



# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PALERMO

Dipartimento di Ingegneria Elettrica, Elettronica, delle  
Telecomunicazioni, di tecnologie Chimiche, Automatica e  
modelli Matematici

**Dottorato in Ingegneria Elettrica**

---

## APPLICAZIONE E CONTROLLO DELLE CELLE A COMBUSTIBILE DI TIPO PEM AI SISTEMI DI GENERAZIONE DISTRIBUITA

Tesi di:

**ing. Angelo Accetta**

Tutors:

**prof. ing. Luigi Dusonchet**

Coordinatore del Dottorato:

**prof. ing. Mariano  
Ippolito**

**ing. Marcello Pucci**

---

XXIII° CICLO

S.S.D. ING-IND/33 "SISTEMI ELETTRICI PER L'ENERGIA"

---

# Indice

<b>Riconoscimenti</b>	<b>iii</b>
<b>Introduzione</b>	<b>iv</b>
<b>1 Le celle a combustibile: applicazioni e modellistica</b>	<b>1</b>
1.1 Introduzione . . . . .	1
1.2 Principio di funzionamento . . . . .	3
1.2.1 Celle a combustibile PEM . . . . .	5
1.3 Le celle a combustibile per trazione elettrica . . . . .	7
1.3.1 Controllo dei flussi di reagenti . . . . .	9
1.3.2 Controllo della temperatura . . . . .	11
1.3.3 Controllo dell'acqua . . . . .	12
1.3.4 Controllo dell'energia . . . . .	12
1.3.5 Il modello matematico . . . . .	13
1.4 I sistemi ausiliari . . . . .	13
1.4.1 Il compressore . . . . .	15
1.4.2 I collettori . . . . .	25
1.4.3 Il refrigeratore . . . . .	29
1.4.4 L'umidificatore . . . . .	30
1.5 La cella a combustibile . . . . .	32
1.5.1 Il sottosistema di tensione . . . . .	33
1.5.2 Il sottosistema catodico . . . . .	42
1.5.3 Il sottosistema anodico . . . . .	48
1.5.4 Il sottosistema di idratazione . . . . .	52
<b>2 La risoluzione dei problemi di controllo predittivo</b>	<b>56</b>
2.1 I fondamenti del controllo predittivo . . . . .	56
2.1.1 La funzione di costo . . . . .	57
2.1.2 Il calcolo della predizione . . . . .	59
2.2 La formulazione del problema . . . . .	61
2.2.1 Il controllore non vincolato . . . . .	62
2.2.2 Il controllore vincolato . . . . .	66

2.3	Metodi di Programmazione Quadratica . . . . .	69
2.3.1	Programmazione Quadratica con vincoli di eguaglianza . . . . .	69
2.3.2	Programmazione Quadratica con vincoli di disegua- glianza . . . . .	70
2.4	L'implementazione del controllore . . . . .	74
<b>3</b>	<b>Progettazione e realizzazione del banco di prova</b>	<b>80</b>
3.1	L'emulatore del FCS . . . . .	80
3.2	L'inverter di connessione con la rete . . . . .	87
3.3	Il boost converter . . . . .	95
<b>4</b>	<b>Risultati Sperimentali</b>	<b>98</b>
4.1	Risultati di simulazione per il MPC . . . . .	98
4.1.1	Test 1 – static feed–forward . . . . .	101
4.1.2	Test 2 – MPC non vincolato . . . . .	102
4.1.3	Test 3 – MPC vincolato . . . . .	103
4.2	Risultati sperimentali per il MPC . . . . .	105
4.2.1	Test 1 – carico resistivo . . . . .	109
4.2.2	Test 2 – carico resistivo e DC motor . . . . .	113
4.3	Risultati sperimentali per l'inverter . . . . .	118
	<b>Conclusioni</b>	<b>126</b>
	<b>Appendice</b>	<b>129</b>
	<b>Elenco delle figure</b>	<b>149</b>
	<b>Elenco delle tabelle</b>	<b>151</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>152</b>

---

## **Riconoscimenti**

Questa tesi, concernente la progettazione e lo sviluppo di un banco di prova per l'applicazione e il controllo delle celle a combustibile di tipo PEM ai sistemi di generazione distribuita, è stata realizzata in collaborazione con l'Istituto di Studi sui Sistemi Intelligenti per l'Automazione (ISSIA) del Consiglio Nazionale delle Ricerche (CNR). Si ringraziano pertanto l'ing. Marcello Pucci, l'ing. Gianpaolo Vitale e i tecnici Giuseppe Scordato e Antonio Sauro, per la loro collaborazione a questo lavoro.

Si ringrazia il prof. Luigi Dusonchet, del Dipartimento di Ingegneria Elettrica, Elettronica, delle Telecomunicazioni, di tecnologie Chimiche, Automatica e modelli Matematici (DIEETCAM) dell'Università degli Studi di Palermo per la sua collaborazione e la piena disponibilità mostrata durante lo svolgimento del dottorato di ricerca.

Infine, si ringrazia il prof. Maurizio Cirrincione, dell'Università Tecnologica di Belfort–Montbéliard, per il prezioso contributo apportato.

---

## **Introduzione**

I sistemi cella a combustibile (*Fuel Cell Systems*, FCS) avranno un ruolo sempre maggiore nello sviluppo futuro dello scenario energetico. Infatti, la crisi dei combustibili fossili, che ha avuto origine qualche decennio fa e che si sta sempre più esacerbando in questi anni, fa sì che l'attenzione della comunità scientifica si sposti su metodi alternativi e rinnovabili di produzione dell'energia elettrica. Oramai è divenuta prassi comune considerare ciascun utente della rete elettrica come un potenziale produttore, nell'ottica della *generazione distribuita*.

La singola cella a combustibile è un dispositivo che eroga energia elettrica a basso voltaggio, dunque per ottenere una tensione adeguata alla maggior parte delle applicazioni elettriche è necessario connetterne un certo numero in serie, ottenendo ciò che è comunemente chiamato uno *stack* di celle. Tuttavia, lo stack di celle deve essere affiancato ad altre apparecchiature ausiliarie al suo funzionamento; per questo motivo è preferibile riferirsi non già alla cella a combustibile, bensì al *sistema* cella a combustibile, di seguito denominato per semplicità FCS (Fuel Cell System). Il FCS è normalmente composto da cinque sottosistemi interagenti, quelli per la gestione dei reagenti chimici consumati nelle reazioni, idrogeno ed ossigeno, quello per il controllo della temperatura, quello per il controllo dell'umidità della membrana polimerica ed infine quello per la gestione dell'energia elettrica erogata dal sistema; in particolare, data l'incapacità della cella a combustibile di reagire rapidamente ad improvvisi e consistenti aumenti di carico, è necessario installare dispositivi "tamponi", quali batterie e supercondensatori, nonché un convertitore DC/DC per mantenere costante il valore della tensione erogata dal FCS [1].

Sebbene il FCS possa essere impiegato in numerosi campi, dalla trazione elettrica alla generazione distribuita, proprio in quest'ultimo può trovare una più immediata applicazione, non avendo vincoli stringenti riguardo alle dimensioni ed al peso dell'impianto. È allora possibile immaginare il FCS come elemento centrale di un'unità di generazione distribuita. Un sistema di generazione distribuita è quindi composto da un generatore e da dispositivi per l'immagazzinamento temporaneo di energia elettrica (batterie, supercondensatori), connessi mediante convertitori ad un medesimo DC link. Detto

DC link è inoltre connesso, tramite un raddrizzatore od un convertitore bidirezionale, alla rete elettrica, a seconda che sia prevista o meno la possibilità di erogare in rete l'energia prodotta in eccesso. Una tale unità produttiva potrebbe essere utilmente impiegata in ambito agricolo od industriale, dove cioè vi sia difficoltà nella fornitura di energia elettrica o dove si voglia ridurre il quantitativo di energia prelevata dalla rete elettrica.

I FCS, grazie alla loro capacità di convertire l'energia chimica immagazzinata nell'idrogeno in energia elettrica e al loro ridotto ingombro, ben si prestano all'utilizzo come generatori distribuiti di piccola e media potenza. È facile immaginare la loro applicazione sia come generatori domestici sia come parte di un sistema di generazione multisorgente fotovoltaico-eolico.

Tuttavia, i FCS soffrono di alcuni difetti peculiari, quali la gestione della temperatura, l'incapacità di reagire prontamente a grandi variazioni di carico, la facilità con cui la membrana elettrolitica, "cuore" della cella, si degrada e si lesiona. A questo si deve aggiungere la difficoltà di realizzare un efficace sistema di controllo della cella; il FCS è infatti formato da vari sottosistemi, fra di loro interagenti. Ogni sottosistema deve soddisfare determinati vincoli, pena l'instabilità o il malfunzionamento del sistema globale. Le metodologie solitamente utilizzate per il controllo dei sistemi si mostrano quindi inefficienti nell'applicazione al controllo dei FCS. In un precedente lavoro [2], si è dimostrato come il controllo predittivo orientato al modello (Model Predictive Control, MPC) sia invece ottimale per il controllo del FCS, in quanto orientato al controllo MIMO e la semplice gestione dei vincoli lineari.

In questo lavoro si approfondirà innanzitutto il controllo predittivo applicato al FCS: il controllore sarà sviluppato in modo da ottenere un software *open source*, slegato cioè da qualsiasi toolbox commerciale e per questo sia liberamente modificabile, sia ottimizzabile, eliminando i contenuti non necessari per il controllo del FCS. Il software ottenuto sarà quindi spiegato nella sua implementazione e riportato per intero in questo lavoro.

Sarà inoltre progettato e realizzato un banco di prova sperimentale, in modo da poter verificare il controllore predittivo in condizioni reali, con segnali di retroazione corrotti da rumore e interazione con rete elettrica. A questo scopo si utilizzerà un emulatore del FCS, progettato e realizzato in questo lavoro. L'emulatore permetterà di verificare gli effetti del controllore predittivo senza il rischio di danneggiare un FCS reale, permettendo quindi un *tuning* più preciso.

Infine, diverse metodologie di controllo dell'inverter di interfaccia con la rete saranno studiate e confrontate, in modo da poter verificare i vantaggi e gli svantaggi che ciascuna di loro offre per quanto concerne la qualità dell'energia elettrica erogata in rete. Caratteristica questa che non deve essere sottovalutata, sia per il rispetto delle raccomandazioni che l'ente normato-

*Applicazione e Controllo delle Celle a Combustibile di Tipo PEM ai Sistemi di  
Generazione Distribuita*

---

re emette, sia per le potenziali implicazioni nell'ambito della generazione distribuita.

## CAPITOLO 1

---

### **Le celle a combustibile: applicazioni e modellistica**

Le celle a combustibile sono dispositivi elettrochimici che convertono l'energia chimica dell'idrogeno in energia elettrica. Per le loro precipue caratteristiche, possono essere utilizzate come una potenziale alternativa alle sorgenti di energia statiche e portatili. Esse costituiscono, nell'ambito della trazione, un'efficace alternativa ai motori a combustione interna e possono così ridurre la dipendenza dai combustibili fossili; similmente, nel campo della generazione distribuita, possono essere considerati dei validi sostituti ai gruppi elettrogeni. Hanno perciò profonde ripercussioni in materia di protezione dell'ambiente [3].

#### **1.1 Introduzione**

Allo stato attuale, la ricerca sulle celle a combustibile è incentrata sul loro utilizzo come generatori statici di energia, anche in ambito residenziale, e sul campo della trazione elettrica. Nel 2002, L'Environmental Protection Agency (EPA) statunitense ha mostrato che, solo negli Stati Uniti d'America, il biossido di carbonio ( $CO_2$ ) costituisce più dell'80% dei gas serra rilasciati nell'atmosfera e che il settore trasporti è responsabile del 32% delle emissioni totali di  $CO_2$ ; lo stesso settore è il responsabile dell'emissione del 60% del monossido di carbonio ( $CO$ ) mondiale, causa di diverse patologie respiratorie nell'essere umano [4]. Studi più recenti [5] mostrano che la generazione elettrica incide per il 42% sulla produzione di  $CO_2$ , e l'incidenza del settore trasporti rimane di fatto inalterata, segno questo che la ricerca sulle celle a combustibile non ha ancora raggiunto un livello tale da consentirne una diffusione industriale.

Le celle a combustibile continuano ad avere in questi anni un intenso sviluppo, condotto parallelamente da diversi produttori, in special modo per



motori termici	rendimento al serbatoio	rendimento alle ruote	rendimento globale
motore diesel	85 – 90%	25%	21 – 23%
motore a benzina	80 – 85%	20%	16 – 17%
motori ibridi			
diesel – elettrico	85 – 90%	32 – 39%	27 – 34%
FCS a metano	40 – 60%	37 – 52%	15 – 31%
FCS a biomassa	< 50%	37 – 52%	18 – 26%
FCS ad idrogeno	15 – 25%	37 – 52%	5,5 – 13%

Tabella 1.1: Rendimento dal combustibile alla ruota per diverse tipologie di trazione

quanto riguarda le celle a combustibile con *Membrana a Elettrolita Polimerico*, anche detta *Membrana a Scambio protonico*, in acronimo *PEM*, dall'inglese *Polymeric Electrolyte Membrane* o *Proton Exchange Membrane*, che sono considerate da molti in uno stadio di sviluppo più avanzato per quanto riguarda le applicazioni di trazione elettrica.

Le celle a combustibile di tipo PEM hanno un'alta densità di potenza, un elettrolita solido, una maggiore durata della cella, nonché bassa corrosione. Hanno inoltre un'efficienza maggiore, se paragonate ai motori a combustione interna<sup>1</sup>, pertanto è possibile immaginare un promettente sviluppo nel campo della generazione modulare di energia e della propulsione con energia elettrica; infatti, le celle a combustibile hanno un alto rendimento in corrispondenza alla maggioranza dei cicli urbani ed extraurbani. Considerando una velocità di crociera pari a  $50 \text{ km/h}$ , il rendimento di una vettura elettrica alimentata da una cella a combustibile è pari al doppio del rendimento di una vettura con motore a combustione interna [6]. L'utilizzo dell'idrogeno puro come combustibile permette di eliminare le emissioni locali di gas di scarico, con evidenti vantaggi, specie per la circolazione nei centri urbani densamente popolati. Infine, la realizzazione di una rete di produzione e distribuzione di idrogeno puro, basata sulla generazione di energia elettrica a partire da fonti rinnovabili, potrebbe abbattere cospicuamente la dipendenza dai combustibili fossili.

Tuttavia, i dati sopra riportati sono validi solo se si trascura l'energia necessaria alla produzione di idrogeno; supponendo di generare idrogeno a partire dall'elettrolisi dell'acqua, prelevando l'energia elettrica necessaria dalla

---

<sup>1</sup>Una cella a combustibile ha un rendimento del 40% circa, mentre un motore Diesel ha un rendimento massimo del 25%.

rete di distribuzione e trascurando il rendimento degli impianti di produzione, deve essere tenuto in conto il rendimento del processo di elettrolisi, circa pari al 75%, e il rendimento del processo di distribuzione e stoccaggio dell'idrogeno, pari al massimo al 90%. Sotto queste ipotesi, il rendimento di un'automobile elettrica dotata di cella a combustibile è circa pari al 25%, paragonabile a quello di un motore diesel. Nell'ipotesi di generare idrogeno a partire da gas naturale, il rendimento globale sarebbe pari al 28%, essendo pari al 70% il rendimento del processo di *reforming*. Sulla base dei dati forniti dall'Istituto Francese del Petrolio [7] e riportati in Tabella 1.1, risulta evidente che, allo stato attuale di sviluppo, un'applicazione dei sistemi cella a combustibile alla trazione elettrica è possibile solo considerando i sistemi alimentati a metano con reformer installato a bordo.

Per competere con i motori a combustione interna, le celle a combustibile devono avere prestazioni simili. Le prestazioni dinamiche sono uno dei requisiti chiave per il successo delle celle a combustibile. Un'efficiente risposta dinamica dipende dall'approvvigionamento di idrogeno e di ossigeno, dalla regolazione del flusso e della pressione, nonché dalla regolazione del calore e dell'umidificazione. In corrispondenza a improvvisi e ingenti aumenti di carico, si generano calore e acqua, mentre si consuma carburante. Durante questo transitorio, è richiesto un controllo dei flussi, per mantenere a livelli ottimali la temperatura della cella, l'idratazione della membrana elettrolitica e le pressioni parziali dei reagenti, onde evitare dannose diminuzioni di tensione e di rendimento. Questi parametri devono essere controllati in un ampio intervallo di correnti, dunque di potenze, da un insieme di attuatori: il sistema ausiliario che ne risulta è dunque necessario per ottenere un controllo preciso e rapido e soddisfare così le prestazioni, la sicurezza e l'affidabilità richieste.

Infine, il principale motivo che limita tuttora la diffusione su larga scala delle celle a combustibile nelle applicazioni di trazione elettrica è l'eccessivo costo. Da uno studio del Dipartimento Statunitense dell'Energia risulta che il costo per kilowatt di una cella a combustibile di tipo PEM da 80 kW, con un sistema di produzione da 500.000 unità annue, è pari a 61 \$/kW, poco meno del doppio dell'obiettivo di riferimento per la competitività con i motori a combustione interna, pari a 35 \$/kW [8], che lo stesso Dipartimento per l'Energia stima sarà raggiunto entro il 2015.

## 1.2 Principio di funzionamento

Il principio di funzionamento delle celle a combustibile fu scoperto nel 1983 da William R. Grove, un fisico inglese. La cella a combustibile consiste di

un elettrolita posto fra due elettrodi. L'elettrolita ha particolari proprietà che consentono il passaggio di ioni positivi di idrogeno, mentre gli elettroni sono bloccati. L'idrogeno gassoso passa attraverso un elettrodo, l'anodo, e, mediante l'aiuto di un catalizzatore, è separato in elettroni e protoni, secondo la seguente reazione chimica [3]:



I protoni attraversano la membrana, fino a raggiungere l'altro elettrodo, il catodo, mentre gli elettroni scorrono in un circuito esterno, creando una corrente elettrica. Da un punto di vista meramente elettrico, la PEM costituisce il catalizzatore per le reazioni elettrochimiche che generano il campo elettromotore che separa le cariche elettriche, permettendo il passaggio della corrente elettrica.

I protoni e gli elettroni si combinano dunque nel catodo con l'ossigeno, per produrre acqua:



La reazione complessiva è dunque:



La tensione prodotta da una cella è un valore di solito minore di 1 V, a seconda del punto di lavoro e del carico elettrico collegato; il valore tipico della tensione erogata varia fra 0,5 e 0,8 V [9]. Per ottenere valori maggiori di tensione è necessario collegare in serie più celle, per cui la tensione totale è pari al prodotto della tensione media per il numero di celle. Come tutti gli apparecchi elettrici, anche le celle a combustibile hanno delle resistenze parassite, a causa delle quali una quota parte della potenza generata è dissipata in calore.

Le celle a combustibile hanno diversi vantaggi rispetto ai motori a combustione interna; per generare energia meccanica, questi ultimi convertono prima l'energia chimica del combustibile in energia termica e successivamente l'energia termica in energia meccanica. Il passaggio dell'energia nel dominio termico fa sì che il rendimento dei motori a combustione interna sia limitato dal rendimento massimo del ciclo di Carnot. A differenza di questi, le celle a combustibile convertono direttamente l'energia chimica in energia elettrica, dunque il loro rendimento massimo non è limitato dal ciclo di Carnot. Inoltre, utilizzando idrogeno puro come combustibile, è possibile considerare le celle a combustibile come generatori a emissioni zero, dato che gli unici prodotti collaterali della generazione di energia elettrica sono calore e acqua. Ovviamente, l'idrogeno è un mero vettore di energia, la sua produzione

richiede a sua volta l'impiego di energia; considerato l'intero sistema, dalla produzione di idrogeno ai terminali del sistema cella a combustibile, è possibile affermare l'assenza di emissioni di gas serra solo se l'energia utilizzata per la produzione di idrogeno proviene da fonti rinnovabili o da centrali nucleari, che hanno comunque un impatto ambientale considerevole. Infine, a differenza degli attuali accumulatori di energia, non devono essere sostituite periodicamente, dato che la generazione di energia è continua finché è disponibile combustibile. Fino a pochi anni fa, la vita media delle celle a combustibile era un fattore limitante: p. es. il sistema sperimentale Nexa Power Module aveva una durata utile limitata a 1500 ore [10]. Allo stato attuale, grazie ai progressi della ricerca, moduli per la generazione d'emergenza come il Ballard FCGen-1020A-CS possono vantare una vita utile stimata intorno alle 4000 ore, mentre moduli per la generazione distribuita come il Ballard FCGen-1030 hanno una vita utile stimata inferiore alle 40.000 ore [11].

### **1.2.1 Celle a combustibile PEM**

Esistono diversi tipi di celle a combustibile, distinte fra di loro sulla base dell'elettrolita utilizzato. Le differenze esistenti, in termini di materiali utilizzati, temperatura di funzionamento e tipo di combustibile utilizzato, fanno sì che ogni cella a combustibile abbia un proprio ambito di utilizzazione. È noto, p. es. che le celle a combustibile di tipo PEM sono adatte per l'utilizzo nel campo della trazione elettrica e della generazione distribuita. Dette celle a combustibile hanno una temperatura operativa compresa fra 50 °C e 100 °C, che non genera rischi termici per le persone e i materiali e dunque elimina la necessità di isolamento termico.

La membrana polimerica è un isolante, ma un eccellente conduttore di protoni; solitamente è composta da colonne di fluorocarburi cui sono collegati gruppi di acido solforoso  $SO_3H^+$ . Quando la membrana, il cui spessore può variare da 50 a 175  $\mu m$ , è idratata, gli ioni idrogeno  $H^+$  dei gruppi solforosi divengono mobili e ciò rende possibile la scissione dell'idrogeno in protoni ed elettroni e dunque il funzionamento della cella. La membrana è pressata fra due elettrodi, l'anodo e il catodo, realizzati in materiale conduttore, come la grafite porosa, cui è applicata una piccola quantità di platino che funge da catalizzatore. I tre elementi, anodo, catodo e membrana, sono sigillati insieme, a formare una singola membrana elettrolitica, in acronimo *MEA*, dall'inglese *Membrane Electrolyte Assembly*, solitamente spessa meno di 1 *mm*.

La MEA è posizionata fra due strati di carbone poroso, come è possibile verificare nella Figura 1.1, che consentono la diffusione uniforme dei reagenti, ossigeno ed idrogeno, sui siti catalitici della membrana. L'altra faccia di detti strati di carbone poroso è posta a contatto con il *piatto bipolare*, che svolge

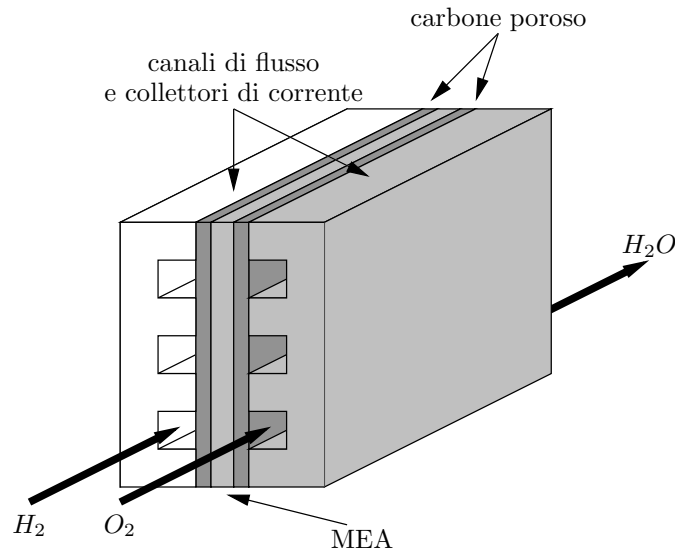


Figura 1.1: Rappresentazione schematica della cella a combustibile

la duplice funzione di collettore elettrico e sede dei canali di adduzione dei reagenti, è dunque evidente che il piatto bipolare identifica la zona di confine fra due celle elementari contigue.

La caratteristica tipica di una cella a combustibile è data sotto forma di curva di polarizzazione, schematicamente riportata in Figura 1.2, variabile a seconda delle condizioni operative, che rappresenta la tensione elementare di cella in funzione della densità di corrente. È evidente che, all'aumentare del carico richiesto alla cella a combustibile, diminuisce la tensione disponibile ai morsetti; ciò a causa della resistenza elettrica parassita della cella, di un inefficiente trasporto dei reagenti alle celle e di un basso tasso di reazione. Per questo motivo, è preferibile che una cella a combustibile abbia un punto di funzionamento a basso carico, che consenta rendimenti più alti.

Va tuttavia detto che la curva di polarizzazione ha un significato relativo per quanto concerne un Sistema Cella a Combustibile, anche detto *Fuel Cell System*, (*FCS*), ossia una cella a combustibile dotata di sistemi ausiliari e dotata di un proprio controllore; come sarà più esaurientemente spiegato più avanti, la caratteristica di carico di un FCS assomiglia maggiormente alla caratteristica di un generatore ideale di tensione, in quanto il sistema di controllo può sopperire alle limitazioni intrinseche della singola cella.

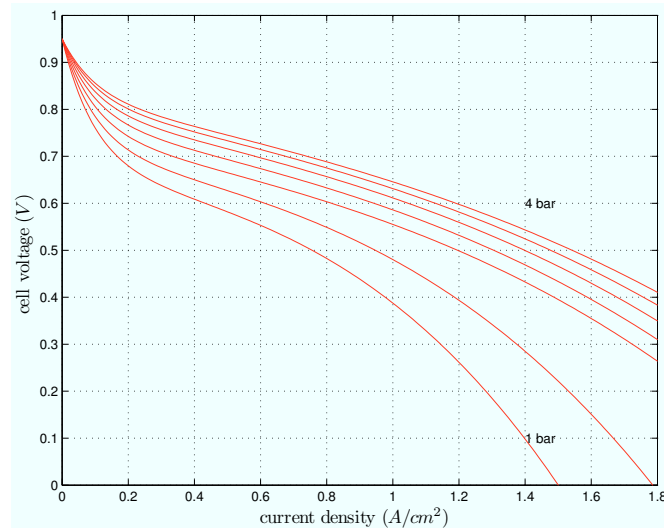


Figura 1.2: Curve di polarizzazione per diverse condizioni operative

### 1.3 Le celle a combustibile per trazione elettrica

Una cella a combustibile deve essere integrata con diversi componenti ausiliari per formare un sistema completo e funzionante, anche detto *FCS*, dall'inglese *Fuel Cell System*; sono richiesti, in particolare, quattro sistemi di adduzione di fluidi:

- sistema di adduzione dell'idrogeno all'anodo;
- sistema di adduzione dell'aria al catodo;
- sistema di adduzione dell'acqua deionizzata refrigerante;
- sistema di adduzione dell'acqua deionizzata all'umidificatore.

L'acqua deionizzata è infatti necessaria sia per raffreddare il sistema, ed evitare pericolose sovratemperature, sia per umidificare i flussi di reagenti addotti alla membrana, per evitare che diminuisca l'efficienza della stessa. L'utilizzo di acqua deionizzata è auspicabile per evitare l'instaurarsi al suo interno di correnti parassite, che produrrebbero sia una diminuzione del rendimento del sistema sia il verificarsi di corrosioni elettrolitiche.

È inoltre noto che il rendimento della cella a combustibile aumenta con la pressione dei reagenti, in quanto questo aumenta la velocità di reazione alla

membrana; ne consegue che è consigliabile installare un compressore idraulico, azionato da un motore elettrico, per regolare sia il flusso sia la pressione dell'aria addotta. L'aria ad alta pressione ha però una temperatura maggiore di quella necessaria, dunque sarà necessario installare un refrigeratore all'uscita del compressore. L'aria in uscita dalla cella ha un certo titolo di vapore, perciò è opportuno posizionare un separatore di umidità per recuperare acqua da inviare ai circuiti di raffreddamento ed umidificazione. Infine, è necessario installare un sistema di regolazione dell'energia elettrica in uscita dalla cella a combustibile, per poter assicurare ai sistemi ausiliari della cella e a tutti i circuiti da essa alimentati la necessaria qualità dell'energia, in termini di costanza della tensione di alimentazione. In Figura 1.3 è riportato uno schema complessivo della cella a combustibile e di tutti i componenti accessori al suo funzionamento.

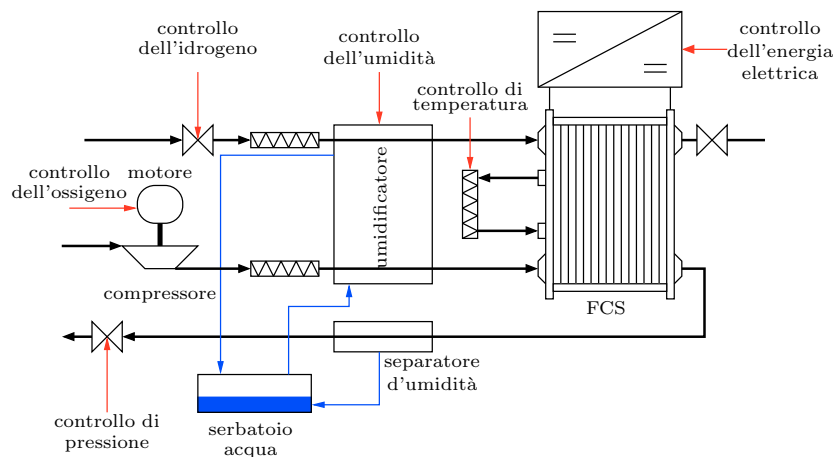


Figura 1.3: Il sistema cella a combustibile

La portata dei reagenti, la pressione totale, la pressione parziale dei reagenti, la temperatura e l'umidità della membrana sono i principali parametri che è necessario controllare, per assicurare buone prestazioni dinamiche e robustezza del sistema alle variazioni di potenza. Le azioni di controllo possono essere esplicitate sul motore elettrico collegato al compressore, sulla valvola di controllo del flusso di idrogeno, sulla pompa di raffreddamento, sulle ventole di raffreddamento e sull'umidificatore, in modo da regolare la portata e la pressione dei reagenti, la temperatura e l'umidità. Ovviamente, tali azioni di controllo non sono tra loro indipendenti, per cui agire sul controllo di temperatura della cella a combustibile influisce anche sull'umidità della membrana, mentre modificare la pressione dei reagenti può modificare sia la temperatura sia il livello di umidificazione della membrana.

Una cella a combustibile che sia installata su di un veicolo elettrico è sottoposta a notevoli e rapide variazioni di carico, che hanno un carattere aleatorio; per assicurare buone prestazioni, è necessario dunque che il sistema di controllo sia in grado di mantenere tutte le grandezze termodinamiche della cella al livello ottimale, pena una notevole riduzione del rendimento e della vita utile della cella a combustibile. Lo schema di controllo di un sistema cella a combustibile per applicazioni di trazione elettrica è perciò un obiettivo complesso.

### **1.3.1 Controllo dei flussi di reagenti**

Durante il funzionamento della cella a combustibile, idrogeno e ossigeno sono consumati mentre energia elettrica è prelevata ai morsetti della cella; nel caso in cui l'idrogeno sia direttamente disponibile, in quanto p. es. immagazzinato in un serbatoio, il relativo controllo della portata può essere effettuato tramite una valvola, mentre il controllo della portata di ossigeno è effettuato tramite un compressore. Se il motore che aziona il compressore è alimentato dai morsetti della cella a combustibile, il sistema complessivo risulta essere instabile a incrementi di carico: questi infatti generano diminuzioni della tensione disponibile ai morsetti, e quindi diminuzione della velocità di rotazione del motore, nel caso di azionamenti in corrente continua, o diminuzione del flusso, nel caso di azionamenti in corrente alternata. Ciononostante, è preferibile che l'alimentazione di detto motore sia prelevata dalla cella, per incrementare la compattezza del sistema; si rende quindi ancora una volta necessario l'inserimento di un sistema di regolazione dell'energia elettrica. Una soluzione alternativa consiste nel regolare il compressore in modo che fornisca la portata di reagente corrispondente alla massima potenza prelevabile dalla cella; sebbene questa soluzione non richieda un controllo complesso, è evidente lo spreco di energia e reagenti. La soluzione ottimale consiste dunque nello svincolare l'alimentazione del motore elettrico che aziona il compressore dall'energia generata dal FCS; questo può essere ottenuto tramite la creazione di un DC link, alimentato dal FCS tramite p. es. un chopper step-up, a cui sia connesso un inverter che controlli il motore del compressore. Ovviamente questa soluzione richiede altresì la presenza di un controllore di tensione per il DC link.

**Il problema della *oxygen starvation*** Il controllo dei flussi di reagenti ha una particolare importanza per quanto riguarda la durata della vita utile della cella a combustibile. Se il flusso di idrogeno può essere considerato come istantaneamente regolato ai bisogni del carico, nel caso di alimentazione con idrogeno puro da un serbatoio ad alta pressione, così non è per la



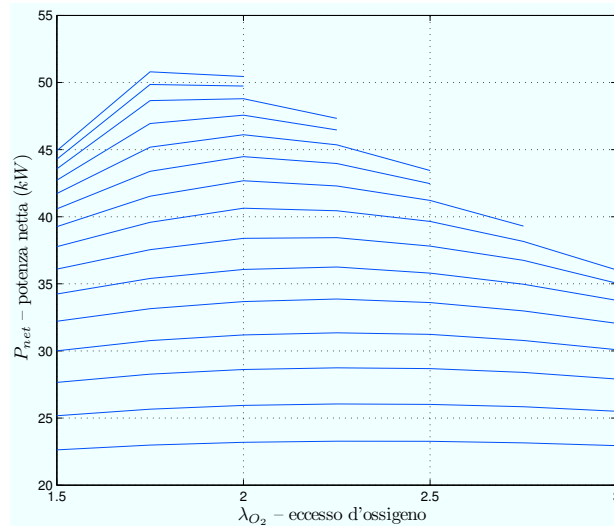


Figura 1.4: Andamento della potenza elettrica in funzione di  $\lambda_{O_2}$

regolazione del flusso di ossigeno, solitamente prelevato dall'aria atmosferica esterna alla cella tramite il compressore di alimentazione. A seguito di un aumento della corrente prelevata dalla cella a combustibile, si ha un incremento dell'ossigeno richiesto per le reazioni elettrochimiche, che deve essere compensato da un aumentato afflusso di aria esterna tramite il compressore. A seconda di quanto rapida sia la dinamica del sistema compressore, si ha un intervallo di tempo in cui il flusso di ossigeno consumato è maggiore del flusso di ossigeno in ingresso al catodo, generandone quindi una diminuzione della concentrazione.

Alcuni studi [12–15] hanno approfondito questo fenomeno e le conseguenze che ha nel deterioramento della MEA e delle prestazioni della cella a combustibile. Quando la cella a combustibile eroga una corrente maggiore di quella che l'afflusso di combustibile potrebbe permettere, si instaura nella MEA il fenomeno del *cell reversal*: il potenziale anodico diviene maggiore del potenziale catodico, per cui la differenza di potenziale ai capi della cella si inverte e diviene negativa [13]. In sistema composto da più celle a combustibile collegate in serie, il fenomeno può instaurarsi anche parzialmente, affliggendo cioè solo alcune celle. Da un punto di vista esterno, il fenomeno si manifesterà dunque come una caduta di tensione aggiuntiva [12]. In realtà la oxygen starvation genera gravi danni nella MEA, causando un degradamento permanente delle prestazioni della cella a combustibile: sia il catalizzatore anodico sia il catalizzatore catodico sono corrosi e la superficie attiva catodica si riduce rapidamente, avendo inizio il fenomeno anche solo dopo 1 s

di funzionamento in cell reversal. Inoltre, all'interno dell'anodo della cella a combustibile, a causa dell'ossidazione dell'acqua, si ha una produzione di ossigeno, anziché una ossidazione di idrogeno, che peggiora sensibilmente la degradazione catodica ed anodica, e che può facilmente provocare la rottura della membrana polimerica [13]. Per questi motivi, il fenomeno della oxygen starvation va assolutamente evitato, in quanto genera un degradamento irreversibile delle prestazioni della cella a combustibile.

Indicando con  $W_{O_2,in}$  il flusso di ossigeno in ingresso e con  $W_{O_2,react}$  il flusso di ossigeno consumato nelle reazioni elettrochimiche, è possibile definire l'eccesso d'ossigeno come il rapporto fra i due flussi:

$$\lambda_{O_2} = \frac{W_{O_2,in}}{W_{O_2,react}} \quad (1.4)$$

ed è dunque una misura del margine di sicurezza di cui la cella a combustibile dispone per evitare il fenomeno della oxygen starvation.

Più in generale, mantenere un certo livello di eccesso d'ossigeno ha un'influenza sulla potenza elettrica disponibile all'uscita della cella a combustibile, in quanto influenza la tensione ai morsetti della cella. Come è riportato in Figura 1.4, una variazione del valore dell'eccesso d'ossigeno causa una variazione della potenza elettrica disponibile: il valore ottimale, per cui si ha la massima potenza disponibile per tutti i valori di corrente prelevata, è circa pari a 2; per valori inferiori, si ha un calo della tensione all'uscita della cella, mentre per valori superiori la potenza elettrica richiesta dal compressore sopravanza l'aumento di potenza elettrica causato dall'aumento di tensione in uscita. Maggiori dettagli su questo fenomeno saranno dati nella Sezione 1.5.

### 1.3.2 Controllo della temperatura

Per mantenere il funzionamento ottimale della cella a combustibile, il calore generato deve essere dissipato. Essendo la temperatura ottimale di funzionamento di una cella a combustibile di tipo PEM pari a circa 80 °C, il controllo termico è più complesso di quello dei motori a combustione interna; si deve considerare infatti che:

- il salto termico, rispetto all'ambiente esterno è più ridotto, dunque minore è la quantità di calore scambiata naturalmente e attraverso il sistema di refrigerazione;
- mentre nei motori a combustione interna è possibile utilizzare uno specifico fluido refrigerante, nel sistema cella a combustibile è possibile utilizzare solo l'acqua deionizzata.

Inoltre, date le attuali dimensioni delle celle, il calore non può essere scambiato passivamente attraverso la superficie esterna, pertanto è richiesto un sistema di scambio attivo del calore, attraverso fluido refrigerante. Il controllo di temperatura può inoltre agire sulla velocità delle ventole di raffreddamento e della pompa di ricircolo. L'obiettivo finale del controllo di temperatura è ovviamente quello di minimizzare i tempi di riscaldamento della cella, eliminando eventualmente le sovraoscillazioni di temperatura, garantendo che possa essere prelevata la minima potenza possibile.

### **1.3.3 Controllo dell'acqua**

Il compito del sistema di controllo dell'acqua è mantenere il corretto livello di idratazione della membrana elettrolitica, nonché regolare il consumo di acqua nell'intero sistema. La portata dei reagenti addotti alla cella e la quantità di acqua iniettata negli elettrodi influenzano l'idratazione della membrana; quando questa diviene troppo alta o troppo bassa, si generano elevate perdite di energia, anche dette perdite di *polarizzazione*, più avanti esaminate. Durante il normale funzionamento della cella, molecole di acqua sono prodotte sul catodo e scisse sull'anodo: in conseguenza di ciò l'anodo tende a seccarsi, mentre il catodo si allaga; il gradiente di concentrazione fa sì che l'acqua tenda a diffondere, per osmosi, dal catodo all'anodo, ripristinando in regime statico una condizione ottimale di funzionamento. L'umidificazione della membrana può però variare a causa di diversi fattori: generazione di acqua in seguito ad un aumento di carico, variazioni della pressione parziale o assoluta dei reagenti, variazione della temperatura del sistema, ovvero della pressione di saturazione del vapore. Queste interazioni evidenziano il carattere fortemente nonlineare del controllo dell'umidità, e quindi la difficoltà che si presenta nel realizzare un controllo efficace ed efficiente. Si noti tuttavia che la tensione in uscita dalla cella a combustibile può diminuire dal 20% al 40%, se non è effettuato un controllo sull'umidità della membrana [16].

### **1.3.4 Controllo dell'energia**

Le celle a combustibile nascono come dispositivi in grado di erogare grandi correnti, ma a bassa tensione; ciò è dovuto al funzionamento stesso della cella: ogni cella elementare può erogare una tensione pari in media a  $0,7 V$ , dunque per ottenere tensioni più elevate è necessario connetterne un maggior numero in serie. Ciononostante, non è possibile aumentare illimitatamente il numero di celle elementari connesse in serie, in quanto maggiore è tale numero, maggiore è la difficoltà di addurre uniformemente i reagenti a ciascuna cella elementare; usualmente, la tensione in uscita da un FCS è inferiore a

100 V [11]. Il sistema di gestione dell'energia elettrica ha dunque lo scopo di modificare le caratteristiche dell'energia in uscita dalla cella a combustibile, per adattarle a quelle necessarie all'alimentazione dei sistemi ausiliari della cella stessa e di tutti i restanti circuiti, incluso il carico elettrico esterno. Tale conversione di energia può essere facilmente realizzata mediante l'impiego di convertitori statici di tipo DC/DC controllati.

### **1.3.5 Il modello matematico**

Nonostante esistano in letteratura diversi modelli matematici per il sistema cella a combustibile, mancano ancora modelli completi che possano essere utilizzati per lo studio del controllo della stessa. I modelli attualmente presenti possono essere classificati in tre grandi categorie:

- modelli basati sulle equazioni differenziali;
- modelli statici basati su mappe sperimentali;
- modelli dinamici che trascurano variazioni spaziali.

La maggior parte delle pubblicazioni sulle celle a combustibile sviluppano il modello della cella elementare e includono variazioni spaziali dei parametri. Questi modelli sono sviluppati a partire dai principi elettrochimici, termodinamici e meccanici che regolano il funzionamento della cella a combustibile e possono essere utilizzati per determinare le prestazioni o il rendimento della cella in diverse condizioni statiche di funzionamento. Sebbene questi modelli non siano adatti per lo studio del controllo, mostrano gli effetti delle variazioni dei parametri operativi sulla tensione di cella.

I modelli statici sono solitamente utilizzati per il dimensionamento dei componenti e per lo studio dei consumi di combustibile; in questo caso, ogni componente facente parte del sistema della cella a combustibile è rappresentato per mezzo di mappe. L'unica dinamica considerata in questa tipologia di modelli è quella derivante dall'inerzia delle parti rotanti del veicolo.

Infine, benché esistano molti modelli dinamici del sistema cella a combustibile, la maggior parte di essi focalizza l'attenzione solo sulla dinamica termica del sistema, trascurando i transitori più veloci, come p. es. quelli elettrici o meccanici.

## **1.4 I sistemi ausiliari**

Nei modelli sviluppati per applicazioni di controllo sono considerate solamente quelle caratteristiche che hanno influenza sull'evoluzione dinamica del

sistema. Così, per lo studio del controllo di un sistema cella a combustibile destinato alla trazione elettrica, si può trascurare la dinamica introdotta dalle reazioni chimiche, aventi la più piccola costante di tempo del sistema. Di seguito si riassumono le costanti di tempo dei diversi fenomeni del sistema cella a combustibile [17]:

- reazioni elettrochimiche,  $\tau \simeq 10^{-19}$  s;
- transistori elettrici,  $\tau \simeq 10^{-4}$  s;
- fluidodinamica dei reagenti,  $\tau \simeq 10^{-1}$  s;
- umidificazione della membrana,  $\tau$  non bene determinata;
- controllo di portata,  $\tau \simeq 10^0$  s;
- inerzia meccanica delle parti rotanti,  $\tau \simeq 10^1$  s;
- transistori termodinamici,  $\tau \simeq 10^2$  s.

Fatta dunque eccezione per i transistori chimici, la dinamica introdotta dai restanti fenomeni deve essere presa in considerazione, in quanto ha un effetto sulla dinamica globale del sistema cella a combustibile. Per quanto riguarda la dinamica del sistema di regolazione dell'umidità, qualche precisazione è d'obbligo; questo sistema è ancora oggetto di studi, pertanto determinare quanto veloce, o lenta, sia la sua dinamica non è un obiettivo semplice da raggiungere. Si consideri inoltre che, allo stato attuale, esistono sia nuove tecnologie sui materiali per celle a combustibile sia nuove progettazioni che riescono a risolvere il problema della gestione dell'umidificazione della membrana [18]. Per questo motivo, in questo lavoro non sarà considerata la dinamica di questo sistema.

La modellizzazione dei sistemi ausiliari è focalizzata sul sottosistema di controllo dei flussi dei reagenti, tralasciando dunque il sottosistema di regolazione della temperatura. Si considera che i volumi di anodo e catodo di ciascuna cella elementare possano essere considerati unitamente come un anodo e catodo globali, di volume pari alla somma dei volumi elementari. Essendo inoltre molto piccolo il volume complessivo dei collettori di andata e di ritorno dell'anodo, è possibile trascurare la loro presenza aggiungendo il loro volume al volume complessivo dell'anodo.

Per il catodo questa approssimazione non è accettabile, dato che l'estensione, dunque il volume, dei collettori di andata e di ritorno è dipendente dalla posizione del compressore di andata rispetto al sistema cella a combustibile. Tuttavia, l'insieme dei collettori catodici di andata è considerato come un unico collettore catodico di andata, di volume pari alla somma dei volumi elementari, così come per l'insieme dei collettori catodici di ritorno.

### 1.4.1 Il compressore

Il modello del compressore di andata è diviso in due parti, come mostrato in Figura 1.5: il modello del compressore vero e proprio e il modello del motore elettrico che lo aziona. Il primo è in genere una mappa statica rapporto di compressione/portata massica parametrizzata in velocità, che determina la portata di aria attraverso il compressore, e le equazioni termodinamiche necessarie a determinare la temperatura dell'aria in uscita nonché la potenza meccanica. In genere si utilizza un compressore centrifugo, perché di dimensioni ridotte. Tuttavia, l'elevata velocità di rotazione,  $10 \div 100 \text{ krpm}$ , richiede un azionamento adatto. In genere l'azionamento utilizzato è un azionamento in corrente alternata con PMSM<sup>2</sup> la cui velocità di rotazione è controllata tramite un sistema di controllo vettoriale. Dalla potenza meccanica richiesta dal compressore, è possibile ottenere la coppia resistente applicata al motore e dunque la velocità di rotazione del compressore azionato, che costituisce l'ingresso della mappa statica per determinare la portata di aria in uscita dal compressore.

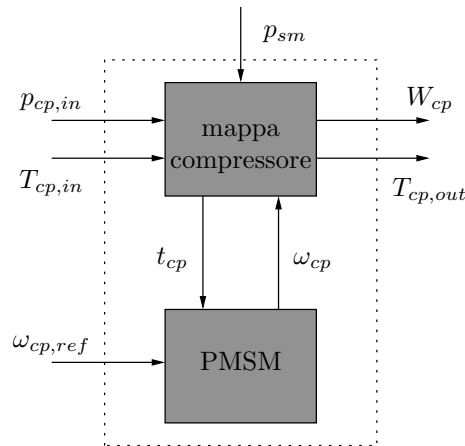


Figura 1.5: Schema a blocchi del compressore

Il modello del sistema compressore contiene quattro variabili di stato:

- la velocità di rotazione del PMSM,  $\omega_{cp}$ ;
- le correnti di statore, espresse nel sistema di riferimento solidale con il rotore,  $i_d$  e  $i_q$ ;
- la posizione istantanea del rotore,  $\theta_{cp}$ .

---

<sup>2</sup>Acronimo di *Permanent Magnet Synchronous Motor*, in italiano *Motore Sincrono a Magneti Permanenti*.

