**	1			
13. REY Punt	,314**	,290**	,183*	,360**	,233**	,320**	,389**	,493**	,356**	,333**	,008	,573**	1		
14. PMA rag	,508**	,426**	,265**	,382**	,458**	,246**	,468**	,534**	,509**	,370**	-,138	,287**	,359**	1	
15. CAS_P	,185*	,190*	,213*	,278**	,277**	,090	,205*	,228**	,215**	,098	-,180*	,151	,156	,344**	1

Tab. 6.6

6.5 Discussione

I risultati ottenuti ci consentono di fare una serie di riflessioni sia di carattere generale sulla abilità coinvolte nell'attività di soluzione dei problemi, sia in particolare sulle componenti cognitive che stiamo prendendo in analisi.

Per prima cosa, gli indici skewness delle prove specificatamente predisposte per questo studio sono tutti inferiori a .85, (Skewness Ra corr = .45, Skewness CAT = .69; Skewness PIAN = .85), si può pertanto ritenere che la distribuzione delle nostre variabili non si discosta eccessivamente dalla normalità.

Le prove di abilità per la misurazione delle abilità cognitive di base, ad eccezione dell'indice "tempo" della figura complessa di Rey, presentano correlazioni reciproche significative, in particolare, le variabili relative a Ragionamento non verbale, Vocabolario e Ragionamento Analogico presentano correlazioni soddisfacenti che vanno da $R = .51$ a $R = .56$.

Le prove criteriali di apprendimento, Comprensione del testo e Matematica, presentano correlazioni reciproche significative, in particolare la correlazione fra Comprensione del testo e il sub test ACMT Conoscenza Numerica è soddisfacente ($R = .46$; $p < .01$) mentre fra Comprensione del testo e ACMT Operazioni la correlazione è meno rilevante ($R = .28$, $p < .01$).

Le prove di abilità cognitive di base presentano buone correlazioni con le prove criteriali di apprendimento, in particolare le prove di Ragionamento non verbale, Vocabolario e Ragionamento analogico, riportano correlazioni soddisfacenti (da $R = .45$ a $R = .48$) con la prova di Comprensione del testo e ottime (da $R = .48$ a $R = .56$) con la prova di Conoscenza numerica. Va sottolineato che ancora una volta si osserva una discrepanza fra la prova di Conoscenza numerica e la prova di operazioni, quest'ultima infatti presenta correlazioni inferiori con tutte le variabili analizzate.

I tre indici RA, CAT e PIAN sono tutte correlate significativamente con Le prove criteriali di apprendimento, in particolare, RA corr mostra correlazioni discrete con MT e ACMT operazioni e soddisfacenti con ACMT conoscenza numerica, Pian mostra correlazioni discrete con MT e soddisfacenti con entrambe le prove ACMT, CAT mostra correlazioni generali più basse, infatti la

correlazione con ACMT operazioni non risulta significativa e le restanti non raggiungono un livello discreto.

Analizziamo adesso i modelli di regressione costruiti per valutare i predittori della abilità di soluzione dei problemi aritmetici.

Nel primo modello sono state considerati come predittori le abilità cognitive di base. Dalla tabella 5.7 si può rilevare che Vocabolario, Ragionamento Analogico e Ragionamento non verbale spiegano il 43% della varianza dei problemi aritmetici, possiamo quindi ritenerli complessivamente buoni predittori dei problemi aritmetici. Sono escluse, invece, dal modello le variabili di tipo visuo-spaziale e di pianificazione cognitiva. A proposito della variabili di abilità visuo-spaziale va sottolineato che entrambi gli indici hanno riportato correlazioni appena discrete con Problemi aritmetici, per tale motivo non hanno apportato un miglioramento significativo al modello, rispetto a variabili con correlazioni più robuste. La prova di pianificazione cognitiva, misurata con il sub test CAS codici pianificati ha riportato, invece, correlazioni piuttosto basse, anche se generalmente significative, con tutti gli indici. Pertanto l'assenza di predittività per l'abilità di soluzione dei problemi va letta anche in funzione di questo dato.

Per quanto riguarda il modello delle prove criteriali di apprendimento (tab. 6.8), Conoscenza Numerica, Comprensione del testo e Operazioni spiegano complessivamente il 45% di variabilità di Problemi aritmetici.

Una prima osservazione su questo modello riguarda la comprensione del testo, che, coerentemente con i risultati del nostro precedente studio, è la variabile più importante del modello, con *beta* pari a .35.

Altro dato interessante in questo modello è la presenza delle variabili che riguardano l'abilità matematica. Se infatti l'influenza di tale variabile è assolutamente plausibile per l'abilità di soluzione dei problemi, va osservato che in una nostra precedente analisi (studio 1) non si era osservata tale influenza e le variabili di comprensione verbale e ragionamento non verbale si erano dimostrati i predittori più forti della soluzione del problema.

Un ultimo dato degno di nota sembra la discrepanza fra conoscenza numerica e operazioni; la prima presenta un valore di *Beta* pari a .32, mentre per la seconda *Beta* =.18. Questo indica una più massiccia influenza della componente conoscenza numerica nella soluzione dei problemi, rispetto alla componente operazioni.

Infine, ultimo modello di regressione considerato riguarda le componenti cognitive, misurate con le prove sperimentali RA, CAT e PIAN. Complessivamente queste prove spiegano il 37 % della varianza dei problemi aritmetici, con PIAN come primo predittore, seguito da RA e poi da CAT., possiamo pertanto ritenere le prove dei buoni indicatori dell'abilità di soluzione dei problemi.

Ulteriori considerazioni su tali prove si rimandano agli specifici paragrafi di approfondimento e alle conclusioni generali.

Nei paragrafi seguenti verranno analizzate singolarmente le componenti di Rappresentazione, Categorizzazione e Pianificazione. L'analisi delle singole componenti ha l'obiettivo di considerare più dettagliatamente gli indici derivati dalle prove sperimentali e valutare le relazioni fra le abilità di base e componenti cognitive nella soluzione dei problemi.

6.6 Risultati delle analisi delle singole componenti

6.6.1 Rappresentazione e soluzione dei problemi aritmetici.

Come si ricorderà dell'introduzione al presente capitolo, gli obiettivi specifici rispetto alla abilità di rappresentazione del problema sono:

1. Valutare le relazioni fra abilità di tipo visuo-spaziale, abilità di rappresentazione del problema e capacità di risolvere i problemi aritmetici.
2. Valutare se tipologie diverse di rappresentazione (pittoriche o schematiche) hanno una relazione con la soluzione del problema. Valutare, inoltre, se tipologie di rappresentazione diverse hanno un correlato con abilità di tipo visuo-spaziale.

Per quanto riguarda il primo punto, si ricorderà, dalle analisi riportate in precedenza, che le abilità visuo-spaziali non sono risultate predittori dell'abilità di risoluzione dei problemi. Rimane da valutare se le abilità di tipo visuo-spaziale hanno una relazione diretta con Rappresentazione, e quindi indiretta con l'abilità di soluzione dei problemi. Per avere un'idea su questa relazione è misurata la

correlazione fra Problemi Aritmetici e abilità visuo-spaziali, controllando il contributo della Rappresentazione. Se la relazione fra problemi aritmetici e abilità visuo-spaziali perde di significatività statistica, RA corr potrebbe essere considerata una variabile di mediazione fra le altre due. In caso contrario non possiamo esprimerci su questa relazione. Infine, per valutare se le abilità visuo-spaziali possono essere considerate predittori di RA corr. è stata effettuata una analisi della regressione inserendo come variabili indipendenti tutte le abilità di base considerate in questo studio e come criterio RA corr.

Per quanto riguarda il secondo punto sono state analizzate le correlazioni fra punteggio RA pittorico e RA schematico e problemi aritmetici. Inoltre, per ottenere risultati più chiari, dal campione in analisi sono stati creati due gruppi, includendovi i soggetti che avessero prodotto rappresentazioni prevalentemente pittoriche o prevalentemente schematiche. Il criterio per l'assegnazione dei gruppi è stato quello di aver ottenuto un punteggio non inferiore a 2 alla variabile di riferimento e avere ottenuto un punteggio pari a zero sull'altra variabile (esistono casi che ottengono punteggi in entrambe le variabili, che quindi sono stati esclusi dai gruppi). È stato creato pertanto, un **Gruppo "Soggetti Pittorici"** (34 soggetti, età media 118 mesi), e un **Gruppo "Soggetti Schematici"** (21 soggetti, età media 118 mesi).

6.6.1.1 Risultati

Si descrivono per prima cosa i risultati relativi al punto 1. La tabella 6.10 riporta le correlazioni fra Problemi aritmetici, gli indici della prova di rappresentazione, RA corr (correttezza della rappresentazione) Rappr. Pittorica, Rappr Mista e Rappr. Schematica (valutazione qualitativa della tipologia di rappresentazione), e i risultati alle prove di abilità visuo-spaziale, PMA relazioni spaziali e Rey Punteggio (non sono state riportati i punteggi "Tempo" e "Tipo" del test della figura di Rey). Come si può osservare dalla tabella, l'indice RA corr presenta una correlazione appena discreta con gli indici di abilità visuo-spaziale.

Nella tabella 6.11 sono riportati i risultati della correlazione parziale fra abilità visuo-spaziale, e problemi aritmetici. Si può osservare che l'entità della correlazione diminuisce pur mantenendo significatività statistica.

Nella tabella 6.12 sono riportati i risultati dell'analisi della regressione delle abilità cognitive di base su RA corr, come si potrà vedere le abilità di tipo visuo-spaziale non rientrano fra i predittori di RA

	1	2	3	4	5	6	7
1. PROBLEMI ARITMETICI	1						
2. RA corr	,463**	1					
3. RAPPR PITTORICA	-,290**	-,570**	1				
4. RAPPR MISTA	,251**	,508**	-,745**	1			
5. RAPPR SCHEMATICA	,340**	,561**	-,534**	,175*	1		
6. PMA relazioni spaziali	,282**	,297**	-,134	,175*	,104	1	
7. REY punteggio	,321**	,294**	-,080	,132	,186*	,335**	1

Tab.6.10

Controllato per		REY punteggio
RA corr	Problemi Aritmetici	,211
	Sig	,011

Tab.6.11

Mod.	B	Beta	t	Sig.	
2 Ragionamento non verbale	,302		,290	3,016	,003
Vocabolario	,305		,240	2,494	,014

Tab. 6.12

Mod 1 $R^2 = .18$; $F = 28,6$; sig < .001
 Mod 2 $R^2 = .22$; $F = 18,0$; sig < .001

Si riportano adesso i risultati relativi al punto 2. Per quanto riguarda la relazione fra tipologia di rappresentazione e soluzione dei problemi matematici, dalla tabella 6.10 si può osservare che esiste una correlazione negativa significativa ($R = -.29$) fra Problemi aritmetici e rappresentazione di tipo pittorico e una correlazione positiva significativa ($R = .34$) fra Problemi aritmetici e rappresentazione di tipo schematico. Considerando i dati nel complesso la relazione sembra essere piuttosto forte.

In tabella 6.13 sono riportate la caratteristiche dei gruppi “soggetti pittorici” e “soggetti schematici” rispetto alle variabili Problemi Aritmetici, RA correttezza, PMA relazioni spaziali e REY punteggio. Si può osservare che i due gruppi presentano differenze significative rispetto l'abilità di soluzione dei problemi aritmetici, pertanto produrre una rappresentazione prevalentemente

schematica è correlato positivamente con l'abilità di soluzione dei problemi aritmetici, mentre produrre una rappresentazione pittorica è generalmente associato ad una prestazione scadente nella soluzione dei problemi.

I due gruppi presentano differenze significative rispetto alla capacità di rappresentare correttamente gli elementi del problema, questo ci indica che la rappresentazione schematica è fortemente associata alla corretta rappresentazione degli elementi del problema, al contrario di quella pittorica.

Infine, i due gruppi non presentano differenze significative rispetto ai due indici di abilità visuo-spaziale, e questo ci indica che tipologie di rappresentazione di tipo schematico o pittorico non sono influenzate da abilità di tipo visuo-spaziale.

	PITTORICI	SCHEMATICI	<i>t</i>	<i>p</i>
	Media (<i>ds</i>)	Media (<i>ds</i>)		
Problemi Aritmetici	-,52 (,914)	,51 (,89)	- 4,1	< .001
RA corr	,31 (,55)	2,17 (,83)	- 9,1	< .001
PMA relazioni spaziali	-,44 (,85)	-,27 (,86)	-,70	<i>p</i> < .49
REY punteggio	-2,32 (2,63)	-1,35 (2,54)	-1,34	<i>p</i> < .19

Tab. 6.13

6.6.1.2 *Discussione*

Come è stato descritto nei risultati generali, la prova di rappresentazione del problema impiegata in questo studio presenta una buona correlazione con la prova di soluzione dei problemi aritmetici ($R = .46$), il che ci indica che le due prove condividono una buona parte di variabilità. Il dato è confermato dall'analisi della regressione riportata in tabella 5.9, in cui Rappresentazione risulta un predittore di Problemi Aritmetici.

Per quanto riguarda le relazioni fra abilità visuo-spaziali e Rappresentazione, le correlazioni riportate fra Punteggio alla figura di Rey e PMA relazioni spaziali con l'indice RA corr sono entrambe inferiori a .30, quindi appena accettabili.

La correlazione parziale fra abilità visuo-spaziale e Problemi aritmetici controllando il contributo di RA corr, risulta più bassa rispetto alla correlazione non controllata ma sempre significativa. non si può, pertanto concludere che RA corr. abbia una relazione di mediazione fra la soluzione dei problemi aritmetici e le abilità visuo-spaziali.

Per quanto riguarda i risultati relativi al secondo punto in analisi, i soggetti “pittorici” cioè coloro che hanno prodotto una rappresentazione di tipo prevalentemente pittorico, differiscono dai soggetti schematici nella abilità di risoluzione dei problemi. I bambini che hanno prodotto delle rappresentazioni schematiche sono stati significativamente più bravi a risolvere i problemi aritmetici. Questo conferma i dati della letteratura (Hegarty et al, 1999) in cui si riporta che la risoluzione dei problemi è positivamente correlata con una modalità rappresentativa di tipo schematico e negativamente con una di tipo pittorico. I bambini schematici e pittorici differiscono anche rispetto all’indice RA corr, cioè i bambini pittorici sono significativamente meno abili degli schematici a rappresentare gli elementi del problema. Questo è un risultato parzialmente atteso, dal momento che gli indici RA corr e le tipologie di rappresentazione sono ricavati dalla stessa prova. Va ricordato, comunque che gli indici sono indipendenti, cioè il giudizio di correttezza è dato a prescindere dalla tipologia della rappresentazione, pertanto la significatività della relazione è considerata degna di nota.

Infine i soggetti pittori e i soggetti schematici non differiscono rispetto entrambe le variabili di abilità visuo-spaziale. Questo ci indica che rappresentare il problema in maniera schematica o pittorica non presenta nessuna relazione con le abilità visuo-spaziali dei soggetti. Questo dato sembra interessante e può fornirci ulteriori indicazioni sulla rappresentazione mentale del problema.

