

TIROCINIO FORMATIVO ATTIVO, I CICLO

CLASSE A049, MATEMATICA E FISICA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PALERMO

ESTRATTI DELLE RELAZIONI FINALI

A cura di:

**Aurelio Agliolo Gallitto
Lucia Lupo**

Il presente volume contiene gli estratti delle relazioni finali di alcuni degli abilitati del Primo Ciclo del Tirocinio Formativo Attivo per la classe A049 - Matematica e Fisica, presso l'Università degli Studi di Palermo.

La revisione del materiale è stata curata dalla redazione di Quaderni di Ricerca in Didattica (Science). Tutti i lavori proposti dagli autori sono stati sottoposti a revisione da parte di esperti anonimi di varie Università e Scuole Secondarie italiane.

Quaderni di Ricerca in Didattica (Science), supplemento n. 5

http://math.unipa.it/~grim/menu_quaderni_sc.htm

Editor in-Chief:

Claudio FAZIO (Università di Palermo)

Deputy Editor-in-Chief:

Benedetto DI PAOLA (Università di Palermo)

Comitato scientifico:

Aurelio Agliolo Gallitto (University of Palermo, Italy)

Angelo BONURA (ITT Marco Polo, Palermo and AIF Palermo, Italy)

Matteo CAMMARATA (University of Palermo, Italy)

Michele Antonio FLORIANO (University of Palermo, Italy)

Marco GILIBERTI (University of Milan, Italy)

Neil HUTTON (University of Sunderland, UK)

Marian KIRES (Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Slovak Republik)

Eilish MCLOUGHLIN (Dublin City University, Ireland)

Burkhard PRIEMER (Ruhr-Universität Bochum, Germany)

Alberto STEFANEL (University of Udine, Italy)

Giovanni TARANTINO (ANSAS and University of Palermo, Italy)

Italo TESTA (University of Naples, Italy)

Roberto ZINGALES (University of Palermo, Italy)

© 2013, Dipartimento di Fisica e Chimica dell'Università degli Studi di Palermo

First edition, 3rd December 2013

ISBN: 978-88-907460-3-1

Indice

Prefazione:

Il Tirocinio Formativo Attivo nell'Ateneo di Palermo: Classe di Abilitazione A049 – Matematica e Fisica

di Aurelio Agliolo Gallitto e Lucia Lupo

7

Rachele Barresi

La bella Elena della Matematica: laboratori di Matematica e Fisica sulla cicloide

15

Giorgia Bellomonte

Studio sperimentale del moto di un carrello su un piano inclinato: una proposta didattica

24

Stefania Maria Buccellato

Laboratorio di Matematica: distanze irraggiungibili

33

Alessio Cirrito

Storia e didattica delle equazioni di secondo grado: un caso di studio

42

Rosario Lo Franco

Forza gravitazionale e forza elettrostatica: storia e confronto

59

Fabrizio Martino

L'epicicloide: un viaggio tra la Storia e la Filosofia

70

Giovanna Navarra

Forze di attrito e determinazione del coefficiente di attrito statico

82

Alberto Picone

I numeri complessi dal punto di vista storico e didattico

92

Salvatore Spagnolo

Esperimento per la misura del coefficiente di attrito dinamico

109

Lavinia Vaccaro

Effetto fotoelettrico: dall'osservazione del fenomeno alla nascita del fotone.

117

Prefazione

Tirocinio Formativo Attivo nell'Ateneo di Palermo: Classe di Abilitazione A049 – Matematica e Fisica

Aurelio Agliolo Gallitto^a e Lucia Lupo^b

^{a)} Dipartimento di Fisica e Chimica, Università di Palermo

^{b)} Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Palermo

E-mail: aurelio.agliologallitto@unipa.it, lucia.lupo@istruzione.it

Riassunto. Sarà descritta l'organizzazione del primo ciclo del Corso di Tirocinio Formativo Attivo, Classe A049 – Matematica e Fisica, nell'Ateneo di Palermo, sia per quanto riguarda le attività psico-pedagogiche, sia per le attività disciplinari. In particolare, sarà descritta l'organizzazione del tirocinio svolto a scuola sotto la guida dei tutor accoglienti e sotto la guida del tutor coordinatore. Saranno evidenziati punti di forza, punti di debolezza e aspetti di criticità delle varie attività svolte e verranno proposti miglioramenti per i cicli successivi.

1. Introduzione

Il reclutamento degli insegnanti nella scuola secondaria, in Italia, è stato attuato fino al 1999 con concorsi per titoli ed esami, nei quali era possibile ottenere il ruolo sul contingente di posti messi a concorso o il titolo di abilitazione che dava l'accesso alle graduatorie provinciali. L'individuazione degli aventi diritto all'immissione in ruolo veniva effettuata attingendo per il 50% dei posti disponibili alle graduatorie relative al concorso (valide fino all'entrata in vigore della graduatoria del concorso successivo), per il restante 50% alle graduatorie provinciali.

Nell'anno accademico 1999/2000, facendo seguito alle indicazioni emerse negli accordi di Lisbona del 1989, le Università avviarono le Scuole di Specializzazione all'Insegnamento Secondario (SSIS), che rimasero attive per nove cicli. Le SSIS abilitavano all'insegnamento, permettendo l'inserimento nelle graduatorie provinciali fino al 2007. Nelle more dell'organizzazione delle Lauree Magistrali per l'insegnamento, sono stati istituiti nel 2010, con il D.M. 249, i Tirocini Formativi Attivi [1], dei quali si parlerà ampiamente nel presente lavoro. Contestualmente, nel 2012, con il D.D.G. 82, vengono indetti nuovi concorsi a cattedra, per titoli ed esami, a cui si accede solo se in possesso del titolo di abilitazione [2]. L'individuazione degli aventi diritto al ruolo resta, al momento, regolata per il 50% alla graduatoria del concorso e il 50% alle graduatorie provinciali permanenti.

Il Tirocinio Formativo Attivo (TFA) è un corso di formazione iniziale per il conseguimento del titolo di abilitazione all'insegnamento nella scuola secondaria di primo e secondo grado. Il TFA, come riporta il D.M. 249/2010, è finalizzato a *“qualificare e valorizzare la funzione docente attraverso l'acquisizione di competenze disciplinari, psico-pedagogiche, metodologico-didattiche, organizzative e relazionali, necessarie a far raggiungere ai futuri insegnanti i risultati di apprendimento previsti dall'ordinamento vigente”*. Per i docenti in servizio invece sono stati attivati nel 2004 corsi di formazione nell'ambito del Progetto Lauree Scientifiche [3], convertito nel 2009 in Piano Nazionale Lauree Scientifiche [4].

In questo articolo, descriveremo l'organizzazione del primo ciclo del corso di TFA, Classe A049 – Matematica e Fisica, nell'Ateneo di Palermo, evidenziando punti di forza, punti di debolezza e aspetti di criticità emersi nelle varie attività svolte. Il primo ciclo del TFA parte nell'anno accademico 2011/2012, anche se le attività didattiche sono state svolte nel 2013. Al primo ciclo accedono i candidati che hanno superato le prove di ingresso (test di selezione, prova scritta e orale) e i candidati che, avendo superato le selezioni delle Scuole di Specializzazione nei cicli attivati, non hanno potuto conseguire l'abilitazione perché hanno sospeso la frequenza per completare corsi di Dottorato di Ricerca, i cosiddetti “congelati SSIS”. Questi ultimi, al conseguimento dell'abilitazione con il TFA, possono sciogliere la riserva con la quale si sono precedentemente

iscritti nelle graduatorie permanenti. A tali graduatorie, definite “a esaurimento” nella legge finanziaria 2007 a firma del ministro Fioroni (D.L. 296/2006), a oggi non hanno accesso coloro che hanno conseguito l’abilitazione iscrivendosi al TFA dopo aver superato l’esame di ammissione [5].

2. Organizzazione didattica del TFA

Secondo il D.M. 249, le attività in cui si articola il corso di TFA prevedono l’acquisizione di 60 crediti formativi universitari (CFU), ripartiti secondo le seguenti tipologie.

- a) Insegnamenti di scienze dell’educazione per un totale di 18 CFU, di cui 6 CFU riservati alla didattica e pedagogia speciale rivolte ai bisogni speciali.
- b) Insegnamenti di didattiche disciplinari, per un totale di 18 CFU, svolti nell’ottica di una stretta relazione tra l’approccio disciplinare e l’approccio didattico, anche in un contesto laboratoriale.
- c) Tirocinio diretto e tirocinio indiretto per complessive 475 ore, pari a 19 CFU, da svolgersi presso le istituzioni scolastiche, sotto la guida di un tutor e in collaborazione con il docente universitario relatore della relazione finale di tirocinio, con la quale si conclude l’attività di tirocinio nella scuola; 75 ore del predetto tirocinio sono dedicate alla maturazione delle necessarie competenze didattiche per l’integrazione degli alunni con disabilità.

2.1 – Insegnamenti di scienze dell’educazione

Gli insegnamenti di scienze dell’educazione, attivati nell’Ateneo di Palermo, sono riportati in Tabella 1; essi hanno un carattere trasversale alle discipline di insegnamento e forniscono ai tirocinanti le basi per la costruzione delle competenze psico-pedagogiche e metodologico-didattiche.

Tabella 1. Insegnamenti di scienze dell’educazione.

Insegnamento	SSD	CFU
Metodologia didattica	M-PED/03	3
Tecnologie per l’istruzione	M-PED/03	3
Pedagogia della scuola	M-PED/01-02	3
Valutazione di apprendimenti e competenze	M-PED/04	3
Didattica speciale	M-PED/03	3
Pedagogia speciale	M-PED/03	3

I tirocinanti hanno svolto le attività didattiche relative a questa area dalla seconda decade di febbraio 2013 alla seconda decade di aprile 2013, suddivisi in quattro grandi gruppi formati da un centinaio di studenti di differenti classi di abilitazione. Per molti tirocinanti è stato un primo approccio alle tematiche generali relative alla professione docente; il confronto fra laureati di aree disciplinari differenti si è rivelato molto utile e costruttivo. L’esperienza di lavoro cooperativo fra pari, provenienti da percorsi formativi universitari e professionali diversificati, ha permesso ai tirocinanti di acquisire quelle competenze relazionali che sono alla base del buon funzionamento degli organi collegiali nella scuola.

2.2 – Insegnamenti di didattiche disciplinari

Gli insegnamenti di didattiche disciplinari, svolti anche in ambiente laboratoriale, mirano a stabilire una stretta relazione tra l’approccio disciplinare e l’approccio didattico. Obiettivo dei suddetti insegnamenti è quello di promuovere nei futuri docenti l’acquisizione di metodologie didattiche finalizzate all’applicazione delle competenze disciplinari nell’attuale contesto scolastico, stabilendo una stretta connessione tra i contenuti disciplinari e l’approccio pedagogico-didattico. In particolare, gli abilitati nella classe A049, alla fine del percorso, devono:

1. possedere la visione della matematica e della fisica come scienze correlate e non a sé stanti: le conoscenze di base delle due discipline devono essere acquisite dagli studenti di scuola superiore, al fine di sviluppare la capacità di elaborare modelli di interpretazione e strumenti culturali, tipici del meto-

- do scientifico e logico-deduttivo, utili nella vita quotidiana per affrontare le sfide del mondo moderno [6];
2. conoscere le Indicazioni Nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani di studio previsti per i percorsi liceali (D.P.R. 89/2010, art. 10, comma 3) [7];
 3. acquisire solide conoscenze in didattica della fisica e della matematica ed essere capaci di ricostruire i saperi esperti mettendo in relazione l'analisi dei contenuti disciplinari con le caratteristiche cognitive degli studenti, in modo da saper organizzare sequenze di insegnamento/apprendimento adeguate al livello scolastico [8],[9],[10];
 4. essere in grado di programmare percorsi didattici curriculari a lungo termine, individuando i nuclei fondanti disciplinari (di contenuto e metodologici), le propedeuticità e i tempi necessari alla costruzione degli apprendimenti, contestualizzati negli specifici indirizzi scolastici, scegliendo di volta in volta le metodologie e gli strumenti più appropriati al percorso previsto [11],[12].

Nel corso di TFA per la Classe A049 nell'Ateneo di Palermo, sono stati attivati gli insegnamenti disciplinari elencati in Tabella 2.

Tabella 2. Insegnamenti disciplinari.

Insegnamento	SSD	CFU	Docente
Didattica della fisica e innovazioni (***)	FIS/08	3	Claudio Fazio
Didattica della matematica e innovazioni (*)(**)	MAT/04	3	Teresa Marino
Storia della matematica (*)(**)	MAT/04	3	Cinzia Cerroni
Storia della fisica (***)	FIS/08	3	Rosamaria Sperandeo Mineo
Laboratorio di didattica della fisica	FIS/01-08	3	Aurelio Agliolo Gallitto
Laboratorio di didattica della matematica	MAT/01-08	3	Aldo Brigaglia

(*) Corso integrato

(**) Corso mutuato con la Classe A047 – Matematica

(***) Corso mutuato con la Classe A038 – Fisica

La struttura dell'offerta formativa è indicativa della scelta operata dal gruppo di progetto, che ha individuato una sezione dedicata alla didattica in una prospettiva innovativa, una sezione dedicata alla storia e un'area dedicata alla riflessione sulla didattica. La matematica e la fisica hanno uno sviluppo storico ed epistemologico connesso, ma allo stesso tempo autonomo. È stato possibile far emergere le peculiarità metodologiche e didattiche delle due discipline attraverso una riflessione attenta condotta in parallelo dai tirocinanti sotto la guida di docenti afferenti ai SSD specifici, nei corsi riguardanti le prime due sezioni.

Il punto di forza di questa sezione è rappresentato dall'opportunità data ai tirocinanti, e da loro pienamente colta, di effettuare un'analisi storico-epistemologica su temi fondanti. Molti tirocinanti, infatti, non avevano avuto modo di approfondire questi aspetti nel loro percorso accademico e hanno mostrato un interesse che avrà modo di svilupparsi nella formazione permanente dei futuri docenti. In una fase successiva (maggio - giugno 2013), i tirocinanti hanno avuto modo di riflettere su quanto acquisito in termini di riflessione storica e metodologie didattiche in un setting di tipo laboratoriale. In entrambi i laboratori di fisica e di matematica, i tirocinanti hanno analizzato alcuni argomenti disciplinari trattati negli insegnamenti proposti, quindi hanno sviluppato dei percorsi innovativi basati sulle attività di laboratorio e sulle problematiche epistemologiche e didattiche precedentemente evidenziate. Il collegamento fra quanto introdotto nelle didattiche e quanto sperimentato nei laboratori è stato molto stretto; per esempio, a partire dal laboratorio di matematica, i tirocinanti hanno avuto modo di sviluppare competenze nell'uso di Geogebra [13], un software *open source* di geometria dinamica, che si è rivelato uno strumento didattico flessibile e utile nella progettazione di percorsi didattici trasversali alle due discipline. I laboratori di didattica hanno rappresentato per tutti i tirocinanti un momento altamente formativo, poiché hanno permesso loro di rielaborare in modo operativo conoscenze teoriche di livello esperto in una prospettiva di insegnamento a studenti di scuola superiore.

3. Tirocinio e relazione finale

Le attività di tirocinio prevedono un monte di 475 ore, pari a 19 CFU, svolte in collaborazione con le istituzioni scolastiche del sistema nazionale dell'istruzione sotto la guida di personale docente in servizio nelle istituzioni scolastiche. Le ore sono divise in tirocinio indiretto e tirocinio diretto e gestite dal tutor coordinatore e dai tutor accoglienti. Le 25 ore relative a ogni CFU sono state distribuite, vista l'eccezionalità dei tempi di svolgimento del ciclo, in 8 ore di tirocinio diretto e 17 ore di tirocinio indiretto. I tirocinanti hanno avuto l'opportunità di richiedere la riduzione del carico relativo nel caso avessero prestato servizio presso le istituzioni scolastiche, conseguito il titolo di dottore di ricerca o di master.

Il tirocinio indiretto è stato svolto dai tirocinanti sotto la guida del tutor coordinatore, un docente in servizio selezionato tramite concorso (Decreto Rettorale n. 4729 del 10/12/2012) e utilizzato in regime di tempo parziale. I compiti del tutor coordinatore sono:

- orientare e gestire i rapporti con i tutor accoglienti assegnando gli studenti alle diverse classi e scuole e formalizzando il progetto di tirocinio dei singoli studenti;
- provvedere alla formazione del gruppo di studenti attraverso le attività di tirocinio indiretto e l'esame dei materiali prodotti dagli studenti nelle attività di tirocinio;
- supervisionare e valutare le attività del tirocinio diretto e indiretto;
- seguire le relazioni finali per quanto riguarda le attività in classe.

Il tirocinio diretto è stato svolto presso le istituzioni scolastiche sotto la guida dei tutor accoglienti, docenti in servizio a tempo indeterminato da almeno 5 anni, che sono stati selezionati tramite bando interno dai Dirigenti scolastici delle scuole iscritte nell'elenco di cui all'art. 12 del D.M. 249/2010 e che hanno stipulato una convenzione con l'Università. Ai tutor accoglienti è affidato il compito di:

- orientare gli studenti rispetto agli assetti organizzativi e didattici della scuola e alle diverse attività e pratiche in classe;
- accompagnare e monitorare l'inserimento in classe e la gestione diretta dei processi di insegnamento degli studenti tirocinanti.

3.1 – Tirocinio diretto a scuola sotto la guida del tutor accogliente

Per la Classe A049, nell'Ateneo di Palermo, viste le richieste dei tirocinanti e le disponibilità delle istituzioni scolastiche, sono stati incaricati i docenti elencati nella Tabella 3. In alcuni casi, per ragioni organizzative, si è ritenuto necessario affidare il tirocinante a due tutor, nella maggior parte dei casi è stato privilegiato un rapporto uno a uno per facilitare la conoscenza reciproca fra tutor e tirocinante.

I percorsi di tirocinio diretto sono stati sviluppati dai tutor accoglienti tenendo conto delle esigenze dei tirocinanti e concordando con questi sia le attività che i tempi. A tutti i tutor accoglienti è stato richiesto di programmare le attività considerando l'esigenza dei tirocinanti di familiarizzare con la struttura organizzativa della scuola, dal punto di vista logistico e didattico. È stato richiesto di far partecipare i tirocinanti alle attività programmate nella scuola nel periodo di svolgimento del tirocinio, favorendone la presenza alle riunioni degli organi collegiali, di permettere la comprensione dell'uso e della funzione degli strumenti della docenza (formali e valutativi), di comprendere le esigenze di progettazione e documentazione delle attività didattiche. Il percorso doveva inoltre prevedere una fase osservativa del lavoro del docente esperto e una parte attiva nella quale il tirocinante potesse mettere in pratica quanto studiato e osservato, sotto l'attento monitoraggio del docente tutor. Queste linee guida sono state interpretate e messe in pratica dai tutor accoglienti in piena autonomia come previsto dalla funzione docente [14].

Tabella 3. Istituzioni Scolastiche e tutor accoglienti.

Istituzione Scolastica	Tutor
------------------------	-------

Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Palermo	Cambiaso Nicolò Falsone Angela Principato Giacomo Raimondi Maria Assunta Rizzo Daniela Carla
Liceo Classico "G. Meli", Palermo	Bosco Luigi Di Lorenzo Concetta Oddo Lucia Sutera Diego
Liceo Scientifico "S. Cannizzaro", Palermo	Marchisotta Giuseppa Zanca Antonio
IM "Regina Margherita", Palermo	Cordone Giulia Neri Antonia
Liceo Scientifico "Benedetto Croce", Palermo	Ignacolo Paolo
IISF "Ferrara", Palermo	Fascetta Antonino
IIS "Picone", Lercara Friddi (Pa)	Di Palermo Cosimo
Liceo Scientifico "Don Colletto", Corleone (Pa)	Scalisi Rosa
Liceo Scientifico "M. Cipolla", Castelvetrano (Tp)	Spinelli Francesco
Istituto "Don Bosco", Palermo	Biondi Alessandro
IP "S.M. Mazzarello", Palermo	Masi Rosanna
IP Centro Lingue Misilmeri (Pa)	Oliveri Laura
Liceo Scientifico "E. Fermi", Agrigento	Mingoia Giovanni

3.2 – Tirocinio indiretto sotto la guida del tutor coordinatore

Durante gli incontri di tirocinio indiretto, sono state proposte le tematiche relative alla funzione docente (il contratto di lavoro, gli strumenti della docenza), alla normativa scolastica alla luce dello sviluppo delle riforme, alla didattica disciplinare e per competenze, alla programmazione e gestione delle attività extrascolastiche (progetti europei, POF, PON e POR) alla valutazione interna ed esterna nella scuola (Sistema Nazionale di Valutazione, valutazione nazionale e internazionale, prove INVALSI, PISA e problematiche connesse) [15]. I tirocinanti hanno contestualmente condotto lo studio individuale, elaborando dei lavori monografici sui temi:

- autonomia scolastica e Piano dell'Offerta Formativa (POF);
- riforma dei cicli/competenze chiave;
- didattica per competenze;
- valutazione di sistema e di istituto;
- percorsi didattici disciplinari.

Durante tutti gli incontri è stato favorito il confronto fra pari e sono state proposte attività che potessero sviluppare atteggiamenti atti al lavoro di gruppo e alla cooperazione; nella fase conclusiva è stata incoraggiata la riflessione critica sull'intero percorso di tirocinio, in vista della predisposizione della relazione finale.

3.3 – Relazione di tirocinio ed esame finale di abilitazione

L'attività di tirocinio nella scuola, — come disposto nell'art. 10 comma 6 del D.M. 249 "si conclude con la stesura da parte del tirocinante di una relazione del lavoro svolto in collaborazione con l'insegnante tutor che ne ha seguito l'attività.[...] La relazione consiste in un elaborato originale che, oltre all'esposizione delle attività svolte dal tirocinante, deve evidenziare la capacità del medesimo di integrare ad un elevato livello culturale e scientifico con le competenze acquisite nell'attività svolta in classe e le conoscenze in materia psico-pedagogica con le competenze acquisite nell'ambito della didattica disciplinare e, in particolar modo, nelle attività di laboratorio". I tirocinanti hanno redatto l'elaborato, su indicazione del gruppo di lavoro, in tre parti. Nella prima parte è stata descritta l'esperienza formativa all'interno della scuola, in collaborazione con il tutor accogliente; nella seconda parte è stato rielaborato quanto approfondito durante il tirocinio indi-

retto; nella terza parte il tirocinante ha rielaborato un'esperienza significativa legata all'area della didattica e dei laboratori, applicando le conoscenze psico-pedagogiche acquisite e riflettendo, alla luce dell'esperienza diretta nella scuola, sulla spendibilità dell'esperienza in ambito didattico. Il relatore è stato il docente universitario che ha proposto durante il suo corso l'esperienza significativa scelta dal tirocinante, correlatore l'insegnante tutor coordinatore. Gli argomenti trattati dai tirocinanti nella terza parte della relazione sono stati rielaborati dai tirocinanti stessi in forma di articolo e sono stati raccolti nel presente numero della rivista.

Al termine del percorso di tirocinio si è svolto l'esame finale di abilitazione, che è consistito nella valutazione da parte della commissione (nominata con Decreto Rettorale n. 1853/2013 del 20/06/2013) dell'attività svolta durante il tirocinio, sulla base degli elementi forniti dalle schede valutative redatte dai tutor scolastici, dall'esposizione orale di un percorso didattico su un tema scelto dalla commissione, dalla discussione della relazione finale di tirocinio. I temi assegnati dalla commissione sono stati sviluppati e quindi discussi dai tirocinanti, seguendo le indicazioni fornite dalla commissione stessa: *“Il candidato tracci un percorso didattico, che coinvolga matematica e fisica, specificando la classe a cui è rivolto. Il candidato deve specificare prerequisiti, obiettivi, metodologie e strumenti di verifica e presentare i contenuti con un learning object”*. L'elenco dei temi assegnati è riportato qui di seguito.

- Funzioni periodiche in matematica e fisica
- Vettori e loro applicazioni fisiche
- I logaritmi, la funzione esponenziale: scarica del condensatore
- Il problema della tangente, la derivata e applicazioni cinematiche
- La trigonometria nel piano inclinato
- Il problema dell'area, l'integrale definito e il lavoro compiuto da una forza
- La funzione integrale e il lavoro compiuto da una forza dipendente dalla posizione: le forze elastiche
- La cicloide e il problema dell'isocronismo del pendolo
- Le funzioni goniometriche e l'oscillatore armonico semplice: il sistema massa molla
- Linearità, proporzionalità diretta e applicazioni fisiche
- Gli errori casuali nelle misure fisiche e la funzione di Gauss
- Le orbite dei pianeti
- Prodotto vettoriale e momento angolare
- Prodotto scalare e lavoro compiuto da una forza
- Moto del proiettile e traiettorie paraboliche
- Proporzionalità inversa, equazione dell'iperbole e legge dei gas perfetti
- Sistemi di riferimento polari e moto circolare uniforme
- Similitudini e leggi di scala
- La similitudine dei triangoli nella scomposizione delle forze
- La misura di pi-greco: metodi matematici e metodi fisici
- Le simmetrie in natura

4. Considerazioni conclusive

Le attività didattiche del primo ciclo di TFA sono iniziate con un notevole ritardo rispetto ai tempi previsti dalla legge, determinando una situazione di emergenza nella quale tutti gli attori hanno dovuto dare il massimo per l'ottimizzazione dei tempi con l'obiettivo, pienamente raggiunto, di completare entro pochi mesi il percorso formativo nella sua interezza e complessità.

Sempre a causa dei tempi ristretti, si è determinato altresì uno sfalsamento delle attività relative al tirocinio e ai laboratori pedagogico-didattici; questi, infatti, sono indirizzati alla rielaborazione e al confronto delle esperienze di tirocinio. Praticamente, è stato impossibile coordinare in poche settimane, alla fine dell'anno scolastico, una progettazione condivisa fra tutor e docenti universitari. Per i prossimi cicli si auspica l'attivazione dei Consigli di Tirocinio, nell'ambito dei quali si possa discutere della progettazione delle suddette attività.

Infine, va segnalata, come elemento di criticità, la mancanza di un adeguato approfondimento storico-didattico di alcune tematiche relative alle due discipline; ad esempio, per la matematica, probabilità e statistica che sono presenti in maniera consistente nelle indicazioni nazionali e sono considerati dall'Unione Mate-

matica Italiana (UMI) nucleo fondante; per la fisica, ottica e fisica moderna. Per questi temi, visti i tempi ristretti, non si è avuto modo di progettare un momento di riflessione ma nella logica di una selezione di fondamenti si è operata questa scelta considerando prioritaria la costruzione di competenze su contenuti ridotti piuttosto che la trattazione di molti contenuti a scapito della costruzione di competenze.

Ringraziamenti e note biografiche

Gli autori desiderano ringraziare: i tutor accoglienti per il lavoro svolto, i professori Aldo Brigaglia, Anna Maria Catalano, Cinzia Cerroni, Giulia Cordone ed Eleonora Marino che hanno fatto parte della commissione per l'esame di abilitazione e infine la prof.ssa Patrizia Lendinara per il difficile coordinamento di tutte le attività del TFA nell'Ateneo di Palermo.

Aurelio Agliolo Gallitto è professore associato nel SSD FIS/01, è referente del MIUR per il TFA Classe 049 e ha presieduto sia la commissione di accesso sia la commissione per l'esame di abilitazione.

Lucia Lupo è docente a tempo indeterminato presso il Liceo Scientifico "Galileo Galilei" di Palermo e ha coordinato gli studenti tirocinanti nel loro percorso di tirocinio diretto e indiretto.

Riferimenti bibliografici e normativi

- [1] Decreto Ministeriale n. 249 del 10 settembre 2010. Regolamento concernente: «*Definizione della disciplina dei requisiti e delle modalità della formazione iniziale degli insegnanti della scuola dell'infanzia, della scuola primaria e della scuola secondaria di primo e secondo grado, ai sensi dell'articolo 2, comma 416, della legge 24 dicembre 2007, n. 244*».
- [2] Decreto del Direttore Generale per il personale scolastico n. 82 del 24 settembre 2012. «*Indizione dei concorsi a posti e cattedre, per titoli ed esami, finalizzati al reclutamento del personale docente nelle scuole dell'infanzia, primaria, secondaria di I e II grado*».
- [3] E. Fiordilino, A. Agliolo Gallitto, *Il laboratorio di fisica nel Progetto Lauree Scientifiche*, Aracne, Roma 2010.
- [4] Direzione Generale per lo studente, l'integrazione, la partecipazione e la comunicazione, nota Prot. n. 3793 del 31 maggio 2010. «*Linee guida per il Piano Lauree Scientifiche*».
- [5] Legge n. 296 del 27 dicembre 2006. «*Disposizioni per la formazione del bilancio annuale e pluriennale dello Stato*».
- [6] C. Fazio, F. Spagnolo, *Le concezioni sui processi di modellizzazione nei futuri insegnanti di Matematica e Fisica delle scuole secondarie superiori in Italia*, Quaderni di Ricerca in Didattica **16** (2006) pagg. 149-161.
- [7] Decreto del Presidente della Repubblica n. 89 del 15 marzo 2010. «*Regolamento recante revisione dell'assetto ordinamentale, organizzativo e didattico dei licei a norma dell'art. 64, comma 4, del Decreto-Legge n. 112 del 25 giugno 2008, convertito, con modificazioni, dalla Legge n. 133 del 6 agosto 2008*».
- [8] U. Kattmann, R. Duit, H. Gropengieber and M. Komorek, *A model of Educational Reconstruction*, Proceedings of the Annual Meeting of the National Association for Research in Science Teaching (NARST), San Francisco 1995.
- [9] Y. Chevallard, *La trasposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble 1991.
- [10] L. Lupo, B. Di Paola, P. Brigaglia, *La formazione degli insegnanti della scuola di base nel Master dell'Università di Palermo*, CODISSIS Università e Formazione degli Insegnanti **XII**(2) (2007) pagg. 43-69.
- [11] S. Pugliese Jona, C. Romagnino, E. De Masi, P. Di Loreto, *Nuclei fondamentali della fisica*, in Dossier degli Annali della Pubblica Istruzione, *Il laboratorio della riforma. Verso i nuovi curricula*, Le Monnier, Roma 2000, pagg. 108-116.