Gli ingressi del modello sono:

- la pressione di ingresso dell'aria,  $p_{cp,in}$ ;
- la temperatura di ingresso dell'aria,  $T_{cp,in}$ ;
- il riferimento di velocità del PMSM,  $\omega_{cp,ref}$ ;
- la pressione di uscita dell'aria,  $p_{cp,out}$ ;

I parametri termodinamici di ingresso dell'aria sono solitamente quelli atmosferici, per cui si impone  $p_{cp,in} = p_{atm} = 1 \text{ atm}$  e  $T_{cp,in} = T_{atm} = 25^\circ\text{C}$ ; la pressione di uscita dell'aria deve essere pari alla pressione del collettore di andata del catodo, dunque è determinata dal relativo modello. Infine, il riferimento di velocità del PMSM,  $\omega_{cp,ref}$ , è un ingresso di controllo del FCS.

**Il modello del compressore** La portata massica  $W_{cp}$  di aria in uscita dal compressore, misurata in  $kg/s$ , è determinata mediante una mappa statica, a partire dalla differenza di pressione fra ingresso e uscita e dalla velocità di rotazione. La suddetta mappa non è stata implementata sotto forma di tabella look-up, in quanto questa forma non è adatta alle simulazioni dinamiche. Le metodologie classiche di interpolazione generano funzioni non infinitamente differenziabili e i metodi di estrapolazione non sono molto affidabili. Per questo motivo, è stato utilizzato un metodo di *curve fitting* tramite curve *spline*, in particolare il metodo di Jensen & Kristensen, descritto in [19].

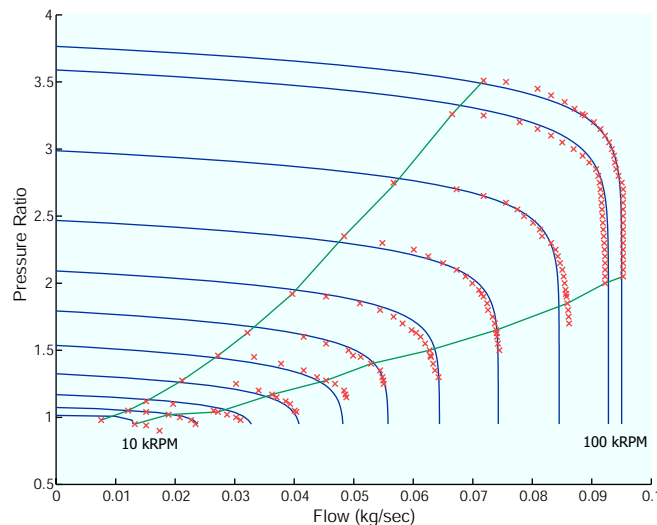


Figura 1.6: Mappa del compressore

All'interno della mappa del compressore, sono stati utilizzati i valori *corretti* della portata e della velocità del compressore, per poter tenere conto di eventuali variazioni nelle condizioni termodinamiche di ingresso al compressore. I valori corretti sono la velocità  $N_{cr}$ , misurata in *rpm*, del compressore:

$$N_{cr} = \frac{N_{cp}}{\sqrt{\theta}}$$

e la portata  $W_{cr}$ :

$$W_{cr} = W_{cp} \frac{\sqrt{\theta}}{\delta}$$

essendo  $\theta$  e  $\delta$  due parametri adimensionali, denominati rispettivamente *temperatura corretta* e *pressione corretta*, pari a:

$$\theta = \frac{T_{cp,in}}{288}$$

$$\delta = \frac{p_{cp,in}}{1}$$

essendo le temperature espresse in *K* e le pressioni in *atm*. Secondo il metodo di Jensen & Kristensen, si definisce il parametro adimensionale  $\Psi$ , dato da:

$$\Psi = c_p T_{cp,in} \frac{2 \left[ \left( \frac{p_{cp,out}}{p_{cp,in}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]}{U_c^2} \quad (1.5)$$

dove  $c_p$  è il calore specifico a pressione costante,  $T_{cp,in}$  è la pressione di ingresso al compressore espressa in *K*,  $\gamma$  è pari al rapporto fra i calori specifici a pressione e volume costanti:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

ed infine  $U_c$  è la velocità delle pale del compressore, espressa in *m/s*, data da:

$$U_c = \frac{\pi}{60} d_c N_{cr} \quad (1.6)$$

detto  $d_c$  il diametro, espresso in *m*, del compressore.

Si definisce *portata normalizzata* del compressore, e la si indica con  $\Phi$ , la seguente quantità:

$$\Phi = \frac{W_{cr}}{\rho_a \frac{\pi}{4} d_c^2 U_c} \quad (1.7)$$



essendo  $\rho_a$  la densità dell'aria, espressa in  $kg/m^3$ . Il parametro  $\Psi$  è correlato alla portata normalizzata del compressore  $\Phi$  dalla seguente equazione:

$$\Phi = \Phi_{max} \left[ 1 - e^{(\beta(\frac{\Psi}{\Psi_{max}})-1)} \right] \quad (1.8)$$

dove  $\Phi_{max}$ ,  $\beta$  e  $\Psi_{max}$  sono funzioni polinomiali del numero di Mach  $M$ :

$$\Phi_{max} = a_4 M^4 + a_3 M^3 + a_2 M^2 + a_1 M + a_0 \quad (1.9a)$$

$$\beta = b_2 M^2 + b_1 M + b_0 \quad (1.9b)$$

$$\Psi_{max} = c_5 M^5 + c_4 M^4 + c_3 M^3 + c_2 M^2 + c_1 M + c_0 \quad (1.9c)$$

Il numero di Mach è definito come:

$$M = \frac{U_c}{\sqrt{\gamma R_a T_{cp,in}}} \quad (1.10)$$

essendo  $R_a$  la costante specifica dei gas per l'aria. In (1.9), i coefficienti  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$  sono stati ottenuti mediante il metodo di curve fitting applicato ai dati riportati in [20]. Infine, la portata di aria in uscita dal compressore è calcolata, sulla base di (1.7), come:

$$W_{cr} = \Phi \rho_a \frac{\pi}{4} d_c^2 U_c \quad (1.11)$$

I parametri utilizzati nel modello sono riportati nella Tabella 1.2 [3]. I coefficienti di regressione ottenuti col metodo di curve fitting sono riportati nella Tabella 1.3 [3]. I dati mostrati in Figura 1.6 mostrano che il modello è molto fedele al compressore reale. La portata attraverso il compressore deve essere opportunamente controllata, in modo da evitare che si superino il *choke limit* o il *surge limit*, anche detto *limite di pompaggio*, che generano un degrado delle prestazioni; i limiti della regione di funzionamento ottimale possono essere approssimati da una combinazione lineare della portata e del rapporto delle pressioni [1]:

$$-0,0506 W_{cp} + p_{sm} = 0,4 \quad (1.12a)$$

$$0,0155 W_{cp} - p_{sm} = 0,73 \quad (1.12b)$$

Il rendimento del compressore è calcolato, sulla base della portata e del rapporto fra le pressioni di ingresso e di uscita, tramite una mappa; il rendimento massimo del compressore è pari all'80%. La temperatura dell'aria in

parametro	valore	unità
$R_a$	$2,869 \cdot 10^2$	$J/(kg \cdot K)$
$\rho_a$	1,23	$kg/m^3$
$d_c$	0,2286	$m$

Tabella 1.2: Parametri della mappatura del compressore

parametro	valore	parametro	valore
$a_4$	$-3,69906 \cdot 10^{-5}$	$b_0$	2,44419
$a_3$	$2,70399 \cdot 10^{-4}$	$c_5$	$-9,78755 \cdot 10^{-3}$
$a_2$	$-5,36235 \cdot 10^{-4}$	$c_4$	0,10581
$a_1$	$-4,63685 \cdot 10^{-4}$	$c_3$	$-0,42937$
$a_0$	$2,21195 \cdot 10^{-3}$	$c_2$	0,80121
$b_2$	1,76567	$c_1$	$-0,68344$
$b_1$	$-1,34837$	$c_0$	0,4331

Tabella 1.3: Coefficienti di regressione

uscita dal compressore è infine calcolata dalla seguente equazione:

$$\begin{aligned}
 T_{cp,out} &= T_{cp,in} + \frac{T_{cp,in}}{\eta_{cp}} \left[ \left( \frac{p_{cp,out}}{p_{cp,in}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] = \\
 &= T_{atm} + \frac{T_{atm}}{\eta_{cp}} \left[ \left( \frac{p_{sm}}{p_{atm}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \quad (1.13)
 \end{aligned}$$

La coppia  $t_{cp}$ , misurata in  $Nm$ , richiesta per azionare il compressore è calcolata utilizzando la seguente relazione termodinamica:

$$t_{cp} = \frac{C_p}{\omega_{cp}} \frac{T_{atm}}{\eta_{cp}} \left[ \left( \frac{p_{sm}}{p_{atm}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] W_{cp} \quad (1.14)$$

dove  $C_p$  è la capacità termica dell'aria, pari a  $1004 J/(kg \cdot K)$ . (1.13) e (1.14) sono relazioni ben note in letteratura e possono essere trovate in [21, 22].

**Il modello del motore [23]** Si considerino (1.15a) e (1.15b), che esprimono i vettori di spazio delle tensioni statoriche e rotoriche nel sistema di

riferimento generalizzato:

$$\mathbf{v}_s^{(G)} = R_s \mathbf{i}_s^{(G)} + \frac{d\boldsymbol{\psi}_s^{(G)}}{dt} + j \omega_g \boldsymbol{\psi}_s^{(G)} \quad (1.15a)$$

$$\mathbf{v}_s^{(G)} = R_r \mathbf{i}_s^{(G)} + \frac{d\boldsymbol{\psi}_s^{(G)}}{dt} + j (\omega_g - \omega) \boldsymbol{\psi}_s^{(G)} \quad (1.15b)$$

dove si indica con  $\mathbf{v}_{s,r}^{(G)}$  il vettore di spazio associato alle tensioni statoriche o rotoriche, espresso nel riferimento generalizzato, con  $\boldsymbol{\psi}_{s,r}^{(G)}$  il vettore di spazio associato ai flussi concatenati statorico e rotorico, espresso nel medesimo riferimento, con  $\mathbf{i}_{s,r}^{(G)}$  il vettore di spazio associato alle correnti circolanti nei circuiti di statore e di rotore, con  $R_s$  e  $R_r$  le resistenze dei circuiti di statore e di rotore, con  $\omega_g$  la velocità di rotazione del sistema di riferimento generalizzato e con  $\omega = p\omega_r$  la velocità di sincronismo, pari dunque al prodotto della velocità di rotazione della macchina per il numero  $p$  di coppie polari. Dato che nel PMSM non esistono né avvolgimenti né circuiti rotorici, è lecito trascurare (1.15b). Si consideri adesso il sistema di riferimento rotante al sincronismo o di campo e si ponga che il suo asse diretto coincida, istante per istante, con il vettore di spazio del flusso dei magneti. Si ha allora che:

$$\omega_g = \omega$$

per cui, separando (1.15a) nelle sue parti reale ed immaginaria si ottiene:

$$\Re \{ \mathbf{v}_s^{(F)} \} = v_d^{(F)} = R_s i_d^{(F)} + \frac{\psi_d^{(F)}}{dt} - \omega \psi_q^{(F)} \quad (1.16a)$$

$$\Im \{ \mathbf{v}_s^{(F)} \} = v_q^{(F)} = R_s i_q^{(F)} + \frac{\psi_q^{(F)}}{dt} + \omega \psi_d^{(F)} \quad (1.16b)$$

Il vettore di spazio del flusso concatenato di statore può essere espresso come:

$$\boldsymbol{\psi}_s^{(F)} = L_s \mathbf{i}_s^{(F)} + \boldsymbol{\psi}_{PM} \quad (1.17)$$

essendo  $L_s$  l'induttanza totale trifase di statore e  $\boldsymbol{\psi}_{PM}$  il vettore di spazio del flusso generato dai magneti permanenti; per induttanza totale trifase di statore si intende la quantità:

$$L_s = \bar{L}_s - \bar{M}_s$$

dove si indica con  $\bar{L}_s$  il valore dell'autoinduttanza di ciascuna delle tre fasi statoriche e con  $\bar{M}_s$  il valore comune della mutua induttanza fra ciascuna

delle tre fasi statoriche. In questo caso è possibile dividere (1.17) nelle parti reale ed immaginaria ottenendo:

$$\Re \left\{ \psi_s^{(F)} \right\} = \psi_d^{(F)} = L_d i_d^{(F)} + \lambda_{PM} \quad (1.18a)$$

$$\Im \left\{ \psi_s^{(F)} \right\} = \psi_q^{(F)} = L_q i_q^{(F)} \quad (1.18b)$$

posto  $\lambda_{PM}$  pari al valore del flusso generato dai magneti permanenti. Si ottiene dunque che:

$$v_d^{(F)} = R_s i_d^{(F)} + L_d \frac{di_d^{(F)}}{dt} - \omega L_q i_q^{(F)} \quad (1.19a)$$

$$v_q^{(F)} = R_s i_q^{(F)} + L_q \frac{di_q^{(F)}}{dt} + \omega L_d i_d^{(F)} + \omega \lambda_{PM} \quad (1.19b)$$

Per completare il modello matematico del PMSM è necessario ricavare la relazione che consente di calcolare il valore della coppia elettromagnetica generata. Si consideri innanzitutto che, in una macchina sincrona anisotropa, la coppia elettromagnetica  $t_e$  è data da (1.20) (si trascura la coppia di salienza magnetica):

$$t_e = \frac{3}{2} p \left( \psi_d^{(F)} i_q^{(F)} - \psi_q^{(F)} i_d^{(F)} \right) \quad (1.20)$$

dove le grandezze, statoriche, sono espresse nel riferimento di campo. È possibile riscrivere (1.20) in termini di flusso di magnetizzazione. Dato che le induttanze totali, secondo l'asse diretto e secondo l'asse in quadratura, possono essere decomposte nella somma delle induttanze di dispersione e di magnetizzazione, si ottiene che:

$$\psi_d^{(F)} = L_{sl} i_d^{(F)} + \psi_{m,d}^{(F)} \quad (1.21a)$$

$$\psi_q^{(F)} = L_{sl} i_q^{(F)} + \psi_{m,q}^{(F)} \quad (1.21b)$$

$L_{sl}$  è l'induttanza di dispersione, mentre  $\psi_{m,d}^{(F)}$  e  $\psi_{m,q}^{(F)}$  sono le componenti secondo l'asse diretto e in quadratura del flusso di magnetizzazione  $\psi_m^{(F)}$ . A loro volta possono essere espressi come:

$$\psi_{m,d}^{(F)} = L_{md} i_{m,d}^{(F)} = L_{md} i_d^{(F)} + \lambda_{PM} \quad (1.22a)$$

$$\psi_{m,q}^{(F)} = L_{mq} i_q^{(F)} \quad (1.22b)$$

parametro	valore
$L_d$	10,26 mH
$L_q$	12,64 mH
$R$	2,21 $\Omega$
$\lambda_{PM}$	10,00 mWb
$J$	$5 \cdot 10^{-5}$ kg $\cdot$ m <sup>2</sup>
$p$	3

Tabella 1.4: Parametri del PMSM

Il flusso disperso non contribuisce alla generazione della coppia elettromagnetica, pertanto sostituendo (1.22a) e (1.22b) in (1.20) si ottiene:

$$t_e = \frac{3}{2}p \left[ i_q^{(F)} \lambda_{PM} + (L_d - L_q) i_d^{(F)} i_q^{(F)} \right] \quad (1.23)$$

Le equazioni del modello matematico del PMSM, nel riferimento di campo, sono pertanto le seguenti:

$$\frac{di_d^{(F)}}{dt} = \frac{1}{L_d} \left( v_d^{(F)} - R_s i_d^{(F)} + L_q p \omega_r i_q^{(F)} \right) \quad (1.24a)$$

$$\frac{di_q^{(F)}}{dt} = \frac{1}{L_q} \left( v_q^{(F)} - R_s i_q^{(F)} - L_d p \omega_r i_d^{(F)} - p \omega_r \lambda_{PM} \right) \quad (1.24b)$$

$$t_e = \frac{3}{2}p \left[ i_q^{(F)} \lambda_{PM} + (L_d - L_q) i_d^{(F)} i_q^{(F)} \right] \quad (1.24c)$$

$$\frac{d\omega_r}{dt} = \frac{1}{J} (t_e - t_l) \quad (1.24d)$$

$$\frac{d\theta_r}{dt} = \omega_r \quad (1.24e)$$

essendo  $\omega_r$  la velocità di rotazione, espressa in *rad/s* meccanici, del motore,  $\theta_r$  la posizione istantanea, misurata in radianti meccanici, del rotore,  $J$  il momento d'inerzia delle masse rotanti e  $t_l$  la coppia di carico applicata all'albero motore del PMSM. In Tabella 1.4 sono riportati i dati del PMSM, di potenza nominale  $P_n = 20$  kW, utilizzato nel modello.

**Il controllo vettoriale [23]** Il controllo vettoriale è una modalità di controllo che, tramite il disaccoppiamento delle equazioni del modello matematico della macchina, consente di regolare separatamente la coppia elettromagnetica erogata e il livello di magnetizzazione della macchina sincrona. Il controllo vettoriale del PMSM è di diverso tipo a seconda delle caratteristiche elettromeccaniche del motore stesso. È dunque necessaria un'analisi

più approfondita, in base alle caratteristiche costruttive della macchina. In Figura 1.7 è rappresentato un diagramma vettoriale del PMSM. In detto

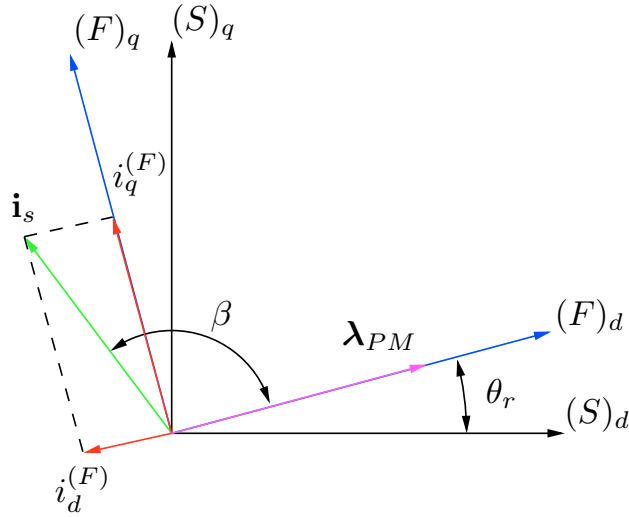


Figura 1.7: Diagramma vettoriale del PMSM

diagramma sono evidenziati i due sistemi di riferimento precedentemente definiti: il sistema di riferimento  $(S)_{dq}$  solido con lo statore e il riferimento  $(F)_{dq}$  solido con il campo magnetico rotorico. Il riferimento di campo è posizionato di modo che l'asse diretto  $(F)_d$  abbia la stessa direzione e il medesimo verso del vettore  $\lambda_{PM}$  del flusso erogato dai magneti permanenti. Nel diagramma è anche riportato il vettore di spazio  $\mathbf{i}_s$  delle correnti di statore. Proiettando dall'estremo di detto vettore la normale all'asse in quadratura del sistema solidale col rotore, si ottiene la corrente  $i_q^{(F)}$  in quadratura con il vettore spazio del flusso erogato dai magneti permanenti.

Come è noto, la coppia generata dall'interazione dei flussi concatenati di statore e di rotore, dipendente dal seno dell'angolo  $\beta$  di coppia, misurato fra il vettore di spazio della corrente statorica e il vettore di spazio del flusso rotorico, è massima quando detto angolo è pari a  $90^\circ$ . La coppia prodotta può dunque essere controllata agendo sulle correnti di statore assorbite dalla macchina, agendo ossia sul vettore di spazio delle correnti statoriche.

In Figura 1.8 è riportato uno schema a blocchi del controllo vettoriale. Si ponga pari ad un valore costante il riferimento di velocità  $w_{r,ref}$  da imporre al PMSM; la velocità istantanea del rotore è nota, tramite l'utilizzo di un apposito sensore. I due valori sono confrontati ed il segnale errore è elaborato da un apposito controllore PI che provvede a restituire la coppia di riferimento ossia, a meno di una costante, la componente in quadratura  $i_{q,r}^{(F)}$  del vettore di spazio della corrente statorica necessaria. Per quanto riguarda

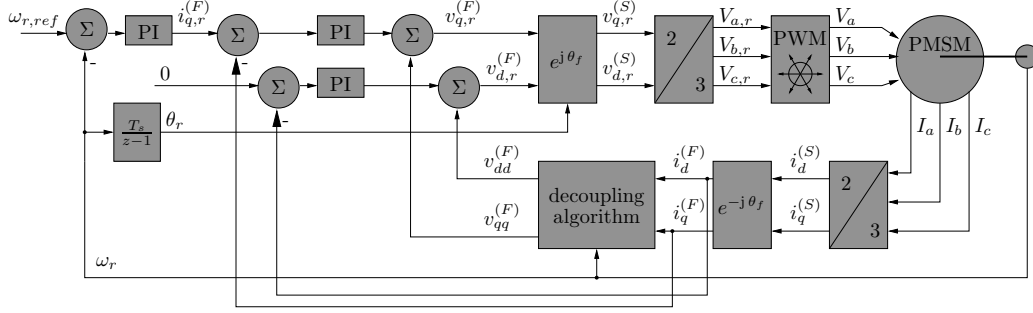


Figura 1.8: Schema a blocchi del controllo vettoriale

la componente diretta del medesimo vettore, è opportuno porre a zero il relativo riferimento  $i_{d,r}^{(F)}$ , eliminando dunque la coppia resistente di riluttanza; potrebbe essere necessario agire diversamente se il PMSM dovesse lavorare nella zona di *deflussaggio*, eventualità non considerata in questo studio.

Detti riferimenti di corrente sono confrontati con i valori reali  $i_d^{(F)}$  e  $i_q^{(F)}$  assorbiti dal PMSM e i segnali errore che si ottengono sono elaborati da altrettanti controllori PI, al fine di ottenere i riferimenti  $v_{d,r}^{(F)}$  e  $v_{q,r}^{(F)}$  di tensione statorica. Come è possibile riscontrare in (1.24a) e (1.24b), è presente un accoppiamento fra i circuiti di coppia e di flusso, pertanto non è immediatamente possibile ottenere una regolazione separata dei due canali. Per ovviare a ciò, si inserisce un circuito di disaccoppiamento, la cui funzione è aggiungere ai riferimenti  $v_{d,r}^{(F)}$  e  $v_{q,r}^{(F)}$  i segnali:

$$v_{dd}^{(F)} = -L_q p \omega_r i_q^{(F)} \quad (1.25a)$$

$$v_{qq}^{(F)} = L_d p \omega_r i_d^{(F)} \quad (1.25b)$$

I segnali  $v_{d,r}^{(F)}$  e  $v_{q,r}^{(F)}$  così ottenuti sono dunque trasformati, in modo da ottenere le medesime tensioni nel sistema di riferimento statorico e dunque nel sistema di riferimento trifase. Dette tensioni di riferimento trifase  $V_{a,r}$ ,  $V_{b,r}$  e  $V_{c,r}$  sono dunque inviate al blocco di modulazione vettoriale dell'inverter trifase, che provvede alla sintesi degli opportuni segnali di gate ai dispositivi di potenza dell'inverter. Infine, il PMSM è alimentato dalle tensioni sintetizzate dall'inverter.

È da notare che con un valore nullo del riferimento della componente diretta del vettore di spazio della corrente statorica, si impone automaticamente pari a  $90^\circ$  l'angolo di coppia, ottenendo così il massimo valore di coppia erogabile dal motore, incrementando notevolmente le prestazioni dinamiche della macchina.

Le macchine sincrone a magneti permanenti interni sono meccanicamen-

te più robuste, per questo sono spesso utilizzate per azionamenti ad alte velocità.

### 1.4.2 I collettori

Il modello a parametri concentrati dei collettori rappresenta il volume totale dei tubi e delle connessioni idrauliche fra tutti i componenti. Il volume del collettore di andata include anche il volume dei tubi fra il compressore e il FCS, ivi compreso il volume dei tubi che attraversano il refrigeratore e l'umidificatore; similmente, il collettore di ritorno unifica in sé tutte le tubazioni di scarico della cella a combustibile.

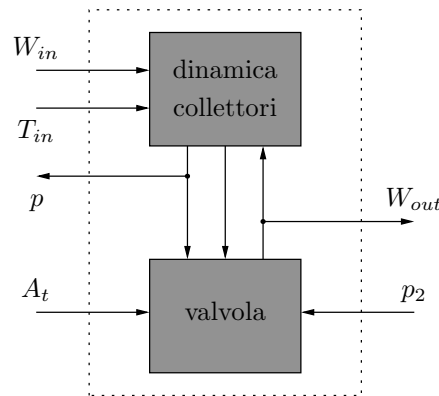


Figura 1.9: Schema a blocchi dei collettori

In Figura 1.9 è riportato uno schema a blocchi del modello dei collettori, sviluppato a partire dal principio di conservazione della massa. È noto che, per ogni tubazione, vale la seguente relazione:

$$\frac{dm}{dt} = W_{in} - W_{out} \quad (1.26)$$

essendo  $m$  la massa del fluido accumulata all'interno della tubazione,  $W_{in}$  e  $W_{out}$  la portata di fluido rispettivamente in ingresso ed in uscita. Assumendo costante la temperatura del fluido all'interno della tubazione, e pari alla temperatura in ingresso, si può supporre una trasformazione isoterma, per cui:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{R_a T}{V} (W_{in} - W_{out}) \quad (1.27)$$

detto  $V$  il volume totale del collettore. Se invece non è possibile supporre costante la temperatura, considerando il principio di conservazione dell'energia,



si ricava che:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\gamma R_a}{V} (W_{in} T_{in} - W_{out} T_{out}) \quad (1.28)$$

dove la temperatura dell'aria in uscita  $T_{out}$  è calcolata a partire dall'equazione di stato dei gas perfetti, note che siano la massa  $m$  da (1.26) e la pressione  $p$  da (1.28).

Per calcolare il flusso in uscita dal collettore, si utilizza l'equazione di flusso della valvola [24], più avanti riportata; la portata di fluido che attraversa una valvola è funzione della pressione  $p_1$  e della temperatura  $T_1$  in ingresso, nonché della pressione  $p_2$  in uscita. Il flusso attraverso la valvola è detto *critico* o *subcritico* a seconda che il rapporto fra le pressioni in uscita e in ingresso sia minore o maggiore del *rapporto critico delle pressioni*, dato da:

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_c = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (1.29)$$

Nel caso di flusso subcritico, la portata attraverso la valvola può essere calcolata come:

$$W_{sc} = \frac{C_D A_t p_1}{\sqrt{R_a T_1}} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]} \quad (1.30)$$

mentre nel caso di flusso critico, si ha che:

$$W_c = \frac{C_D A_t p_1}{\sqrt{R_a T_1}} \sqrt{\gamma} \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (1.31)$$

detto  $C_D$  il coefficiente di scarica della valvola e  $A_t$  l'apertura della valvola, misurata in  $m^2$ . In Figura 1.10 è riportato l'andamento del rapporto  $W/W_c$  in funzione del rapporto fra le pressioni di uscita e di ingresso. È possibile notare che se la differenza fra dette pressioni è piccola, e dunque il loro rapporto è quasi unitario, la portata può essere calcolata mediante una relazione semplificata linearizzata:

$$W = k (p_1 - p_2) \quad (1.32)$$

essendo  $k$  la costante della valvola.

**Il collettore di andata** Il flusso in ingresso al collettore di andata è il flusso  $W_{cp}$  in uscita al compressore, mentre il flusso in uscita al compressore

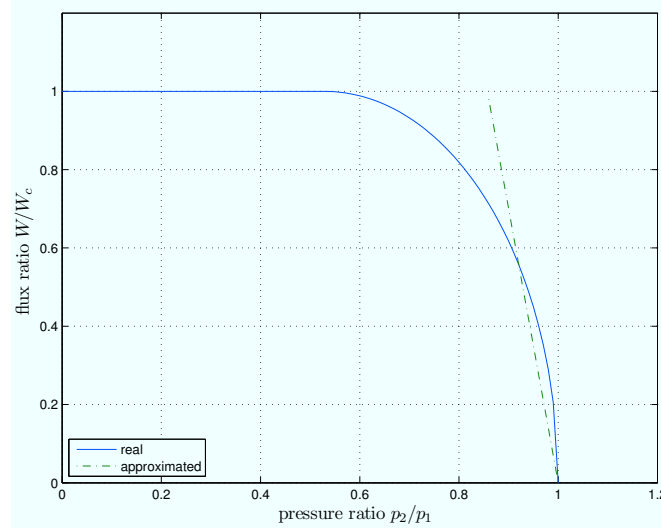


Figura 1.10: Mappa del flusso attraverso la valvola

è  $W_{sm,out}$ ; dato che la differenza fra le pressioni in ingresso e in uscita è relativamente piccola, è possibile utilizzare (1.32):

$$W_{sm,out} = k_{sm,out} (p_{sm} - p_{ca}) \quad (1.33)$$

dove  $k_{sm,out}$  è la costante di uscita del collettore di andata. Considerato che la temperatura dell'aria in uscita dal compressore è alta, essa è sottoposta ad una trasformazione non isoterma, in quanto la temperatura si abbassa a causa del passaggio all'interno del refrigeratore e del naturale scambio termico con l'esterno, dunque devono essere utilizzate (1.26) e (1.28):

$$\frac{dm_{sm}}{dt} = W_{cp} - W_{sm,out} \quad (1.34a)$$

$$\frac{dp_{sm}}{dt} = \frac{\gamma R_a}{V_{sm}} (W_{cp} T_{cp,out} - W_{sm,out} T_{sm}) \quad (1.34b)$$

avendo indicato con  $V_{sm}$  il volume totale del collettore di andata e con  $T_{sm}$  la temperatura dell'aria all'uscita del collettore. In Figura 1.11 è riportato uno schema a blocchi del modello del collettore di andata. La pressione  $p_{sm}$  calcolata nel modello è retroazionata al modello del compressore, in modo da poter calcolare il rapporto di pressione e dunque la portata di fluido addotta al collettore di andata.

**Il collettore di ritorno** La temperatura dell'aria in uscita dalla cella a combustibile è sufficientemente bassa da poterla considerare costante lungo

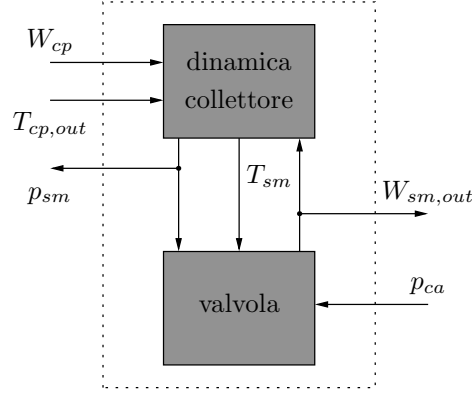


Figura 1.11: Schema a blocchi del collettore di andata

tutto il collettore di ritorno, per cui è possibile considerare (1.27) valida per la modellizzazione del collettore stesso:

$$\frac{dp_{rm}}{dt} = \frac{R_a T_{rm}}{V_{rm}} (W_{ca,out} - W_{rm,out}) \quad (1.35)$$

detto  $V_{rm}$  il volume totale del collettore di ritorno,  $T_{rm}$  la temperatura del fluido all'interno e  $W_{ca,out}$  la portata di fluido in uscita dal FCS, dunque in ingresso al collettore.

Il flusso in uscita è regolato da (1.30) e (1.31), ed è funzione del rapporto fra la pressione  $p_{rm}$  nel collettore di ritorno e la pressione all'uscita dello stesso, solitamente pari alla pressione atmosferica  $p_{atm}$ ; si ha pertanto che:

$$W_{rm,out} = \frac{C_{D,rm} A_{t,rm} p_{rm}}{\sqrt{R_a T_{rm}}} \left( \frac{p_{atm}}{p_{rm}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[ 1 - \left( \frac{p_{atm}}{p_{rm}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right]} \quad (1.36)$$

se

$$\frac{p_{atm}}{p_{rm}} > \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

mentre si ha che:

$$W_{rm,out} = \frac{C_{D,rm} A_{t,rm} p_{rm}}{\sqrt{R_a T_{rm}}} \sqrt{\gamma} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (1.37)$$

se

$$\frac{p_{atm}}{p_{rm}} \leq \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

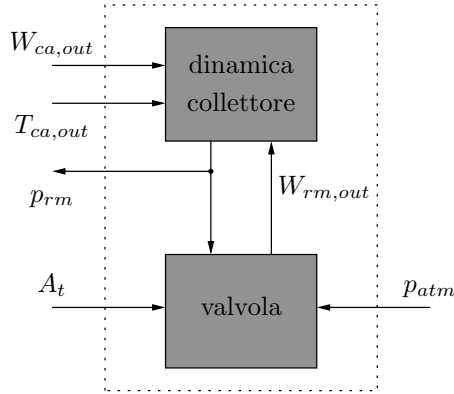


Figura 1.12: Schema a blocchi del collettore di ritorno

In Figura 1.12 è riportato lo schema a blocchi del modello del collettore di ritorno. La pressione  $p_{rm}$  calcolata è utilizzata all'interno del modello della cella a combustibile per determinare la portata di fluido attraverso il catodo, così come sarà descritto nel seguito.

### 1.4.3 Il refrigeratore

La temperatura dell'aria nel collettore di andata è solitamente troppo elevata, a causa della compressione precedentemente subita; per evitare danneggiamenti alla membrana, è necessario raffreddarla fino alla temperatura operativa della cella. Si trascurano, in questo modello, gli effetti dovuti alla dinamica del trasferimento di calore, pertanto si considera un refrigeratore ideale che mantenga costante la temperatura dell'aria in ingresso pari a  $T_{cl} = 80^\circ C$ . Si considera inoltre che non vi sia alcuna caduta di pressione al suo interno, per cui  $p_{cl} = p_{sm}$ . Considerato che la temperatura influenza l'umidità  $\phi_{cl}$  dell'aria, questa è calcolata, alle condizioni termodinamiche di uscita dal refrigeratore, come:

$$\phi_{cl} = \frac{p_{v,cl}}{p_{sat}|_{T_{cl}}} = \frac{p_{cl} \cdot p_{v,atm}}{p_{atm} \cdot p_{sat}|_{T_{cl}}} = \frac{p_{cl} \cdot \phi_{atm} \cdot p_{sat}|_{T_{atm}}}{p_{atm} \cdot p_{sat}|_{T_{cl}}} \quad (1.38)$$

essendo  $\phi_{atm} = 0,5$  l'umidità relativa nominale dell'aria e  $p_{sat}|_{T_i}$  la pressione di saturazione del vapore ad una data temperatura  $T_i$ . La variazione di temperatura non modifica la massa del fluido in transito, quindi la portata non è modificata nel modello del refrigeratore, per cui si ha che  $W_{cl} = W_{sm,out}$ .

#### 1.4.4 L'umidificatore

Il flusso di aria proveniente dal refrigeratore deve essere umidificato, prima dell'ingresso nella cella a combustibile, nebulizzando acqua all'interno dell'umidificatore. Il volume dell'umidificatore è abbastanza piccolo da poter essere considerato come parte del volume totale del collettore di andata; per calcolare la variazione di umidità dovuta alla nebulizzazione di acqua, si utilizza un modello statico e si considera costante la temperatura del flusso di aria al suo interno, per cui si ha che  $T_{hm} = T_{cl}$ . Si suppone che l'acqua nebulizzata sia presente in forma di vapore, ovvero si tiene conto, nel bilancio termodinamico, del calore latente di vaporizzazione dell'acqua. Note che siano le condizioni termodinamiche dell'aria in uscita dal refrigeratore, è possibile calcolare la pressione  $p_{v,sat}$  di saturazione del vapore; data infatti la curva termodinamica dell'acqua è possibile ottenere, mediante interpolazione, che:

$$\log_{10}(p_{v,sat}) = -1,69 \cdot 10^{-10}T^4 + 3,85 \cdot 10^{-7}T^3 - 3,39 \cdot 10^{-4}T^2 + 0,143 \cdot T - 20,92 \quad (1.39)$$

esprimendo la pressione in  $kPa$  e la temperatura in  $K$ . Si consideri che l'umidità relativa di una miscela di gas è definita come il rapporto fra la frazione molare di vapore d'acqua nella miscela e la frazione molare di vapore nella miscela saturata nelle medesime condizioni di pressione e temperatura. Se si assumono gas perfetti, questa definizione si riduce al rapporto fra la pressioni parziale del vapore nella miscela e la pressione di saturazione:

$$\phi = \frac{p_v}{p_{sat}} \quad (1.40)$$

La pressione parziale del vapore può dunque essere calcolata come:

$$\phi_{cl} = \frac{p_{v,cl}}{p_{v,sat}|_{T_{cl}}} \Rightarrow p_{v,cl} = \phi_{cl} \cdot p_{v,sat}|_{T_{cl}} \quad (1.41)$$

Si definisce *rapporto d'umidità*  $\omega$  di una miscela di aria e vapore come il rapporto fra la massa  $m_v$  di vapore e la massa  $m_a$  di aria secca:

$$\omega = \frac{m_v}{m_a} \quad (1.42)$$

considerando i gas perfetti, si ottiene che:

$$\omega = \frac{m_v}{m_a} = \frac{\frac{p_v V}{R_v T}}{\frac{p_a V}{R_a T}} = \frac{R_a p_v}{R_v p_a} = \frac{M_v}{M_a} \cdot \frac{p_v}{p_a} \quad (1.43)$$

essendo  $M_a$  e  $M_v$  le masse molari, espresse in  $kg/mol$ , dell'aria e del vapore rispettivamente. Essendo l'aria umida una miscela di aria secca e vapore, la pressione parziale dell'aria secca all'interno del refrigeratore può essere ottenuta come:

$$p_{a,cl} = p_{cl} - p_{v,cl} \quad (1.44)$$

per cui, il rapporto di umidità risulta essere pari, in accordo a (1.43), a:

$$\omega_{cl} = \frac{M_v}{M_a} \cdot \frac{p_{v,cl}}{p_{a,cl}} \quad (1.45)$$

Le portate di aria secca e vapore in uscita dal refrigeratore risultano dunque essere pari a:

$$W_{a,cl} = \frac{1}{1 + \omega_{cl}} W_{cl} \quad (1.46a)$$

$$W_{v,cl} = W_{cl} - W_{a,cl} \quad (1.46b)$$

Mentre la portata di aria rimane invariata nel transito attraverso l'umidificatore, la portata di vapore è incrementata della portata iniettata:

$$W_{v,hm} = W_{v,cl} + W_{v,in} \quad (1.47)$$

Considerata (1.43), è possibile calcolare la variazione della pressione parziale di vapore:

$$p_{v,hm} = \omega_{cl} \frac{M_a}{M_v} p_{a,cl} = \frac{W_{v,hm}}{W_{a,cl}} \cdot \frac{M_a}{M_v} p_{a,cl} \quad (1.48)$$

da cui si ottiene che l'umidità relativa in uscita all'umidificatore è:

$$\phi_{hm} = \frac{p_{v,hm}}{p_{sat}|_{T_{hm}}} = \frac{p_{v,hm}}{p_{sat}|_{T_{cl}}} \quad (1.49)$$

Considerato che la pressione parziale del vapore aumenta, anche la pressione totale aumenta, per cui si ha che:

$$p_{hm} = p_{a,cl} + p_{v,hm} \quad (1.50)$$

Infine si ottiene la portata in uscita dall'umidificatore applicando il principio di conservazione della massa:

$$W_{hm} = W_{a,cl} + W_{v,hm} = W_{a,cl} + W_{v,cl} + W_{v,in} \quad (1.51)$$

## 1.5 La cella a combustibile

Il modello della cella a combustibile è composto da quattro sottosistemi interagenti:

- il sottosistema del flusso catodico;
- il sottosistema del flusso anodico;
- il sottosistema di idratazione della membrana;
- il sottosistema della tensione di cella.

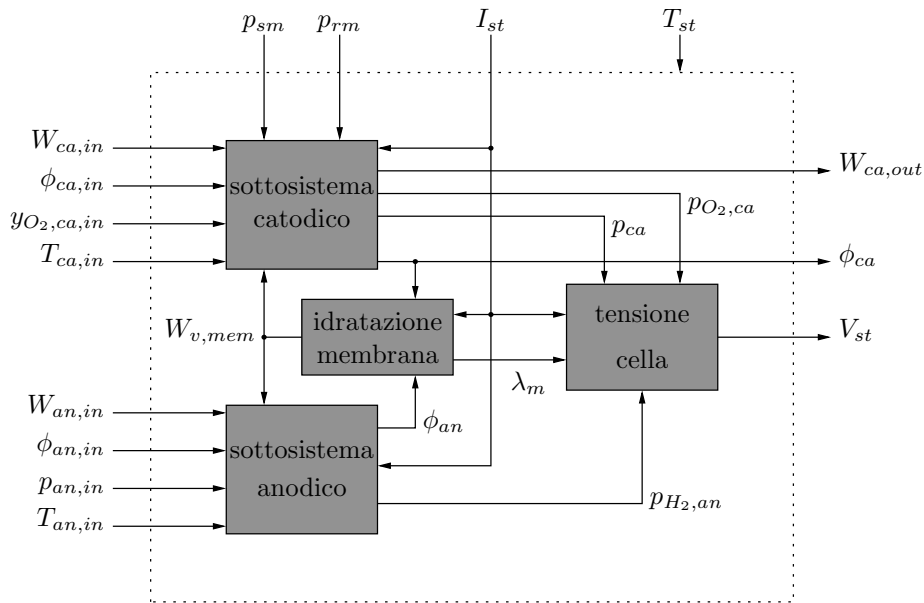


Figura 1.13: Schema a blocchi della cella a combustibile

In Figura 1.13 è riportato lo schema a blocchi del modello complessivo; non è stato implementato alcun sottosistema per la dinamica termica della cella, pertanto, tenuto anche conto dell'elevata inerzia termica del sistema, si considera costante la temperatura e pari a 80 °C; si suppone inoltre che le reazioni elettrochimiche avvengano istantaneamente. All'interno del sottosistema di tensione della cella sono contenute le equazioni necessarie al calcolo della tensione erogata, sulla base della pressione, della temperatura, delle pressioni parziali dei reagenti e della umidità della membrana. È stata analizzata la dinamica introdotta dalle caratteristiche capacitive degli elettrodi,

ma non inclusa nel modello. I sottosistemi dei flussi anodico e catodico permettono di calcolare le variazioni dinamiche di pressione ed umidità dei gas reagenti. In Figura 1.14 sono rappresentati i flussi di massa all'interno della cella elementare.

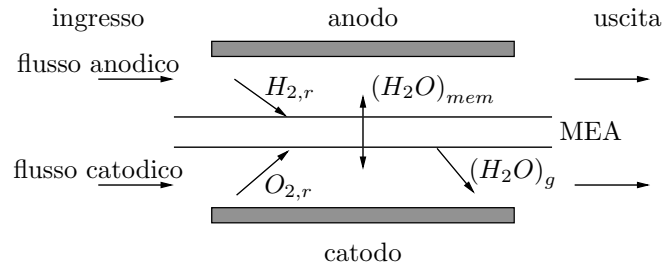
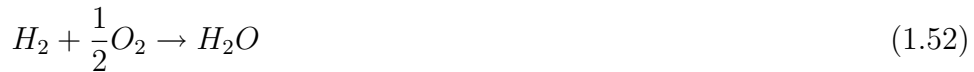


Figura 1.14: Flussi di massa nella cella a combustibile

### 1.5.1 Il sottosistema di tensione

Il calcolo della tensione erogata è basato su una combinazione di relazioni fisiche ed empiriche. La tensione erogata a circuito aperto è ottenuta dal bilancio energetico fra reagenti e prodotti, mentre per il calcolo della tensione a circuito chiuso bisogna tenere in conto le perdite della cella, che in questo studio sono state divise in tre principali tipologie.

**La tensione a circuito aperto** Com'è noto, la cella a combustibile converte direttamente l'energia chimica dei reagenti in energia elettrica; l'energia chimica trasformata all'interno della cella può essere calcolata tramite la variazione di energia libera di Gibbs, nel passaggio dai reagenti al prodotto [25]. Per la cella a combustibile a idrogeno puro, la reazione base è



per cui la variazione  $\Delta g_f$  di energia libera è pari a:

$$\Delta g_f = g_{f,p} - g_{f,r} = (g_f)_{H_2O} - (g_f)_{H_2} - (g_f)_{O_2} \quad (1.53)$$

essendo  $g_{f,p}$  l'energia libera dei prodotti e  $g_{f,r}$  l'energia libera posseduta dai reagenti. La variazione di energia libera è altresì dipendente dalle condizioni termodinamiche, vale a dire pressione e temperatura, a cui avviene la reazione, secondo la relazione:

$$\Delta g_f = \Delta g_f^0 - RT_{fc} \log \left( \frac{p_{H_2} \sqrt{p_{O_2}}}{p_{H_2O}} \right) \quad (1.54)$$



essendo  $R$  la costante universale dei gas e  $\Delta g_f^0$  la variazione di energia libera di Gibbs calcolata a pressione atmosferica, funzione a sua volta della temperatura  $T_{fc}$  operativa della cella a combustibile, espressa in  $K$ . In Tabella 1.5 sono riportati i valori della variazione  $\Delta g_f^0$  di energia libera a pressione standard, per diversi valori di temperatura; il valore negativo di  $\Delta g_f^0$  indica un rilascio di energia nella trasformazione da reagenti a prodotti.

prodotto	temperatura [°C]	$\Delta g_f^0$ kJ/mol
acqua	25	-237,2
acqua	80	-228,2
vapore	80	-226,1
vapore	100	-225,2
vapore	200	-220,4
vapore	400	-210,3
vapore	600	-199,6
vapore	800	-188,6
vapore	1000	-177,4

Tabella 1.5: Variazione di energia libera nella cella a combustibile

Se la trasformazione che opera la cella a combustibile fosse reversibile, tutta la variazione di energia libera di Gibbs sarebbe convertita in energia elettrica. Per ogni mole di idrogeno bimolecolare, due moli di elettroni sono deviate sul circuito elettrico collegato alla cella, pertanto il lavoro  $L_e$  elettrico ottenuto è pari a:

$$L_e = -2FE \quad (1.55)$$

essendo  $F$  la costante di Faraday, ovvero la carica elettrica di una mole di elettroni, ed  $E$  la tensione della cella a combustibile. Se il sistema fosse reversibile, si avrebbe allora:

$$\Delta g_f = -2FE \quad (1.56)$$

per cui, in accordo a (1.54), si avrebbe che:

$$E = -\frac{\Delta g_f}{2F} = -\frac{\Delta g_f^0}{2F} + \frac{RT_{fc}}{2F} \log \left( \frac{p_{H_2} \sqrt{p_{O_2}}}{p_{H_2O}} \right) \quad (1.57)$$

In realtà la trasformazione che si instaura all'interno della cella a combustibile non è reversibile: una quota parte dell'energia chimica disponibile è convertita in calore e la tensione realmente presente ai morsetti della cella

è inferiore al valore teorico. Per questo motivo, la tensione definita in (1.57) è detta *tensione reversibile a circuito aperto* o, più semplicemente, *tensione di Nernst*. Il primo addendo in (1.57) varia dal valore corrispondente alle condizioni termodinamiche standard in funzione della temperatura, secondo la relazione [26]:

$$-\frac{\Delta g_f}{2F} = 1,229 + (T_{fc} - T_0) \left( \frac{\Delta S^0}{2F} \right) \quad (1.58)$$

dove  $T_0 = 298,15K$  è la temperatura corrispondente alle condizioni termodinamiche standard e  $\Delta S^0$  è la variazione di entropia. Considerato che la variazione del calore specifico, con le variazioni attese di temperatura, è minima, la variazione  $\Delta S^0$  di entropia per la reazione data può essere considerata costante, pertanto:

$$-\frac{\Delta g_f}{2F} = 1,229 - \frac{298,15\Delta S_0^0}{2F} + \left( \frac{\Delta S^0}{2F} \right) T_{fc} \quad (1.59)$$

Infine, utilizzando il valore della variazione di entropia in condizioni standard, (1.59) può essere riscritta come:

$$E = 1,229 - 0,85 \cdot 10^{-3} (T_{fc} - T_0) + 4,3085 \cdot 10^{-5} T_{fc} \left[ \log(p_{H_2}) + \frac{1}{2} \log(p_{O_2}) \right] \quad (1.60)$$

esprimendo le temperature in  $K$  e le pressioni in  $atm$ .