6.6.2 Categorizzazione e soluzione dei problemi aritmetici

L’aspetto che verrà di seguito approfondito riguarda la componente cognitiva definita “categorizzazione”. Come si ricorderà, gli obiettivi specifici di questa analisi sono:

- valutare la relazione fra ragionamento analogico, categorizzazione e abilità di risoluzione dei problemi

- valutare la tipologia di risposta dei bambini in relazione alla abilità di soluzione dei problemi.

Per quanto riguarda il primo punto si ricorderà che obiettivo dello studio era determinare se ci fossero delle abilità di base sottostanti le componenti cognitive del problema. Come predittore per la categorizzazione è stata scelta una misura di ragionamento analogico (PMA ragionamento), in letteratura infatti, l'abilità di categorizzazione corrisponde al ragionamento per analogia, cioè la capacità di individuare criteri di inclusione o esclusione per una gruppo di stimoli. Dalle analisi complessive riportate nei paragrafi precedenti, si è visto che il ragionamento analogico è un buon predittore di problemi aritmetici. In questa analisi valuteremo l'ipotesi che il ragionamento analogico sia un predittore della categorizzazione che a sua volta predice l'abilità di soluzione dei problemi aritmetici, e quindi che ragionamento e problemi aritmetici abbiano una relazione indiretta. Per ottenere questo risultato si valuterà la correlazione fra ragionamento analogico e problemi aritmetici, controllandone il contributo di categorizzazione. Se la categorizzazione è una variabile di mediazione fra ragionamento analogico e problemi aritmetici, la correlazione fra queste due variabili dovrebbe diminuire perdendo di significatività.

Per quanto riguarda il secondo punto, si ricorderà che la prova categorizzazione consiste nel raggruppare i problemi in coppie e in seguito indicare secondo quale criterio sono state formate le coppie. Misurare in tal modo la categorizzazione, ha permesso di condurre una analisi qualitativa delle "categorie" individuare dai bambini per classificare i problemi. Le categorie di risposte individuare sono state riportate nella sezione strumenti. A partire da tali categorie è stato misurato il secondo indice di categorizzazione, che abbiamo chiamato criterio B. In base al criterio B, ogni accoppiamento viene valutato 0 punti se la motivazione è errata, incongruente o superficiale, 1 punto se la motivazione comprendeva i numeri o l'unità di misura o le parole chiave; 2 punti se la motivazione riguarda la struttura risolutiva del problema. Per analizzare la relazione fra le categorie prodotte dai bambini e la soluzione dei problemi si prenderà in considerazione il punteggio complessivo ottenuto tramite il criterio di correzione B e la correlazione di questo con la prova di soluzione dei problemi aritmetici.

Risultati

Nella tabella 6.13 è riportata la correlazione fra problemi aritmetici e ragionamento analogico. Come è possibile osservare, la correlazione mantiene significatività e diminuisce solo di poco (da $R = .51$ a $R = .46$) rimanendo complessivamente soddisfacente.

Controllato per		PMA ragionamento
CAT A	Problemi Aritmetici	,46 ,001

Tab.6.13

La tabella 6.14 contiene le correlazioni fra il criterio di correzione A, il criterio di correzione B e tutte le prove considerate nello studio. Il criterio B presenta una correlazione leggermente più alta con l'indice Problemi Aritmetici. Anche le correlazioni con gli altri indici sono leggermente più alte, ad eccezione della prova MT e del PM47.

	Probl Arit.	RA corr	Pianifi cazion e	MT	ACMT operaz	ACMT con num	PM47	PMA sig verb	PMA rel spaz	REY punteg	PMA rag.	CAS
Criterio A	,344**	,170*	,308**	,251**	,150	,189*	,264**	,251**	,042	,183*	,265**	,213*
Criterio B	,410**	,258**	,383**	,213*	,223**	,231**	,182*	,251**	,056	,219**	,280**	,207*

Tab 6.14 Correlazioni fra due criteri di correzione e le restanti prove

Discussione

Come si ricorderà dalle correlazioni generali (tab 6.6), l'indice di categorizzazione, criterio A, ha una correlazione positiva significativa con l'indice Problemi Aritmetici ($R = .34$), anche se non eccessivamente forte. La componente entra nel modello di regressione come predittore di Problemi Aritmetici.

Sempre in tabella 6.6 si può riscontrare che la prova categorizzazione ha una correlazione positiva e significativa con la prova di ragionamento, ma non soddisfacente ($R = .26$). Va osservato che nessuna correlazione con prova di categorizzazione risulta essere particolarmente forte, e quella con la prova di

ragionamento è correlazione più elevata fra tutte le abilità cognitive di base considerate. In sintesi, la prova di ragionamento analogico, potrebbe essere un predittore della prova di categorizzazione, ma ne spiega soltanto una piccola percentuale di varianza ($R^2 = .07$).

Al contrario la prova di ragionamento analogico presenta una correlazione piuttosto forte con la prova di soluzione dei problemi aritmetici ($R = .51$) e come abbiamo visto dalla tabella 6.3, in una analisi della regressione, risulta essere uno dei principali predittori di problemi aritmetici. Per verificare un'ipotesi di mediazione della componente Categorizzazione fra ragionamento e Soluzione dei problemi è stata calcolata la correlazione fra queste ultime due, controllando il contributo della prova di categorizzazione. Dai risultati riportati in tab. 5.13 possiamo riscontrare che la correlazione mantiene la significatività statistica. Pertanto è plausibile pensare che la relazione fra ragionamento analogico e soluzione dei problemi aritmetici sia diretta e non mediata dalla abilità di categorizzazione del problema.

Per quanto riguarda l'analisi delle tre classi di risposte fornite dai soggetti, possiamo osservare che il criterio B, rispetto al criterio A presenta generalmente delle correlazioni più elevate con gli altri indici, anche se non di molto. Rispetto alla correlazione con l'abilità di soluzione dei problemi, che è l'oggetto specifico di questa analisi, osserviamo che la correlazione è più elevata, e passa da un livello di correlazione discreto a un livello soddisfacente, rispetto ai nostri criteri. La correlazione con la prova ACMT operazioni è degna di nota in quanto, mentre risultava non significativa con il criterio A, diventa significativa con il criterio B.

Pianificazione e soluzione dei problemi aritmetici

Si analizzerà adesso la componente "pianificazione". Gli obiettivi specifici circa questa componente sono quelli valutare le relazioni fra abilità pianificazione cognitiva, misurata tramite la prova CAS, abilità di pianificazione del problema e capacità di risolvere i problemi aritmetici.

Per valutare una possibile relazione di mediazione della pianificazione del problema su pianificazione cognitiva e problemi aritmetici è stata analizzata la

correlazione fra problemi e CAS, controllando il contributo della pianificazione del problema.

Risultati e discussione

Come abbiamo visto dalla tabella 6.6 la prova Pianificazione presenta una forte correlazione positiva con la prova Problemi Aritmetici ($R = .52$). Questa correlazione è la più elevata fra le 3 componenti prese in analisi, infatti, nel modello di regressione presentato in tabella 6.8 risulta anche essere il predittore principale di Problemi Aritmetici.

Altro obiettivo è valutare se una prova di pianificazione cognitiva sia alla base della capacità di pianificare nella soluzione dei problemi, la prova scelta è “codici pianificati” sub-test della batteria CAS, descritta nella sezione strumenti. La prova presenta una correlazione significativa con la prova Pianificazione ($R = .29$; sig. $< .01$), va tuttavia specificato che, fra tutte le correlazioni della componente pianificazione con le abilità di base, questa risulta essere più bassa.

La correlazione fra CAS e Problemi Aritmetici raggiunge livello di significatività anche se la correlazione risulta non soddisfacente, rispetto ai nostri criteri ($R = .18$; sig. $< .05$).

Infine, nella tabella 6.15 sono riportati i risultati della correlazione fra CAS e problemi aritmetici, controllata dalla componente pianificazione. Possiamo osservare che in questo modo la correlazione fra CAS e Problemi Aritmetici perde la significatività statistica. Questo può fare supporre un ruolo di mediazione della variabile Pianificazione. Complessivamente tuttavia, la correlazione fra CAS e Pianificazione non sembra sufficientemente elevata per descrivere una struttura causale con Pianificazione come variabile di mediazione fra la pianificazione cognitiva e la soluzione dei problemi aritmetici.

Controllato per	CAS
PIAN	,09
	<i>sig.</i> ,28

Tab. 6.15

6.7 Conclusioni generali

Il primo obiettivo dello studio era quello di valutare la relazione fra l'abilità di soluzione dei problemi aritmetici e i tre indici delle componenti Rappresentazione, Categorizzazione e Pianificazione, da noi predisposti per questo scopo.

L'indice RA corr ha mostrato una buona correlazione con l'indice di soluzione dei problemi, ed è risultato, altresì, un predittore della soluzione all'analisi della regressione lineare. La nostra assunzione teorica, descritta nella parte introduttiva del presente capitolo, era che la prova RA corr. fosse una misura dell'abilità di rappresentare mentalmente gli elementi del problema. Il dato ottenuto sembra abbastanza robusto per poter affermare che la rappresentazione degli elementi del problema giochi un ruolo importante per la soluzione del problema stesso.

L'indice di categorizzazione, criterio A, ha riportato una correlazione positiva significativa con l'indice Problemi Aritmetici, anche se non soddisfacente. La correlazione risulta infatti la più bassa fra le tre componenti prese in analisi. Tuttavia, la componente entra nel modello di regressione come predittore di Problemi Aritmetici. Pertanto categorizzare i problemi in base alla struttura profonda del problema, in linea con la letteratura (Chi et al, 1981) può essere considerata una capacità predittiva della soluzione dei problemi aritmetici, anche se, diversamente dai risultati ottenuti in altre ricerche (Passolunghi et al, 1996), non risulta il migliore predittore della soluzione. Va ribadito ancora una volta che il nostro indice misura la categorizzazione spontanea dei bambini, in base ad un criterio, il risultato ci dice quindi che i bambini che individuano la struttura profonda del problema, con una certa probabilità risolveranno bene il problema e viceversa e, inoltre, che l'uso di questa strategia di categorizzazione è un predittore delle abilità di soluzione. Ma di certo non possiamo concludere che i bambini che hanno categorizzato in maniera superficiale non siano comunque in grado di risolvere il problema. Negli studi descritti precedentemente (Passolunghi et al, 1996; Lucangeli et al, 1998), al contrario, veniva richiesto di raggruppare i problemi in base alle operazioni necessarie per risolverli. In questo caso possiamo certamente dire che i soggetti che hanno raggruppato secondo un criterio sbagliato

non sapranno risolvere il problema, perché non hanno saputo individuare l'operazione corretta. Questo potrebbe spiegare le differenze ottenute circa il peso della categorizzazione rispetto ai problemi e inoltre ridimensionerebbe il ruolo specifico della categorizzazione nella soluzione dei problemi.

La prova di pianificazione da noi individuata misura la capacità di esplicitare le incognite intermedie del problema. Come è stato descritto, la prova presenta una correlazione ottima con la prova di soluzione e risulta anche esserne il migliore predittore. Pertanto possiamo concludere che l'abilità di pianificare, cioè di ragionare in funzione delle incognite da trovare per risolvere il problema ha una forte relazione direzionale con la soluzione dei problemi aritmetici. Il risultato si accorda con quelli della letteratura (Lucangeli et al, 1998) che individuano nella pianificazione uno dei predittori principali della soluzione, anche se nel modello complessivo di questi autori la pianificazione risulta la componente con coefficiente fattoriale più basso.

Il secondo obiettivo dello studio era verificare la relazione fra alcune abilità di base, le tre componenti e la soluzione dei problemi.

Le abilità di base visuo-spaziali, misurate tramite la prova PMA relazioni spaziali (rotazione mentale) e Figura di Rey (riproduzione di una figura priva di significato) hanno dimostrato complessivamente una bassa correlazione con RA corr. e scarsa predittività. Questo risultato è di un certo interesse. L'indice RA corr. è stato predisposto per misurare la rappresentazione mentale del problema, una rappresentazione che contiene gli elementi del problema, cioè i dati. Se il nostro indice rispecchia il costrutto per cui è stato predisposto, dobbiamo concludere che abilità visuo-spaziali non contribuiscono alla formazione di una rappresentazione mentale del problema. Questo dato, certamente da approfondire con analisi più raffinate, potrebbe dare delle indicazioni circa il contenuto di tale rappresentazione mentale. Come si è sottolineato in precedenza, la letteratura non è chiara su questo argomento. È probabile che tale contenuto sia connesso alla tipologia di problema oppure a modalità di rappresentazione specifiche del solutore. Questi dati suggerirebbero che, per questi specifici compiti di tipo aritmetico potrebbe non trattarsi di una rappresentazione visiva o spaziale. Chiaramente rimane aperta la possibilità che altre tipologie di problemi, per esempio quelli geometrici, elicitino maggiormente abilità di tipo visuo-spaziale.

Per la componente Rappresentazione è stata anche condotta un'analisi dei differenti stili di rappresentazione dei soggetti. I risultati hanno messo in luce che stili di rappresentazione pittorici sono negativamente correlati all'abilità di soluzione mentre stili di rappresentazione schematica presentano buone correlazioni positive. Il risultato è in linea con quello ottenuto da Hegarty e altri (1999), ma va specificato che Hegarty misurava le strategie spontanee dei solutori, mentre nel presente studio è stato richiesto ad ogni bambino di produrre una rappresentazione. Il nostro risultato pertanto non consente di inferire che le prestazioni dei soggetti siano espressione della modalità di visualizzazione preferenziale. Le modalità di rappresentazione schematiche e pittoriche comportano anche differenze nella capacità di rappresentare correttamente gli elementi del problema. Pertanto i bambini che hanno prevalentemente prodotto rappresentazioni pittoriche non sono stati in grado di rappresentare gli elementi del problema nella giusta quantità.

Infine le due modalità di rappresentazione non comportano nessuna differenza rispetto agli indici di abilità visuo-spaziale. Questo dato, per prima cosa differisce da quello riscontrato in letteratura; infatti i soggetti di Hegarty e altri, (1999) presentavano una correlazione positiva tra la prova *disegno con cubi* (WISC-R, 19..) e la tipologia di rappresentazione schematica. Questo risultato, inoltre, ci fornisce indicazioni ulteriori circa la rappresentazione mentale del problema. Dal momento che modalità preferenziale di rappresentazione che è connessa con l'indice RA corr, cioè la capacità di rappresentare gli elementi del problema, e dal momento che questo indice è espressione della rappresentazione mentale del problema, è possibile concludere che abilità di tipo visuo-spaziale non concorrono alla formazione della rappresentazione mentale del problema. Anche in questo caso il risultato potrebbe far supporre che la rappresentazione mentale del problema non abbia caratteristiche di tipo visuo-spaziali. In alternativa potrebbe trattarsi di una rappresentazione proposizionale, dal momento che questa rappresentazione contiene i dati del problema. I dati sono ricavati dall'analisi del testo del problema. In particolare sono ricavati dalla sintesi fra gli aspetti verbali e gli aspetti numerici del problema. In questa sede non è possibile approfondire ulteriormente la questione, ma si ritiene che questo risultato sia degno di ulteriori futuri approfondimenti.