- [12] O. Robutti, *Lavorare per nuclei fondanti e competenze: il caso della matematica*, in Dossier degli Annali della Pubblica Istruzione, *Il laboratorio della riforma. Verso i nuovi curricoli*, Le Monnier, Roma 2000, pagg. 117-122.
- [13] Per maggiori informazioni consultare il sito web: www.geogebra.com, data ultimo accesso 15 settembre 2013.
- [14] La funzione docente, quindi la sua autonomia culturale e funzionale, viene sancita dall'art. 33 della Costituzione Italiana, D.P.R. 416/1974, D.L. 297/1994 capo I art. 395, C.C.N.L. 2007 art. 26.
- [15] S. Bertuglia, M. Scarcella, *Tirocinio Formativo Attivo - Imparare ad insegnare...insegnare ad imparare*, Simone, Napoli 2012.

La bella Elena della Matematica: laboratori di Matematica e Fisica sulla cicloide.

Rachele Barresi

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Palermo

E-mail: rachelebarresi85@hotmail.com

Riassunto. Questo articolo descrive un percorso didattico interdisciplinare di matematica e fisica, orientato a studenti della scuola secondaria di secondo grado, che ha lo scopo di dare una descrizione esaustiva della curva cicloide, delle sue proprietà geometriche e meccaniche, e di promuovere la didattica laboratoriale. Il leitmotiv è l'“apprendistato cognitivo”, in cui gli studenti sono i principali attori di tutte le attività proposte. In primo luogo viene fatta una trattazione storica della cicloide; la storia è, infatti, un importante strumento in didattica: ripercorrere il percorso storico aiuta nella costruzione del sapere. Come strumento della didattica laboratoriale, è previsto l'uso del software GeoGebra, che verrà utilizzato per la costruzione della cicloide e per dimostrare il Teorema dell'area per mezzo di approssimazioni successive. Infine, dopo una breve introduzione teorica sulle proprietà meccaniche della cicloide (tautocronia e brachistocronia), la proposta prevede la costruzione da parte degli studenti – seguendo un approccio IBSE – delle macchine matematiche utili al fine di dimostrare tali proprietà.

Abstract. A planning of an inter-disciplinary didactic course oriented towards a high school class was carried out by the author, in order to give the more exhaustive description of cycloid curve and its geometrical and mechanical properties, with the aim to encourage laboratorial didactics. The leitmotiv is the “cognitive apprenticeship”, in the sense that students are the main actors of all the proposed activities. Firstly, they deal with the historical milestones about cycloid. In fact, history is a fundamental tool in didactics: it helps in the construction of knowledge and problem solving. As a tool of laboratorial didactics, students use GeoGebra software in order to construct cycloid and prove its Area Theorem through consecutive estimates. Lastly, after an introduction about cycloid mechanical properties (tautochrone and brachistochrone), students construct on their own – following an IBSE approach – mathematical machines for the purpose of proving these properties.

1. Introduzione

La proposta didattica introdotta in questo lavoro è rivolta a studenti del primo biennio di scuola secondaria di secondo grado e mira a sviluppare negli studenti competenze scientifiche e tecnologiche per mezzo della didattica laboratoriale, incentivando l'interdisciplinarietà tra matematica e fisica. Nel laboratorio i principali attori sono, infatti, gli studenti che, guidati dall'esperienza del docente, sperimentano grazie a quello che viene chiamato “apprendistato cognitivo” ed operano liberamente, in modalità di tipo Inquiry Based Learning (IBL), confrontando e valutando poi il risultato ottenuto con quello presentato dal docente.

In una prima fase introduttiva vengono offerti alcuni spunti tratti da situazioni della vita quotidiana, al fine di apportare un contributo alla motivazione e potenziando negli alunni la capacità di analisi delle situazioni e di formulare ipotesi sulla costruzione della cicloide: la curva viene introdotta, infatti, partendo dall'osservazione del movimento di una ruota di una bicicletta che rotola senza strisciare. L'idea è quella di operare in contesti che derivano da fenomeni conosciuti dagli studenti per sollecitare il loro interesse e stimolare il passaggio dalla realtà quotidiana all'astrazione simbolica. In tal modo gli studenti dovrebbero acquisire il linguaggio matematico gradualmente e percepire che le formule introdotte nelle fasi successive non sono così astratte. Il passo successivo consiste nella presentazione della cicloide dal punto di vista del suo sviluppo storico: ciò è utile come possibile strumento di laboratorio atto a motivare gli studenti ed indicare i

possibili percorsi didattici per l'apprendimento dei contenuti. La proposta didattica prevede poi un laboratorio di matematica, in cui far uso del software GeoGebra, per la costruzione della curva cicloide e per la dimostrazione sperimentale di una delle proprietà matematiche di tale curva, il teorema dell'area. Viene, infine, proposto un collegamento interdisciplinare con la fisica, che consta di due attività di laboratorio sperimentale per dimostrare le proprietà tautocrona e brachistocrona della cicloide. A tale scopo l'attività prevede la costruzione delle macchine matematiche necessarie per la dimostrazione delle proprietà fisiche suddette. Le attività laboratoriali con le macchine matematiche, guidate da specifiche consegne, sono, infatti, un ambiente favorevole per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica e della fisica, in particolare per far sviluppare i processi di argomentazione e costruzione di dimostrazioni.

2. Indagine preliminare sulla cicloide: grafico e definizione della curva

La prima fase consiste in un brainstorming investigativo, in cui il docente, partendo da una situazione di vita quotidiana vicina agli studenti, il movimento della ruota di una bicicletta, introduce la curva cicloide cercando di stimolare la loro motivazione e la curiosità. Adattando i contenuti a contesti e fenomeni ben noti agli studenti, viene, infatti, sollecitato il loro interesse.

Immaginiamo una ruota di una bicicletta che rotola senza strisciare lungo una linea retta.

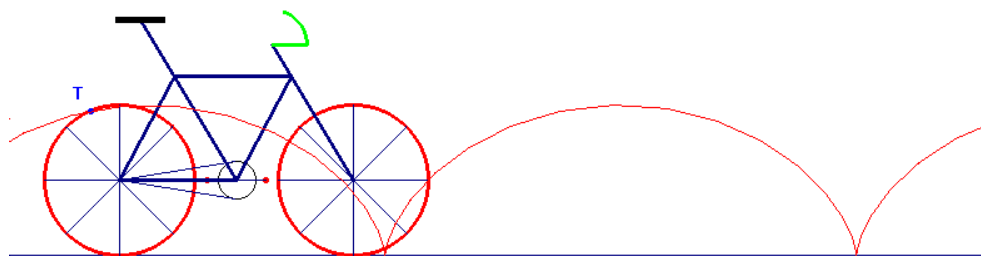


Figura 1. Esempio di rappresentazione della curva cicloide con GeoGebra: la ruota di una bicicletta. Mentre la bicicletta si muove lungo l'asse delle ascisse, il punto T sulla ruota forma proprio una curva cicloide.

Domanda stimolo: Che curva descrive un punto sul bordo esterno della ruota nel moto di rotolamento della ruota?

Istintivamente si è portati a rispondere: “una circonferenza”, ma riflettendo un po' ci si accorge che forse è così per un osservatore sul treno o per il ciclista sulla bici, ma non per un osservatore a terra; il punto dal momento che tocca terra si solleva quasi in verticale, quindi curva nella direzione del moto fino ad arrivare ad un' altezza massima pari al diametro del cerchio muovendosi in quel momento in orizzontale, quindi ridiscende quasi rallentando orizzontalmente ed accelerando verticalmente verso il basso fino a toccare terra in verticale per riprendere ciclicamente la stessa traiettoria. Questa curva è detta cicloide ed è definita come la traiettoria di un punto fisso su una circonferenza che rotoli senza slittamento su una retta.

Domanda stimolo: Come possiamo visualizzare la cicloide in maniera intuitiva?

La cicloide si può vedere fissando una lampadina alla ruota di una bicicletta, meglio se al buio, o anche facendo ruotare un cerchio su cui abbiamo segnato un punto. Per disegnarla basta attaccare un colore al bordo di un cilindro e farlo ruotare.

La cicloide la si può trovare anche in ambito architettonico, come la realizzazione di ponti. Anche Galilei parla della cicloide come “*quella curva arcuata, sono più di cinquant' anni che mi venne in mente il descriverla, e l'ammirai per una curvità graziosissima per adattarla agli archi di un ponte*” [15]. Tali ponti venivano edificati sia nell'antica Roma, per il trasporto delle acque sia in tempi recenti, usufruendo della sua eleganza estetica.

Una curiosità: esiste un pesce che appartiene alla categoria dei "pesci piatti" e alla classe degli osteitti (così chiamati per il loro corpo molto appiattito), dalla forma a losanga allungata, il cui corpo è rivestito di squame per la maggior parte di tipo cicloide [15].

3. Definizione formale, storia e personaggi legati alla cicloide

La cicloide è una curva piana appartenente alla categoria delle roulette. Essa è la curva tracciata da un punto fisso su una circonferenza che rotola lungo una retta. Consideriamo un punto generico B sulla cicloide (figura 2) e sia θ l'angolo corrispondente a questo punto.

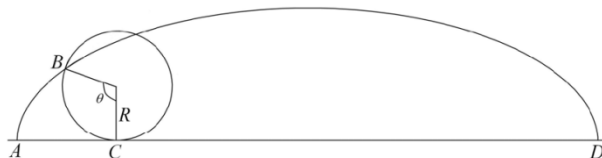


Figura 2. Consideriamo il punto B sulla circonferenza di raggio R . Mentre la circonferenza rotola lungo la retta AD , il punto B descrive una curva, la cicloide. Nella figura viene rappresentato un ramo di cicloide compreso tra le due cuspidi A e D .

Supponiamo che l'angolo θ cresca con velocità uniforme $v = 1$, risulta $\theta = t$. Le equazioni parametriche che descrivono la cicloide, ossia le coordinate del punto B , sono le seguenti:

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$$

Enunciamo, ora, alcune delle proprietà della cicloide:

- La sua lunghezza è 4 volte il diametro del cerchio che la genera;
- *Teorema dell'area:* L'area compresa fra la base e 2 cuspidi consecutive (le cuspidi sono i punti della curva che toccano la retta) è 3 volte l'area del cerchio generatore;
- La distanza tra due punti di contatto consecutivi della circonferenza generatrice con la direttrice è pari alla lunghezza della circonferenza.

Storia e sviluppo storico della curva cicloide:

La parola cicloide deriva dal greco “*kykloeidés*”, “*kýklos*” 'cerchio' e “*-oeidés*” 'forma', cioè che è formata da un cerchio. La cicloide è spesso chiamata la “Bella Elena della Matematica”, non solo per le sue numerose proprietà e per la sua perfezione estetica ma per essere stata oggetto di numerose dispute tra matematici, come la famosa Elena che fu la causa della guerra di Troia.

Storicamente nella geometria classica non c'è traccia della cicloide, quindi si può in un certo senso considerare una curva nuova, frutto cioè della rifioritura della Matematica avvenuta nel XVII secolo. E', inoltre, difficile stabilire chi per primo l'abbia trattata e studiata. Uno dei primi fu certamente Nicola Cusano, che la studiò nei suoi tentativi di “quadratura del cerchio” [8]. Galileo le diede il nome nel 1599 e cercò di misurarla teoricamente, senza però riuscirci. Egli cercò di darne una stima, ricorrendo ad un metodo empirico: tagliò un pezzo di carta di quella forma e lo pesò, trovando così che il rapporto dei pesi con il cerchio generatore era di circa 3 a 1, ma decise che non era esattamente 3 ma probabilmente un numero irrazionale molto prossimo. Evidentemente la soluzione 3 gli era apparsa esageratamente semplice. Mersenne [14] la definì rigorosamente stabilendone una prima proprietà, che la lunghezza della sua base è pari alla circonferenza generatrice, cercando, senza infine riuscirci, di trovare l'area sottesa dalla curva. Nel 1615 egli lanciò dunque l'idea tra i membri della sua Accademia parigina. Furono in molti a raccogliere la sfida e ciò fu causa di aspre rivalità lungo tutto il secolo XVII. I primi risultati sono, probabilmente, quelli ottenuti da Roberval [14], che risolse il problema dell'area nel 1634, e calcolò anche la lunghezza dell'arco, utilizzando il metodo degli indivisibili di Cavalieri. Queste formule rimasero inedite e, quando alcuni anni più tardi Torricelli le trovò a sua volta e le pubblicò, fu accusato di plagio. Pascal si tirò addosso le ire dei colleghi italiani quando, nella “Storia della cicloide”, attribuì a Roberval la priorità della scoperta. Il merito di aver sviluppato alcuni metodi per costruire la tangente alla cicloide in un suo punto va distribuito fra Roberval, Torricelli, Descartes e Fermat [14], mentre altri risultati sono dovuti a Pascal e John Wallis [12].

La curva cicloide possiede alcune proprietà fisiche interessanti. La prima è stata dimostrata dal fisico olandese Huyghens nel 1673 nell'opera “*Horologium oscillatorium sive de motu pendularium*” e consiste

nell'*isocronismo* della cicloide: facendo oscillare un grave su una traiettoria cicloidale, il periodo è indipendente dall'ampiezza di oscillazione.

Nel 1696 Johann Bernoulli pose il problema di determinare “*lineam curvam data duo puncta in diversis ab horizonte distantis et non in eadem recta verticali posita connectentem, super qua mobile propria gravitate decurrens et superiori puncto moveri incipiens citissime descendat ad punctum inferius*”, cioè di trovare il percorso che consenta ad una particella, soggetta alla sola forza di gravità, di spostarsi, nel più breve tempo possibile, da un punto P_1 ad un altro punto P_2 , collocato più in basso, ma non allineato verticalmente con P_1 .

La curva cercata venne detta *brachistocrona*, nome derivato dal greco, che significa “tempo brevissimo”. Johann, insieme al fratello maggiore Jakob Bernoulli, dimostrarono, sfruttando il calcolo differenziale, che la brachistocrona altro non era che la cicloide [5].

4. Costruzione della cicloide con GeoGebra e verifica sperimentale del Teorema dell'area

L'attività prevista in questa fase richiede l'ausilio del software GeoGebra e consiste nella costruzione della cicloide, come luogo dei punti che si ottengono mediante la composizione di una traslazione e di una rotazione. Le linee guida per la costruzione sono le seguenti:

- si definisce lo slider $r=[0,5]$ per creare un raggio di lunghezza variabile;
- si definisce il tempo con lo slider $t=[0,10]$;
- si definisce la velocità con lo slider $v=[-5,5]$;
- si definisce la velocità angolare con lo slider $\omega=[-5,5]$;
- si definisce il punto $A=(v \cdot t, 1)$;
- si costruisce la circonferenza di centro A e raggio r ;
- si definisce il punto B come intersezione della circonferenza con l'asse x ;
- si definisce il punto B' come rotazione del punto B di un angolo $-\omega \cdot t$ attorno al centro A ;
- si costruisce il luogo dei punti B' al variare di t : tale luogo altro non è che la cicloide (figura 3).

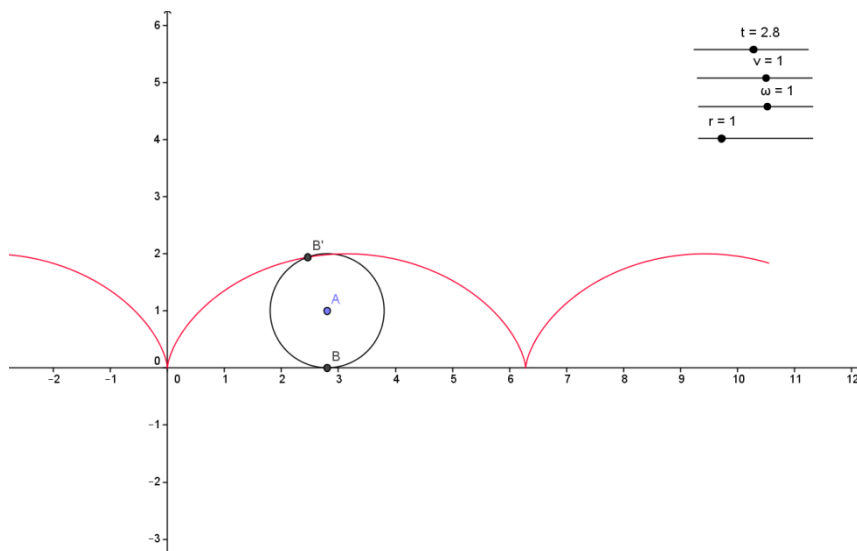


Figura 3. Consideriamo il punto B sulla circonferenza di centro A . Mentre la circonferenza rotola lungo l'asse delle ascisse, il punto B descrive una curva cicloide (in rosso).

Una volta costruita la cicloide, risulta interessante modificare i valori di alcuni parametri, in particolare la velocità v e la velocità angolare ω , ed osservare come cambia la forma della curva al variare di tali parametri. In particolare, si potranno proporre le seguenti

Domande stimolo:

- Cosa avviene ponendo negativa la velocità angolare ω ?

- Cosa avviene ponendo negativa la velocità v ?
- Cosa avviene annullando la velocità v ?
- Cosa avviene annullando la velocità angolare ω ?
- A quale fenomeno fisico è possibile associare la curva cicloide?

La fase successiva dell'attività prevede la verifica sperimentale del Teorema dell'area: l'area sottesa tra due cuspidi della cicloide e la sua retta di base è il triplo del cerchio generatore. Dall'analisi svolta sul contesto storico, infatti, è emerso come tale teorema abbia creato non poche difficoltà per la sua dimostrazione.

La verifica sperimentale proposta viene eseguita utilizzando il metodo poligonale per approssimare l'area sottesa tra la cicloide e la sua retta di base [2]. Tale metodo consiste nell'iscrivere un opportuno poligono nella cicloide ed approssimarne l'area con quella del poligono così ottenuto.

La procedura per la dimostrazione consiste nel disegnare, tramite lo strumento di GeoGebra "poligono", un poligono che abbia due vertici in due cuspidi consecutive della cicloide e gli altri vertici sulla cicloide stessa (figura 4).

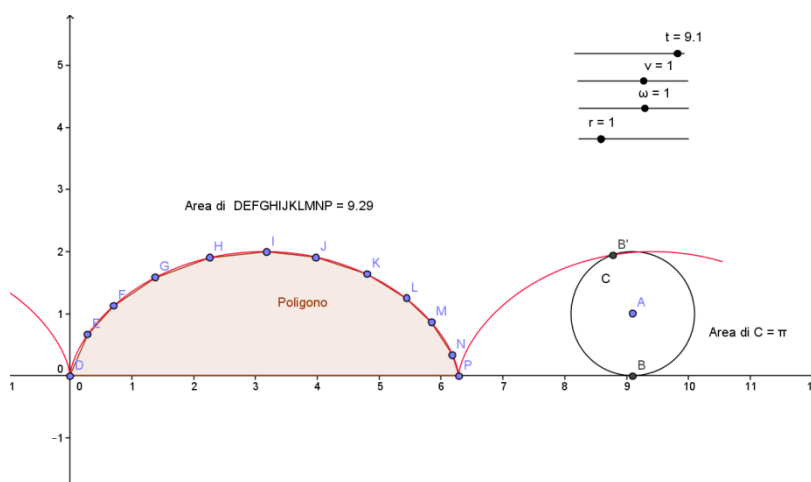


Figura 4. Consideriamo la circonferenza generatrice C , di raggio $r = 1$, ed il poligono inscritto nel ramo di cicloide di cuspidi O e P . Aumentando i lati del poligono, questo approssimerà sempre meglio il ramo di cicloide ed il rapporto di proporzionalità con l'area del cerchio si avvicinerà quindi a $3:1$.

L'idea è di lasciare gli studenti liberi nella scelta del numero di lati del poligono, per far sì che questo sia un successivo spunto di riflessione. Si calcola poi l'area con il comando "area" e si confronta tale valore con il valore dell'area del cerchio generatore, osservando che la prima sarà il triplo della seconda, in buona approssimazione. Seguono, dunque, le seguenti

Domande stimolo:

- Da quanti lati è formato il poligono?
- Come si può migliorare l'approssimazione?
- Aumentando il numero di lati del poligono inscritto, verso quale valore tenderà il rapporto tra le aree considerate?

5. Tautocronia e brachistocronia

Allo scopo di creare una trasversalità di contenuti e quindi una maggiore assimilazione e trasferibilità degli stessi, presentiamo le proprietà meccaniche fondamentali della curva cicloide, la tautocronia e la brachistocronia.

In primo luogo, per introdurre tali proprietà, enunciamo il *Teorema delle Corde* per la caduta dei gravi, come riportato da Galilei [9] (figura 5):

"Sia del cerchio BDA il diametro BA eretto all'orizzonte, e dal punto A sino alla circonferenza tirate linee utcumque AF AE, AD: dimostro, mobili uguali cadere in tempi uguali e per la perpendicolare BA e per piani

inclinati secondo le linee, DA, EA, FA; sicchè, partendosi nell'istesso momento dalli punti B, D, E, F, arriveranno in uno stesso momento al termine A, e sia la linea DA piccola quant'esser si voglia."

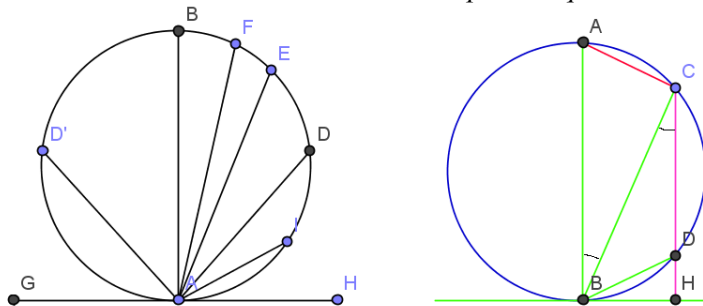


Figura 5. Un corpo impiega lo stesso tempo a cadere lungo il diametro AB o lungo una qualsiasi corda della circonferenza.

Ciò significa, utilizzando parole più attuali, che i corpi impiegano lo stesso tempo a cadere lungo un diametro verticale e lungo una qualsiasi corda di una circonferenza. In riferimento alla figura 5b, il tempo di caduta lungo la corda AB è dato, come sappiamo, da $t_1 = \sqrt{2AB/g}$, mentre per la corda CB si ha $t_2 = \sqrt{2BC/a}$, ove con a indichiamo l'accelerazione lungo la discesa CB . Per il II criterio di similitudine dei triangoli, i triangoli ABC e BCH sono simili, e dalla scomposizione dell'accelerazione a , si ha che $a = gCB/AB$. Sostituendo quanto ottenuto nella formula per t_2 ricaviamo la tesi, cioè $t_1 = t_2$.

Galilei, a partire dal teorema delle corde, pensò di poter determinare l'isocronismo di un pendolo, il fatto cioè che le oscillazioni di un pendolo si svolgono tutte nello stesso tempo, a prescindere dalla loro ampiezza. In realtà dopo Galilei, Huygens [7] dimostrò che la curva isocrona non è la circonferenza ma proprio la cicloide.

Tautocronismo della cicloide:

Prima di affrontare questa proprietà, ricordiamo la fisica del pendolo semplice. Il pendolo semplice è schematizzato da una massa puntiforme libera di oscillare in quanto appesa ad un filo inestensibile. Il periodo di oscillazione del pendolo semplice è dato dalla formula $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, ove L è la lunghezza del filo e g l'accelerazione di gravità. Questa formula è valida, come è noto, solo nell'approssimazione di piccole oscillazioni [1]. Per grandi oscillazioni, tuttavia, il periodo diventa funzione dell'angolo di oscillazione.

Un fenomeno ben diverso accade per un pendolo cicloidale, rappresentato in figura 6. Si può dimostrare, infatti, che, facendo oscillare un grave su una traiettoria cicloidale, il periodo è indipendente dall'ampiezza di oscillazione: tale fenomeno è chiamato *tautocronismo*.



Figura 6. Rappresentazione di un pendolo cicloidale: una massa puntiforme m è libera di oscillare lungo una traiettoria cicloidale.

Il periodo, in tal caso, vale $T = 4\pi\sqrt{R/g}$, ove R è il raggio della circonferenza generatrice e g è l'accelerazione di gravità. Questa proprietà si può verificare sperimentalmente nel modo seguente: se una pallina rotola lungo una traiettoria cicloidale, sia che essa compia oscillazioni molto grandi che nel caso di oscillazioni piccole, il periodo sarà circa lo stesso, cioè è indipendente dall'ampiezza di oscillazione.

Brachistocronismo della cicloide:

La cicloide è una curva brachistocrona, cioè una curva che minimizza il tempo. Ciò significa che, dati due punti nello spazio a quote diverse, la cicloide è la curva che unisce tali punti sulla quale un grave in caduta libera impiega il minor tempo.

Per gli studenti questo concetto risulterà probabilmente sorprendentemente, poiché a prima vista verrebbe da pensare che il tempo minore si impiega quando anche lo spazio è minore, e quindi la curva che minimizza il tempo è la linea retta che unisce i due punti. Galileo stesso aveva già affrontato il problema ed aveva creduto di risolverlo indicando come traiettoria ottimale l'arco di cerchio. In questo articolo non ci soffermeremo sulla dimostrazione del brachistocronismo della cicloide, dal momento che risulta complessa per la classe alla quale è rivolta l'attività, un primo biennio di scuola secondaria di secondo grado. Il nostro interesse è, piuttosto, quello di far comprendere in maniera intuitiva, grazie al supporto delle macchine matematiche, il motivo per il quale il piano inclinato, sebbene sia la curva più breve che unisce due punti a quote diverse, non è la soluzione che minimizza il tempo, mentre la cicloide risolve tale problema.

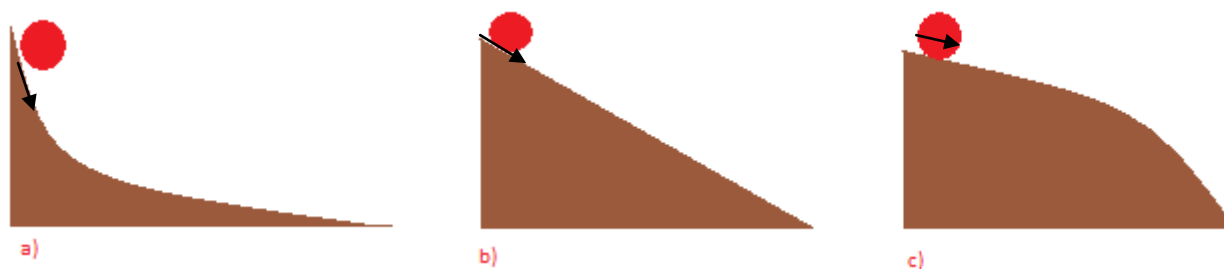


Figura 7. Rappresentazione di un pendolo cicloidale: una massa puntiforme m è libera di oscillare lungo una traiettoria cicloidale.

Affinché venga minimizzato il tempo, infatti, bisogna avere una velocità iniziale massima, e ciò avviene se il vettore velocità è puntato il più possibile verso il basso. Dalla figura 7 si può facilmente intuire che tra le tre situazioni, la cicloide rappresentata in a) è la curva in cui si impiega il minor tempo. Nel laboratorio di fisica descritto nel paragrafo successivo si metterà a confronto la caduta di un grave su un piano inclinato con lo stesso fenomeno lungo una curva cicloide.

6. Costruzione di due macchine matematiche per la tautocronia e la brachistocronia

Dopo aver enunciato le proprietà tautocrona e brachistocrona che caratterizzano la cicloide, in questa fase di approfondimento affrontiamo la costruzione di due macchine matematiche utili per la verifica sperimentale di tali proprietà. L'attività è pensata da svolgere seguendo uno spirito Inquiry Based Science Education (IBSE) [13], per cui gli studenti sono liberi nella costruzione delle macchine, senza linee guida per la procedura.

La macchina per la verifica della tautocronia è costituita da una guida cicloidale lungo la quale poter far rotolare una massa di forma sferica. La verifica sperimentale per la proprietà tautocrona, infatti, consiste nel misurare il periodo di oscillazione di della massa sferica lungo la guida cicloidale, per oscillazioni grandi e piccole e, in tal modo, verificare che il periodo sarà circa uguale in tutti i casi. Il problema principale nella costruzione di tale macchina sta nel fatto che il pendolo, oscillando lungo la guida cicloidale, subirà l'attrito del peso lungo il profilo, e ciò basterebbe a fermare il movimento dopo pochissime oscillazioni [3]. Gli studenti dovrebbero porsi il problema e cercare di trovarne la soluzione. La procedura per la corretta costruzione della macchina tautocrona è, infatti, quella di attaccare il peso a un estremo di una cordicella, che verrà appesa per l'altro estremo: in tal modo il pendolo descriverà un cerchio, che non è isocrono. Si costruiscono allora due guide, che si mettono dalle due parti del punto di sospensione; in questo modo il filo del pendolo non sarà libero di muoversi, ma deve seguire in parte la guida: si tratta allora di costruire un profilo tale che l'estremità del pendolo descriva una cicloide. Dal punto di vista della geometria, occorre costruire una curva tale che la sua evolvente sia una cicloide. Costruendo due guide a forma di cicloide, si ottiene un pendolo perfettamente isocrono (figura 8 (a)).

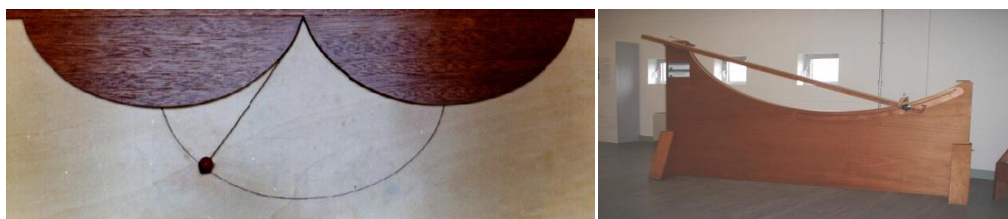


Figura 8. (a) Un esempio di macchina matematica per la tautocronia: il filo su cui è agganciata la massa è vincolato tra due guide cicloidali, consentendo così alla massa di oscillare lungo una traiettoria anch'essa cicloidale. (b) Un esempio di macchina matematica per la brachistocronia.