Durante il normale funzionamento, la tensione reale presente ai capi della cella a combustibile è comunque inferiore al valore espresso in (1.60), così come è possibile riscontrare dalla *curva di polarizzazione* riportata in Figura 1.2; detta curva riporta in ascisse la densità  $i$  di corrente della cella, ossia il rapporto fra la corrente  $I_{st}$  totale erogata e l'area  $A_{fc}$  utile alla trasformazione:

$$i = \frac{I_{st}}{A_{fc}} \quad (1.61)$$

mentre in ordinata è riportata la tensione di ogni cella elementare. La differenza fra la tensione a vuoto e la tensione a carico è dovuta alle perdite per irreversibilità, ossia perdite di *attivazione*, *ohmiche* e *di concentrazione*.

**Perdite di attivazione** Le perdite di attivazione sono generate dalla necessità di rompere i legami fra gli elettroni e l'idrogeno, nonché dalla necessità di creare nuovi legami sugli elettrodi. Parte dell'energia disponibile è persa

per realizzare le trasformazioni chimiche che trasferiscono gli elettroni da e verso gli elettrodi, per cui le perdite di attivazione si hanno sia sul catodo sia sull'anodo. Tuttavia, l'ossidazione dell'idrogeno all'anodo è molto rapida, mentre la riduzione dell'ossigeno al catodo è considerevolmente più lenta; in conseguenza di ciò, la caduta di tensione per perdite di attivazione è preponderante al catodo. Esprimendo le perdite di attivazione sotto forma di una caduta  $v_{act}$  di tensione, si ha che detta caduta può essere espressa da (1.62), detta *Equazione di Tafel* [27]:

$$v_{act} = a \log \left( \frac{i}{i_0} \right) \quad (1.62)$$

essendo  $a$  una costante e  $i_0$  la *densità di corrente di scambio*, entrambe determinate empiricamente.

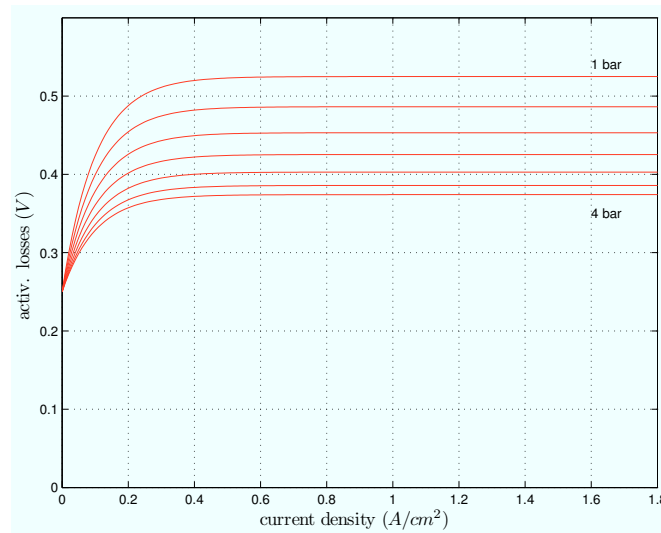


Figura 1.15: Caduta di tensione per perdite di attivazione

L'1.62 è valida solo se la densità  $i$  di corrente è maggiore della densità  $i_0$  di scambio, che per celle a combustibile di tipo PEM a bassa temperatura ha un valore circa pari a  $0,1 \text{ mA/cm}^2$ . Se  $i < i_0$ , si ha un'altra relazione approssimata:

$$v_{act} = v_0 + v_a (1 - e^{-ic_1}) \quad (1.63)$$

dove  $v_0$  è la caduta di tensione di attivazione a vuoto e  $v_a$  e  $c_1$  sono costanti. La caduta di tensione di attivazione dipende fortemente dalla temperatura e dalla pressione parziale dell'ossigeno; i valori delle costanti in gioco, nonché la

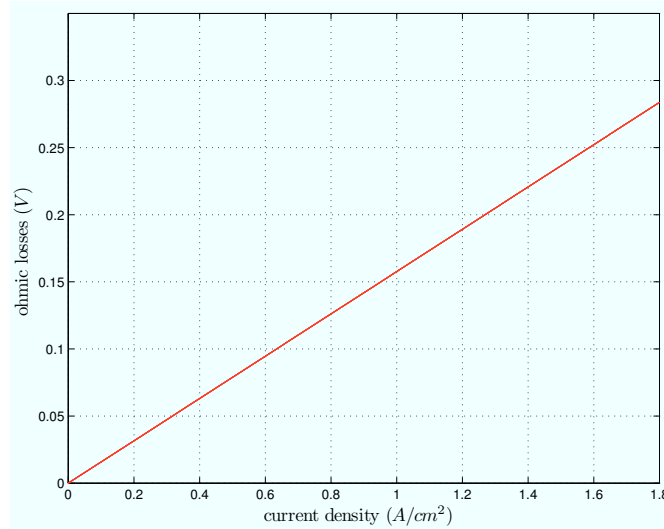


Figura 1.16: Caduta di tensione per perdite ohmiche

loro dipendenza dalla pressione e dalla temperatura, possono essere determinati mediante una regressione non lineare dei dati sperimentali, utilizzando come funzione base (1.63). In Figura 1.15 è riportato l'andamento delle perdite di attivazione con pressione variabile da 1 a 4 *atm* e temperatura pari a 80 °C, considerando valida (1.63).

**Perdite ohmiche** Le perdite ohmiche sono generate dalla resistenza offerta dalla membrana polimerica al passaggio dei protoni e dalla resistenza offerta dagli elettrodi e dal piatto bipolare al passaggio degli elettroni.

La caduta di tensione corrispondente a questa quota parte di perdite è proporzionale alla densità di corrente:

$$v_{ohm} = iR_{ohm} \quad (1.64)$$

essendo  $R_{ohm}$  la resistenza elettrica interna, misurata in  $\Omega \cdot cm^2$ . Detta resistenza dipende fortemente dal livello di idratazione della membrana e dalla temperatura della cella. Diversi studi hanno mostrato che la resistenza ohmica della membrana è funzione della conduttività  $\sigma_m$  della stessa, misurata in  $(\Omega \cdot cm)^{-1}$ , secondo la relazione:

$$R_{ohm} = \frac{t_m}{\sigma_m} \quad (1.65)$$

avendo indicato con  $t_m$  lo spessore della membrana. Anche la conduttività  $\sigma_m$  è funzione del livello  $\lambda_m$  di idratazione della membrana e della temperatura

della cella; valori di  $\lambda_m$  compresi fra 0 e 14 corrispondono a valori di umidità relativa compresi fra lo 0% e il 100%. A seguito di una variazione dell'umidità della membrana, la conduttività varia in accordo alla seguente relazione:

$$\sigma_m = b_1 e^{b_2 \left( \frac{1}{303} - \frac{1}{T_{fc}} \right)} \quad (1.66)$$

essendo  $b_2$  una costante e  $b_1$  a sua volta funzione del livello  $\lambda_m$  di umidità:

$$b_1 = b_{11} \lambda_m - b_{12} \quad (1.67)$$

Tutte le costanti utilizzate sono solitamente ricavate empiricamente. In particolare, valori empirici per  $b_{11}$  e  $b_{12}$  relativi al Nafion 117 sono stati ricavati in [28]. La conduttività  $\sigma_m$  della membrana (1.66) è calcolata nel modello di idratazione della membrana, che sarà esaminato più avanti. In Figura 1.16 è riportato l'andamento delle perdite ohmiche con pressione variabile da 1 a 4 *atm* e temperatura pari a 80 °C; è evidente l'indipendenza di questa quota parte di perdite dalla pressione.

**Perdite di concentrazione** La caduta di tensione per concentrazione è generata dalla brusca diminuzione di concentrazione dei reagenti in conseguenza ad elevati aumenti di carico. Queste perdite sono la principale ragione per cui la tensione erogata dalla cella a combustibile diminuisce rapidamente all'aumentare dei carichi. In [17] è stata fornita una relazione che permette di approssimare la relativa caduta di tensione come:

$$v_{con} = i \left( c_2 \frac{i}{i_{max}} \right)^{c_3} \quad (1.68)$$

avendo indicato con  $c_2$ ,  $c_3$  e  $i_{max}$  costanti dipendenti dalla temperatura e dalle pressioni parziali dei reagenti, determinate empiricamente. In particolare, il parametro  $i_{max}$  è la densità di corrente in corrispondenza alla quale si ha un crollo della tensione erogata. In Figura 1.17 è riportato l'andamento delle perdite di concentrazione con pressione variabile da 1 a 4 *atm* e temperatura pari a 80 °C.

**La tensione di cella** Combinando tutte le quote perdite di energia esaminate precedentemente, si ottiene che la tensione disponibile ai morsetti di una singola cella elementare è pari a [29]:

$$\begin{aligned} v_{fc} &= E - v_{act} - v_{ohm} - v_{con} = \\ &= E - [v_0 + v_a (1 - e^{-ic_1})] - [i \cdot R_{ohm}] - \left[ i \left( c_2 \frac{i}{i_{max}} \right)^{c_3} \right] \end{aligned} \quad (1.69)$$

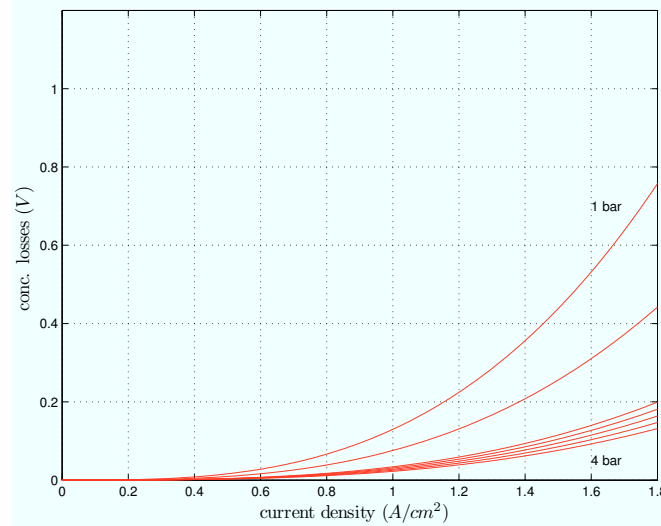


Figura 1.17: Caduta di tensione per perdite di concentrazione

essendo la tensione  $E$  a circuito aperto calcolata in accordo a (1.60). I parametri contenuti all'interno dell'1.69 sono stati determinati utilizzando un metodo di regressione lineare, in particolare la funzione `lsqcurvefit` dell'*Optimization Toolbox*® del programma di calcolo numerico MATLAB™, sulle curve di polarizzazione di un sistema cella a combustibile di tipo PEM [30]. La totale tensione  $v_{st}$  disponibile ai morsetti della cella a combustibile può essere ottenuta, considerando un certo numero  $n$  di celle elementari identiche ed identicamente funzionanti collegate in serie, come somma delle tensioni  $v_{fc}$  elementari:

$$v_{st} = nv_{fc} \quad (1.70)$$

I coefficienti in (1.65) sono stati determinati supponendo che il sistema cella a combustibile operasse in un ambiente ben controllato, in cui il flusso catodico fosse perfettamente umidificato e con un rapporto di eccesso d'ossigeno pari a 2.

Si consideri inoltre che i dati riportati in [30] sono stati ricavati a partire da condizioni statiche, per cui mostrano soltanto l'influenza dei diversi valori di pressione e temperatura sulle condizioni di funzionamento della cella a combustibile. Gli effetti della pressione parziale dei reagenti e del livello di umidificazione della membrana sono stati inclusi separando i rispettivi contributi nel calcolo della regressione delle perdite di attivazione e concentrazione.

Più specificatamente, il valore del coefficiente  $b_2$  è stato identificato dopo aver imposto il coefficiente  $b_1$  in (1.66) al valore corrispondente alla massima

umidità:

$$b_1 = 14b_{11} - b_{12} = 14 \cdot 0,005139 - 0,00326 = 0,068686 \quad (1.71)$$

essendo i valori di  $b_{11}$  e  $b_{12}$  quelli calcolati in [28], mentre il valore ottimale  $b_2 = 350$  ottenuto è differente da quello ivi riportato. I restanti parametri nell'1.70 sono stati determinati per ogni valore di temperatura e successivamente interpolati. I risultati della regressione numerica sono i seguenti:

$$\begin{aligned} E &= 1,229 - 8,5 \cdot 10^{-4} (T_{fc} - 298,15) + \\ &\quad + 4,308 \cdot 10^{-5} T_{fc} \left( \log \frac{p_{H_2}}{1,01325} + \frac{1}{2} \log \frac{p_{O_2}}{1,01325} \right) \\ v_0 &= 0,279 - 8,5 \cdot 10^{-4} (T_{fc} - 298,15) + \\ &\quad + 4,308 \cdot 10^{-5} T_{fc} \left[ \log \left( \frac{p_{ca} - p_{sat}}{1,01325} \right) + \frac{1}{2} \log \left( \frac{0,1173 (p_{ca} - p_{sat})}{1,01325} \right) \right] \\ v_a &= (-1,618 \cdot 10^{-5} T_{fc} + 1,618 \cdot 10^{-2}) \left( \frac{p_{O_2}}{0,1173} + p_{sat} \right)^2 + \\ &\quad + (1,8 \cdot 10^{-4} T_{fc} - 0,166) \left( \frac{p_{ca} - p_{sat}}{1,01325} \right) + (-5,8 \cdot 10^{-4} T_{fc} + 0,5763) \\ c_1 &= 10 \\ t_m &= 0,0125 \\ b_1 &= 0,005139 \lambda_m - 0,00326 \\ b_2 &= 350 \\ c_2 &= \begin{cases} (7,16 \cdot 10^{-4} T_{fc} - 0,622) \left( \frac{p_{O_2}}{1,01325} + p_{sat} \right) \\ \quad + (-1,45 \cdot 10^{-3} T_{fc} + 1,68) \text{ per } \left( \frac{p_{O_2}}{1,01325} + p_{sat} \right) < 2 \text{ atm} \\ (8,66 \cdot 10^{-5} T_{fc} - 0,068) \left( \frac{p_{O_2}}{1,01325} + p_{sat} \right) \\ \quad + (-1,6 \cdot 10^{-4} T_{fc} + 0,54) \text{ per } \left( \frac{p_{O_2}}{1,01325} + p_{sat} \right) \geq 2 \text{ atm} \end{cases} \\ i_{max} &= 2,2 \\ c_3 &= 2 \end{aligned} \quad (1.72)$$

dove  $T_{fc}$  è la temperatura della cella a combustibile,  $p_{ca}$  è la pressione al catodo,  $p_{sat}$  è la pressione di saturazione dell'acqua, funzione della temperatura,

ed infine  $p_{O_2}$  e  $p_{H_2}$  sono le pressioni parziali dell'ossigeno al catodo e dell'idrogeno all'anodo; le temperature si intendono espresse in  $K$  e le pressioni in  $bar$ .

La variazione dell'umidificazione della membrana elettrolitica ha notevoli influenze sulla curva di polarizzazione; il dimezzamento del contenuto di umidità della membrana, provoca una grande variazione di tensione. Si consideri inoltre che una membrana ipersaturata, altrimenti detta *allagata*, causa condensa e formazione di liquido sugli elettrodi, dunque diminuzione della tensione erogata, ma questo effetto è stato trascurato nel modello.

Il calcolo dei parametri presenti in (1.72) richiede la conoscenza della pressione  $p_{ca}$  al catodo, della pressione  $p_{O_2}$  parziale dell'ossigeno e della temperatura  $T_{fc}$  operativa della cella; le pressioni possono essere calcolate a partire dal modello del catodo, più avanti esaminato, mentre la temperatura potrebbe essere calcolata dal modello di scambio termico della cella, sebbene in questo studio si sia invece preferito supporre una temperatura operativa costante e dunque nota *a priori*.

**La dinamica elettrica** La cella a combustibile possiede un rapido comportamento dinamico, noto come fenomeno del *doppio strato di carica* [27]. In particolare, nelle vicinanze dello strato di separazione fra elettrodo ed elettrolita, si trova uno strato di cariche, detto appunto doppio strato di carica, che immagazzina carica elettrica, dunque energia. Questo strato si comporta come un condensatore e la carica in esso accumulata genera una tensione corrispondente alla somma delle cadute di tensione di attivazione e di concentrazione. Per questo motivo, in seguito a rapide variazioni di corrente, la somma delle due cadute di tensione non si adegua istantaneamente al mutato regime, mentre la caduta di tensione ohmica segue istantaneamente il nuovo regime. È dunque possibile utilizzare il circuito equivalente riportato nella Figura 1.18 per modellizzare la dinamica di questo fenomeno [31]. In accordo alla (1.63) e (1.68), è possibile definire una resistenza  $R_{act}$  d'attivazione ed una resistenza  $R_{con}$  di concentrazione, date da:

$$R_{act} = \frac{1}{i} [v_0 + v_a (1 - e^{-jc_1})] \quad (1.73a)$$

$$R_{con} = \left( c_2 \frac{i}{i_{max}} \right)^{c_3} \quad (1.73b)$$

per cui:

$$C \frac{dv_c}{dt} = i - \frac{v_c - v_0}{R_{act} + R_{con}} \quad (1.74a)$$

$$v_{fc} = E - v_c - iR_{ohm} \quad (1.74b)$$



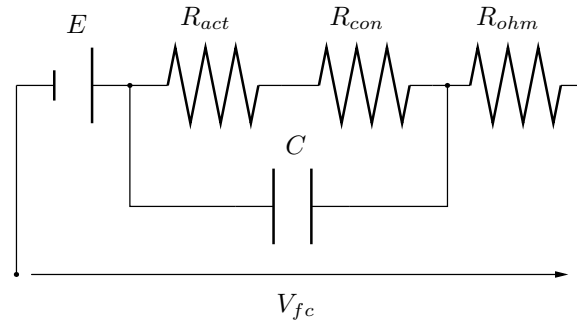


Figura 1.18: Circuito elettrico equivalente della cella a combustibile

La costante di tempo del circuito elettrico equivalente della cella a combustibile non è ben definita; alcune fonti, come [17], riportano una costante di tempo dell'ordine di  $10^{-19}$  s; questo valore è da intendersi valido per una singola cella elementare, per cui è lecito pensare che la cella risultante abbia una dinamica più lenta. Ad ogni modo, in questo studio si è scelto di trascurare questa dinamica, considerati gli effetti preponderanti della dinamica introdotta dai fenomeni idraulici che si instaurano nei collettori.

### 1.5.2 Il sottosistema catodico

Il modello catodico è stato sviluppato considerando il principio di conservazione della massa e le proprietà termodinamiche e psicrometriche dell'aria. Il principio di conservazione della massa serve a bilanciare i flussi delle tre sostanze che circolano all'interno del circuito catodico, ossia ossigeno, azoto e acqua, così come rappresentato nella Figura 1.19.

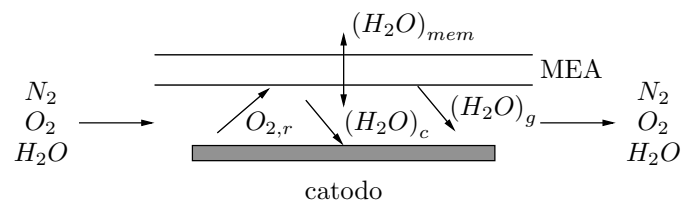


Figura 1.19: Flussi di massa catodici

Gli stati del modello sono:

- la massa  $m_{O_2,ca}$  di ossigeno;
- la massa  $m_{w,ca}$  di acqua;
- la massa  $m_{N_2,ca}$  di azoto.

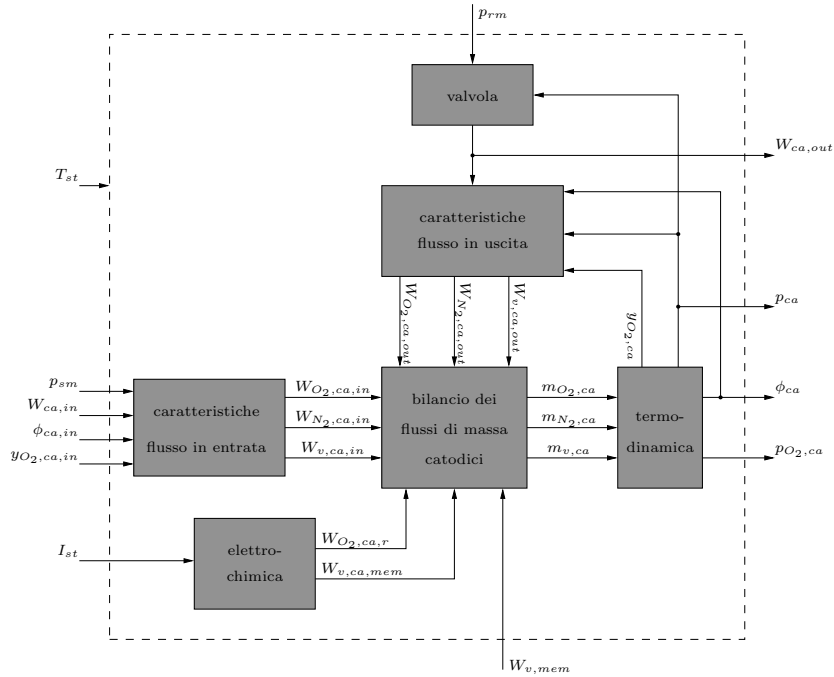


Figura 1.20: Schema a blocchi del catodo

Gli ingressi del modello sono:

- la corrente  $I_{st}$  erogata dalla cella a combustibile;
- la temperatura  $T_{st}$  del sistema;
- la portata  $W_{w,mem}$  di acqua attraverso la membrana;
- la pressione in uscita, ossia la pressione  $p_{rm}$  del collettore di ritorno;
- le proprietà termodinamiche e psicrometriche del flusso in entrata, ossia:
  - la temperatura  $T_{ca,in}$ ;
  - la pressione  $p_{ca,in}$ ;
  - la portata  $W_{ca,in}$ ;
  - l'umidità  $\phi_{ca,in}$ ;
  - la frazione molare  $y_{O_2,ca,in}$  di ossigeno.

Se si considera che il circuito catodico è alimentato dall'aria atmosferica, allora la frazione molare  $y_{O_2,ca,in}$  di ossigeno è nota e pari a 0,21. La temperatura di stack è, per le ipotesi fatte precedentemente, considerata costante; la portata  $W_{w,mem}$  di acqua attraverso la membrana può essere ottenuta dal modello di idratazione della membrana, esaminato più avanti, mentre le caratteristiche del flusso in ingresso sono fornite dal modello dell'umidificatore. In Figura 1.20 è riportato lo schema a blocchi del catodo.

Diverse sono le ipotesi effettuate:

- tutti i gas sono considerati gas perfetti;
- il sistema di controllo della temperatura del sistema cella a combustibile è tale da mantenere la temperatura costante e pari a 80 °C, uniforme all'interno del sistema;
- le variabili termodinamiche e psicrometriche del flusso catodico non subiscono variazioni nel transito;
- se l'umidità relativa del gas all'interno del catodo supera il 100%, si forma condensa al suo interno. Questa condensa non esce dalla cella a combustibile e dunque evaporerà quando l'umidità del gas catodico scenderà al di sotto del 100% o si accumulerà all'interno del catodo.
- Infine, si suppone che il volume del canale di flusso e dello strato di carbone poroso antistante l'elettrodo siano raggruppati in un unico volume, i.e. si trascurano le variazioni spaziali.

In accordo al principio di conservazione di massa, si ha:

$$\frac{dm_{O_2,ca}}{dt} = W_{O_2,ca,in} - W_{O_2,ca,out} - W_{O_2,r} \quad (1.75a)$$

$$\frac{dm_{N_2,ca}}{dt} = W_{N_2,ca,in} - W_{N_2,ca,out} \quad (1.75b)$$

$$\frac{dm_{w,ca}}{dt} = W_{v,ca,in} - W_{v,ca,out} + W_{v,ca,gen} + W_{v,mem} - W_{l,ca,out} \quad (1.75c)$$

essendo:

- $W_{O_2,ca,in}$  la portata di ossigeno in ingresso al catodo;
- $W_{O_2,ca,out}$  la portata di ossigeno in uscita dal catodo;
- $W_{O_2,r}$  la portata di ossigeno consumato nella reazione;
- $W_{N_2,ca,in}$  la portata di azoto in ingresso al catodo;

- $W_{O_2,ca,out}$  la portata di azoto in uscita dal catodo;
- $W_{v,ca,in}$  la portata di vapore in ingresso al catodo;
- $W_{v,ca,out}$  la portata di vapore in uscita dal catodo;
- $W_{v,ca,gen}$  la portata di vapore generata nella reazione;
- $W_{v,mem}$  la portata di acqua che attraversa la membrana;
- $W_{l,ca,out}$  la portata di acqua liquida in uscita dal catodo.

Tutte le portate sopraindicate sono espresse in  $kg/s$ ; le portate in ingresso sono calcolate a partire dai parametri termodinamici e psicrometrici di ingresso, che costituiscono gli ingressi del sottosistema catodico. Similmente, la portata massica in uscita dal catodo, unitamente ai parametri del flusso in uscita, è utilizzata per il calcolo delle singole portate in uscita. Le quantità di ossigeno consumato e di vapore prodotto sono calcolate a partire dal valore di corrente erogata dal sistema, sulla base dei principi elettrochimici di funzionamento della cella. Il flusso di acqua attraverso la membrana è determinato dal modello di idratazione della membrana, più avanti esaminato. In accordo alle ipotesi precedentemente effettuate, la portata di acqua liquida in uscita dal catodo è nulla,  $W_{l,ca,out} = 0$ .

L'acqua all'interno del catodo è in due forme: vapore e liquido, in dipendenza del livello di saturazione del gas catodico. La massa massima di vapore che suddetto gas può contenere può essere calcolata dalla pressione di saturazione del vapore:

$$m_{v,max,ca} = \frac{p_{sat} V_{ca}}{R_v T_{st}} \quad (1.76)$$

detta  $R_v$  la costante relativa del vapore; se la massa di acqua calcolata in (1.75c) è maggiore di quella relativa alla saturazione, l'eccedenza si deposita sotto forma di condensa. Riassumendo, le masse di acqua sotto forma di vapore e liquida sono calcolate come segue:

$$\text{se } m_{w,ca} \leq m_{v,max,ca} \Rightarrow m_{v,ca} = m_{w,ca} \text{ e } m_{l,ca} = 0 \quad (1.77a)$$

$$\begin{aligned} \text{se } m_{w,ca} > m_{v,max,ca} \Rightarrow m_{v,ca} &= m_{v,max,ca} \text{ e} \\ m_{l,ca} &= m_{w,ca} - m_{v,max,ca} \end{aligned} \quad (1.77b)$$

Il calcolo della pressione e dell'umidità relativa del gas catodico è condotto a partire dalle masse di ossigeno, azoto e vapore, nonché dalla temperatura

del sistema. Utilizzando la legge dei gas perfetti, le pressioni parziali di ossigeno, azoto e vapore all'interno del canale di flusso del catodo possono essere calcolate come:

$$p_{O_2,ca} = \frac{m_{O_2,ca} R_{O_2} T_{st}}{V_{ca}} \quad (1.78a)$$

$$p_{N_2,ca} = \frac{m_{N_2,ca} R_{N_2} T_{st}}{V_{ca}} \quad (1.78b)$$

$$p_{v,ca} = \frac{m_{v,ca} R_v T_{st}}{V_{ca}} \quad (1.78c)$$

essendo  $R_{O_2}$ ,  $R_{N_2}$  e  $R_v$  le costanti relative di ossigeno, azoto e vapore, rispettivamente. La pressione parziale  $p_{a,ca}$  dell'aria secca è la somma delle pressioni parziali di azoto e ossigeno, mentre la pressione totale  $p_{ca}$  del catodo è la somma della pressione parziale dell'aria secca e del vapore:

$$p_{ca} = p_{a,ca} + p_{v,ca} = p_{O_2,ca} + p_{N_2,ca} + p_{v,ca} \quad (1.79)$$

La frazione molare dell'ossigeno è determinata dal rapporto fra la pressione parziale dello stesso e la pressione parziale dell'aria secca:

$$y_{O_2,ca} = \frac{p_{O_2,ca}}{p_{a,ca}} \quad (1.80)$$

mentre l'umidità relativa del gas catodico può essere ottenuta come:

$$\phi_{ca} = \frac{p_{v,ca}}{p_{sat}|_{T_{st}}} \quad (1.81)$$

Utilizzando (1.39) è possibile calcolare la pressione di saturazione, per cui la pressione parziale del vapore è data, in accordo a (1.40), da:

$$p_{v,ca,in} = \phi_{ca,in} p_{sat}|_{T_{ca,in}} \quad (1.82)$$

Essendo l'aria umida una miscela di aria secca e vapore, la pressione parziale dell'aria secca in ingresso può essere ottenuta come differenza fra la pressione parziale dell'aria umida e la pressione parziale del vapore:

$$p_{a,ca,in} = p_{ca,in} - p_{v,ca,in} \quad (1.83)$$

Quindi, il rapporto di umidità è pari a:

$$\omega_{ca,in} = \frac{M_v}{M_{a,ca,in}} \frac{p_{v,ca,in}}{p_{a,ca,in}} \quad (1.84)$$

essendo la massa molare  $M_{a,ca,in}$  dell'aria calcolata come:

$$M_{a,ca,in} = y_{O_2,ca,in} M_{O_2} + (1 - y_{O_2,ca,in}) M_{N_2} \quad (1.85)$$

essendo  $M_{O_2}$  e  $M_{N_2}$  le masse molari dell'ossigeno e dell'azoto, rispettivamente, ed essendo inoltre  $y_{O_2,ca,in} = 0,21$  per l'aria in ingresso. La portata di aria secca e vapore in ingresso al catodo è quindi pari a:

$$W_{a,ca,in} = \frac{1}{1 + \omega_{ca,in}} W_{ca,in} \quad (1.86a)$$

$$W_{v,ca,in} = W_{ca,in} - W_{a,ca,in} \quad (1.86b)$$

e le portate di ossigeno e azoto in ingresso sono pari a:

$$W_{O_2,ca,in} = x_{O_2,ca,in} W_{a,ca,in} \quad (1.87a)$$

$$W_{N_2,ca,in} = (1 - x_{O_2,ca,in}) W_{a,ca,in} \quad (1.87b)$$

dove  $x_{O_2,ca,in}$  è la frazione massica dell'ossigeno:

$$x_{O_2,ca,in} = \frac{m_{O_2}}{m_a} = \frac{y_{O_2,ca,in} M_{O_2}}{(y_{O_2,ca,in} M_{O_2}) + (1 - y_{O_2,ca,in}) M_{N_2}} \quad (1.88)$$

Con i dati fin qui ricavati è possibile infine risolvere le equazioni di stato (1.75a), (1.75b) e (1.75c).

Dalla conoscenza della portata totale in uscita dal catodo, è possibile ricavare le singole portate di ossigeno, azoto e vapore in uscita, in maniera simile a quanto fin qui riportato per il calcolo delle portate in ingresso. La portata totale in uscita può essere ottenuta applicando la relazione semplificata riportata in (1.32):

$$W_{ca,out} = k_{ca,out} (p_{ca} - p_{rm}) \quad (1.89)$$

Per cui si ottiene che:

$$M_{a,ca} = y_{O_2,ca} M_{O_2} + (1 - y_{O_2,ca}) M_{N_2} \quad (1.90a)$$

$$\omega_{ca,out} = \frac{M_v p_{v,ca}}{M_{a,ca} p_{a,ca}} \quad (1.90b)$$

$$W_{a,ca,out} = \frac{1}{1 + \omega_{ca,out}} W_{ca,out} \quad (1.90c)$$

$$W_{v,ca,out} = W_{ca,out} - W_{a,ca,out} \quad (1.90d)$$

$$x_{O_2,ca} = \frac{m_{O_2}}{m_a} = \frac{y_{O_2,ca} M_{O_2}}{(y_{O_2,ca} M_{O_2}) + (1 - y_{O_2,ca}) M_{N_2}} \quad (1.90e)$$

$$W_{O_2,ca,out} = x_{O_2,ca} W_{a,ca,out} \quad (1.90f)$$

$$W_{N_2,ca,out} = (1 - x_{O_2,ca}) W_{a,ca,out} \quad (1.90g)$$

Si noti che, a differenza di quanto accade per il calcolo delle portate in ingresso, la frazione molare  $y_{O_2,ca}$  dell'ossigeno non è costante, dato che è consumato nella reazione di produzione dell'energia elettrica; in particolare, si ha che la portata  $W_{O_2,r}$  di ossigeno consumato e la portata  $W_{v,ca,g}$  di vapore d'acqua prodotti, in funzione della corrente erogata sono:

$$W_{O_2,r} = M_{O_2} \frac{nI_{st}}{4F} \quad (1.91a)$$

$$W_{v,ca,g} = M_v \frac{nI_{st}}{2F} \quad (1.91b)$$

essendo  $n$  il numero di celle elementari e  $F$  il numero di Faraday.

### 1.5.3 Il sottosistema anodico

In questo studio, si è considerato che l'idrogeno sia compresso ed immagazzinato all'interno di un serbatoio; lo stoccaggio ad alta pressione permette di supporre che la portata in ingresso al catodo possa essere istantaneamente regolata da una valvola, al fine di minimizzare la differenza di pressione fra catodo ed anodo. Si considerano inoltre valide altre ipotesi, simili a quelle poste durante lo studio del sottosistema catodico; la temperatura del flusso entrante è uguale alla temperatura del sistema cella a combustibile e le caratteristiche termodinamiche e psicrometriche del flusso uscente sono le stesse di quelle del flusso anodico. Infine il volume del canale di flusso e dello strato di carbone poroso sono concentrati in un unico volume.

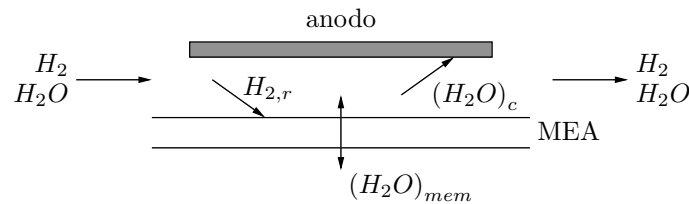


Figura 1.21: Flussi di massa anodici

La pressione parziale dell'idrogeno e l'umidità del flusso anodico possono essere calcolate bilanciando i flussi massici dell'idrogeno e dell'acqua nel circuito anodico, schematicamente rappresentati nella Figura 1.21. Gli ingressi del modello, del quale è riportato in Figura 1.22 uno schema a blocchi, sono:

- la portata totale  $W_{an,in}$  in ingresso;
- l'umidità  $\phi_{an,in}$  del flusso in ingresso;

- la temperatura  $T_{an,in}$  del flusso in ingresso;
- la corrente  $I_{st}$  erogata dal sistema;
- la temperatura  $T_{st}$  del sistema;
- la portata  $W_{v,mem}$  di vapore attraverso la membrana.

Le variabili di stato sono la massa  $m_{H_2,an}$  di idrogeno e la massa  $m_{w,an}$  di acqua all'interno dell'anodo:

$$\frac{dm_{H_2,an}}{dt} = W_{H_2,an,in} - W_{H_2,an,out} - W_{H_2,r} \quad (1.92a)$$

$$\frac{dm_{w,an}}{dt} = W_{v,an,in} - W_{v,an,out} - W_{v,mem} - W_{l,an,out} \quad (1.92b)$$

essendo:

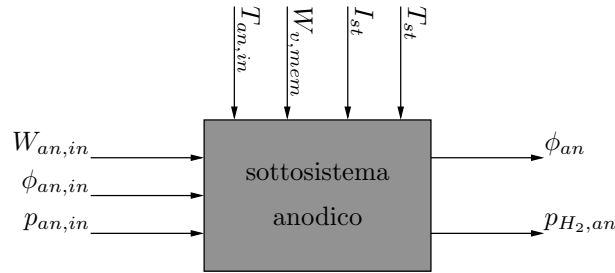


Figura 1.22: Schema a blocchi dell'anodo

- $W_{H_2,an,in}$  la portata di idrogeno in ingresso all'anodo;
- $W_{H_2,an,out}$  la portata di idrogeno in uscita dall'anodo;
- $W_{H_2,r}$  la portata di idrogeno consumato nella reazione;
- $W_{v,an,in}$  la portata di vapore in ingresso all'anodo;
- $W_{v,an,out}$  la portata di vapore in uscita dall'anodo;
- $W_{v,mem}$  la portata di acqua che attraversa la membrana;
- $W_{l,ca,out}$  la portata di acqua liquida in uscita dall'anodo.



Tutte le portate sopraindicate sono espresse in  $kg/s$ ; se la massa di acqua calcolata in (1.92b) è maggiore di quella relativa alla saturazione, l'eccedenza si deposita sotto forma di condensa. Dunque, le masse di acqua sotto forma di vapore e liquida sono calcolate come segue:

$$\text{se } m_{w,an} \leq m_{v,max,an} \Rightarrow m_{v,an} = m_{w,an} \text{ e } m_{l,an} = 0 \quad (1.93a)$$

$$\begin{aligned} \text{se } m_{w,an} > m_{v,max,an} \Rightarrow m_{v,an} &= m_{v,max,an} \\ \text{e } m_{l,an} &= m_{w,an} - m_{v,max,an} \end{aligned} \quad (1.93b)$$

dove la massa massima di vapore che il gas anodico può contenere può essere calcolata dalla pressione di saturazione del vapore:

$$m_{v,max,an} = \frac{p_{sat}V_{an}}{R_v T_{st}} \quad (1.94)$$

Similmente a quanto svolto precedentemente, la pressione e l'umidità relativa del gas anodico possono essere calcolate a partire dalle masse di idrogeno e vapore, nonché dalla temperatura del sistema. Utilizzando la legge dei gas perfetti, si ha che:

$$p_{H_2,an} = \frac{m_{H_2,an} R_{H_2} T_{st}}{V_{an}} \quad (1.95a)$$

$$p_{v,an} = \frac{m_{v,an} R_v T_{st}}{V_{an}} \quad (1.95b)$$

essendo  $R_{H_2}$  la costante relativa dell'idrogeno. La pressione totale  $p_{an}$  dell'anodo è la somma della pressione parziale dell'idrogeno e del vapore:

$$p_{an} = p_{H_2,an} + p_{v,an} \quad (1.96)$$

L'umidità relativa del gas anodico è pari a:

$$\phi_{an} = \frac{p_{v,an}}{p_{sat}|_{T_{st}}} \quad (1.97)$$

avendo calcolato la pressione di saturazione mediante (1.39). Le portate massiche  $W_{H_2,an}$  dell'idrogeno e  $W_{v,an}$  del vapore sono dunque calcolate utilizzando i valori della totale portata massica  $W_{an,in}$  in ingresso all'anodo e il valore  $\phi_{an,in}$  di umidità relativa del flusso entrante. La pressione parziale del vapore è data, in accordo a (1.40), da:

$$p_{v,an,in} = \phi_{an,in} p_{sat}|_{T_{an,in}} \quad (1.98)$$

La pressione parziale dell'idrogeno entrante è calcolata come differenza fra la pressione del flusso entrante e la pressione parziale del vapore:

$$p_{H_2,an,in} = p_{an,in} - p_{v,an,in} \quad (1.99)$$

per cui, il rapporto di umidità è pari a:

$$\omega_{an,in} = \frac{M_v}{M_{H_2}} \frac{p_{v,an,in}}{p_{an,in}} \quad (1.100)$$

essendo  $M_{H_2}$  la massa molare dell'idrogeno. Ne risulta che le portate di idrogeno e vapore in ingresso all'anodo sono pari a:

$$W_{H_2,an,in} = \frac{1}{1 + \omega_{an,in}} W_{an,in} \quad (1.101a)$$

$$W_{v,an,in} = W_{an,in} - W_{H_2,an,in} \quad (1.101b)$$

Questi valori sono quindi utilizzati in (1.92a) e (1.92b). La portata  $W_{H_2,r}$  di idrogeno consumato nelle reazioni elettrochimiche, in funzione della corrente erogata è:

$$W_{H_2,r} = M_{H_2} \frac{nI_{st}}{2F} \quad (1.102)$$

Il flusso  $W_{an,out}$  uscente dall'anodo rappresenta lo scarico del gas anodico, la cui funzione è permettere la rimozione dall'anodo dell'acqua liquida accumulatasi e altri eventuali gas prodotti nel caso in cui non si utilizzi idrogeno puro come combustibile; in questo studio si assume che non vi sia alcuno scarico anodico, ad ogni modo, se è nota la portata in uscita, allora le portate uscenti di idrogeno e di vapore possono essere calcolate. Detto  $\omega_{an,out}$  il rapporto di umidità del flusso uscente:

$$\omega_{an,out} = \frac{M_v}{M_{H_2}} \frac{p_{v,an,in}}{p_{H_2,ca}} \quad (1.103)$$

si ottiene infine che:

$$W_{H_2,an,out} = \frac{1}{1 + \omega_{an,out}} W_{an,out} \quad (1.104a)$$

$$W_{v,an,out} = W_{an,out} - W_{H_2,an,out} \quad (1.104b)$$

Si considera che l'acqua liquida prodotta durante il funzionamento sia accumulata all'interno dell'anodo, e che non vi sia alcuno sbocco disponibile all'esterno; pertanto, la portata  $W_{l,an,out}$  di acqua liquida uscente è nulla. Infine, la portata di vapore attraverso la membrana è determinata nel sottosistema di idratazione della membrana, esaminato successivamente.

### 1.5.4 Il sottosistema di idratazione [32]

Il modello dell'idratazione della membrana, schematicamente riportato in Figura 1.23, consente il calcolo dell'acqua contenuta nella membrana e della portata di vapore attraverso la stessa. Gli ingressi di tale modello sono:

- l'umidità relativa  $\phi_{ca}$  del flusso di massa catodico;
- l'umidità relativa  $\phi_{an}$  del flusso di massa anodico;
- la corrente elettrica  $I_{st}$  erogata dal sistema cella a combustibile;
- la temperatura  $T_{st}$  del sistema.

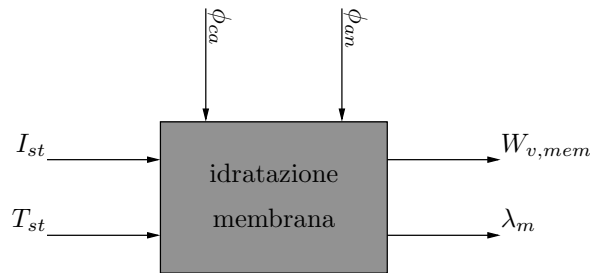


Figura 1.23: Schema a blocchi del modello di idratazione della membrana

Le equazioni di seguito esaminate permettono il calcolo della portata massica  $W_{v,mem}$  di vapore d'acqua che attraversa la membrana e il livello  $\lambda_m$  di umidificazione della stessa. Queste grandezze dipendono dalla corrente erogata e dall'umidità relativa dei flussi del catodo e dell'anodo, queste ultime provenienti, rispettivamente, dal sottosistema catodico e anodico. Il trasporto di acqua attraverso la membrana avviene attraverso due distinti fenomeni:

- le molecole d'acqua sono trascinate attraverso la membrana dall'anodo al catodo tramite gli ioni positivi di idrogeno; questo fenomeno è denominato *elettrosmosi da trascinamento*. La quantità di acqua trasportata è determinata dal coefficiente  $n_d$  di elettrosmosi, definito come il numero di molecole trasportate da ogni protone:

$$N_{v,osm} = n_d \frac{i}{F} \quad (1.105)$$

essendo  $N_{v,osm}$  il flusso netto, misurato in  $mol/(s \cdot cm^2)$ , di acqua dall'anodo al catodo causato dall'elettrosmosi.

- A causa di un gradiente di concentrazione di acqua nella membrana, generato dalla differenza di umidità tra il flusso anodico e quello catodico, si instaura una diffusione di acqua dal catodo verso l'anodo; si ricorda, ove fosse necessario, che l'umidità catodica è maggiore in quanto è prodotta acqua nella corrispondente reazione. La quantità di acqua trasportata per *diffusione* è pari a:

$$N_{v,dif} = D_w \frac{dc_v}{dy} \quad (1.106)$$

dove  $N_{v,dif}$  è il flusso netto, sempre misurato in  $mol/(s \cdot cm^2)$ , di acqua diffusa dal catodo all'anodo,  $c_v$  è la concentrazione di acqua, misurata in  $mol/cm^3$ ,  $y$  è la direzione normale della membrana, misurata in  $cm$ , ed infine  $D_w$  è il coefficiente di diffusione, misurato in  $cm^2/s$ , nella membrana.

Tenendo conto di entrambi i fenomeni descritti ed ipotizzando che il gradiente di concentrazione dell'acqua sia linearmente proporzionale allo spessore della membrana, la quantità  $N_{v,mem}$  d'acqua che attraversa la membrana può essere calcolata come:

$$N_{v,mem} = n_d \frac{i}{F} - D_w \frac{c_{v,ca} - c_{v,an}}{t_m} \quad (1.107)$$

assumendo positivo il flusso di acqua verso il catodo. Per una particolare membrana, sia il coefficiente  $n_d$  che il coefficiente di diffusione  $D_w$  variano con il contenuto d'acqua nella membrana, che a sua volta dipende dall'umidità contenuta nei gas reagenti. In (1.107) è riportata la relazione che fornisce il valore del flusso di acqua per unità di area in un singola cella; il flusso di massa attraverso l'intero sistema può essere calcolato come:

$$W_{v,mem} = N_{v,mem} M_v A_{fc} n \quad (1.108)$$

avendo indicato con  $A_{fc}$  l'area attiva, in  $cm^2$ , del sistema cella a combustibile.

Il valor medio fra l'acqua contenuta nel flusso anodico e in quello catodico può essere utilizzato per quantificare il contenuto d'acqua della membrana. Tuttavia, utilizzare il contenuto d'acqua del flusso anodico costituisce una misura cautelativa, in quanto il contenuto di acqua della membrana tende a diminuire in prossimità della zona anodica; ciò è dovuto all'elevata densità di corrente, per cui la quantità d'acqua trasportata dall'anodo verso il catodo per elettrosmosi supera la quantità d'acqua trasportata dal catodo all'anodo per diffusione. I coefficienti di diffusione e di elettrosmosi possono essere

calcolati a partire dai valori di *fugacità*  $a$  dei gas anodico e catodico:

$$a_{ca} = \frac{y_{v,ca}p_{ca}}{p_{sat,ca}} = \frac{p_{v,ca}}{p_{sat,ca}} \quad (1.109a)$$

$$a_{an} = \frac{y_{v,an}p_{an}}{p_{sat,an}} = \frac{p_{v,an}}{p_{sat,an}} \quad (1.109b)$$

Ovviamente, (1.109a) e (1.109b) coincidono, limitatamente ai gas, con le espressioni delle rispettive umidità relative. Le concentrazioni di acqua catodica  $c_{v,ca}$  e anodica  $c_{v,an}$  dipendono dalle rispettive fugacità  $a_{an}$  e  $a_{ca}$ .