Per quanto riguarda le relazioni fra Categorizzazione, Ragionamento analogico e soluzione dei problemi è stato osservato che la prova di ragionamento è l'abilità di base che presenta la correlazione più alta con categorizzazione, e questo supporta i dati di letteratura che associano l'abilità di categorizzazione con il ragionamento per analogia. Inoltre, mentre Ragionamento risulta un ottimo predittore di Problemi aritmetici, i dati non supportano un'ipotesi di mediazione della componente categorizzazione fra le due variabili.

Per quanto riguarda l'analisi del criterio B di correzione della prova di categorizzazione, che rispecchia le diverse categorie che i bambini hanno individuato, è stato osservato che gli indici di correlazione migliorano leggermente rispetto al criterio A. In particolare la correlazione fra Categorizzazione e problemi aritmetici, l'oggetto specifico di questa analisi, passa da un livello di correlazione discreto a un livello soddisfacente. Questo ci suggerisce che l'analisi qualitativa delle categorie prodotte dai bambini potrebbe darci qualche informazione in più rispetto all'abilità di soluzione dei problemi.

Infine, sulle relazioni fra Pianificazione cognitiva abilità di soluzione e pianificazione del problema, si è potuto osservare che la prova di pianificazione cognitiva impiegata nello studio ha generalmente ottenuto correlazioni basse, in alcuni casi anche non significative. La correlazione con la prova di pianificazione risulta più bassa rispetto a tutte le altre abilità di base. Anche la correlazione con la prova di soluzione dei problemi risulta piuttosto scarsa, pertanto sembra superfluo approfondire ulteriormente tali relazioni.

Va sottolineato però che questo non porta ad escludere il peso della pianificazione cognitiva nella pianificazione dei problemi aritmetici, ma soltanto il peso della misura da noi scelta in questo studio. In ogni caso il risultato si iscrive in un quadro di scarsa chiarezza del ruolo della pianificazione cognitiva nella soluzione dei problemi.

Le ultime considerazioni vanno fatte sulle abilità misurate come predittori dell'abilità di soluzione dei problemi.

Il modello delle abilità di base complessive sull'abilità di soluzione ha mostrato che ragionamento non verbale, vocabolario e ragionamento analogico complessivamente sono ottimi predittori della soluzione, questo conferma i risultati ottenuti nel nostro precedente studio (quinto capitolo) ed aggiunge un

dato interessante circa il peso del ragionamento analogico. Per quanto riguarda le variabili escluse, vale quanto detto prima sulle relazione con le componenti.

Passando all'analisi delle prove criteriali di apprendimento, viene sottolineata ancora una volta l'incidenza della comprensione del testo, e questo è un dato ormai acquisito. Degna di nota è invece la presenza delle abilità matematiche, come abbiamo discusso, che non risultava nel nostro precedente studio. come stato ipotizzato, una spiegazione potrebbe essere che la prova utilizzata in precedenza restituiva un unico punteggio e non consentiva di differenziare fra gli aspetti dell'abilità matematica, la prova impiegata nel presente studio, invece, come osservato, presenta due scale, conoscenza numerica e operazioni, e questa differenza possibilmente enfatizza il peso di una componente rispetto alla soluzione dei problemi. Una conferma alle considerazioni fatte è data dalla discrepanza fra conoscenza numerica e operazioni. Questo indica chiaramente un peso maggiore della componente conoscenza numerica nella soluzione dei problemi, rispetto alla componente operazioni. Il dato è piuttosto significativo ed è in linea con la letteratura che sottolinea come risolvere il problema aritmetico non implica soltanto la conoscenza degli algoritmi di calcolo (Mayer, 1983; Mayer, Larkin e Kadane, 1984). Il risultato potrebbe suggerire altresì che la conoscenza numerica è una componente fondamentale per l'analisi e la comprensione del problema, mentre la minore influenza delle operazioni può indicare una rilevanza che subentra solo nelle fasi finali di soluzione, per esempio nelle fasi esecutive.

Infine si considererà il modello delle tre componenti come predittori della soluzione. Complessivamente le tre variabili spiegano una percentuale accettabile di varianza, soprattutto in considerazione che queste non sono le uniche variabili che intervengono nella soluzione dei problemi, un modello complessivo esauriente dovrebbe tenere in considerazione altri fattori, tra cui ad esempio, la comprensione dei dati del problema, che abbiamo misurato in uno studio precedente riguardante la comprensione del testo del problema. Possiamo quindi concludere che le prove specificatamente predisposte per questa analisi presentano una discreta abilità predittiva dell'abilità di soluzione dei problemi e si rimanda al capitolo successivo per l'analisi di un modello più completo delle componenti del problema.

Capitolo Settimo

Descrizione e valutazione di un modello per la soluzione dei problemi aritmetici

7.1 Sommario

Obiettivo di questa analisi è quello di valutare complessivamente le componenti cognitive coinvolte nella soluzione dei problemi che sono state analizzate nel corso di questo lavoro. Il punto di partenza dell'analisi è il modello a cinque componenti di Lucangeli, Tressoldi e Cendron (1998), descritto nel secondo capitolo. Partendo dal citato modello, sono state prese in analisi quattro delle cinque componenti cognitive che lo costituiscono: comprensione, rappresentazione, pianificazione e categorizzazione.

In una prima analisi sono prese in considerazione le quattro abilità complessivamente, valutate all'interno di un modello di regressione per verificare in che misura possono spiegare l'abilità di soluzione dei problemi aritmetici.

Nella seconda analisi vengono valutate le relazioni fra le componenti riproponendo la struttura della *path analysis* condotta nel lavoro di Lucangeli ed altri (1998).

Nel capitolo successivo viene fornita una spiegazione teorica alternativa delle relazioni fra le variabili, infatti, mentre nel modello Lucangeli le componenti sono ritenute indipendenti fra loro, l'ipotesi riportata in questa sede è di una stretta relazione fra alcune componenti.

Infine, negli ultimi capitoli, l'ipotesi teorica delle relazioni fra le variabili viene verificata alla luce dei dati raccolti per mezzo di una *sem analysis*.

7.2 Introduzione

Come è stato più volte argomentato, il principale modello a cui è stato fatto riferimento nel disegnare i lavori di ricerca esposti nei precedenti capitoli, è quello di Lucangeli e altri (1998). Di questo modello abbiamo evidenziato i numerosi pregi, tra cui quello di fornire importanti indicazioni per l'individuazione delle specifiche difficoltà nella soluzione dei problemi e di individuare percorsi di intervento mirati e specifici per ogni bambino.

Negli studi esposti in precedenza, tuttavia, si è cercato di perfezionare la misurazione delle varie componenti che concorrono alla soluzione del problema, sia cercando delle misure che rispondessero maggiormente alle caratteristiche dei diversi costrutti esaminati nella letteratura, sia misurandole in maniera indipendente le une dalle altre e non all'interno del medesimo problema.

A questo punto, risultava anche di un certo interesse verificare se i dati ottenuti negli studi precedenti possono essere spiegati alla luce del modello di Lucangeli e collaboratori o se, piuttosto fosse possibile ipotizzare un modello alternativo più efficace nella spiegazione dei dati.

7.3 Verifica del modello di Lucangeli e collaboratori

1.3.1 Metodo

Partecipanti, Materiali e procedure

Per effettuare l'analisi delle componenti in un modello complessivo, sono stati utilizzati i dati rilevati sui 145 soggetti coinvolti nell'ultimo studio descritto (57 frequentanti la classe quinta, 25 femmine, 32 maschi; 88 frequentanti la classe quarta, 57 femmine, 31 maschi). Tutti i soggetti hanno completato una serie di prove, descritte nel sesto capitolo volte a misurare le abilità di:

Soluzione dei Problemi Aritmetici (Probl arit)

Comprensione del testo del problema (CP/dati)

Rappresentazione (RA corr)

Categorizzazione (CAT)

Pianificazione (PIAN)

Inoltre, al fine di confrontare i nostri dati con il modello completo a cinque componenti, è stata condotta un'analisi sui dati ottenuti su un gruppo ristretto di soggetti (88 frequentanti la classe quarta) che hanno anche svolto la prova di autovalutazione tratta dal test SPM (Lucangeli, Tressoldi e Cendron, 1998b).

Autovalutazione

La prova, come già descritto nel secondo capitolo, richiede di valutare la propria prestazione scegliendo una tra 4 alternative: “sono certo di avere fatto giusto”, “probabilmente ho fatto giusto”, “probabilmente ho sbagliato”, “sono certo di avere sbagliato”. Il punteggio del sub test *autovalutazione* viene ricavato in funzione dell'effettiva risoluzione del problema. Pertanto il bambino ottiene un punteggio massimo (3) se afferma di essere sicuro di aver svolto bene il compito ed il compito è stato *effettivamente* svolto correttamente, oppure se afferma di essere sicuro di avere sbagliato ed il compito è effettivamente sbagliato. Ottiene il punteggio minimo (1) nei casi contrari, cioè se afferma di essere sicuro di aver fatto bene ma in effetti ha sbagliato e viceversa. Ottiene un punteggio intermedio (2) se afferma che probabilmente ha fatto giusto o sbagliato e ha ottenuto un punteggio intermedio nella risoluzione del problema. L'intero test SPM è stato somministrato collettivamente in classe, in un arco di tempo di circa un'ora, solamente ai soggetti frequentanti la classe quarta.

Strategie di analisi dei dati

Regressione lineare multipla

Analogamente a quanto fatto dagli autori del modello, si è proceduto su due livelli di analisi. Il primo riguarda la regressione multipla delle componenti sull'abilità di soluzione dei problemi, per valutare in che misura le variabili spiegano la soluzione dei problemi. È stato utilizzato il metodo di analisi *stepwise*.

Path analysis

Il secondo riguarda le relazioni reciproche fra le componenti, che sono state esaminate mediante una *path analysis*, tramite il software AMOS 16. Per valutare la bontà dell'adattamento del modello si è fatto riferimento ai seguenti indici: *Goodness of Fit Index* (GFI), *Adjusted Goodness of Fit Index* (AGFI), *Comparative Fit Index* (CFI), *Root Mean Squared Residual* (RMSEA). Una regola convenzionale per la valutazione di tali indici individua un adattamento

soddisfacente se: RMSEA è minore o uguale a .10 e CFI è maggiore o uguale a .90. Criteri più rigorosi per valutare gli indici di *fit* sono stati proposti da Hu e Bentler (1999) che suggeriscono come soglie di accettabilità valori maggiori di .95 per il CFI e minori di .06 per il RMSEA. In questo lavoro sono stati considerati come indici di un adattamento adeguato un CFI maggiore o uguale a .90 e un RMSEA minore o uguale a .10, e indici di un adattamento eccellente CFI maggiore o uguale a .95 e RMSEA minore o uguale a .06.

2.3.2 Risultati

Analisi della regressione

Nella tabella 7.1 sono riportati i risultati della regressione lineare multipla, metodo stepwise, in cui i predittori sono: Comprensione (prova CP/dati), Rappresentazione (prova di rappresentazione del problema, indice RA corr.), Categorizzazione (prova di categorizzazione, indice CAT criterio A), prova di Pianificazione. La variabile dipendente è la prova di soluzione dei problemi aritmetici. Come è possibile vedere dalla tabella, il primo predittore che entra nel modello è la comprensione, che da sola spiega il 35% della prova di soluzione dei problemi aritmetici con un beta di .426. Nel secondo modello entra la prova di pianificazione, che apporta un miglioramento notevole, di circa il 13%. Il terzo modello include la categorizzazione, che aggiunge un 2% alla varianza spiegata complessiva. Infine, il quarto modello comprende la rappresentazione, e complessivamente spiega il 52% della varianza della prova di soluzione dei problemi.

modello		<i>B</i>	<i>beta</i>	<i>t</i>	<i>Sig.</i>
4	COMPRESIONE	,364	,426	6,674	,000
	PIANIFICAZIONE	,107	,279	4,017	,000
	CATEGORIZZAZIONE	,098	,172	2,824	,005
	RAPPRESENTAZIONE	,150	,143	2,035	,044

Tab. 7.1

Mod 1 $R^2 = .35$; $F = 75,9$; $sig < .001$

Mod 2 $R^2 = .48$; $F = 65,1$; $sig < .001$

Mod 3 $R^2 = .50$; $F = 48,0$; $sig < .001$

Mod 4 $R^2 = .52$; $F = 37,8$; $sig < .001$

Nella tabella 7.2 sono riportati i risultati di una regressione lineare multipla del modello che comprende anche della componente autovalutazione. Questa analisi, come si ricorderà, è stata condotta soltanto su un sottogruppo di 88 soggetti frequentanti la classe quarta. In questo caso, probabilmente anche a causa del numero più ristretto di soggetti, solo le componenti Comprensione, Pianificazione e Categorizzazione, spiegano la soluzione di problemi aritmetici ($R^2 = .49$, $p < .001$), mentre le componenti Rappresentazione ed Autovalutazione non risultano significative.

modello	<i>B</i>	<i>beta</i>	<i>t</i>	<i>Sig.</i>
COMPRESIONE	1,944	,452	5,369	,000
RAPPRESENTAZIONE	,770	,154	1,703	,092
CATEGORIZZAZIONE	,505	,198	2,298	,024
PIANIFICAZIONE	,450	,199	2,087	,040
AUTOVALUTAZIONE	,226	,095	1,167	,247

Tab. 7.2

Mod $R^2 = .49$; $F = 15,5$; $sig < .001$

Questi risultati indicano che, complessivamente, le variabili individuate da Lucangeli, Tressoldi e Cendron, e da noi misurate con prove indipendenti dalla soluzione del problema, sono buoni predittori della capacità di risolvere problemi aritmetici.

Path analysis

Per valutare le relazioni reciproche fra le variabili considerate, è stata condotta una *path analysis* fra le componenti cognitive, mantenendo la comprensione come variabile sovraordinata. Come si ricorderà (vedasi secondo capitolo, fig. 2.1), utilizzando la medesima procedura, Lucangeli e altri hanno ottenuto un modello significativo in cui la variabile Comprensione è sovraordinata rispetto alle altre e le variabili Rappresentazione, Categorizzazione, Pianificazione e Autovalutazione sono non correlate, ed apportano quindi un contributo unico alla soluzione del problema

I risultati della presente analisi si discostano tuttavia da quelli descritti nel modello originario. Infatti gli indici di *fit* del modello non sono soddisfacenti (Chi quadrato = 61,5; $df = 7$; GFI = .82; AGFI = .45; RMSEA = .29) (fig. 6.1), ad indicazione che il modello teorico non è spiegato dai dati empirici rilevati.