La seconda attività laboratoriale prevede la costruzione di una macchina matematica per la verifica sperimentale della proprietà brachistocrona. Per la costruzione di tale macchina bisogna costruire una guida cicloidale in cui vi sia una differenza di quota tra il punto di partenza ed il punto d'arrivo della traiettoria. Al fine di dimostrare, inoltre, che percorrendo la traiettoria cicloidale la massa impiega un tempo minore rispetto alla traiettoria del piano inclinato, si può migliorare la macchina inserendo anche una guida retta (figura 8 (b)), di lunghezza pari a quella cicloidale, con stessi punti di partenza e di arrivo: dalla misurazione del tempo impiegato da una massa a percorrere le due traiettorie, si potrà verificare la proprietà brachistocrona della cicloide.

7. Conclusioni

Il lavoro presentato in quest'articolo vuole essere una presentazione di un possibile percorso didattico da svolgere in classi del primo biennio di scuola secondaria di secondo grado, in cui si dia rilievo all'interdisciplinarietà e alla didattica laboratoriale in matematica e fisica, perché riteniamo che questo approccio didattico possa risultare potenzialmente coinvolgente nonché possa aiutare alla trasferibilità e all'interiorizzazione dei contenuti.

L'insegnamento della matematica e della fisica ha, infatti, come obiettivo quello di fornire agli studenti una conoscenza della realtà che, partendo dall'esperienza sensibile, porta all'organizzazione razionale dei dati osservati [6]. E' nell'ottica di sviluppare competenze sia scientifiche sia tecnologiche che entra in gioco la didattica laboratoriale. Il laboratorio, sia di fisica che di matematica, favorisce l'acquisizione di abilità specifiche particolarmente utili nel piano formativo e si presenta come uno strumento particolarmente gradito agli studenti, stimolante per l'attenzione e per l'apprendimento, permettendo di migliorare il livello di conoscenza di alcuni contenuti. La didattica laboratoriale consente, infatti, di interagire non soltanto con strumenti nuovi per gli studenti (come, ad esempio, il software GeoGebra), ma soprattutto stimola l'interazione tra gli studenti stessi, favorendo ed incoraggiando l'apprendimento cooperativo. Non ultimo, l'ausilio di metodologie informatiche nel laboratorio costituisce un mezzo per far fronte alle nuove istanze presenti nell'utenza scolastica e si accosta ai diffusi interessi degli studenti di oggi. E' in quest'ottica che si è basata l'attività proposta, che mira a coniugare il passato con il presente, ripercorrendo le tappe principali dello sviluppo storico della cicloide ed analizzando le macchine matematiche storicamente utilizzate per le proprietà tautocrona e brachistocrona, ma allo stesso tempo incentivando l'uso delle tecnologie come nel caso di GeoGebra.

Come è noto nella ricerca in didattica della matematica, alla base dell'apprendimento di qualsiasi contenuto vi è sempre l'interazione con il docente e tra i pari: la proposta didattica qui presentata si basa, infatti, su tale approccio didattico, pur non sottovalutando momenti di ricerca, indagine e scoperta, come nel caso della verifica sperimentale del teorema dell'area o dell'attività IBSE di laboratorio per la costruzione delle macchine matematiche. Riteniamo, infine, che le macchine matematiche possano svolgere un importante ruolo nella didattica: come nel caso delle macchine matematiche presentate, molte altre macchine presenti nella storia sono state, infatti, riutilizzate negli ultimi anni ai fini didattici [4].

Riferimenti bibliografici

- [1] Arons A. (1992). *Guida all'insegnamento della fisica*, Zanichelli.
- [2] Barbaini M., Casaroli S. (2010). *Matematica con GeoGebra*, Principato.
- [3] Barra M. (1975). The cycloid. *Educational studies in Mathematics*, 6 (1), 93-98.

- [4] Bartolini Bussi, M. G. & Maschietto M.(2006). *Macchine matematiche : dalla storia alla scuola*, Springer.
- [5] Boyer C. (1990). *Storia della Matematica*, Oscar Mondadori Editore.
- [6] D'Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*, Pitagora Editrice.

Sitografia

- [7] <http://curvematematiche.jimdo.com/le-nostre-curve/cicloide/il-pendolo-di-huygens/>
- [8] <http://it.wikipedia.org/wiki/Cicloide>
- [9] http://new.euresis.org/wp-content/uploads/2012/04/Bonera_Galileo-ed-il-moto-locale.pdf
- [10] <http://php.math.unifi.it/archimede/archimede/curve/guida/paginaindice.php?id=3>
- [11] http://php.math.unifi.it/archimede/archimede/immagini_museo_firenze/brachistocrona.jpg
- [12] <http://progettomatematica.dm.unibo.it/Curve%20celebri/modern/cicloide.html>
- [13] <http://www.icvolpi.gov.it/2011-12/Discipline/Scienze/SINTESI%20metodo%20IBSE.pdf>
- [14] <http://www.imss.fi.it/multi/torricel/itorat32.html>
- [15] http://www.istitutobalbo.it/autoindex/indice/Liceo%20Scientifico/Attivita%27%20didattiche%20de1%20Liceo%20Scientifico/matematica%20e%20quotidianita%27/05.la_cicloide.pdf

Studio sperimentale del moto di un carrello su un piano inclinato: una proposta didattica

Giorgia Bellomonte

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Palermo,
Via Archirafi n. 34, IT-90123, Italy

E-mail: bellomonte@math.unipa.it

Riassunto. Il presente lavoro riguarda una proposta didattica sulla cinematica, formulata durante il Tirocinio Formativo Attivo (TFA) per la classe A049 "Matematica e Fisica" che, a parere dell'autrice, è spendibile in tutti gli Istituti di istruzione superiore dotati delle necessarie attrezzature di laboratorio.

Abstract. The present paper concerns a didactical proposal about cinematics, developed during the TFA (a one-year program for secondary school teacher training) which, according to the author, is spendable in every school which is endowed with the necessary laboratory equipment.

1. Introduzione

1.1. Motivazioni

In virtù del riordino del secondo ciclo di istruzione ed in conformità con le raccomandazioni europee sulle competenze da far acquisire agli alunni a conclusione dell'obbligo di istruzione [1], la didattica laboratoriale in Italia ha subito un grosso rilancio per via del suo ruolo di collegamento tra teoria e prassi, tra contenuti e realtà quotidiana, tra ragionamento e azione. Una delle competenze chiave [1,7] che il laboratorio certamente concorre a sviluppare è quella di saper *lavorare in gruppo* [2], non solo perché spesso i laboratori non sono dotati di apparecchiature sufficienti per uno studio individuale, ma anche per l'opportunità di scambiare idee, discutere, confrontarsi (cooperative learning) e per capire e abituarsi alle dinamiche di gruppo che il mondo del lavoro richiede di saper gestire bene. Il laboratorio, inoltre, per sua natura, stimola la capacità critica, mediante l'analisi, e di comprensione dei fenomeni, ed in esso l'apprendimento scolastico si avvicina molto alla produzione culturale tipica della ricerca scientifica.

1.2. Inquiry Based Science Education

Uno dei metodi didattici che valorizzano la didattica laboratoriale e che ho appreso durante il corso di studi del TFA è l'Inquiry-Based Science Education (IBSE) [3, 4, 5], che è basato sull'introduzione in classe di percorsi didattici che stimolino ad acquisire un metodo di indagine scientifica, proponendo procedure proprie della ricerca scientifica. Nello studio di tutte le scienze sperimentali e, per quel che mi riguarda, in quello della Fisica in particolare, si dovrebbe reputare prioritaria la comprensione delle metodiche tipiche dell'indagine scientifica, piuttosto che la mera acquisizione di una serie di conoscenze da ricordare e che comunque non possono che essere riduttive rispetto all'intero bagaglio ritenuto importante per ciascuna disciplina. Inoltre, è noto che studenti che sono impegnati nello studio di argomenti o fenomeni che destano il loro interesse, essi apprendono meglio e sono più motivati nello studio. Uno dei momenti di una didattica basata sull'IBSE è quello della condivisione dei risultati e delle proprie conclusioni; in esso gli studenti sottopongono ad un'ulteriore revisione critica sia le prove sperimentali sia le loro deduzioni. È importante ribadire che il docente che propone delle esperienze didattiche basate sull'IBSE non ha tanto l'intento di trasferire agli alunni dei contenuti scientifici, dei concetti, ma piuttosto di accrescere le capacità di

ragionamento dei propri studenti, la loro capacità d'indipendenza da una guida esterna nello studio per la comprensione dei fenomeni, e di stimolare la loro capacità di porsi delle domande e di saper trovare delle risposte, mediante una graduale acquisizione ed un incremento di un certo numero di abilità e conoscenze scientifiche. Le fasi di una qualunque attività basata sul metodo Inquiry sono sei [3] e possono essere pensate come fasi di un ciclo: esposizione del problema su cui indagare, discussione in gruppo di idee che possano costituire possibili soluzioni, selezione di un'ipotesi da sottoporre a verifica, progetto ed esecuzione di un piano, raccolta di prove scientifiche o dati e deduzione di conclusioni logiche a partire da questi, condivisione e comunicazione dei risultati dell'indagine. A partire dalla comunicazione dei propri risultati o della propria spiegazione di un fenomeno, lo studente può giungere ad una nuova conoscenza modificando ed accomodando le proprie conoscenze precedenti e i propri modelli concettuali. A questo punto il ciclo dell'Inquiry può ricominciare a partire da una nuova domanda che può partire, per esempio, da eventuali discrepanze rilevate. In questo modo gli studenti possono sviluppare molte abilità proprie della ricerca e altre competenze utili nel corso della loro vita. Esistono diversi tipi di attività Inquiry che si differenziano per quanto gli studenti partecipano e sono indipendenti dal docente. In ordine crescente di indipendenza e partecipazione degli studenti si distinguono 5 tipi [3]: *interactive demonstration* (in cui il docente conduce l'indagine, manipola l'apparato facendo domande su cosa è successo, aiutando gli studenti a trarre delle conclusioni scientificamente corrette), *guided discovery* (l'esperienza è proposta dal docente come nella precedente, ma ed è condotta dagli studenti; è il tipo di esperienza che tradizionalmente si fa in laboratorio), *guided inquiry* (gli studenti lavorano in gruppo e il docente individua un problema e delinea un chiaro obiettivo del tipo "trova...", "determina...". Il docente dà delle direttive e/o istruzioni complete e gli studenti sono guidati da una serie di domande fatte dal docente), *bounded inquiry* (come il precedente, ma gli studenti devono autonomamente progettare e condurre l'esperimento; il problema da risolvere è ancora una volta posto dal docente; naturalmente questo tipo richiede un certo grado di esperienza da parte degli studenti), *open inquiry* (entro un certo contesto -es. fisico- ci si aspetta che lo studente sappia proporre e portare avanti le proprie domande di ricerca e il proprio progetto dell'esperimento, sviluppandolo autonomamente; questo tipo di Inquiry è previsto solo per studenti molto esperienti). L'insegnante deve decidere a che livello di Inquiry vuol far lavorare gli studenti. Naturalmente, all'inizio del primo anno o comunque alla prima esperienza basata sull'IBSE, l'insegnante avrà cura di chiamare gli studenti ad investigare su problemi circoscritti e semplici, che implicino solo alcune delle fasi descritte sopra, offrendo una guida ed un supporto forti, anche con opportune semplificazioni. L'obiettivo, però, deve essere quello di far arrivare gli allievi, nel corso degli anni, ad investigare su problemi via via più complessi acquisendo via via sempre più autonomia.

2. Proposta didattica

2.1. Premessa

Nell'ambito del corso del TFA di "Didattica ed innovazioni della Fisica" tenuto dal Prof. C. Fazio, abbiamo avuto l'occasione di aggiornarci su alcuni programmi e dispositivi che consentono di proporre a scuola una didattica basata sull'IBSE. Ritengo che questa proposta didattica basata sull'IBSE possa essere riproposta in una classe terza di una scuola secondaria di secondo grado per verificare le conoscenze acquisite in cinematica e dinamica. Un altro scopo dell'esperienza è rendere ogni alunno parte attiva nel proprio processo di conoscenza, facendogli contemporaneamente acquisire delle competenze legate all'analisi del moto di oggetti e delle relative cause. Quest'esperienza di laboratorio è da fare nell'ultima fase dell'anno scolastico; il suo target è composto da alunni di una scuola secondaria di secondo grado al terzo anno di Fisica che conoscono l'ambiente di laboratorio e che sono alla loro prima esperienza Inquiry. Il percorso da fare in laboratorio è da condursi come *Inquiry guidato* e l'attività su cui ci soffermeremo è incentrata sullo studio dei grafici s-t, v-t relativi al moto di un carrello lungo un piano inclinato in funzione dell'inclinazione.

2.2. Prerequisiti, materiali e strumenti, competenze in uscita e obiettivi formativi

Le situazioni di lavoro seguenti sono pensate in laboratorio e da eseguirsi in piccoli gruppi. I prerequisiti necessari sono:

- elementi di cinematica (moto rettilineo uniforme e uniformemente accelerato)

- elementi di dinamica (principi della dinamica)
- elementi di base di trigonometria
- calcolo vettoriale
- competenze informatiche di base (e.g. uso del foglio elettronico)
- competenze base sul funzionamento dei dispositivi di acquisizione dati e sul software di gestione dati acquisiti
- elementi di Teoria degli errori

e il materiale e gli strumenti necessari sono, per ciascun gruppo,

- un Personal Computer
- un sistema di acquisizione dati
- un programma di acquisizione dati
- un sensore di posizione ad ultrasuoni
- un software di analisi dati
- un carrello con le ruote a basso attrito dotato di respingente magnetico
- un piano sul quale fare scorrere il carrello, dotato di staffa di bloccaggio ad un estremo, lungo 2-3 metri
- un'asta metrica
- dei libri per variare l'angolo d'inclinazione del piano.

Le competenze che riteniamo debbano far parte del bagaglio cognitivo di un alunno che faccia esperienza di laboratorio in modo responsabile e nella logica dell'IBSE sono:

1. comprendere i procedimenti e le metodiche caratteristiche dell'indagine fisica;
2. saper produrre e saper usufruire di informazioni;
3. saper schematizzare situazioni reali e saper sistematizzare le conoscenze acquisite sulla base dei dati raccolti;
4. saper lavorare in gruppo;
5. saper individuare le variabili e relazioni significative sulla base di analisi di sistema;
6. saper elaborare informazioni significative sulla base di tabelle, grafici e di altra documentazione.

Ci aspettiamo che tali competenze possano essere acquisite tramite il raggiungimento dei seguenti obiettivi formativi:

1. saper acquisire dati
2. eseguire operazioni fondamentali con le grandezze vettoriali
3. esprimere correttamente il risultato di una misura
4. individuare la rappresentazione grafica più opportuna per analizzare un fenomeno
5. individuare le grandezze fisiche che caratterizzano il fenomeno
6. indurre una relazione fisica dai dati disponibili
7. riconoscere il tipo di relazione tra le grandezze fisiche rappresentate in un grafico
8. riconoscere il tipo di relazione tra le grandezze fisiche rappresentate in una formula
9. riconoscere in una legge fisica causa ed effetto
10. riconoscere le differenze tra grandezze scalari e vettoriali
11. riconoscere le grandezze definite come variazione di un'altra grandezza rispetto al tempo
12. stabilire relazioni tra le grandezze fisiche rappresentate in un grafico.

2.3. *Elenco situazioni di lavoro*

L'indagine è articolata in diverse situazioni di lavoro:

- I. Esposizione del problema e brainstorming in laboratorio sull'osservazione del moto di discesa e salita di un carrello lungo una guida di alluminio inclinata (1/2 h)
- II. Attività in laboratorio: moto di un carrello lungo un piano inclinato e considerazioni sul verso della velocità e dell'accelerazione (2 h)
- III. Attività in laboratorio: considerazioni sul perché le accelerazioni del carrello in salita e in discesa hanno moduli diversi tenendo fisso l'angolo d'inclinazione (1 h)
- IV. Attività in laboratorio: moto di un carrello lungo un piano inclinato al variare dell'angolo di inclinazione; calcolo di g (2 h)
- V. Commento sulle relazioni consegnate dai gruppi alla fine delle attività (2 h)
- VI. Test di verifica sui contenuti veicolati dalle attività (1 h)

Alla fine di ciascuna situazione di lavoro, si dovrà chiedere agli alunni di compilare un diario di bordo; la sua lettura, alla fine di tutte le attività, consentirà di fare un confronto diacronico sul percorso svolto dagli studenti. Esso sarà uno strumento di riflessione per ogni allievo, ma anche uno strumento di valutazione delle competenze acquisite durante il percorso.

2.4. *Valutazione e strumenti per la valutazione*

È bene precisare che la valutazione di un'esperienza basata sull'IBSE è diversa da quella che si farebbe se la metodologia impiegata per l'esperienza fosse quella tradizionale sia per quanto riguarda il momento, sia per gli strumenti, sia per l'oggetto della valutazione. In questo tipo di esperienze, infatti, il momento della verifica non è solo quello in cui l'alunno deve rispondere, oralmente o per iscritto, a domande poste dal docente; la valutazione delle conoscenze di uno studente e della sua capacità di esprimersi in un linguaggio scientificamente corretto può essere fatta anche mentre questi sta discutendo con gli altri compagni, ad esempio nella fase del brainstorming o quando confronta le ipotesi fatte con i dati sperimentali o infine quando pone domande. La valutazione dev'esser fatta mediante l'osservazione sistematica degli alunni, condotta avvalendosi di check list all'uopo predisposte, mediante la lettura dei diari di bordo compilati dagli alunni durante tutte le attività, oltre che mediante la somministrazione di una prova scritta finale. Tra gli strumenti di valutazione non sottovaluterei neanche quelli forniti dalla valutazione tra pari e dall'autovalutazione che contemporaneamente contribuiscono anche allo sviluppo delle capacità di analisi e di critica.

Non solo il momento e gli strumenti di valutazione, ma anche l'oggetto della valutazione sarà diverso da quello tradizionale. Dovranno essere vagliate le conoscenze e le competenze acquisite, tuttavia è nostro parere che il peso maggiore debba essere attribuito alle seconde: ad esempio saranno oggetto di valutazione la capacità di analisi di una situazione, il ragionamento rigoroso o ancora la capacità di organizzare i dati in tabelle sul diario di bordo.

Come strumenti di valutazione per le competenze si utilizzeranno dunque:

- check list per osservazione sistematica in laboratorio (possibili item: Partecipazione dell'alunno, capacità di lavorare in gruppo, uso degli strumenti, pulizia e ordine, atteggiamento, disciplina)
- diario di bordo (possibili item: titolo dell'esperienza, quale era l'oggetto dell'esperienza? quali materiali e quali strumenti ho utilizzato? descrizione dettagliata di ciò che ho fatto, descrizione dei risultati da me ottenuti, ho effettivamente ottenuto il risultato atteso?, se l'esperienza è stata condotta in gruppo, cosa ho fatto io e cosa hanno fatto gli altri?, cosa mi è piaciuto e cosa cambierei di ciò che ho fatto?, come posso collegare l'esperienza fatta con la realtà quotidiana?,
- relazione finale di laboratorio (possibili item: titolo dell'esperimento, scopo dell'esperimento, materiali e strumenti utilizzati, cosa si è fatto, dati raccolti e loro elaborazione, risultati degli esperimenti, eventuali errori commessi durante le attività, conclusioni).

Come strumento di valutazione per le conoscenze si utilizzerà:

- prova di verifica strutturata da redigere in base alla classe e al suo feedback.

2.5. Dettaglio delle situazioni di lavoro

Vediamo adesso nel dettaglio come articolare ogni attività.

2.5.1. Situazione I: Esposizione del problema e brainstorming

In laboratorio si dispone, su un tavolo, una guida di alluminio inclinata e si fa assistere la classe al moto di discesa e salita di un carrellino con le ruote, lungo la guida. In questo modo si presenta il problema che i ragazzi dovranno analizzare sperimentalmente. A questo punto si consegna a ciascuno studente un *questionario* da compilare con domande del tipo:

Che tipo di moto pensate che sia quello del carrello?

Quale può essere la rappresentazione grafica in un piano t-s e t-v di questo moto?

Pensate che l'accelerazione in salita e in discesa siano uguali? Perché?

Al variare dell'inclinazione del piano, cambia qualcosa?

Quali forze pensate che agiscano sul carrello in salita e in discesa?

Questo questionario servirà per confrontare le idee espresse inizialmente con i risultati ottenuti sperimentalmente.

2.5.2. Situazione II: Moto di un carrello lungo un piano inclinato

Poiché vogliamo applicare il metodo Inquiry in una forma *guidata*, predisporremo l'attrezzatura per ciascun piccolo gruppo in cui divideremo la classe (è chiaro che il numero ottimale di elementi per gruppo è 2-3, tuttavia questo numero potrebbe variare a seconda della disponibilità di attrezzature del laboratorio scolastico) oppure forniremo l'attrezzatura agli alunni e diremo loro come disporla, mediante una *scheda per la configurazione del sistema* che potrebbe essere la seguente:

- disporre la guida di alluminio su un tavolo,
- sotto una delle estremità porre dei libri in modo da creare un dislivello,
- porre sulla guida un carrello,
- all'estremità posta più in alto del piano inclinato porre il sensore di movimento ad ultrasuoni e collegarlo ad un'interfaccia che raccolga i dati e li trasmetta ad un computer su cui sia installato un programma di acquisizione dati,
- avviare il programma.

A questo punto si potrebbe consegnare agli alunni la seguente scheda di lavoro in cui chiediamo di:

- a) settare il tempo di misurazione su 40 s e la frequenza di campionamento su 30 campion./secondo,
- b) avviare la misurazione,
- c) far partire il carrello da una posizione intermedia tra il sensore e la staffa di bloccaggio posizionata sulla guida, in modo che il moto non abbia inizio entro la zona d'ombra del sensore (che include lo spazio fino a circa 30 cm dal sensore),
- d) far salire e scendere più volte il carrello lungo la guida sospingendolo in alto dopo che questo ha percorso un breve tratto in discesa, cercando di dare dei colpi non troppo bruschi per farlo risalire,
- e) analizzare i dati acquisiti,
- f) fare un confronto con le previsioni espresse nel questionario.

Chiediamo agli alunni di dedurre quali sono le variabili significative coinvolte, le relazioni fra esse e di annotare le riflessioni elaborate in gruppo sul diario di bordo. A questo punto, facciamo fare agli alunni un'analisi dei grafici delle due funzioni $s(t)$ e $v(t)$. La schermata che essi visualizzeranno sarà simile a quella in Figura 1.

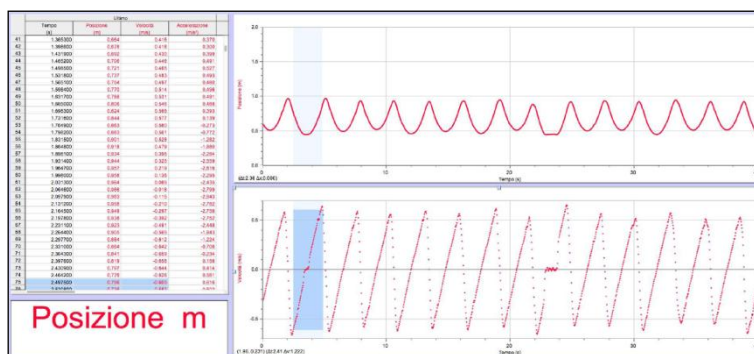


Figura 1: dall'alto in basso grafici di $s(t)$ e $v(t)$

Domandiamo poi:

nel grafico della posizione in funzione del tempo, quali tratti rappresentano un moto di salita e quali uno di discesa? Perché?

Perché parte del grafico della velocità in funzione del tempo si trova nel semipiano delle v negative?

In seguito potremmo far fare l'analisi di un tratto di grafico:

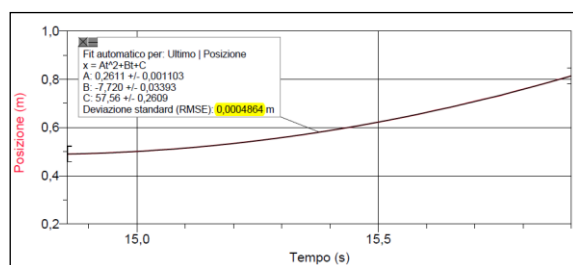


Figura 2. Grafico di $s(t)$: legge oraria di tipo parabolico

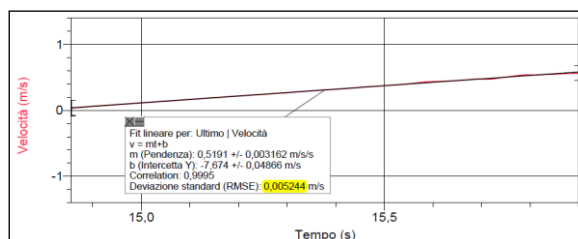


Figura 3. Grafico di $v(t)$: relazione tra velocità e tempo di tipo lineare

A questo punto si possono confrontare i grafici ottenuti con le leggi studiate in cinematica

$$s=s_0+v_0(t-t_0)+1/2 a(t-t_0)^2$$

$$v=v_0+a(t-t_0)$$

e un confronto dei grafici ottenuti con le previsioni fatte rispondendo al questionario. I grafici sperimentali *sembreranno* essere in accordo con le previsioni fatte: ci aspettiamo infatti che gli studenti prevedano accelerazioni uguali in salita e discesa.

2.5.3. Situazione III: Confronto tra le accelerazioni in salita e in discesa e analisi

Supporremo di aver già introdotto la classe ai fondamentali della teoria degli errori [6]. Sempre nella logica dell'Inquiry guidato indirizziamo l'indagine degli alunni chiedendo di eseguire due fit curvilinei distinti su

due tratti apparentemente simmetrici del grafico s-t, come in Figura 4, analizzando una salita e una discesa.

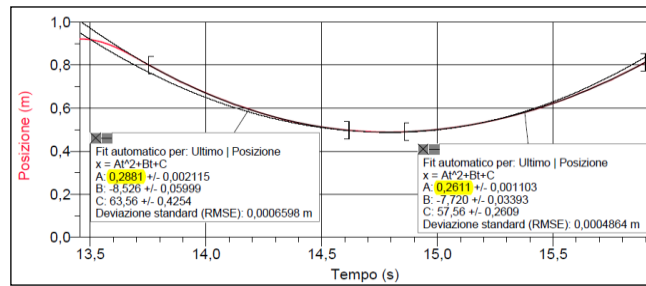


Figura 4. Analisi di un tratto di grafico di s(t)

Dal fit curvilineo separato sui due rami di parabola si evince che non si tratta di un'unica parabola (in giallo è evidenziato come le due parabole di fit non coincidano: in un caso $A=0.2881\pm 0.002115$ m/s² e nell'altro $A=0.2611\pm 0.001103$ m/s²). Chiediamo poi di eseguire due fit distinti su due tratti del grafico v(t) in corrispondenza dello stesso intervallo di tempo (cfr. Figura 5).

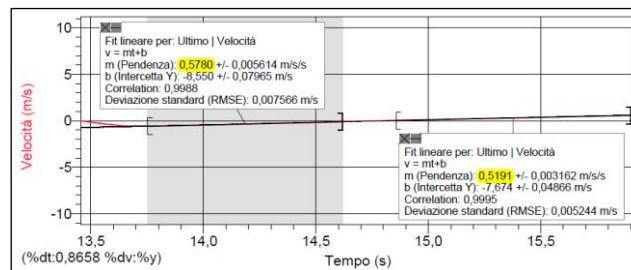


Figura 5. Analisi di un tratto di grafico di v(t)

Dal fit lineare separato sui due tratti di retta si evince che non si tratta di un'unica retta.

Si chiede di fare un calcolo delle accelerazioni in salita e in discesa. Esse sono diverse.

Ad esempio, nel caso riportato in Figura 5, come evidenziato in giallo, sono stati ottenuti in discesa un valore: $a_d=0.519\pm 0.003$ m/s² e in salita: $a_s=0.578\pm 0.005$ m/s².

Ripetendo la misurazione 10 volte, si ottengono un valore medio dell'accelerazione in salita e uno di quella in discesa che risulteranno essere diverse.

Domandiamo ora: cosa vuol dire, secondo la dinamica, che le accelerazioni sono diverse? A questo punto, se i nostri studenti hanno compreso bene la dinamica, risponderanno facilmente che le accelerazioni sono diverse perché le forze che agiscono in salita e in discesa sono diverse.

Domandiamo agli studenti:

- quali forze entrano in gioco in salita e quali in discesa?
- Perché l'accelerazione in salita del carrello è maggiore che in discesa?
- Sul carrello agiscono altre forze oltre alla forza peso?
- Che verso ha la forza che agisce sul carrello in salita? E in discesa?
- Cosa vi aspettate che succeda se si varia l'angolo di inclinazione del piano?

Si lascia che essi prendano nota delle domande e delle risposte date sul diario di bordo.

Il docente costruisce lo schema delle forze che agiscono sul corpo in discesa e in salita (cfr. Figg. 6 e 7).

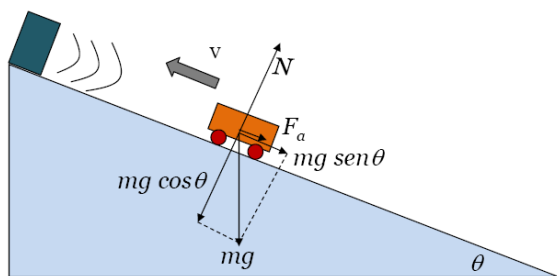


Figura 6. Schema salita

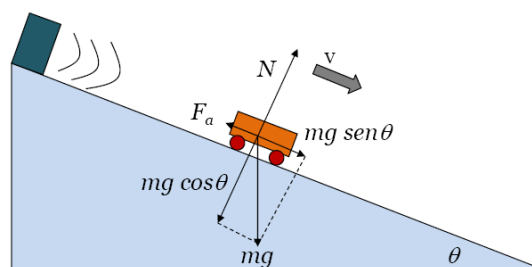


Figura 7. Schema discesa

Nell'esperimento condotto la lunghezza del piano era $l=(228.4\pm 0,1)\text{cm}$ e l'altezza del punto più alto del piano rispetto al piano orizzontale era $h=(11.8\pm 0,1)\text{cm}$; abbiamo ricavato, in corrispondenza di θ (con $\text{sen}\theta = [(11.8)/(228.4)] \pm 8 \cdot 10^{-6} \text{m}$):

in salita: $g \text{ sen } \theta + F_a = 0.578 \pm 0.005 \text{ m/s}^2$

in discesa: $g \text{ sen } \theta - F_a = 0.519 \pm 0.003 \text{ m/s}^2$.