Il livello  $\lambda_{m,an}$  di umidificazione della membrana, in corrispondenza della zona anodica può determinarsi tramite la relazione:

$$\lambda_{m,an} = \begin{cases} 0,043 + 17,81a_{an} - 39,85a_{an}^2 + 36a_{an}^3 & \Leftrightarrow 0 < a_{an} \leq 1 \\ 14 + 1,4(a_{an} - 1) & \Leftrightarrow 1 < a_{an} \leq 3 \end{cases} \quad (1.110)$$

e, identicamente, il livello  $\lambda_{m,ca}$  di umidificazione nella membrana in corrispondenza della zona catodica:

$$\lambda_{m,ca} = \begin{cases} 0,043 + 17,81a_{ca} - 39,85a_{ca}^2 + 36a_{ca}^3 & \Leftrightarrow 0 < a_{ca} \leq 1 \\ 14 + 1,4(a_{ca} - 1) & \Leftrightarrow 1 < a_{ca} \leq 3 \end{cases} \quad (1.111)$$

Per calcolare il livello  $\lambda_m$  di umidificazione medio, si utilizza la seguente relazione:

$$\lambda_m = \begin{cases} 0,043 + 17,81a_m - 39,85a_m^2 + 36a_m^3 & \Leftrightarrow 0 < a_m \leq 1 \\ 14 + 1,4(a_m - 1) & \Leftrightarrow 1 < a_m \leq 3 \end{cases} \quad (1.112)$$

avendo indicato con  $a_m$  la fugacità media, data da:

$$a_m = \frac{a_{an} + a_{ca}}{2} \quad (1.113)$$

Utilizzando come valore reale del livello di idratazione della membrana il valore  $\lambda_m$ , il coefficiente di elettrosmosi  $n_d$  è pari a:

$$n_d = 0,0029\lambda_m^2 + 0,05\lambda_m - 3,4 \cdot 10^{-19} \quad (1.114)$$

mentre il coefficiente di diffusione  $D_w$  è pari a:

$$D_w = D_\lambda \exp \left[ 2416 \left( \frac{1}{303} - \frac{1}{T_{fc}} \right) \right] \quad (1.115)$$

essendo  $D_\lambda$  un coefficiente, funzione di  $\lambda_m$ , tale che:

$$D_\lambda = \begin{cases} 10^{-6} & \Leftrightarrow \lambda_m < 2 \\ 10^{-6} [1 + (\lambda_m - 2)] & \Leftrightarrow 2 \leq \lambda_m \leq 3 \\ 10^{-6} [3 - 1,67(\lambda_m - 3)] & \Leftrightarrow 3 < \lambda_m < 4,5 \\ 1,25 \cdot 10^{-6} & \Leftrightarrow \lambda_m \geq 3 \end{cases} \quad (1.116)$$

Le concentrazioni di acqua sulle superfici della membrana, rispettivamente lato anodo  $c_{v,an}$  e lato catodo  $c_{v,ca}$ , si determinano come:

$$c_{v,an} = \frac{\rho_{m,d}}{M_{m,d}} \lambda_{m,an} \quad (1.117a)$$

$$c_{v,ca} = \frac{\rho_{m,d}}{M_{m,d}} \lambda_{m,ca} \quad (1.117b)$$

dove  $\rho_{m,d}$  è la densità della membrana asciutta, espressa in  $kg/cm^3$ , e  $M_{m,d}$  è il peso equivalente della stessa, espresso in  $kg/mol$ .

## CAPITOLO 2

---

### La risoluzione dei problemi di controllo predittivo

Il controllo predittivo, anche detto *MPC*<sup>1</sup>, è la sola metodologia di controllo avanzata, rispetto alle classiche tecniche di controllo tramite PID, che ha avuto un significativo e ampio impatto sul controllo dei processi industriali. La ragione principale di ciò risiede nel fatto che il controllo predittivo è naturalmente orientato al controllo di processi e sistemi a tempo reale che coinvolgono molte variabili, con vincoli da rispettare, laddove il controllo tramite PID richiede una lunga e difficoltosa fase di analisi di ciascun anello di retroazione, per realizzare il relativo controllore, e costrutti condizionali per il rispetto dei vincoli [33].

#### 2.1 I fondamenti del controllo predittivo

Si consideri un sistema lineare stazionario, a tempo discreto, espresso a mezzo delle sue equazioni di stato e si consideri questo modello come rappresentativo di un sistema non lineare, per un determinato intorno di un punto di lavoro noto:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}_y\mathbf{x}(k) \\ \mathbf{z}(k) &= \mathbf{C}_z\mathbf{x}(k)\end{aligned}\tag{2.1}$$

In (2.1),  $\mathbf{x}$  è il vettore  $n$ -dimensionale degli stati,  $\mathbf{u}$  è il vettore  $l$ -dimensionale degli ingressi,  $\mathbf{y}$  è il vettore  $m_y$ -dimensionale delle uscite misurate ed infine  $\mathbf{z}$  è il vettore  $m_z$ -dimensionale delle uscite controllate. Un'uscita è detta *misurata* quando è fisicamente possibile effettuare una misura su di essa,

---

<sup>1</sup>Dall'inglese *Model-based Predictive Control*, in italiano *Controllo Predittivo orientato al Modello*.

mentre è detta *controllata* se è necessario che questa uscita soddisfi determinate condizioni, siano esse imposte sui valori limite che può assumere o su una determinata traiettoria che deve seguire; nulla, ovviamente, impedisce che una medesima uscita sia contemporaneamente misurata e controllata. Nel caso in cui un'uscita controllata non sia misurata, è necessario ricorrere ad un osservatore per stimarla.

In linea di principio, la realizzazione del controllo predittivo implica che, ad ogni istante di tempo  $k$ , sia eseguito il seguente algoritmo:

- misura del vettore delle uscite  $\mathbf{y}(k)$  del sistema non lineare;
- calcolo del vettore degli ingressi ottimo  $\mathbf{u}(k)$ , che minimizza una funzione di costo  $V(k)$ , rispettando i vincoli;
- applicazione del vettore  $\mathbf{u}(k)$  al sistema non lineare.

Ciò implica la presenza di un certo ritardo fra la misura delle uscite e l'applicazione degli ingressi; per questo motivo, non può esserci relazione diretta fra ingressi e uscite, e ciò spiega la mancanza della matrice  $\mathbf{D}$  in (2.1), per cui il modello linearizzato deve essere *strettamente proprio*. Nel caso in cui questa condizione non dovesse essere soddisfatta, esistono comunque alcune tecniche per rendere artificialmente un sistema strettamente proprio [33].

Per avere una formulazione realmente utile del controllo predittivo, è necessario considerare che, in generale, non è possibile misurare il vettore  $\mathbf{x}(k)$  degli stati di un sistema, ma è sempre possibile ottenerne una stima  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ ; la notazione utilizzata significa che la stima del vettore degli stati è effettuata sulla base delle informazioni disponibili all'istante  $k$ , ossia sulla base delle uscite fino a  $\mathbf{y}(k)$  e sulla base degli ingressi fino a  $\mathbf{u}(k-1)$ . Con la medesima notazione,  $\hat{\mathbf{u}}(k+i|k)$  indica il valore futuro, all'istante  $k+i$ , del vettore degli ingressi, calcolato sulla base dei dati disponibili all'istante  $k$ ; similmente,  $\hat{\mathbf{x}}(k+i|k)$ ,  $\hat{\mathbf{y}}(k+i|k)$  e  $\hat{\mathbf{z}}(k+i|k)$  rappresentano le predizioni dei valori all'istante  $k+i$  effettuate sui vettori degli stati e delle uscite all'istante  $k$ .

### 2.1.1 La funzione di costo

L'obiettivo finale del controllo predittivo è minimizzare una *funzione di costo*, definita di modo che penalizzi le variazioni delle uscite controllate rispetto ai riferimenti e le variazioni degli ingressi. La funzione di costo è generalmente espressa a mezzo di *forme quadratiche*, ossia rappresentazioni compatte di funzioni quadratiche in più variabili. Una forma quadratica si indica



solitamente con la notazione:

$$V = \|\mathbf{x}\|_A^2 = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

dove  $\mathbf{x}$  è un vettore e  $A$  è una matrice simmetrica. Se si verifica la relazione:

$$\|\mathbf{x}\|_A^2 > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$$

allora la forma quadratica è detta *definita positiva*,  $V > 0$ ; è possibile dimostrare che una forma quadratica è definita positiva se e solo se tutti gli autovalori della matrice  $A$  sono positivi e nel qual caso si indicherà  $A \succ 0$ . Nel caso in cui valga invece la relazione:

$$\|\mathbf{x}\|_A^2 \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$$

la forma quadratica è detta *semi-definita positiva*,  $V \geq 0$ , gli autovalori di  $A$  saranno non negativi e si indicherà  $A \succeq 0$ . È possibile dimostrare che il vettore riga gradiente  $\nabla V$ , utilizzato nel seguito, può essere ricavato come:

$$\nabla V = \left[ \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] = 2\mathbf{x}^T A \quad (2.2)$$

Infatti, esprimendo la forma quadratica come:

$$V = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n a_{ij} x_i x_j$$

si ha che:

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} = 2a_{kk}x_k + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n a_{ki}x_i = 2 \sum_{i=1}^n a_{ki}x_i$$

per cui, infine:

$$\nabla V = 2\mathbf{x}^T A \quad \square$$

In generale, la funzione di costo può assumere la seguente forma:

$$V(k) = \sum_{i=H_w}^{H_p} \|\hat{\mathbf{z}}(k+i|k) - \mathbf{r}(k+i|k)\|_{Q(i)}^2 + \sum_{i=0}^{H_u-1} \|\Delta \hat{\mathbf{u}}(k+i|k)\|_{R(i)}^2 \quad (2.3)$$

dove  $H_p$  rappresenta l'*orizzonte di predizione*, ossia il numero di passi temporali per cui è effettuato il calcolo degli ingressi ottimali del modello; si noti che la funzione di costo non necessariamente penalizza le variazioni delle uscite fin dal primo passo temporale, se si impone un valore del parametro *finestra*  $H_w \neq 1$ . Il parametro  $H_u$  rappresenta l'*orizzonte di controllo*, ossia il numero di passi temporali per cui sono ammesse variazioni negli ingressi; in generale  $H_u \leq H_p$ , per cui si ha che  $\Delta \hat{\mathbf{u}}(k+i|k) = 0$  se  $i \geq H_u$ .

Le matrici  $Q(i)$  e  $R(i)$  sono le *matrici di peso*, rispettivamente, delle variazioni delle uscite e degli ingressi. Queste matrici possono essere sia a coefficienti costanti sia a coefficienti variabili; nel primo caso si avranno identiche matrici per ogni  $i = 1, \dots, H_p$ , quindi:

$$\left. \begin{array}{l} Q(i) = Q \\ R(i) = R \end{array} \right\} \forall i = 1, \dots, H_p$$

Nel secondo caso, si avranno matrici con diversi valori per ogni passo temporale dell'orizzonte di predizione.

Comunemente, queste matrici sono diagonali, per cui si può affermare che le forme quadratiche in (2.3) sono definite positive, e dunque  $V(k) > 0$  se e solo se tutti gli elementi diagonali delle matrici  $Q(i)$  e  $R(i)$  sono positivi. In altre parole, le forme quadratiche sono dunque definite positive se e solo se sono tutti positivi i pesi imposti sulle variabili. Questa condizione è però troppo forte, ed inoltre deve essere considerata l'eventualità che determinate variabili non siano penalizzate, per cui si considererà che  $Q(i) \succeq 0$  e che  $R(i) \succeq 0$ .

L'orizzonte  $H_p$  di predizione, l'orizzonte  $H_u$  di controllo, il parametro *finestra*  $H_w$ , così come le matrici di peso  $Q(i)$  e  $R(i)$  influenzano il comportamento del controllore e quindi del sistema risultante; alcuni di questi parametri potrebbero essere determinati sulla base di considerazioni economiche, ma in generale sono dei parametri di regolazione che devono essere accuratamente scelti in modo da ottenere prestazioni soddisfacenti.

### 2.1.2 Il calcolo della predizione

Si consideri la situazione più semplice, per cui il vettore  $\mathbf{x}$  degli stati è direttamente misurato: si ha dunque che  $\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \mathbf{x}(k) = \mathbf{y}(k)$ ; si immagini inoltre che non siano presenti né disturbi, né rumori. È allora possibile effettuare la predizione sugli stati futuri semplicemente iterando il calcolo del

modello lineare 2.1:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}(k|k) \\
 \hat{\mathbf{x}}(k+2|k) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}(k+1|k) = \\
 &= \mathbf{A}^2\mathbf{x}(k) + \mathbf{A}\mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}(k|k) + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}(k+1|k) \\
 &\vdots \\
 \hat{\mathbf{x}}(k+H_p|k) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k+H_p-1|k) + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}(k+H_p-1|k) = \\
 &= \mathbf{A}^{H_p}\mathbf{x}(k) + \mathbf{A}^{H_p-1}\mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}(k|k) + \dots + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}(k+H_p-1|k)
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

È opportuno porre il risultato della predizione in funzione delle variazioni  $\Delta\hat{\mathbf{u}}(k+i|k)$ , piuttosto che dei corrispondenti valori assoluti; pertanto, noto il valore  $\mathbf{u}(k-1)$  e considerato che:

$$\Delta\hat{\mathbf{u}}(k+i|k) = \hat{\mathbf{u}}(k+i|k) - \hat{\mathbf{u}}(k+i-1|k) \tag{2.5}$$

si ottiene che, per  $i \leq H_u$ :

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}[\Delta\hat{\mathbf{u}}(k|k) + \mathbf{u}(k-1)] \\
 \hat{\mathbf{x}}(k+2|k) &= \mathbf{A}^2\mathbf{x}(k) + \mathbf{A}\mathbf{B}[\Delta\hat{\mathbf{u}}(k|k) + \mathbf{u}(k-1)] + \\
 &\quad + \mathbf{B}[\Delta\hat{\mathbf{u}}(k+1|k) + \Delta\hat{\mathbf{u}}(k|k) + \mathbf{u}(k-1)] = \\
 &= \mathbf{A}^2\mathbf{x}(k) + (\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{B}\Delta\hat{\mathbf{u}}(k|k) + \mathbf{B}\Delta\hat{\mathbf{u}}(k+1|k) + \\
 &\quad + (\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) \\
 &\vdots \\
 \hat{\mathbf{x}}(k+H_u|k) &= \mathbf{A}^{H_u}\mathbf{x}(k) + (\mathbf{A}^{H_u-1} + \dots + \mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{B}\Delta\hat{\mathbf{u}}(k|k) + \\
 &\quad + \dots + \mathbf{B}\Delta\hat{\mathbf{u}}(k+H_u-1|k) + \\
 &\quad + (\mathbf{A}^{H_u-1} + \dots + \mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{B}\mathbf{u}(k-1)
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

mentre per  $i > H_u$ :

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}}(k+H_u+1|k) &= \mathbf{A}^{H_u+1}\mathbf{x}(k) + (\mathbf{A}^{H_u} + \dots + \mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{B}\Delta\hat{\mathbf{u}}(k|k) + \\
 &\quad + \dots + (\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{B}\Delta\hat{\mathbf{u}}(k+H_u-1|k) + \\
 &\quad + (\mathbf{A}^{H_u} + \dots + \mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) \\
 &\vdots \\
 \hat{\mathbf{x}}(k+H_p|k) &= \mathbf{A}^{H_p}\mathbf{x}(k) + (\mathbf{A}^{H_p-1} + \dots + \mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{B}\Delta\hat{\mathbf{u}}(k|k) + \\
 &\quad + \dots + (\mathbf{A}^{H_p-H_u} + \dots + \mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{B}\Delta\hat{\mathbf{u}}(k+H_u-1|k) + \\
 &\quad + (\mathbf{A}^{H_p-1} + \dots + \mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{B}\mathbf{u}(k-1)
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Per maggiore chiarezza è opportuno esprimere (2.6) e (2.7) in forma matriciale:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}(k+H_u|k) \\ \hat{\mathbf{x}}(k+H_u+1|k) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}(k+H_p|k) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{H_u} \\ \mathbf{A}^{H_u+1} \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{H_p} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_u-1} \mathbf{A}^i \mathbf{B} \\ \sum_{i=0}^{H_u} \mathbf{A}^i \mathbf{B} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_p-1} \mathbf{A}^i \mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{u}(k-1)}_{\text{passato}} \\
 + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \cdots & 0 \\ \mathbf{AB} + \mathbf{B} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_u-1} \mathbf{A}^i \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{B} \\ \sum_{i=0}^{H_u} \mathbf{A}^i \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{AB} + \mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_p-1} \mathbf{A}^i \mathbf{B} & \cdots & \sum_{i=0}^{H_p-H_u} \mathbf{A}^i \mathbf{B} \end{bmatrix}}_{\text{futuro}} \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{u}}(k|k) \\ \vdots \\ \Delta \hat{\mathbf{u}}(k+H_u-1|k) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Per cui la predizione sull'uscita può essere semplicemente ottenuta come:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{z}}(k+H_p|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_z & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_z & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{C}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}(k+H_p|k) \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

In realtà, difficilmente il vettore  $\mathbf{x}(k)$  degli stati è direttamente misurabile; in questo caso si può ricorrere ad un osservatore di stato, che fornisca la stima  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ . Maggiori dettagli sull'osservatore di stato utilizzato saranno dati nel Capitolo 4.

## 2.2 La formulazione del problema

Nella Sezione 2.1 sono stati mostrati i principi fondamentali alla base del controllo predittivo; di seguito sarà mostrata la metodologia utilizzata per la risoluzione del problema del controllo predittivo, ossia come procede l'algoritmo per il calcolo del vettore ottimale  $\Delta \hat{\mathbf{u}}(k)$  degli ingressi.

### 2.2.1 Il controllore non vincolato

L'algoritmo di risoluzione può essere più agevolmente mostrato facendo ricorso al caso più semplice di un controllo predittivo privo di vincoli, in cui il vettore  $\mathbf{x}$  degli stati è misurato e in cui non vi sono né disturbi né rumore. La funzione di costo che deve essere minimizzata è quella riportata in (2.3):

$$V(k) = \sum_{i=H_w}^{H_p} \|\hat{\mathbf{z}}(k+i|k) - \mathbf{r}(k+i|k)\|_{Q(i)}^2 + \sum_{i=0}^{H_u-1} \|\Delta\hat{\mathbf{u}}(k+i|k)\|_{R(i)}^2$$

Detta funzione può essere riscritta in una forma più compatta come:

$$V(k) = \|\mathcal{Z}(k) - \mathcal{T}(k)\|_{\mathcal{Q}}^2 + \|\Delta\mathcal{U}(k)\|_{\mathcal{R}}^2 \quad (2.10)$$

dove:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(k) &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}(k+H_w|k) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{z}}(k+H_p|k) \end{bmatrix} & \mathcal{T}(k) &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}(k+H_w|k) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{r}}(k+H_p|k) \end{bmatrix} \\ \Delta\mathcal{U}(k) &= \begin{bmatrix} \Delta\hat{\mathbf{u}}(k|k) \\ \vdots \\ \Delta\hat{\mathbf{u}}(k+H_u-1|k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.11)$$

e le matrici di peso  $\mathcal{Q}$  e  $\mathcal{R}$  sono date da:

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} Q(H_w) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q(H_w+1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q(H_p) \end{bmatrix} \quad (2.12a)$$

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} R(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R(1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R(H_u-1) \end{bmatrix} \quad (2.12b)$$

Ricordando (2.8) e (2.9) è possibile scrivere che il vettore  $\mathcal{Z}$  ha la forma:

$$\mathcal{Z}(k) = \Psi\mathbf{x}(k) + \Upsilon\mathbf{u}(k-1) + \Theta\Delta\mathcal{U}(k) \quad (2.13)$$

dove le matrici  $\Psi$ ,  $\Upsilon$  e  $\Theta$  possono essere ottenute, tenuto conto di 2.8 e 2.9, come:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_z & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_z & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{C}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{H_u} \\ \mathbf{A}^{H_u+1} \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{H_p} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_z & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_z & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{C}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_u-1} \mathbf{A}^i \mathbf{B} \\ \sum_{i=0}^{H_u} \mathbf{A}^i \mathbf{B} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_p-1} \mathbf{A}^i \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_z & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_z & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{C}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \cdots & 0 \\ \mathbf{AB} + \mathbf{B} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_u-1} \mathbf{A}^i \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{B} \\ \sum_{i=0}^{H_u} \mathbf{A}^i \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{AB} + \mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_p-1} \mathbf{A}^i \mathbf{B} & \cdots & \sum_{i=0}^{H_p-H_u} \mathbf{A}^i \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Si definisca adesso il vettore  $\mathcal{E}$  come:

$$\mathcal{E}(k) = \mathcal{T}(k) - \Psi \mathbf{x}(k) - \Upsilon \mathbf{u}(k-1) \quad (2.17)$$

Detto vettore può essere considerato come l'*errore di traiettoria*, ossia la differenza fra la traiettoria futura desiderata nelle uscite e la risposta libera del sistema, intendendo come risposta libera quella del sistema cui è applicato un vettore  $\Delta \mathcal{U}(k)$  identicamente nullo. È allora possibile scrivere:

$$\begin{aligned} V(k) &= \|\Theta \Delta \mathcal{U}(k) - \mathcal{E}(k)\|_{\mathcal{Q}}^2 + \|\Delta \mathcal{U}(k)\|_{\mathcal{R}}^2 = \\ &= [\Delta \mathcal{U}(k)^T \Theta^T - \mathcal{E}(k)^T] \mathcal{Q} [\Theta \Delta \mathcal{U}(k) - \mathcal{E}(k)] + \Delta \mathcal{U}(k)^T \mathcal{R} \Delta \mathcal{U}(k) = \\ &= \underbrace{\mathcal{E}(k)^T \mathcal{Q} \mathcal{E}(k)}_{\text{costante}} - \Delta \mathcal{U}(k)^T \underbrace{2\Theta^T \mathcal{Q} \mathcal{E}(k)}_{\mathcal{G}} + \Delta \mathcal{U}(k)^T \underbrace{[\Theta^T \mathcal{Q} \Theta + \mathcal{R}]}_{\mathcal{H}} \Delta \mathcal{U}(k) \end{aligned} \quad (2.18)$$

È evidente che (2.18) ha la forma:

$$V(k) = \text{costante} - \Delta\mathcal{U}(k)^T \mathcal{G} + \Delta\mathcal{U}(k)^T \mathcal{H} \Delta\mathcal{U}(k) \quad (2.19)$$

essendo:

$$\mathcal{G} = 2\Theta^T \mathcal{Q}\mathcal{E}(k) \quad (2.20a)$$

$$\mathcal{H} = \Theta^T \mathcal{Q}\Theta + \mathcal{R} \quad (2.20b)$$

dove né la matrice  $\mathcal{G}$  né la matrice  $\mathcal{H}$  dipendono dal vettore  $\Delta\mathcal{U}(k)$ .

Per trovare il valore ottimale del vettore  $\Delta\mathcal{U}(k)$  è ora possibile calcolare il gradiente della funzione di costo e imporlo nullo; in accordo a (2.2) e (2.19), si ha:

$$\nabla_{\Delta\mathcal{U}(k)} V = -\mathcal{G} + 2\mathcal{H}\Delta\mathcal{U}(k) \quad (2.21)$$

per cui si ottiene infine che:

$$\Delta\mathcal{U}(k)_{opt} = \frac{1}{2} \mathcal{H}^{-1} \mathcal{G} \quad (2.22)$$

Il vettore  $\Delta\mathcal{U}(k)_{opt}$ , calcolato in (2.22) è sicuramente un punto di stazionarietà della funzione di costo  $V(k)$ , ma nulla assicura che sia realmente un punto di minimo. La derivata, rispetto a  $\Delta\mathcal{U}(k)$ , del gradiente riportato in (2.21), ossia la matrice delle derivate seconde, corrisponde all'*Hessiano* della funzione di costo ed è pari a:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \Delta\mathcal{U}(k)^2} = 2\mathcal{H} = 2(\Theta^T \mathcal{Q}\Theta + \mathcal{R}) \quad (2.23)$$

Avendo imposto  $Q(i) \succeq 0$  si ottiene senza dubbio che  $(\Theta^T \mathcal{Q}\Theta) \succeq 0$ , per cui imponendo  $\mathcal{R} \succ 0$  si ha la certezza che il vettore riportato in (2.22) corrisponde ad un punto di minimo della funzione di costo. Nel caso più generale in cui alcuni ingressi non siano penalizzati, per tutto l'orizzonte di predizione o solo per alcuni istanti, si ha  $\mathcal{R} \succeq 0$ , condizione non sufficiente a garantire né l'esistenza del minimo né l'invertibilità della matrice  $\mathcal{H}$ . In generale, quindi, sarà necessario esaminare l'Hessiano della funzione di costo, per verificare l'esistenza della soluzione del problema del controllo predittivo

La soluzione ottima, nella forma espressa in (2.22), non può essere calcolata tramite l'inversione della matrice  $\mathcal{H}$ , in quanto spesso risulta essere mal condizionata. È dunque più opportuno ottenere la soluzione tramite il metodo dei minimi quadrati.

Essendo, per definizione,  $\mathcal{Q} \succeq 0$  e  $\mathcal{R} \succeq 0$  è possibile definire due matrici  $S_{\mathcal{Q}}$  e  $S_{\mathcal{R}}$  tali che:

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{Q}}^T S_{\mathcal{Q}} &= \mathcal{Q} \\ S_{\mathcal{R}}^T S_{\mathcal{R}} &= \mathcal{R} \end{aligned}$$

in particolare, essendo le matrici  $\mathcal{Q}$  e  $\mathcal{R}$  in genere diagonali, è sufficiente calcolare la radice quadrata di ciascun elemento della diagonale principale. Attraverso queste matrici è possibile dimostrare che la funzione di costo 2.10 è equivalente al quadrato della lunghezza euclidea del vettore:

$$\begin{bmatrix} S_{\mathcal{Q}}(\Theta\Delta\mathcal{U}(k) - \mathcal{E}(k)) \\ S_{\mathcal{R}}\Delta\mathcal{U}(k) \end{bmatrix}$$

infatti:

$$\begin{aligned} V(k) &= \|\mathcal{Z}(k) - \mathcal{T}(k)\|_{\mathcal{Q}}^2 + \|\Delta\mathcal{U}(k)\|_{\mathcal{R}}^2 = \\ &= [\mathcal{Z}(k) - \mathcal{T}(k)]^T S_{\mathcal{Q}}^T S_{\mathcal{Q}} [\mathcal{Z}(k) - \mathcal{T}(k)] + \Delta\mathcal{U}(k)^T S_{\mathcal{R}}^T S_{\mathcal{R}} \Delta\mathcal{U}(k) = \\ &= \left\| \begin{bmatrix} S_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Z}(k) - \mathcal{T}(k)) \\ S_{\mathcal{R}}\Delta\mathcal{U}(k) \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} S_{\mathcal{Q}}(\Theta\Delta\mathcal{U}(k) - \mathcal{E}(k)) \\ S_{\mathcal{R}}\Delta\mathcal{U}(k) \end{bmatrix} \right\|^2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

per cui si ha che il vettore  $\Delta\mathcal{U}(k)_{opt}$  può essere ottenuto come soluzione, nel senso dei minimi quadrati, del sistema iperdeterminato:

$$\begin{bmatrix} S_{\mathcal{Q}}(\Theta\Delta\mathcal{U}(k) - \mathcal{E}(k)) \\ S_{\mathcal{R}}\Delta\mathcal{U}(k) \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} S_{\mathcal{Q}}\Theta \\ S_{\mathcal{R}} \end{bmatrix} \Delta\mathcal{U}(k) = \begin{bmatrix} S_{\mathcal{Q}}\mathcal{E}(k) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Il controllore vincolato assume dunque una struttura come quella riportata in Figura 2.1, dove è anche presente l'osservatore di stato. La matrice  $K_{mpc}$  deriva da (2.22) ed è pertanto definita come:

$$K_{mpc} = [\mathbf{I}_l, \mathbf{0}_l, \dots, \mathbf{0}_l] \mathcal{H}^{-1} \Theta^T \mathcal{Q}$$

anche se, è opportuno ricordare, il calcolo della matrice  $K_{mpc}$  non può essere effettuato tramite l'inversione della matrice  $\mathcal{H}$ , bensì attraverso il metodo dei minimi quadrati (2.25):

$$K_{mpc} = [\mathbf{I}_l, \mathbf{0}_l, \dots, \mathbf{0}_l] \left\{ \begin{bmatrix} S_{\mathcal{Q}}\Theta \\ S_{\mathcal{R}} \end{bmatrix} \setminus \begin{bmatrix} S_{\mathcal{Q}}\mathcal{E}(k) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} \quad (2.26)$$



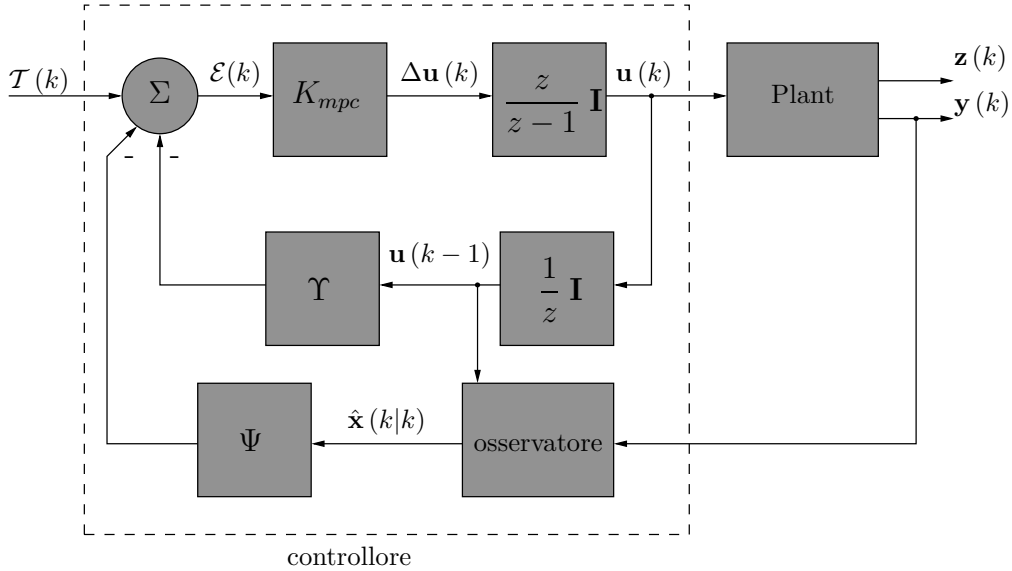


Figura 2.1: Schema a blocchi del controllore predittivo non vincolato

### 2.2.2 Il controllore vincolato

Nel caso in cui il problema del controllo sia formulato in modo tale che alcune variabili debbano soddisfare alcuni vincoli, si deve verificare che detti vincoli siano lineari e tempo invarianti, ossia costanti per tutto l'orizzonte di predizione; se queste condizioni sono verificate, allora è opportuno operare delle trasformazioni su detti vincoli, in modo tale che essi possano essere espressi sotto forma di disuguaglianze lineari, ovvero nella forma:

$$\mathbf{E} \begin{bmatrix} \Delta \mathcal{U}(k) \\ 1 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (2.27a)$$

$$\mathbf{F} \begin{bmatrix} \mathcal{U}(k) \\ 1 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (2.27b)$$

$$\mathbf{G} \begin{bmatrix} \mathcal{Z}(k) \\ 1 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (2.27c)$$

avendo qui riportato il caso generale in cui i vincoli sono presenti sia sulle variazioni degli ingressi, sia sui rispettivi valori assoluti e sia sulle uscite del sistema controllato. È opportuno trasformare i vincoli espressi nella forma riportata in (2.27) in vincoli espressi in funzione di  $\Delta \mathcal{U}(k)$ .

**vincoli su  $\mathcal{U}(k)$**  Si supponga che la matrice  $F$  abbia la seguente forma:

$$F = [F_1, F_2, \dots, F_{H_u}, f]$$

dove ogni sottomatrice  $F_i$  ha dimensione  $q \times l$  e  $f$  rappresenta l'ultima colonna. Sotto queste ipotesi, è possibile riscrivere (2.27b) come:

$$\sum_{i=1}^{H_u} F_i \hat{\mathbf{u}}(k+i-1|k) + f \leq 0$$

Essendo:

$$\hat{\mathbf{u}}(k+i-1|k) = \mathbf{u}(k-1) + \sum_{j=1}^{i-1} \Delta \hat{\mathbf{u}}(k+j|k)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{H_u} F_j \Delta \hat{\mathbf{u}}(k|k) + \sum_{j=2}^{H_u} F_j \Delta \hat{\mathbf{u}}(k+1|k) + \dots + F_{H_u} \Delta \hat{\mathbf{u}}(k+H_u-1|k) + \\ + \sum_{j=1}^{H_u} F_j \mathbf{u}(k-1) + f \leq 0 \quad (2.28) \end{aligned}$$

Infine, definendo:

$$\begin{aligned} F_i &= \sum_{j=i}^{H_u} F_j \\ F &= [F_1, F_2, \dots, F_{H_u}] \end{aligned}$$

è possibile riscrivere (2.27b) nella seguente forma matriciale:

$$F \Delta \mathcal{U}(k) \leq -F_1 \mathbf{u}(k-1) - f \quad (2.29)$$

**vincoli su  $\mathcal{Z}(k)$**  La conversione dei vincoli sulle uscite è notevolmente più semplice del caso precedente; ricordando infatti (2.13) è possibile riscrivere (2.27c) come:

$$\mathbf{G} \begin{bmatrix} \Psi \mathbf{x}(k) + \Upsilon \mathbf{x}(k-1) + \Theta \Delta \mathcal{U}(k) \\ 1 \end{bmatrix} \leq 0$$

imponendo la seguente forma per la matrice  $G = [\Gamma, g]$ , essendo  $g$  l'ultima colonna, si ottiene la forma desiderata:

$$\begin{aligned} \Gamma [\Psi \mathbf{x}(k) + \Upsilon \mathbf{x}(k-1)] + \Gamma \Theta \Delta \mathcal{U}(k) + g \leq 0 \Rightarrow \\ \Gamma \Theta \Delta \mathcal{U}(k) \leq -\Gamma [\Psi \mathbf{x}(k) + \Upsilon \mathbf{x}(k-1)] - g \quad (2.30) \end{aligned}$$

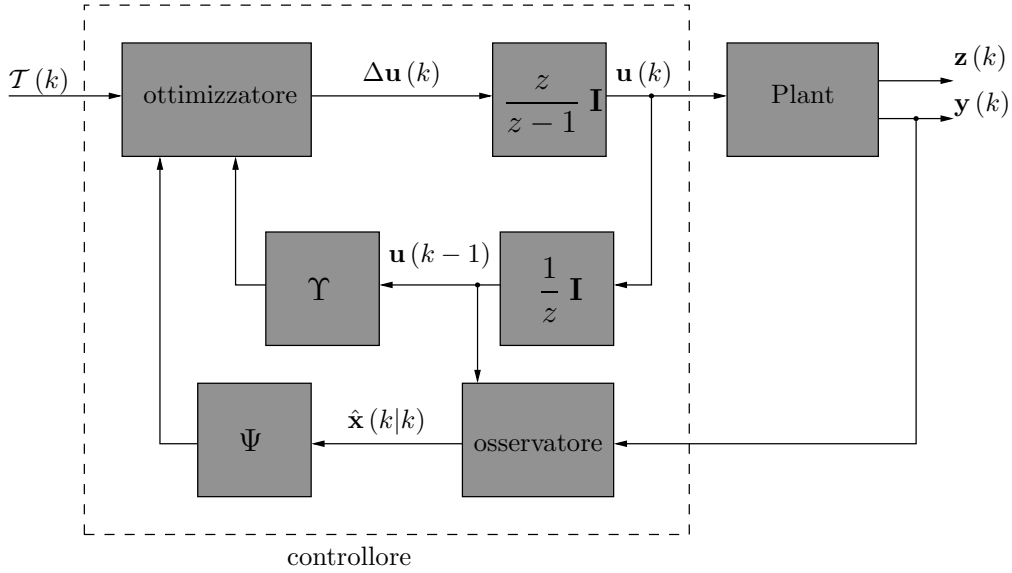


Figura 2.2: Schema a blocchi del controllore predittivo vincolato

**vincoli su  $\Delta\mathcal{U}(k)$**  Infine, la conversione dei vincoli su  $\Delta\mathcal{U}(k)$  è un compito banale, in quanto supponendo che la matrice  $E$  abbia la forma  $E = [W, w]$ , essendo  $w$  l'ultima colonna, si ha facilmente:

$$W\Delta\mathcal{U}(k) \leq w \quad (2.31)$$

Combinando quindi (2.29), (2.30) e (2.31) si ha:

$$\begin{bmatrix} F \\ \Gamma\Theta \\ W \end{bmatrix} \Delta\mathcal{U}(k) \leq \begin{bmatrix} -F_1\mathbf{u}(k-1) - f \\ -\Gamma[\Psi\mathbf{x}(k) + \Upsilon\mathbf{x}(k-1)] - g \\ w \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Il problema del controllo predittivo si presenta dunque come un problema di minimizzazione vincolata della funzione di costo, così come essa è espressa in (2.19):

$$\min_{\theta} \frac{1}{2}\theta^T\Phi\theta + \phi^T\theta \quad \text{sub condizione } \Omega\theta \leq \omega \quad (2.33)$$

Il problema di minimizzazione vincolata nella forma data da (2.33) è noto come problema di *Programmazione Quadratica* e sono noti alcuni algoritmi standard per la sua risoluzione. In Figura 2.2 è riportato uno schema a blocchi del controllore predittivo vincolato; il controllore è ovviamente non lineare, dato che il blocco denominato *ottimizzatore* minimizza una funzione non lineare dei suoi ingressi [33].

## 2.3 Metodi di Programmazione Quadratica

I metodi di programmazione quadratica sono un argomento su cui esiste una vasta letteratura [34–36]. Per questo motivo, una trattazione esauriente della teoria e degli algoritmi impiegati esula dagli scopi di questo lavoro; nel seguito saranno tuttavia fornite le informazioni necessarie alla comprensione dell'algoritmo di programmazione quadratica adottato.

L'utilizzo di un algoritmo di programmazione quadratica per all'interno del controllore predittivo è spesso considerato una limitazione ad una sua possibile applicazione industriale [37]. Spesso, infatti, questi algoritmi richiedono un elevato onere computazionale, che può rivelarsi incompatibile con esigenze di ingegnerizzazione industriale. Parallelamente, le suite di calcolo numerico, e.g. MATLAB, offrono pacchetti per il controllo predittivo *general purpose*, quindi collegati ad algoritmi di programmazione quadratica onerosi e non ottimizzati. Pertanto, la comprensione e la realizzazione *ad hoc* di un algoritmo dedicato, sebbene maggiormente impegnativa, risulta essere la scelta ottimale, in quanto permette la scrittura di software meno complessi e l'implementazione su piattaforme hardware di tipo industriale.

Nel seguito si intenderà *funzione obiettivo*, e la si indicherà con  $J$ , la funzione da minimizzare espressa nella (2.33):

$$J = \frac{1}{2}\theta^T \Phi \theta + \phi^T \theta$$

### 2.3.1 Programmazione Quadratica con vincoli di eguaglianza

L'imposizione di vincoli di eguaglianza permette di esaminare la soluzione di problemi di Programmazione Quadratica partendo dal caso più semplice. Si supponga quindi di dover risolvere un problema di minimizzazione vincolata del tipo riportato in (2.33), essendo presenti soltanto vincoli di uguaglianza:

$$\min_{\theta} \frac{1}{2}\theta^T \Phi \theta + \phi^T \theta \quad \text{sub condizione } \Omega \theta = \omega$$

Genericamente, i vincoli di eguaglianza individuano un iperpiano; la funzione oggetto, supponendo senza perdere di generalità che la matrice  $\Phi$  sia definita positiva, individua una ipersuperficie ellissoidale: il punto di minimo vincolato si troverà in corrispondenza al punto di tangenza fra l'iperpiano definito dai vincoli e l'iperellissoide.

La soluzione del problema con i vincoli di eguaglianza può essere facilmente ottenuta mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange; ottenuta

la cosiddetta espressione di Lagrange:

$$J_1 = \frac{1}{2}\theta^T \Phi \theta + \phi^T \theta + \lambda^T (\Omega \theta - \omega) \quad (2.34)$$

è facile verificare che, soddisfatti i vincoli di eguaglianza, essa è identica al problema originario. L'espressione (2.34) è considerata come una nuova funzione obiettivo: il punto di minimo globale di detta funzione obiettivo coincide col minimo vincolato della funzione obiettivo originaria. Infatti, ponendo nulle le derivate parziali della (2.34), si ha che:

$$\frac{\partial J_1}{\partial \theta} = \Phi \theta + \phi + \Omega^T \lambda = 0 \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial \lambda} = \Omega \theta - \omega = 0 \quad (2.36)$$

Il sistema lineare descritto dalle equazioni (2.35) e (2.36) contiene  $n + m$  incognite, posto che  $n$  siano le dimensioni del vettore  $\theta$  e  $m$  le dimensioni del vettore  $\lambda$ , i cui elementi sono anche detti *moltiplicatori di Lagrange*. La minimizzazione della funzione obiettivo di Lagrange  $J_1$  porta alla seguente soluzione:

$$\lambda = -(\Omega \Phi^{-1} \Omega^T)^{-1} (\omega + \Omega \Phi^{-1} \phi) \quad (2.37)$$

$$\theta = -\Phi^{-1} (\Omega^T \lambda + \phi) \quad (2.38)$$

Si noti inoltre che (2.38) può anche essere scritta come:

$$\theta = -\Phi^{-1} \phi - \underbrace{\Phi^{-1} \Omega^T \lambda}_{\text{uncostr. min}} = \underbrace{\theta_0}_{\text{uncostr. min}} - \underbrace{\Phi^{-1} \Omega^T \lambda}_{\text{corrective term}} \quad (2.39)$$

Il primo termine rappresenta quindi il minimo non vincolato della funzione obiettivo  $J$ , mentre il secondo termine è il termine correttivo da applicare per l'azione dei vincoli di eguaglianza.

È possibile dimostrare che i vincoli di eguaglianza devono essere in numero pari od inferiore alle variabili di controllo, o equivalentemente deve risultare  $m \leq n$ , perché il problema di minimizzazione vincolata sia risolvibile. In particolare, se  $m = n$ , allora l'unica soluzione possibile è quella data dalla soluzione di tutti i vincoli di eguaglianza.

### 2.3.2 Programmazione Quadratica con vincoli di diseguaglianza

Nel caso di un problema di minimizzazione vincolata con vincoli di diseguaglianza, il numero di vincoli può essere superiore al numero delle variabili di

controllo. Si suppone infatti che non tutti i vincoli siano *attivi*: l' $i$ -esimo vincolo si definisce attivo se per esso è valida la relazione di uguaglianza, ossia se:

$$\Omega_i \theta = \omega_i$$

dove si indicano con  $\Omega_i$  e  $\omega_i$  rispettivamente l' $i$ -esima riga e l' $i$ -esimo elemento della matrice  $\Omega$  e del vettore  $\omega$ . Similmente, un vincolo si definisce non attivo se:

$$\Omega_i \theta < \omega_i$$

Le condizioni necessarie alla risoluzione di un problema di minimizzazione con vincoli di disequaglianza sono dette *condizioni di Kuhn-Tucker*:

$$\begin{aligned} \Phi \theta + \phi + \Omega^T \lambda &= 0 \\ \Omega \theta - \omega &\leq 0 \\ \lambda^T (\Omega \theta - \omega) &= 0 \\ \lambda &\geq 0 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Ciascun moltiplicatore di Lagrange ha un valore non negativo se il rispettivo vincolo appartiene all'insieme  $S_a$  dei vincoli attivi:

$$\lambda_i \geq 0 \Leftrightarrow i \in S_a \Rightarrow \Omega_i \theta - \omega_i = 0$$

Al contrario, il moltiplicatore di Lagrange avrà un valore nullo se il vincolo non appartiene a detto insieme, quindi non è attivo:

$$\lambda_i = 0 \Leftrightarrow i \notin S_a \Rightarrow \Omega_i \theta - \omega_i < 0$$

Supposto noto l'insieme  $S_a$  dei vincoli attivi, e corrispondentemente  $\Omega_a$ ,  $\omega_a$  e  $\lambda_a$ , il problema di minimizzazione vincolata originale diviene equivalente ad un problema di minimizzazione con vincoli di eguaglianza, il cui algoritmo di soluzione è pertanto noto:

$$\lambda_a = -(\Omega_a \Phi^{-1} \Omega_a^T)^{-1} (\omega_a + \Omega_a \Phi^{-1} \phi) \tag{2.41}$$

$$\theta = -\Phi^{-1} (\Omega_a^T \lambda_a + \phi) \tag{2.42}$$

Possono essere utilizzati diversi metodi per la risoluzione di questa tipologia di problemi; si distinguono in genere due famiglie, i metodi *Active Set* e i metodi *Interior Point*, di seguito brevemente esposti.

**metodi Active Set** I metodi Active Set appartengono alla cosiddetta categoria dei *metodi primali*. Per l'utilizzo dei metodi iterativi Active Set si suppone innanzitutto che esista una soluzione al problema di minimizzazione vincolata. In corrispondenza a tale soluzione, che può anche essere individuata da un punto sull'ipersuperficie definita dal problema, vi sono un certo numero di vincoli attivi mentre i restanti vincoli sono inattivi; l'insieme dei vincoli attivi viene chiamato *active set*.

Sia  $\theta_r$  la soluzione iniziale del problema: modificandola, ossia considerando un punto di lavoro "vicino" al precedente, si ottiene la soluzione perturbata  $\theta_{r+1} = \theta_r + \Delta\theta$ . È possibile che in corrispondenza a questo nuovo punto di lavoro:

- l'active set di vincoli sia soddisfatto e nessun'altro vincolo si attivi; in questo caso la nuova soluzione  $\theta_{r+1}$  è accettata come soluzione per l'iterazione successiva dell'algoritmo risolutore.
- L'active set di vincoli sia soddisfatto ma altri vincoli siano violati; il punto  $\theta_{r+1}$  non è una soluzione accettabile del problema, quindi si calcola  $\theta_{r+1} = \theta_r + \alpha\Delta\theta$ , con  $0 < \alpha < 1$ , soluzione accettabile del problema e si aggiorna l'active set, aggiungendo i vincoli attivati.

La soluzione  $\theta_{r+1}$  è da considerarsi soluzione ottimale del problema se le condizioni (2.40) sono soddisfatte. In particolare, durante la ricerca della soluzione ottimale, è possibile che alcuni elementi del vettore  $\lambda$  per l'active set diventino negativi, segnalando dunque che il relativo vincolo è diventato inattivo. Di conseguenza il vincolo può essere rimosso dall'active set e l'algoritmo iterativo prosegue nella ricerca della soluzione, con soluzione aggiornata  $\theta_{r+1}$  e l'active set modificato.

Si noti che la natura del problema richiede l'utilizzo di metodi iterativi per la sua soluzione; infatti, non è possibile, in generale, determinare a priori quale sarà l'active set di vincoli, né come si evolverà nel tempo. A differenza di quanto accade nel caso di vincoli di eguaglianza, non è richiesto che il numero di vincoli sia al massimo pari al numero delle variabili di controllo, né che l'insieme dei vincoli non sia linearmente dipendente. In realtà, queste condizioni devono ancora essere soddisfatte, ma solo limitatamente all'active set.