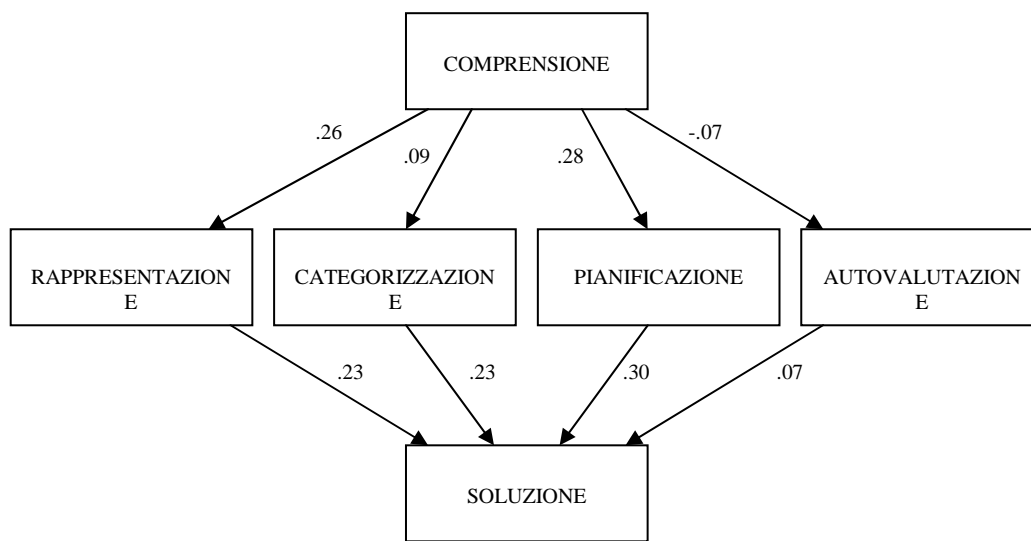


Fig. 7.1 Il modello testato

Gli indici di modifica più importanti per questo modello suggeriscono di stimare l'effetto diretto della comprensione sulla soluzione (M.I. = 21.5) e di correlare categorizzazione e pianificazione (M.I. = 15.2). Operando queste modifiche il modello migliora significativamente (Chi quadrato = 16,6; df = 5; GFI = .94; AGFI = .77; RMSEA = .16) non pervenendo, comunque, ad un adattamento con i dati accettabile.

7.4 Un modello alternativo di soluzione dei problemi aritmetici

La principale osservazione rispetto ai risultati delle analisi precedenti è che il modello con le componenti non correlate non si adatta ai nostri dati. Questa evidenza, supporta l'ipotesi di un'altra configurazione di relazioni fra le componenti.

Nel corso di questo lavoro, attraverso l'approfondimento delle componenti del problema aritmetico, sia teorica, che empirica, l'ipotesi che alcune delle abilità coinvolte nella soluzione dei problemi avessero delle relazioni più complesse si è via via sostanziata in un modello teorico alternativo delle componenti del problema. Il modello è riportato in figura 7.2. Come si potrà vedere dalla figura, il modello comprende due variabili latenti definite "rappresentazione dati" e "relazione dati", che spiegano una terza variabile che corrisponde all'abilità di soluzione dei problemi aritmetici. Gli indicatori della variabile "rappresentazione dati" sono gli indici di comprensione dati e rappresentazione mentre quelli della variabile "relazione dati" sono gli indici di categorizzazione e di pianificazione.

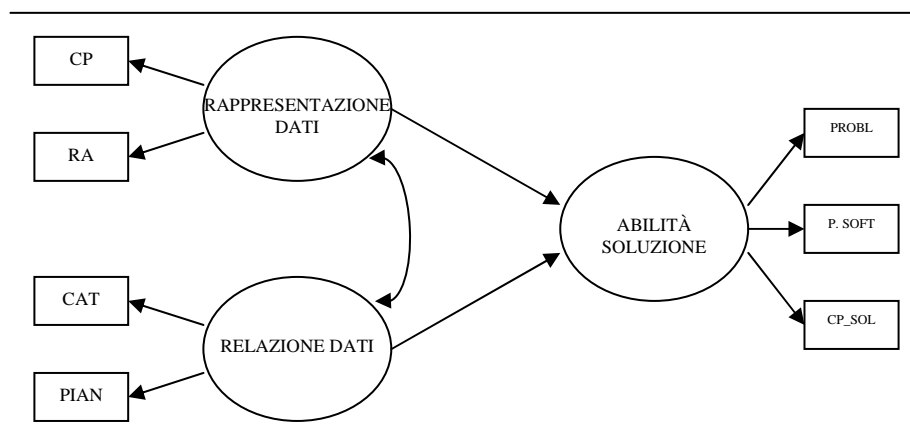


Fig. 7.2: Modello della Comprensione del problema

Di seguito si chiariranno brevemente le riflessioni che hanno condotto ad una tale elaborazione.

La prova di rappresentazione del problema descritta nel sesto capitolo, in particolare l'indice RA correttezza, indica in che misura il bambino è stato in grado di rappresentare graficamente gli elementi del problema, cioè rappresentare gli oggetti descritti nel testo nella giusta quantità. Per costruire la prova è stato fatto riferimento al concetto di rappresentazione mentale degli elementi del problema. In altre parole, è stato ipotizzato che la rappresentazione del problema

fosse una rappresentazione mentale dei dati e che l'indice di rappresentazione RA correttezza potesse rispecchiare questa attività mentale.

Facendo riferimento al modello di Mayer (1981), una siffatta rappresentazione corrisponderebbe alla fase di "traduzione", cioè la fase in cui si integrano le informazioni processate sintatticamente e semanticamente. Il riferimento a Mayer ci rimanda al concetto di comprensione. Si ricorderà la descrizione della prova CP e in particolare dell'indice CP/dati, che è risultato in questi studi il principale predittore della soluzione dei problemi aritmetici. Questo indice misura la capacità del bambino di individuare il referente verbale di un numero, tramite domande a risposta multipla (cosa indica numero 40? Indica il numero di riserve naturali). Si potrebbe osservare che le due prove, RA corr e CP/dati, attraverso due codici differenti (uno visivo e uno verbale), misurano uno stesso processo, cioè il riconoscimento dei dati. Da queste osservazioni è stata avanzata l'ipotesi che la comprensione degli aspetti numerici del problema, così come sono stati misurati dall'indice CP/dati e la rappresentazione degli elementi del problema, così come sono stati misurati dall'indice RA correttezza, siano espressione di uno stesso fattore latente sottostante, cioè la capacità di integrare testo e numeri e individuare il "dato". Questa ipotesi è parzialmente supportata dai modelli di regressione delle componenti sull'abilità dei problemi aritmetici. Come si ricorderà, infatti, nel primo di questi modelli (tab. 7.1) la rappresentazione rientra fra i predittori dell'abilità di soluzione, ma risulta quello meno importante, nonostante la correlazione fra RA corr. e Problemi aritmetici fosse soddisfacente. Al contrario, la comprensione dei dati, risulta il predittore migliore, questo potrebbe implicare che i due indici condividono una buona parte di varianza. La regressione delle cinque componenti (tab. 7.2) sottolinea maggiormente questa ipotesi laddove l'indice RA corr. non risulta significativo.

Concludendo, queste argomentazioni motivano la nostra scelta di un fattore latente che spiega i due indici descritti. Questo fattore è stato definito "rappresentazione dei dati" e potrebbe costituire la prima attività specifica per la comprensione del problema.

Il secondo fattore latente presente nel modello spiega gli indici di Pianificazione e Categorizzazione.

Si ricorderà dal quarto capitolo la definizione di pianificazione, in particolare di pianificazione nel problema aritmetico, cioè quella di ragionamento

in funzione delle incognite del problema. In altre parole questa componente processa la richiesta finale del problema, e analizza se tutti i dati sono a disposizione. Se i dati sono a disposizione il processo termina (è il caso dei problemi a singolo *step*). Se mancano i dati necessari, il processo procede ricercando l'incognita intermedia, che consente di ottenere i dati mancanti. Così continua a ritroso fino ad ottenere tutti i dati per risolvere il problema. In questa prospettiva è stato individuato l'indice Pian. che misura le capacità del solutore di esplicitare le incognite del problema. Si può immaginare che l'esito finale del processo descritto sia la scelta dell'operazione da eseguire. Nel problema a singolo *step* infatti, l'analisi della domanda determina la scelta dell'operazione. Nei problemi *multistep*, l'analisi delle incognite intermedie avrà come esito, di volta in volta, la scelta dell'operazione. L'individuazione dell'operazione richiama direttamente il concetto di categorizzazione, che è stato definito e discusso ampiamente nel quarto capitolo. Occorre, tuttavia, in questa sede richiamare alcuni dei concetti discussi in precedenza. Negli studi pionieristici che contribuirono alla definizione di categorizzazione (Chi et al, 1981), era misurata la capacità di adulti di raggruppare i problemi in base ad un criterio. In studi successivi la categorizzazione è stata intesa come il riconoscimento della struttura profonda del problema. Ma si potrà osservare che la struttura profonda del problema è solo uno dei possibili modi di categorizzare. Sulla base di queste riflessioni è stato individuato l'indice di categorizzazione CAT, che sembrava misurare in maniera più raffinata la categorizzazione. Tuttavia si osserverà che questo indice ci dice soltanto in che modo i bambini hanno scelto di raggruppare i problemi. La struttura profonda può essere uno dei modi particolarmente funzionale alla soluzione del problema. La riflessione quindi si sposta sul concetto di struttura profonda del problema, che è la struttura risolutiva. Si ritiene che il riconoscimento della struttura profonda del problema, in particolare nei bambini, non può essere considerato un fenomeno tutto o nulla, ma si ipotizza che sia un processo in cui vengono passo passo scelte le operazioni. Ma si ricorderà che la scelta delle operazioni è l'esito di un processo di ragionamento in funzione dell'incognita, che è stata ritenuta essere la pianificazione. Comincia quindi ad essere evidente un rapporto sinergico fra analisi delle incognite e scelta dell'operazione, cioè fra pianificazione e categorizzazione, che per correttezza di

termini, e per non continuare a generare ambiguità da ora in poi verrà definita “riconoscimento dell’operazione”.

Queste riflessioni complessivamente hanno portato alla scelta di considerare gli indici Pian e Cat come espressione del medesimo fattore latente che è stato definito “relazione dati”. Infatti l’esito dell’intero processo è quello di mettere correttamente i dati in relazione. Un elemento che può supportare questa ipotesi è dato dagli indici di modifica della *path analysis* descritta nel paragrafo precedente, infatti, un indice piuttosto forte ($MI = 15.2$) riguarda la correlazione fra l’indice Pian con l’indice Cat.

Infine si ipotizza che le due variabili latenti, rappresentazione dati e relazione dati, possano essere correlate, in quanto, in alcuni casi i dati possono essere direttamente rappresentati, in altri, è necessaria un processo di elaborazione delle incognite per individuare i dati correttamente. Questo potrebbe essere più evidente nei problemi più complessi o nei problemi con dati superflui. È tuttavia interessante valutare l’effettiva presenza o meno di tale correlazione, perché questo porta a due differenti prospettive. L’assenza di relazione implicherebbe una forte specializzazione delle componenti e un contributo unico alla soluzione, e quindi la possibilità di individuare profili netti di difficoltà. La prospettiva contraria rende più complessa l’analisi specifica delle difficoltà dei soggetti.

Complessivamente il modello descrive i processi di comprensione del problema. La mia ipotesi è che la *comprensione del problema* non si esaurisca con la comprensione del testo del problema, ma che sia un processo multi-fattoriale che ha inizio con la comprensione del testo e degli aspetti numerici del problema, così come è stato ipotizzato che avvenga nella componente “rappresentazione dati”, e che prosegua processando la richiesta del problema e le incognite intermedie, così come si è ipotizzato che avvenga nella componente “relazione dati”. In altre parole la comprensione del problema è un processo che ha inizio con la comprensione del testo del problema e ha come esito finale l’esecuzione dei calcoli per ottenere la soluzione. L’esecuzione dei calcoli è quindi considerata la parte esecutiva del processo.

7.5 Valutazione empirica del modello

Con i dati in nostro possesso è possibile eseguire una prima valutazione del modello descritto. Con il metodo della *sem analysis* si valuterà la bontà dell'adattamento del modello della comprensione del problema con variabili latenti e si valuterà la plausibilità di una correlazione fra i due fattori Rappresentazione e Relazione Dati. La nostra ipotesi teorica, infatti è che le due componenti abbiano un rapporto di causazione reciproca, in quanto una corretta rappresentazione dei dati necessita di una preliminare analisi della richiesta del problema, e viceversa, una corretta analisi delle incognite presuppone una corretta rappresentazione. Tuttavia, coerentemente con i dati di Lucangeli e altri (1998), il modello migliore potrebbe presupporre due variabili latenti non correlate, e pertanto supportare l'idea di due componenti autonome che apportano un contributo unico alla soluzione del problema, e che di conseguenza specificano profili di difficoltà indipendenti.

7.5.1 Metodo

Campione e misure

L'analisi è stata effettuata sui 145 soggetti descritti in precedenza. L'analisi è stata ripetuta anche con i soggetti suddivisi per classi (88 soggetti di quarta e 57 di quinta). Come nelle altre analisi, per il campione complessivo sono stati utilizzati dati ponderati per tutte le prove standardizzate, mentre le prove oggettive sono state suddivise in quartili differenziando le fasce d'età. Per l'analisi dei soggetti divisi in classi sono stati utilizzati i dati grezzi di ogni prova considerata.

Gli indici presi in considerazione per questa analisi sono:

- Componente RAPPRESENTAZIONE DEI DATI:
 - o Prova di rappresentazione del problema, indice RA_correttezza
 - o Prova comprensione testo e numeri del problema, indice CP/dati
- Componente RELAZIONE FRA I DATI (PIANIFICAZIONE/CATEGORIZZAZIONE):

- Prova di pianificazione del problema, indice PIAN_totale
- Prova di categorizzazione del problema, indice CAT_criterio_A
- Componente ABILITÀ DI SOLUZIONE DEI PROBLEMI
 - Prova di soluzione di 18 problemi aritmetici, indice Probl_arit
 - Prova di soluzione 6 problemi aritmetici, indice Probl_soft
 - Prova di comprensione testo e numeri, indice CP/soluzione

Strategie di analisi dei dati

Dopo aver condotto le analisi preliminari, è stato valutato il modello strutturale tramite il software AMOS 16. Per la stima dei parametri è stata utilizzata la procedura *Asymptotically Distribution-free Estimates*. Tale metodo di stima è stato scelto in quanto alcune variabili del modello non presentano distribuzione normale. L'adattamento del modello è stato valutato tramite gli stessi indici descritti nel paragrafo precedente sulla.

Il confronto fra i due modelli è stato effettuato calcolando la differenza fra i χ^2 valutandone la significatività in funzione della differenza fra i gradi di libertà.

7.5.2 Risultati

SEM analysis

Nella tabella 6.4 sono riportati gli indici di adattamento del modello con le componenti non correlate (A) e correlate (B) dei gruppi quarta, quinta primaria e soggetti totali. Come è possibile osservare, il modello con le componenti correlate ottiene un adattamento migliore nelle tre analisi (quarta: $\Delta \chi^2 (1) = 5.7, p < .02$; quinta: $\Delta \chi^2 (1) = 11.5, p < .001$; tutti soggetti: $\Delta \chi^2 (1) = 21.2, p < .001$). per questo motivo di seguito si riporteranno i coefficienti fattoriali dei soli modelli con componenti correlate. Gli indici di *fit* ci mostrano un adattamento adeguato del modello nei soggetti frequentanti la classe quarta e un adattamento eccellente nei soggetti frequentanti la classe quinta e nel campione totale.