Da queste relazioni si evince che le due fasi, di salita e di discesa, sono effettivamente diverse, nel senso che le forze agenti sul carrello non sono sempre dirette nello stesso verso. In particolare, è possibile eliminare i termini relativi alla forza di attrito, semplicemente calcolando la semisomma delle accelerazioni medie sperimentalmente misurate in salita (a_{sm}) e in discesa (a_{dm}):

$$(a_{sm} + a_{dm})/2 = g \text{ sen } \theta.$$

Risulta che tale valore della semisomma delle accelerazioni è proporzionale al seno dell'angolo di inclinazione del piano.

2.5.4. Situazione IV: Misure con angoli diversi: determinazione di g

Invitiamo gli studenti a

1. ripetere la misure facendo variare l'angolo 4 volte, in modo da avere 5 set di dati corrispondenti ad angoli diversi.
2. calcolare, per ogni angolo, il valore della semisomma delle accelerazioni medie in salita e in discesa.
3. realizzare un grafico dei punti ($\text{sen } \theta$, $(a_{dm} + a_{sm})/2$) ottenuti (ovviamente la relazione tra i valori è di proporzionalità diretta, con coefficiente angolare g)
4. eseguire un fitting lineare

Chiediamo: cosa rappresenta la pendenza della retta? Confrontate il valore trovato con il valore noto della accelerazione di gravità.

2.5.5. Situazione V: Confronto tra risultati ottenuti dai gruppi e confronto con le previsioni

Invitiamo i ragazzi a riferire agli altri compagni le considerazioni fatte e ciò che è emerso durante le varie attività, ciò che è andato bene e ciò che poteva essere fatto meglio. Chiediamo a ciascuno, inoltre, di fare un confronto tra le previsioni espresse nel questionario con i risultati ottenuti sperimentalmente.

2.5.2. Situazione VI: Prova di verifica sui contenuti

Si predisporrà un questionario sui contenuti ritenuti più importanti.

3. Conclusioni

Quest'esperienza è certamente spendibile in tutte le scuole secondarie di secondo grado che possiedono un laboratorio dotato della strumentazione necessaria ed essa può costituire un buon avviamento alla metodologia su cui è fondata. Il metodo IBSE poi, non richiede in linea di principio, nessuna strumentazione

particolare, ne segue che si potrebbero progettare (altre) esperienze basate sull'utilizzo di materiale povero e reperibile in ogni casa. Un'ultima osservazione: il metodo IBSE richiede un impegno più grande in termini di ore, sia in per la progettazione da parte del docente, sia in termini di ore di lezione da impiegare per portare a termine tutte le attività; tuttavia siamo convinti che "less is more" (riprendendo, in contesto diverso, un motto di Mies van der Rohe): meglio apprendere bene pochi concetti ed averne padronanza che ricordare per un breve periodo della propria vita molte nozioni apprese in modo esclusivamente teorico.

Ringraziamenti

L'autrice desidera ringraziare il Professore Claudio Fazio per il suo sostegno e assistenza durante il Tirocinio Formativo Attivo e il collega Dr. Salvatore Spagnolo con cui ha condotto le misure sperimentali.

Bibliografia e Sitografia

1. S. Bertuglia, M. Scarcella, *Tirocinio Formativo Attivo - Imparare ad insegnare...insegnare ad imparare*, Edizione Simone 2012.
2. A. Calvani, *Elementi di didattica. Problemi e strategie*, Carocci, 2000
3. D. Llewellyn, *Inquiry Within: Implementing Inquiry-based Science Standards* (Corwin Press, Inc. Thousand Oaks, California, 2002).
4. National Research Council (NRC), *Inquiry and the National Science Education Standards: A Guide for Teaching and Learning* (The National Academies Press, Washington, DC, 2000).
5. National Research Council (NRC), *Discipline-Based Education Research: Understanding and Improving Learning in Undergraduate Science and Engineering*, (The National Academies Press, Washington, DC, 2011).
6. J.R. Taylor, *Introduzione all'analisi degli errori*, Zanichelli 1986.
7. http://www.indire.it/db/docsrv/PDF/istruzione_obbligo/obbligo_istruzione_6sett07.pdf (u.c. 11 2013)

Laboratorio di Matematica: distanze irraggiungibili

Stefania Maria Buccellato

I.T.C.S. "Pareto", Palermo

E-mail: stefaniamaria.buccellato@istruzione.it

Riassunto. Nel presente lavoro sono descritte attività laboratoriali utili come supporto o approfondimento di argomenti su proprietà e similitudini tra triangoli, circonferenza e cerchio. Esse, mediante un approccio di tipo *Inquiry-Based Science Education*, attribuiscono allo studente un ruolo attivo nel processo di apprendimento: egli scopre o sperimenta l'importanza dei contenuti nell'osservazione della realtà che lo circonda, nella risoluzione di problemi quotidiani o particolari quesiti. In tal modo gli apprendimenti stessi vengono valorizzati, resi concreti, reali e trasferibili.

Abstract. In this paper lab activities are described aimed at supporting or mastering specific topics related to properties and similarities among triangles, circumference and circle. Through an Inquiry Based Science Education approach, the student is given an active role in the process of learning. He/she discovers or experiments by him/herself the prominence of the contents and becomes able, through the observation of reality, to answer everyday-type problems or specific questions. In this way a deepening of math knowledge is performed, valued and made real as it takes place through doing mathematics in a real context.

1. Introduzione

L'attività di laboratorio assume un ruolo rilevante nell'azione didattica di quei docenti interessati a rendere le proprie lezioni "intrinsecamente motivanti" stimolando il gusto di apprendere, di scoprire e trovare risposte. Secondo l'impostazione del Piano Nazionale Lauree scientifiche, per *laboratorio* si intende *un'attività, che avviene in base a un obiettivo formativo e ad un progetto formulato dai docenti, nella quale gli studenti: utilizzano e mettono alla prova le conoscenze e gli strumenti che hanno disponibili, per descrivere e modellizzare situazioni e fenomeni, per risolvere problemi, per produrre un evento o un oggetto; discutono e lavorano in gruppo con gli altri studenti e con i docenti; prendono decisioni, pianificano e operano per raggiungere obiettivi stabiliti; valutano i risultati ottenuti; acquisiscono concetti e abilità operative e li collegano in costruzioni teoriche, con consapevolezza metacognitiva*. Si tratta quindi di non trasmettere in maniera passiva i contenuti ma far sì che siano gli studenti stessi a scoprirli o a sperimentarne l'importanza nell'osservazione della realtà che li circonda, nella risoluzione di problemi quotidiani o particolari quesiti; in tal modo, inoltre, lo studente sviluppa una visione complessa ed integrata dell'apprendimento anche mediante collegamenti interdisciplinari o a conoscenze già acquisite anche in contesti diversi (La Marca A., 2010).

Questo lavoro consta di una raccolta di attività, pensate per studenti di un secondo anno di una scuola secondaria superiore, che vogliono essere dei possibili suggerimenti e indicazioni per un completamento o approfondimento di un percorso su proprietà e similitudini tra triangoli, circonferenza e il cerchio. Esse sono state elaborate in seguito agli interessanti incontri con il prof. Aldo Brigaglia durante il corso TFA (I ciclo, a.a. 2011-2012) di *Laboratorio di Didattica della Matematica*, presso l'Università degli Studi di Palermo. L'idea è quella di utilizzare l'approccio *Inquiry-Based Science Education* (Burnaford G E, Fischer J, Hobson D., 2009; Llewellyn D., 2002; National Science Foundation, 1999; National Research Council (NRC), 2000; Pirrami F., 2010). Si tratta di un approccio induttivo in cui l'insegnante fornisce agli studenti la domanda da investigare, li guida nella costruzione della propria conoscenza e dà spazio maggiore all'osservazione, alla sperimentazione e alla riflessione. Ciò permette lo sviluppo di competenze scientifiche,

aumenta l'interesse e il rendimento degli alunni e stimola la motivazione degli insegnanti stessi. Facendo uso della metodologia didattica del *problem solving*, ogni attività ha quindi inizio con una "domanda stimolo" che chiede l'osservazione, studio o risoluzione di quesiti anche relativi a situazioni quotidiane di difficoltà via via crescente: dal calcolo dell'altezza di un albero si giunge alla determinazione della misura della circonferenza terrestre attraverso anche un percorso storico che coinvolge le figure e l'opera di Talete, Aristarco ed Eratostene.

In base all'argomento affrontato, all'utenza, al tempo a disposizione, si può optare per un'attività piuttosto che un'altra. Ognuna di esse, inoltre, offre spunti per approfondimenti disciplinari e interdisciplinari consentendo, pur nella sua semplicità, di ottenere i seguenti risultati formativi:

- saper utilizzare conoscenze ed abilità acquisite per la risoluzione di problemi relativi a situazioni anche al di fuori del contesto scolastico;
- sviluppare e potenziare quelle che sono le competenze base di Matematica attese a conclusione dell'obbligo di istruzione;
- sviluppare e potenziare le seguenti abilità: saper misurare, argomentare e congetturare, risolvere e porsi problemi, generalizzare risultati, collocare eventi nel tempo e nello spazio, comprendere il senso dell'"invenzione matematica", stabilire relazioni tra fatti apparentemente indipendenti, osservare il processo che va dal porsi il problema al raggiungere la soluzione;
- migliorare la percezione che gli studenti hanno della Matematica ritenuta talvolta un puro esercizio mentale distaccato dalla realtà;
- evidenziare la differenza tra teoria ed osservazioni: attraverso l'argomento *distanze irraggiungibili* gli allievi constatano l'impossibilità di procedere in modo naturale mediante livelli operativi e manuali e comprendono la necessità di un processo mentale superiore. La teoria, in particolare, consente di prevedere e capire anche quando non è possibile osservare o eseguire misure dirette.

Nel corso delle attività, la suddivisione degli alunni in piccoli gruppi e la produzione di lavori validi anche come prove di verifica quali presentazioni, video,..., favorisce il *cooperative learning* e la *peer education*. Tali strategie, infatti, facilitano apprendimenti attivi, partecipativi e cooperativi attivando un passaggio di esperienze, conoscenze ed emozioni all'interno della comunità classe favorendo un ruolo attivo degli studenti che diventano protagonisti consapevoli della propria formazione. Inoltre, coinvolti in lavori di gruppo, essi sviluppano capacità di iniziativa, collaborazione e aiuto reciproco, capacità che valorizzano la diversità propria di ogni studente e che resterebbero in ombra in un insegnamento tradizionale. Le *lezioni frontali partecipate*, infine, sono necessarie per la formalizzazione dei contenuti nel linguaggio specifico della disciplina.

2. Prima attività: Talete e l'altezza della piramide di Cheope

Nel VI secolo a. C. Talete di Mileto, filosofo astronomo e matematico greco, riuscì a calcolare l'altezza della piramide di Cheope, in Egitto, con una brillante intuizione. Come fece?

2.1 Svolgimento dell'attività

Si lascia che gli alunni riflettano e si confrontino sulle possibili soluzioni ed, eventualmente, si indirizzano i loro ragionamenti con domande mirate o suggerimenti opportuni (tra cui quello di riflettere sulla relazione esistente tra la l'altezza di un oggetto e la lunghezza della sua ombra).

Con una discussione guidata si dà una risposta al quesito: *Talete osservò che le lunghezze delle ombre sono direttamente proporzionali alle lunghezze degli oggetti che le hanno prodotte e, in particolare, le lunghezze delle ombre proiettate ad un certo istante dai due oggetti stanno tra loro come le lunghezze dei rispettivi oggetti. Conoscendo l'altezza di un'asta piantata verticalmente in un terreno pianeggiante (gnomone) e le lunghezze dell'ombra dell'asta e dell'ombra della piramide egli poté ricavare l'altezza della piramide. In particolare nell'istante in cui la lunghezza della sua ombra era proprio uguale alla sua altezza la lunghezza dell'ombra della piramide sommata alla lunghezza di metà della base forniva l'altezza della piramide.* (La piramide di Cheope misura 227 m di lato e 137 m di altezza).

L'aneddoto è presente nell'opera *Vite dei filosofi* di Diogene Laerzio, storico greco antico vissuto sotto l'impero romano che cita Ieronimo di Rodi (filosofo greco vissuto nel I secolo a.C.) per sostenere che Talete

abbia misurato l'altezza della piramide di Cheope ed è successivamente ripreso da Plutarco (circa 46 d.C. – 125 d.C.), biografo, scrittore e filosofo greco antico, vissuto sotto l'Impero Romano e Plinio il Vecchio (25 d.C. - 79 d.C.), scrittore romano. In particolare ritengo interessante riportare il seguente brano tratto da Da Aldo Bonet, La scienza di Talete, Geometria, Filosofia, Fisica: Alle Pag. 16 e 17 di R. Klimpert leggiamo: «Talete dovette tosto superare in dottrina i suoi maestri e, con gran stupore del re Amasi (Faraone d'Egitto della XXVI dinastia), misurò l'altezza delle piramidi dalle loro ombre. In proposito racconta Plutarco: "Quantunque egli (il re Amasi) ti ammiri per altre cose, pure pregia specialmente la misura delle piramidi; perché tu (Talete), senza alcuna fatica o strumento, ma piantando soltanto un bastone all'estremo dell'ombra proiettata dalla piramide, hai dimostrato, per mezzo di due triangoli formati dal contatto del raggio luminoso, che la lunghezza di un'ombra ha con quella dell'altra lo stesso rapporto che l'altezza della piramide ha con quella del bastone". Ma tale procedimento di misura richiede assolutamente la teoria delle proporzioni, che non può supporre nota a Talete e molto meno agli Egiziani; poiché essa fu il prodotto dei matematici greci posteriori. E perciò, secondo alcuni storici, il racconto di Plutarco ha del romanzesco, e che quanto dice in esso di matematica è giudicato colle cognizioni. Può però darsi, che il metodo di Talete si sia in seguito perfezionato nel modo suddetto, e che Plutarco, ciò ignorandolo, lo abbia scambiato con quello originario. Si potrebbe allora prestar fede a Diogene Learzio, secondo il quale, rifacendosi ad un passo citato da Geronimo, Talete misurava l'ombra della piramide nel momento in cui quella di qualunque altro oggetto era uguale all'altezza di esso; ma il metodo non è affatto sicuro. E' probabile che vicino alla piramide si piantasse verticalmente un bastone di altezza nota, sulla cui ombra si potesse, in certo modo, scorgere l'istante opportuno, quando cioè la lunghezza di essa diventava uguale all'altezza del bastone. Per la somiglianza (o similitudine) dei due triangoli, la lunghezza dell'ombra della piramide (più la metà del lato della sua base) risultava allora uguale all'altezza di questa. Tale procedimento non è che un'applicazione molto semplice della proprietà principale del triangolo rettangolo isoscele, e richiede così poco acume da farci convinti che non fu un'invenzione di Talete, ma l'antico metodo adoperato dai geometri egiziani per la misura delle altezze».

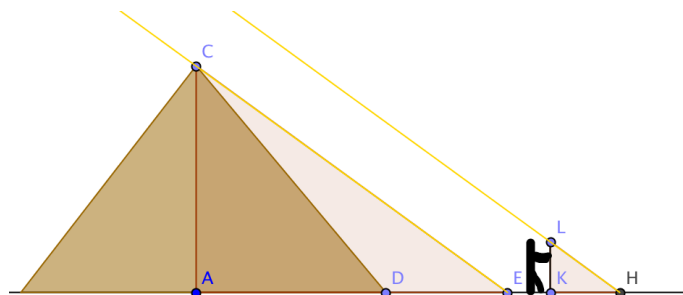


Figura 1. Misura dell'altezza della piramide di Cheope.

Si riflette su quali sono le ipotesi e gli strumenti matematici utilizzati (i raggi del Sole vengono assunti paralleli, i triangoli ACE e KLH (si veda la figura 1) sono simili pertanto i lati sono in proporzione e, nel caso in cui la lunghezza dell'ombra è proprio uguale all'altezza dell'asta, i triangoli sono isosceli.

2.2 Possibili attività connesse alla precedente

2.2.1. Come possiamo calcolare l'altezza di un albero senza effettuare delle misure dirette?

Si propone agli studenti la costruzione di uno gnomone: un semplice gnomone può essere realizzato mediante un chiodo (il più lungo possibile in modo da rendere più precisa la misura della sua ombra) inserito in una tavoletta (preferibilmente di compensato dello spessore di 8/10 mm più o meno quadrata).

Si svolge l'esperienza in un cortile mediante la misurazione dell'ombra di un albero e allo stesso tempo del chiodo.

Si discute sulla similitudine dei triangoli ottenuti: assumendo i raggi del Sole paralleli, il chiodo e l'albero paralleli, gli angoli tra essi compresi sono congruenti; poiché i triangoli sono rettangoli e la somma degli angoli interni è di 180 gradi, i triangoli sono simili in quanto hanno gli angoli congruenti. Si può pertanto impostare la proporzione tra i lati giungendo al calcolo dell'altezza dell'albero.

Probabilmente gli allievi possono ottenere dei valori leggermente diversi e, in tal caso, è interessante una discussione sugli errori di misura da ricercare a diverse cause: “è difficile” dare una stima precisa della lunghezza dell’ombra perché è sfumata, il chiodo di qualche allievo non è perpendicolare alla tavoletta, la tavoletta non è stata messa in un piano orizzontale...se utilizziamo le misure di tutta la classe saranno forse tutte un po’ incerte ma lo saranno un po’ in un verso, un po’ in un altro. Calcolando la media delle altezze si otterrà una misura più attendibile! (Non stiamo affrontando la teoria degli errori fornendo regole o formule: il problema deve nascere dalle osservazioni).

Si propone infine di redigere una relazione sull’intera attività svolta.

2.2.2. *Come possiamo giustificare l’assunzione che i raggi solari possono essere considerati paralleli sulla superficie terrestre?*

Si può svolgere l’attività laboratoriale in un cortile: attaccando una bacchetta al muro perpendicolarmente al suolo, l’ombra proiettata è parallela e della stessa lunghezza. L’ombra e la bacchetta costituiscono idealmente i lati di un parallelogramma in cui gli altri due lati hanno la direzione dei raggi solari che, pertanto, sono paralleli.

2.2.3. *Come possiamo calcolare la distanza di uno scoglio dalla riva senza raggiungerlo via mare?*

Si propone una rappresentazione della situazione e di una sua soluzione mediante l’utilizzo del software GeoGebra. Delle possibili risposte vengono sintetizzate qui di seguito:

- a. Si osservi la figura 2: dalla posizione iniziale I (tale che SI sia perpendicolare alla riva) si percorre un tratto parallelo alla riva e si pianta un paletto in P. Si continua quindi a camminare parallelamente alla riva per un tratto PD della stessa lunghezza di IP, quindi perpendicolarmente alla riva nel verso opposto al mare fino alla posizione finale F in cui lo scoglio è visto nella stessa direzione del paletto. La lunghezza del tratto DF coincide con la distanza dello scoglio dalla riva. I due triangoli di vertici ISP e PDF sono infatti congruenti per il secondo criterio di congruenza dei triangoli avendo i lati IP e PD congruenti per costruzione e gli angoli ad essi adiacenti congruenti (angoli opposti al vertice e angoli retti).

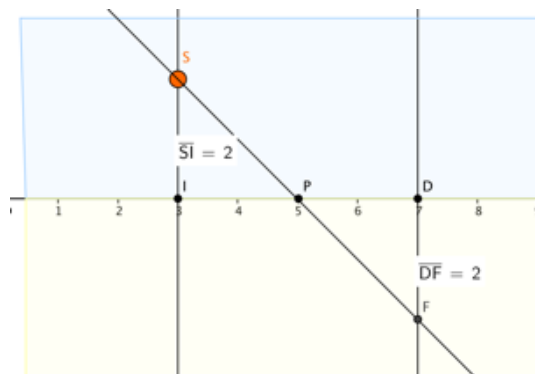


Figura 2. Calcolo della distanza di uno scoglio dalla riva utilizzando la congruenza dei triangoli.

- b. Dalla posizione iniziale I (tale che SI sia perpendicolare alla riva) si percorre un tratto parallelo alla riva sino alla posizione P tale che l’angolo IPS sia esattamente di 45° . In tal caso anche l’angolo PSI è di 45° , il triangolo di vertici SIP è isoscele e il tratto IP percorso ha la stessa lunghezza della distanza dello scoglio dalla riva.

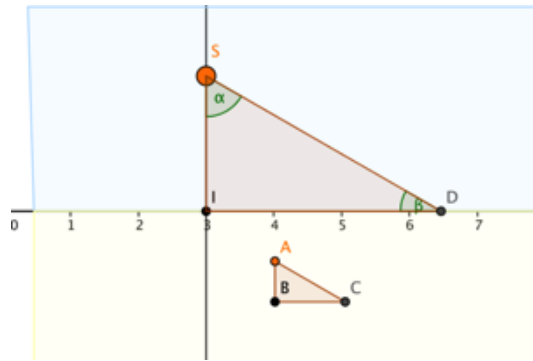


Figura 3. Calcolo della distanza di uno scoglio dalla riva utilizzando la similitudine dei triangoli.

- c. Si osservi la figura 3: dalla posizione iniziale I (tale che SI sia perpendicolare alla riva) si percorre un tratto parallelo alla riva sino alla posizione De si misura l'angolo β . Si disegna un triangolo di vertici ABC simile a quello di vertici IDS (rettangolo, con un angolo di ampiezza β e un angolo α di ampiezza $90-\beta$). Dalla proporzione $BC:ID=AB:SI$ si determina la distanza SI dello scoglio.

Si potrebbe discutere su quale procedura consente una misura più precisa e, in particolare, come un errore di pochi gradi sulla misura di un angolo possa tradursi in un errore notevole nelle misure delle grandezze cercate. A tal fine è utile anche l'attività successiva.

3. Seconda attività: Aristarco, il rapporto delle distanze Terra-Luna e Terra-Sole e le dimensioni del Sole e della Luna.

Come fece Aristarco, nel III secolo a.C. a stimare il rapporto delle distanze Terra Luna e Terra Sole?

3.1 Svolgimento dell'attività

Si suggerisce l'osservazione di un'immagine con le fasi lunari (analogo alla figura 4 tratta dall'Enciclopedia Tremila, UTET) in cui siano indicati esplicitamente i raggi solari e si lascia che gli alunni riflettano e si confrontino sulle possibili soluzioni. Eventualmente si consiglia la ricerca di opportuni triangoli rettangoli aventi per vertici il Sole, la Terra e la Luna e si guidano opportunamente i loro ragionamenti.

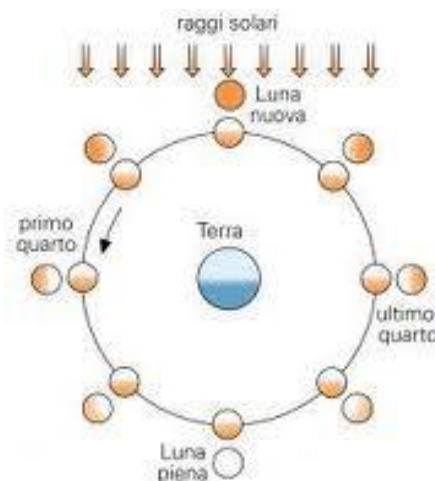


Figura 4. Fasi lunari

Con una discussione guidata si dà una risposta al quesito: *nel suo breve trattato “Sulle dimensioni e distanze del Sole e della Luna” nel III secolo a. C. Aristarco di Samo, astronomo greco noto anche per aver elaborato un primo sistema planetario eliocentrico, diede una stima delle dimensioni del Sole e della Luna e ne calcolò le relative distanze dalla Terra. Quando la Luna è in quadratura ossia illuminata per metà, essa forma con la Terra e il Sole un triangolo rettangolo. Dopo aver misurato l’angolo Luna-Terra-Sole, Aristarco calcolò il rapporto tra i lati di un triangolo ad esso simile stimando così il rapporto tra le distanze medie Terra-Sole e Terra-Luna (si veda la figura 5).*

Nonostante la correttezza del suo ragionamento, il valore ottenuto (compreso tra 18 e 20) non è quello reale di circa 400. Questo errore, relativamente grande, è dovuto al fatto che Aristarco diede all’angolo Luna-Terra-Sole il valore di 87° (il valore moderno è 89° e $51'$) e piccoli errori di pochi gradi su un angolo prossimo ai 90° generano grandi errori nel rapporto tra l’ipotenusa e il cateto minore. Altra difficoltà fu, probabilmente, l’individuare il momento dell’effettiva quadratura con una precisione difficilmente raggiungibile ad occhio nudo: basta un errore di poche ore su quel momento per ottenere un errore enorme nel calcolo del rapporto tra i lati. Ciò, naturalmente, non sminuisce il valore matematico della sua opera.

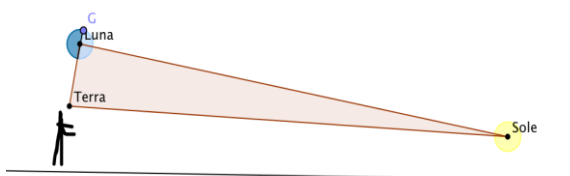


Figura 5. Luna in quadratura.

Si riflette su quali sono le ipotesi e gli strumenti matematici utilizzati.

Si discute su come un errore di pochi gradi possa tradursi in un errore notevole nelle misure delle grandezze cercate.

Si possono effettuare collegamenti con l’astronomia, storia, filosofia. In particolare si può discutere sul sistema eliocentrico e geocentrico, sul dibattito tra il modello tolemaico e copernicano o sul moto retrogrado dei pianeti; tra il V e IV secolo a.C. Platone aveva affermato: *Le stelle, rappresentando oggetti eterni, divini, immutabili, si muovono con velocità uniforme attorno alla Terra, come noi possiamo constatare, e descrivono la più regolare e perfetta di tutte le traiettorie, quella della circonferenza senza fine. Il Sole, la Luna e i pianeti vagano invece attraverso il cielo e seguono cammini complessi, anche retrogradi. Tuttavia, essendo corpi celesti, anch’esse devono muoversi in maniera conforme al loro rango elevato: i loro moti devono perciò derivare da una qualche combinazione di cerchi perfetti* (“Progetto fisica”, Zanichelli).

Ciò aveva portato allo sviluppo di un modello geocentrico che fu accettato quasi universalmente per un periodo di circa duemila anni dall’epoca di Platone ed Aristotele. Eppure Aristarco (forse influenzato da Eracleide, vissuto circa un secolo prima) sostenne che tutti i moti con ciclo quotidiano osservabili nel cielo potevano essere facilmente spiegati immaginando la sfera celeste in quiete, il Sole al centro e la Terra, i pianeti e le stelle in rotazione attorno al Sole stesso. L’abbassarsi e innalzarsi periodico delle traiettorie del Sole, della Luna e di tutti i pianeti, poteva essere facilmente spiegato attribuendo un’opportuna inclinazione all’asse terrestre mentre i cambiamenti con ciclo annuale che si verificano nel cielo e i moti retrogradi dei pianeti erano dovuti alla rotazione della Terra e dei pianeti stessi attorno al Sole. Tale soluzione fu severamente criticata nell’antichità: l’idea che la Terra fosse in movimento era completamente inaccettabile sia perché contraria alle concezioni spontanee che vedono la Terra “ferma” sia perché fortemente in contrasto con le idee filosofiche secondo le quali la Terra doveva essere differente dai corpi celesti e la sua posizione naturale doveva essere al centro dell’Universo.

Credo sia didatticamente interessante fare osservare come obiezioni simili vennero mosse contro il modello copernicano molti secoli dopo; ciò consente di affrontare in classe lo studio di dibattiti scientifici, del modo in cui le scoperte risentono della cultura ufficiale in un determinato periodo storico e di ricomporre in

un'unica prospettiva, con la collaborazione di più insegnanti, il discorso storico-critico, quello umanistico e quello scientifico.

4. Terza attività: Eratostene e la misura della circonferenza terrestre

Nel III-II secolo a. C. Eratostene da Cirene (città che si trova nell'odierna Libia) matematico, astronomo, geografo e poeta greco antico, pur non disponendo di nessun mezzo tecnologico se non lo gnomone, ottenne una misura del raggio della Terra che si discosta solo del 5% dall'attuale valore determinato anche grazie all'uso delle sonde spaziali. Come fece?

4.1 Svolgimento dell'attività

Si propone agli alunni l'osservazione di un'immagine analoga alla seguente, si lascia che gli alunni riflettano e si confrontino sulle possibili soluzioni.

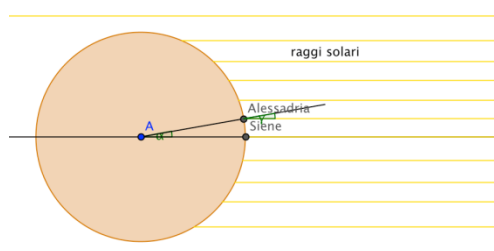


Figura 6. Ragionamento seguito da Eratostene

Con una discussione guidata si dà una risposta al quesito: *gli antichi Greci ed in particolare Pitagora (540 a. C.) e gli allievi di Aristotele (384-322 a. C.) ritenevano che la Terra fosse sferica ed avevano discusso sulla misura della sua circonferenza. Fu Eratostene, bibliotecario ad Alessandria, a stabilire, con una certa precisione, una misura delle dimensioni della Terra. Egli osservò che nella città di Siene (attuale Assuan) in Egitto, lungo il Nilo, in prossimità del Tropico del Cancro i raggi del Sole a mezzogiorno nel giorno del solstizio d'estate (21 giugno) illuminavano completamente il fondo di un pozzo verticale (uno gnomone non proiettava nessuna ombra). Ad Alessandria (assunta sullo stesso meridiano di Siene), invece, nello stesso giorno i raggi del Sole a mezzogiorno formavano con la verticale un angolo di $7,2^\circ$ (un cinquantesimo di angolo giro). Confrontando la direzione dei raggi del Sole con quella delle rette radiali che partono dal centro della Terra, comprese che anche l'angolo al centro della Terra sotteso dall'arco di estremi le due città doveva avere l'ampiezza di $7,2^\circ$ pertanto la distanza tra le due città doveva essere un cinquantesimo dell'intera circonferenza terrestre. Eratostene, secondo una stima approssimata, valutò la distanza tra Alessandria e Siene in 5000 stadi da cui risultava una lunghezza della circonferenza terrestre 250.000 stadi. Siccome lo stadio equivaleva a 156 metri ottenne il valore $2,5 \times 10^5 \times (156m) = 3,9 \times 10^7 m$.*

Il risultato accettato oggi è di $4,1 \times 10^7 m$.