La natura iterativa dell'algoritmo risolutore pone inoltre alcuni vantaggi; posto di avere una soluzione iniziale del problema, l'algoritmo sarà sempre in grado di trovare al termine una soluzione migliore di quella iniziale. Questo è garantito dalla natura del problema, essendo infatti "convessa" la superficie determinata dalla funzione obiettivo (2.33). In alcune applicazioni industriali, può rivelarsi cruciale trovare un punto di lavoro stabile in breve tempo,

specie a seguito di brusche variazioni nelle variabili di controllo. Se l'algoritmo iterativo non è riuscito a trovare la soluzione ottimale nel tempo previsto, utilizzare l'ultima soluzione trovata può costituire una valida alternativa, preferendo la stabilità del sistema all'ottimalità del punto di lavoro [33].

I metodi di Active Set presentano alcuni svantaggi:

- è necessario che una soluzione possibile del problema sia nota, affinché il metodo iterativo possa condurre ad una migliore soluzione. Esistono vari metodi per ottenere questa soluzione iniziale, ma in generale può essere molto diversa da quella ottimale, penalizzando di conseguenza il metodo.
- Hanno un onere computazionale che, nel peggiore dei casi, cresce esponenzialmente col numero dei vincoli [33].

**metodi Interior Point** I metodi Interior Point, anche detti metodi *Prima-Duale* permettono di ovviare agli svantaggi che presenta l'applicazione dei metodi di Active Set al controllo predittivo. Utilizzando i moltiplicatori di Lagrange come variabili duali, i vincoli non attivi possono essere immediatamente individuati e rimossi dal problema.

Assumendo che il problema originario (primale) (2.33) sia risolvibile, è possibile ottenere la seguente forma equivalente:

$$\max_{\lambda \geq 0} \min_{\theta} \frac{1}{2} \theta^T \Phi \theta + \phi^T \theta + \lambda^T (\Omega \theta - \omega) \quad (2.43)$$

essendo la minimizzazione su  $\theta$  non vincolata, la soluzione è immediatamente disponibile:

$$\theta = -\Phi^{-1}(\Omega^T \lambda + \phi)$$

che, sostituita nella (2.43), permette di trovare il problema duale:

$$\max_{\lambda \geq 0} -\frac{1}{2} \lambda^T H \lambda - \lambda^T K - \frac{1}{2} \phi^T \Phi^{-1} \phi \quad (2.44)$$

essendo:

$$H = \Omega \Phi^{-1} \Omega^T \quad (2.45)$$

$$K = \omega + \Omega \Phi^{-1} \phi \quad (2.46)$$

Quindi anche il problema duale è un problema di programmazione quadratica avente  $\lambda$  come variabile da ottimizzare. Il problema (2.44) è equivalente a:

$$\min_{\lambda \geq 0} \frac{1}{2} \lambda^T H \lambda + \lambda^T K + \frac{1}{2} \omega^T \Phi^{-1} \omega \quad (2.47)$$



Si indicano con  $\lambda_a$  il set dei moltiplicatori di Lagrange ottimizzati che soddisfano il problema duale 2.47; quindi, indicati con  $\Omega_a$  e  $\omega_a$  i rispettivi vincoli, la soluzione del problema primale può essere immediatamente ottenuta:

$$\theta = -\Phi^{-1}(\Omega_a^T \lambda_a + \phi) \quad (2.48)$$

L'algoritmo iterativo utilizzato in questo lavoro per la risoluzione del problema di Programmazione Quadratica è la *procedura di Hildreth* [38,39]. Questa procedura procede all'ottimizzazione del vettore  $\lambda$  elemento per elemento, evitando quindi onerose operazioni matriciale che potrebbero compromettere il buon condizionamento del problema, quali l'inversione matriciale.

La funzione obiettivo (2.47) può infatti essere considerata scalarmente, prendendo in considerazione ciascun elemento  $\lambda_i$  del vettore delle variabili duali. Indicando con  $\lambda^m$  il vettore ottenuto alla generica  $m$ -esima iterazione, ciascun elemento del vettore  $\lambda$  sarà posto pari a:

$$\lambda_i^{m+1} = \max(0, w_i^{m+1})$$

essendo:

$$w_i^{m+1} = -\frac{1}{h_{ii}} \left[ k_i + \sum_{j=1}^{i-1} h_{ij} \lambda_j^{m+1} + \sum_{j=i+1}^n h_{ij} \lambda_j^m \right] \quad (2.49)$$

avendo indicato con  $h_{ii}$  e  $k_i$  rispettivamente gli elementi delle matrici  $H$  e  $K$ . Si noti che il vettore  $\lambda$  ottimizzato avrà soltanto componenti non nulle, in particolare valori positivi per i vincoli attivi e valori nulli per i vincoli non attivi.

Posto che i vincoli attivi sia linearmente indipendenti e in numero inferiore al numero delle variabili di controllo, le variabili duali convergeranno ad una soluzione ottimale; se queste condizioni non dovessero essere verificate, la procedura di Hildreth terminerà quando sarà stato raggiunto il limite delle iterazioni, fornendo comunque una soluzione accettabile del problema.

## 2.4 L'implementazione del controllore

In Figura 2.3 è riportato lo schema a blocchi del controllore predittivo implementato per il FCS. Sebbene sia concettualmente simile allo schema generale riportato in Figura 2.2, esistono alcune differenze che è opportuno mettere in evidenza. In Appendice sono riportati i listati delle funzioni utilizzate per la generazione del controllore predittivo, funzioni che saranno richiamate nel seguito.

Gli ingressi del controllore predittivo sono costituiti da:

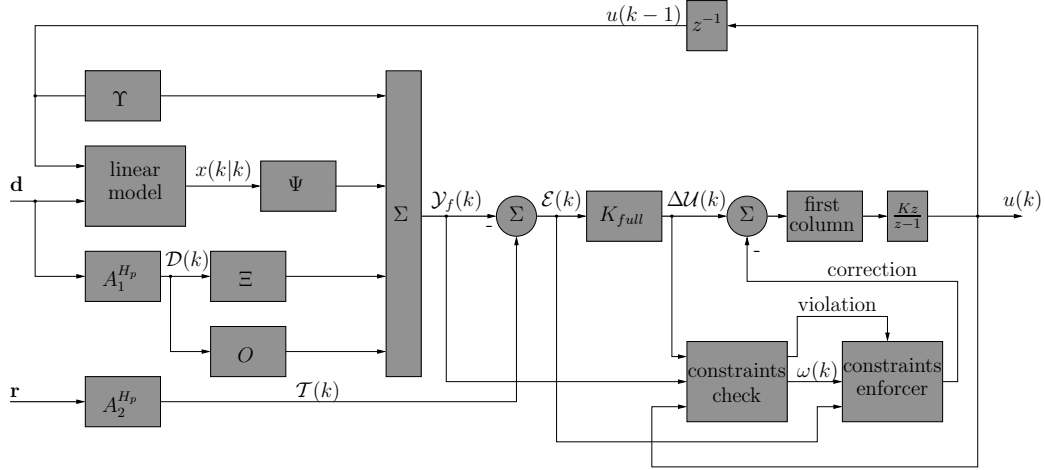


Figura 2.3: Schema a blocchi del controllore predittivo implementato

- segnale  $\mathbf{d}$ : le *measured disturbances*, ossia i segnali in ingresso al FCS su cui non è possibile effettuare un'azione di controllo.
- Segnale  $\mathbf{r}$ : i *riferimenti* per le grandezze di controllo.

È possibile notare che sia il segnale  $\mathbf{d}$  sia il segnale  $\mathbf{r}$  sono collegati ad un blocco denominato rispettivamente  $A_1^{Hp}$  e  $A_2^{Hp}$ ; questo ha la funzione di trasformare il segnale in ingresso in una matrice adatta al calcolo della predizione. Infatti, in ogni istante di tempo  $k$ , ambedue i segnali sono costituiti da vettori, i cui elementi sono i valori istantanei dei disturbi misurati e dei riferimenti:

$$\mathbf{d}(k) = \begin{bmatrix} d_1(k) \\ \dots \\ d_{l_d}(k) \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}(k) = \begin{bmatrix} r_1(k) \\ \dots \\ r_m(k) \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

essendo  $l_d$  il numero di disturbi misurati e  $m$  il numero di uscite controllate. All'interno della funzione `mympc.build.m` sono definite due matrici, `dist_Hp` e `ref_Hp`, che corrispondono alle matrici  $A_1^{Hp}$  e  $A_2^{Hp}$  e che sono composte da

matrici identità sovrapposte:

$$A_1^{H_p} \equiv A_2^{H_p} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Ovviamente le due matrici hanno dimensioni diverse:  $A_1^{H_p}$  ha dimensioni  $(l_d H_p) \times l_d$ , mentre  $A_2^{H_p}$  ha dimensioni  $(m H_p) \times m$ . Dette matrici sono premoltiplicate per i rispettivi segnali, trasformando quindi i vettori  $\mathbf{d}$  e  $\mathbf{r}$  in matrici, con dimensioni identiche rispettivamente a  $A_1^{H_p}$  e  $A_2^{H_p}$ :

$$\mathcal{D}(k) = A_1^{H_p} \mathbf{d}^T \quad \mathcal{T}(k) = A_2^{H_p} \mathbf{r}^T \quad (2.52)$$

La matrice dei disturbi misurati  $\mathcal{D}(k)$  è quindi moltiplicata per la matrice  $\Xi$ , ottenendo l'azione dei disturbi sugli stati, e per la matrice  $O$ , ricavando l'influenza dei disturbi sulle uscite. Infatti, la formulazione del problema effettuata nella Sezione 2.1 considera un modello lineare privo della matrice  $\mathbf{D}$ . In realtà, nell'applicazione studiata tale matrice esiste, ma solo come azione di disturbi sulle uscite. Scorporando quindi dalla matrice  $\mathbf{B}$  la matrice  $\mathbf{B}_d$ , che rappresenta l'influenza dei disturbi sugli stati e considerando la matrice  $\mathbf{D}$  come matrice dei disturbi, e non degli ingressi, si perviene al seguente modello:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{B}_d \mathbf{d}(k) \\ \mathbf{z}(k) &= \mathbf{C}_z \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \mathbf{d}(k) \end{aligned} \quad (2.53)$$

Per semplicità si è trascurata la differenza fra uscite controllate e non controllate. Similmente a quanto svolto nella Sezione 2.2 si arriva a definire la risposta libera del sistema come:

$$\mathcal{Y}_f = \Psi \mathbf{x}(k) + \Upsilon \mathbf{u}(k-1) + (\Xi + O) \mathbf{d}(k) \quad (2.54)$$

Si confronti la (2.54) con la (2.13) in cui si considera nulla l'azione sugli ingressi di controllo.

Alla luce della teoria esposta precedentemente, è facile dimostrare che la matrice  $\Xi$  è data da:

$$\Xi = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_z & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_z & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{C}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_d & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}^{H_u} \mathbf{B}_d & \cdots & 0 \\ \mathbf{A}^{H_u+1} \mathbf{B}_d & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}^{H_p-1} \mathbf{B}_d & \cdots & \mathbf{B}_d \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

mentre la matrice  $O$  è una matrice diagonale i cui elementi della diagonale principale sono gli elementi della matrice  $\mathbf{D}$  dei disturbi misurati:

$$O = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{D} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

La funzione `linmdl_conv.m` si occupa di calcolare dette matrici, richiamate come `Xi` e `Omicron`.

La risposta libera  $\mathcal{Y}_f(k)$  predetta, calcolata tramite la 2.54, è confrontata con la traiettoria desiderata per le uscite  $\mathcal{T}(k)$ , ottenendo così l'errore  $\mathcal{E}(k)$ . Detto errore è moltiplicato per la matrice  $\mathbf{K}_{full}$  data, in accordo alla (2.26), da:

$$\mathbf{K}_{full} = \begin{bmatrix} S_Q \Theta \\ S_{\mathcal{R}} \end{bmatrix} \setminus \begin{bmatrix} S_Q \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

ottenendo così:

$$\Delta \mathcal{U}(k) = \mathbf{K}_{full} \mathcal{E}(k) \quad (2.58)$$

Il calcolo della matrice  $\mathbf{K}_{full}$  dipende dal calcolo delle matrici  $\mathcal{Q}$  e  $\mathcal{R}$  e delle loro radici quadrate  $S_Q$  e  $S_{\mathcal{R}}$ , ottenute tramite la funzione `weight_conv.m` che le calcola sulla base dei pesi assegnati a ciascuna variabile.

Per la verifica dei vincoli, è necessario calcolare innanzitutto le matrici  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}$ , riportate nella (2.27): a tale scopo sono state create le funzioni `bound_conv.m` e `lc_conv.m`, richiamate nella funzione `mympc_build.m`, che convertono in forma matriciale rispettivamente i vincoli sui valori massimi e minimi per ciascuna variabile può assumere (*boundary*) e i vincoli di tipo lineare su più variabili (*linear constraints*). Ottenute le tre matrici dei vincoli, queste devono essere rielaborate per ottenere la forma (2.32). Si è tuttavia

ritenuto più conveniente, ai fini della realizzazione del software, ottenere una forma differente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F \\ \Gamma\Theta \\ W \end{bmatrix}}_{\Omega} \Delta\mathcal{U}(k) \leq \underbrace{\begin{bmatrix} -F_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\Gamma \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\omega_1} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k-1) \\ \mathcal{Y}_f \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} f \\ g \\ -w \end{bmatrix}}_{\omega_2} \quad (2.59)$$

La funzione `qp_constraints.m` effettua questa conversione; è importante notare che la forma (2.59) permette di individuare dei termini costanti,  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , e dei termini variabili,  $\mathbf{u}(k-1)$  e  $\mathcal{Y}_f$ , e permette di trattarli unitamente tramite operazioni matriciali.

La violazione dei vincoli può essere verificata istante per istante tramite la (2.59): se il prodotto  $\Omega\Delta\mathcal{U}(k)$  risulta essere maggiore del termine  $\omega$ , allora qualche vincolo è stato violato. Il segnale “violation” attiva di conseguenza il blocco “constraints enforcer”, schematizzato in Figura 2.4 che calcola la correzione da applicare. All’interno di questo blocco, il problema primale, dato dalla 2.19 nella forma:

$$\min_{\theta} \frac{1}{2}\theta^T\Phi\theta + \phi^T\theta \quad \text{sub condizione } \Omega\theta \leq \omega$$

deve essere trasformato nel problema duale (2.47), nella forma:

$$\min_{\lambda \geq 0} \frac{1}{2}\lambda^T H\lambda + \lambda^T K + \frac{1}{2}\omega^T\Phi^{-1}\omega$$

A tale scopo si deve dunque procedere al calcolo delle matrici  $H$  e  $K$ , date rispettivamente dalla (2.45) e (2.46). È possibile notare che il calcolo della matrice  $H$  può essere eseguito *a priori*, considerato che i termini costituenti sono tutti noti e tempo-invarianti. La funzione `qp_form.m` è dunque utilizzata per calcolare detta matrice, richiamata come `PhiL` nel corpo del programma. Per evitare il calcolo della matrice inversa  $\Phi^{-1}$ , che mal condizionerebbe l’intero algoritmo, è utilizzata la funzione `mldivide` della suite di calcolo numerico MATLAB™.

Il blocco è dotato di due ingressi: il primo è dato dall’errore di traiettoria  $\mathcal{E}(k)$ , il secondo è dato dal vettore  $\omega$  dei vincoli. Moltiplicando  $\mathcal{E}(k)$  per la matrice  $\phi_p$ , ottenuta all’interno della funzione `qp_form.m`, si ottiene la matrice  $\mathcal{G}(k)$  (2.20a) equivalente a  $\phi$  nel problema primale. Sempre utilizzando la funzione `mldivide`, si calcola infine:

$$K = \omega + \Omega\Phi^{-1}\phi$$

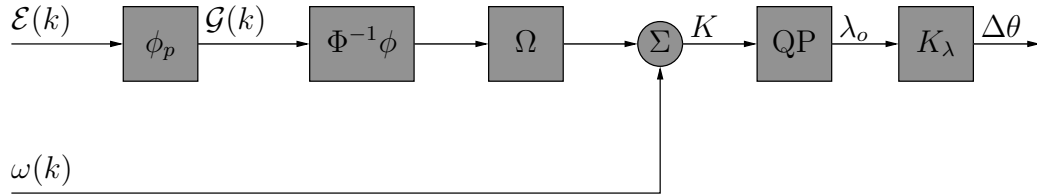


Figura 2.4: Schema a blocchi del constraints enforcer

Il blocco  $QP$  implementa la funzione `hildrethqp.m` che calcola il vettore  $\lambda_o$  ottimizzato; moltiplicando quest'ultimo per la matrice  $K_\lambda$ , data da:

$$K_\lambda = \Phi^{-1}\Omega$$

in accordo alla (2.48), si ottiene il termine correttivo da aggiungere alla soluzione del problema non vincolato per il rispetto dei vincoli stessi.

Infine, dalla soluzione calcolata, corretta o meno, si estrae la prima colonna, contenente i valori di  $\Delta u(k)$  per ciascuno degli ingressi di controllo. Integrando questo vettore, elemento per elemento, si ottiene il vettore  $u(k)$  da applicare al sistema controllato.

## CAPITOLO 3

---

### Progettazione e realizzazione del banco di prova

Il controllo del sistema cella a combustibile presenta molte difficoltà, a causa sia delle interazioni fra i diversi sottosistemi, sia delle nonlinearità di ciascuno di essi ed infine anche a causa dei numerosi vincoli che devono essere rispettati. Le metodologie classiche di controllo riescono con difficoltà a soddisfare le numerose esigenze di un FCS. Questa è stata la ragione dell'utilizzazione del controllo predittivo sul sistema cella a combustibile.

Il banco di prova, la cui progettazione e realizzazione sono oggetto di questo Capitolo, ha permesso di verificare la bontà della metodologia di controllo proposta per il collegamento in rete del FCS e conseguente erogazione di energia.

#### 3.1 L'emulatore del FCS

L'utilizzo dei sistemi cella a combustibile in sede sperimentale pone alcune problematiche; deve essere disponibile una fonte di idrogeno, il cui approvvigionamento può risultare costoso e il cui stoccaggio deve soddisfare requisiti di sicurezza. La cella a combustibile in sé è un dispositivo costoso e facilmente soggetto a condizioni di lavoro che ne possono pregiudicare la vita utile e/o il funzionamento. Questi sono fattori da dover tenere in considerazione quando si progettano sistemi di controllo o di gestione della potenza per i FCS. Per questi motivi può risultare conveniente l'utilizzo di un *emulatore*, ossia un dispositivo capace di riprodurre la caratteristica esterna  $V - I$  del FCS.

Il sistema cella a combustibile, inclusi tutti i sottosistemi ausiliari, è stato dunque emulato tramite un DC-DC buck converter realizzato sperimentalmente e controllato in un ambiente di sviluppo software DSpace<sup>TM</sup>. Il compito principale dell'emulatore di cella a combustibile è riprodurre sperimen-

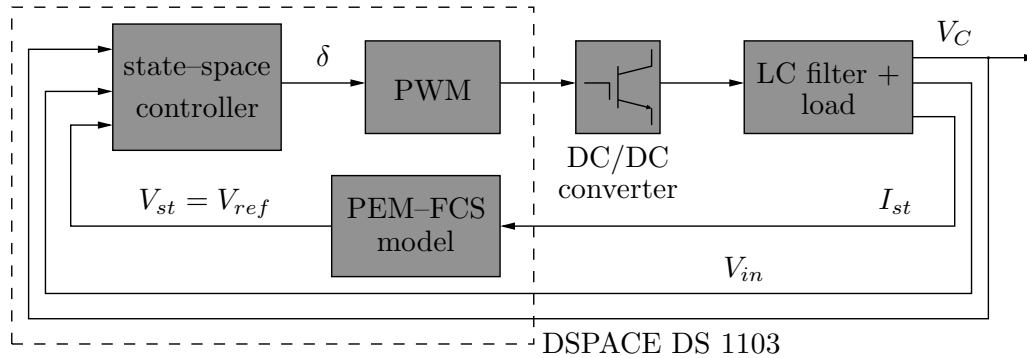


Figura 3.1: L'emulatore di Fuel Cell System

talmente la tensione di stack  $V_{st}$ , seguendo il riferimento di tensione calcolato sulla base di un modello non lineare di FCS; l'emulatore può dunque riprodurre il comportamento esterno dell'intero FCS, inclusi tutti i sottosistemi. Lo schema a blocchi dell'emulatore è quello riportato in Figura 3.1.

Il concetto che sta alla base è controllare a catena chiusa la tensione in uscita dal buck converter, sulla base della tensione calcolata dal modello non lineare della PEM-FC. La corrente erogata dal buck converter è retroazionata come ingresso al modello del FCS, che resituisce in uscita il riferimento di tensione, dato al controllore di tensione del convertitore stesso. In questo modo, il convertitore buck si comporta esattamente come il FCS modellato, sia in termini di caratteristica tensione-corrente, sia per la dinamica dei sistemi ausiliari. Si è preferito utilizzare un convertitore DC/DC di tipo buck perché è relativamente semplice ottenere in laboratorio tensioni continue elevate; inoltre, la topologia scelta permette lo studio mediante le tecniche di *state-space averaging* [40, 41], che permettono di ottenere una funzione di trasferimento globale, che tenga in conto anche le variazioni di carico, attraverso i diagrammi di Nyquist e di Bode.

Il vantaggio offerto dall'emulazione del FCS è immediato: possono essere esaminati diversi tipi di cella a combustibile semplicemente modificando la legge di controllo del buck converter, purché siano rispettati i vincoli sulla corrente nominale e sulla potenza massima dell'emulatore. Inoltre, la verifica di diverse metodologie di controllo può rivelarsi una procedura rischiosa su un FCS reale, in quanto la cella a combustibile potrebbe essere soggetta a sollecitazioni eccessive, che potrebbero comportare danni anche irreversibili. L'emulatore permette dunque di osservare gli effetti del controllo in un ambiente sicuro e privo di rischi.

In letteratura possono essere citati diversi esempi di emulatori. Un primo approccio all'emulazione del FCS è stato condotto in [42], ma con una



piccola banda passante del raddrizzatore controllato. In [43] si è ottenuto un emulatore per una cella a combustibile a ossido solido (SOFC) utilizzando una sorgente di energia in DC ed una approssimazione polinomiale dei dati sperimentali della cella a combustibile; questo approccio presenta alcuni svantaggi: innanzitutto sono considerati dei limitati intervalli di concentrazione di idrogeno e di temperatura e sono inoltre trascurati gli effetti capacitivi del *double layer*, potendo dunque portare a risultati inaccurati per l'emulazione di transistori.

Lavori successivi [44, 45] hanno preso in considerazione anche questi effetti, aggiungendo una resistenza ed una capacità all'uscita del buck converter utilizzato come emulatore. Ad ogni modo la caratteristica  $V - I$  è stata ottenuta con la sovrapposizione di tre modelli lineari, ottenendo risultati meno precisi.

Un emulatore migliore è stato realizzato in [46], introducendo anche gli effetti capacitivi del *double layer*. L'emulatore è stato realizzato con un buck converter sincrono, in modo da seguire accuratamente il riferimento di tensione fornito dal modello della cella a combustibile e da evitare conduzione discontinua. Il sistema di controllo adottato è con strategia *sliding mode*. Il modello utilizzato per il calcolo del riferimento di tensione è un modello empirico di una cella a combustibile a metanolo diretto (DMFC), i cui parametri sono stati ottenuti mediante test in transitorio. La curva di polarizzazione ottenuta non tiene comunque in conto alcuni parametri, come la temperatura o la pressione dell'aria.

L'ultima generazione di emulatori, più recente, è stata progettata in modo da sostituire il modello matematico con una cella a combustibile reale, sebbene di potenza inferiore. Questo approccio consente la simulazione più accurata possibile, ma vanifica di fatto sia la sicurezza di operazione, essendo la cella a combustibile reale ancora vulnerabile a condizioni di instabilità, sia la semplicità di implementazione, dato che i sottosistemi ausiliari devono essere presenti, per quanto sottodimensionati [47, 48].

L'emulatore di FCS progettato e realizzato in questo lavoro ha le seguenti caratteristiche:

- si considerano tutti i sottosistemi ausiliari componenti il FCS, grazie all'elevato livello di dettaglio che il modello descritto nel Capitolo 1 permette;
- il convertitore di cui è composto l'emulatore è un classico DC-DC buck converter con diodo volante, progettato in modo da offrire un'ampia banda passante e conduzione continua per un ampio range di funzionamento;

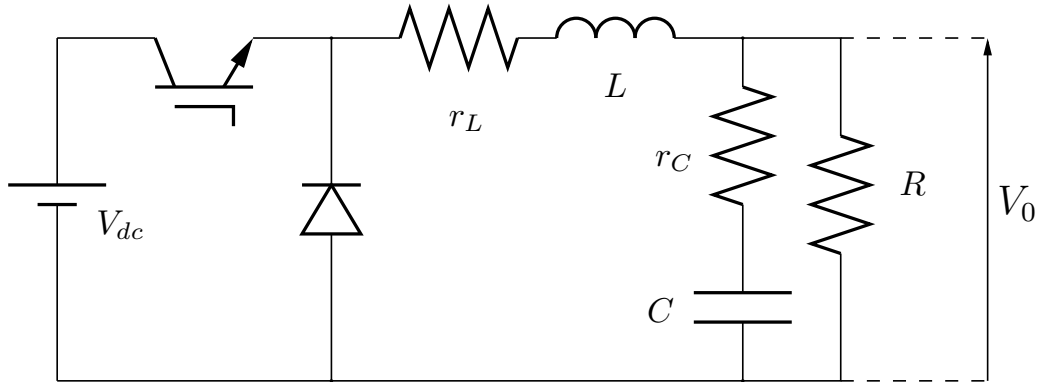


Figura 3.2: Schema del convertitore DC/DC buck utilizzato per l'emulatore

- il controllo di tensione è realizzato tramite un controllore dello spazio di stato, in grado di imporre opportunamente i poli a catena chiusa del sistema e quindi garantire la banda passante desiderata;

In Figura 3.2 è riportato lo schema circuitale del convertitore utilizzato.  $V_{dc}$  è la tensione continua in ingresso al convertitore,  $L$  e  $C$  sono l'induttanza e la capacità del filtro posto all'uscita del convertitore, mentre le componenti resistive  $r_L$  e  $r_C$  rappresentano le rispettive resistenze parassite, prese in considerazione ai fini del controllo. Infine  $R$  è la resistenza di carico e  $V_0$  la tensione ai suoi capi.

La progettazione del filtro  $LC$  in uscita al convertitore è stata realizzata sulla base delle due seguenti condizioni:

- il convertitore dovrebbe lavorare in condizioni di conduzione continua per tutte le condizioni di carico in range ragionevole;
- il ripple massimo sulla tensione in uscita non deve superare il 2%.

Il primo vincolo impone che:

$$L \geq \frac{\delta T_s}{2I_{lb}} V_{dc}(1 - \delta) \quad (3.1)$$

dove si è indicato con  $T_s = 1/f_s$  il tempo di switching dei componenti e con  $I_{lb}$  la corrente media nell'induttore al confine fra la conduzione continua e la conduzione discontinua. Onde evitare l'instaurarsi di conduzione discontinua, si impone che la corrente minima in uscita  $I_{lb,min} = 62 \text{ mA}$  sia pari alla corrente che si ottiene con  $\delta = 1/2$ . Essendo  $T_s = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ ,  $V_{dc} = 350 \text{ V}$ , si ricava:

$$L = \frac{T_s}{8I_{lb,min}} V_{dc} = 10^{-3}$$

Similmente, il secondo vincolo pone la seguente condizione:

$$C \geq \frac{1}{8} \frac{T_s^2 (1 - \delta)}{L} \left( \frac{V_0}{\Delta V_0} \right) \quad (3.2)$$

Considerato che il ripple maggiore si ottiene con  $\delta = 0$ , ne segue che:

$$C = \frac{1}{8} \frac{T_s^2}{L} \left( \frac{V_0}{\Delta V_0} \right) = 10^{-6}$$

Il controllo del convertitore buck è stato realizzato con un controllore dello spazio di stato [49–51]. Il modello medio ai grandi segnali del buck converter, inclusi la resistenza interna dell'induttore e del condensatore del filtro  $LC$  di uscita e considerando che il FCS abbia come carico una resistenza pura, è dato da:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{v}_C \end{bmatrix} = & - \begin{bmatrix} \frac{1}{L \left( r_L + R \cdot \frac{r_C}{R_{mC}} \right)} & \frac{R}{(LR_{mC})} \\ -\frac{R}{(LR_{mC})} & \frac{R}{(LR_{mC})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{r_C R}{(LR_{mC})} \\ 0 & -\frac{R}{(LR_{mC})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3)$$

dove  $v_C = V_0$  è la tensione in uscita,  $i_L$  è la corrente nell'induttore,  $w = \delta V_{dc}$  è la variabile di controllo. Infine,  $R_{mC}$  è definita come  $R_{mC} = R + r_C$ . Si noti che il modello descritto in (3.3) è lineare e che dunque possono essere utilizzati i metodi di analisi e progettazione dei controllori per i sistemi lineari tempo-invarianti.

Il convertitore buck riproduce la tensione  $V_{st}$  calcolata dal modello: essendo quindi necessario un controllo accurato sulla tensione in uscita, si introduce una nuova variabile di stato: l'integrale dell'errore della tensione in uscita. Come riportato in [51], il vettore di stato in retroazione è composto dalla corrente sul condensatore, dalla tensione in uscita e dall'integrale dell'errore della tensione in uscita. È preferibile utilizzare la corrente sulla capacità che la corrente sull'induttore, considerato che:

- l'impedenza a catena chiusa del convertitore buck è bassa;
- la corrente sulla capacità è nulla a regime, quindi è possibile utilizzare sensori di corrente più piccoli.

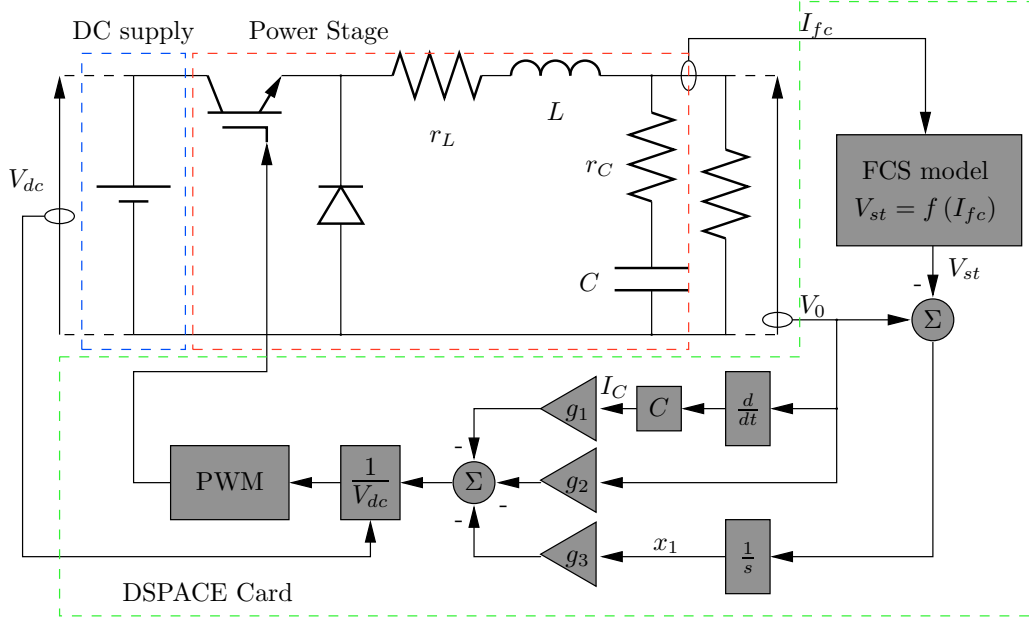


Figura 3.3: Diagramma a blocchi dell'emulatore

- è possibile così ottenere una maggiore robustezza del controllo.

In Figura 3.3 è riportato lo schema a blocchi dell'emulatore, unitamente allo schema del controllore di tensione.

Come già accennato, il controllore di tensione è stato realizzato con la metodologia dei controllori dello spazio di stato e tarato mediante il posizionamento dei poli del sistema a catena chiusa [51]. Con questa metodologia è possibile assegnare i poli a catena chiusa mediante opportuni guadagni in retroazione:  $g_1$  per la corrente sulla capacità,  $g_2$  per la tensione sulla capacità e  $g_3$  per l'integrale dell'errore della tensione in uscita. Avendo il seguente ingresso di controllo:

$$w = -g_1 i_C - g_2 v_C - g_3 x_1 \quad (3.4)$$

si ottiene il seguente polinomio caratteristico:

$$p(s) = (s + k_1)(s + k_2)(s + k_3) \quad (3.5)$$

Scelta la dinamica del sistema, i tre coefficienti  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  sono conseguentemente determinati e i guadagni possono quindi essere calcolati come:

$$\begin{aligned} g_1 &= L \left( k_1 + k_2 + k_3 - \frac{1}{R_m C} \right) \\ g_2 &= -1 + LC (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) \\ g_3 &= LC k_1 k_2 k_3 \end{aligned} \quad (3.6)$$

La possibilità di imporre i poli a catena chiusa del sistema permette di ottenere una rapida risposta dinamica del sistema, condizione necessaria in quest'applicazione per poter tenere conto degli effetti di carico del convertitore di potenza, alimentato dal circuito proposto. La Figura 3.3 mostra lo schema a blocchi del controllore adottato, tarato con la tecnica del posizionamento dei poli prima descritta. Si può inoltre osservare che la tensione di riferimento del convertitore buck è generata dalla relazione  $V_{st} = f(I_{fc})$  definita dal modello non lineare del FCS. Per l'implementazione del controllo, è stata utilizzata una piattaforma hardware dedicata e il Real Time Workshop (RTW) della suite di calcolo numerico MATLAB<sup>TM</sup>. In particolare, il controllo a catena chiusa di tensione del buck converter è stato implementato con una frequenza di 20 kHz, mentre il modello del FCS ha una frequenza di campionamento di 1 kHz. Infine, la frequenza di campionamento dell'azionamento del compressore è stata posta pari a 2 kHz e la frequenza del MPC è pari a 500 Hz.

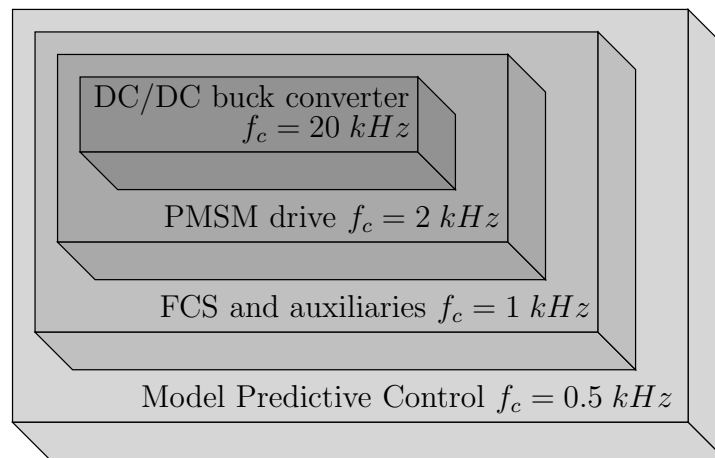


Figura 3.4: Rappresentazione grafica delle frequenze di campionamento

Questa suddivisione dei tempi di campionamento è stata scelta in modo da rispettare le costanti di tempo di ciascun anello di controllo. La Figura 3.4 ne mostra una rappresentazione grafica. Il fatto che la frequenza di campionamento del MPC sia più bassa di quella del FCS stesso non influenza le prestazioni del sistema, in quanto il MPC agisce su un ingresso di controllo,  $\omega_{cp,ref}$ , il cui sistema corrispondente ha una costante di tempo pari a circa  $10^{-1}s$  [3].

La Figura 3.5 mostra la foto dell'emulatore di FCS sviluppato. I dispositivi di potenza sono dei Power Mesh IGBT model STGP20NB60H. L'emulatore



Figura 3.5: Fotografia dell'emulatore FCS con DSpace e carico

ha una potenza nominale di  $3 \text{ kW}$ , con una tensione d'uscita di  $300 \text{ V}$  e una corrente d'uscita di  $10 \text{ A}$ .

## 3.2 L'inverter di connessione con la rete

Per l'applicazione del FCS ai sistemi generazione distribuita è necessario prevedere un dispositivo che consenta il collegamento del FCS con la rete di distribuzione dell'energia elettrica e, dunque, l'immissione in rete dell'energia prodotta. Il dispositivo utilizzato in questo studio è un inverter trifase controllato; l'utilizzo di un inverter per l'interfaccia della cella a combustibile con la rete permette, se adeguatamente progettato, di migliorare la qualità dell'energia elettrica erogata. In letteratura esistono diverse soluzioni, sia hardware sia software, che permettono di migliorare la qualità dell'energia erogata dagli inverter. Nel nostro studio, tuttavia, ci si è soffermati sulla possibilità di diminuire l'inquinamento armonico prodotto dagli inverter tramite soluzioni software, ossia tramite lo sviluppo di adeguate tecniche di controllo; le soluzioni hardware infatti, sebbene efficaci, comportano un indubbio aumento dei costi di produzione, in quanto l'inverter deve essere realizzato ad-hoc.

L'obiettivo, perseguito da queste tecniche avanzate di controllo degli inverter [52–56], consiste nell'iniettare in rete energia attiva a fattore di potenza unitario, limitando quindi al minimo l'energia reattiva e le armoniche, sia a bassa sia ad alta frequenza. Gli inverter controllati collegati alla rete di di-

istribuzione consentono inoltre un flusso bidirezionale di energia, in modo da poter sopperire ad eventuali disservizi nel sistema di microgenerazione.

Fra le molte tipologie di controllo che esistono in letteratura, lo studio si è soffermato su due in particolare:

- il *Voltage Oriented Control* (VOC) in cui il controllo dell'inverter è effettuato tramite il controllo delle correnti scambiate con la rete [57, 58];
- il *Direct Power Control* (DPC) che associa ciascuna configurazione di commutazione (switching) dell'inverter ad uno scambio di energia attiva e reattiva con la rete [59].

Entrambi queste metodologie di controllo sono state applicate e valutate sperimentalmente su un banco prove appositamente realizzato presso l'ISSIA-CNR UOS di Palermo, al fine di identificare quale fosse la migliore, in termini di prestazioni dinamiche, contenuto armonico delle correnti iniettate in rete, THD ed infine di rendimento e fattore di potenza medio.

Sia il VOC sia il DPC traggono origine da simili metodi di controllo applicati agli azionamenti, rispettivamente il Field Oriented Control (FOC) e il Direct Torque Control (DTC). L'idea che sta alla base del VOC è trovare un sistema di riferimento rotante in cui il controllo delle correnti scambiate con la rete permetta il controllo diretto dei flussi di potenza attiva e reattiva, similmente a quanto accade negli azionamenti, in cui il controllo delle correnti permette il controllo diretto di flusso e coppia. Parimenti, il DPC si basa sull'associazione biunivoca fra ciascuna configurazione dell'inverter ed uno scambio di potenze attiva e reattiva con la rete, nota che sia istante per istante la tensione di rete.

Uno studio esauriente di entrambe queste metodologie di controllo è stato condotto in [60], dove l'attenzione è posta sul comportamento con un carico controllato, in particolare un azionamento a velocità variabile.

**Voltage Oriented Control** Essendo nota sempre la tensione di rete, è possibile da essa costruire il corrispondente vettore di spazio. Riferendo tutte le grandezze elettriche nel sistema rotante il cui asse diretto coincide con detto vettore di spazio, è possibile ottenere la seguente equazione:

$$\mathbf{u}_g^u = \mathbf{u}_s^u + L \frac{d\mathbf{i}_s^u}{dt} + R\mathbf{i}_s^u + j\omega L\mathbf{i}_s^u \quad (3.7)$$

dove il pedice  $g$  indica le grandezze di rete (grid), il pedice  $s$  indica le grandezze dell'inverter (source),  $L$  ed  $R$  rappresentano rispettivamente l'induttanza di connessione e la sua resistenza parassita,  $\omega$  è la pulsazione di rete.

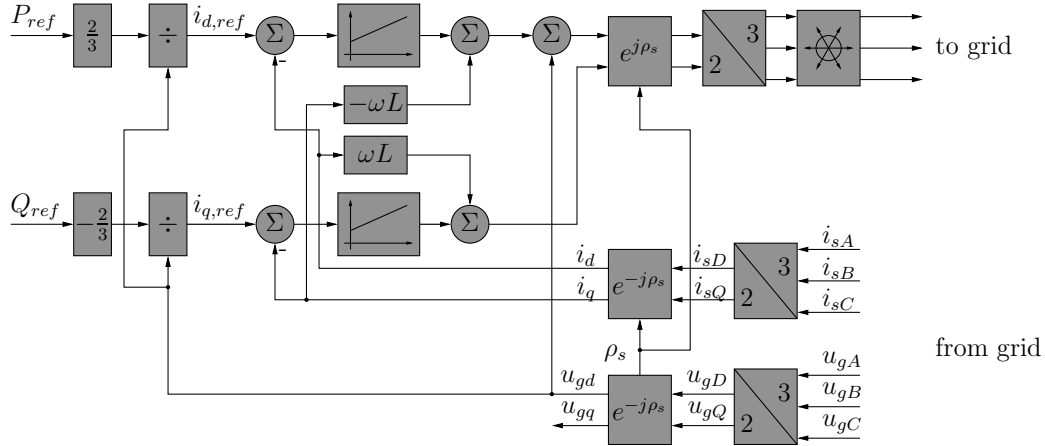


Figura 3.6: Schema a blocchi del Voltage Oriented Control

Decomponendo (3.7) secondo l'asse diretto ed in quadratura, si ottiene:

$$\begin{aligned} u_{gd} &= u_{sd} + L \frac{di_{sd}}{dt} + Ri_{sd} - \omega Li_{sq} \\ u_{gq} &= u_{sq} + L \frac{di_{sq}}{dt} + Ri_{sq} + \omega Li_{sd} \end{aligned} \quad (3.8)$$

La precedente relazione (3.8) mostra che fra i due assi, diretto ed in quadratura, vi è accoppiamento, similmente a quanto accade nel FOC; tale accoppiamento può essere eliminato con un'appropriata azione di feed-forward. In questo modo, la componente diretta di corrente dipenderà solo e soltanto dalla tensione d'inverter secondo l'asse diretto, parimenti per la corrente secondo l'asse in quadratura.

L'obiettivo finale è il controllo dei flussi di potenza attiva e reattiva scambiati con la rete; nel sistema di riferimento utilizzato, detti flussi possono essere ricavati come:

$$P = \frac{3}{2} u_{gd} i_{sd} \quad (3.9)$$

$$Q = -\frac{3}{2} u_{gd} i_{sq} \quad (3.10)$$

In Figura 3.6 è mostrato lo schema a blocchi del VOC: dati i riferimenti di potenza attiva e reattiva, è possibile calcolare i rispettivi riferimenti di corrente secondo l'asse diretto ed in quadratura. Due controllori PI, alle cui uscite sono aggiunte le rispettive azioni di feed-forward per il disaccoppiamento, generano i riferimenti per le tensioni nel sistema di riferimento rotante, fornite dunque all'inverter per la sintesi. Questo controllo è stato



implementato con una tecnica Space Vector Modulation asincrona, con frequenza PWM pari a  $5\text{ kHz}$  ed una frequenza di campionamento per l'intero sistema pari a  $10\text{ kHz}$ .

**Direct Power Control** Il DPC prevede la possibilità di controllare separatamente i flussi di potenza attiva e reattiva scambiati con la rete, senza dover utilizzare il controllo delle correnti. Oltre quindi alla maggiore semplicità del controllo, il DPC può essere implementato su hardware meno complesso e più economico. Inoltre, essendo dati direttamente i riferimenti di potenza attiva e reattiva, il suo utilizzo è adatto al controllo di microreti droop-controlled, dove le potenze attiva e reattiva sono utilizzate per il controllo della tensione e della frequenza [61]. La configurazione ottimale dell'inverter è scelta istante per istante sulla base delle esigenze della rete e della posizione del vettore di spazio delle tensioni di rete.

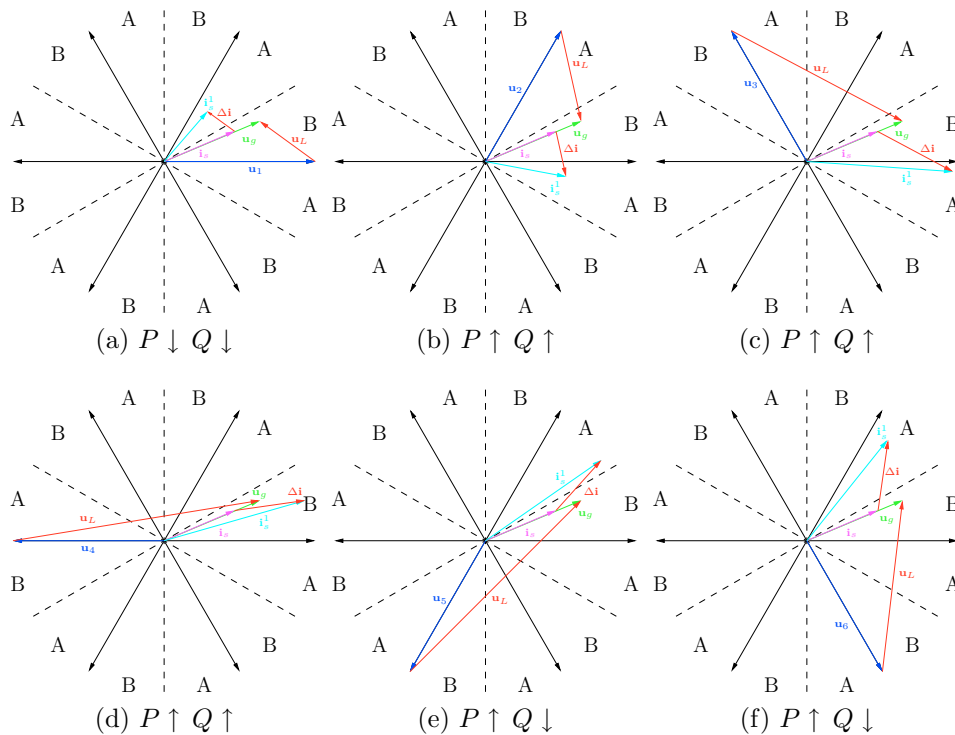


Figura 3.7: Possibili configurazioni e loro effetti nel Direct Power Control

In Figura 3.7 sono mostrate le possibili configurazioni che l'inverter può assumere e il loro relativo effetto sulla corrente e, di conseguenza, sulla potenza attiva e reattiva quando il vettore di spazio delle tensioni di rete si

trova nel primo settore del piano complesso. Generalizzando, si può ricavare quanto segue, posto che il vettore di spazio delle tensioni di rete si trovi nel  $k$ -esimo settore:

- applicando il  $k$ -esimo vettore di spazio delle tensioni di inverter si genera una forte riduzione della potenza attiva; la potenza reattiva aumenta lievemente se il vettore di spazio delle tensioni di rete si trova nella metà successiva in senso orario (sotto-settore  $A$ ), diminuisce in caso contrario.
- Applicando il  $k + 1$ -esimo vettore di spazio delle tensioni di inverter si genera un forte aumento di entrambe le potenze.
- Applicando il  $k + 2$ -esimo vettore di spazio delle tensioni di inverter si genera un forte aumento della potenza attiva ed un lieve aumento della potenza reattiva.
- Applicando il  $k + 3$ -esimo vettore di spazio delle tensioni di inverter si genera un forte aumento della potenza attiva; la potenza reattiva diminuisce lievemente se il vettore di spazio delle tensioni di rete si trova nella metà successiva in senso orario (sotto-settore  $A$ ), aumenta in caso contrario.
- Applicando il  $k - 1$ -esimo vettore di spazio delle tensioni di inverter si genera un lieve aumento della potenza attiva ed una forte riduzione della potenza reattiva.
- Applicando il  $k - 2$ -esimo vettore di spazio delle tensioni di inverter si genera un forte aumento della potenza attiva ed una lieve diminuzione della potenza reattiva.
- Infine, applicando uno dei due vettori nulli si genera un forte aumento della potenza attiva; la potenza reattiva aumenta lievemente se il vettore di spazio delle tensioni di rete si trova nella metà successiva in senso orario (sotto-settore  $A$ ), diminuisce in caso contrario.