CLASSE	A. Componenti non correlate	B. Componenti correlate
TOTALE	$\chi^2(13) = 39,1$ RMSEA = .118 (LO = .07; HI = .16) GFI = .962 AGFI = .919 CFI = .748	$\chi^2(12) = 17,9$ RMSEA = .058 (LO = .00; HI = .11) GFI = .983 AGFI = .960 CFI = .943
IV PRIMARIA	$\chi^2(13) = 26,8$ RMSEA = .110 (LO = .05; HI = .17) GFI = .944 AGFI = .880 CFI = .755	$\chi^2(12) = 21,1$ RMSEA = .093 (LO = .01; HI = .16) GFI = .956 AGFI = .897 CFI = .837
V PRIMARIA	$\chi^2(13) = 28,1$ RMSEA = .144 (LO = .07; HI = .22) GFI = .980 AGFI = .957 CFI = .845	$\chi^2(12) = 16,6$ RMSEA = .082 (LO = .00; HI = .17) GFI = .988 AGFI = .973 CFI = .953

Tab. 6.4

I parametri dei modelli sono analiticamente presentati nelle tabelle 6.5 (coefficienti fattoriali standardizzati del modello di misurazione per la quarta, quinta classe e soggetti totali), 6.6 (coefficienti fattoriali standardizzati del modello strutturale) e 6.7 (correlazioni fra rappresentazione e Relazione Dati per la quarta, quinta e soggetti totali).

	RAPPRESENTAZIONE	RELAZIONE DATI	ABILITÀ SOLUZIONE	
Quarta Primaria	RA corr	.61		
	CP dati	.60		
	PIAN		.54	
	CAT		.65	
	Problemi Arit.			.80
	Problemi Soft			.62
	CP soluzione			.73
Quinta Primaria	RA corr	.52		
	CP dati	.56		
	PIAN		.76	
	CAT		.43	
	Problemi Arit.			.79
	Problemi Soft			.65
	CP soluzione			.80
Tutti soggetti	RA corr	.79		
	CP dati	.70		
	PIAN		.74	
	CAT		.63	
	Problemi Arit.			.92
	Problemi Soft			.61
	CP soluzione			.65

Tab 6.5 Coefficienti Fattoriali Standardizzati Modello di Misurazione

Dalla tabella 6.5 si può osservare che tutti gli indicatori scelti hanno coefficienti fattoriali statisticamente significativi, con valori che vanno da .43 a .80 per la classe quarta, da .61 a .92 per la classe quinta e da .54 a .80 per il gruppo totale dei soggetti.

		RAPPRESENTAZIONE	RELAZIONE DATI
Tutti	ABILITÀ SOLUZIONE	.68	.42
IV	ABILITÀ SOLUZIONE	.92	.28
V	ABILITÀ SOLUZIONE	.56	.54

Tab 6.6 Coefficienti Fattoriali Standardizzati Modello Strutturale

La tabella 6.6 mostra che i coefficienti fattoriali della componente Rappresentazione sull'abilità di soluzione sono statisticamente significativi per tutti i gruppi, sono altresì significativi i coefficienti fattoriali della componente Relazione Dati sulla soluzione nel gruppo quinta e soggetti totali, mentre non risulta significativa la relazione nel gruppo di classe quarta ($R^2 = .28$; $p = .19$).

Infine, la tabella 6.7 mostra le correlazioni fra Rappresentazione e Relazione Dati nei tre gruppi.

		R^2
Tutti	Rappresentazione e Relazione Dati	.72
IV	Rappresentazione e Relazione Dati	.56
V	Rappresentazione e Relazione Dati	.60

Tab 6.7 Correlazioni fra Rappresentazione e Relazione Dati

7.5.3 *Discussione*

I risultati dimostrano che il modello teorico della comprensione del problema si adatta in maniera soddisfacente ai dati empirici. Se si prende in considerazione il campione totale, analizzando quindi complessivamente la fascia d'età di nostro interesse che comprende la quarta e la quinta primaria, si può

osservare che entrambe le componenti, Rappresentazione Dati ($R^2 = .68$) e Relazione Dati ($R^2 = .42$) spiegano l'abilità di soluzione; come si può altresì riscontrare, Rappresentazione ha una influenza maggiore rispetto a Relazione Dati. Questo risultato, non pienamente soddisfacente, in quanto teoricamente si ritiene che al livello della componente Relazione Dati risiedano il maggior numero degli errori che i bambini compiono durante la soluzione del problema, potrebbe essere spiegato alla luce di un modello di misurazione non pienamente adeguato ad esprimere la complessità della componente Relazione Dati. Come è stato discusso nei paragrafi precedenti, infatti, attività fondamentale della componente è la selezione delle operazioni necessarie per la soluzione, una abilità che va oltre la categorizzazione di problemi in base all'operazione. L'indice CAT esprime esattamente la capacità di categorizzazione in base ad un criterio, ma non indica con precisione la capacità di scegliere l'operazione rilevante (non possiamo affermare che chi categorizza i problemi in base a criteri "superficiali" non sappia individuare l'operazione rilevante per la soluzione).

Analizzando i risultati dei gruppi divisi in funzione alla classe frequentata, è possibile rilevare che, nel gruppo dei soggetti frequentanti la quinta, la differenza fra Rappresentazione e Relazione Dati nello spiegare l'abilità di soluzione è livellata (Rappresentazione: $R^2 = .56$; Relazione dati: $R^2 = .54$). Al contrario, nei soggetti frequentanti la classe quarta lo squilibrio fra le componenti è accentuato, tanto che la componente Relazione Dati risulta non significativa. Questo risultato si apre a due diverse spiegazioni. La prima è che esista una possibile differenza nel modello di misurazione al livello della componente Abilità di Soluzione. I problemi impiegati nelle diverse prove, descritti nei capitoli precedenti, sono infatti specifici per la classe frequentata, ed è possibile che siano affetti da una lieve differenza di affidabilità nella misurazione della componente, nel senso che è possibile che le prove complessivamente restituiscano un livello di "abilità di soluzione dei problemi" lievemente diversa fra le due classi. Potrebbe avvenire, per esempio, che le prove somministrate in quarta, risultino complessivamente più semplici rispetto a quelle somministrate in quinta, e questo potrebbe implicare una minore sensibilità della componente rispetto all'abilità di ragionamento in funzione dell'incognita. Questo errore risulta estremamente complesso da controllare, in quanto tutte le prove oggettive che riguardano gli apprendimenti, per la numerosità di variabili implicate,

difficilmente potranno essere perfettamente equivalenti nel livello di difficoltà. Una soluzione, per un futuro approfondimento, è quella di impiegare prove standardizzate, anche se, come spiegato precedentemente, non esiste attualmente uno strumento che restituisce un indice puro di abilità nella soluzione dei problemi aritmetici.

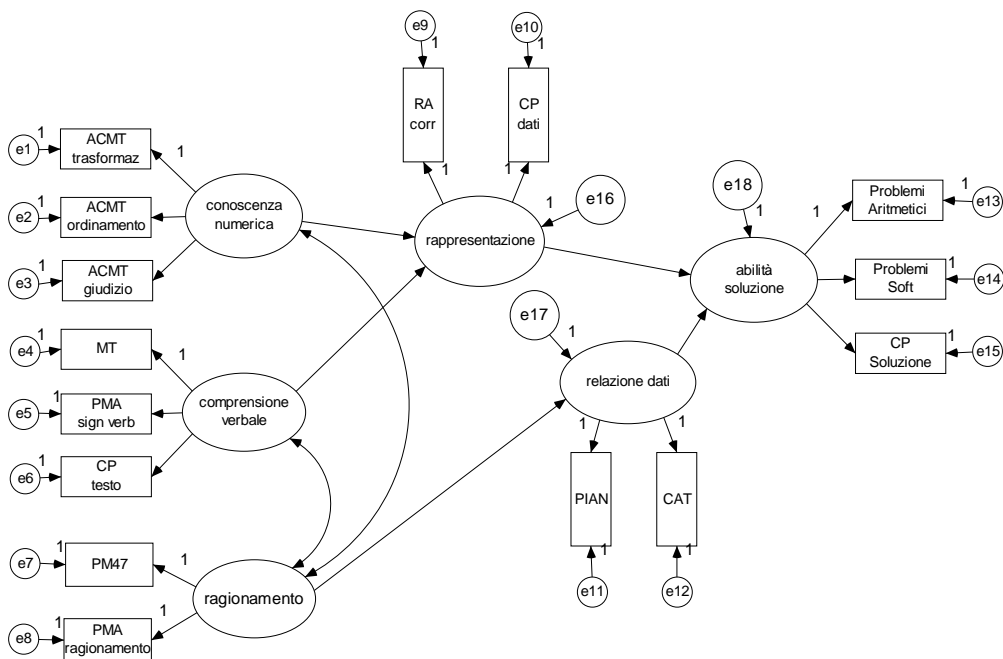
Una spiegazione alternativa della differenza fra i risultati nelle due classi potrebbe essere che i due gruppi siano espressione di due popolazioni differenti, in altre parole, la nostra assunzione che la fascia d'età comprendente la quarta e la quinta primaria sia espressione di un'unica popolazione in cui si esprime la piena maturità per la comprensione dei problemi aritmetici potrebbe essere inesatta. Tra le due fasce d'età potrebbero invece risiedere delle differenze a livello della comprensione del problema e in particolare al livello del ragionamento in funzione dell'incognita. Come se bambini di quarta usassero maggiormente la componente Rappresentazione e in misura minore la Relazione Dati, mentre con l'avanzare dell'età e della maturazione cognitiva si incrementasse il ruolo del ragionamento in funzione delle incognite. Questo ragionamento è assolutamente plausibile, tuttavia, come spiegato si è ritenuto che la fascia d'età delle classi quarta e quinta fosse espressione della piena maturazione per la comprensione, a differenza delle classi inferiori in cui è presumibile che si privilegino altre strategie basate maggiormente sulla rappresentazione dei dati, sull'utilizzo delle parole chiave e altre strategie basate su indizi superficiali. Anche in questo caso si rimanda a successivi approfondimenti prendendo in esame la componente età e le possibili differenze nella comprensione intervenienti fra la quarta e la quinta classe primaria.

7.6 Un modello dei predittori della comprensione

Il modello descritto nel paragrafo precedente può essere considerato il nucleo dell'abilità di soluzione dei problemi aritmetici e costituisce l'aspetto delle componenti specifiche dell'attività di risoluzione. Certamente in questo processo entrano in gioco diverse altre abilità che non sono specifiche per la soluzione dei problemi, ma che possono essere considerate "trasversali" per gli apprendimenti scolastici. Si ricorderà che uno degli obiettivi del presente lavoro, era quello di

individuare alcune abilità più generali che spiegassero le componenti specifiche della attività di risoluzione dei problemi aritmetici. Fra queste rientra in primo luogo la comprensione del testo che è stata oggetto di un approfondimento specifico in questo lavoro.

Sulla base dell'analisi della letteratura e dei risultati ottenuti dai nostri precedenti studi, si è ipotizzato un modello delle componenti del problema che include le abilità trasversali, che possiamo considerare i "predittori" dell'abilità di soluzione. Il modello è riportato in figura 7.3, di seguito si espongono le ragioni che hanno condotto alla formulazione del modello.



Come è possibile vedere il modello presenta 6 variabili latenti, la parte destra del modello corrisponde al modello della comprensione del problema descritto nel precedente paragrafo, e cioè gli aspetti specifici dell'abilità di soluzione. Gli altri tre fattori sono comprensione verbale conoscenza numerica che causano il fattore rappresentazione dati e un fattore ragionamento che causa relazione dati.

Come si ricorderà il fattore rappresentazione dati esprime la capacità di rappresentare mentalmente cioè gli oggetti del problema nella giusta quantità. Gli indicatori di questo fattore, infatti, esprimono la capacità di sintesi fra testo e numeri. Questa sintesi determina l'individuazione dei dati rilevanti. Alla base di questa attività potrebbero risiedere fattori di comprensione verbale e di

conoscenza numerica. Questa ipotesi è fortemente supportata dai nostri dati che riportano una relazione causale fra comprensione del testo e conoscenza numerica con la soluzione dei problemi.

Il fattore relazione dati esprime la capacità di ragionamento in funzione dell'incognita. Questa capacità molto probabilmente è spiegata da un fattore di ragionamento. Gli indicatori del fattore ragionamento sono le prove di ragionamento non verbale e di ragionamento analogico. L'ipotesi è supportata dai nostri dati in quanto tali prove hanno dimostrato buona capacità predittiva rispetto alla soluzione dei problemi.

7.7 Valutazione empirica del modello

Con l'analisi che segue si valuterà il modello dei predittori dell'abilità di soluzione appena descritto

7.7.1 *Metodo*

Misure

Questa analisi si configura come un'estensione della precedente e il campione è costituito dagli stessi 145 soggetti. Le misure che riguardano il modello di comprensione sono le stesse descritte nel precedente paragrafo, ma a queste sono aggiunte le misure che riguardano le componenti che abbiamo considerato come predittori della comprensione del problema, cioè Comprensione Verbale, Conoscenza Numerica e Ragionamento. Tutte le prove considerate sono state descritte nei capitoli precedenti e a questi si rimanda per un approfondimento. Di seguito si riporta un elenco delle componenti del modello con le prove che ne costituiscono gli indicatori.

- **Variabili latenti esogene:**
 - CONOSCENZA NUMERICA
 - AC-MT trasformazione in cifre, indice **ACMTtrasf**
 - AC-MT ordinamento, indice **ACMTord**
 - AC-MT giudizio di grandezze, indice **ACMTgiud**
 - COMPRENSIONE VERBALE

- Prova di comprensione MT, indice **MTs**
- Prova di vocabolario PMA significato verbale, indice **PMAsig_verb**
- Prova di comprensione CP, indice CP_testo
- RAGIONAMENTO
 - Prova di ragionamento non verbale PM47, indice **PM47s**
 - Prova di ragionamento analogico PMA ragionamento, indice **PMArag**
- **Variabili latenti endogene:**
 - RAPPRESENTAZIONE DEI DATI:
 - Prova di rappresentazione del problema, indice **RA_classi**
 - Prova comprensione testo e numeri del problema, indice **CP_dati**
 - RELAZIONE FRA I DATI
 - Prova di pianificazione del problema, indice **PIAN_classi**
 - Prova di categorizzazione del problema, indice **CAT_classi**
 - ABILITÀ DI SOLUZIONE DEI PROBLEMI
 - Prova di soluzione di 18 problemi aritmetici, indice **Probl_arit_Pond**
 - Prova di soluzione 6 problemi aritmetici, indice **Probl_soft_classi**
 - Prova di comprensione testo e numeri, indice **CP_soluzione**

Gli indicatori del modello di misurazione delle variabili esogene sono stati standardizzati utilizzando la media e la deviazione standard dei relativi campioni normativi.

Strategie di analisi dei dati

Il modello è stato valutato tramite il software LISREL 8.5 (Jöreskog e Sörbom, 1998). Il metodo di stima utilizzato è *Maximum Likelihood*. Tramite analisi preliminari infatti è stata verificata la normalità multivariata delle 15 variabili considerate (coefficiente di curtosi multivariata di Mardia = 17.3, valore soglia = 255).