Si riflette su quali sono le ipotesi del ragionamento di Eratostene: sfericità della Terra, i raggi solari possono essere considerati paralleli sulla superficie terrestre, le città di Alessandria e Siene sullo stesso meridiano ...

Si riflette sulle conoscenze matematiche utilizzate: teoremi fondamentali su rette parallele, proporzionalità tra gli archi di una circonferenza e i rispettivi angoli al centro.

Si possono effettuare collegamenti con l'astronomia e la storia.

4.2 Ulteriori attività connesse alla precedente

4.2.1. Ripetere l'esperienza di Eratostene in collaborazione con gli studenti di un Istituto di una città posta sullo stesso meridiano di Palermo.

Si propone agli studenti delle due scuole di misurare l'altezza del Sole contemporaneamente e preferibilmente nel momento del mezzogiorno solare (momento della giornata in cui la lunghezza l'ombra proiettata dallo

gnomone assume il valore minimo). Dal confronto delle altezze e dalla distanza delle località in cui si trovano le due scuole, con dei semplici calcoli si ottiene una stima della circonferenza terrestre. In particolare si osserva che alle nostre latitudini i raggi solari non raggiungono mai la verticalità ma un semplice ragionamento di carattere geometrico rileva come ciò che conti è la differenza di inclinazione dei raggi.

L'esperienza descritta è, in realtà, già svolta da diverse scuole poste all'incirca sullo stesso meridiano e in collaborazione via Internet. La *rete di Eratostene* (<http://www.vialattea.net>) è proprio una rete costituita da alcune di queste scuole che condividono esperienze di astronomia "ad occhio nudo" pubblicando poi i materiali o i dati elaborati sul sito. Un'ulteriore ricerca e dei video presenti sul sito francese *Sur les pas d'Eratosthène*, (www.fondation-lamap.org/fr/eratos) mi hanno permesso di scoprire come tale rete esista anche tra scuole di Paesi diversi in nome di una multiculturalità confermata dalla frase "New frontiers, meet new people, create links across the World".

4.2.2. Lavoro interdisciplinare.

In collaborazione con l'insegnante di italiano o storia si potrebbe proporre la lettura di parti del libro *La chioma di Berenice*, un romanzo di Denis Guedj (scrittore che è stato docente di "Storia della Scienza ed Epistemologia") ambientato nel III secolo a.C. che tratta proprio dell'esperienza di Eratostene e della spedizione organizzata per misurare la distanza tra le città di Alessandria e Siene nel quadro della vita culturale di Alessandria d'Egitto. Dal sito "amolamatematica": *Mentre con una barca scende lungo il Nilo, sulla terraferma il bematista Beton, guardia del corpo personale di Berenice, misura, contando i propri passi, la lunghezza della strada che collega Alessandria a Siene, seguendo il percorso del Nilo e Teofrasto, in groppa a un asino, conta i passi di Beton. Al termine della giornata, Eratostene fa la media fra i due conteggi se lo scarto è minimo, altrimenti è necessario ripetere la misurazione* (<http://www.amolamatematica.it/index.php/libri/item/89-la-chioma-di-berenice>).

5. Conclusione

Uno dei principali obiettivi che un insegnante di discipline scientifiche deve spesso porsi è di migliorare la conoscenza e la percezione che i propri studenti hanno di tali discipline. Esse, infatti, sono spesso vissute dagli studenti come uno sforzo mentale, lontane dalla quotidianità, attività riservate a "scienziati" o menti eccelse. Eppure i loro contenuti rispondono all'esigenza innata nell'uomo di trovare una risposta al "perché delle cose", di capirne il funzionamento, di possedere strumenti utili alla risoluzione di problemi educando, nello stesso tempo, alla razionalità e allo sviluppo di un pensiero critico. Le attività descritte in questo lavoro sono dei possibili suggerimenti di azioni didattiche che un docente può mettere in atto al fine di perseguire il precedente obiettivo stimolando nello stesso tempo il gusto di apprendere, di scoprire e trovare risposte. Esse, in tal modo, rispondono all'esigenza di mantenere viva la conoscenza (Whitehead, 1929), prevenire che diventi inerte, sollecitarne le connessioni con le applicazioni della vita di ogni giorno (Perkins, 1999).

Ringraziamenti

Si ringraziano il prof. Aldo Brigaglia per le interessanti indicazioni e idee fornite durante gli incontri del corso TFA (I ciclo) di *Laboratorio di Didattica della Matematica* e il prof. Claudio Fazio per suggerimenti ed indicazioni in merito alla stesura del presente lavoro.

Bibliografia

Bonet, A. (2009). La scienza di Talete, Geometria, Filosofia, Fisica, *Rivista trimestrale gratuita Magazine n°11 Dicembre*.

Burnaford G E, Fischer J, Hobson D. (2009) *Teachers doing research: The Power of Action Through Inquiry* Mahwah New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Guedj D. (2012). *La chioma di Berenice*. TEA.

Klimpert, R. (1901). *Storia della Geometria*, tradotto dal Professor Pasquale Fantasia, Laterza e Figli, Bari.

La Marca, A. (2010). *Voler apprendere per imparare a pensare*, Palumbo.

- Llewellyn D. (2002). *Inquiry Within: Implementing Inquiry-based Science Standards*. Corwin Press Inc. Thousand Oaks, Ca.
- National Science Foundation, (1999). *Inquiry, Thoughts, Views, and Strategies for the K-5 Classroom. Foundations, A monograph for professionals in science, mathematics, and technology education*.
- National Research Council (NRC) (2000). *Inquiry and the National Science Education Standards: A Guide for Teaching and Learning*. Washington DC: The National Academies Press.
- Perkins, D. (1999). The many faces of constructivism, *Educational Leadership*, 57, 6-11.
- Pirrami, F. (2010). Una didattica per far sviluppare competenze scientifiche. Obiettivi di apprendimento per le scienze sperimentali e didattica basata sull'indagine (inquiry-based science education). Suggerimenti per il lavoro con le classi, "*Le scienze naturali nella scuola*", 40.
- Progetto Fisica*, Zanichelli – Edizione italiana del *Project Physics Course* a cura di Antonella Prat Bastai, Brunilde Quassati de Alfaro, Vittorio de Alfaro, Paolo Violino.
- Withehead A.N. (1929). *The aims of education*, New York, Macmillan.

Storia e didattica delle equazioni di secondo grado: un caso di studio

Alessio Cirrito

Dipartimento di matematica e informatica, Università degli Studi di Palermo, Palermo, Via Archirafi 34, 90123

E-mail: alessio.cirrito@unipa.it

Riassunto. Il presente lavoro riguarda lo studio delle equazioni di secondo grado da un punto di vista storico e didattico e si intende rivolto ai docenti e agli alunni di una classe seconda di un liceo scientifico. Si precisa che l'evoluzione storica può indicare le graduali tappe che devono essere percorse nell'itinerario didattico, per poter avviare gli allievi alla disciplina considerata e quindi, nel caso trattato, all'uso del simbolismo algebrico proprio delle equazioni di secondo grado e ad un processo di astrazione sempre più massiccio. Dal punto di vista dello studente, invece, lo studio dell'evoluzione storica di un concetto può essergli di stimolo per fargli comprendere come ogni concetto matematico sia frutto di un percorso storico che spesso abbraccia secoli interi. Tale lavoro, dopo un excursus storico, presenta un percorso didattico in cui si descrive l'argomento e si imposta il lavoro di spiegazione. Segue quindi un'analisi a priori e a posteriori in cui si descrive la somministrazione di un test di verifica ad una classe seconda di una scuola di Palermo, includendo l'analisi delle difficoltà ipotizzabili ed un'analisi dettagliata delle difficoltà riscontrate. Questo può servire ai docenti per affinare le tecniche didattiche e per rendersi conto dei problemi riscontrabili dagli studenti.

2010 Mathematics Subject Classification: 97H30.

1. Introduzione

Prima di cominciare la vera e propria trattazione potremmo chiederci perché è importante un quadro storico di riferimento quando si studia e si fa studiare la matematica. A mio avviso la risposta sta nel fatto che l'evoluzione storica può indicare le graduali tappe che devono essere percorse nell'itinerario didattico, per poter avviare gli allievi alla disciplina considerata e quindi, nel caso trattato, all'uso del simbolismo algebrico proprio delle equazioni e quindi ad un'astrazione sempre più massiccia. Dal punto di vista dello studente, lo studio dell'evoluzione storica di un concetto può essergli di stimolo per fargli comprendere come ogni concetto matematico sia frutto di un'evoluzione storica che spesso abbraccia secoli interi.

Un'analisi storica dell'Algebra ed in particolare del concetto di equazione, mostra che per molti secoli questa disciplina è rimasta indietro rispetto alla Geometria e che la costruzione del fondamentale simbolismo algebrico ha avuto un decollo lento e difficoltoso. È quindi possibile che anche gli studenti riscontrino gli stessi ostacoli e facciano gli stessi errori che tanti altri del passato hanno commesso. È fondamentale allora, a mio parere, prima di addentrarci nello studio della didattica, tracciare un quadro storico dell'Algebra ripercorrendo le varie tappe del suo sviluppo e soffermandoci sull'evoluzione del concetto di equazione algebrica e anche sull'analisi di alcuni metodi di risoluzione utilizzati nel passato ma che risultano ancora straordinariamente attuali. Il presente lavoro include anche una parte significativa di didattica della matematica, in cui mi sono occupato di svolgere un'analisi a priori e una a posteriori sull'insegnamento delle equazioni di secondo grado in una seconda classe di liceo scientifico, tramite la somministrazione di un test di verifica mirato.

2. Percorso storico

2.1. Gli Egizi

Nei papiri egiziani si trovano numerosi esempi di equazioni con enunciati e soluzioni completamente privi di simbolismo algebrico. Ad esempio il papiro Rhind, noto anche come papiro di Ahmes (nome del suo autore), contiene una tavola per esprimere le frazioni con numeratore 2 e denominatore da 5 a 101 come somma di frazioni con numeratore 1 o frazioni unitarie. Per esempio, consideriamo il problema 24 contenuto nel papiro [1].

PROBLEMA: Qual è il valore del "Mucchio" se il "Mucchio" e un settimo del "Mucchio" sono uguali a 19.

Tradotto nel linguaggio moderno il problema si riconduce a risolvere l'equazione

$$x + \frac{1}{7}x = 19$$

Il metodo di risoluzione di Ahmes consiste nell'attribuire all'incognita x un valore numerico, plausibilmente falso, e lavorare su questo valore secondo le operazioni indicate nell'equazione. Il risultato finale ottenuto verrà poi confrontato con il risultato richiesto e ricorrendo all'uso di proporzioni si troverà la risposta esatta.

Se per esempio attribuiamo alla x il valore 7 otteniamo:

$$x + \frac{1}{7}x = 8$$

Possiamo quindi scrivere la proporzione: $8:19 = 7:x$ da cui $x = \frac{19 \cdot 7}{8}$.


Tale metodo è ricordato col nome di "regula falsi" o metodo della falsa posizione.

Il metodo della falsa posizione risulta molto interessante soprattutto se si pensa al periodo in cui esso è stato sviluppato. Quello che mancava essenzialmente all'algebra egizia era la possibilità di indicare in qualche modo il numero incognito.

2.2 L'algebra babilonese

L'algebra degli egiziani si era interessata per lo più ad equazioni lineari, ma raggiunse in mesopotamia un livello di sviluppo più elevato. Il sistema di numerazione cuneiforme, usato dai babilonesi, è a base 60, ottenuto come combinazione dei sistemi naturali a base 10 e a base 6, eredità che ci è giunta nella misurazione di angoli e tempo.

Il ritrovamento delle tavole Plimpton documenta come i babilonesi affrontavano problemi pratici attraverso l'uso di tavole di calcolo aritmetico e geometrico. Su tali tavole idearono la notazione posizionale, grazie alla quale, utilizzando gli spazi tra i simboli, raggruppavano le cifre ordinandole da destra verso sinistra, se-

condo potenze crescenti. Si consideri a titolo di esempio la seguente scrittura . Essa indicava il numero $2(60^2) + 2(60) + 2$ (in base 60). Rimangono insite in questa scrittura alcune ambiguità in merito alla cifra da esprimere rimaste per mille anni circa, ma tali ambiguità potevano essere eliminate dal lettore in base al contesto della frase. Inizialmente i babilonesi non avevano alcun metodo per indicare lo zero (anche se a volte veniva lasciato uno spazio vuoto per indicarlo). Ma nel periodo della conquista di Alessandro il Grande si utilizzava un segno speciale, due piccoli cunei disposti obliquamente, segno che serviva per evidenziare la mancanza di una cifra. A quanto pare, però, il simbolo usato dai babilonesi per indicare lo zero non pose fine a tutte le ambiguità, giacché sembra che tale segno venisse usato solo per indicare posizioni "vuote intermedie" e non esiste nessuna tavoletta in cui il segno dei due cunei obliqui compaia in posizione terminale. Ciò vuol dire che i babilonesi dell'antichità non giunsero mai ad un sistema le cui cifre avessero un valore posizionale assoluto.

Fra le tavolette risalenti al periodo babilonese antico si trovano alcune tabelle contenenti le potenze successive di un dato numero, analoghe alle moderne tavole dei logaritmi. Sono state rinvenute anche tavole delle funzioni esponenziali in cui vengono elencate le prime dieci potenze delle basi 9 e 16 ([2]). Possiamo affermare che l'algebra raggiunse in Mesopotamia un livello molto più alto di quello raggiunto in Egitto; infatti molti testi del periodo babilonese antico mostrano equazioni di secondo grado complete a tre termini risolte senza nessuna seria difficoltà, grazie alle abili operazioni algebriche da loro sviluppate. Nel 1930 Neugebauer scoprì che le equazioni di secondo grado complete a tre termini erano state trattate efficacemente dai

babilonesi in alcuni dei testi più antichi; dei tre tipi di equazioni di secondo grado, classificati nel medioevo e persino all'inizio dei tempi moderni,

$$1) x^2 + px = q \quad 2) x^2 = px + q \quad 3) x^2 + q = px.$$

si trovano esempi nei testi del periodo babilonese antico risalenti a circa 4000 anni fa.

2.3 L'algebra greca

Un percorso storico sull'evoluzione dell'algebra e delle equazioni di secondo grado non può non includere il contributo dato dai greci. Si deve ad essi l'invenzione di una matematica più astratta, fondata su una struttura logica di definizioni, assiomi, dimostrazioni e simboli. Questo lento sviluppo ebbe inizio nel VI secolo A.C. con Talete di Mileto e Pitagora di Samo, che affrontarono lo studio delle equazioni di secondo grado partendo da problemi reali. Ad esempio, la ricerca della sezione aurea di un segmento di lunghezza l , si traduceva nella risoluzione dell'equazione:

$$1: x = x: (l - x) \quad \text{ovvero} \quad x^2 = l^2 - lx.$$

La linea di demarcazione tra stile babilonese e stile greco sta proprio nella trasformazione dell'approccio all'uso dell'algebra.

Parlando dell'opera dei greci è impossibile non citare il lavoro di Euclide. Sarebbe troppo arduo affrontare una trattazione sistematica dell'opera degli Elementi, preferisco quindi soffermare la mia attenzione sul II libro dedicato alla geometria algebrica. Tale libro è breve: contiene soltanto quattordici proposizioni, nessuna delle quali compare oggi nei moderni manuali. E' risaputo che al tempo di Euclide questo libro ebbe grande importanza. A quel tempo, infatti, le grandezze erano concepite come segmenti soddisfacenti gli assiomi e i teoremi della geometria, cosa che oggi ci può sembrare alquanto strana perché noi possediamo l'algebra simbolica e la trigonometria, che hanno sostituito gli equivalenti geometrici della matematica greca. Euclide costruiva la soluzione delle equazioni di secondo grado mediante il procedimento noto come "applicazione delle aree". Questo metodo consiste nel problema di trovare un segmento, altezza di un rettangolo di area data, che a sua volta viene aggiunto o tolto ad un altro segmento assegnato, costituendo così la base del rettangolo in questione.

2.4 Diofanto di Alessandria

A Diofanto viene spesso dato l'appellativo di padre dell'algebra. La sua opera principale a noi nota è l'Arithmetica, un trattato originariamente in tredici libri, di cui ci sono rimasti solo i primi sei. L'Arithmetica di Diofanto è un trattato caratterizzato da un alto grado di raffinatezza che somiglia molto all'algebra dei babilonesi, ma mentre i babilonesi si erano interessati soprattutto alla soluzione approssimata di equazioni determinate fino al terzo grado, l'opera di Diofanto è quasi esclusivamente dedicata alla soluzione esatta di equazioni sia determinate che indeterminate. Nei sei libri che ci sono pervenuti si fa uso sistematico di abbreviazioni per indicare potenze di numeri e per esprimere relazioni e operazioni ([3]). Un'incognita viene rappresentata da un simbolo simile alla lettera greca γ , il quadrato di tale incognita con Δ^γ , il cubo come K^γ , la quarta potenza, che viene chiamata quadrato-quadrato, viene rappresentata da $\Delta^\gamma \Delta$, la quinta potenza o quadrato-cubo da ΔK^γ , e la sesta potenza o cubo-cubo da KK^γ . Diofanto era ovviamente a conoscenza delle regole di combinazione equivalenti alle nostre regole per gli esponenti, e possedeva termini specifici per indicare i reciproci delle prime sei potenze dell'incognita. La differenza principale tra la notazione abbreviata di Diofanto e la notazione algebrica moderna sta nella mancanza di simboli specifici per esprimere relazioni e operazioni, oltre che nell'assenza della notazione esponenziale. Questi elementi notazionali, assenti nell'algebra di Diofanto furono in gran parte introdotti durante il periodo che va dalla fine del XV all'inizio del XVII secolo.

2.5 La Cina e l'India

Le civiltà della Cina e dell'India sono molto più antiche di quelle della Grecia e di Roma, anche se non anteriori a quelle che fiorirono nell'Egitto e in Mesopotamia. Esse risalgono all'età potamica, mentre la cultura greca e quella romana appartenevano all'Età classica. Per quanto concerne l'algebra vera e propria uno dei maggiori rappresentanti in Cina fu sicuramente Chu-Shih-chieh. Di lui si hanno ben poche notizie cronologi-

che ma si è concordi nel datare la sua attività tra il 1280 e il 1303. È in questo periodo che egli realizza la sua principale opera, Il Ssu-yuan yu-chien (prezioso specchio dei quattro elementi). Questo libro rappresenta il punto più alto raggiunto dall'algebra cinese: esso tratta infatti di sistemi di equazioni e di equazioni di grado sino al quattordicesimo. In esso l'autore espone un metodo di trasformazione che egli chiama fan-fa e che oggi è stato recepito come metodo di Horner, vissuto in Europa nel XVII secolo.

Per risolvere l'equazione $x^2 + 252x - 5292 = 0$, secondo tale metodo, l'autore poneva in prima approssimazione $x=19$ (si noti che una radice è compresa tra 19 e 20), poi utilizzava la trasformazione $y=x-19$, per ottenere l'equazione $y^2 - 290y - 143 = 0$. Di quest'ultima ne dava il valore approssimato di $y = \frac{143}{291}$, pertanto il valore corrispondente di x era $x = 19 + \frac{143}{291}$. Tale metodo venne usato in seguito anche per la risoluzione di equazioni di grado superiore al secondo. Riporto ora qualche breve informazione sull'algebra indiana per cercare di capire quali influssi la Cina e l'India abbiano rispettivamente esercitato l'una sull'altra durante il primo millennio dell'Era Cristiana.

Tra il VII e il XII secolo pervennero dall'India notevoli contributi all'algebra ed in particolare alle equazioni di secondo grado. Essi introdussero la numerazione posizionale ed i numeri indù: simboli usati per indicare i numeri da 1 a 9.

Verso il 630 fu attivo nell'India centrale il matematico Brahmagupta, che fu il primo a dare una soluzione generale all'equazione $ax+by=c$, con a, b, c interi. I contributi dati da Brahmagupta all'algebra sono notevoli se si pensa per esempio che egli utilizzava anche le radici negative per un'equazione di secondo grado. Inoltre, sebbene i Greci possedessero il concetto di nulla, non lo interpretarono mai come un numero, come invece fecero gli indiani. Tuttavia anche qui Brahmagupta non era chiaro, affermando che $0:0=0$, mentre non si pronunciava sulla questione delicata di $a:0$, per a diverso da zero.

“Un numero positivo diviso per un numero positivo, o un numero negativo diviso per un numero negativo, dà un numero positivo. Zero diviso per zero non dà nulla. Un numero positivo diviso per un numero negativo dà un numero negativo. Un numero positivo o negativo diviso per zero è una frazione avente per denominatore zero.” ([4])

2.6 L'egemonia Araba

Durante il califfato di Al-Mamun (809-833) si raggiunse l'apice del pensiero matematico arabo. Al-Mamun fondò a Bagdad una “Casa del sapere” paragonabile all'antico museo di Alessandria. Fra i suoi membri vi era un matematico e astronomo, Mohammed ibn-Musa al-Khuwarizmi. Egli scrisse due opere di aritmetica e algebra che svolsero un ruolo molto importante nella storia della matematica. Come sottolinea Boyer (si veda [5]) l'opera di al-khuwarizmi segna un regresso rispetto a quella di Diofanto: innanzitutto è di livello più elementare di quello che si riscontra nei problemi diofantei e, in secondo luogo, l'algebra di al-khuwarizmi è del tutto retorica, senza alcuna di quelle forme di abbreviazioni proprie dell'algebra sincopata che si riscontrano nell'Arithmetica di Diofanto o nell'opera di Brahmagupta. Ma l'Al-jabr si avvicina all'algebra elementare moderna più delle opera di Diofanto e di Brahmagupta: esso infatti non tratta difficili problemi di analisi indeterminata, ma presenta un'esposizione piana ed elementare della soluzione di equazioni, specialmente di secondo grado. Gli arabi in generale amavano argomentazioni ben fondate, chiaramente presentate dalle loro premesse alla conclusione, oltre a curare l'organizzazione sistematica della trattazione: sotto tali aspetti né Diofanto, né i matematici indiani erano stati particolarmente brillanti.

La versione latina dell' Al-jabr si apre con una breve formulazione introduttiva del principio del valore posizionale dei numeri; si procede poi a trattare, in sei brevi capitoli, la soluzione dei sei tipi di equazioni formate da tre specifiche quantità: radici, quadrati e numeri. I sei casi di equazione presentati esauriscono tutte le possibilità di equazioni lineari e di secondo grado aventi una radice positiva e sono i seguenti:

1. I quadrati sono uguali alle radici: $ax^2 = bx$
2. I quadrati sono uguali a un numero: $ax^2 = c$
3. Le radici sono uguali a un numero: $ax = c$
4. I quadrati e le radici sono uguali a un numero: $ax^2 + bx = c$
5. I quadrati e i numeri sono uguali alle radici: $ax^2 + c = bx$

6. Le radici e i numeri sono uguali ai quadrati: $bx + c = ax^2$.

In queste forme canoniche i coefficienti sono tutti positivi e i termini appaiono dunque sempre come grandezze additive. Ogni equazione viene sistematicamente ricondotta ad uno dei tipi indicati e, per la risoluzione, si impiegano due operazioni fondamentali: l' *al-jabr* (completamento, riempimento; tradotto in latino con *restauratio*), che corrisponde ad eliminare i termini negativi, aggiungendo termini uguali nei due membri (*regola del trasporto*), e l' *al-muqabala* (messa in opposizione, bilanciamento; latino *oppositio*) che corrisponde alla riduzione dei termini simili nei due membri. Inoltre il coefficiente del termine di secondo grado viene sempre ridotto all'unità, con un'operazione, detta *al-hatt*, che in particolare è applicata nella risoluzione delle equazioni dei tipi 4 e 5. Uno dei punti più importanti e innovativi della trattazione è la ricerca della soluzione algoritmica: cioè il fatto che, per le equazioni di secondo grado, la soluzione si deve esprimere per radicali. Al-Khwarizmi dapprima enuncia, a parole, la regola risolutiva e poi ne fornisce la dimostrazione geometrica, sfruttando l'eredità greca classica. Egli studia l'equazione come oggetto matematico in sé, ne cura la classificazione, il metodo risolutivo e la discussione di ogni caso. Non tiene però mai conto delle soluzioni negative, forse proprio in quanto restava comunque un forte legame con le grandezze geometriche (quindi sempre positive), ravvisabile nelle verifiche, e un ancoraggio ai problemi concreti della vita quotidiana.

Ecco ora in dettaglio un esempio per la risoluzione delle equazioni complete in secondo grado del tipo 4: $x^2 + 10x = 39$, che rappresenta il tipo: "*Radici e quadrati uguali a numeri*". Al-Khwarizmi afferma: "La soluzione è: dividi a metà il numero delle radici, che in questo caso dà 5. Moltiplica questo per se stesso: il prodotto è 25. Aggiungilo a 39, ottenendo 64. Ora prendi la radice di questo, che è 8 e sottrai da questo la metà delle radici, 5; il resto è 3. Questa è la radice del quadrato che cercavi e il suo quadrato è 9."

In notazioni moderne, l'equazione è rappresentabile con $x^2 + px = q$ ed è risolta con la regola

$$x = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}$$

Alle regole risolutive con i radicali, come si è già detto, Al-Khwarizmi fa seguire la dimostrazione geometrica che corrisponde al procedimento noto come "completamento del quadrato". La dimostrazione geometrica si deduce dalla figura riportata di seguito e corrisponde alla seguente trasformazione: $x^2 + 2\frac{p}{2}x +$

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

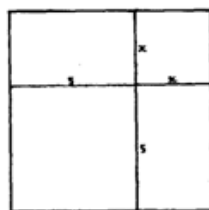


Figura 1

2.7 Il contributo degli europei

I risultati ottenuti dagli arabi arrivarono in Europa attraverso le crociate e gli scambi commerciali. L'algebra di al-Khwarizmi ebbe una grossa influenza sui matematici europei del medioevo, grazie alla traduzione latina fatta da Roberto di Chester e da Gerardo da Cremona. Nel XII secolo colui che ha subito maggiormente questa influenza fu Leonardo Pisano detto il Fibonacci il quale ci ha lasciato, tra le altre, la principale opera di matematica ovvero il Liber Abaci. Tale opera si apre con l'idea che l'aritmetica e la geometria fossero connesse tra di loro e si rafforzassero l'una con l'altra. Nondimeno, il Liber Abaci si interessava più dei numeri che della geometria; esso descriveva le nove figure indiane assieme al segno zero (a Fibonacci va il merito di averlo introdotto per primo in Europa), che in arabo viene chiamato zefiro. Altro merito di Fibo-

nacci è stato quello di introdurre nel mondo europeo la sbarretta orizzontale nelle frazioni (notazione che era già in uso nel mondo arabo), anche se fu solo nel XVI secolo che essa entrò nell'uso generale (la sbarretta inclinata fu suggerita nel 1845 dal matematico inglese A. De Morgan).

Negli ultimi capitoli del Liber Abaci, Fibonacci descrisse dettagliatamente l'uso dell'algoritmo proposto da al-Khuwarizmi, esponendo la solita classificazione araba delle equazioni nei sei tipi elencati precedentemente.

Il XVI secolo, è per la matematica, ricco di grandi algebristi. La più antica algebra rinascimentale è quella del francese Chuquet con il trattato "Triparty", che è dedicato alla soluzione delle equazioni. L'originalità è poca ma compare una novità: viene espresso, per la prima volta, un numero negativo isolato in un'equazione ($4x = -2$).

Il rinascimento è il periodo dell'algebra sincopata, il cui inventore può considerarsi Luca Pacioli, matematico, frate francescano, autore della prima opera generale di aritmetica ed algebra pubblicata a stampa nel 1494: "Summa de aritmetica, geometria, proporzioni et proporzionalità".

Tale opera è considerata il primo trattato di algebra stampata; in essa vengono trattate le tecniche di moltiplicazione ed estrazioni di radici, di risoluzione di equazioni di primo e secondo grado. Sebbene sia priva della notazione esponenziale, presenta un uso di forme abbreviate proprie dell'algebra sincopata: le lettere p ed m al posto del più per l'addizione e del meno per la sottrazione, l'uso di co, ce, ae rispettivamente per: cosa (incognita), censo (quadrato) ed aequalis (uguale). Successivamente, ad opera di Widmann, le lettere p ed m finirono per essere sostituite dai simboli + e -.

Un passo importante per l'abbandono della vecchia classificazione delle equazioni di II grado fu compiuto da Michael Stifel che, nella sua "Aritmethica integra", mediante l'uso di coefficienti negativi nelle equazioni, ricondusse le molteplicità dei casi in un'unica forma del tipo $ax^2 + bx + c = 0$. Egli aveva completa familiarità con i numeri negativi e le loro proprietà, pur non ammettendoli come radici di un'equazione, perché considerati "numeri absurdi".