In Tabella 3.1 si riassumono le possibili configurazioni e i loro effetti; si può subito notare una differenza sostanziale fra il DPC e la sua controparte negli azionamenti, il DTC, in quanto, oltre a dover discernere il settore in cui istante per istante si trova il vettore delle tensioni di rete, è necessario anche poter distinguere in quale sotto-settore si trova, aumentando così la precisione richiesta da  $60^\circ$  a  $30^\circ$ .

In Figura 3.8 è riportato lo schema a blocchi del DPC; la differenza più evidente in confronto al VOC è la mancanza dei blocchi di trasformazione di

		Sub A	Sub B
$P \uparrow$	$Q \uparrow$	$\mathbf{u}_{0,7}$	$\mathbf{u}_{0,7}$
	$Q \downarrow$	$\mathbf{u}_{k-1}$	$\mathbf{u}_{0,7}$
$P \downarrow$	$Q \uparrow$	$\mathbf{u}_k$	$\mathbf{u}_{k+1}$
	$Q \downarrow$	$\mathbf{u}_{k-1}$	$\mathbf{u}_k$

Tabella 3.1: Possibili configurazioni e loro effetti nel Direct Power Control

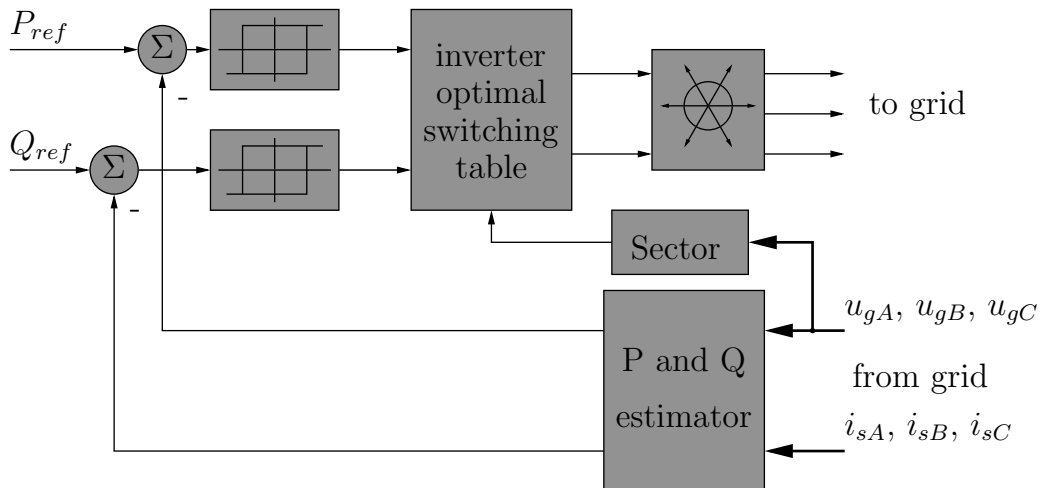


Figura 3.8: Schema a blocchi del Direct Power Control

coordinate, in quanto non sono necessari. Il controllo dei flussi di potenza è effettuato tramite dei controllori ad isteresi; il blocco di selezione di settore e sotto-settore consente di identificare la posizione del vettore di spazio delle tensioni di rete con la precisione richiesta. In questo caso, la frequenza di campionamento del controllo è pari a  $20\text{ kHz}$ .

**DPC ElectroMagnetically Compatible** Uno dei problemi che sorgono nel momento in cui si utilizzano gli inverter è la presenza di emissioni di modo comune. Queste emissioni sono generate dalle variazioni della tensione di modo comune, che provocano a loro volta correnti di modo comune ad alta frequenza, che fluiscono attraverso le connessioni e la terra. Nel caso di un sistema di generazione distribuita collegato alla rete, le emissioni di modo comune si propagano attraverso le linee di trasmissione e distribuzione; di conseguenza le interferenze elettromagnetiche (EMI) generate investono un'area estesa: dal trasformatore di distribuzione fino agli utenti finali.

A confronto delle correnti di linea, le correnti di modo comune hanno un contenuto armonico molto più elevato; quindi possono avere un percorso di trasmissione che include sia le capacità parassite della linea, sia i dissipatori termici dell'inverter, richiudendosi sulla terra di modo comune, potendo innescare potenziali fenomeni di risonanza [62]. Si consideri inoltre che questi effetti parassitici sono difficili da prevedere, per la loro natura essenzialmente stocastica. Infine, le emissioni ad alta frequenza provocano un aumento delle perdite e possono disturbare il normale funzionamento di altri apparecchi collegati all'impianto di terra.

Per le ragioni sopracitate, le correnti di modo comune rappresentano una grossa limitazione all'utilizzo degli inverter, quasi quanto la generazione di armoniche di linea. Entrambi questi effetti devono essere limitati, al fine di soddisfare l'attuale normativa elettromagnetica. Tuttavia, i filtri passivi comunemente utilizzati per ridurre il contenuto armonico delle correnti di linea non possono agire contemporaneamente sulle emissioni condotte, quindi si devono adottare soluzioni differenti. In letteratura sono state proposte diverse soluzioni: in [63] è stato proposto l'utilizzo di filtri passivi, mentre in [64] si suggerisce l'utilizzo di cancellatori attivi, basati su dispositivi di potenza aggiunti al convertitore. Ancora, in [65] una struttura modificata dell'inverter, a quattro gambe, mostra la sua efficacia nella diminuzione delle emissioni condotte. Le soluzioni riportate, tuttavia, implicano sia un aumento del prezzo del convertitore, che deve dotato di apparecchiature aggiuntive, sia una diminuzione dell'affidabilità del sistema, essendo aumentato il numero di apparecchi a rischio di guasto. Inoltre, queste soluzioni tentano di limitare gli effetti risultanti, mentre risulterebbe più efficace eliminare

conf	$u_{sA0}$	$u_{sB0}$	$u_{sC0}$	$u_{com}$
$\mathbf{u}_0$	$-V_{dc}/2$	$-V_{dc}/2$	$-V_{dc}/2$	$-V_{dc}/2$
$\mathbf{u}_1$	$V_{dc}/2$	$-V_{dc}/2$	$-V_{dc}/2$	$-V_{dc}/6$
$\mathbf{u}_2$	$V_{dc}/2$	$V_{dc}/2$	$-V_{dc}/2$	$V_{dc}/6$
$\mathbf{u}_3$	$-V_{dc}/2$	$V_{dc}/2$	$-V_{dc}/2$	$-V_{dc}/6$
$\mathbf{u}_4$	$-V_{dc}/2$	$V_{dc}/2$	$V_{dc}/2$	$V_{dc}/6$
$\mathbf{u}_5$	$-V_{dc}/2$	$-V_{dc}/2$	$V_{dc}/2$	$-V_{dc}/6$
$\mathbf{u}_6$	$V_{dc}/2$	$-V_{dc}/2$	$V_{dc}/2$	$V_{dc}/6$
$\mathbf{u}_7$	$V_{dc}/2$	$V_{dc}/2$	$V_{dc}/2$	$V_{dc}/2$

Tabella 3.2: Tensione di modo comune in funzione dello stato dell'inverter

le cause delle emissioni condotte, ossia la variazione della tensione di modo comune generata dall'inverter. A questo scopo è stata applicata la metodologia di controllo DPC-EMC. Le tecniche DPC generano solitamente differenti forme d'onda nella tensione di modo comune, rispetto alle tecniche di controllo VOC [66, 67], per cui è lecito aspettarsi che, utilizzando un'appropriata tecnica di controllo DPC, le emissioni di modo comune possano essere efficacemente ridotte.

Com'è noto, la tensione di modo comune può essere ottenuta come:

$$u_{com} = \frac{u_{sA0} + u_{sB0} + u_{sC0}}{3} \quad (3.11)$$

dove le tre tensioni di fase sono riferite alla terra. Per ogni configurazione dell'inverter, è possibile calcolare la tensione di modo comune generata; i risultati sono riportati in Tabella 3.2. Questa mostra chiaramente che una variazione della tensione di modo comune avviene solo se si alternano vettori di spazio delle tensioni di inverter dispari a vettori pari, o se si applicano i vettori nulli (0 e 7). Conseguentemente, evitando l'applicazione dei vettori nulli e limitando l'applicazione dei vettori dispari (pari) ai soli settori dispari (pari) si minimizza la variazione della tensione di modo comune. La Tabella 3.3a riporta le configurazioni dell'inverter ottenute in questo senso, la metodologia di controllo così ottenuta prende il nome di DPC-EMC 1.

Con il suddetto controllo si ottiene una forte riduzione delle emissioni di modo comune: di fatto l'unica variazione nella tensione  $u_{com}$  si ha quando il vettore di spazio delle tensioni di rete passa da un settore al successivo. Tale miglioramento è però ottenuto a scapito di un aumentato ripple sia nei flussi di potenza attiva e reattiva sia nelle correnti scambiati con la rete.

L'aumento del ripple si ha specialmente nella potenza reattiva ed è motivato dal fatto che, in accordo a quanto detto prima, l'applicazione dei vettori

		Settore
$P \uparrow$	$Q \uparrow$	$\mathbf{u}_{k+2}$
	$Q \downarrow$	$\mathbf{u}_{k-2}$
$P \downarrow$	$Q \uparrow$	$\mathbf{u}_k$
	$Q \downarrow$	$\mathbf{u}_k$

(a) DPC EMC 1

		Settore
$P \uparrow$	$Q \uparrow$	$\mathbf{u}_{k+2}$
	$Q \downarrow$	$\mathbf{u}_{k-2}$
	$Q \uparrow$	$\mathbf{u}_{k+1}$
	$Q \downarrow$	$\mathbf{u}_{k-1}$
$P \downarrow$	$Q \uparrow$	$\mathbf{u}_k$
	$Q \downarrow$	$\mathbf{u}_k$

(b) DPC EMC 2

Tabella 3.3: Possibili configurazioni e loro effetti nel Direct Power Control EMC

$k + 2$  e  $k - 2$  provoca solo lievi variazioni della potenza reattiva. Al contrario, l'applicazione dei vettori  $k + 1$  e  $k - 1$  genererebbe azioni più efficaci, a scapito di un' aumentata emissione di modo comune. Un compromesso fra queste opposte esigenze può essere trovato limitando l'applicazione di questi vettori, solo quando siano effettivamente richieste grandi variazioni di potenza reattiva. Questo può essere ottenuto utilizzando un controllore ad isteresi a quattro stati, per il controllo della potenza reattiva. In Tabella 3.3b sono riportate le configurazioni dell'inverter da applicare secondo questa metodologia, denominata DPC-EMC 2.

### 3.3 Il boost converter

Il boost converter ha lo scopo di connettere l'emulatore di cella a combustibile, ovvero la cella a combustibile reale, al DC link ed all'inverter trifase. La progettazione di detto convertitore è stata effettuata similmente a quanto riportato nella Sezione 3.1, imponendo la condizione di conduzione continua e ripple sulla tensione di uscita inferiore al 10%. Dette condizioni portano ai seguenti valori di induttanza e capacità:  $L = 2\text{ mH}$ ,  $C = 23,5\text{ mF}$ .

Il controllo del convertitore è effettuato tramite un controllore PI a cui viene fornito come segnale di errore la differenza fra la tensione di ingresso misurata e la tensione di ingresso di riferimento. In questo modo è possibile controllare il punto di funzionamento delle fonti di energia a monte del boost converter e forzarlo al punto di massima potenza; questa strategia di controllo si presta meglio al controllo di sistemi di generazione distribuita multisorgente, che non al semplice controllo del sistema di generazione con sola cella a combustibile.

Il controllore PI è stato tarato considerando il seguente modello matema-

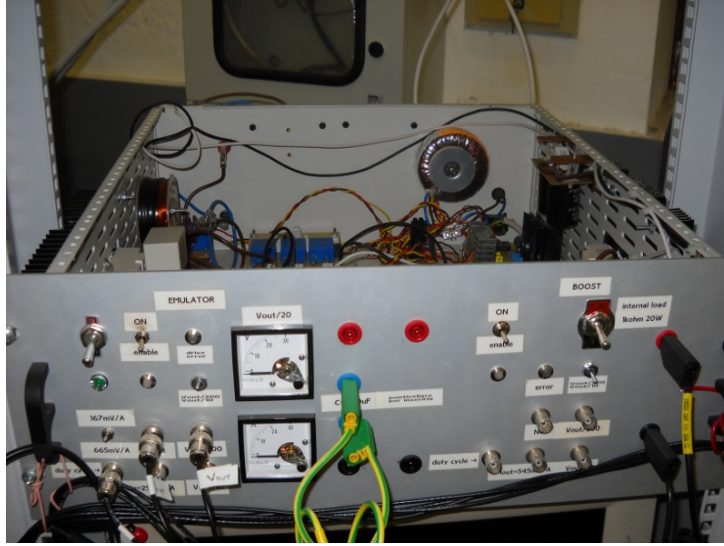


Figura 3.9: Fotografia del DC/DC boost converter

tico dinamico del sistema:

$$H(s) = \frac{K_0}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} \quad (3.12)$$

dove:

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{V_0}{LC} \\ \omega &= \sqrt{\frac{-r_d + R_L}{-r_d LC}} \\ \zeta &= \frac{-r_d R_L C + L}{2r_d LC\omega} \end{aligned}$$

essendo  $V_0$  la tensione di uscita del boost converter,  $L$  e  $C$  i valori di induttanza e capacità del filtro LC posto in uscita al FCS,  $R_L$  la resistenza parassita dell'induttanza ed infine  $r_d$  la resistenza differenziale del FCS. Detta resistenza differenziale è non lineare, in quanto rappresenta la variazione di tensione che si ha a seguito di una piccola variazione di corrente; può essere ricavata dal modello del FCS, esprimendo la tensione di uscita in funzione della corrente erogata e differenziando rispetto alla corrente stessa. Tuttavia, nello sviluppo del modello dinamico del boost converter è stata approssimata come:

$$r_d = \frac{\tilde{i}_{FC}}{\tilde{v}_{FC}} \quad (3.13)$$

essendo  $\tilde{i}_{FC}$  e  $\tilde{v}_{FC}$  rispettivamente le piccole variazioni di corrente e tensione prese in considerazione per il modello dinamico ai piccoli segnali.

Il convertitore è stato realizzato con MESH IGBT, con frequenza di switching pari a  $10\text{ kHz}$ , pari altresì alla frequenza di campionamento del sistema di controllo.



## CAPITOLO 4

---

### Risultati Sperimentali

In questo capitolo sono presentati i risultati di simulazione e sperimentali ottenuti dall'applicazione del controllo predittivo al FCS. Sono stati presi in considerazione sia il rifeirmento ottimale per il rapporto d'eccesso d'ossigeno sia i vincoli lineari del compressore. I risultati di simulazione sono stati ottenuti per mostrare come il MPC permetta di ottenere risultati migliori rispetto alle metodologie di controllo classicamente utilizzate per i FCS. I risultati proposti rendono evidente come il MPC sia in grado di soddisfare efficacemente i requisiti imposti per l'eccesso d'ossigeno, evitando nel contempo un comportamento instabile del compressore.

L'utilizzo di un emulatore ha permesso di verificare la bontà del MPC anche in un ambiente sperimentale, in cui cioè le condizioni sono reali e dunque differenti dall'ambiente di simulazione. I risultati sperimentali hanno inoltre evidenziato un aspetto importante e poco noto: il comportamento esterno del FCS dipende fortemente dalla tipologia di controllo utilizzata, potendo anche approssimare in maniera ottimale il generatore di tensione, se adeguatamente controllato.

#### 4.1 Risultati di simulazione per il MPC

Per utilizzare il MPC, si deve ottenere un modello matematico del FCS lineare; è stato scelto un punto operativo a cui corrisponde una corrente erogata pari alla metà della corrente nominale, con una rapporto d'eccesso d'ossigeno  $\lambda_{O_2} = 2$ . In queste condizioni, sono stati fissati i seguenti valori per le variabili d'ingresso:

$$\begin{aligned} I_{st} &= 191 \text{ A} \\ \omega_{em,ref} &= 76.70 \text{ krpm} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Sono stati condotti dei test per verificare che l'errore di approssimazione introdotto dalla linearizzazione non sia troppo grande per garantire dei risultati

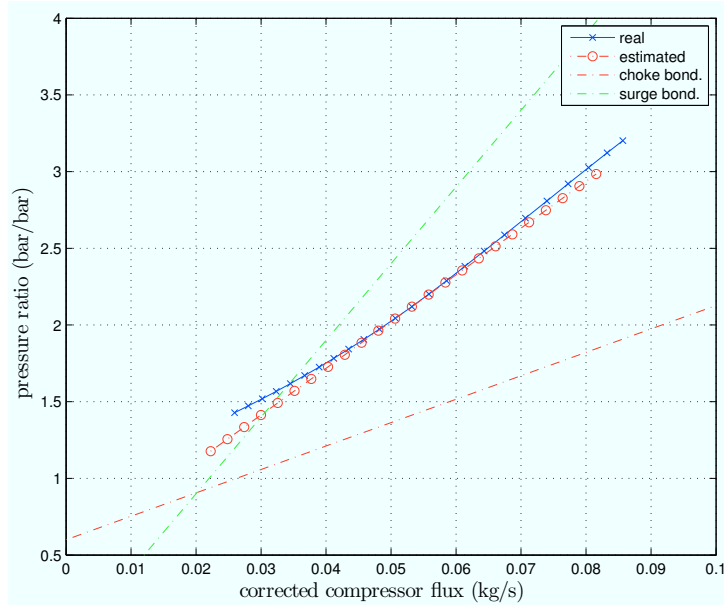


Figura 4.1: Mappa statica del compressore

attendibili. Questi test hanno mostrato un errore in uscita minore del 10% con una variazione della corrente d'ingresso pari a  $\pm 100 A$  attorno al punto di linearizzazione, utilizzando la tecnica di controllo con static feed-forward presentata in [68]. Inoltre, al fine di verificare l'errore fra il modello lineare e il modello non lineare per quanto concerne la gestione dei vincoli lineari, è stato effettuato un confronto fra la traiettoria generata sul piano di lavoro del compressore dai due modelli per l'intero range di lavoro del FCS. In Figura 4.1 sono mostrati i risultati di quest'ultimo confronto.

Per assicurare la stabilità del controllore, l'orizzonte di predizione è stato imposto pari a  $H_p = 10$  e l'orizzonte di controllo pari a  $H_c = 1$ ; il tempo di campionamento del controllore è pari a  $50 Hz$ . È stato scelto un peso costante, lungo tutto l'orizzonte di predizione, per l'unica uscita controllata; la matrice  $\mathbf{Q}(i)$  diviene quindi una costante  $Q = 10$ . Questo valore è stato scelto in modo da ottenere una risposta veloce alle variazioni di carico. Come è mostrato in Figura 4.2, il test, effettuato sia col MPC vincolato sia col MPC non vincolato, è ottenuto variando la corrente prelevata dal FCS dal valore iniziale  $I_{st} = 191 A$  al valore finale  $I_{st} = 150 A$  a  $t = 6 s$ . Durante il transitorio innescato dalla variazione di corrente, il compressore raggiunge il surge limit, attivando quindi la gestione dei vincoli nel caso del MPC vincolato. Infine, la corrente di stack ritorna, a  $t = 12 s$  al valore di linearizzazione  $I_{st} = 191 A$  e quindi risale a  $t = 18 s$  al valore  $I_{st} = 260 A$ .

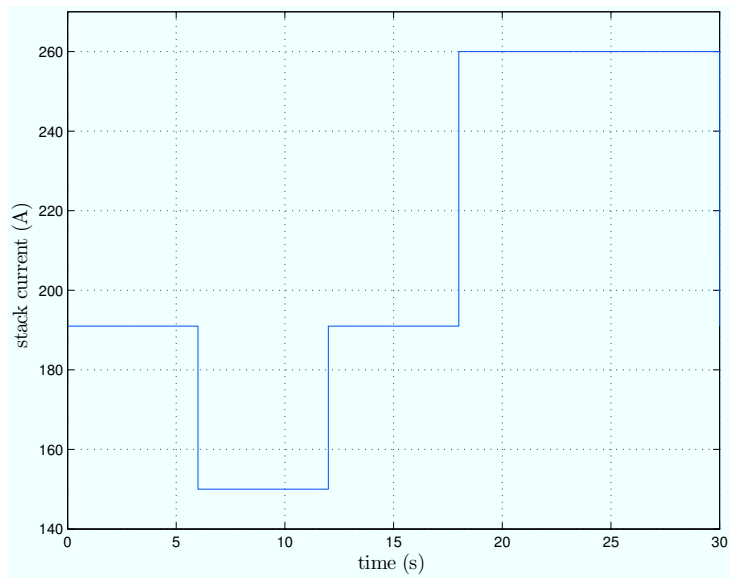


Figura 4.2: Corrente di stack

step time	static feedforward	unconstr. MPC	constr. MPC
6 s	0.207 s	0.67 s	1.39 s
12 s	0.207 s	0.643 s	0.721 s
18 s	0.283 s	0.813 s	0.848 s

Tabella 4.1: Tempi di salita per il test proposto

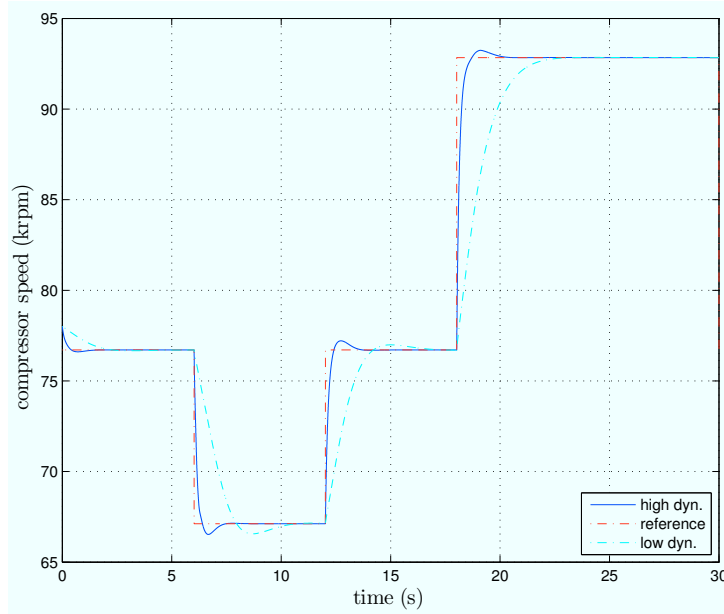


Figura 4.3: Velocità del compressore – static feedforward

#### 4.1.1 Test 1 – static feed–forward

Come primo test, si è adottata la strategia di controllo con static feed-forward; il riferimento di velocità  $\omega_{cm,ref}$  del motore collegato al compressore ccentrifugo di alimentazione dell’ossigeno è calcolato come funzione lineare della corrente di stack  $I_{st}$ , come mostrato in (4.2).

$$\omega_{cm,ref} = 24.488 \cdot I_{st} + 3355.5 \quad (4.2)$$

Questa relazione lineare è stata realizzata in modo da evitare che il rapporto d’eccesso d’ossigeno raggiungesse valori troppo bassi per l’intero range di lavoro del FCS; infatti, come mostrato in Figura 4.4, i valori stazionari di  $\lambda_{O_2}$  rimangono sempre vicini al riferimento ottimale  $\lambda_{O_2} = 2$  per l’intera durata del test.

Ovviamente, la Figura 4.3 mostra che il riferimento di velocità  $\omega_{cm,ref}$  ha lo stesso andamento della corrente di stack. Per ottenere una risposta dinamica rapida, la risposta di velocità del motore del compressore è sotto-smorzata. In Tabella 4.1 sono riportati i tempi di risalita per i test effettuati; questi tempi sono stati calcolati misurando l’intervallo di tempo che intercorre fra gli istanti di tempo in cui la velocità del compressore raggiunge il 10% e il 90%, rispettivamente, del valore di regime alla fine del transitorio. La strategia di controllo con static feedforward ha il tempo di risalita più

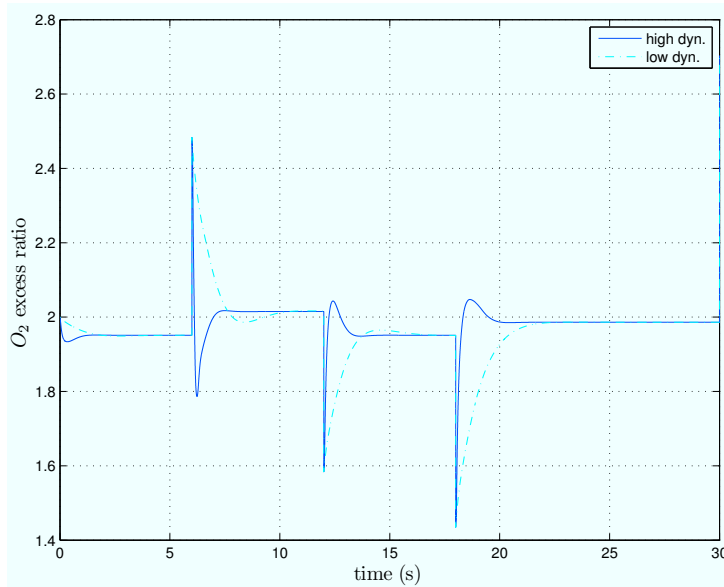


Figura 4.4: Rapporto d'eccesso d'ossigeno – static feedforward

rapido e, come diretta conseguenza mostrata in Figura 4.4, il rapporto d'eccesso d'ossigeno  $\lambda_{O_2}$  non raggiunge valori di pericolo in entrambi i transitori a  $t = 12$  s e  $t = 18$  s. Ciononostante, l'elevata dinamica imposta al compressore genera una risposta irrealistica, dal momento che, come riportato in Figura 4.5, il punto di lavoro transitorio del compressore supera il surge limit, entrando quindi in una zona instabile di funzionamento.

In Figura 4.3, 4.4 e 4.5 sono mostrati i risultati di confronto ottenuti con la stessa metodologia di controllo, ma con una dinamica del compressore più lenta: la traiettoria del punto di lavoro del compressore giace per intero all'interno della zona stabile di funzionamento, come indicato dalla curva ciano in Figura 4.5, ma la membrana polimerica è costretta a lavorare in condizioni di grave carenza d'ossigeno, dato che, come mostrato in Figura 4.4, il rapporto d'eccesso d'ossigeno  $\lambda_{O_2}$  rimane al di sotto del riferimento per un tempo maggiore.

### 4.1.2 Test 2 – MPC non vincolato

In Figura 4.6, 4.7 e 4.8 sono mostrati i risultati dello stesso test, ottenuti con il controllo predittivo non vincolato. La risposta dinamica del compressore è rapida, comparabile con la risposta dinamica ottenuta con la prima strategia feed-forward; a differenza di quest'ultima, tuttavia, il riferimento  $\omega_{cm,ref}$  non

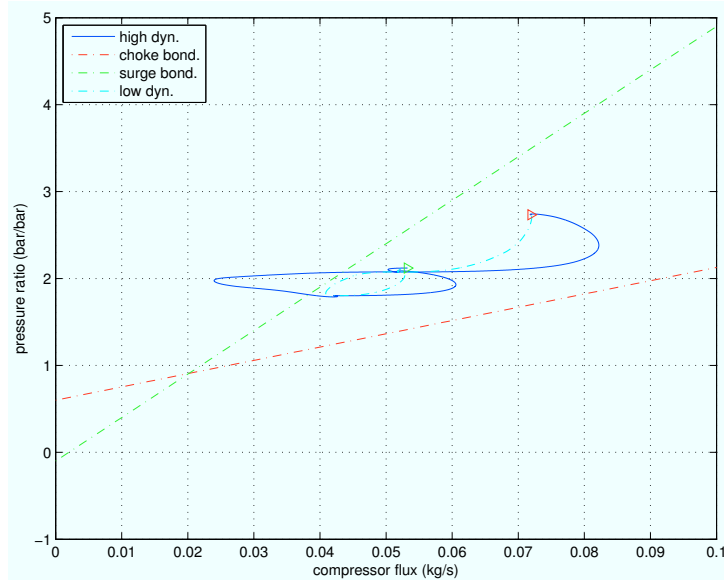


Figura 4.5: Mappa del compressore – static feedforward

è ottenuto come funzione lineare della corrente di stack erogata, quindi non si ha alcuna sovraelongazione della risposta di velocità.

La Figura 4.7 mostra l'andamento del rapporto di eccesso d'ossigeno  $\lambda_{O_2}$ : il riferimento ottimale  $\lambda_{O_2} = 2$  è raggiunto più precisamente quanto più trascurabile è l'errore introdotto dalla linearizzazione del modello. La membrana lavora tuttavia in condizioni di sicurezza e il pericolo di carenza d'ossigeno è evitato.

Come è lecito aspettarsi, i vincoli lineari del compressore non sono rispettati; la Figura 4.8 mostra che il punto di lavoro del compressore sconfinava nella zona instabile di funzionamento.

### 4.1.3 Test 3 – MPC vincolato

Infine, in Figura 4.9, 4.10 e 4.11 sono mostrati i risultati del test ottenuti con il controllo predittivo vincolato. Così come accade per il test precedente, il riferimento di velocità (Figura 4.9) è una funzione non lineare della corrente prelevata dallo stack: il compressore ha un'elevata dinamica, ma non si hanno sovraelongazioni di velocità. Come mostrato in Figura 4.10, il rapporto d'eccesso d'ossigeno segue correttamente il riferimento ottimale, ma il controllo dei vincoli, che si attiva in corrispondenza del transitorio a  $t = 6 s$ , fa sì che la risposta sia più lenta. Infine, come mostrato in Figura 4.5 la traiettoria del punto di lavoro del compressore giace per intero all'interno

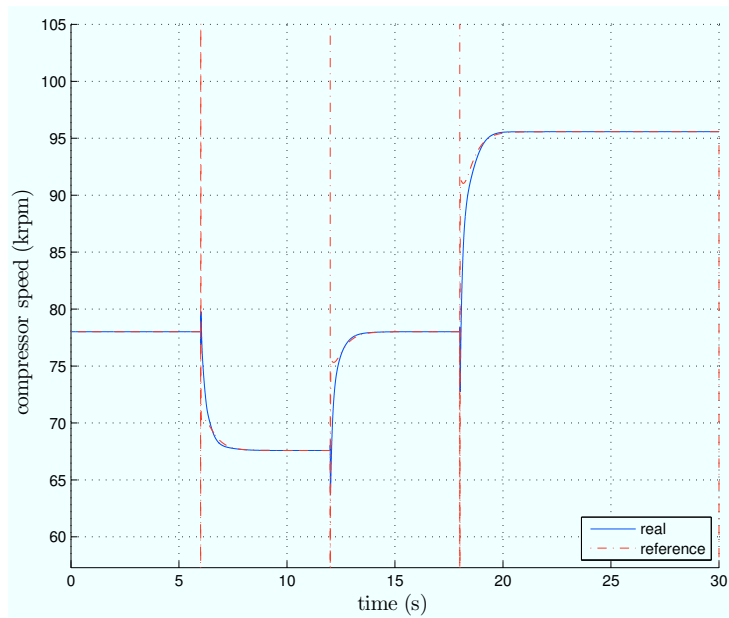


Figura 4.6: Velocità del compressore – unconstrained MPC

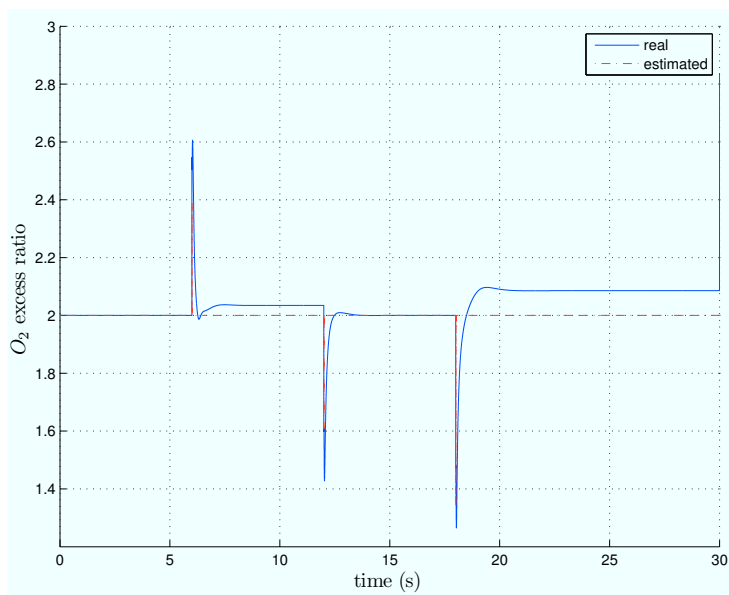


Figura 4.7: Rapporto d'eccesso d'ossigeno – unconstrained MPC

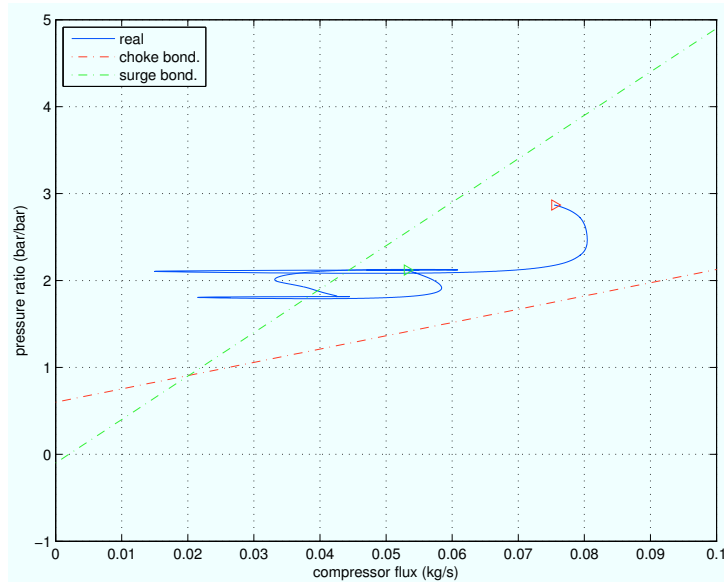


Figura 4.8: Mappa del compressore – unconstrained MPC

della zona stabile di funzionamento. Il controllo predittivo vincolato è quindi in grado di assicurare delle condizioni di funzionamento sicure per la membrana polimerica del FCS, soddisfacendo i vincoli lineari del compressore, pur mantenendo un'elevata dinamica per il compressore.

## 4.2 Risultati sperimentali per il MPC

Di seguito sono proposti i risultati sperimentali ottenuti con l'applicazione del controllo predittivo all'emulatore del FCS. L'emulatore consente di verificare il MPC in condizioni reali, e.g. in cui i segnali di retroazione sono corrotti da rumore, il carico ha un andamento reale e non ideale, etc. I valori nominale del FCS di cui si è ottenuto il modello e dell'emulatore utilizzato sono riportati in Tabella 4.2; si noti che la potenza nominale differisce notevolmente. Pertanto, al fine di rendere coerenti i risultati sperimentali con quelli emulati, la corrente calcolata dal modello di riferimento è stata scalata di un fattore 30; non è stato necessario effettuare alcuna scala sulla tensione in quanto il range dell'emulatore è di fatto equivalente a quello del FCS emulato.

In Figura 4.12 e 4.13 sono riportate rispettivamente la caratteristica  $I - V$  e la caratteristica  $I - P$  stazionarie del FCS controllato per diverse condizioni di carico. In particolar, il FCS emulato, controllato tramite MPC, è



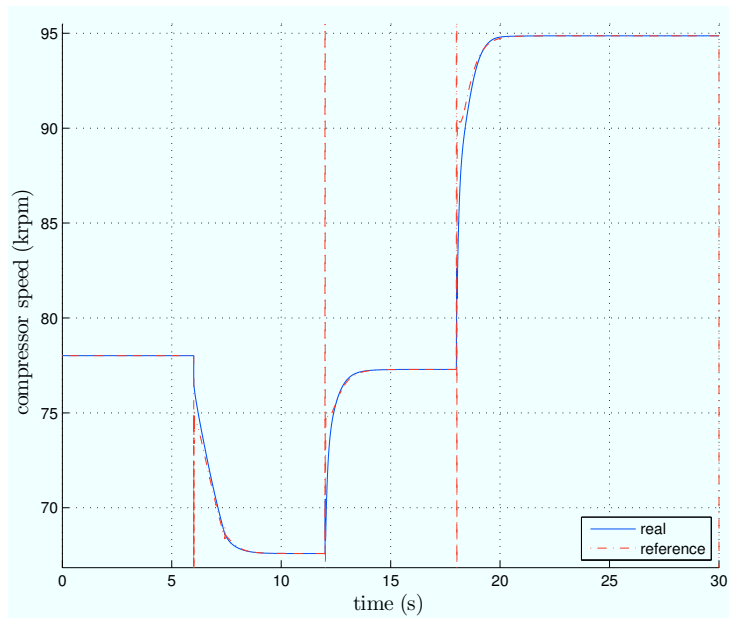


Figura 4.9: Velocità del compressore – constrained MPC

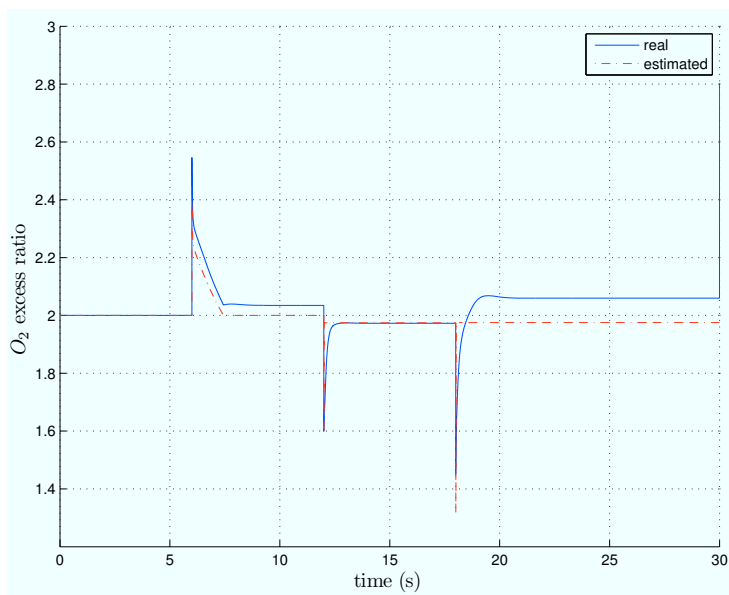


Figura 4.10: Rapporto d'eccesso d'ossigeno – constrained MPC

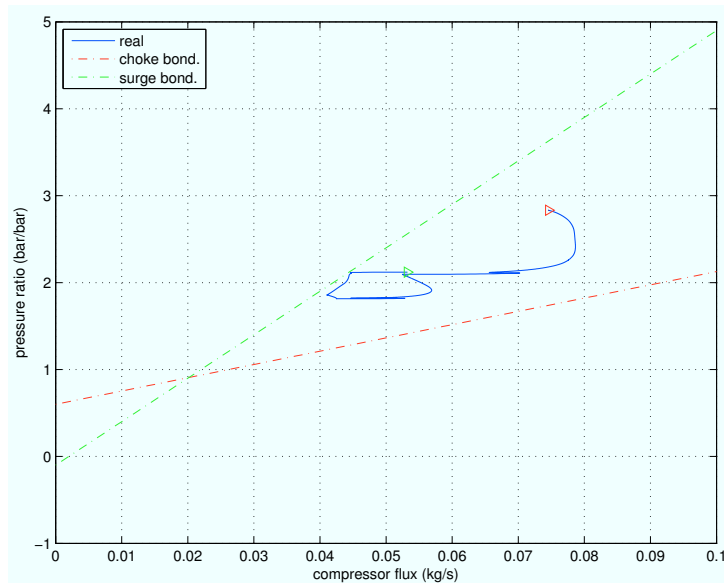


Figura 4.11: Mappa del compressore – constrained MPC

Reference values	
rated power (kW)	75
rated current (A)	300
rated voltage (V)	250
number of cells	350
Emulated values	
rated power (kW)	3
rated current (A)	10
rated voltage (V)	300

Tabella 4.2: Valori nominali del FCS di riferimento ed emulato

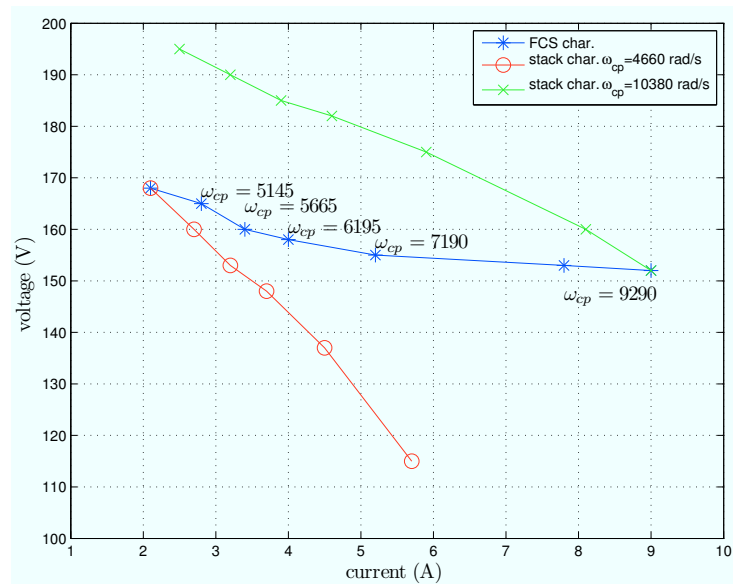


Figura 4.12: Caratteristica  $I - V$  per il FCS controllato e non controllato

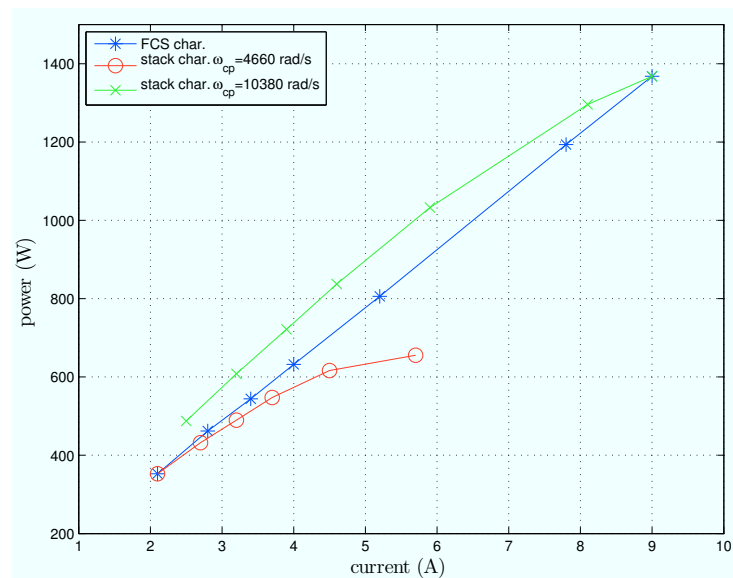


Figura 4.13: Caratteristica  $I - VP$  per il FCS controllato e non controllato

stato sottoposto a variazioni di carico per l'intero range di funzionamento ( $2.1 A \div 9.0 A$ ). Per i due valori estremi, sono state inoltre riportate le caratteristiche ottenute per il FCS non controllato, al fine di mostrare la differenza di comportamento durante il regime fra il FCS controllato e il FCS controllato con il MPC. In corrispondenza i due valori estremi di carico, il riferimento di velocità del compressore è stato imposto pari ai seguenti due valori:

- $\omega_{cp,ref} = 4660 \text{ rad/s}$ , cui corrisponde la minima pressione al catodo, raggiunta durante le condizioni di minimo carico,  $I_{emul} = 2.1 A$  ( $R_{max} = 76.66 \Omega$ );
- $\omega_{cp,ref} = 10380 \text{ rad/s}$ , corrispondente alla massima pressione catodica, ottenuta in condizioni di massimo carico,  $I_{emul} = 9.0 A$  ( $R_{min} = 16.41 \Omega$ );

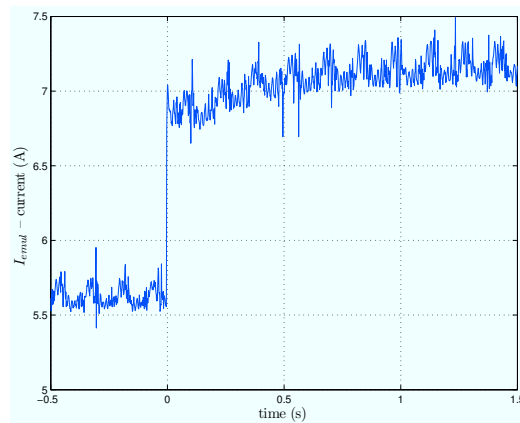
Si noti come la tensione abbia una consistente variazione lungo tutto l'intervallo operativo, da 2 a 10 A, per entrambi i riferimenti costanti, massimo e minimo, di velocità del compressore. Al contrario, nel FCS con controllo predittivo, la caratteristica esterna  $I - V$  è quasi piatta, cui corrisponde un comportamento quasi ideale da generatore di tensione. È quindi molto interessante notare come un'appropriata azione di controllo possa far variare in maniera consistente il comportamento del FCS, avvicinandolo ad un comportamento da generatore quasi ideale. La Figura 4.13 conferma le considerazioni svolte per la Figura 4.12, considerato che la caratteristica esterna di potenza del FCS con controllo predittivo diviene praticamente lineare.

Nel seguito saranno mostrati i risultati di due differenti prove:

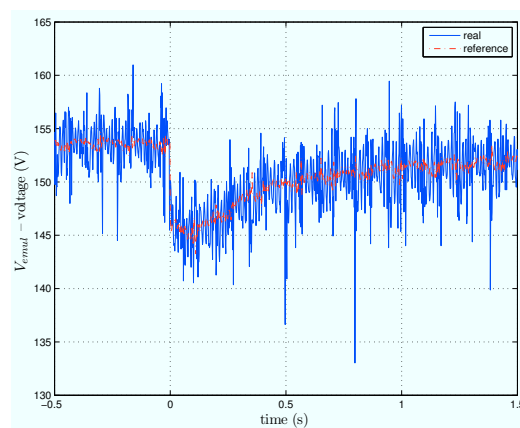
- nella prima prova, si è verificata la risposta del FCS ad una variazione di carico puramente resistivo; sia il punto iniziale ( $I_{emul} = 5.65 A$ ), sia il punto finale del test ( $I_{emul} = 7.20 A$ ) possono essere considerati appartenenti ad un ristretto intorno ( $\simeq 10\%$ ) del punto di linearizzazione del modello.
- Nella seconda prova, al FCS è stato collegato un carico resistivo cui si è aggiunto un carico variabile, sia in valore che in tipologia.