L'adattamento del modello è stato valutato tramite gli indici: *Goodness of Fit Index* (GFI), *Adjusted Goodness of Fit Index* (AGFI), *Comparative Fit Index* (CFI), *Root Mean Squared Residual* (RMSEA). Per la valutazione di tali indici è stata utilizzata la regola convenzionale che individua un adattamento soddisfacente se: RMSEA è minore o uguale a .10 e CFI è maggiore o uguale a .90.

7.7.2 Risultati e discussione

Nelle tabelle 6.8, 6.9, 6.10, 6.11, 6.12, 6.13 sono riportati indici di adattamento e *factor loadings* del modello. Com'è possibile vedere dalla tabella 6.8, gli indici di adattamento mostrano un adattamento soddisfacente del modello teorico ai dati.

Le stime del modello di misurazione sono tutte statisticamente significative, con valori che vanno da .27 a .83. I le stime del modello strutturale sono significative, con valori che vanno da .46 a .79. Soltanto il coefficiente di regressione della componente Relazione Dati risulta di poco non significativa ($P = .07$). Questo risultato rispecchia quello già descritto nel modello della comprensione del problema.

<i>indici</i>	
$\chi^2(86) =$	171,3
RMSEA =	.083 (LO = .06; HI = .10)
GFI =	.89
AGFI =	.83
CFI =	.89

Tab 6.8 Indici di Fit del modello

λ^y	RAPPRESENTAZIONE	RELAZIONE DATI	ABILITÀ SOLUZIONE
RA corr	.60		
CP dati	.56		
PIAN		.51	
CAT		.57	
Problemi Arit.			.83
Problemi Soft			.59
CP soluzione			.66

Tab 6.9 Stime Standardizzate Modello di Misurazione

λ^x	CONOSCENZA NUM.	COMPR. VERBALE	RAGIONAMENTO
ACMTtrasf	.74		
ACMTord	.61		
ACMTgiud	.25		
MTs		.67	
PMAsig_verb		.74	
CP_testo		.51	
PM47s			.62
PMArag			.61

Tab 6.10 Stime Standardizzate Modello di Misurazione

γ	CONOSCENZA NUMERICA	COMPRESIONE VERBALE	RAGIONAMENTO
RAPPRESENTAZIONE	.46	.74	
RELAZIONE DATI			.79

Tab 6.11 Stime Standardizzate Modello Strutturale

β	RAPPRESENTAZIONE	RELAZIONE DATI
ABILITÀ SOLUZIONE	.58	.48

Tab 6.12 Stime Standardizzate Modello Strutturale

ϕ	CONOSCENZA NUMERICA	COMPRESIONE VERBALE	RAGIONAMENTO
CONOSCENZA NUMERICA	1		
COMPRESIONE VERBALE	***	1	
RAGIONAMENTO	.43	.94	1

Tab 6.13 Covarianze Fra le Variabili Latenti Esogene

Il modello sembra nel suo complesso soddisfacente. Da un lato vengono confermate le relazioni fra soluzione dei problemi rappresentazione dati e relazione dati osservate nell'analisi precedente. Dall'altro sembrano accettabili le nostre ipotesi sui predittori dell'abilità di soluzione dei problemi. Certamente i risultati non escludono la presenza di ulteriori abilità di base per la spiegazione della soluzione dei problemi, ma per questo si rimanda a successivi approfondimenti.

7.8 Conclusioni

Il presente capitolo si apre con un confronto dei dati raccolti nel corso di tutto il lavoro descritto in questa sede con il modello della soluzione dei problemi

a cinque componenti elaborato da Lucangeli e collaboratori (1998). Una prima analisi della regressione è stata condotta inserendo i quattro indici di comprensione, rappresentazione, categorizzazione e pianificazione come predittori e la prova di soluzione dei problemi come criterio. I risultati hanno dimostrato che i quattro indici spiegano più del 52% di varianza della prova di soluzione dei problemi. Questo ci indica che le nostre misure, sviluppate appositamente per superare alcune criticità della misurazione delle componenti riscontrata in letteratura, confermano parzialmente il modello originario.

Una seconda analisi ha valutato la capacità predittiva del modello completo a cinque componenti. Su un gruppo ristretto di soggetti è stata testata l'abilità di autovalutazione, al fine di valutare il modello completo. In questo caso, tuttavia, né rappresentazione, né autovalutazione sono rientrate come predittori nel modello.

Per valutare le relazioni reciproche tra le variabili, è stata condotta una *path analysis*, riproducendo il modello originario di Lucangeli e coll.: la comprensione come prima variabile del modello che causa le restanti quattro e queste ultime che agiscono direttamente sulla soluzione. I risultati dell'analisi hanno mostrato che il modello originario non si adatta ai nostri dati. Le spiegazioni possibili sono due. O esiste un altro modello delle relazioni fra tali variabili, o le nostre misure sono inadeguate. Poiché le ragioni teoriche e metodologiche della scelta di tali variabili sono state ampiamente discusse nel corso del presente lavoro, e dal momento che complessivamente le quattro variabili si sono dimostrate ottimi predittori della soluzione dei problemi, si è ritenuto che le variabili rispondessero adeguatamente alle componenti che si intendeva misurare.

Una spiegazione teorica alternativa delle relazioni fra le variabili è stata discussa nel paragrafo quarto del presente capitolo. Tale ipotesi nasce sia dall'analisi della letteratura, sia dalla pratica clinica con bambini con difficoltà specifica di soluzione dei problemi, sia dall'esperienza di ricerca con i bambini nel contesto scolastico.

Il modello teorizzato rappresenta il processo di comprensione del problema e include i fattori che precedono l'esecuzione del problema. All'interno del modello, gli indicatori Rappresentazione e Comprensione dei dati esprimono un unico fattore latente di rappresentazione mentale degli elementi del problema

(rappresentazione dati). Le altre due variabili, Pianificazione e Categorizzazione misurano un secondo fattore latente che esprime la capacità di ragionare sulle incognite del problema e di conseguenza di individuare l'operazione adeguata per la soluzione. Questo processo consiste nel mettere correttamente i dati in relazione (relazione dati) si ritiene che a questo livello risiedano la maggior parte degli errori di risoluzione, errori comunque possono avvenire anche a livello della rappresentazione dati.

Il modello teorico è stato valutato mediante *Sem Analysis* riportando indici di adattamento soddisfacenti.

Un ulteriore modello è stato descritto che comprendesse anche i predittori della comprensione del problema, cioè quelle abilità di base o apprese che non sono specifiche per la soluzione del problema ma che ne costituiscono un prerequisito indispensabile. Il modello prevede che un fattore di “comprensione verbale” e un fattore di “conoscenza numerica” causino direttamente la variabile “rappresentazione dati”, questa variabile infatti esprime la sintesi fra gli aspetti verbali del testo e gli aspetti numerici. Un terzo fattore, “ragionamento”, agisce direttamente sul fattore “relazione dati”. Anche in questo caso il modello testato ha ottenuto indici di adattamento soddisfacenti. Il modello validato in questa sede rappresenta il processo di comprensione, o di codifica del problema, con la terminologia di Mayer. Si precisa che un modello teorico completo dovrebbe comprendere un fattore che esprime l'abilità procedurale, cioè la capacità di eseguire i calcoli. Il modello completo con la fase di comprensione e la fase di esecuzione è quello presentato in figura 7.7. Si rimanda a futuri approfondimenti l'analisi empirica di un modello comprensivo degli aspetti procedurali.

I vantaggi del modello sono molteplici. Per prima cosa consente di superare alcune ambiguità e di definire le funzioni delle variabili implicate in maniera dettagliata. Si presenta come economico, ma nel contempo ha grandi potenzialità esplicative per le difficoltà di risoluzione. È possibile analizzare gli errori tipici dei bambini di scuola primaria alla luce del modello. Infine, il modello non si presenta come alternativo al modello di Lucangeli e collaboratori, ma ne costituisce un approfondimento ed un'estensione teorica.

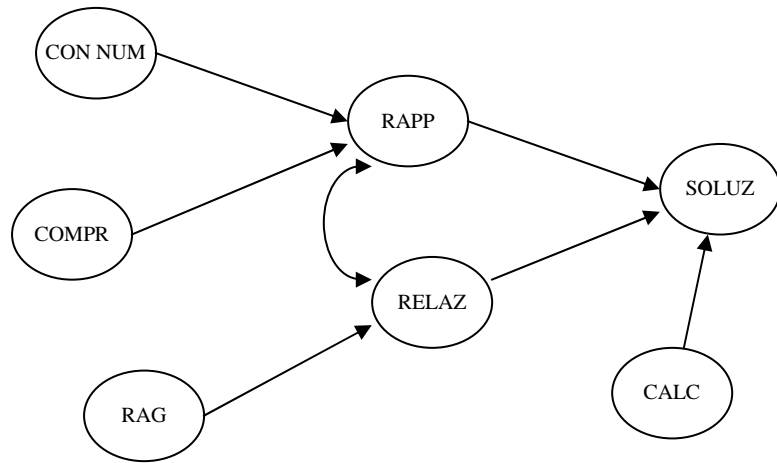


Fig. 7.3 Modello teorico dell'abilità di soluzione dei problemi

Conclusioni generali

La letteratura esaminata ha messo in evidenza un quadro articolato della ricerca sulla soluzione dei problemi aritmetici. In particolare studi di orientamento cognitivo hanno sviluppato ampiamente l'argomento descrivendo modelli del processo di risoluzione, individuando le funzioni e le componenti implicate. Il quadro teorico che ne deriva, seppur molto ricco, non sempre risulta del tutto esplicativo. La funzione e la natura di alcune variabili rimane in certi casi ambigua. In questo contesto, un modello che ha suscitato particolare interesse è quello sviluppato da Lucangeli, Tressoldi e Cendron (1998). L'interesse per questo modello risiede nel fatto che rappresenta una sintesi di molti studi e ha delle importanti implicazioni per la didattica e la clinica. Questo ed altri lavori di ricercatori italiani hanno messo in evidenza quali possono essere le cause delle difficoltà specifiche dei bambini in età scolare. Nonostante grazie a questi lavori siano state fatte molte acquisizioni, rimangono ancora degli aspetti poco chiari e delle criticità che costituiscono il punto di partenza del presente lavoro. L'obiettivo principale del lavoro, infatti, è stato quello di approfondire il ruolo specifico di ogni componente cognitiva implicata nella soluzione dei problemi. In particolare nel primo studio è stato approfondito il ruolo della comprensione del testo nella soluzione dei problemi, analizzando aspetti specifici della comprensione del testo narrativo da un lato e del testo del problema dall'altro. Nel secondo studio sono state analizzate tre componenti cognitive peculiari per la soluzione dei problemi, la rappresentazione, la categorizzazione e la pianificazione. Di ognuna di queste, in primo luogo si è tentato di chiarirne gli aspetti specifici e di conseguenza sono state individuate delle misure che ne cogliessero le specificità. Infine, si è cercato di delineare un modello complessivo che rendesse conto delle relazioni fra le variabili approfondite.

I risultati del primo studio hanno messo in luce risultati particolarmente interessanti circa il ruolo specifico della comprensione. In primo luogo si è messo in luce come la generica comprensione del testo sia un predittore fondamentale della soluzione dei problemi, più forte della stessa abilità matematica. In secondo luogo, si è osservato che alcuni aspetti della comprensione del testo assumono rilevanza maggiore per la soluzione del testo matematico. È il caso della comprensione della struttura sintattica del testo. Questa componente sembra avere

un ruolo preponderante rispetto a componenti inferenziali e alla capacità di fare collegamenti nel testo. Per fare questa analisi è stato necessario adattare una prova di comprensione del testo a questo scopo, si ritiene utile approfondire questo risultato in futuro con l'ausilio di strumenti più sensibili per l'analisi della comprensione del testo. Un ulteriore aspetto indagato ha riguardato meccanismi specifici di comprensione del testo matematico. Questa analisi è stata fatta costruendo uno strumento che permettesse di confrontare la comprensione di aspetti lessicali e di aspetti numerici del testo. I risultati hanno messo in evidenza che associare correttamente il dato numerico al referente verbale è di fondamentale importanza per la risoluzione del problema.

Il secondo studio ha in primo luogo confermato i dati della letteratura circa il ruolo di rappresentazione, categorizzazione e pianificazione nella soluzione dei problemi. La pianificazione è stata misurata con una prova che cogliesse la capacità del bambino di esplicitare le incognite intermedie del problema. Questa prova, fra le tre, si è dimostrata il migliore predittore della soluzione. La rappresentazione, misurata attraverso una prova che indicava la capacità di rappresentare gli elementi del problema nella giusta quantità, ha mostrato correlazioni soddisfacenti con la soluzione e ne è risultata predittore. Questa prova stata ritenuta un indice della rappresentazione mentale degli elementi del problema. La categorizzazione, intesa come capacità di raggruppare i problemi in base ad un criterio funzionale per la soluzione, ha mostrato correlazioni discrete con la soluzione e ne è risultata il predittore meno importante, ma comunque significativo. Questo risultato si distanzia da alcuni studi in cui la categorizzazione era risultata il migliore predittore della soluzione. L'analisi di abilità di livello di apprendimento ha confermato il ruolo della comprensione del testo e ha mostrato una influenza specifica dell'aspetto della conoscenza numerica rispetto alla conoscenza delle procedure. È stato ipotizzato che la conoscenza numerica giochi un ruolo importante nel processo di comprensione del problema mentre le procedure abbiano un ruolo specifico soltanto in una fase esecutiva del processo di risoluzione. L'indagine di abilità di base ha messo in luce che ragionamento non verbale, ragionamento analogico e vocabolario hanno un'influenza specifica sulla soluzione, mentre prove di abilità visuo-spaziale e di pianificazione cognitiva non mostrano una relazione significativa. Infine, la modalità pittorica o schematica di rappresentazione grafica del contenuto di un

problema è risultata significativamente correlata alla soluzione del problema, e alla rappresentazione degli elementi del problema. Al contrario, non si sono osservate differenze significative nelle abilità visuo-spaziali fra soggetti che rappresentano schematicamente e soggetti che rappresentano pittoricamente. Questo risultato ci ha spinto ad ipotizzare che il contenuto della rappresentazione mentale del problema potrebbe non avere caratteristiche visive o spaziali.

Infine, l'analisi complessiva delle componenti di comprensione, rappresentazione, categorizzazione e pianificazione ha dimostrato che questi quattro indici sono ottimi predittori della soluzione. Le nostre variabili, tuttavia, non hanno confermato la struttura del modello di Lucangeli e collaboratori, in cui la componente comprensione è sovraordinata alle altre, mentre queste risultano tra di loro indipendenti. Alla luce di una lunga riflessione teorica, è stato sviluppato un nuovo modello che implica correlazioni fra componenti e che alcune componenti siano espressione di un medesimo fattore latente. Il modello spiega i processi di comprensione del problema e presenta il vantaggio di superare alcune ambiguità e sovrapposizioni fra le componenti, e di specificarne più dettagliatamente le funzioni. Un secondo modello, estensione del primo, è stato descritto per comprendere i predittori della comprensione, cioè abilità non specifiche ma indispensabili per la soluzione del problema. Questi fattori comprendono la conoscenza numerica, la comprensione verbale e il ragionamento. Entrambi i modelli hanno mostrato indici di adattamento soddisfacenti.