La figura più eminente in questo periodo di transizione tra rinascimento e mondo moderno fu il francese Viète (1540-1558), che segnò, per alcuni studiosi, il passaggio dall'algebra sincopata all'algebra simbolica, proprio perché fu senza dubbio nel campo dell'algebra che egli diede i suoi contributi più validi. Fino a quel momento il problema principale dell'algebra risiedeva nella mancanza di una notazione specifica, in tal senso un geometra, per mezzo di una figura, era in grado di rappresentare con ABC tutti i triangoli, ma un algebrista non aveva nessun mezzo corrispondente per esprimere tutte le equazioni di secondo grado. "È vero che si erano utilizzate le lettere per rappresentare grandezze note o incognite sin dai tempi di Euclide, ma non si era escogitato nessun mezzo per distinguere le grandezze che si assumeva essere note dalle quantità incognite che si dovevano trovare" [5]. Qui Viète introdusse un principio convenzionale che era tanto semplice quanto geniale: egli utilizzò una vocale per rappresentare una quantità incognita e una consonante per indicare una grandezza che si assumeva come note o determinata. Abbiamo qui per la prima volta nell'algebra una netta distinzione tra l'importante concetto di parametro e l'idea di quantità incognita. Purtroppo Viète era moderno solo per certi aspetti, mentre per altri era ancora fedele alla tradizione antica e medievale. La sua algebra è fondamentalmente sincopata più che simbolica: infatti, sebbene egli saggiamente adottasse i simboli tedeschi per l'addizione e la sottrazione e, ancora più saggiamente, usasse simboli diversi per i parametri e le incognite, per il rimanente usava soltanto alcune frasi e abbreviazioni. La moltiplicazione veniva espressa col termine latino in, la divisione era indicata dalla linea di frazione, e per l'uguaglianza Viète usava un'abbreviazione del latino aequalis. D'altra parte non era possibile che il cambiamento completo fosse opera di un solo uomo; esso venne realizzato per gradi successivi.

Questa breve trattazione storica vuole solo essere uno spunto per il lettore e un punto di partenza per sviluppare alcuni approfondimenti, qualora se ne sentisse la necessità. Essa vuole anche servire per sensibilizzare il lettore, plausibilmente un docente, su quali siano i problemi moderni legati alla comprensione da parte degli studenti della teoria delle equazioni di secondo grado. Per maggiori chiarimenti e ulteriori approfondimenti si rimanda ai testi [5], [6], [7], [8].

3. Percorso didattico: le equazioni di secondo grado.

3.1 Introduzione all'argomento

Per introdurre lo studio delle equazioni di secondo grado, può risultare utile proporre agli studenti un semplice problema-stimolo, che vede l'applicazione dell'argomento da trattare nella vita quotidiana.

Questo problema può essere proposto in un contesto di insegnamento tradizionale, utilizzando attività di cooperative learning informale, che possono seguire una presentazione o una spiegazione da parte dell'insegnante.

In tal modo si sviluppa allo stesso tempo negli alunni abilità sociali di base (come alzarsi senza far rumore con sedie e banchi o dare e chiedere aiuto) e competenze cognitive, che serviranno per affrontare attività organizzate come leggere in modo significativo, riassumere e schematizzare.

Inoltre, si stimola l'apprendimento per scoperta e, allo stesso tempo, si contestualizza e concretizza la tematica da affrontare.

3.1.1 Problema stimolo

In un torneo di calcio, ogni squadra ha giocato con tutte le altre una sola volta e, complessivamente, si sono svolti 6 incontri. Quante sono le squadre che hanno partecipato al torneo?

La soluzione del problema proposto può essere individuata graficamente per "tentativi":

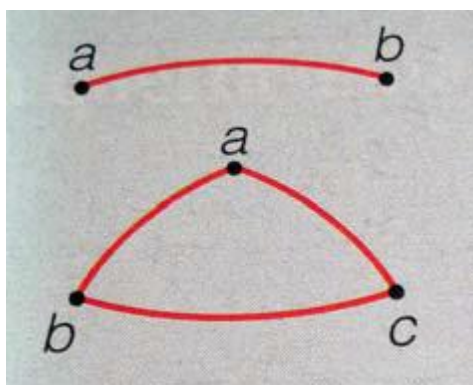


Figura 2

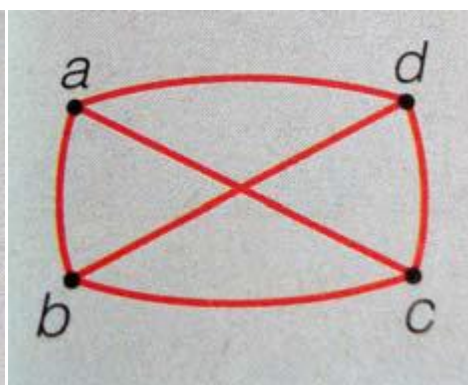


Figura 3

- 2 squadre: 1 incontro
- 3 squadre: 3 incontri
- 4 squadre: 6 incontri

Il modello algebrico del problema, invece, è basato sul seguente ragionamento:

Se x indica il numero delle squadre, ogni squadra incontra le rimanenti $(x-1)$. In tal caso verrebbero svolti $x(x-1)$ incontri nei quali però, ogni incontro è contato due volte (ab, ba, ac, ca, \dots) e quindi:

$$\frac{x(x-1)}{2} = 6$$

Infatti:

$$\text{Per 2 squadre il numero degli incontri è: } \frac{2(2-1)}{2} = 1$$

$$\text{Per 3 squadre il numero degli incontri è: } \frac{3(3-1)}{2} = 3$$

$$\text{Per 4 squadre il numero degli incontri è: } \frac{4(4-1)}{2} = 6$$

Da cui:

$$x^2 - x - 12 = 0 \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$$

L'equazione ottenuta è di secondo grado in x (in quanto il massimo esponente dell'incognita x è 2). Risolvendo tale equazione si determina il numero delle squadre pervenendo allo stesso risultato già ottenuto graficamente.

Con questo semplice ed interessante problema-stimolo si può catturare l'attenzione degli studenti ed il loro coinvolgimento ponendoli di fronte ad un problema non solo matematico ma della loro vita quotidiana. Lo scopo è di far capire loro che ci sono molti altri problemi non puramente matematici che per essere risolti hanno bisogno di equazioni di secondo grado. È pertanto necessario saper risolvere questi tipi di equazioni.

3.2 Presentazione dell'argomento

In questa parte si danno le definizioni formali di equazione di secondo grado e di soluzione di una equazione di secondo grado, ricollegandosi ai concetti già formulati nella definizione delle equazioni di primo grado.

Domanda-stimolo:

Per determinare algebricamente le soluzioni di un'equazione di II grado, si sfrutta dapprima l'approccio intuitivo, proponendo agli studenti di cercare di risolvere, con il solo aiuto degli strumenti finora in loro possesso, l'equazione $x^2 + 10x - 24 = 0$, guidandoli nella risoluzione suggerendo di ricondurre il trinomio ad un quadrato di binomio: è possibile trasformare il trinomio precedente in un'equazione del tipo $(x + A)^2 = B$, dove A e B rappresentano numeri reali?

Si guidano così gli studenti nella risposta, al fine di una maggiore comprensione della successiva trattazione generale.

Formalizzazione:

Allo scopo di determinare algebricamente le soluzioni della generica equazione di II grado, si danno le definizioni di determinante distinguendo i casi in cui esso sia maggiore, minore o uguale a zero.

SCHEMA RIASSUNTIVO:

SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO COMPLETE

Segno del discriminante	Soluzioni	Esempio
$\Delta > 0$	Due radici reali e distinte: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x^2 + 10x - 24 = 0$ $\Delta = 196$ $x_1 = -12, x_2 = 2$
$\Delta = 0$	Due radici reali e coincidenti: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	$4x^2 - 4x + 1 = 0$ $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$
$\Delta < 0$	Non esistono soluzioni reali.	$2x^2 + 3x + 3 = 0$

3.2.1 Risoluzione geometrica col metodo del completamento dei quadrati

La formula generale di risoluzione delle equazioni di secondo grado è ricavata dal metodo geometrico del completamento del quadrato. Questo metodo consiste nel ricondurre, infatti, un polinomio quadratico in una incognita al quadrato di un polinomio di primo grado, utilizzando il prodotto quadratico di un binomio: si modifica l'equazione fino a ottenere al primo membro il quadrato di un binomio nella forma $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Il metodo del completamento del quadrato, oltre alla sua importanza dal punto di vista storico, è utile perché aiuta gli studenti a costruire logicamente i processi algebrici che portano alla formula risolutiva delle equazioni di secondo grado. Presentiamo, dunque, il metodo del completamento del quadrato per risolvere l'equazione: $x^2 + 10x - 39 = 0$ equivalente a $x^2 + 10x = 39$.

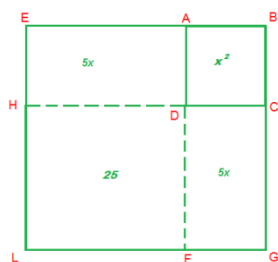


Figura 4

Costruiamo il quadrato ABCD il cui lato AB misura x . Si prolunghino BA e AD di un segmento $AE = DF = 5$ (metà del coefficiente del termine di primo grado $10x$) e si completi il quadrato BELG. La figura EHDFGB ha area $x^2 + 10x$, cioè 39; aggiungendo a questa figura il quadrato HDFL di lato 5, che ha per area 25, si ottiene il quadrato EBGL che ha per area 64 ($25 + 39$). Il lato di questo quadrato è 8, che diminuito di 5 dà il valore cercato dell'incognita, cioè 3. Algebricamente, ciò è equivalente a:

$$(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 = 64 \Rightarrow x + 5 = 8 \Rightarrow x = 3$$

3.2.2 Risoluzione grafica delle equazioni di secondo grado

Presentiamo, infine, la risoluzione grafica di una generica equazione di secondo grado. Le soluzioni di un'equazione di secondo grado possono, infatti, vedersi come le ascisse degli eventuali punti di intersezione tra la parabola associata all'equazione di II grado e l'asse delle ascisse. Sia data l'equazione di secondo grado generica $ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Tale equazione può vedersi come risolvente il sistema:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}$$

che traduce, come già detto, analiticamente il problema di determinare le intersezioni tra la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ e l'asse delle ascisse (la cui equazione è $y = 0$).

Vi sono, dunque, tre possibili casi che possono presentarsi, descritti nelle figure seguenti:

- $\Delta = b^2 - 4ac > 0$: il grafico della parabola interseca l'asse delle ascisse in due punti distinti di coordinate reali, da cui il sistema (e quindi l'equazione di II grado) ha due soluzioni $x_1 \neq x_2$.
- $\Delta = b^2 - 4ac = 0$: il grafico della parabola è tangente all'asse delle ascisse, dunque interseca tale asse in un punto di coordinate reali, da cui il sistema (e quindi l'equazione di II grado) ha due soluzioni coincidenti $x_1 = x_2$. Tale punto di contatto con l'asse delle ascisse corrisponde al vertice della parabola.
- $\Delta = b^2 - 4ac < 0$: il grafico della parabola non interseca l'asse delle ascisse. Le soluzioni del sistema (e quindi l'equazione di II grado) non sono reali.

Nella successiva sezione si analizzeranno alcuni tra i libri di testo maggiormente adottati nei bienni di un liceo scientifico ponendo l'attenzione su come viene trattato in essi l'argomento equazioni di secondo grado. Per ciascuno dei tre testi presentati riporterò una tabella nella quale saranno annotati i punti di forza e le eventuali mancanze di ciascun libro in merito alla descrizione di tale argomento, in modo tale che il lettore possa farsi un'idea critica sulle effettive potenzialità di ciascun testo.

Tali tabelle descriveranno come è organizzato l'argomento in questione (se è suddiviso in più capitoli, se vi sono note storiche, se l'autore utilizza un approccio prettamente algebrico o geometrico, ecc.), quali sono le metodologie didattiche utilizzate (se si fanno riferimenti ad altre discipline o alla realtà e a fatti concreti), quale è il linguaggio con cui l'autore tratta l'argomento, se vi sono esercizi e in che numero, se ve ne sono di svolti, a completamento, a risposta multipla, ecc. , e infine, se vi sono illustrazioni o, comunque, quale è la veste grafica del testo che l'autore e l'editore hanno deciso di adottare.

3.3 Analisi dei libri di testo

“Matematica.blu multimediale”, Bergamini, Trifone, Barozzi, Zanichelli, 2011

Indice e tabella simboli usati	<ul style="list-style-type: none"> • Indice analitico • Tabella dei simboli usati
Organizzazione argomenti	<ul style="list-style-type: none"> • Scansione per capitoli • Approcci algebrico e geometrico • Vi sono note storiche (metodo completamento del quadrato, i babilonesi)
Metodologia didattica	<ul style="list-style-type: none"> • Riferimenti ad argomenti già trattati e ad altre discipline • Vi sono riferimenti alla realtà e alle problematiche reali (All’inizio di un capitolo viene proposto un problema della vita quotidiana che avrà soluzione al termine della trattazione dell’argomento) • Gran numero di esempi
Linguaggio	<ul style="list-style-type: none"> • Semplice senza interpretazioni errate • Linguaggio informatico • Linguaggio geometrico • Uso appropriato dei simboli
Esercizi	<ul style="list-style-type: none"> • Risolti: chiari, di difficoltà crescente, chiari ed esaustivi • Proposti: chiari, di difficoltà crescente, con soluzione, “bravi si diventa”, olimpiadi della matematica, di varia natura (alg, geom, inf) • Esercizi in inglese • Test per l’autovalutazione • No esercizi sotto forma di giochi.
Illustrazioni	<ul style="list-style-type: none"> • Grafici • No Mappe concettuali (diagrammi di flusso) • Colori differenti

“Lineamenti di matematica”, Doderò, Baroncini, Manfredi, Ghisetti e Corvi, 2001

Indice e tabella simboli usati	<ul style="list-style-type: none"> • Indice analitico • Tabella dei simboli usati
Organizzazione argomenti	<ul style="list-style-type: none"> • Scansione per capitoli • Approcci algebrico e geometrico • Non vi sono note storiche
Metodologia didattica	<ul style="list-style-type: none"> • Riferimenti ad argomenti già trattati e ad altre discipline • Non vi sono riferimenti alla realtà e alle problematiche reali • Gran numero di esempi
Linguaggio	<ul style="list-style-type: none"> • Semplice senza interpretazioni errate • Linguaggio informatico • Linguaggio geometrico • Uso appropriato dei simboli
Esercizi	<ul style="list-style-type: none"> • Risolti: chiari, di difficoltà crescente, chiari ed esaustivi • Proposti: chiari, di difficoltà crescente, con soluzione, di varia natura (alg, geom, inf) • Test per l’autovalutazione • Esercizi sotto forma di giochi.
Illustrazioni	<ul style="list-style-type: none"> • Grafici • Mappe concettuali (diagrammi di flusso) • Colori differenti

“Algebra e Algebra due”, Zwirner, Scaglianti, CEDAM, 1999

Indice e tabella simboli usati	<ul style="list-style-type: none"> • Indice analitico • Tabella dei simboli usati
Organizzazione argomenti	<ul style="list-style-type: none"> • Scansione per capitoli • Solo approccio algebrico • Non vi sono note storiche
Metodologia didattica	<ul style="list-style-type: none"> • Riferimenti ad argomenti già trattati • Non vi sono riferimenti alla realtà e alle problematiche reali • Presenta obiettivi specifici di apprendimento per ogni argomento • Gran numero di esempi
Linguaggio	<ul style="list-style-type: none"> • Semplice senza interpretazioni errate • Linguaggio informatico • Linguaggio geometrico • Uso appropriato dei simboli
Esercizi	<ul style="list-style-type: none"> • Risolti: chiari, di difficoltà crescente, chiari ed esaustivi • Proposti: chiari, di difficoltà crescente, con soluzione. • Test per l'autovalutazione • No esercizi sotto forma di giochi.
Illustrazioni	<ul style="list-style-type: none"> • No Grafici • Mappe concettuali (diagrammi di flusso)

3.4 Analisi a priori

Nell'ambito della didattica della matematica, data una situazione o un problema, uno dei punti di partenza è la relativa analisi a priori del problema. Per analisi a priori si intende (si veda [9]) l'insieme di:

1. Rappresentazioni epistemologiche (percorsi conoscitivi in un determinato periodo storico),
2. Rappresentazioni storico-epistemologiche (percorsi conoscitivi sintattici, semantici, pragmatici),
3. Comportamenti ipotizzati.

L'insieme delle rappresentazioni epistemologiche e storico-epistemologiche dà al docente la possibilità di operare scelte, condivisibili e motivate, in termini di competenze e di contenuti da sviluppare.

L'analisi a priori di un particolare problema pone quindi l'accento sull'importanza di saper individuare i problemi di ricerca e le ipotesi necessarie per affrontare il problema in questione e risulta uno strumento efficace per operare delle scelte didattiche significative, in rapporto a contenuti, competenze, attività e verifiche.

In questo senso anche per lo studio del problema didattico relativo alle equazioni di secondo grado è stato necessario operare un'analisi a priori e una successiva analisi a posteriori del problema. Nella prima fase il docente stabilisce quali siano ipoteticamente gli ostacoli epistemologici insiti nell'argomento e prospetta ad un campione di studenti uno strumento di verifica appropriato. In questo caso è stata somministrata alla classe II A del Liceo Scientifico Statale “Stanislao Cannizzaro” la seguente esercitazione, per la quale gli studenti hanno avuto un'ora a disposizione.

Nome: Cognome:

Verifica sulle equazioni di secondo grado
Classe II A

1. Risolvi e rappresenta graficamente le seguenti equazioni:

a. $-3x^2 = 0$

b. $x^2 - 25 = 0$

c. $-2x^2 - 8 = 0$

2. Dopo aver indicato la tipologia, risolvi le seguenti equazioni:

a. $8x^2 - 5x = 0$

b. $x^2 + 6x - 6 = 0$

c. $-4x + x^2 - 21 = 0$

3. Risolvi la seguente equazione:
 $x(x + 1) + 2 = 1$

4. La superficie del balcone di casa di Paolo è rettangolare e misura $3 m^2$. Sapendo che un lato è minore dell'altro di $2 m$, calcola la misura dei due lati.

5. Andrea ha un figlio di nome Giulio e da poco un'altra figlia di nome Sara. L'età di Giulio 6 anni fa era uguale al quadrato dell'età attuale di Sara, mentre adesso è 5 volte l'età di Sara.
Quanti anni hanno Sara e Giulio?

1

Figura 5

Il compito è stato preparato tenendo conto degli ostacoli in cui possono incorrere gli studenti, quando vengono affrontate le equazioni di secondo grado. Si è ritenuto utile articolarlo in 4 parti:

- *Esercizi 1 a. b. c.*
Risoluzione grafica e algebrica di 3 casi particolari di equazioni di secondo grado.
- *Esercizi 2 a. b. c.*
Risoluzione algebrica di 3 equazioni di secondo grado.

- *Esercizio 3*
Risoluzione di un'equazione di secondo grado non scritta in forma normale.
- *Esercizi 4 e 5*
Risoluzione di un problema mediante l'equazione di secondo grado.

Di seguito riporto gli esercizi descrivendoli e presentando le ipotetiche difficoltà che si possono incontrare e le corrette strategie risolutive.

3.4.1 Esercizio 1.

Gli esercizi 1a. 1b. 1c. mirano a osservare se lo studente riconosce che le soluzioni di un'equazione di secondo grado corrispondono alle intersezioni con l'asse x della parabola associata all'equazione proposta.

- Esercizio 1a.
In questo esercizio, che chiede la risoluzione dell'equazione monomia $-3x^2 = 0$, lo studente dovrebbe: riconoscere $x = 0$ soluzione doppia dell'equazione e rappresentare graficamente la parabola $y = -3x^2$ con concavità verso il basso e vertice nell'origine.
È possibile che lo studente determini la soluzione corretta, ma si dimentichi di scrivere che essa corrisponde a due soluzioni reali e coincidenti.
- Esercizio 1b.
In questo esercizio, che chiede la risoluzione dell'equazione $x^2 - 25 = 0$, lo studente dovrebbe: riconoscere $x = \pm 5$ come soluzioni reali e distinte dell'equazione e rappresentare graficamente la parabola $y = x^2 - 25$ con concavità verso l'alto, intersezioni con l'asse x nei punti (5;0) e (-5;0) e vertice (-25;0) sull'asse y.
Nella risoluzione algebrica potrebbe essere dimenticata la soluzione negativa.
- Esercizio 1c.
In questo esercizio, che chiede la risoluzione dell'equazione $-2x^2 - 8 = 0$, lo studente dovrebbe: determinare che l'equazione non ammette soluzione e rappresentare la parabola di equazione $y = -2x^2 - 8$ con concavità verso il basso che non interseca l'asse x.
In questo esercizio la risoluzione algebrica potrebbe influenzare quella grafica.

3.4.2 Esercizio 2.

Gli esercizi 2a. 2b. 2c. mirano a verificare se lo studente sa risolvere algebricamente le equazioni di secondo grado eventualmente utilizzando metodi che permettono di determinare le soluzioni più rapidamente.

- Esercizio 2a.
Questo esercizio chiede di calcolare le soluzioni dell'equazione $8x^2 - 5x = 0$; lo studente dovrebbe raccogliere a fattor comune la x e ottenere le soluzioni $x = 0, x = \frac{5}{8}$.
È possibile che uno studente non si accorga di poter mettere la x a fattore comune e sfrutti mnemonicamente la classica formula di risoluzione delle equazioni di secondo grado.
- Esercizio 2b.
Questo esercizio chiede di calcolare le soluzioni dell'equazione $x^2 + 6x - 6 = 0$ possibilmente tramite il $\Delta/4$. È possibile che lo studente abbia imparato a memoria solo una formula e non consideri l'ipotesi di risolvere l'equazione in altri modi.
- Esercizio 2c.
Questo esercizio chiede di calcolare le soluzioni dell'equazione $-4x + x^2 - 21 = 0$, lo studente potenzialmente dovrebbe ordinarla preliminarmente e quindi determinare le soluzioni $x=7$ e $x=-3$ con il metodo di somma e prodotto.

Uno studente potrebbe affermare che $x=-7$ e $x=3$ sono le soluzioni, riconoscendo -7 e $+3$ come quei due numeri che per somma danno -4 e per prodotto -21 .

Gli studenti, abituati a ricordare mnemonicamente la forma canonica dell'equazione, potrebbero riconoscere i coefficienti non in base al ruolo, ma in base alla loro posizione sequenziale. Probabilmente qualche studente potrebbe non accorgersi che l'equazione è disordinata e la risolve con la formula classica con $a=-4$, $b=2$, $c=-21$.

3.4.3 Esercizio 3.

L'esercizio chiede di risolvere l'equazione $x(x+1)+2=1$. Lo studente dovrebbe eseguire la moltiplicazione e scrivere l'equazione di secondo grado in forma canonica e determinare che essa non ha soluzione.

Lo studente, abituato a considerare un'equazione di secondo grado solo come quell'equazione nella forma $ax^2+bx+c=0$, potrebbe riscontrare difficoltà nel vedere un'equazione nella forma data dall'esercizio, e possibilmente sbagliare, eseguendo i passaggi come questi:

$$\begin{aligned}x(x+1) &= -1 \\x = -1, x+1 &= -1 \\x = -1, x &= -2\end{aligned}$$

3.4.4 Esercizio 4.

Con questo problema lo studente dovrebbe ottenere che l'equazione di secondo grado associata al calcolo di uno dei lati del balcone è $x^2-2x-3=0$ che ammette come soluzioni $x=3$ e $x=-1$, escludere $x=-1$ dalle soluzioni del problema, dato che le lunghezze dei lati non possono essere negative e calcolare la lunghezza dell'altro lato sottraendo 2 a 3. In questo problema qualche studente potrebbe non escludere la soluzione negativa.

3.4.5 Esercizio 5.

In questo problema, come in quello precedente si chiede di tradurre in linguaggio algebrico un quesito scritto in linguaggio comune, ma in questo caso lo studente dovrebbe determinare l'equazione: $x^2-5x+6=0$, che ammette due soluzioni $x=2$ e $x=3$ e capire che Sara e Giulio possono avere rispettivamente sia 2 e 10 anni, che 3 e 15 anni.

3.5 Analisi a posteriori

Dopo la prima fase inerente all'analisi a priori si passa alla successiva analisi a posteriori del problema in cui si interpretano, anche statisticamente, gli errori commessi dagli studenti e si cerca di trovare delle strategie didattiche alternative.

Sabato 18 Maggio 2013 il compito è stato somministrato dalla dott.ssa Federica Catanese nella classe II A del Liceo Scientifico Statale "S. Cannizzaro". Gli studenti presenti erano 23 su 25 totali.

Da una prima analisi degli elaborati degli studenti, si può notare che gli esercizi che hanno messo più in difficoltà gli studenti sono stati l'1 c) il 2 b) e i due problemi, ovvero quegli esercizi che richiedono uno sforzo maggiore dello studente. In questi esercizi lo studente non può risolvere il quesito solo svolgendolo utilizzando le regole che conosce, bensì deve richiamare competenze che avrebbe dovuto acquisire nel corso dell'intero biennio, come quella di estrarre correttamente la radice quadrata di un numero e operare con le 4 operazioni elementari.

Di seguito elenco gli errori eseguiti dagli studenti per ciascun esercizio.

Esercizio	Corretto	Non corretto	Non eseguito
1 a) $-3x^2 = 0$	14	7	2
1 b) $x^2 - 25 = 0$	13	9	1
1 c) $-2x^2 - 8 = 0$	6	16	1
2 a) $8x^2 - 5x = 0$	13	8	2
2 b) $x^2 + 6x - 6 = 0$	5	16	2
2 c) $-4x + x^2 - 21 = 0$	14	7	2
3) $x(x + 1) + 2 = 0$	20	1	2
Problema 4)	6	14	3
Problema 5)	5	7	11

Figura 6: Studenti che svolgono in modo corretto, non corretto o che non eseguono ogni esercizio.

3.5.1 Esercizio 1.

Nel primo esercizio è stato chiesto di risolvere sia algebricamente che graficamente 3 equazioni. Mediamente la metà degli studenti non esegue la rappresentazione grafica. Nel caso dei primi due esercizi, chi tenta un disegno, nella maggior parte dei casi riesce ad eseguirlo correttamente. Questo non vale per l'ultimo esercizio, in cui solo 2 studenti riescono a disegnare correttamente la parabola di equazione $y = -2x^2 - 8$.

Esercizio	Disegno		
	Corretto	Non corretto	Non eseguito
a	10	3	10
b	11	3	9
c	2	6	15

Figura 7: Studenti che eseguono correttamente, non correttamente o non eseguono il disegno.

Esercizio 1.a)

L'esercizio 1.a) chiede di risolvere l'equazione $-3x^2 = 0$. Soltanto 4 studenti riconoscono $x=0$ come soluzione doppia dell'equazione e rappresentano graficamente la parabola di equazione $y = -3x^2$. Gli errori più comuni che sono stati riscontrati sono i seguenti:

- Molti studenti determinano $x=0$ come soluzione ma non sottolineano che è una soluzione con molteplicità 2.
- Alcuni studenti non distinguono $-3x^2 = 0$ da $-3 + x^2 = 0$ quindi determinano due soluzioni opposte come $x = \pm\sqrt{3}$.
- Alcuni studenti non si accorgono dello stretto legame che c'è tra risoluzione algebrica e geometrica, infatti rappresentano la parabola correttamente, ma poi quando cercano la soluzione dicono che è un valore come $x = \pm\sqrt{3}$

Esercizio 1.b)

L'esercizio 1.b) chiede di risolvere l'equazione $x^2 - 25 = 0$.

13 studenti determinano correttamente le soluzioni e rappresentano correttamente la parabola di equazione $y = x^2 - 25$.

L'errore comune riscontrato nell'esecuzione errata dell'esercizio è stato quello previsto nell'analisi a priori.

Molti studenti dopo aver ottenuto $x^2 = 25$ determinano solamente $x=5$ come soluzione.

Esercizio 1.c)

Questo esercizio è uno di quelli che ha più messo in difficoltà gli studenti, solo 6 di essi riescono a rispondere correttamente.

La maggior parte di essi risolve algebricamente i passaggi fino ad ottenere $x^2 = -4$ ma non riconosce che un numero al quadrato non può essere negativo ed afferma che la soluzione è $x = \pm 2$.

3.5.2 Esercizio 2.

In questo secondo gruppo di esercizi è stato chiesto agli studenti di risolvere esclusivamente da un punto di vista algebrico 3 equazioni.

Esercizio 2.a)

Questo esercizio prevedeva di risolvere l'equazione $8x^2 - 5x = 0$. Tutti gli studenti mettono a fattore comune la x e ottengono l'equazione $x(8x - 5) = 0$. L'errore che viene commesso dagli 8 studenti che non risolvono correttamente l'esercizio consiste nell'applicazione sbagliata della legge di annullamento del prodotto, perché dopo aver messo la x a fattore comune scrivono $8x - 5 = 0$ e quindi $x = \frac{5}{8}$, non riportando la soluzione $x=0$.

Esercizio 2.b)

Questo è un altro degli esercizi che ha riscosso maggiori problemi negli studenti, in quanto se non viene ricordata la formula di risoluzione delle equazioni di secondo grado con il $\Delta/4$, si ottiene come soluzione una frazione algebrica che va semplificata, ed è in questo passaggio che gli studenti sbagliano ed ottengono soluzioni errate.

Esercizio 2.c)

Questo esercizio è stato eseguito correttamente da 14 studenti. I 9 studenti restanti, non hanno commesso errori comuni tra loro, ma possiamo dividerli nel seguente modo:

- 2 non hanno svolto l'esercizio.
- 5 hanno commesso errori di distrazione, come la dimenticanza di un segno o la non divisione per il coefficiente a nel calcolo delle soluzioni.

3.5.3 Esercizio 3.

Questo esercizio è stato svolto correttamente da tutti gli studenti, tranne 2 che non sono arrivati a realizzarlo ed 1 che lo ha eseguito sbagliato.

Questo studente non conosce come si eseguono le operazioni all'interno delle equazioni, probabilmente non capendo neanche la consegna dell'esercizio.

3.5.4 Esercizio 4.

L'esercizio 4 è stato svolto correttamente da 6 studenti.

3 non lo cominciano, gli altri lo impostano correttamente, ma poi spesso non scrivono la soluzione.