### 4.2.1 Test 1 – carico resistivo

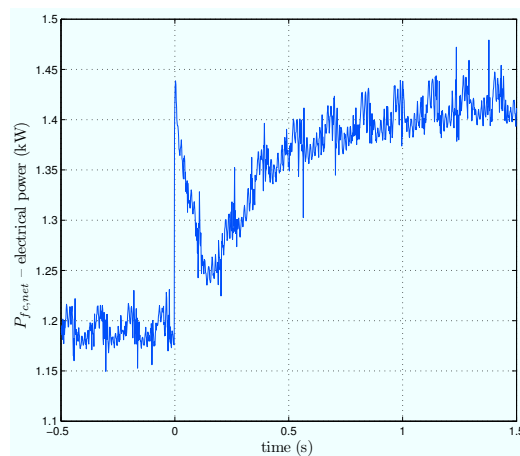
La prima prova è stata realizzata con una variazione a gradino del carico collegato al FCS, all'istante  $t = 0$ . Il carico resistivo è stato variato dal valore iniziale  $R_{L1} = 31 \Omega$  (cui corrisponde una potenza pari a circa  $1 \text{ kW}$ ) al valore  $R_{L2} = 24 \Omega$  (corrispondente a circa  $1.25 \text{ kW}$ ); la corrispondente variazione di



(a) Stack current  $I_{st}$



(b) Stack voltage  $V_{st}$



(c) Stack power  $P_{fc,net}$

Figura 4.14: Corrente, tensione e potenza prelevati dal FCS

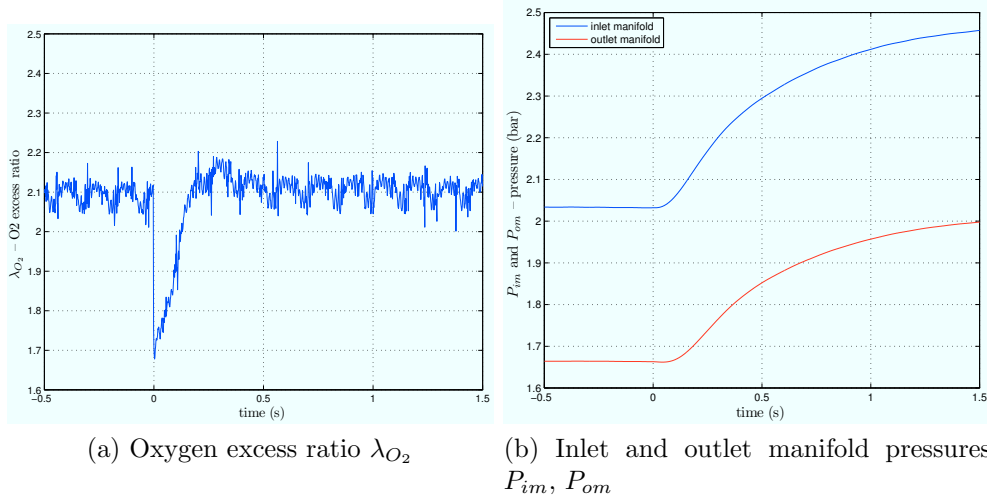


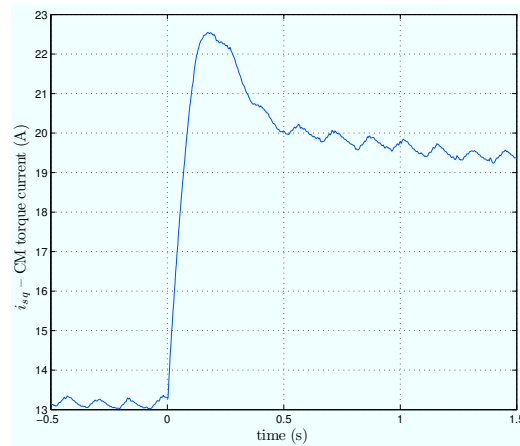
Figura 4.15: Variabili del compressore e dei collettori

corrente è dal valore iniziale  $I_{st} = 5.65 A$  al valore finale  $I_{st} = 7.20 A$ . La Figura 4.14a mostra la corrente di stack durante la prova; il suo andamento è a gradino, come ci si aspetta data la natura del carico. La Figura 4.14b mostra gli andamenti corrispondenti della tensione in uscita dall'emulatore e il suo riferimento. La tensione misurata all'uscita dell'emulatore segue correttamente il riferimento, calcolato dal modello non lineare del FCS, confermando la bontà del controllore dello spazio di stato adottato. Si noti come la variazione di tensione è contenuta, in accordo al comportamento da generatore quasi ideale di tensione [49]. La Figura 4.14c mostra la potenza generata dal FCS; com'è ovvio la potenza generata aumenta con l'aumento della corrente.

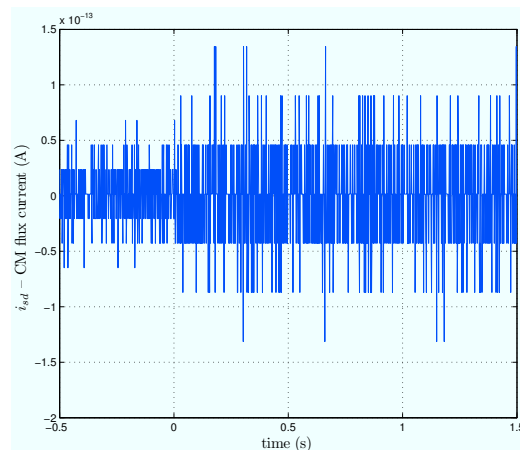
La Figura 4.15a mostra gli andamenti del rapporto d'eccesso d'ossigeno reale e di riferimento ( $\lambda_{O_2} = 2$ ). Il controllo predittivo fa sì che il rapporto  $\lambda_{O_2}$  raggiunga il valore di riferimento dopo un breve transitorio (120 ms), durante il quale l'eccesso d'ossigeno diminuisce a seguito dell'aumento di carico. Il minimo valore raggiunto durante il transitorio è pari a circa 1.7, valore di sicurezza per la PEM. Al contrario, in [3], per variazioni di carico paragonabili, il rapporto d'eccesso d'ossigeno diminuisce fino a 1.4, a conferma della bontà dell'approccio MPC.

In Figura 4.15b sono mostrate le pressioni nei collettori di alimentazione e di ritorno. Entrambe le pressioni aumentano a seguito dell'aumento di carico. La dinamica di queste curve dipende dalla struttura dei collettori e dalla dinamica del compressore. La differenza fra le due pressioni è pari alla caduta di pressione nello stack e nel collettore di andata.

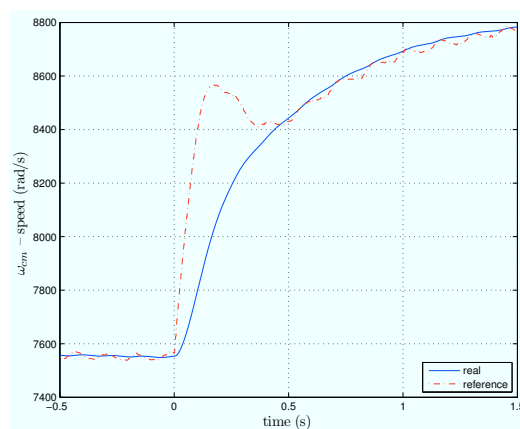
Per quanto riguarda il compressore, la Figura 4.16 mostra la velocità di



(a) Torque current  $i_{sq}$



(b) Flux current  $i_{sd}$



(c) Compressor speed  $\omega_{cp}$

Figura 4.16: Variabili dell'azionamento del compressore

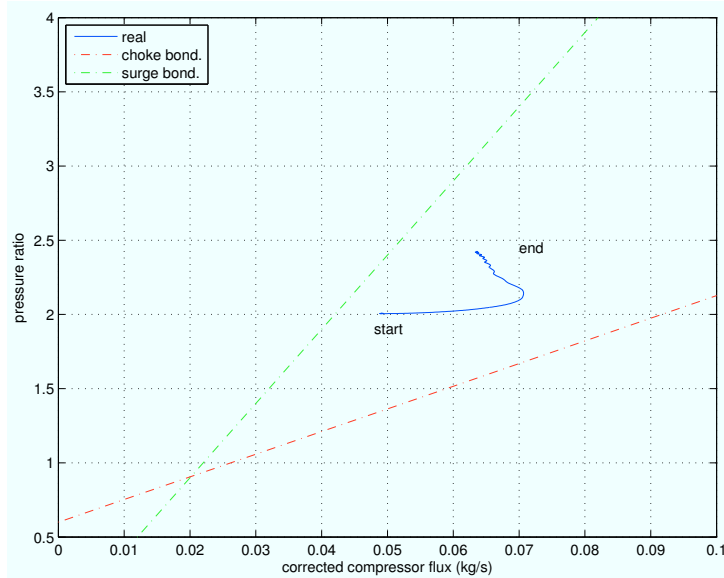


Figura 4.17: Mappa del compressore

rotazione e la velocità di riferimento del PMSM ad esso collegato, insieme alle correnti  $i_{sd}$  e  $i_{sq}$  del controllo vettoriale ad orientamento di campo. A seguito della riduzione del rapporto d'eccesso d'ossigeno, generata dall'incremento di carico, il MPC genera un aumento del riferimento di velocità, cui corrisponde un aumento del riferimento della componente di coppia della corrente  $i_{sq}$ . La componente di flusso  $i_{sd}$  è controllata a zero, dal momento che non è richiesto alcun deflussaggio.

Infine, in Figura 4.17 è riportata la mappa del compressore; si noti come la traiettoria del punto di lavoro del compressore giaccia per intero all'interno della zona stabile di funzionamento.

#### 4.2.2 Test 2 – carico resistivo e DC motor

La seconda prova è stata realizzata in condizioni più gravose. È stato collegato al FCS un carico resistivo cosante  $R_{L1} = 60 \Omega$ , corrispondente alla minima corrente ( $I_{emul} = 2.0 A$ ). A partire da questo valore di carico, prima si è ridotto il valore di resistenza, fino a  $R_{L2} = 20 \Omega$  cui corrisponde un valore prossimo alla massima corrente prelevabile ( $I_{emul} = 8.0 A$ ). Successivamente si è aggiunto un motore a corrente continua (carico altamente induttivo), i cui valori nominale sono riportati in Tabella 4.3 (in Figura 4.18 la fotografia del motore).

La Figura 4.19 mostra rispettivamente la corrente, la tensione e la potenza

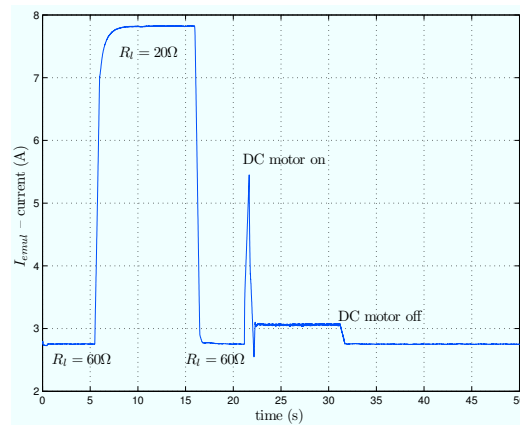




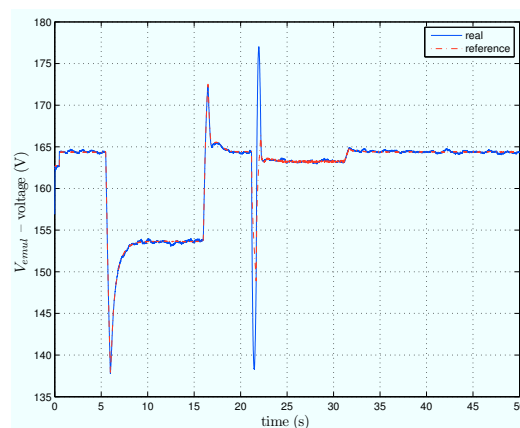
Figura 4.18: Fotografia del motore DC

rated voltage ( $V$ )	300
rated current ( $A$ )	8.5
rated speed ( $rpm$ )	3000
rated torque ( $Nm$ )	22
rated field winding voltage ( $V$ )	200
rated field winding current ( $A$ )	0.7

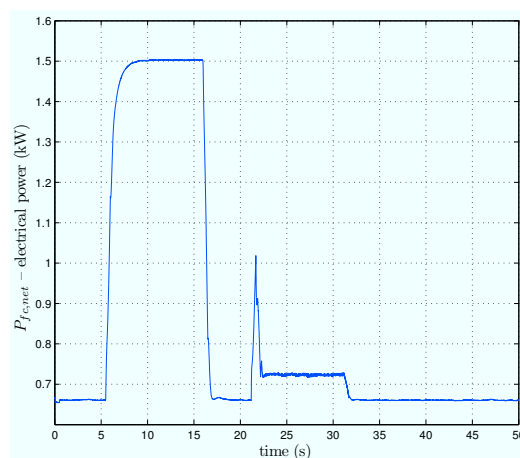
Tabella 4.3: Parametri del DC motor



(a) Stack current  $I_{st}$



(b) Stack voltage  $V_{st}$



(c) Stack power  $P_{fc,net}$

Figura 4.19: Corrente, tensione e potenza prelevati dal FCS

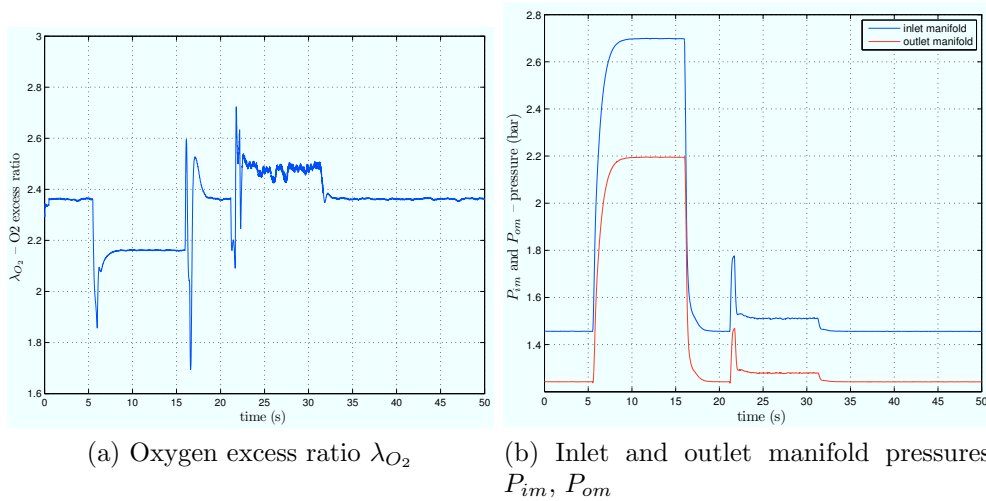


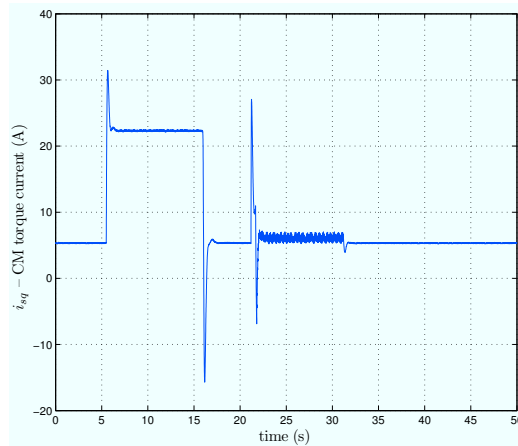
Figura 4.20: Variabili del compressore e dei collettori

erogata dal FCS; si noti che la tensione in uscita dal FCS è mantenuta costante per l'intera durata della prova, fatta eccezione per la riduzione del carico fino a  $R_{L2} = 20 \Omega$  e durante l'inserzione del motore DC, in corrispondenza ai quali il carico è talmente elevato da superare la zona di funzionamento a tensione costante. Il controllo non è dunque in grado di compensare la caduta di tensione durante l'erogazione della massima corrente.

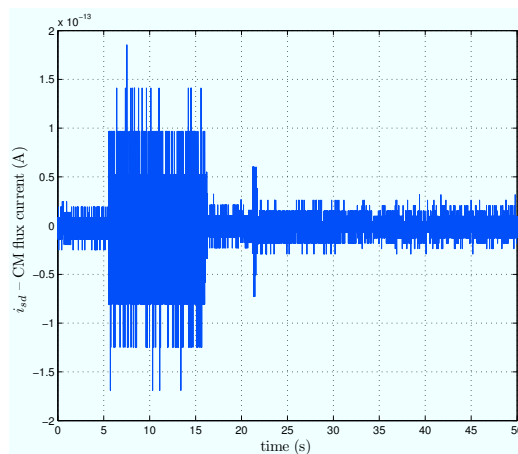
In Figura 4.20a è riportato l'andamento dell'eccesso d'ossigeno durante la prova. A differenza della prova precedente, in cui il MPC era in grado di controllare efficacemente il rapporto d'eccesso d'ossigeno al suo valore ottimale, la discrepanza fra il riferimento ottimale e reale è più marcata. Ciò è dovuto all'allontanarsi del punto di lavoro dal punto di linearizzazione, per cui il controllo perde di efficacia. Si noti comunque che, anche in queste condizioni, il rapporto d'eccesso d'ossigeno raggiunge valori inferiori a 1.8 slo per brevissimi periodi.

La Figura 4.20b mostra le pressioni dei collettori di andata e ritorno. Anche in questo caso, ad un aumento di carico corrisponde un aumento di pressione.

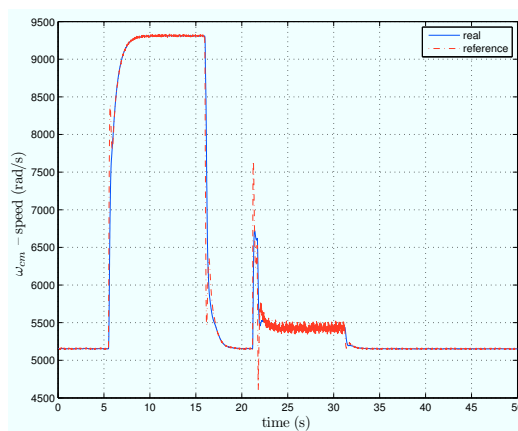
Infine, in Figura 4.21 sono riportate la velocità reale e di riferimento dell'azionamento del compressore, insieme alle componenti  $i_{sd}$  e  $i_{sq}$  del controllo vettoriale con orientamento di campo del PMSM collegato al compressore. Coerentemente, il MPC genera un aumento del riferimento di velocità ad ogni aumento di carico, generando quindi un aumento della componente  $i_{sq}$ , mentre la componente  $i_{sd}$  è controllata a zero, come nel caso precedente.



(a) Torque current  $i_{sq}$



(b) Flux current  $i_{sd}$



(c) Compressor speed  $\omega_{cp}$

Figura 4.21: Variabili dell'azionamento del compressore

### 4.3 Risultati sperimentali per l'inverter

Dopo aver mostrato la bontà del controllo predittivo in confronto ad altre metodologie di controllo e i risultati sperimentali ottenuti tramite l'emulatore di FCS, nel seguito saranno mostrati i risultati sperimentali del collegamento in rete del sistema di generazione distribuita progettato.

I test, per la verifica sperimentale delle tecniche di controllo dell'inverter esposte precedentemente, sono stati condotti sul banco di prova così realizzato:

- un inverter trifase VSI con potenza nominale di  $7.5 \text{ kVA}$ ;
- una scheda elettronica di interfaccia con sensori di tensione (LEM CV3-1000) e corrente (LEM LA-55P);
- una scheda dSPACE DS 1103 con un PowerPC 604e a  $400 \text{ Mhz}$  e un DSP a virgola mobile DSP TMS320F240;
- una sorgente di tensione continua con valore pari a  $560 \text{ V}$ ;
- induttanze serie di interconnessione con valore totale pari a  $12 \text{ mH}$  e resistenza parassita di  $0.9 \Omega$ .

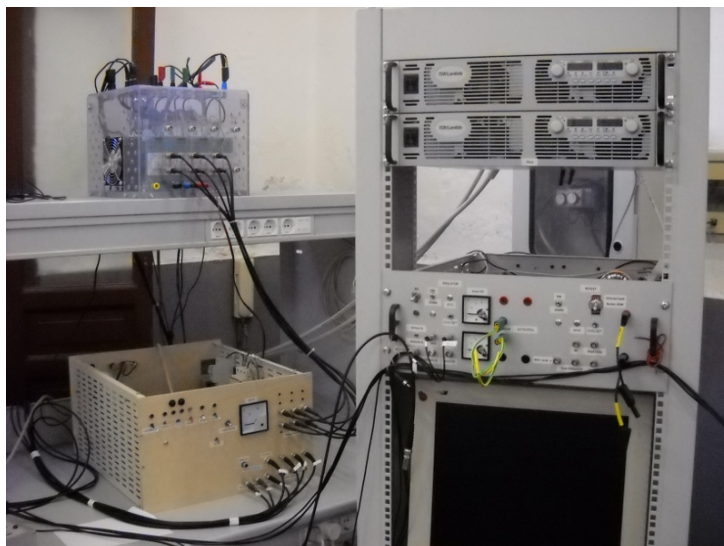


Figura 4.22: Fotografia del banco di prova

In Figura 4.22 è riportata la fotografia del banco di prova. Le metodologie di controllo dell'inverter esposte nel Paragrafo 3.2 sono state verificate con

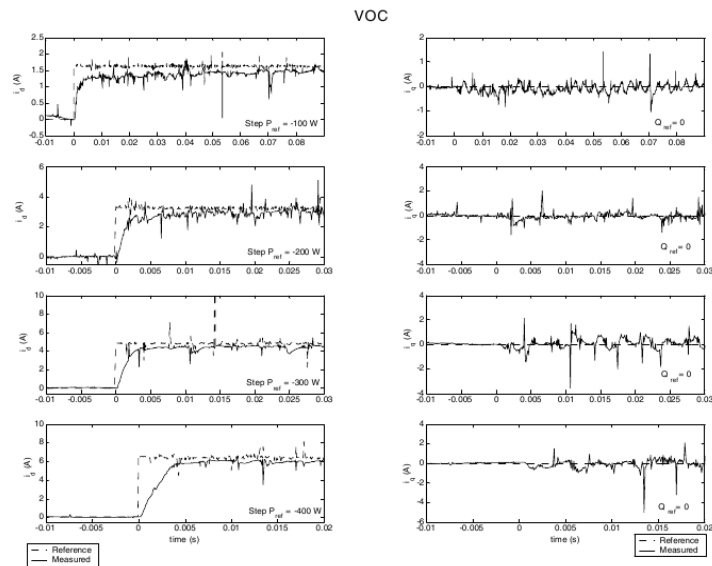


Figura 4.23: Andamenti di  $i_d$  e  $i_q$  per vari valori di potenza erogata–VOC

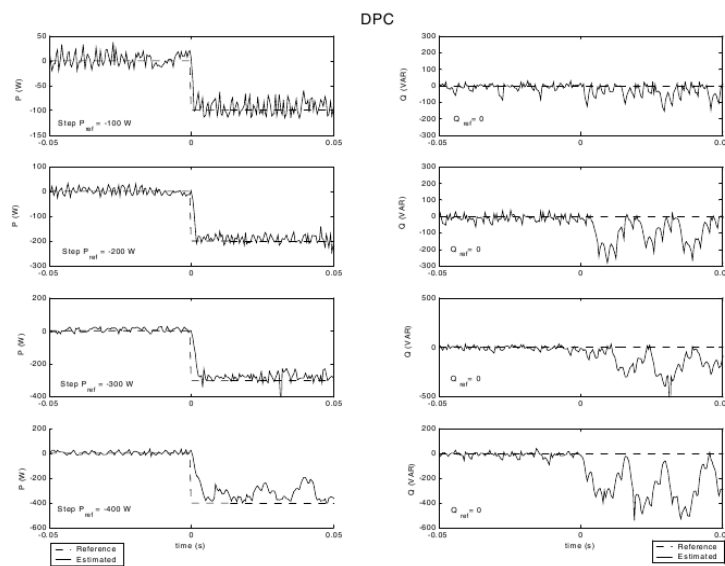


Figura 4.24: Andamenti di  $P$  e  $Q$  per vari valori di potenza erogata–DPC

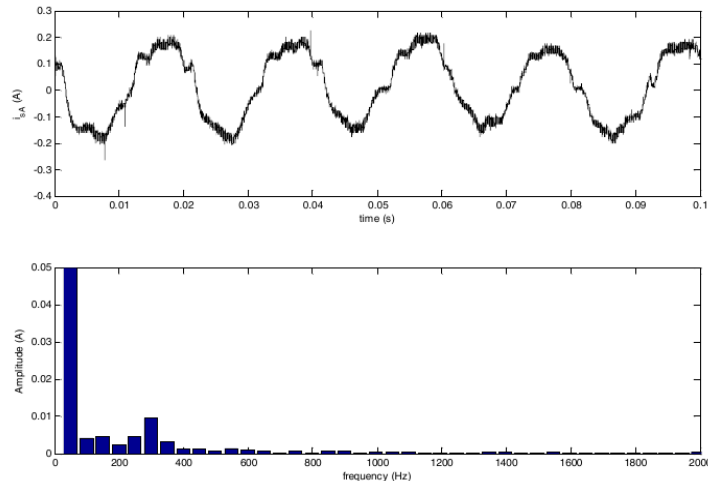


Figura 4.25: Corrente a regime e suo spettro con tecnica VOC

vari test. In Figura 4.23 e 4.24 sono riportati gli andamenti, rispettivamente, delle correnti e delle potenze sia di riferimento sia misurate con le strategie di controllo VOC e DPC classico. I riferimenti di potenza attiva per ciascuno dei quattro test sono stati imposti pari a 100, 200, 300 ed infine 400 W, con riferimento di potenza reattiva sempre nullo. È possibile notare dai risultati esposti che entrambe le strategie di controllo riescono a controllare indipendentemente sia la potenza attiva sia la potenza reattiva; tuttavia, la strategia di controllo DPC esibisce migliori prestazioni dinamiche, specie alle basse potenze. Al contrario la strategia di controllo VOC riesce più efficacemente a controllare la potenza reattiva. Infatti, la strategia DPC mostra un andamento oscillatorio per il controllo della potenza reattiva, con prestazioni peggiori all'aumentare della potenza attiva erogata.

In Figura 4.25 e 4.26 sono mostrati gli andamenti delle correnti erogate dall'inverter su una delle tre fasi e le rispettive FFT, con indicate le armoniche fino alla 40<sup>ma</sup>. I risultati mostrati sono relativi al test con erogazione in rete di potenza attiva pari a 100 W e potenza reattiva nulla, sia con strategia di controllo VOC e sia con il DPC. È subito evidente come il VOC mostri un comportamento migliore, in quanto la corrente erogata dall'inverter controllato con il DPC ha un contenuto armonico superiore.

Le tecniche DPC EMC 1 e 2 sono state verificate con un'altra prova, in cui si richiedeva una variazione di potenza attiva erogata in rete di 1 kW, essendo sempre nullo il riferimento di potenza reattiva. Nelle Figure 4.27, 4.28 e 4.29 sono mostrati i risultati di detta prova. Entrambe le tecniche sono state in grado di effettuare il test; in particolare, le tecniche DPC mostrano

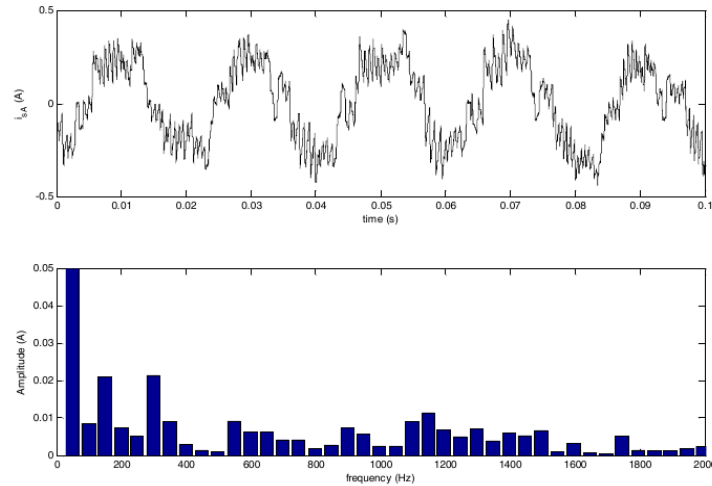


Figura 4.26: Corrente a regime e suo spettro con tecnica DPC

buone prestazioni dinamiche, migliori di quelle che sarebbero state ottenute con il VOC, stanti i parametri scelti per la taratura dei PI di corrente. Non sono state inoltre rilevate differenze apprezzabili nel controllo della potenza reattiva fra le tecniche EMC 1 ed EMC 2; questo è dovuto all'elevato valore di tensione continua scelto per il DC link. Si ricorda che in un sistema controllato con la tecnica DPC EMC 1 e un basso valore di tensione di DC link si nota un bias ineliminabile nel controllo della potenza reattiva, bias non presente se si utilizza la tecnica DPC EMC 2. I test non sono stati effettuati con tensioni minori di DC link per ragioni di stabilità del sistema. Nella tecnica DPC classica si riscontra ancora una volta un andamento oscillatorio nel controllo della potenza reattiva, con notevoli picchi negativi.

I risultati mostrati sono stati confrontati con quanto è richiesto dalla normativa, sia italiana sia statunitense. Lo standard europeo IEC/EN61727 “*Characteristics of the utility interface*” contiene le indicazioni da rispettare per l'interfaccia con la rete dei sistemi di generazione distribuita e fornisce anche raccomandazioni tecniche. In particolare, per quanto la power quality, lo standard richiede bassi valori di armoniche di tensione e di corrente; l'obiettivo è ridurre al 5% il valore massimo del *Total Harmonic Distortion* (THD) della corrente iniettata. Questo standard fa inoltre riferimento alla norma IEC/EN61000-3-2 “*Limits for harmonic current emissions (equipment input current—16 A per phase)*”, in cui sono specificati i valori limite per ciascuna armonica, fino alla 40<sup>ma</sup>. Infine, lo IEEE 1547-2003 “*Standard for Interconnecting Distributed Resources with Electric Power Systems*” definisce un altro parametro, il *Total Demand Distortion*, ossia la distorsione



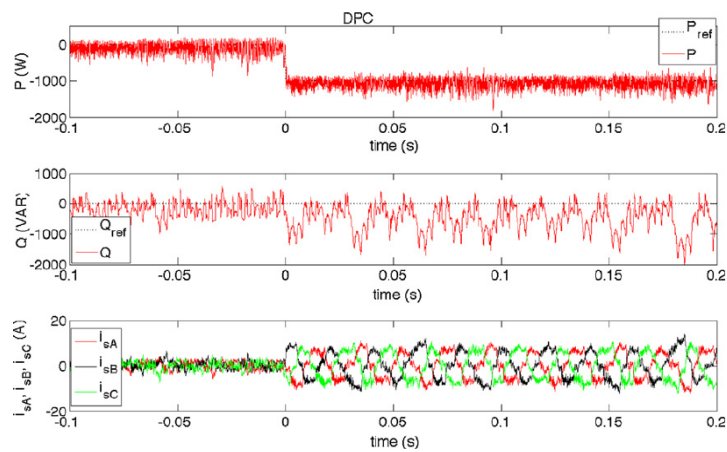


Figura 4.27: Andamenti di potenze e correnti con tecnica DPC classica

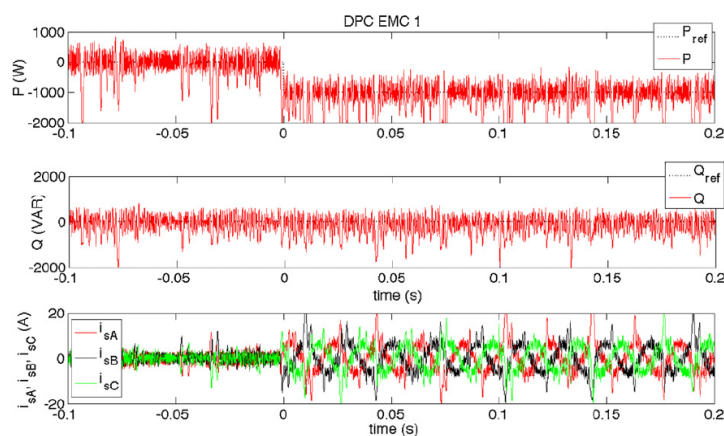


Figura 4.28: Andamenti di potenze e correnti con tecnica DPC EMC 1

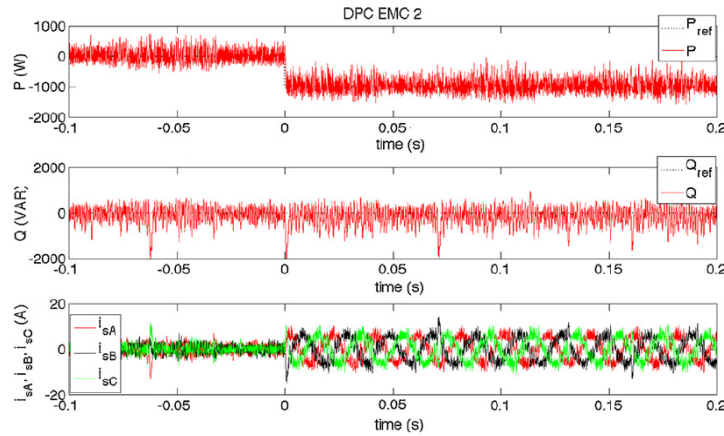


Figura 4.29: Andamenti di potenze e correnti con tecnica DPC EMC 2

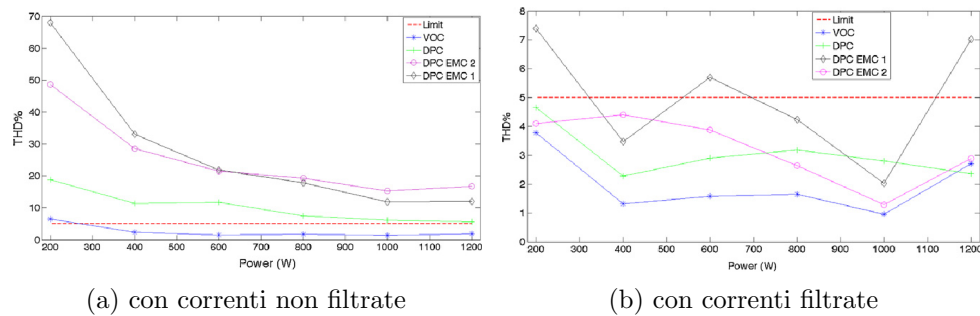


Figura 4.30: Andamento del THD% in funzione della  $P$  erogata

armonica della corrente iniettata calcolata come percentuale della massima richiesta di corrente (in 15 o 30 min.), e impone come suo valore massimo il 5% dell'armonica principale di corrente a pieno carico.

La Figura 4.30 mostra i valori di THD percentuale che sono stati ottenuti durante il test, insieme con i limiti fissati dagli standard IEEE ed IEC. Come ci si aspettava, il VOC mostra prestazioni decisamente migliori, superando di poco i limiti raccomandati solo per bassi valori di potenza attiva erogata. Tutte le altre tecniche di controllo DPC invece superano ampiamente le raccomandazioni IEEE, con un valore massimo del 70% ottenuto con potenza attiva erogata pari a 200 W, con la tecnica DPC EMC 1. Questo risultato era atteso, considerato che il calcolo del THD richiede di considerare le armoniche fino al 40<sup>mo</sup> ordine e che le tecniche DPC generano armoniche proprio fra il 20<sup>mo</sup> e il 40<sup>mo</sup> ordine. In realtà questo effetto potrebbe essere facilmente risolto utilizzando dei filtri passa-basso di potenza con frequenza di taglio

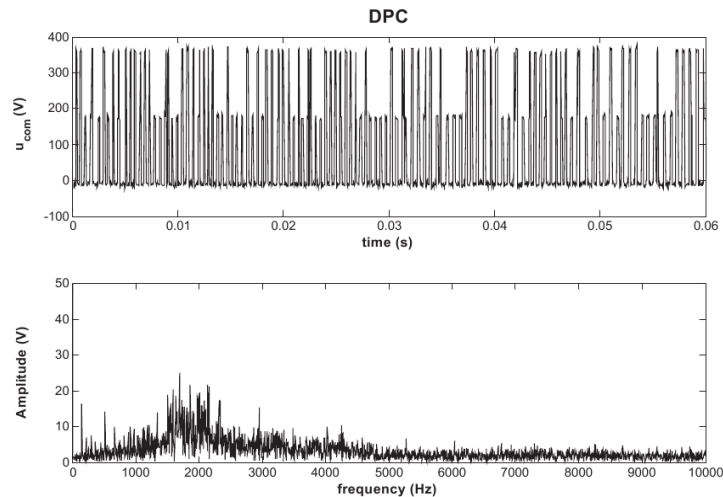


Figura 4.31: Andamento della tensione di modo comune con DPC classico

pari a  $100\text{ Hz}$ . La Figura 4.30b mostra i valori del THD ottenuti utilizzando detta soluzione. Si può notare che l'utilizzo dei filtri di potenza rende le tecniche DPC equivalenti fra di loro, permettendo così di ottenere riduzioni consistenti nelle emissioni di modo comune senza per questo peggiorare le prestazioni in termini di THD.

Le Figure 4.31–4.33 mostrano l'andamento della tensione di modo comune nelle tecniche DPC; si noti che è possibile prevedere l'andamento di detta tensione solo nel caso della tecnica EMC 1. I risultati ottenuti sono in accordo con la teoria: la tecnica EMC 1 mostra armoniche rilevanti alle basse frequenze, in particolare alla terza armonica e suoi multipli con ampiezza decrescente con la frequenza. La tecnica EMC 2 ha un contenuto armonico simile, leggermente superiore alle frequenze dell'ordine del  $k\text{Hz}$ . Infine, la tecnica classica DPC mostra il peggior inquinamento, con armoniche di grande ampiezza fra  $2\text{ kHz}$  e  $10\text{ kHz}$ .

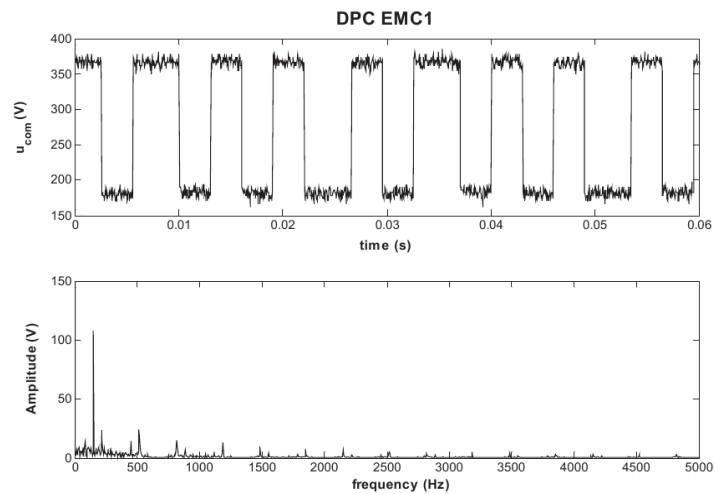


Figura 4.32: Andamento della tensione di modo comune con DPC EMC 1

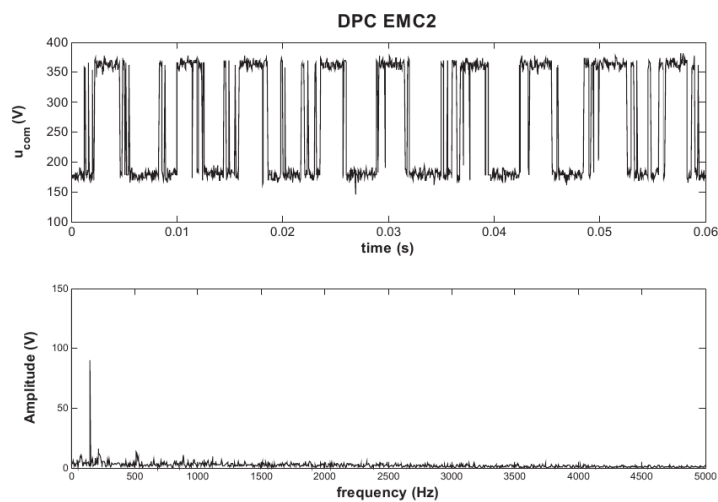


Figura 4.33: Andamento della tensione di modo comune con DPC EMC 2

---

## Conclusioni

In questo studio è stata presentata l'applicazione del Controllo Predittivo orientato al Modello al controllo dei Sistemi Cella a Combustibile, per la loro integrazione nei sistemi di generazione distribuita. È stato mostrato come il controllo dell'intero FCS rappresenti un problema di controllo complesso, sia perché il sistema è multivariabile e con sistemi interagenti fra di loro, sia per le nonlinearità presenti. In generale, gli obiettivi sono il controllo dell'aria, della temperatura e dell'umidità. A questo va aggiunta la necessità di rispettare i diversi vincoli cui sono soggetti le diverse variabili in gioco del sistema, pena la distruzione o di alcune apparecchiature ausiliare (p. es. il compressore per la gestione dell'aria) o addirittura della stessa cella a combustibile, con forte perdita economica. È dunque evidente che il controllo del FCS è un obiettivo difficile da realizzare con i sistemi di controllo tradizionali di tipo industriale, a causa delle interazioni esistenti fra i vari sottosistemi e delle caratteristiche fortemente non lineari di ciascuno di essi. Uno dei più importanti sotto-sistemi da controllare, soprattutto nei FCS con celle a combustibile di tipo PEM (Polymer Exchange Membrane), è quello per la gestione dell'aria. In tale sottosistema l'obiettivo è quello del controllo della potenza elettrica netta in uscita dalla cella, dipendente, a parità di carico, dalla tensione dello stack, a sua volta dipendente dall'ossigeno in ingresso, e il rapporto di eccesso d'ossigeno, misura della quantità di ossigeno presente ai catodi delle celle costituenti lo stack; l'importanza di questo parametro deriva dal fatto che la vita della membrana polimerica dei PEM, è fortemente influenzata dalla concentrazione d'ossigeno: bassi valori di concentrazione possono addirittura comportare lesioni meccaniche della stessa. Tale controllo va effettuato cercando sia di ottenere il massimo di potenza netta possibile, senza far diminuire il rapporto di eccesso di ossigeno, cercando di controllare opportunamente in velocità e in coppia il motore del compressore, rispettandone i limiti di funzionamento.

Nell'ambito della ricerca triennale, si sono approfondite la possibilità e la modalità con cui il FCS può essere integrato all'interno di un sistema di generazione distribuita. Il controllo di un sistema di generazione distribuita multisorgente è stato realizzato tenendo conto dei vincoli di natura elettrica

imposti; in particolare, il sistema di controllo deve far sì che la tensione del DC link si mantenga per quanto possibile costante, pena un malfunzionamento dei convertitori ed un decadimento della qualità dell'energia fornita al carico. Parimenti, nell'interfaccia con la rete, si devono assicurare adeguati parametri di qualità dell'energia scambiata con la rete:

- deve dunque essere minimizzato l'inquinamento armonico erogato in rete;
- deve assicurare il rifasamento del carico, di modo tale che la rete elettrica veda solamente un carico resistivo.

Gli obiettivi principali che questa ricerca ha raggiunto sono dunque:

- realizzare un sistema di gestione del funzionamento degli apparati ausiliari del FCS che permetta al tempo stesso di soddisfare tutti i vincoli operativi imposti e di massimizzare l'efficienza e la vita utile del FCS, minimizzando la presenza di apparati "tampone" per l'immagazzinamento dell'energia elettrica. Ciò permette di ridurre il costo e l'ingombro dei FCS, permettendone dunque l'impiego in diversi campi di applicazione: dalla generazione distribuita alla trazione elettrica.
- Integrare il FCS all'interno di un sistema di generazione distribuita: realizzare quindi un controllo dei convertitori dell'intero sistema multi-sorgente, di modo che siano soddisfatti tutti i vincoli di natura elettrica e di *power quality* richiesti.

Il controllo, inizialmente sviluppato grazie al supporto offerto da toolbox specifici del programma di calcolo numerico MATLAB™, è stato successivamente implementato tramite un algoritmo di controllo *open source*, svincolato dall'utilizzo di software specifico.

I risultati della ricerca si sono concretizzati nella realizzazione di un banco di prova per il controllo del FCS; tale banco di prova permette l'alimentazione di carichi elettrici qualsiasi, purché nei limiti della potenza erogabile dal FCS, e consente l'esecuzione di prove e misure sul FCS; inoltre permette di verificare gli effetti di diversi algoritmi di controllo, potendo verificare preliminarmente in emulazione la sicurezza del sistema. Infine, consente di erogare l'energia elettrica prodotta dal FCS, reale o emulato, in rete, grazie alla presenza di un inverter bidirezionale controllato e di un boost converter per il controllo della tensione di DC link.

Sono state esaminate diverse strategie di controllo dell'inverter di interfaccia con la rete:

- il *Voltage Oriented Control* (VOC), che, a partire dai riferimenti di potenza attiva e reattiva che devono essere scambiati con la rete, elabora le componenti secondo gli assi diretto ed in quadratura del vettore di spazio delle correnti scambiate con la rete; dei controllori PI permettono poi il calcolo delle tensioni di inverter di riferimento, nel sistema di riferimento rotante solidale con la tensione di rete.
- il *Direct Power Control* (DPC), che consente un'implementazione meno onerosa in termini computazionali, dato che non richiede la trasformazione istantanea di coordinate del sistema di riferimento. A seconda del settore del piano complesso, ciascuno con ampiezza pari a  $\pi/6$ , in cui il vettore di spazio delle tensioni di rete si trova, e determinando la variazione richiesta di potenza attiva e reattiva, è possibile richiamare da una look-up table la configurazione dell'inverter che produce il vettore di spazio delle tensioni più adatto.

I risultati sperimentali hanno dimostrato che il VOC è più efficace nel controllo dei flussi di energia, mentre il DPC richiede hardware meno complessi per l'implementazione e può essere efficacemente migliorato per minimizzare le emissioni condotte di corrente di modo comune. Sono state infatti studiate due tecniche, derivate dal DPC e per questo chiamate DPC EMC 1 e DPC EMC 2, che permettono, opportunamente modificando la look-up table, di ridurre le emissioni condotte prodotte dall'inverter al di sotto dei limiti di compatibilità elettromagnetica. Ovviamente, questo si traduce in un peggioramento delle prestazioni del controllo dei flussi di energia attiva e reattiva. Quindi, l'impiego di una strategia di controllo rispetto un'altra deve essere attentamente valutata a seconda delle condizioni di impianto, sebbene il VOC possa essere considerato come il miglior compromesso fra emissioni condotte e prestazioni dinamiche.