In conclusione la ricerca ha esaminato e approfondito diversi aspetti dell'abilità di soluzione dei problemi, confermando in certi casi i dati della letteratura e fornendo in altri casi nuovi spunti e prospettive che meritano approfondimenti futuri.

Appendice

Prova di comprensione del problema testo e dati (CP)

IL PANDA

Il panda è un buffo, timido, simpatico “orsacchiottono” di abitudini ritirate, vive nelle 40 riserve naturali delle foreste di bambù del Tibet orientale e della Cina meridionale. Gli piace giocare, scivolare sull'erba e fare le capriole.

È molto bravo ad arrampicarsi sugli alberi grazie alle sue dimensioni ridotte. Il panda si nutre esclusivamente di germogli di bambù che mangia in grossa quantità dato che si tratta di un alimento poco nutriente. Infatti ne mangia all'incirca 12 chilogrammi al giorno.

Un po' per la sua rarità, un po' per il suo aspetto grazioso, quasi da animale di pezza, il panda è stato scelto come simbolo della più grande organizzazione internazionale per la conservazione degli animali, il Fondo Mondiale per la Natura (WWF).

Il panda è una specie in via di estinzione, per questo periodicamente viene verificato il numero totale di panda. Attualmente si contano 1590 esemplari che vivono in libertà e 161 che vivono negli zoo. Tranne che allo zoo di Pechino non si è mai riusciti a far riprodurre in cattività questo graziosissimo animale bianco e nero, che tutti chiamano orso ma che con gli orsi ha solo una lontana parentela, poiché appartiene alla stessa famiglia dei procioni.

Fortunatamente, il numero totale dei panda è aumentato notevolmente rispetto alla verifica passata, avvenuta nel 1988, che aveva contato in tutto 1110 animali.

Qual è oggi il numero di panda in più rispetto al 1988?

(IL) Il panda:

- A. Non ha voglia di farsi vedere e di mettersi in mostra.
- B. È contento se tutti lo guardano
- C. Ama vivere in compagnia di orsi e procioni

(D-IRR) Cosa indica il numero 40?

- A. Indica il numero di panda che vivono in cattività
- B. Indica il numero di panda nati negli ultimi anni
- C. Indica il numero di riserve naturali in cui vivono alcuni panda

(CI-SI-RP) Il panda è bravo a salire sugli alberi perché:

- A. È piccolo e agile
- B. È un animale molto forte
- C. In Cina ci sono alberi piccoli e bassi

(CI-SI) Il panda mangia molto bambù perché:

- A. ha molta fame
- B. il bambù è un alimento poco nutriente
- C. non c'è altro da mangiare

(D-IRR) Cosa indica il numero 12?

- A. Indica il numero di chilogrammi di riso che il panda mangia ogni giorno
- B. Indica il numero di panda nati negli ultimi anni
- C. Indica il numero di chili di bambù che il panda mangia ogni giorno

(D-R) Cosa indica il numero 1590?

- A. Indica il numero di panda che vivono nelle riserve naturali ed è un dato irrilevante per risolvere il problema
- B. Indica l'anno in cui sono stati contati tutti i panda per la prima volta
- C. Indica il numero di panda che vivono nelle riserve naturali ed è un dato importante per risolvere il problema

(D-R) Cosa indica il numero 161?

- A. Indica il numero di panda che vivono in cattività
- B. Indica il numero di panda viventi attualmente
- C. Indica il numero di panda morti negli ultimi anni

(RP) In che posto si è riusciti a far riprodurre il panda?

- A. A Roma
- B. In alcuni circhi di Pechino
- C. In alcuni zoo della Cina

(PLT) Possiamo dire che il panda:

- A. In realtà è proprio un orso di piccole dimensioni
- B. Appartiene alla stessa categoria di animali cui appartiene il procione
- C. È un animale amico dell'uomo e può vivere nelle nostre case

(D-R) Cosa indica il numero 1110

- A. il numero di panda viventi attualmente
- B. l'anno in cui sono stati osservati per la prima volta i panda
- C. il numero di panda viventi contati nel 1988

(EP) in questo brano l'argomento principale è:

- A. La vita e le abitudini del panda
- B. A cosa serve il bambù
- C. Come vivono gli orsi in Cina

(Domanda) Cosa devi trovare per risolvere il problema?

- A. Devo trovare il numero di panda che c'erano in Cina nel 1988
- B. Devo trovare il numero di panda che ci sono in più oggi rispetto al 1988
- C. Devo trovare il numero di panda che esistevano nel 1110

PRIMO GRUPPO DI PROBLEMI

La mamma ha preparato 2 teglie di biscotti, nella prima c'erano 24 biscotti al cioccolato e nella seconda 18 biscotti al latte. Quanti biscotti ha preparato in tutto?

La mamma oggi ha preparato 38 biscotti al latte e al cacao. Marco ne ha fatto una scorpacciata, ne ha mangiati ben 12! Quanti biscotti sono rimasti?

Sandro ha comprato 38 figurine e Luca ne ha comprate 12, quante figurine hanno comprato in tutto i due amici?

Sandro ha 24 figurine e gioca a mazzetti con Luca. Alla fine del gioco Sandro perde 18 figurine. Quante gliene restano?

In che modo hai raggruppato questi problemi?

COPPIA 1: *Per risolvere il problema bisogna addizionare*
 COPPIA 2: *Per risolvere il problema*

Esempio di prova categorizzazione (corretta)

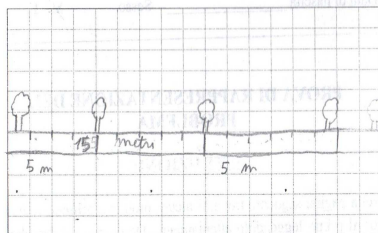
PROBLEMA 1

Un uomo ha piantato 1 albero in ciascuno dei 2 estremi di un piccolo sentiero. Poi ha piantato altri alberi ogni 5 metri lungo il sentiero. Se il sentiero è lungo 15 metri, quanti alberi ha piantato in tutto?

1. Chiudi gli occhi e immagina una rappresentazione del problema nella tua mente.

2. Prova a descrivere cosa hai immaginato:
ho immaginato un sentiero con due alberi ai estremi

3. Prova a rappresentare graficamente il problema:



4. Risposta *ho piantato quattro alberi*

5. Quello che hai immaginato ti è stato utile per risolvere il problema? NO

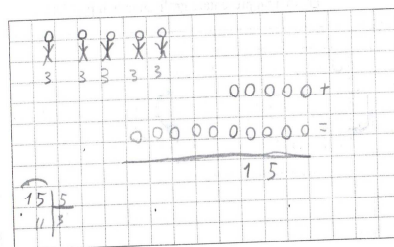
PROBLEMA 2

La nonna ha comprato 5 dolcetti al cioccolato e 10 alla panna e li ha distribuiti equamente ai suoi 5 nipotini. Quanti dolcetti ha avuto ciascun nipotino?

1. Chiudi gli occhi e immagina una rappresentazione del problema nella tua mente.

2. Prova a descrivere cosa hai immaginato:

3. Prova a rappresentare graficamente il problema:



IP=1

R=3

4. Risposta *ognuno avrà 3 caramelle*

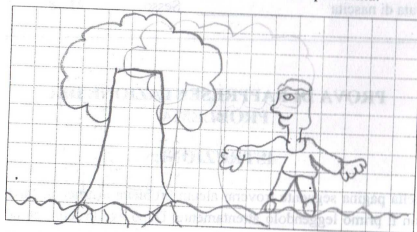
5. Quello che hai immaginato ti è stato utile per risolvere il problema? NO

Esempio di prova rappresentazione (corretta e schematica)

PROBLEMA 1

Un uomo ha piantato 1 albero in ciascuno dei 2 estremi di un piccolo sentiero. Poi ha piantato altri alberi ogni 5 metri lungo il sentiero. Se il sentiero è lungo 15 metri, quanti alberi ha piantato in tutto?

1. Chiudi gli occhi e immagina una rappresentazione del problema nella tua mente.
2. Prova a descrivere cosa hai immaginato:
3. Prova a rappresentare graficamente il problema:

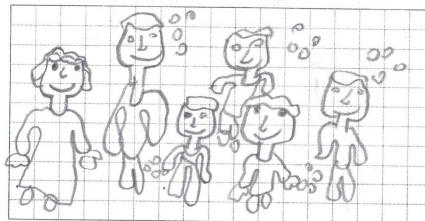


4. Risposta In tutto a piantato un albero
5. Quello che hai immaginato ti è stato utile per risolvere il problema? SI NO
 $= 0$
 $= 0$

PROBLEMA 2

La nonna ha comprato 5 dolcetti al cioccolato e 10 alla panna e li ha distribuiti equamente ai suoi 5 nipotini. Quanti dolcetti ha avuto ciascun nipotino?

1. Chiudi gli occhi e immagina una rappresentazione del problema nella tua mente.
2. Prova a descrivere cosa hai immaginato:
3. Prova a rappresentare graficamente il problema:



4. Risposta Ciò che un nipote ha avuto 4 dolcetti
5. Quello che hai immaginato ti è stato utile per risolvere il problema? SI NO
 $P = 0$
 $R = 0$

Esempio di prova rappresentazione (errata e pittorica)

PROVA DI PIANIFICAZIONE DEL PROBLEMA

Leggi attentamente i problemi seguenti e poi scrivi negli spazi sottostanti tutti i passaggi che faresti per risolverli, nell'ordine giusto.

PROBLEMA 1

Gianni oggi ha comprato 5 quaderni di diversi colori a € 1,5. Se Gianni ha pagato con una banconota da 10 €, quanto ha ricevuto di resto?

CON LA PRIMA OPERAZIONE
SI TROVA IL COSTO DI 5 QUADERNI
INVECE CON LA SECONDA IL
RESTO

PROBLEMA 2

Il furgone di Marcello può trasportare massimo 700 kg di merce. Oggi Marcello ha caricato sul suo furgone 20 casse di banane da 15 kg ciascuna e 12 casse di cocomero da 25 kg ciascuna. Quanti kg di merce potrà ancora caricare sul furgone?

- 1 CON LA PRIMA OPERAZIONE
- 2 SI TROVA IL KG DI BANANE
- 3 CON LA SECONDA IL KG DI COCOMERI
- 3 CON LA TERZA QUANTO KG DI MERCE

Esempio di prova pianificazione (corretta)

Bibliografia

- Anderson, T.H., Armbruster, B.B. (1986), *Readable textbooks, or, Selecting a textbook is not like buying a pair of shoes*, in Orasanu J., 1986, *Reading Comprehension: From Research to Praticce*, Hillsdale, LEA.
- Baddeley, A.D., (2000). The episodic buffer: A new component in working memory? *Trends in Cognitive Sciences*, 4, 417-423.
- Baddeley A.D. (1996). Exploring the central executive. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 49 (A), 5-28.
- Bartlett, F.C. (1932). *Remembering: A Study in Experimental and Social Psychology*. Cambridge University Press.
- Benjafield J.G. (1995). *Psicologia dei processi cognitivi*, Bologna: Il Mulino.
- Brown A.L. & Burton R.R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical. *Cognitive Science*, 2, 155-192.
- Cantor, J. e Engle, R.W. (1993), *Working-memory capacity as long-term memory activation: An individual-differences approach*, «Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition», n. 19, pp. 1101-1114.
- Carpenter T.P., Hiebert J. & Moser J.M. (1981). The effects of problem structure on first-grader's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for research in mathematic education*, 12 (1), 27-39.
- Carpenter T.P. & Moser J.M.(1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. In T.P. Carpenter, J.M. Moser e T.A. Romberg (a cura di), *Addition and subtraction: a cognitive perspective* (pp. 9-24), Hillsdale, N.J.: Erlbaum.
- Carretti, B De Beni, R e Cornoldi, C (2007), Disturbi della comprensione del testo. In C. Cornoldi *Difficoltà e disturbi dell'apprendimento* (pp. 143-162). Bologna, Il Mulino, 2007.
- Castellani P. (1999). L'«expertise», In V. Girotto e P. Legrenzi (a cura di), *Psicologia del pensiero* (pp. 175-201), Bologna : Il Mulino.
- Chi M.T.H., Feltovich P.J. & Glaser R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science*, 5, 121-152.

- Chiappe P., Hasher L. & Siegel L.S. (2000). Working memory, inhibitory control, and reading disability. *Memory & Cognition*, 28, 8-17.
- Claparède E. (1933). *La genèse de l'hypothèse. Etude expérimentale*. Trad. It. : *La genesi dell'ipotesi*, Giunti-Barbera, Firenze, (1972).
- Conway, A.R.A. e Engle, R.W. (1994), *Working Memory and Retrieval: A Resource-Dependent Inhibition Model* , in *Journal of Experimental Psychology: General*, 123, pp. 354-373.
- Cornoldi, C. Colpo G. (1998) Prove di Lettura M.T. per la Scuola Elementare – 2, Firenze, Organizzazioni Speciali.
- Cornoldi C., De Beni R. e Gruppo MT (1993), *Imparare a studiare*, Trento, Erickson
- Cornoldi C., De Beni R. e Pazzaglia F. (1996), *Profiles of reading comprehension difficulties: An analysis of single cases*. In C. Cornoldi e J. Oakhill (a cura di), *Reading comprehension difficulties: Processes and intervention*, Mahwah, NJ, Erlbaum, pp.113-136.
- Cummins D.D. (1991). Children's interpretations of arithmetic word problem. *Cognition and Instruction*, 8 (3), 261-289.
- D'Amico A , La Porta, R. (2020) La comprensione del testo del problema aritmetico: aspetti narrativi ed aspetti numerici. *Difficoltà in matematica*. Trento, Erickson
- .Passolunghi M. C. (2009). Naming speed and Effortful and Automatic Inhibition in Children with Arithmetic Learning Disabilities. *Learning and Individual Differences*, 19, 170-180.
- D'Amico A., Passolunghi M. e La Porta R., (2009), *Risolvere problemi aritmetici* (CD-Rom), Trento, Erickson.
- Daneman, M. e Carpenter P.A. (1980). Individual differences in working memory and reading. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behaviour*, 19, 450-466.
- Darley J.M., Glucksberg S. & Kinchla R.A. (1993). *Psicologia*, Bologna: Il Mulino.
- De Beni, R e Pazzaglia F. (1995), *La comprensione del testo. Modelli teorici e programmi di intervento*, Torino, Utet.
- De Beni, R., Cornoldi, C. Carretti, B. Meneghetti, C. (2003), *Nuova guida alla comprensione del testo. Introduzione teorica generale al programma. Prove*

- criteriali livello A e B. Trento, Erickson De Candia C., Cibinel N. e Lucangeli D. (2009) *Risolvere problemi in 6 mosse*. Trento: Erickson
- De Corte E., Verschaffel L. & Dewin L (1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions. *Journal of Educational Psychology*, 77 (4), 460-470.
- De Corte E. & Verschaffel L. (1987). Using retelling data to study young children's word problem-solving. In J. Sloboda e D. Rogers (a cura di), *Cognitive processes in mathematics*, Oxford: Oxford University Press.
- De Corte E., Verschaffel L. & Pauwels A. (1990). Influence of the semantic structure of word problems on second graders' eye movements. *Journal of educational psychology*, 82, 359-365.
- De Groot A.D. (1965). *Thought and choice in chess*, L'Aia: Mouton.
- Duncker K. (1935). *Zur Psychologie des productive Denkens*, Berlin : Denkens Springer; trad. it. *La psicologia del pensiero produttivo*, Firenze : Giunti-Barbera, (1969).
- Engle R.W., Tuholski S.W., Laughlin J.E. & Conway A.R. (1999). Working memory, short-term memory, and general fluid intelligence: A latent variable approach. *Journal of Experimental Psychology: General*, 128, 309-331.
- Ericsson K.A. & Hastie R. (1994). Contemporary approaches to the study of thinking and problem solving. In R.J.Sternberg (a cura di), *Thinking and problem solving*, New York: Academic Press.
- Ericsson K.A. & Kintsch W. (1995). Long-term working memory. *Psychological Review*, 102, 211-245.
- Gernsbacher M.A. (1993). Less skilled readers have less efficient suppression mechanisms. *Psychological Science*, 4, 294-298.
- Gernsbacher M.A., Varner K.R. e Faust M.E. (1990), Investigating Differences in General Comprehension Skill, «*Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*», vol. 16, 430-445
- Glanzer, M., Dorfman, D., & Kaplan, B. (1981). Short-Term Storage in the Processing of Text. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior*, 20(6), 656-670.