3.5.5 Esercizio 5.

L'esercizio 5 è eseguito soltanto da 12 studenti: 5 di essi determinano correttamente la soluzione, gli altri impostano in maniera sbagliata l'esercizio, altri lo risolvono determinandone le soluzioni e poi scegliendone solo una, non rendendosi conto che anche l'altra è valida.

4. Conclusioni

Attraverso l'analisi a posteriori dei risultati raggiunti dal nostro campione di studenti possiamo trarre le seguenti conclusioni che potranno essere di stimolo per i docenti che si accingono a trattare questo argomento in classe.

Uno dei problemi previsto nell'analisi a priori, vale a dire la corrispondenza tra equazione di secondo grado e intersezioni di una parabola con l'asse delle ascisse, è stato ampiamente riscontrato da un'analisi statistica dei risultati del campione; molti studenti non riescono ad avere questa elasticità di passaggio dall'interpretazione algebrica del problema alla corrispondente interpretazione geometrica.

Da un'analisi dei risultati si possono anche vedere quali sono gli errori di natura algebrica più comuni tra gli studenti campione, vale a dire il non riconoscimento di soluzioni con molteplicità due, la non distinzione di espressioni algebriche simili ma di natura completamente differente ($-3x^2 = 0$ con $-3 + x^2 = 0$ per esempio) e il non sapere risolvere semplici equazioni di secondo grado pure come per esempio $x^2 = 25$, per la quale molti studenti trovano solo la soluzione $x = 5$.

Per contro il suddetto test ha rilevato buone capacità degli studenti nell'eseguire scomposizioni algebriche come per esempio il raccoglimento a fattore comune.

Un discorso a parte meritano gli ultimi due problemi del compito che non vengono risolti, o risolti in maniera errata, dalla maggior parte degli studenti. Si evidenzia dunque un non saper trasformare un problema pratico della vita reale in equazione di secondo grado; molti studenti ancora dissociano ancora la matematica dalla vita quotidiana. È importante quindi che i docenti interpretino questi risultati e trovino delle strategie didattiche alternative che permettano agli studenti di superare questi limiti insiti nel loro bagaglio di competenze.

Questo lavoro si presta per un possibile riutilizzo da parte di altri docenti che si accingono a spiegare ai loro studenti questo argomento. In questo modo essi potranno avere sottomano tutte le difficoltà per gli studenti connesse allo studio delle equazioni di secondo grado e potranno rielaborare il loro percorso didattico alla luce delle difficoltà evidenziate.

Ringraziamenti

Voglio ringraziare le dottoresse Rachele Barresi e Federica Catanese per il prezioso apporto dato alla realizzazione di tale lavoro.

Bibliografia e sitografia

- [1] Guggenbuhl L. "Mathematics in ancient Egypt: a checklist", The Mathematics teacher, 58, 1965, pp.630-634.
- [2] Neugebauer O. "The exact sciences in antiquity" Cap 2 par. 20 (traduzione italiana "Le scienze esatte nell'antichità", Feltrinelli, Milano, 1974).
- [3] Heath T.L. "Diophantus of Alexandria", pp.144-145.
- [4] Colebrooke H.T. "Algebra, with arithmetic and mensuration, from the Sanscrit of Brahamagupta and Bhaskara", 1817.
- [5] Boyer C. "Storia della matematica", Mondadori, Milano 1980.
- [6] Kline M. "Storia del pensiero matematico", Einaudi, 1991.
- [7] Franci R., Toti Rigatelli L., "Storia della teoria delle equazioni algebriche", Mursia, Milano 1979.
- [8] Maracchia S. "Storia dell'algebra", Liguori, 2005.
- [9] <http://didmat.dima.unige.it/progetti/CNR/palermo/APRIORIA.PDF>

Forza gravitazionale e forza elettrostatica: storia e confronto

Rosario Lo Franco

Dipartimento di Fisica e Chimica, via Archirafi 36, 90123 Palermo, Italy

E-mail: rosario.lofranco@unipa.it

Riassunto. In questo articolo viene proposta un'attività didattica riguardante il confronto tra la forza gravitazionale, ovvero la legge di gravitazione universale di Newton, e la forza elettrostatica, ovvero l'interazione tra due cariche puntiformi scoperta da Charles Coulomb. Inizialmente si introduce uno schema di progettazione didattica, rivolta a studenti del quinto anno di un liceo scientifico, basato su metodologie didattiche standard. Successivamente gli argomenti della proposta vengono trattati in dettaglio, riassumendo i passaggi storici essenziali. Infine, un confronto su scala microscopica e macroscopica dei due tipi di forze è presentato, mettendo in luce analogie e differenze utili ai fini didattici.

1. Introduzione

La Natura è regolata da quattro interazioni (forze) fondamentali tra gli elementi costituenti della materia (atomi, elettroni, protoni e le altre particelle nucleari e subnucleari): interazione gravitazionale, interazione elettromagnetica, interazione debole, interazione forte. L'interazione gravitazionale fu introdotta da Newton a livello teorico con la legge di gravitazione universale tra corpi dotati di massa, mentre l'interazione elettromagnetica venne interpretata da Maxwell come l'interazione unificante dei fenomeni apparentemente diversi di elettricità e magnetismo legati alle proprietà di carica delle particelle elementari [1]. Nel caso di cariche in quiete la forza elettromagnetica si riduce alla forza elettrostatica o di Coulomb. La forza nucleare forte è quella che tiene uniti più protoni in un nucleo atomico ed è responsabile, quindi, della stabilità del nucleo. La forza nucleare debole è responsabile del decadimento beta dei nuclei atomici, associato alla loro radioattività, per il quale un neutrone si trasforma in un protone o viceversa, con emissione di elettroni (radiazione beta) e neutrini [1].

Tra le quattro interazioni fondamentali, quelle che quotidianamente vengono esperite sono la forza gravitazionale, sotto forma della forza peso, e la forza elettromagnetica, sotto forma di tutte le altre forze macroscopiche. Per esempio, le forze di attrito, le tensioni delle funi, le forze elastiche sono manifestazioni complesse di forze elettromagnetiche. Data la loro importanza fondamentale e pratica, la didattica della forza gravitazionale e della forza elettrostatica merita una particolare attenzione. La struttura simile della loro formulazione matematica le rende candidate ideali ad un confronto qualitativo e quantitativo. Inoltre, il percorso storico che ha portato alla loro scoperta e formulazione riveste un'importanza epistemologica strategica nella comprensione del metodo scientifico nella fisica classica. In generale, una didattica che insegni agli studenti i passaggi che conducono a leggi fondamentali della Natura e il ruolo dei diversi scienziati coinvolti in questi passaggi può rivelarsi efficiente per una più profonda comprensione delle leggi stesse. Questo lavoro si inserisce in questo contesto.

Il presente articolo fornisce una proposta didattica rivolta a studenti di quinto anno del liceo scientifico finalizzata all'apprendimento e all'approfondimento della forza gravitazionale di Newton e della forza elettrostatica di Coulomb. Uno schema di progettazione didattica, basato su metodologie standard, è inizialmente fornito che include anche attività di didattica laboratoriale. Successivamente gli argomenti della proposta vengono trattati in dettaglio, riassumendo i passaggi storici essenziali che condussero alla scoperta dei due tipi di forze. Attenzione particolare è data infine alle loro analogie e differenze sia qualitative che quantitative in contesti microscopici e macroscopici.

2. Schema di progettazione didattica

In questa sezione viene articolata la proposta didattica sullo studio della forza gravitazionale e della forza elettrostatica sotto forma di uno schema di progettazione basato su metodologie didattiche standard [2].

2.1. Obiettivi educativi generali

Gli obiettivi educativi generali, quindi trasversali e non prettamente disciplinari, sono i seguenti: i) sviluppare le capacità di tipo critico; ii) potenziare le capacità di analisi, sintesi e confronto; iii) acquisire il gusto di sapere e di fare; iv) potenziare la collaborazione con i compagni e con i docenti; v) riflettere sull'origine storica delle scoperte scientifiche; vi) acquisire gli elementi essenziali della metodologia scientifica di ricerca.

2.2. Caratteristiche e prerequisiti degli studenti a cui è rivolta la proposta

La proposta didattica è rivolta a studenti del quinto anno di un liceo scientifico. I prerequisiti e i contenuti di riferimento che gli studenti devono conoscere sono: basi di meccanica classica; moto circolare uniforme; basi di elettrostatica; espressioni algebriche; concetto di ordini di grandezza.

2.3. Obiettivi specifici

Gli obiettivi generali, quindi disciplinari e legati agli argomenti trattati, sono i seguenti: i) riconoscere la forza di attrazione gravitazionale di Newton; ii) riconoscere la forza elettrica di Coulomb; iii) conoscere il significato di legge dell'inverso del quadrato della distanza; iv) conoscere l'origine storica della legge di gravitazione universale; v) conoscere l'origine storica della forza elettrostatica; vi) riconoscere analogie e differenze tra forza gravitazionale e forza elettrica; vii) confrontare quantitativamente la forza gravitazionale e la forza elettrica.

2.4. Tempistica, strategie didattiche e materiale

Il tempo di realizzazione previsto della proposta didattica è 3 ore. Le strategie didattiche utilizzate per lo svolgimento dell'attività sono: lezione partecipata sotto forma di piccolo seminario, *cooperative learning* e didattica laboratoriale.

Il materiale necessario per lo svolgimento dell'attività è costituito in un proiettore (o LIM) ed un computer per la visione di una presentazione didattica (lezione partecipata sotto forma di piccolo seminario) e per la visione di filmati dove viene mostrata la verifica sperimentale della formulazione matematica delle forze gravitazionale ed elettrostatica. Se disponibile in laboratorio, la bilancia a torsione dotata di corpi sferici e sfere cariche può essere utilizzata per la verifica delle forze con la partecipazione diretta degli studenti.

2.5. Svolgimento dell'attività

Cosa deve fare l'insegnante. L'insegnante presenta inizialmente, con una lezione partecipata caratterizzata da un piccolo seminario di circa 30 minuti, gli argomenti della proposta. Si inizia, per ragioni storiche, con la forza gravitazionale, dandone l'espressione esplicita e poi chiedendosi come si è arrivati ad essa. Quindi, si racconta il percorso storico che va da Hooke a Newton fino a Cavendish, "sceneggiato" anche facendo leggere agli studenti le frasi dei protagonisti. Il seminario continua poi con la parte dedicata alla forza elettrica, strutturata come prima: si dà la sua espressione matematica e poi si attraversa il percorso storico che ha portato ad essa. Il seminario si chiude con la parte dedicata al confronto tra i due tipi di forza, evidenziandone analogie, differenze e intensità relative. La parte storica così proposta dovrebbe affascinare gli studenti verso gli argomenti trattati, facendogli apprezzare che prima di giungere ad una legge fisica "universalmente" riconosciuta possono esserci anni di lavoro, di discussioni e confronti, anche bizzarri ed energici, con altri scienziati.

Dopo il seminario, l'insegnante darà inizio ad una sessione sperimentale. L'esperimento di verifica della forza gravitazionale e della forza di Coulomb è complesso e richiede strumentazione raffinata e costosa (come la bilancia a torsione). Pertanto, se la strumentazione è disponibile in laboratorio, l'insegnante realizzerà egli stesso un esperimento di classe che verrà analizzato a gruppi dagli studenti. In alternativa, nel caso in cui la strumentazione non dovesse essere disponibile, l'insegnante proporrà la visione di un filmato in cui sono realizzati gli esperimenti e lascerà sempre analizzare i dati a gruppi di studenti. L'ultima parte di attività è lasciata alla verifica che l'insegnante proporrà mediante una relazione finale di tutta l'attività.

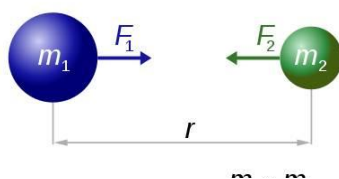


Figura 1. Rappresentazione grafica della forza gravitazionale.

Cosa devono fare gli studenti. Gli studenti partecipano inizialmente al seminario tenuto dall'insegnante, anche in maniera attiva leggendo a turno le frasi degli scienziati coinvolti nel percorso storico che conduce alla scoperta dei due tipi di forze. Il coinvolgimento degli studenti in questa prima fase serve ad una loro migliore attenzione e ad un più efficace apprendimento. Successivamente, essi osserveranno l'esperimento di classe proposto dall'insegnante o guarderanno un filmato dove gli esperimenti sono realizzati, analizzando a gruppi i risultati ottenuti. Infine, scriveranno una relazione personale per la valutazione finale, dove essi dovranno anche mettere in luce il ruolo della matematica come strumento per descrivere fenomeni fisici.

3. Legge di gravitazione universale di Newton

In questa sezione viene analizzata la forza gravitazionale nella sua formulazione newtoniana della legge di gravitazione universale con i passaggi storici che hanno condotto ad essa.

3.1. Formulazione matematica

La legge di gravitazione universale afferma che nell'universo ogni corpo materiale attrae ogni altro corpo materiale con una forza che è direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza. Si tratta di una legge fisica generale derivata per induzione da osservazioni empiriche. Fa parte della meccanica classica ed è stata formulata nell'opera di Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* ("Principia"), pubblicata per la prima volta il 5 luglio 1687 [1, 3]. La sua espressione matematica è (in modulo)

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

dove F è la forza tra le masse, G è la costante di gravitazione universale, m_1 è la prima massa, m_2 è la seconda massa, e r è la distanza tra i centri delle masse. Tale forza è sempre attrattiva e diretta lungo la congiungente i centri dei corpi materiali, come illustrato in Fig. 1. Considerando le unità di misura nel sistema internazionale (SI), F è misurata in Newton (N), m_1 e m_2 in chilogrammi (kg), r in metri (m), e la costante G è approssimativamente uguale a $G = 6,674 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$. Ma come si è arrivati a questa legge fisica e come si è trovato il valore della costante G ? Nel seguito si risponde a queste domande.

3.2. Hooke vs Newton

Verso la fine degli anni 1660, l'ipotesi di una proporzionalità inversa tra gravità e il quadrato della distanza era abbastanza comune ed era stata avanzata da un certo numero di persone per motivi diversi. Robert Hooke (Freshwater, 18 luglio 1635–Londra, 3 marzo 1703) diede un contributo significativo avanzando l'idea della "composizione dei moti celesti" e convertendo il pensiero di Newton dalla forza centrifuga alla forza centripeta. Nel 1686, quando il primo libro di Newton "Principia" fu presentato alla Royal Society, Robert Hooke accusò Newton di plagio, sostenendo che egli aveva preso da lui la "nozione" de "la regola della diminuzione della Gravità, agendo essa in modo reciproco come i quadrati delle distanze dal centro". Allo stesso tempo (secondo un resoconto dell'epoca di Edmond Halley), Hooke ammetteva che "la dimostrazione delle curve del moto con ciò generate" era completamente di Newton [1, 3].



Figura 2. Ritratti di Robert Hooke (a sinistra) e di Isaac Newton (a destra).

Robert Hooke pubblicò le sue idee sul "Sistema del Mondo" quando lesse alla Royal Society il 21 marzo 1666 un documento "Sulla gravità", "riguardante la flessione di un moto diretto in una curva da parte di una sopravveniente azione di attrazione", e le pubblicò nuovamente sotto forma più sviluppata nel 1674, come "Tentativo di Dimostrare il Moto della Terra dalle Osservazioni". Hooke annunciò nel 1674 che aveva progettato di "spiegare un sistema del mondo diverso da qualsiasi altro fino allora conosciuto", basato su tre "Supposizioni" [4, 5]: i) che «tutti i corpi celesti indistintamente hanno un'attrazione o forza che gravita verso i propri Centri» e che "essi attirano anche tutti gli altri Corpi Celesti che si trovano nella sfera della loro influenza»; ii) che «tutti i corpi di qualsiasi tipo che vengono messi in un moto diretto e semplice, continueranno così ad andare avanti in linea retta, fino a quando non verranno deviati e piegati da qualche altra forza efficace...»; iii) che «queste forze attraenti sono tanto più potenti nell'operare, quanto più vicino ai propri Centri si trova il corpo sul quale agiscono». Così Hooke postulava chiaramente mutue attrazioni tra il Sole e i pianeti, in un modo che aumentava con la vicinanza al corpo attraente, insieme con un principio di inerzia lineare.

Le dichiarazioni di Hooke fino al 1674 non facevano menzione, tuttavia, a una legge dell'inverso del quadrato che si applica, o potrebbe applicarsi, a queste attrazioni. Inoltre, la gravitazione di Hooke non era ancora universale, anche se si avvicinava all'universalità più da vicino delle ipotesi precedenti. Egli, inoltre, non fornì ulteriori prove o dimostrazioni matematiche. Fu in seguito, il 6 gennaio 1679 in uno scritto a Newton, che Hooke comunicò la sua «ipotesi ... che l'Attrazione è sempre in una proporzione duplicata alla Distanza dal Centro Reciproco...».

3.3. Opera di Newton

Nel maggio 1686 Isaac Newton (Woolsthorpe-by-Colsterworth, 25 dicembre 1642 –Londra, 20 marzo 1727) negò che Hooke dovesse essere accreditato come autore dell'idea. Tra le ragioni addotte, Newton ricordò che l'idea era stata discussa con Sir Christopher Wren precedentemente alla lettera di Hooke del 1679. Inoltre, Newton riconobbe la priorità del lavoro di altri, tra cui Bullialdus (che suggerì, senza dimostrarlo, che ci fosse una forza attrattiva dal Sole in proporzione inversa al quadrato della distanza) e Borelli (il quale suggerì, senza dimostrarlo, che c'era una tendenza centrifuga a controbilanciare un'attrazione gravitazionale verso il Sole, così da far muovere i pianeti lungo ellissi) [1, 4]. Newton inoltre difese il suo lavoro sostenendo che, se anche avesse sentito Hooke parlare di proporzione inversa del quadrato, egli avrebbe ancora dei diritti derivanti dalle sue dimostrazioni circa l'accuratezza dell'idea. Secondo Newton, prima della pubblicazione dei Principia, c'erano a priori tante ragioni per dubitare della precisione della legge che «senza le mie (di Newton) dimostrazioni, alle quali il signor Hooke è estraneo, un Filosofo giudizioso non poteva credere che fosse precisa dappertutto». Questa osservazione si riferisce alla scoperta di Newton, supportata da dimostrazione matematica, che se la legge dell'inverso del quadrato si applica a piccole particelle (corpi in caduta libera sulla superficie della Terra), allora anche una grande massa sferica simmetrica attrae masse esterne alla sua superficie, anche da molto vicino, proprio come se tutta la propria massa fosse concentrata nel suo centro. Così Newton dava una giustificazione, altrimenti mancante, per applicare la legge dell'inverso del quadrato a grandi masse sferiche planetarie come se fossero piccole particelle. Alcuni manoscritti di Newton degli anni 1660 dimostrano che egli era arrivato a provare che, nel caso di moto planetario circolare, 'il tentativo di recedere' (chiamato in seguito forza centrifuga) aveva un rapporto di inverso del quadrato con la

distanza dal centro. Dopo il suo carteggio con Hooke degli anni 1679-1680, Newton adottò il linguaggio di forza verso l'interno o forza centripeta.

Secondo lo studioso di Newton J. Bruce Brackenridge, anche se molto è stato fatto nel cambiamento di linguaggio e di punti di vista tra forza centrifuga e centripeta, i calcoli reali e le prove sono rimasti gli stessi in entrambi i modi. Essi implicavano anche la combinazione di spostamenti tangenziali e radiali, a cui Newton stava lavorando già dal 1660. La lezione e l'influenza di Hooke su Newton, anche se significativa, era di prospettiva e non cambiava l'analisi. Questo sottofondo è la causa maggiore che portava Newton a dire che c'erano validi motivi per negare la paternità di Hooke sulla legge dell'inverso del quadrato [3, 5].

Leggenda vuole che la famosa mela "newtoniana" fornì la prima ispirazione per la formulazione della legge di gravitazione universale di Newton. Per la derivazione della legge, Newton suppose che i pianeti si muovessero in orbite circolari, che per la maggior parte dei pianeti è una buona approssimazione. Lo scopo era dimostrare che la forza di attrazione tra i corpi celesti (terra-luna, sole-pianeti) responsabile delle loro orbite, fosse anche responsabile del comportamento dei corpi in caduta vicino alla superficie della terra. Newton postulò che una forza chiamata gravità era responsabile di entrambi i moti. Il suo problema, quindi, fu quello di tentare di determinare la legge vigente. Il suo metodo coinvolge un confronto tra i movimenti della luna attorno alla terra e un oggetto (la mela) che cade verso la terra (la gravità è quindi sempre quella terrestre). Dal momento che né la mela né la luna si muovono in linea retta a velocità costante, ciascuna di esse deve essere sottoposta ad un'accelerazione. Bisogna quindi determinare le accelerazioni della luna e della mela.

Fatti noti circa il moto di caduta della mela e il moto della luna attorno alla terra.

Fatto 1. Accelerazione della mela (misurata): $a_{\text{mela}} = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Fatto 2. Raggio della terra (misurato): $R_T = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$

Fatto 3. Distanza terra-luna (misurata): $R_{\text{luna}} = 3.84 \times 10^8 \text{ m}$.

Fatto 4. La luna compie un giro completo attorno alla terra in 27.3 giorni.

Si possono calcolare la lunghezza dell'orbita lunare C_{luna} e la velocità della luna lungo l'orbita v_{luna} .

Calcolo 1: $C_{\text{luna}} = 2 \pi R_{\text{luna}} = 2 \pi (3.84 \times 10^8) = 2.413 \times 10^9 \text{ m}$.

Calcolo 2: $v_{\text{luna}} = C_{\text{luna}} / (27.3 \times 24 \times 60 \times 60) = 1019 \text{ m/s}$.

Dal momento che la luna è in un'orbita quasi circolare intorno alla terra, il suo moto può essere approssimato come circolare. Pertanto, l'accelerazione della luna è una accelerazione centripeta la cui formula è stata scoperta da Christian Huygens nel 1657: $a_{\text{luna}} = v_{\text{luna}}^2 / R_{\text{luna}}$. Da qui risulta: $a_{\text{luna}} = v_{\text{luna}}^2 / R_{\text{luna}} = 2.704 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$.

Newton postulò che la forza di attrazione tra la terra e la mela o fra la terra e la luna dovesse dipendere dalla distanza misurata dal centro della terra al centro della mela o dal centro della terra al centro della Luna. Conosciamo già la distanza dal centro della terra al centro della Luna data da R_{luna} . La distanza dal centro della terra al centro della mela è data dal raggio della terra $R_{\text{mela}} \approx R_T$ (trascurando il raggio della mela).

Mela: $a_{\text{mela}} = 9.8 \text{ m/s}^2$, $R_{\text{mela}} = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$.

Luna: $a_{\text{luna}} = 2.704 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$, $R_{\text{luna}} = 3.84 \times 10^8 \text{ m}$.

Si nota che all'aumentare della distanza R tra i corpi, l'accelerazione a causata dalla gravità terrestre diminuisce. Ciò implica una proporzionalità inversa di qualche tipo, per esempio: $a_{\text{luna}}/a_{\text{mela}} \propto R_T/R_{\text{luna}}$. Ma Newton (così come noi adesso) trovò che i due rapporti non sono uguali:

$$\frac{a_{\text{luna}}}{a_{\text{mela}}} = 2.76 \times 10^{-4} \neq \frac{R_{\text{mela}}}{R_{\text{luna}}} = 1.66 \times 10^{-2}.$$

Ma elevando al quadrato il rapporto delle distanze si ottiene un valore che Newton definì *pretty nearly* al rapporto tra le accelerazioni:

$$\frac{a_{\text{luna}}}{a_{\text{mela}}} = 2.76 \times 10^{-4} \approx \left(\frac{R_{\text{mela}}}{R_{\text{luna}}} \right)^2 = 2.75 \times 10^{-4}.$$

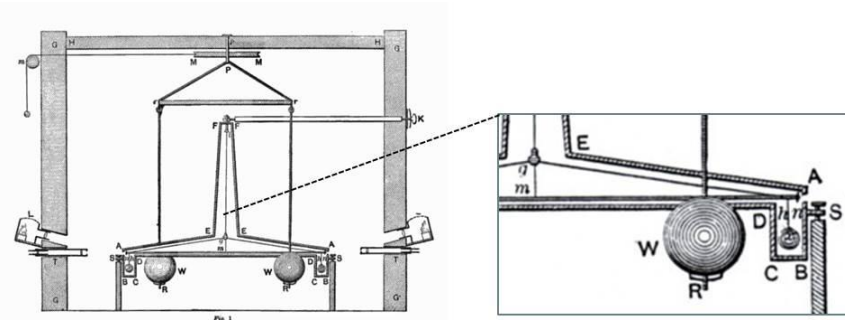


Figura 3. Illustrazione della bilancia a torsione realizzata da Cavendish.

Così, nel 1678 Newton concluse che la gravità varia tra la terra e la mela e tra la terra e la luna come una legge dell'inverso del quadrato: $a_g = k / r^2$. Bisogna tener presente che questo è un calcolo approssimato, poiché la luna non ruota circolarmente attorno al centro della terra, ma terra e luna ruotano attorno al loro centro di massa, situato a circa 1000 Km sotto la superficie terrestre.

A questo punto, mancano pochi passi alla formulazione della legge di gravitazione. Se una forza attrattiva da un corpo di massa m_1 agisce su un corpo di massa m_2 , questa forza deve essere proporzionale alla massa m_1 . Tuttavia, anche il corpo di massa m_2 esercita a sua volta una forza attrattiva sul corpo di massa m_1 e questa forza deve essere proporzionale alla massa m_2 . Poiché entrambe le forze sono le stesse, segue che la forza di attrazione deve essere proporzionale a entrambe le masse: $F = m_1 a_1 = m_2 a_2$. Essendo $a_i = k_i / r^2$ ($i = 1, 2$), allora: $m_1 k_1 = m_2 k_2 \Rightarrow k_i = G m_j$ ($i \neq j$; $i, j = 1, 2$), dove si è introdotta la costante di proporzionalità G . Quindi si ottiene la forza gravitazionale universale: $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$, dove G è la costante universale.

3.4. Disagio di Newton sulla legge

Mentre Newton fu in grado di formulare la legge di gravità nella sua monumentale opera, egli era profondamente a disagio con il concetto di "azione a distanza", che le sue equazioni implicavano. Nel 1692, nella sua terza lettera a Bentley, scrisse: "Che nel vuoto un corpo possa agire a distanza su di un altro senza la mediazione di qualsiasi altra cosa, per mezzo e attraverso la quale la loro azione e la loro forza possano essere trasferite dall'uno all'altro, è per me un'assurdità così grande a cui, credo, nessun uomo con competenze in questioni filosofiche potrebbe mai credere". Egli non riuscì mai, secondo le sue parole, "a stabilire la causa di questa forza". In tutti gli altri casi, egli usò il fenomeno del moto per spiegare l'origine delle varie forze che agiscono sui corpi, ma nel caso della gravità non fu in grado di identificare sperimentalmente il moto che produce la forza di gravità. Nel *General Scholium* di Newton del 1713 nella seconda edizione del Principia: «Non sono stato in grado finora di scoprire la causa di queste proprietà della gravità e "hypotheses non fingo" ... È sufficiente che la gravità esista davvero e agisca secondo le leggi che ho spiegato, e che serva a tenere conto di tutti i moti dei corpi celesti».

Il problema dell'azione a distanza legato alla legge di Newton è stato successivamente risolto dalla teoria di Einstein della relatività generale [1, 3]. Tuttavia la forza gravitazionale di Newton continua ad essere utilizzata come un'eccellente approssimazione degli effetti della gravità. La relatività è richiesta quando c'è bisogno di estrema precisione, o quando si tratta di gravitazione per oggetti di notevole massa e densità [1].

3.5. Il valore della costante universale G

Il valore della costante G è stato accuratamente determinato dai risultati dell'esperimento condotto dallo scienziato scozzese Henry Cavendish (Nizza, 10 ottobre 1731 – Londra, 24 febbraio 1810) nel 1798. Questo esperimento fu anche la prima verifica della teoria della gravitazione di Newton tra masse in laboratorio. Ebbe luogo 111 anni dopo la pubblicazione dei *Principia* di Newton e 71 anni dopo la sua morte, quindi nessuno dei calcoli di Newton poteva utilizzare il valore di G : egli poteva soltanto calcolare il valore di una forza rispetto ad un'altra. Cavendish costruì una bilancia a torsione, attenendosi al piano originale del geologo John Michell (vedi Fig. 3), effettuò una serie di misurazioni con l'apparecchiatura e ne riferì i risultati nel *Philosophical transactions of the Royal Society* nel 1798 [1].

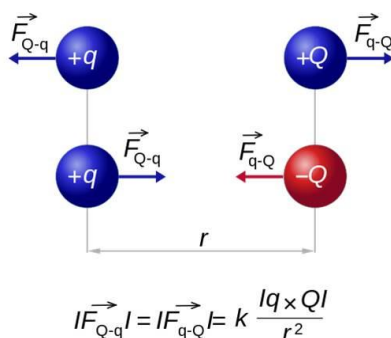


Figura 4. Illustrazione della forza elettrostatica di Coulomb.

4. Forza elettrostatica di Coulomb

In questa sezione viene analizzata la forza elettrostatica in modo analogo a quanto fatto per la forza gravitazionale. Si inizia con la sua formulazione matematica e si prosegue con la trattazione del percorso storico che ha condotto ad essa.

4.1. Formulazione matematica

La forza elettrostatica è descritta dalla legge di Coulomb e definita come la forza esercitata dal campo elettrico la cui sorgente è dunque la carica elettrica. Si tratta della forza che agisce tra oggetti elettricamente carichi, ed è operativamente definita dal valore dell'interazione tra due cariche elettriche puntiformi e ferme nel vuoto. Si tratta di una legge fisica generale derivata per induzione da osservazioni empiriche. La formulazione della legge di Coulomb è stata pubblicata per la prima volta nelle *Mémoire sur l'Électricité et le Magnétisme* nel 1785. In linguaggio moderno si dice che la forza tra due cariche è proporzionale al prodotto dei loro valori e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza, ed è diretta come la congiungente delle due cariche. Si tratta di una forza repulsiva nel caso le cariche abbiano segno uguale, attrattiva altrimenti, come illustrato in Fig. 4. L'espressione matematica della forza di Coulomb è (in modulo) [1, 3]

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

dove q_1 e q_2 sono le due cariche elettriche (positive o negative), r è la distanza tra le cariche e k è la costante di Coulomb. La forza è repulsiva se le cariche hanno lo stesso segno e attrattiva se hanno segno opposto. Considerando le unità di misura nel sistema internazionale (SI), F è misurata in Newton (N), q_1 e q_2 in Coulomb (C), r in metri (m), e la costante k è approssimativamente uguale a $k = 8.99 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$. Ma come si è arrivati a questa legge fisica e come si è trovato il valore della costante k ? Nel seguito verrà data risposta a queste domande.