---

## Appendice

### function: bound\_conv.m

```
% =====  
% bound_conv.m -- boundary converter for MyMPCController  
% =====  
% this function converts the lower and the upper boundary in a matrix  
% for the use in the model predictive control.  
%  
% SYNOPSIS:  
% [matrix] = BOUND_CONV(low_bound,up_bound,Hu)  
%  
% low_bound and up_bound must be vectors [n x 1], where n is the total  
% number of variables; if a variable is not limited, then the boundary  
% values must be set to inf or to -inf.  
% Hu is the numer of penalized steps, i.e. the control horizon H_c  
% or the difference between the prediction horizon and the window  
% parameter: (H_p - H_w) + 1.  
%  
% See also LINMDL_CONV, WEIGHT_CONV, MYMPC_BUILD, LC_CONV,  
% QP_CONSTRAINTS QP_FORM  
  
function [matrix]=bound_conv(low_bound,up_bound,Hu)  
  
% =====  
% START SECTION parameters initialization  
% =====  
% calculating size of two boundary vectors  
low_size=max(size(low_bound));  
up_size=max(size(up_bound));  
  
% checking if the two vectors have the same dimension  
if low_size ~= up_size  
    disp('ERROR!')  
    disp(['--> lower boundary: ',num2str(low_size),'--dimensional vector'])  
    disp(['--> upper boundary: ',num2str(up_size),'--dimensional vector'])  
    error('MyMPC:bound:NotEqDim',...  
        'The boundary vectors must have same dimensions!')  
else
```



```
% storing data
n=low_size;
% clearing old variables
clear low_size up_size
end

% defining intermediate matrices
low_matrix=zeros((n*Hu),(n*Hu)+1);
up_matrix=zeros((n*Hu),(n*Hu)+1);

% =====
% START SECTION main program
% =====
% calculating boundary matrix components
for k=0:(Hu-1)
    for i=1:n
        if low_bound(i)~=0
            low_matrix((k*n)+i,(k*n)+i)=-1/abs(low_bound(i));
            low_matrix((k*n)+i,end)=sign(low_bound(i));
        else
            low_matrix((k*n)+i,(k*n)+i)=-1;
        end
        if up_bound(i)~=0
            up_matrix((k*n)+i,(k*n)+i)=1/abs(up_bound(i));
            up_matrix((k*n)+i,end)=-sign(up_bound(i));
        else
            up_matrix((k*n)+i,(k*n)+i)=1;
        end
    end
end
end

% assembling output matrix
matrix=[low_matrix ; up_matrix];

% removing null rows
for i=2*n*Hu:-1:1
    if all(matrix(i,1:n*Hu)==0)
        matrix(i,:)=[];
    end
end
end

return
```

## **function: hildrethqp.m**

```
function [lambda,N_iter,W] = fcn(phiL,PhiL,toll,max_iter)

[n,m]=size(phiL);
x_ini=zeros(n,m);
lambda=x_ini;
N_iter=0;
for km=1:max_iter;
    lambda_p=lambda;
    for i=1:n
        w=PhiL(i,:)*lambda-PhiL(i,i)*lambda(i,1);
        W(km,i)=w;
        w=w+phiL(i,1);
        la=-w/PhiL(i,i);
        lambda(i,1)=max(0,la);
    end
    al=(lambda-lambda_p)'+(lambda-lambda_p);
    if (al < toll)
        break
    end
    N_iter=N_iter+1;
end
```

## function: lc\_conv.m

```
% =====  
% lc_conv.m -- linear constraints includer function for MyMPCController  
% =====  
% this function converts any linear constraint over any variables in a  
% form compatible with the predictive control.  
%  
% SYNOPSIS:  
% [matrix] = LC_CONV(A,b,Hu)  
%  
% the linear constraints must be given in the form:  $A*x \leq b$ , where x is  
% the variables vector; ALL the variables must be included, even if no  
% constraint is over them.  
% Hu is the numer of penalized steps, i.e. the control horizon H_c  
% or the difference between the prediction horizon and the window  
% parameter:  $(H_p - H_w) + 1$ .  
%  
% See also LINMDL_CONV, WEIGHT_CONV, BOUND_CONV, MYMPC_BUILD,  
% QP_CONSTRAINTS, QP_FORM  
  
function [matrix]=lc_conv(A,b,Hu)  
  
% =====  
% START SECTION parameters initialization  
% =====  
% calculating size of matrix and vector  
A_size=size(A);  
b_size=max(size(b));  
  
% checking if dimensions are right  
if A_size(1) ~= b_size  
    disp('ERROR!')  
    disp(['--> A matrix: ',num2str(A_size(1)), ' columns'])  
    disp(['--> b vector: ',num2str(b_size), ' rows'])  
    error('MyMPC:lc:NotEqDim',...  
        'Inner matrix dimensions must agree!')  
else  
    % storing data  
    n=A_size(2);  
    N_lc=A_size(1);  
    % clearing old variables  
    clear A_size b_size  
end  
  
% defining output matrix  
matrix=zeros((N_lc*Hu),(n*Hu)+1);
```

*Applicazione e Controllo delle Celle a Combustibile di Tipo PEM ai Sistemi di  
Generazione Distribuita*

---

```
% =====  
% START SECTION main program  
% =====  
% calculating linear constraints matrix components  
for k=0:(Hu-1)  
  for i=1:N_lc  
    for j=1:n  
      if b(i)~=0  
        matrix((k*N_lc)+i,(k*n)+j)=A(i,j)/abs(b(i));  
        matrix((k*N_lc)+i,end)=-sign(b(i));  
      else  
        matrix((k*N_lc)+i,(k*n)+j)=A(i,j);  
      end  
    end  
  end  
end  
  
% removing null rows  
null_rows=find(all(matrix==0,2));  
matrix(null_rows,:)=[];  
  
return
```

## function: linmdl\_conv.m

```
% =====  
% linmdl_conv.m -- linear model converter for use with MyMPCController  
% =====  
% this function processes the linear model of the plant, in form of state  
% space representation, in order to obtain the Psi, Iupsilon, Theta, Xi  
% and Omicron matrices, useful for the prediction calculus  
%  
% SYNOPSIS:  
% [Psi,Iupsilon,Theta,Xi,Omicron,m,l,ld,n] = LINMDL_CONV(A,B,C,Hp,Hw,Hc)  
%  
% A,B,C are the matrices of the state--space linear representation of the  
% plant. Bd and D are respectively the disturbance--states and the  
% disturbance--output correlation matrix. Hp, Hw, and Hc are respectively  
% the prediction horizon, the window parameter and the control horizon.  
% Finally, m is the controlled outputs number, l is the control inputs  
% number, ld is the input disturbances number and n is the states number.  
%  
% See also MYMPC_BUILD, WEIGHT_CONV, BOUND_CONV, LC_CONV, QP_CONSTRAINTS  
% QP_FORM  
  
function [Psi,Iupsilon,Theta,Xi,Omicron,m,l,ld,n]=...  
    linmdl_conv(A,B,C,Bd,D,Hp,Hw,Hc)  
  
% =====  
% START SECTION parameters initialization  
% =====  
% calculating inputs dimensions  
A_size=size(A);  
B_size=size(B);  
C_size=size(C);  
Bd_size=size(Bd);  
D_size=size(D);  
  
% verifying dimensions rightness  
if A_size(1) ~= A_size(2)  
    disp('ERROR!')  
    disp(['--> A matrix: ',num2str(A_size(1)),'x',num2str(A_size(2)),...  
        ' matrix'])  
    error('MyMPC:linmdl:NotSquareA',...  
        'State matrix must be square!')  
else  
    % storing state number  
    n=A_size(1);  
    % clearing variables  
    clear A_size;  
end  
end
```

```
if B_size(1) ~= n
    disp('ERROR!')
    disp(['--> B matrix: ',num2str(B_size(1)),' rows'])
    disp(['--> # states: ',num2str(n)])
    error('MyMPC:linmdl:NotEqBRows',...
        ['Input matrix must have ',num2str(n),' rows!'])
else
    % storing input number
    l=B_size(2);
    % clearing variables
    clear B_size;
end

if Bd_size(1) ~= n
    disp('ERROR!')
    disp(['--> Bd matrix: ',num2str(Bd_size(1)),' rows'])
    disp(['--> # states: ',num2str(n)])
    error('MyMPC:linmdl:NotEqBdRows',...
        ['States--Disturbance matrix must have ',num2str(n),' rows!'])
else
    % storing input disturbance number
    ld=Bd_size(2);
    % clearing variables
    clear Bd_size;
end

if C_size(2) ~= n
    disp('ERROR!')
    disp(['--> C matrix: ',num2str(C_size(2)),' columns'])
    disp(['--> # states: ',num2str(n)])
    error('MyMPC:linmdl:NotEqCCols',...
        ['Output matrix must have ',num2str(n),' columns!'])
else
    % storing output number
    m=C_size(1);
    % clearing variables
    clear C_size;
end

if D_size(1) ~= m
    disp('ERROR!')
    disp(['--> D matrix: ',num2str(D_size(1)),' rows'])
    disp(['--> # outputs: ',num2str(m)])
    error('MyMPC:linmdl:NotEqDRows',...
        ['Output--Disturbance matrix must have ',num2str(m),' rows!'])
end

if D_size(2) ~= ld
```

```

disp('ERROR!')
disp(['--> D matrix: ',num2str(D_size(1)),' columns'])
disp(['--> # disturbances: ',num2str(ld)])
error('MyMPC:linmdl:NotEqDCols',...
      ['Output--Disturbance matrix must have ',num2str(ld),' columns!'])
end

if Hp < Hw
    disp('ERROR!')
    disp(['--> prediction horizon: ',num2str(Hp),' steps'])
    disp(['--> window parameter: ',num2str(Hw),' steps'])
    error('MyMPC:linmdl:WrongHw',...
          'Window parameter must be smaller than prediction horizon!')
elseif Hp < Hc
    disp('ERROR!')
    disp(['--> prediction horizon: ',num2str(Hp),' steps'])
    disp(['--> control horizon: ',num2str(Hc),' steps'])
    error('MyMPC:linmdl:WrongHc',...
          'Control horizon must be smaller than prediction horizon!')
end

% defining partial matrices
psi_part=eye(n);

% defining auxiliary dimension parameter
i=max(m,n);

% defining output matrices: these matrices will be defined as Hw=1,
% in order to simplify the subsequent code; just before the end of the
% function, the unnecessary rows will be deleted. If Hw >> 1, this is
% not a good idea: maybe it's possible to avoid to allocate a memory
% space greater than the final one.
% If YOU have a better idea, please let me know it at
% angelo dot accetta at gmail dot com
Psi=zeros(i*Hp,n);
Iupsilon=zeros(i*Hp,1);
Theta=zeros(i*Hp,1*Hc);
Xi=zeros(i*Hp,ld*Hp);
Omicron=zeros(m*Hp,ld*Hp);

% =====
% START SECTION main program
% =====
% filling Psi matrix -- phase 1; the last i rows of the Psi matrix will
% be used as an auxiliary buffer to store the k-th power of the A matrix
Psi((Hp-1)*i+1:(Hp-1)*i+n,:)=psi_part;
for k=0:Hp-1
    Psi((Hp-1)*i+1:(Hp-1)*i+n,:)=Psi((Hp-1)*i+1:(Hp-1)*i+n,:)*A;
    Psi(k*i+1:k*i+n,:)=Psi((Hp-1)*i+1:(Hp-1)*i+n,:);
end

```

```

end

% filling Xi matrix -- phase 1; the k-th row of the Xi matrix will be
% equal to the product between the (k-1)-th row of the Psi matrix.
Xi(1:n,1:ld)=Bd;
for k=1:Hp-1
    Xi(k*i+1:k*i+n,1:ld)=Psi((k-1)*i+1:(k-1)*i+n,:)*Bd;
end

% filling Iupsilon matrix -- phase 1; the last i rows of the Iupsilon
% matrix will be used as an auxiliary buffer to store the k-th sum of the
% A^k B term. The (k-1)-th power of the A matrix will be read from the
% Psi matrix
for k=0:Hp-1
    Iupsilon((Hp-1)*i+1:(Hp-1)*i+n,:)=...
        Iupsilon((Hp-1)*i+1:(Hp-1)*i+n,:)+psi_part*B;
    Iupsilon(k*i+1:k*i+n,:)=Iupsilon((Hp-1)*i+1:(Hp-1)*i+n,:);
    psi_part=Psi(k*i+1:k*i+n,:);
end

% filling Omicron matrix; the Omicron matrix is a diagonal one which
% elements on the main diagonal are the D matrix
for k=0:Hp-1
    Omicron(k*m+1:k*m+m,k*ld+1:k*ld+ld)=D;
end

% filling Theta matrix -- phase 1; the k-th column of the Theta matrix
% will be equal to the Iupsilon matrix, removing i rows from the bottom
for k=0:Hc-1
    Theta(k*i+1:end,k*l+1:k*l+1)=Iupsilon(1:end-(k*i),:);
end

% filling matrices -- phase 2; you have surely noticed that if m > n,
% then some rows have null or intermediary (now useless) values. Well,
% I'm going to premultiply the Psi, Iupsilon and Theta matrices with C
% matrix, so all the useless values will be overwritten. On the contrary,
% if m < n after multiplication, the last Hp*(n-m) rows of each matrix
% will have useless values and will be deleted. The Omicron matrix
% doesn't need this phase.
for k=0:Hp-1
    Psi(k*m+1:k*m+m,:)=C*Psi(k*i+1:k*i+n,:);
    Iupsilon(k*m+1:k*m+m,:)=C*Iupsilon(k*i+1:k*i+n,:);
    Theta(k*m+1:k*m+m,:)=C*Theta(k*i+1:k*i+n,:);
    Xi(k*m+1:k*m+m,1:ld)=C*Xi(k*i+1:k*i+n,1:ld);
end

% cutting Rs (Rows in Surplus) rows from the bottom, if m < n
Rs=(Hp*(n-m))-1;
if Rs > 0

```



```
Psi(end-Rs:end,:)=[];  
Iupsilon(end-Rs:end,:)=[];  
Theta(end-Rs:end,:)=[];  
Xi(end-Rs:end,:)=[];  
end  
  
% filling Xi matrix -- phase 3; until now only the first column of the  
% Xi matrix has been filled. Now the remaining columns will be filled  
% in a similar manner to the Theta matrix.  
for k=1:Hp-1  
    Xi(k*m+1:end,k*ld+1:k*ld+ld)=Xi(1:end-(k*m),1:ld);  
end  
  
% cutting Rs=m(Hw-1) rows from the top  
Rs=m*(Hw-1);  
if Rs ~= 0  
    Psi(1:Rs,:)=[];  
    Iupsilon(1:Rs,:)=[];  
    Theta(1:Rs,:)=[];  
end  
  
return
```

## function: mympc\_build.m

```
% =====  
% mympc_build.m -- initialization function for MyMPCController  
% =====  
% This function packages the data structure to initialize MyMPC toolbox.  
%  
% SYNOPSIS:  
% [mympc] = MYMPC_BUILD(A,B,C,Bd,Dd,Hp,Hw,Hc,fc,in_w,out_w,in_b,vin_b,  
%                   out_b,in_lc,vin_lc,out_lc,max_iter,toll,md_idx,  
%                   cv_idx,linear)  
%  
% INPUTS EXPLANATION:  
% - A, B and C are the state-space matrices of the linear model  
% - Bd and Dd are the state-space matrices of the disturbance linear  
%   model  
% - Hp is the prediction horizon  
% - Hw is the window parameter  
% - Hc is the control horizon  
% - fc is the control sampling frequency  
% - in_w and out_w are the input and output weights vector  
% - in_b, vin_b and out_b are the 2-rows bonduaries matrices for the  
%   inputs, the input variations and the outputs; the first row contains  
%   the lower bonduaries, the second row the upper bonduaries  
% - in_lc, vin_lc and out_lc are the linear constraints matrices for the  
%   inputs, the input variations and the outputs; the last columns  
%   contains the known terms vector, the others columns the coefficients  
%   matrix  
% - max_iter is the maximum number of QP Hildreth's algorithm iterations  
% - toll is the minimum distance between two solution vectors for the  
%   QP Hildreth's algorithm  
% - md_idx is the vector containing the input order for the measured  
%   disturbances in the state observer  
% - cv_idx is the vector containing the input order for the controlled  
%   variables in the state observer  
% - linear is a structure containing the state observer data  
%  
% See also LINMDL_CONV, WEIGHT_CONV, BOUND_CONV, LC_CONV, QP_CONSTRAINTS  
% QP_FORM  
  
function [mympc]=mympc_build( A,B,C,Bd,Dd,Hp,Hw,Hc,fc,in_w,out_w,in_b,...  
    vin_b,out_b,in_lc,vin_lc,out_lc,max_iter,...  
    toll,md_idx,cv_idx,linear)  
  
% printing some useless message  
disp('MyMPC toolbox initialization...')  
  
% =====
```

```

% START SECTION controller definition
% =====
% converting linear model
[Psi,Iupsilon,Theta,Xi,Omicron,m,l,ld,n]=...
    linmdl_conv(A,B,C,Bd,Dd,Hp,Hw,Hc);
disp('--> linear model converted!')

% converting weight matrices
[Q,Sq]=weight_conv(out_w,(Hp-Hw+1));
[R,Sr]=weight_conv(in_w,Hc);
disp('--> weights converted!')

% computing Kfull
Kfull=mldivide([Sq*Theta; Sr],[Sq; zeros(size(Sr,1),size(Sq,2))]);
disp('--> MPC full gain computed!')

% computing output constraints matrix
E=[bound_conv(vin_b(1,:),vin_b(2,:),Hc);...
    lc_conv(vin_lc(:,1:end-1),vin_lc(:,end),Hc)];
F=[bound_conv(in_b(1,:),in_b(2,:),Hc);...
    lc_conv(in_lc(:,1:end-1),in_lc(:,end),Hc)];
G=[bound_conv(out_b(1,:),out_b(2,:),Hp-Hw+1);...
    lc_conv(out_lc(:,1:end-1),out_lc(:,end),Hp-Hw+1)];
disp('--> constraints matrices computed!')

% computing Omega constraints matrix
[Omega,omega_1,omega_2]=qp_constraints(E,F,G,Theta,Hp,Hw,Hc);
disp('--> Omega matrix computed!')

% computing QP problem matrices
[Phi,PhiL,phip,Klambda]=qp_form(Theta,Q,R,Omega);
disp('--> QP problem formulated!')

% computing reodering and piling matrices
tot_idx=[cv_idx md_idx];
rearrange=zeros(length(tot_idx));
dist_Hp=zeros(ld*Hp,ld);
ref_Hp=zeros(m*Hp,m);
for i=1:length(tot_idx)
    rearrange(i,tot_idx(i))=1;
end
for i=1:ld:size(dist_Hp,1)
    for j=1:ld
        dist_Hp(i+j-1,j)=1;
    end
end
for i=1:m:size(ref_Hp,1)
    for j=1:m
        ref_Hp(i+j-1,j)=1;
    end
end

```

```
    end
end

% packaging MyMPC data
mympc=struct...
(
    'fc',fc,...
    'Hp',Hp,...
    'Hc',Hc,...
    'Hw',Hw,...
    'Psi',Psi,...
    'Iupsilon',Iupsilon,...
    'Theta',Theta,...
    'Xi',Xi,...
    'Omicron',Omicron,...
    'Omega',Omega,...
    'omega_1',omega_1,...
    'omega_2',omega_2,...
    'toll',toll,...
    'max_iter',max_iter,...
    'E',E,...
    'F',F,...
    'G',G,...
    'Phi',Phi,...
    'PhiL',PhiL,...
    'phip',phip,...
    'Klambda',Klambda,...
    'm',m,...
    'l',l,...
    'ld',ld,...
    'n',n,...
    'Kfull',Kfull,...
    'A',A,...
    'B',B,...
    'C',C,...
    'Dd',Dd,...
    'Bd',Bd,...
    'dist_Hp',dist_Hp,...
    'ref_Hp',ref_Hp,...
    'rearrange',rearrange,...
    'linear',linear...
);
disp('--> controller structure created!')

% printing some useless message
disp('...done!')
```

## function: qp\_constraints.m

```

% =====
% qp_constraints.m -- Quadratic Programming matrix converter
% =====
% This function converts the constraints matrices in a form suitable for
% the Quadratic Programming problem resolution.
%
% SYNOPSIS:
% [Omega,omega_1,omega_2] = QP_CONSTRAINTS(E,F,G,Theta,Hp,Hw,Hc)
%
% E,F and G are respectively the constraints matrices over the input
% variation, over the input and over the output, in the form:
%
%      [ DeltaU(k) ]      [ U(k) ]      [ Z(k) ]
% E * [           ] <= 0; F * [           ] <= 0; G * [           ] <= 0;
%      [     1     ]      [     1     ]      [     1     ]
%
% that must be converter in the form:
%
%                                [ u(k-1) ]
% Omega * DU(k) <= omega_1 * [           ] - omega_2
%                                [ Y_f(k) ]
%
% Theta is the predictive control matrix, Hp is the prediction horizon,
% Hw is the window parameter and Hc is the control horizon. Omega is the
% Quadratic Programming constraints matrix, while the omega_1 and omega_2
% matrices are parts of the omega vector.
%
% See also LINMDL_CONV, WEIGHT_CONV, BOUND_CONV, LC_CONV, MYMPC_BUILD
% QP_FORM

function [Omega,omega_1,omega_2]=qp_constraints(E,F,G,Theta,Hp,Hw,Hc)

% =====
% START SECTION parameters initialization
% =====
% extracting constraints number
% {
% number of input constraints
qu=size(F,1);
% number of input variation constraints
qDu=size(E,1);
% number of output constraints
qz=size(G,1);
% }

% checking constraints number

```

```

% {
  if (qu == 0)
    exist_input_constraints=false;
  else
    exist_input_constraints=true;
  end
  if (qDu == 0)
    exist_varinput_constraints=false;
  else
    exist_varinput_constraints=true;
  end
  if (qz == 0)
    exist_output_constraints=false;
  else
    exist_output_constraints=true;
  end
% }

% calculating inputs and outputs number
% {
  if (exist_input_constraints)
    l=(size(F,2)-1)/Hc;
  end
  if (not (exist_input_constraints) && exist_varinput_constraints)
    l=(size(E,2)-1)/Hc;
  else
    lD=(size(E,2)-1)/Hc;
  end
  if (not (exist_input_constraints) && ...
      not (exist_varinput_constraints) && ...
      exist_output_constraints)
    l=size(Theta,2)/Hc;
    m=(size(G,2)-1)/(Hp-Hw+1);
    Theta_size=size(Theta);
  else
    m=(size(G,2)-1)/(Hp-Hw+1);
    Theta_size=size(Theta);
  end
% }

% error control
if (exist_output_constraints && (m*(Hp-Hw+1) ~= Theta_size(1)))
  disp('Error!')
  disp(['--> Theta matrix: ', num2str(Theta_size(1)), ' rows'])
  disp(['--> m*(Hp-Hw+1) = ', num2str(m*(Hp-Hw+1))])
  error('MyMPC:qp:NotEqThetaRows', ...
    ['Theta matrix must have ', num2str(m*(Hp-Hw+1)), ' rows!'])
elseif (exist_output_constraints && (l*Hc ~= Theta_size(2)))
  disp('Error!')

```

```

disp(['--> Theta matrix: ',num2str(Theta_size(2)),' columns'])
disp(['--> l*Hc          = ',num2str(l*Hc)])
error('MyMPC:qp:NotEqThetaCols',...
      ['Theta matrix must have ',num2str(L*Hc),' columns!'])
elseif (exist_input_constraints && exist_varinput_constraints && l ~= 1D)
disp('Error!')
disp(['--> # of inputs:          ',num2str(l)])
disp(['--> # of input variations ',num2str(1D)])
error('MyMPC:qp:NotEqInputs',...
      'Inputs and input variation number must be equal!')
end

% initializing output matrix
Omega=zeros((qu+qDu+qz),l*Hc);
omega_1=zeros((qu+qDu+qz),(1+(m*(Hp-Hw+1))));
omega_2=zeros((qu+qDu+qz),1);

% =====
% START SECTION main program
% =====
% filling Omega matrix -- phase 1: the Digamma part
% the Digamma matrix is computed with the F matrix: each submatrix
% Digamma_i is the sum of the last (Hc-i) F_i submatrix. The Omega matrix
% will be filled from the end, which is equal to Digamma_Hc = F_Hc and
% then backward will be added the other submatrices
if (exist_input_constraints);
Omega(1:qu,end-1+1:end)=F(:,(Hc-1)*1+1:(Hc-1)*1+1);
for i=Hc-1:-1:1
Omega(1:qu,((i-1)*1)+1:((i-1)*1)+1)= Omega(1:qu,(i*1)+1:(i*1)+1)+...
F(:,((i-1)*1)+1:((i-1)*1)+1);
end
omega_1(1:qu,1:1)=-Omega(1:qu,1:1);
omega_2(1:qu)=F(:,end);
end

% filling Omega matrix -- phase 2: the Gamma*Theta part
% the Gamma matrix is equal to the G matrix, minus the last column; the
% Theta matrix is an input, so don't panic!
if (exist_output_constraints);
Omega(qu+1:qu+qz,1:l*Hc)=G(:,1:end-1)*Theta;
omega_1(qu+1:qu+qz,1+1:l+(m*(Hp-Hw+1)))=-G(:,1:end-1);
omega_2(qu+1:qu+qz)=G(:,end);
end

% filling Omega matrix -- phase 3: the W part
% easier and easier, the W matrix is simply composed by the first l*Hc
% columns of the E matrix
if (exist_varinput_constraints);
Omega(qu+qz+1:qu+qz+qDu,:) = E(:,1:end-1);

```

*Applicazione e Controllo delle Celle a Combustibile di Tipo PEM ai Sistemi di  
Generazione Distribuita*

---

```
    omega_2=E(:,end);  
end  
  
return
```



## function: qp\_form.m

```
% =====  
% qp_form.m -- Quadratic Programming dual problem formulation  
% =====  
% Given the primal problem:  
%  
%           1  
%   min --- theta' * Phi * theta + phi' * theta  
%   theta 2  
%  
% this function computes the matrices involved in the dual problem:  
%  
%           1  
%   min --- lambda' * Phi_L * lambda + phi_L' * lambda  
%   lambda 2  
%  
% See also LINMDL_CONV, WEIGHT_CONV, BOUND_CONV, LC_CONV, QP_CONSTRAINTS  
% MYMPC_BUILD  
  
function [Phi,PhiL,phip,Klambda]=qp_form(Theta,Q,R,Omega)  
  
% =====  
% START SECTION main program  
% =====  
% computing the output matrices: not a very difficult task...  
% {  
Phi=2*(Theta'*Q*Theta+R);  
Klambda=mldivide(Phi,Omega');  
PhiL=Omega*Klambda;  
phip=-2*Theta'*Q;  
% }
```

## function: weight\_conv.m

```
% =====  
% weight_conv.m -- penalty weight conversion for use with MyMPCController  
% =====  
% this function converts the penalty weight in a matrix suitable for the  
% predictive control problem formulation  
%  
% SYNOPSIS:  
% [matrix,sqrt_matrix] = WEIGHT_CONV(weight,Hu)  
%  
% weight must be a vector [n x 1], if the penalty weight for each  
% variable is constant on the whole horizon, or a matrix [n x Hu], if the  
% penalty weights are not constant. Currently, this function supports  
% only vectors or diagonal matrix. Between the output matrices exists the  
% following relationship:  
%  
% sqrt_matrix'*sqrt_matrix=matrix  
%  
% Hu is the numer of penalized steps, i.e. the control horizon H_c  
% or the difference between the prediction horizon and the window  
% parameter: (H_p - H_w) + 1.  
%  
% See also LINMDL_CONV, MYMPC_BUILD, BOUND_CONV, LC_CONV, QP_CONSTRAINTS  
% QP_FORM  
  
function [matrix,sqrt_matrix]=weight_conv(weight,Hu)  
  
% =====  
% START SECTION parameters initialization  
% =====  
% calculating input dimensions  
weight_size=size(weight);  
  
% verifying right dimension  
% is [weight] a vector?  
if (weight_size(2) == 1)  
    matrix_flag=0;  
    % storing data  
    n=weight_size(1);  
    % if [weight] is not a vector, has it wrong column number?  
elseif weight_size(2) ~= Hu  
    disp('ERROR!')  
    disp(['--> weight matrix: ',num2str(weight_size(2)), ' columns'])  
    disp(['--> penalty horizon: ',num2str(Hu), ' steps'])  
    error('MyMPC:weight:NotEqDim',...  
        'Weight matrix columns number and Hu must be equal!')  
    % otherwise, [weight] is a matrix with the correct column number!
```

```
else
    % storing data
    n=weight_size(1);
    matrix_flag=1;
end

% clearing variable
clear weight_size

% defining output square matrix
matrix=zeros(n*Hu);

% =====
% START SECTION main program
% =====
% calculating output weight matrix
for k=0:Hu-1
    j=matrix_flag*k+1;
    for i=1:n
        matrix((k*n)+i,(k*n)+i)=weight(i,j);
    end
end

% calculating square root of the output matrix
for k=1:size(matrix,1)
    sqrt_matrix(k,k)=sqrt(matrix(k,k));
end

return
```

---

## Elenco delle figure

1.1	Rappresentazione schematica della cella a combustibile . . . . .	6
1.2	Curve di polarizzazione per diverse condizioni operative . . . . .	7
1.3	Il sistema cella a combustibile . . . . .	8
1.4	Andamento della potenza elettrica in funzione di $\lambda_{O_2}$ . . . . .	10
1.5	Schema a blocchi del compressore . . . . .	15
1.6	Mappa del compressore . . . . .	16
1.7	Diagramma vettoriale del PMSM . . . . .	23
1.8	Schema a blocchi del controllo vettoriale . . . . .	24
1.9	Schema a blocchi dei collettori . . . . .	25
1.10	Mappa del flusso attraverso la valvola . . . . .	27
1.11	Schema a blocchi del collettore di andata . . . . .	28
1.12	Schema a blocchi del collettore di ritorno . . . . .	29
1.13	Schema a blocchi della cella a combustibile . . . . .	32
1.14	Flussi di massa nella cella a combustibile . . . . .	33
1.15	Caduta di tensione per perdite di attivazione . . . . .	36
1.16	Caduta di tensione per perdite ohmiche . . . . .	37
1.17	Caduta di tensione per perdite di concentrazione . . . . .	39
1.18	Circuito elettrico equivalente della cella a combustibile . . . . .	42
1.19	Flussi di massa catodici . . . . .	42
1.20	Schema a blocchi del catodo . . . . .	43
1.21	Flussi di massa anodici . . . . .	48
1.22	Schema a blocchi dell'anodo . . . . .	49
1.23	Schema a blocchi del modello di idratazione della membrana . . . . .	52
2.1	Schema a blocchi del controllore predittivo non vincolato . . . . .	66
2.2	Schema a blocchi del controllore predittivo vincolato . . . . .	68
2.3	Schema a blocchi del controllore predittivo implementato . . . . .	75
2.4	Schema a blocchi del constraints enforcer . . . . .	79
3.1	L'emulatore di Fuel Cell System . . . . .	81
3.2	Schema del convertitore DC/DC buck utilizzato per l'emulatore . . . . .	83
3.3	Diagramma a blocchi dell'emulatore . . . . .	85
3.4	Rappresentazione grafica delle frequenza di campionamento . . . . .	86
3.5	Fotografia dell'emulatore FCS con DSpace e carico . . . . .	87
3.6	Schema a blocchi del Voltage Oriented Control . . . . .	89
3.7	Possibili configurazioni e loro effetti nel Direct Power Control . . . . .	90
3.8	Schema a blocchi del Direct Power Control . . . . .	92
3.9	Fotografia del DC/DC boost converter . . . . .	96

4.1	Mappa statica del compressore . . . . .	99
4.2	Corrente di stack . . . . .	100
4.3	Velocità del compressore – static feedforward . . . . .	101
4.4	Rapporto d’eccesso d’ossigeno – static feedforward . . . . .	102
4.5	Mappa del compressore – static feedforward . . . . .	103
4.6	Velocità del compressore – unconstrained MPC . . . . .	104
4.7	Rapporto d’eccesso d’ossigeno – unconstrained MPC . . . . .	104
4.8	Mappa del compressore – unconstrained MPC . . . . .	105
4.9	Velocità del compressore – constrained MPC . . . . .	106
4.10	Rapporto d’eccesso d’ossigeno – constrained MPC . . . . .	106
4.11	Mappa del compressore – constrained MPC . . . . .	107
4.12	Caratteristica $I - V$ per il FCS controllato e non controllato . . . . .	108
4.13	Caratteristica $I - VP$ per il FCS controllato e non controllato . . . . .	108
4.14	Corrente, tensione e potenza prelevati dal FCS . . . . .	110
4.15	Variabili del compressore e dei collettori . . . . .	111
4.16	Variabili dell’azionamento del compressore . . . . .	112
4.17	Mappa del compressore . . . . .	113
4.18	Fotografia del motore DC . . . . .	114
4.19	Corrente, tensione e potenza prelevati dal FCS . . . . .	115
4.20	Variabili del compressore e dei collettori . . . . .	116
4.21	Variabili dell’azionamento del compressore . . . . .	117
4.22	Fotografia del banco di prova . . . . .	118
4.23	Andamenti di $i_d$ e $i_q$ per vari valori di potenza erogata–VOC . . . . .	119
4.24	Andamenti di $P$ e $Q$ per vari valori di potenza erogata–DPC . . . . .	119
4.25	Corrente a regime e suo spettro con tecnica VOC . . . . .	120
4.26	Corrente a regime e suo spettro con tecnica DPC . . . . .	121
4.27	Andamenti di potenze e correnti con tecnica DPC classica . . . . .	122
4.28	Andamenti di potenze e correnti con tecnica DPC EMC 1 . . . . .	122
4.29	Andamenti di potenze e correnti con tecnica DPC EMC 2 . . . . .	123
4.30	Andamento del THD% in funzione della $P$ erogata . . . . .	123
4.31	Andamento della tensione di modo comune con DPC classico . . . . .	124
4.32	Andamento della tensione di modo comune con DPC EMC 1 . . . . .	125
4.33	Andamento della tensione di modo comune con DPC EMC 2 . . . . .	125

---

## Elenco delle tabelle

1.1	Rendimento dal combustibile alla ruota per diverse tipologie di trazione . . .	2
1.2	Parametri della mappatura del compressore . . . . .	19
1.3	Coefficienti di regressione . . . . .	19
1.4	Parametri del PMSM . . . . .	22
1.5	Variazione di energia libera nella cella a combustibile . . . . .	34
3.1	Possibili configurazioni e loro effetti nel Direct Power Control . . . . .	92
3.2	Tensione di modo comune in funzione dello stato dell'inverter . . . . .	94
3.3	Possibili configurazioni e loro effetti nel Direct Power Control EMC . . . . .	95
4.1	Tempi di salita per il test proposto . . . . .	100
4.2	Valori nominali del FCS di riferimento ed emulato . . . . .	107
4.3	Parametri del DC motor . . . . .	114

---

## Bibliografia

- [1] A. Vahidi, A. Stefanopoulou, and H. Peng, "Current Management in a Hybrid Fuel Cell Power System: A Model – Predictive Control Approach," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 14, no. 6, pp. 1047 – 1057, November 2006.
- [2] A. Accetta, "Regolazione del sistema di gestione dell'aria nella cella a combustibile di tipo PEM mediante tecniche di controllo predittivo," Master's thesis, Università degli Studi di Palermo, Palermo, 2008, relatori: ch.mo prof. ing. L. Dusonchet, ch.mo prof. ing. M. Cirrincione (UTBM–France); correlatore: ing. M. Pucci (ISSIA-CNR).
- [3] J. T. Pukrushpan, A. G. Stefanopoulou, and H. Peng, *Control of Fuel Cell Power System: Principles, Modeling and Analysis and Feedback Design*, ser. Advances in Industrial Control. London: Springer – Verlag, August 2005.
- [4] *Latest Findings on National Air Quality: 2002 Status and Trends*, U.S. Environmental Protection Agency, August 2003, ePA 454/ K-03-001.
- [5] *Our Nation's Air – Status and Trends through 2008*, U.S. Environmental Protection Agency, February 2010, ePA 454/ R-09-002.
- [6] K. Rajashekara, "Propulsion System Strategies for Fuel Cell Vehicles," *SAE Paper 2000 – 01 – 0369*, March 2000.
- [7] S. Boucher, *La révolution de l'hydrogène, vers une énergie propre et performante?* Le Félin, 2006.
- [8] J. Spendelow and J. Marcinkoski, "Fuel Cell System Cost - 2009," U.S. Department of Energy, DOE Hydrogen Program Record 9012, October 2009.
- [9] W. Friede, S. Raël, and B. Davat, "Mathematical Model and Characterization of the Transient Behavior of a PEM Fuel Cell," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 19, no. 5, pp. 1234 – 1241, September 2004.
- [10] B. Fahimi, "An Introduction to Modeling and Operation of PEM Fuel Cell Systems for Automotive and Domestic Applications," Presentation in UTBM Workshop on the Fuel Cell Systems, April 2008.
- [11] Ballard®, "PEM Fuel Cell Product Portfolio," April 2009. [Online]. Available: <http://bit.ly/gJri8s>
- [12] P. Thounthong and P. Sethakul, "Analysis of a Fuel Starvation Phenomenon of a PEM Fuel Cell," in *Proceedings of Power Conversion Conference*, Nagoya, April 2007, pp. 731–738.
- [13] A. Taniguchi, T. Akita, K. Yasuda, and Y. Miyazaki, "Analysis of electrocatalyst degradation in PEMFC caused by cell reversal during fuel starvation," *Journal of Power Sources*, vol. 130, pp. 42–49, May 2004.

- [14] A. Vahidi, A. Stefanopoulou, and H. Peng, "Model Predictive Control for Starvation Prevention in a Hybrid Fuel Cell System," in *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, Boston, June 2004, pp. 834 – 839.
- [15] J. Sun and I. Kolmanovsky, "Load Governor for Fuel Cell Oxygen Starvation Protection: a Robust Nonlinear Reference Governor Approach," in *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, Boston, June 2004, pp. 828–833.
- [16] F. Büchi and S. Srinivasan, "Operating Proton Exchange Membrane Fuel Cells Without External Humidification of the Reactant Gases," *Journal of Electrochemical Society*, vol. 144, no. 8, pp. 2767 – 2772, August 1997.
- [17] L. Guzzella, "Control Oriented Modeling of Fuel – Cell Based Vehicles," Presentation in NSF Workshop on the Integration of Modeling and Control for Automotive Systems, June 1999.
- [18] A. Y. Kamik and A. G. Stefanopoulou, "Water Equilibria and Management Using a Two–Volume Model of a Polymer Electrolyte Fuel Cell," *Journal of Power Sources*, vol. 164, no. 2, pp. 590–605, 2007.
- [19] P. Moraal and I. Kolmanovsky, "Turbocharger Modeling for Automotive Control Applications," *SAE Paper 1999-01-0908*, March 1999.
- [20] J. Cunningham, M. Hoffman, R. Moore, and D. Friedman, "Requirements for a Flexible and Realistic Air Supply Model for Incorporation Into a Fuel Cell Vehicle (FCV) System Simulation," *SAE Paper 1999 – 01 – 2912*, August 1999.
- [21] M. Boyce, *Gas Turbine Engineering Handbook*. London: Gulf, 1982.
- [22] J. Gravdahl and O. Egeland, *Compressor Surge and Rotating Stall*. London: Springer, 1999.
- [23] P. Vas, *Vector control of AC machines*. New York: Oxford University Press, 1994.
- [24] J. Heywood, *Internal Combustion Engine Fundamentals*. New York: McGraw – Hill, 1988.
- [25] *Fuel Cell Handbook*, 7th ed., EG&G Technical Services, Inc., U.S. Department of Energy, Office of Fossil Energy, National Energy Technology Laboratory, P.O. Box 880, Morgantown, West Virginia 26507-0880, November 2004.
- [26] J. Amphlett, R. Baumert, R. Mann, B. Peppley, and P. Roberge, "Performance Modeling of the Ballard Mark IV Solid Polymer Electrolyte Fuel Cell," *Journal of Electrochemical Society*, vol. 142, pp. 9 – 15, January 1995.
- [27] J. Larminie and A. Dicks, *Fuel Cell Systems Explained*. West Sussex, Inghilterra: Wiley, 2000.
- [28] T. Springer, R. Rockward, T. Zawodzinski, and S. Gottsfeld, "Polymer Electrolyte Fuel Cell Model," *Journal of Electrochemical Society*, vol. 138, no. 8, pp. 2334 – 2342, August 1991.
- [29] J. Corrêa, F. Farret, and M. Simões, "An Electrochemical – Based Fuel – Cell Model Suitable for Electrical Engineering Automation Approach," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 51, no. 5, pp. 1103 – 1112, October 2004.



- [30] W. C. Yang, B. Bates, N. Fletcher, and R. Pow, "Control Challenges and Methodologies in Fuel Cell Vehicle Development," *SAE Paper 98C054*, October 1998.
- [31] X. Kong, A. Khambadkone, and S. K. Thum, "A Hybrid Model With Combined Steady – state and Dynamic Characteristics of PEMFC Fuel Cell Stack," in *Proceedings of the Industry Application Society*, 2005, pp. 1618 – 1625.
- [32] D. Torregrossa, "Modellizzazione di un sistema con pile a combustibile di tipo PEM: analisi teorica e caratterizzazione sperimentale," Master's thesis, Università degli Studi di Palermo, Palermo, 2007, relatori: Ch.mo prof. ing. L. Dusonchet, Ch.mo prof. ing. M. Cirrincione; correlatore: ing. M. Pucci.
- [33] J. Maciejowski, *Predictive Control with Constraints*. Harlow, United Kindom: Pearson Education Limited, 2002.
- [34] R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization*. New York: John Wiley and Sons, 1981, vol. 2.
- [35] D. Luenberger, *Linear and Nonlinear Programming*, 2nd ed. New York: Addison–Wesley Publishing Company, 1984.
- [36] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [37] L. Wang, *Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB*, ser. Advances in Industrial Control. Springer–Verlag, 2009.
- [38] D. Wismer and R. Chattergy, *Introduction to Nonlinear Optimization, a Problem Solving Approach*. New York: North–Holland, 1978.
- [39] D. Luenberger, *Optimization by Vector Space Methods*. New York: John Wiley and Sons, 1969.
- [40] N. Mohan and T. Undeland, *Power electronics: converters, applications, and design*. Wiley-India, 2007.
- [41] R. Middlebrook and S. Cuk, "A general unified approach to modelling switching-converter power stages," in *Power Electronics Specialists Conference*, vol. 1, 1976, pp. 18–34.
- [42] J. M. Correa, F. A. Farret, J. R. Gomes, and M. G. Simoes, "Simulation of fuel-cell stacks using a computer-controlled power rectifier with the purposes of actual high-power injection applications," *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 39, no. 4, pp. 1136–1142, 2003.
- [43] P. Acharya, P. Enjeti, and I. J. Pitel, "An advanced fuel cell simulator," in *Applied Power Electronics Conference and Exposition, 2004. APEC'04. Nineteenth Annual IEEE*, vol. 3, 2004, pp. 1554–1558.
- [44] T. Lee, B. Lee, S. Jang, S. Kim, and C. Won, "Development of a 3 kw fuel cell generation system with an active fuel cell simulator: topology, control, and design," in *Power Electronics Specialists Conference, 2004. PESC 04. 2004 IEEE 35th Annual*, vol. 6, 2004, pp. 4743–4748.
- [45] T. Lee, S. Kim, Y. Yoon, S. Jang, and C. Won, "A 3 kw fuel cell generation system using the fuel cell simulator," in *Industrial Electronics, 2004 IEEE International Symposium on*, vol. 2, 2004, pp. 833–837.

- [46] M. Ordonez, M. Iqbal, and J. Quaicoe, "Development of a fuel cell simulator based on an experimentally derived model," in *Electrical and Computer Engineering, 2005. Canadian Conference on*, 2005, pp. 1449–1452.
- [47] —, "A novel fuel cell simulator," in *Power Electronics Specialists Conference, 2005. PESC'05. IEEE 36th*, 2005, pp. 178–184.
- [48] R. Mann, J. Amphlett, M. Hooper, H. Jensen, B. Peppley, and P. Roberge, "Development and application of a generalised steady-state electrochemical model for a pem fuel cell," *Journal of Power Sources*, vol. 86, no. 1-2, pp. 173–180, 2000.
- [49] G. Marsala, M. Pucci, G. Vitale, M. Cirrincione, and A. Miraoui, "A prototype of a fuel cell pem emulator based on a buck converter," *Applied Energy*, vol. 86, no. 10, pp. 2192–2203, 2009.
- [50] M. Cirrincione, M. Di Piazza, G. Marsala, M. Pucci, and G. Vitale, "Real time simulation of renewable sources by model-based control of dc/dc converters," in *Industrial Electronics, 2008. ISIE 2008. IEEE International Symposium on*, 2008, pp. 1548–1555.
- [51] G. Ioannidis, A. Kandianis, and S. N. Manias, "Novel control design for the buck converter," in *IEE Proceedings - Electric Power Applications*, vol. 145, no. 1, 1998, pp. 39–47.
- [52] M. Kazmierkowski, R. Krishnan, F. Blaabjerg, and J. Irwin, *Control in power electronics*. London: Academic press, 2002, vol. 43.
- [53] M. Kazmierkowski and L. Malesani, "Current control techniques for three-phase voltage-source PWM converters: A survey," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 45, no. 5, pp. 691–703, 1998.
- [54] M. Kazmierkowski, H. Tunia, and J. Tomaszczyk, *Automatic control of converter-fed drives*. Elsevier, 1994, vol. 13.
- [55] S. Hansen, M. Malinowski, F. Blaabjerg, and M. Kazmierkowski, "Sensorless control strategies for PWM rectifier," in *Applied Power Electronics Conference and Exposition, 2000. APEC 2000. Fifteenth Annual IEEE*, vol. 2, 2000, pp. 832–838.
- [56] M. Liserre, A. Dell'Aquila, and F. Blaabjerg, "An overview of three-phase voltage source active rectifiers interfacing the utility," in *Power Tech Conference Proceeding*, vol. 3, Bologna, june 2003.
- [57] M. Malinowski, "Sensorless control strategies for three-phase PWM rectifiers," Ph.D. dissertation, Warsaw University of Technology, Poland, 2001.
- [58] M. Malinowski, M. Kazmierkowski, S. Hansen, F. Blaabjerg, and G. Marques, "Virtual-flux-based direct power control of three-phase PWM rectifiers," *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 37, no. 4, pp. 1019–1027, july/august 2001.
- [59] T. Noguchi, H. Tomiki, S. Kondo, and I. Takahashi, "Direct power control of PWM converter without power-source voltage sensors," *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 34, no. 3, pp. 473–479, may/june 1998.
- [60] M. Malinowski, M. Kazmierkowski, and A. Trzynadlowski, "A comparative study of control techniques for PWM rectifiers in AC adjustable speed drives," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 18, no. 6, pp. 1390–1396, november 2003.

- [61] I.-Y. Chung, W. Liu, D. Cartes, E. Collins, and S.-I. Moon, "Control Methods of Inverter-Interfaced Distributed Generators in a Microgrid System," *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 46, no. 3, pp. 1078–1088, may/june 2010.
- [62] T. Loix, K. Engelen, J. Driesen, and R. Belmans, "Common-Mode Voltage Generation by Grid-Connected Inverters: Problems and Solutions," in *OTTI, 4th European PV-Hybrid and Mini-Grid Conference Glyfada*, Athens, may 2008.
- [63] S. Ogasawara, H. Ayano, and H. Akagi, "Measurement and reduction of EMI radiated by a PWM inverter-fed AC motor drive system," *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 33, no. 4, pp. 1019–1026, july/august 1997.
- [64] —, "An active circuit for cancellation of common-mode voltage generated by a PWM inverter," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 13, no. 5, pp. 835–841, september 1998.
- [65] A. Julian, G. Oriti, and T. Lipo, "Elimination of common-mode voltage in three-phase sinusoidal power converters," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 14, no. 5, pp. 982–989, september 1999.
- [66] R. Jardan, J. Hamar, I. Nagy, P. Korondi, and P. Gogos, "Time domain analysis of common-mode EMI noise in the power lines at electronics production plants," in *IECON 02 [Industrial Electronics Society, IEEE 2002 28th Annual Conference of the]*, vol. 2, november 2002, pp. 938–943.
- [67] *Directive EMC 89/336/EEC on the approximation of the laws of the Member States relating to electromagnetic compatibility.*
- [68] J. Pukrushpan, A. Stefanopoulou, and H. Peng, "Control of Fuel Cell Breathing," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 24, no. 2, pp. 30 – 46, April 2004.