- Greeno J.G. (1980). Some examples of cognitive task analysis with instructional implications. In R.E. Snow, P. Federico e W.E. Montague (a cura di), *Aptitude, learning and instruction*, Hillsdale, N.J.: Erlbaum.
- Greeno J.G. & Riley M.S. (1981). *Processes and development of understanding*, Pittsburgh,Pa: Learning research and development Center, University of Pittsburgh.
- Greeno J.G., & Riley, M.S. (1987). Processes and Development of Understanding, in R.E. Weinert e R.H. Kluwe (a cura di), *Metacognition, Motivation, and Understanding* (pp.289-313), Hillsdale N.J. : Lawrence Erlbaum Associates.
- Hayes J.R. (1981). *The Complete Problem Solver*, Philadelphia : Franklin Institute Press.
- Hegarty, M. & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, 91, 684-689.
- Hegarty M., Mayer R.E. & Green C.E. (1992). Comprehension of arithmetic word problems: evidence from students' eye fixations. *Journal of educational psychology*, 84, 76-84.
- Hegarty M., Mayer R.E. & Monk C.A. (1995) Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of educational psychology*, 87 (1),18-32.
- Heller J.I. & Greeno J.G. (1978). *Semantic processing in arithmetic word problem solving*. Paper presented at the Midwestern Psychological Association Convention, Chicago, May 1978.
- Hinsley D.A., Hayes J.R. & Simon H.A. (1978). From words to equations: Meaning and representation in algebra word problems. In P.A. Carpenter e M.A. Just (a cura di), *Cognitive processes in comprehension*, Hillsdale.N.J.: Erlbaum.
- Hudson T. (1980). Young children's difficulty with "How many more ____ than ____ are there?" questions. (Doctoral dissertation, Indiana University,1980). In *Dissertation Abstracts International*, July 1980, 41 (01).
- Ibarra C. G. & Lindvall C.M.(1979). *An investigation of factors associated with children's comprehension of simple story problems involving addition and subtraction prior to formal instruction on these operations*. Paper presented

- at the annual meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, Boston, April 1979.
- Jastack S. & Wilkinson G.S. (1993). *Wide range achievement test-revised*, Wilmington, DE: Jastak Associates.
- Jeffries R., Turner A.A., Polson P.G. & Atwood M.E. (1981). The Processes Involved in Designing Software, in J.R. Anderson (a cura di), *Cognitive Skills and Their Acquisition*, Hillsdale, N.J.: Erlbaum.
- Jerman M. (1973). Problem length as a structural variable in verbal arithmetic problems. *Educational studies in mathematics*, 5, 109-123.
- Just M.A. & Carpenter P.A. (1987). *The psychology of reading and language comprehension*, Newton, MA: Allyn & Bacon.
- Just M.A., Carpenter P.A. & Keller T.A. (1996). The capacity theory of comprehension: New frontiers of evidence and arguments. *Psychological Review*, 103, 773-780.
- Kanizsa G. (1973). Il «problem solving» nella psicologia della Gestalt. In G. Mosconi e V. D'Urso (a cura di), *La soluzione dei problemi*, Firenze: Giunti-Barbera.
- Kintsch W. & Greeno J.G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92(1), 109-129.
- Kintsch W & van Dijk T (1978) A. Toward a model of text comprehension and production. *Psychol. Rev.* 85:363-94,.
- Köhler W.(1921). *Intelligenzprüfungen an Menschenaffen*, Berlin: Springer Verlag; trad. It. *L'intelligenza delle scimmie antropoidi*, Firenze: Giunti (1968) .
- Krutetskii, V. A. (1976). The psychology of mathematical abilities in schoolchildren. Chicago: University of Chicago Press.
- Larkin J.H. (1980). Teaching Problem Solving in Physics : The Psychological Laboratory and the Practical Classroom, in D.T. Tuma e E. Reif (a cura di), *Problem Solving and Education: Issues in Teaching and Research*, Hillsdale N.J.: Erlbaum.
- Lean, C, & Clements, M. A. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 267-299.

- Le Blanc M.D. & Weber- Russell S. (1996). Text Integration and Mathematical Connections: a Computer Model of Arithmetic Word Problem Solving. *Cognitive Science*, 20, 357-407.
- Lewis A.B. (1989). Training students to represent arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 81,521-531.
- Loftus E.J.F. & Suppes P. (1972). Structural variables that determine problem solving difficulty in computer-assisted instruction. *Journal of educational psychology*, 63 (6), 531-542.
- Logie, R. H. (1995). Visuo-spatial working memory. Hillsdale, NJ:Erlbaum.
- Logie R.H., Gilhooly K.J. & Wynn V. (1994). Counting on working memory in arithmetic problem solving. *Memory & Cognition*, 22, 395-410.
- Lucangeli D. & Cornoldi C. (1995). Metacognizione e matematica, in O. Albanese, P.A. Doudin e D. Martin (a cura di), *Metacognizione ed educazione*, Milano : Franco Angeli.
- Lucangeli D. & Passolunghi M.C. (1995). *Psicologia dell'apprendimento matematico*, Torino: Utet
- Lucangeli D., Tressoldi P.e. & Cendron M. (1998a). Cognitive and metacognitive abilities involved in the solution of mathematical word problems: validation of a comprehensive model. *Contemporary educational psychology*, 23, 257-275 .
- Lucangeli D., Tressoldi P.E. & Cendron M. (1998b). *SPM. Test di abilità di soluzione dei problemi matematici*, Trento: Erickson.
- Luria A.R. & Tsvetkova L.S., 1967, The Programming of Constructive Activity in Local Brain Injuries, *Neuropsychologia*, 2,95-107.
- Mayer R.E. (1981). Frequency norm and structural analysis of algebra story problems. *Instructional Science*, 10, 135-175.
- Mayer R.E., Larkin J.H. & Kadane J. (1984) A cognitive analysis of mathematical problem solving ability, In R. Sternberg (a cura di), *Advances in the psychology of human intelligence*, Hillsdale, N.J.: Erlbaum.
- Mayer R.E. (1987). Learnables aspects of problem solving: some examples. In D.E. Berger, K. Pezdek e W.P. Banks (a cura di), *Applications of cognitive psychology: problem solving, education and computing*, Hillsdale, N.J.: Erlbaum.
- Mayer R.E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition*, New York: Freeman.

- McDermott J. & Larkin J.H.(1978). Re-representing textbook physics problems. *Proceeding of the 2nd National Conference of the Canadian Society for Computational Studies of Intelligence*, Toronto: University of Toronto Press.
- Miller G.A., Galanter E. & Pribram K. (1960). *Plans and the structure of behavior*, New York: Holt, Rinehart & Winston; trad. It. *Piani e struttura del comportamento*, Milano: Angeli (1992).
- Montague M. (1992). The effects of cognitive and metacognitive strategy instruction on the mathematical problem solving of middle school students with learning disabilities. *Journal of learning disabilities*, 25, 230-248.
- Morales, R.V., Shute, V.J., & Pellegrino, J. W. (1985). Developmental differences in understanding and solving simple mathematics word problems. *Cognition and Instruction*, 2, 41–57.
- Morris N. & Jones D.M. (1990). Memory updating in working memory: the role of central executive. *British Journal of Psychology*, 81, 11-121.
- Mosconi G. (1988). Ristrutturazione e processo. In G. Kanizsa e N. Caramelli (a cura di), *L'eredità della psicologia della Gestalt* (pp.165-181), Bologna: Il Mulino.
- Newell A. & Simon H.A. (1972). *Human problem solving*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall.
- Newell A. (1983). The heuristic of George Polya and its relation to artificial intelligence. In R. Groner e M. Groner (a cura di), *Methods of heuristics*, Hillsdale, N.J.: Erlbaum.
- Palladino P., Cornoldi C., De Beni R. & Pazzaglia F. (2002). Working memory and updating processes in reading comprehension. *Memory and Cognition*, 29, 344-354.
- Passolunghi M.C. & Bizzarro M. (2005). *Risolvere Problemi Aritmetici. Attività su comprensione, rappresentazione, memoria e updating*. Trento: Erickson.
- Passolunghi M.C., Lonciari I., & Cornoldi C., (1996). *Abilità di pianificazione, comprensione, metacognizione e risoluzione di problemi aritmetici di tipo verbale*. *Età Evolutiva*, 54, 36-48.
- Passolunghi M.C., Cornoldi C. & Lonciari I. (1994). *Abilità di pianificazione nella risoluzione di problemi aritmetici di tipo verbale*, Atti del Congresso nazionale Airipa su “Problemi di attenzione e comportamento nei disturbi di apprendimento”, Ferrara.

- Passolunghi M.C. & Pazzaglia F. (2004). Individual differences in memory updating in relation to arithmetic problem solving. *Learning and Individual Difference, 14*, 219-230.
- Perfetti C. (1985). *Reading ability*. New York: Oxford Press.
- Perticone G. (2008). *Problemi senza Problemi*. Trento: Erickson
- Porteus S.D. (1950). *The Porteus Maze test and intelligence*, Palo Alto: Pacific books; trad.it. *Il test del labirinti*, Firenze: Organizzazioni speciali (1955).
- Resnick L.B. & Ford W.W. (1981). *The Psychology of mathematics for instruction*, Hillsdale N.J. : Erlbaum.
- Riley M.S. (1981). *Conceptual and procedural knowledge in development*. Unpublished Master's thesis, University of Pittsburgh.
- Riley M.S., Greeno J.G. & Heller J.J. (1983). Developments of children's problem-solving ability in arithmetic. In H.P. Ginsburg (a cura di), *The development of mathematical thinking*, New York: Academic Press.
- Riley M.S. & Greeno J.G. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction, 5*, 49-101.
- Salthouse T.A. (1996). The processing-speed theory of adult age differences in cognition. *Psychological Review, 103*, 403-428.
- Schoenfeld A.H. (1981). Episodes and executive decisions in mathematical problem solving, *relazione presentata all'Area Annual Meeting, Los Angeles*.
- Schoenfeld A.H. (1985). *Mathematical problem solving*, Orlando, FL: Academic Press.
- Serafini G. (1999). Soluzione dei problemi e creatività. In V. Girotto e P. Legrenzi(a cura di), *Psicologia del pensiero*(pp. 65-89), Bologna: Il Mulino.
- Siegel, L.S., & Ryan, E.B. (1989). The development of working memory in normally achieving and subtypes of learning disabled children. *Child Development, 60*, 973-980.
- Simon H.A. (1975). The Functional Equivalence of Problem Solving Skills. *Cognitive Psychology, 7*, 268-288.
- Simon H.A. (1979). Information processing model of cognition. *Annual Review of Psychology, 30*, 363-396.

- Simon H.A., Newell A. & Shaw J.C.(1962). The processes of creative thinking. In H.E. Gruber, G. Terrel e M. Wertheimer(a cura di), *Contemporary approaches to creative thinking* (pp.63-119), New York: Lieber-Atherton, Inc.
- Steffe L.P. & Johnson D.C. (1971) Problem-solving performance of first-grade children. *Journal for research in mathematics education*, 2, 50-64.
- Swanson H.L. (2003). Age-related differences in learning disabled and skilled reader's working memory. *Journal of Experimental Child Psychology*, 85, 1-31.
- Swanson H.L. & Beebe-Frankenberger M. (2004). The Relationship Between Working Memory and Mathematical Problem Solving in Children at Risk and Not at Risk for Serious Math Difficulties. *Journal of Educational Psychology*, 96 (3), 471-491.
- Swanson H.L. & Sachse-Lee C. (2001). Mathematic problem solving and working memory in children with learning disabilities: Both executive and phonological processes are important. *Journal of Experimental Child Psychology*, 79, 294-321.
- Thorndyke E.L. (1898). Animal intelligence: an experimental study of the associative process in animals. *Psychological Review Monographs Supplement*, 2, 8.
- Thurstone L.L. & Thurstone T.G.(1941). "Factorial studies of intelligence", *Psychometric Monographs*, vol.2; trad. it.: *PMA-Batteria Primaria di Abilità*, Firenze: Organizzazioni speciali (1968)
- Van Dijk T.A. & Kintsch W. (1983). *Strategies of discourse comprehension*, New York : Academic Press.
- Van Garderen D. & Montague M., (2003) visual-spatial representation, Mathematical Problem Solving, and Students of Varying Abilities, *Learning Disabilities Research & Practice*,18 (4), 246-254
- Verschaffel L. (1984). *Representatie en oplossingsprocessen van eersteklassers bij aanvankelijke redactie-opgaven over optellen en aftrekken. Een theoretische en methodologische bijdrage op basis van een longitudinale kwalitatief- psychologische studie.*[first graders' representation and solution processes for simple addition and subtraction word problems. A theoretical and methodological contribution based on a longitudinal qualitative-

- psychological study]. Unpublished doctoral dissertation, University of Leuven, Leuven, Belgium.
- Wechsler, D. (1976). *Wechsler Intelligence Scale for Children-Revised*. San Antonio, TX: Psychological Corporation.
- Wertheimer M. (1922). Untersuchungen zur Lehre von der Gestalt I. *Psychologische Forschung, 1*, 47-58.
- Wertheimer M. (1945). *Productive thinking*, New York: Harper; trad. It. *Il pensiero produttivo*, Firenze: Giunti-Barbera (1965).
- Yuill, N. M., Oakhill, J. V., & Parkin, A. J. (1989). Working memory, comprehension ability and the resolution of text anomaly. *British Journal of Psychology, 80*, 351-361.