4.2. Cenni sull'origine della carica elettrica

Gli antichi greci avevano osservato che l'ambra, strofinata con uno straccio di lana, era in grado di attirare corpi leggeri come pagliuzze o segatura. Allo stesso modo una bacchetta di plastica strofinata con un panno di lana attira piccoli pezzi di carta. Nel XVII secolo l'inglese W. Gilbert chiamò fenomeni elettrici quei fenomeni di cui sembrava essere responsabile l'ambra e chiamò elettrizzate le sostanze che sono in grado di attirare corpi leggeri. L'elettrostatica qualitativa può essere considerata avere inizio nel XVII secolo con gli studi sulla conduzione e l'induzione elettrica di Stephen Gray (1666 Canterbury, Kent - 1736 London) [1].

4.3. Charles du Fay

Un significativo contributo è stato dato da Charles François de Cisternay du Fay (Parigi, 14 settembre 1698 – Parigi, 16 luglio 1739), famoso per essere stato il primo scienziato ad affermare l'esistenza di un'elettricità positiva ed una negativa. Partendo dagli studi di Stephen Gray sulla conduzione elettrica, Du Fay cominciò a studiare i fenomeni elettrici, aiutato dal prete Jean Antoine Nollet. Gray aveva dimostrato che vi erano materiali capaci di trasportare il cosiddetto fluido elettrico. Partendo da questo, Charles Du Fay osservò che i materiali si potevano caricare elettricamente per strofinio o per induzione, considerando che i corpi così elettrizzati ne potevano attirare o respingere altri. La sua prima ipotesi fu che attiravano materiali senza carica e respingevano quelli elettrizzati. Ma dovette presto abbandonarla dopo aver notato che, sebbene due tubi di vetro elettrizzati si respingessero, quando uno di questi era avvicinato a un bastoncino di resina a sua volta elettrizzato per strofinamento, si verificava una forte attrazione. Charles Du Fay cominciò allora una serie di esperimenti con ogni materiale possibile, alla fine dei quali formulò la teoria secondo cui non esisteva un solo fluido elettrico, ma che ve ne erano ben due, distinti uno dall'altro, come scrisse nel suo lavoro del 1733 dal titolo *A Discourse concerning Electricity* [1, 6]: “Ci sono due distinte elettricità, molto diverse una dall'altra. Una che io chiamo elettricità vetrosa e l'altra elettricità resinosa. La prima è quella del vetro, delle pietre preziose, dei peli di animali, della lana e di molti altri corpi. La seconda è quella dell'ambra, del coppale, della seta, della carta e di un vasto numero di altre sostanze”.

4.4. Benjamin Franklin

Per ben quindici anni le due cariche elettriche mantennero questa nomenclatura. Poi Benjamin Franklin (Boston, 17 gennaio 1706 – Filadelfia, 17 aprile 1790) riprese in mano il lavoro di Du Fay e interpretò correttamente la questione: da allora si parla di cariche positive e negative. Franklin quindi, oltre agli importanti contributi dati con il principio di conservazione della carica e la scoperta del parafulmine, introdusse proprio il “+” e il “-” nella distinzione delle cariche elettriche [1, 6].

4.5. Franz Aepinus

L'elettrostatica quantitativa ha inizio nella seconda metà del XVIII secolo, con i contributi di Franz Ulrich Theodor Aepinus (Rostock, 1724 – Dorpat, 1802). Egli fu autore del *Tentamen Theoriae Electricitatis et Magnetismi* (Saggio sulla teoria dell'elettricità e del magnetismo), pubblicato a San Pietroburgo nel 1759, all'interno del quale si trova il primo tentativo sistematico di applicare il ragionamento matematico ai problemi dell'elettrostatica e del magnetismo [1, 6].

4.6. Joseph Priestley

Un importante contributo all'elettrostatica quantitativa lo diede successivamente Joseph Priestley (Fieldhead, 13 marzo 1733 – Contea di Northumberland (Pennsylvania), 6 febbraio 1804). Nel 1767 venne pubblicato il suo *The History and Present State of Electricity* (700 pagine). La prima parte del testo è una storia dello studio dell'elettricità fino al 1766. La seconda parte è una descrizione di teorie sulla elettricità e suggerimenti per la ricerca futura. Sulla base di esperimenti con sfere cariche, Priestley fu tra i primi a proporre che la forza elettrica seguiva una legge dell'inverso del quadrato, simile alla legge di gravitazione universale di Newton [1, 6]. Tuttavia, egli non generalizzò né approfondì questo aspetto e la legge generale venne poi enunciata dal fisico francese Charles-Augustin de Coulomb nel 1780.

4.6. Charles Coulomb

Charles-Augustin de Coulomb (Angoulême, 14 giugno 1736 – Parigi, 23 agosto 1806) è stato un ingegnere e fisico francese. Con la sua legge, Coulomb è considerato il fondatore della teoria matematica dell'elettricità e del magnetismo: l'unità di misura della carica elettrica, il coulomb, fa riferimento al suo nome. La dipendenza della forza tra corpi carichi sia dalla distanza che dalla carica era già stata scoperta, ma non pubblicata, nei primi anni del 1770 da Henry Cavendish (lo stesso che misurò la costante di gravitazione universale G). Nel 1785, Coulomb pubblicò le sue memorie sull'elettricità e magnetismo in cui ha enunciato e scritto la sua legge [1, 6-9].

In *Premier Mémoire sur l'Électricité et le Magnétisme*, Coulomb descrive «come costruire e utilizzare un equilibrio elettrico (bilancia di torsione) basato sulla proprietà dei fili metallici di avere una forza (di torsione) di reazione proporzionale all'angolo di torsione». Coulomb determinò sperimentalmente anche la legge



Figura 5. Ritratti di (da sinistra verso destra): C. Du Fay, B. Franklin, F. Aepinus, J. Priestley and C. Coulomb.

che spiega come "due corpi elettrizzati dello stesso tipo di energia elettrica esercitano gli uni sugli altri". A pagina 574 si legge: « *Il résulte donc de ces trois essais, que l'action répulsive que les deux balles électrisées de la même nature d'électricité exercent l'une sur l'autre, suit la raison inverse du carré des distances* ». Cioè: « Da queste tre prove si evince che la forza repulsiva che le due sfere - [che erano] elettrificate con lo stesso tipo di elettricità - esercitano l'una sull'altra, segue la proporzione inversa del quadrato della distanza ». In *Second Mémoire sur l'Électricité et le Magnétisme*, Coulomb «determina in base a quali leggi il flusso magnetico e il flusso elettrico agiscono, per repulsione o per attrazione». A pagina 579, egli afferma che la forza di attrazione tra due sfere di carica opposta è proporzionale al prodotto della quantità di carica sulle sfere ed è inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra le sfere, nella forma matematica data in sezione 4.1. Questa pubblicazione risultò essenziale per lo sviluppo della teoria dell'elettromagnetismo. Egli utilizzò una bilancia di torsione, come quella utilizzata da Cavendish, per studiare le forze di repulsione e di attrazione delle particelle cariche. Questa gli permise anche di calcolare il valore della costante k capace di misurare l'intensità della forza tra due cariche elettriche (come in questo caso) grazie all'amplificazione dell'indice di torsione di un filo di quarzo.

5. Confronto tra forza gravitazionale e forza elettrostatica

In questa sezione viene presentato un confronto qualitativo e quantitativo tra le due forze oggetto di studio in questo lavoro.

La legge della gravitazione di Newton assomiglia alla legge di Coulomb delle forze elettriche, usata per calcolare la grandezza della forza elettrica tra due corpi elettricamente carichi. Entrambe sono leggi dell'inverso del quadrato, in cui la forza è inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra i corpi. La legge di Coulomb ha il prodotto di due cariche al posto del prodotto delle masse, e la costante elettrostatica al posto della costante gravitazionale. Entrambe sono forze di azione a distanza e permettono l'introduzione di un campo gravitazionale vettoriale ($\mathbf{g} = \mathbf{F}/m_1$, cioè l'accelerazione di gravità) e di un campo elettrico ($\mathbf{E} = \mathbf{F}/q_1$): pertanto esse sono entrambe forze conservative. Tuttavia, la forza gravitazionale è sempre attrattiva mentre la forza elettrica (di Coulomb) può essere attrattiva o repulsiva in base al segno delle cariche.

Le forze (o interazioni) gravitazionale ed elettrica sono entrambe caratterizzate dal *range* di interazione che per entrambe è, in linea di principio, infinito (dipendono dalla distanza esattamente nello stesso modo). È interessante confrontare quindi l'intensità di queste due interazioni. Per l'effetto della forza elettrica F_e l'unità naturale da considerare è la carica dell'elettrone; per l'effetto della forza gravitazionale F_g si possono prendere le masse del protone e dell'elettrone. Prendiamo quindi il caso di un atomo di idrogeno. In unità SI abbiamo [1]:

$$F_g = 6.67 \times 10^{-11} \frac{(1.67 \times 10^{-27})(9.1 \times 10^{-31})}{r^2} = \frac{1.01 \times 10^{-67}}{r^2}, \quad F_e = 8.99 \times 10^9 \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{r^2} = \frac{2.3 \times 10^{-28}}{r^2},$$

da cui $F_g/F_e = 4.4 \times 10^{-40}$. L'interazione elettrica è molto più intensa dell'interazione gravitazionale (su scala microscopica): la gravitazione deve essere vista come un'interazione molto debole.

Il risultato precedente sembra contrastare con la nostra esperienza quotidiana, ma c'è una spiegazione molto semplice per questo: la forza gravitazionale è solo attrattiva mentre quella elettrica può essere attrattiva o repulsiva (per la presenza di cariche elettriche positive e negative). Questo significa che l'interazione e-

lettrica può essere, per così dire, schermata. Gli oggetti macroscopici presenti nel nostro ambiente sono in larga parte elettricamente neutri e quindi non esercitano alcuna forza elettrica verso l'esterno. La forza gravitazionale non può essere schermata e possiamo correttamente dire che il suo range è infinito. Diversamente, il *range* delle forze elettriche è tipicamente dell'ordine delle distanze atomiche (10^{-10} m). A dispetto della sua "debolezza", l'interazione gravitazionale è preponderante su scala macroscopica e cosmica.

A conclusione di questo paragrafo, in Tabella 1 si riassumono le analogie e le differenze tra la forza gravitazionale e la forza elettrostatica.

Tabella 1. Analogie e differenze tra la forza gravitazionale e la forza elettrostatica.

	Forza gravitazionale	Forza elettrostatica
Analogie	Azione a distanza Conservativa Proporzionale al prodotto dei generatori dell'interazione Proporzionale all'inverso del quadrato della distanza Diretta lungo la congiungente i centri dei generatori	Azione a distanza Conservativa Proporzionale al prodotto dei generatori dell'interazione Proporzionale all'inverso del quadrato della distanza Diretta lungo la congiungente i centri dei generatori
Differenze	Agisce su tutti i corpi Solo attrattiva Debole Lungo raggio Non schermabile Indipendente dal mezzo	Agisce solo su corpi elettrizzati Attrattiva o repulsiva Forte Corto raggio Schermabile Dipendente dal mezzo

6. Conclusioni

In questo articolo è stata presentata una proposta didattica per studenti di liceo scientifico mirata all'approfondimento della forza gravitazionale e della forza elettrostatica da un punto di vista storico e comparativo. La proposta è articolata seguendo metodologie didattiche standard ed è basata sulla convinzione che la conoscenza del percorso storico che conduce alle scoperte scientifiche, trasmesso agli studenti in modo partecipato e sceneggiato seguendo il ruolo degli scienziati coinvolti, permetta una consapevolezza maggiore del metodo scientifico e della legge fisica stessa. Un approccio di questo tipo, dove la conoscenza della storia della fisica relativa alla formulazione della legge di gravitazione universale e della forza elettrica ha finalità didattiche, conduce ad una immediata contestualizzazione delle leggi stesse e quindi ad una più profonda comprensione dell'impatto che la scoperta ha avuto nell'ambito della fisica classica.

Inoltre, è stato fatto un confronto sia qualitativo che quantitativo dei due tipi di forze. Sebbene le due forze abbiano strutture matematiche molto simili, una dettagliata analisi delle loro analogie e differenze consente di apprezzarne le caratteristiche peculiari e il diverso ruolo in base al contesto dimensionale in cui esse sono considerate. Per esempio, sebbene su scala macroscopica e cosmica la forza gravitazionale domina largamente sulla forza elettrostatica, quest'ultima è molto più intensa su scala microscopica. La forza elettrostatica è un'interazione molto più forte di quella gravitazionale, ma ad un'analisi superficiale basata sull'esperienza quotidiana si direbbe il contrario: lo studio comparativo approfondito serve proprio ad evitare tali misconcetti epistemologici.

Ringraziamenti

R.L.F. desidera ringraziare la Prof. Rosa Maria Sperandeo Mineo per le utili e fruttuose discussioni.

Riferimenti bibliografici

- [1] Simonyi, K. (2012). *A Cultural History of Physics*. CRC Press, Taylor & Francis Group.
- [2] www.indire.it; www.istruzione.it.
- [3] Bevilacqua, F. (1983). *Storia della fisica (un contributo all'insegnamento della fisica)*. Angeli editore.
- [4] Turnbull, H. W. (1960). *Correspondence of Isaac Newton, Vol 2 (1676-1687)*. Cambridge University Press.
- [5] Purrington, R. D. (2009). *The First Professional Scientist: Robert Hooke and the Royal Society of London*. Springer.
- [6] Heilbron, J. L. (1979). *Electricity in the 17th and 18th centuries: A Study of Early Modern Physics*. Los Angeles, California. University of California Press.
- [7] Coulomb, C. A. de (1784). *Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion et sur l'élasticité des fils de metal*, Histoire de l'Académie Royale des Sciences, pages 229-269.
- [8] Coulomb, C. A. de (1785). *Premier mémoire sur l'électricité et le magnétisme*, Histoire de l'Académie Royale des Sciences, pages 569-577.
- [9] Coulomb, C. A. de (1785). *Second mémoire sur l'électricité et le magnétisme*, Histoire de l'Académie Royale des Sciences, pages 578-611.

L'epicicloide: un viaggio tra la Storia e la Filosofia

F. Martino

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo
via Archirafi 34, 90123, Palermo (Italia)

E-mail: fabrizio.martino@unipa.it; Tel: 091 23891034

Riassunto. Nel presente articolo si vuole proporre la trattazione didattica di una unità concernente l'epicicloide e le sue numerose applicazioni, dalla fisica all'astronomia, dalla storia alla filosofia alla teologia. Rivolta a degli studenti di terzo anno di liceo scientifico, si vuole stimolare una didattica per scoperta in cui è lo studente stesso l'attore principale del processo di apprendimento, proponendo un approccio di tipo laboratoriale, mediante l'uso del software GeoGebra. Nello specifico, scopo ultimo dell'unità didattica è quello di trasmettere allo studente tutti gli strumenti necessari per renderlo capace di dimostrare autonomamente l'equivalenza geometrica tra il Sistema Tolemaico ed il Sistema Copernicano.

Abstract. In this paper a teaching unit will be shown concerning the epicycloid and its many applications, from physics to astronomy, from history to philosophy and theology. Suggesting a laboratorial approach with the use of the software GeoGebra, we want to incentivize an experiential learning in which the same student is the main actor of the learning process. In particular, the teaching unit's main goal is to give to the student all the needed tools in order to make him able to prove independently the geometric equivalence among Ptolemaic and Copernican Systems.

2010 AMS MSC Classification: 97M10, 97M50

1. Introduzione

Il seguente articolo è tratto dalla relazione finale di Tirocinio Formativo Attivo dell'autore, svolto durante l'anno accademico 2011/2012 all'Università degli Studi di Palermo. Esso si pone come obiettivo principale quello di presentare una possibile unità didattica che tratti l'epicicloide, un particolare esempio di curva matematica che riscontra numerose applicazioni nel mondo naturale, all'interno di un percorso che stimoli lo studente ad un apprendimento per scoperta e che contemporaneamente lo indirizzi verso una didattica di tipo laboratoriale, molto spesso ritenuta superflua da alcuni metodi di insegnamento particolarmente datati.

A tal proposito, l'autore ha scelto un argomento, come l'equivalenza geometrica tra il Sistema Tolemaico ed il Sistema Copernicano, che spesso viene semplicemente trasmesso agli alunni come un semplice *dato di fatto*, mai fornendone una dimostrazione che sia semplice e, allo stesso tempo, la più rigorosa possibile.

In più, partendo dalla definizione di epicicloide, è possibile arrivare ad infiniti spunti di riflessione che coinvolgono le più disparate discipline. Essendo coinvolta nella descrizione delle orbite dei pianeti, è possibile infatti poter spaziare dall'Astronomia alla Filosofia della Scienza, con il concetto di *cambiamento di paradigma*; od ancora dalla Storia, con il quadro socio-politico dei periodi di Nicolò Copernico (1473 – 1543) e di Galileo Galilei (1564 – 1642), alla Filosofia e alla Teologia, con le numerose implicazioni che un cambiamento della portata della Rivoluzione Copernicana comportò all'interno del pensiero filosofico e religioso.

L'articolo consta pertanto di tre parti principali. In particolare, nella prima parte vi è un breve compendio dei vantaggi dell'uso del laboratorio per una disciplina come la Matematica; nella seconda verrà fornito uno schema riassuntivo dell'unità didattica. Infine, nella terza parte, verrà proposta la trattazione didattica vera e propria, comprendente le costruzioni con GeoGebra, una breve introduzione alla Rivoluzione Copernicana ed un interessante esercizio per gli studenti in cui si propone di ricostruire le traiettorie osservate dalla Terra di parte del Sistema Solare.

2. Perché il laboratorio di matematica

Qual è l'utilità di una didattica di tipo laboratoriale?

A questa domanda si può rispondere su vari livelli. Sicuramente il primo e più evidente motivo che fa dell'approccio alla matematica con il laboratorio un mezzo molto più efficace della lezione frontale per il trasferimento di competenze e conoscenze, risiede nel fatto che gli studenti vedono il laboratorio come un momento che spezza la solita routine della didattica scolastica, dominata dalla lezione svolta dal docente in classe tramite l'ausilio del solo libro di testo o, al massimo, della lavagna.

Vi sono però motivi meno evidenti ma assolutamente altrettanto validi per privilegiare il laboratorio della matematica, laddove ve ne sia la possibilità.

Va innanzitutto detto cosa è il laboratorio di matematica. Esso non vuole essere solo un mero luogo fisico diverso dalla classe, quanto più un insieme strutturato di attività volte alla costruzione dei *significati* degli oggetti matematici. Ad esempio, è perfettamente possibile fare laboratorio restando in classe e lavorando con i cosiddetti *materiali poveri*, ottenendo gli stessi benefici a livello didattico di una attività laboratoriale svolta con l'ausilio degli strumenti informatici (per maggiori informazioni, si vedano ad esempio F. Frabboni, *Il Laboratorio* e F. Arzarello, L. Ciarrapico, *Matematica 2003*)

Sta proprio in questa definizione di laboratorio il duplice vantaggio che esso possiede all'interno di un contesto scolastico: da un lato la costruzione di significati è legata agli strumenti utilizzati nelle varie attività, dall'altro essa è connessa alle interazioni tra le persone che si sviluppano durante l'esercizio di tali attività. Ciò si traduce rispettivamente nell'acquisizione delle capacità di padronanza delle varie strumentazioni (siano esse digitali o analogiche) e nello sviluppo e potenziamento delle competenze strettamente correlate con le attività svolte in gruppo, quali ad esempio il sapere collaborare in modo proficuo o l'accettare positivamente le critiche e gli elogi da parte dei propri pari.

Come accennato precedentemente, il laboratorio non deve essere inteso esclusivamente come luogo fisico diverso dalla classe, poiché esistono varie modalità di fare laboratorio che coinvolgono strumentazioni diverse dai supporti tecnologici. Elenchiamo pertanto quali sono i principali tipi di strumenti che possono essere usati e che influenzano direttamente la natura del laboratorio che viene svolto:

- *I materiali poveri*, ossia semplici fogli trasparenti, spilli, forbici o fogli quadrettati e millimetrati, ad esempio sono ottimi strumenti per degli studenti del primo biennio per un laboratorio sullo studio delle isometrie, esplorate attraverso i movimenti che le determinano.
- *Le macchine matematiche*, ossia macchine in grado di generare oggetti come delle curve di particolare interesse (le coniche, la spirale archimedeica, ecc...), inducono dei processi metacognitivi che esplorano il significato degli oggetti matematici in modo più significativo e più ricco rispetto a ciò che verrebbe consentito mediante l'utilizzo dei software di geometria dinamica.
- *I software di geometria*, tra tutti Cabri e GeoGebra, (cfr M. Barbaini, S. Casaroli, *Matematica con Geogebra*) consentono allo studente di fare esperienze, produrre e formulare congetture e validarle con le funzioni messe a disposizione dallo stesso software. In questo modo lo studente impara a osservare e riconoscere "fatti geometrici" ma soprattutto può essere avviato ad un significato di dimostrazione come attività che consente di giustificare, all'interno di una teoria più o meno ben precisata, perché una certa proprietà osservata vale.
- *I software di manipolazione simbolica*, anche detti CAS (Computer Algebra System), sono dei programmi di calcolo che permettono allo studente di analizzare più in profondità l'aspetto algebrico dei problemi matematici pur integrando tra loro i vari ambienti, come quello numerico, simbolico, grafico e di linguaggio di programmazione. Data la loro specificità, i CAS consentono allo studente di analizzare problemi che richiedono una potenza di calcolo non raggiungibile con carta e penna. Ciò svincola il ragazzo dai conti brutali e lo fa concentrare più sugli aspetti concettuali del problema analizzato. Il lettore interessato potrà trovare un interessante esempio di software CAS open source, in cui sono proprio gli utenti ad essere gli attori principali del miglioramento e dell'evoluzione del software stesso in <http://maxima.sourceforge.net/>. Si tratta di *Maxima*, un potente programma di calcolo in grado di eseguire semplificazioni di radici, di polinomi, di funzioni razionali fratte, derivate, integrali, limiti, serie, trasformate; inoltre risolve sistemi, equazioni, equazioni differenziali; disegna grafici 2D e 3D e fa calcolo su matrici e vettori.

- *I fogli elettronici*, non possono essere considerati a tutti gli effetti dei software specifici per la didattica, ma posseggono delle applicazioni, come ad esempio quelle relative alla rappresentazione e l'analisi dei dati, che risultano essere fondamentali in un contesto laboratoriale. In più hanno il grande vantaggio di essere diffusissimi nel mondo del lavoro.
- *Le calcolatrici grafico-simboliche*, ormai addirittura scaricabili come applicazioni negli smartphones di ultima generazione, possono essere considerate come un sunto dei software di geometria, dei CAS e dei fogli elettronici. Dalla loro hanno il grande vantaggio di potere essere utilizzati con agilità e flessibilità.

Come detto precedentemente, la costruzione dei significati degli oggetti matematici è connessa anche alla comunicazione ed alla condivisione delle conoscenze in classe, sia attraverso il lavoro in piccoli gruppi, sia attraverso lo strumento didattico della *discussione matematica*. Tale discussione si dipana su vari livelli.

Un primo livello è quello che si sviluppa ad esempio dopo la lettura del testo di un problema matematico: una discussione incentrata sulla comprensione del testo appena analizzato e sulle possibili strategie di risoluzione. Un secondo livello invece si sviluppa al termine stesso della soluzione del problema: è in questo momento che gli studenti presentano le proprie metodologie di risoluzione e commentano, analizzano e valutano le strategie risolutive dei propri compagni. Il terzo livello di discussione invece riguarda la correttezza, la correttezza e la ricchezza delle soluzioni proposte, la coerenza e l'attendibilità, il livello di generalizzazione adottato.

E' proprio questa discussione, che porta ad un livello maggiore di conoscenza dei contenuti della disciplina, che viene enormemente stimolata e favorita dal laboratorio e dalle sue peculiarità.

3. Lo schema dell'unità didattica

Di seguito viene riportato uno schema riassuntivo dell'unità didattica proposta. Come sarà possibile osservare, si è preferita una programmazione per obiettivi mettendo in particolare risalto gli aspetti legati all'interdisciplinarietà dell'argomento trattato.

Titolo dell'unità: L'epicicloide: un viaggio tra la Storia e la Filosofia

Obiettivi educativi generali:

- Saper interagire positivamente in gruppo.
- Sapere creare collegamenti interdisciplinari.
- Comprendere la molteplicità dei punti di vista.
- Usare software per la risoluzione di problemi matematici.

Studenti a cui è rivolta: Ragazzi del terzo anno di un Liceo Scientifico.

Discipline e contenuti di riferimento:

- *Matematica e Fisica:* geometria euclidea nel piano, moti circolari, sistema eliocentrico, Legge di Gravitazione Universale, Leggi di Keplero, uso del software GeoGebra.
- *Storia:* situazione sociopolitica dell'Europa a cavallo tra il XV ed il XVI secolo.
- *Filosofia:* contrapposizione teologica tra il sistema geocentrico ed il sistema eliocentrico, Galileo Galilei, metodo scientifico.

Obiettivi specifici:

- Lo studente sa costruire l'epicicloide con il software GeoGebra.
- Lo studente conosce le molteplici applicazioni dell'epicicloide.
- Lo studente sa identificare le differenze e le affinità tra il Sistema Tolemaico ed il Sistema Copernicano.
- Lo studente sa elencare i punti salienti della Rivoluzione Copernicana.

Tempi di realizzazione: 8 ore (esclusa la verifica finale)

Strategie didattiche per lo svolgimento dell'attività: Lezione frontale, lavoro individuale, lavoro di gruppo, brainstorming, cooperative learning, discussione e confronto.

Materiale necessario per lo svolgimento dell'attività: PC con il software GeoGebra, libri di testo:

- M. Barbaini, S. Casaroli, *Matematica con GeoGebra*, ed. Principato (2010);
- N. Abbagnano, G. Fornero, G. Burghi, *La filosofia*, vol. 2A – 2B, ed. Paravia (2010);
- A. De Bernardi, S. Guarracino, *Epoche*, vol. 1, ed. Mondadori (2011).

Svolgimento del lavoro: Con un ottica interdisciplinare, i docenti di Matematica, Storia e Filosofia in un primo momento procedono ad un paio di lezioni frontali interattive, di circa 2 ore ciascuno, in cui illustrano agli studenti il background culturale in cui si inquadra lo studio dell'epicicloide. Le restanti 4 ore, suddivise in altrettante 2 lezioni, saranno impiegate per l'attività laboratoriale e per la stesura da parte degli alunni di una scheda di esperienza in cui vengono riassunti i punti principali dell'unità didattica.

Da parte del docente: Durante le quattro ore di lezione interattiva, il docente di Matematica e Fisica illustra agli studenti gli aspetti salienti del moto dei pianeti da un punto di vista meccanico, stimolando il dibattito tra gli studenti mediante brainstorming. Inoltre procede alla definizione matematica dell'epicicloide mettendone in risalto soprattutto il significato cinematico che essa può assumere. Per quanto concerne l'attività laboratoriale, durante la prima lezione di due ore, l'insegnante mostra agli alunni gli strumenti principali del software GeoGebra, guidandoli nella costruzione dell'epicicloide. Successivamente assegna a ciascuno di loro una scheda di lavoro con delle domande stimolo per indurre gli studenti ad una analisi individuale dei parametri caratteristici dell'epicicloide. Durante la seconda lezione di laboratorio (corrispondente ad altre due ore), il docente illustra la costruzione della traiettoria di un pianeta secondo il modello eliocentrico e successivamente suddivide gli studenti in gruppi di massimo 4 persone. Ad ogni gruppo assegna il compito di ricostruire la traiettoria di un dato pianeta nei due sistemi, tolemaico e copernicano. Durante questa fase il suo intervento è minimo e indirizzato solo laddove è strettamente richiesto in modo tale che gli studenti possano risolvere indipendentemente le problematiche che man mano si presentano (tale tecnica didattica prende il nome di scaffolding, si veda ad esempio A. La Marca, *Voler apprendere per imparare a pensare*).

Da parte dello studente: L'attività prevede una prima parte in cui gli studenti vengono stimolati nel dibattito durante la lezione frontale interattiva tramite brainstorming. Il lavoro di laboratorio richiede un primo momento in cui ogni alunno lavora singolarmente e recepisce le nozioni fondamentali per l'uso del software GeoGebra. In un secondo momento i ragazzi lavorano singolarmente, senza l'intervento diretto dell'insegnante, al fine di individuare i parametri fondamentali che modificano sostanzialmente le caratteristiche grafiche dell'epicicloide. Durante la seconda parte, lo studente procede, in gruppi di massimo 4 persone, alla ricostruzione della traiettoria di un dato pianeta, ricavandosi da solo le grandezze fisiche necessarie alla risoluzione del problema.

Verifica degli obiettivi: Al termine dell'unità didattica, ad ogni gruppo verrà affidato il compito di ricostruire il moto di una porzione del Sistema Solare opportunamente scelta: la verifica consisterà nella valutazione della scheda di lavoro concernente tale compito. Un'ulteriore valutazione scaturirà da una verifica orale volta alla valutazione dei contenuti teorici acquisiti.

4. La trattazione didattica

Nel presente paragrafo si vuole proporre un esempio di trattazione didattica dell'epicicloide, analizzando in particolare modo gli aspetti concernenti la matematica, la geografia astronomica e la Rivoluzione Copernicana nei termini dei risvolti filosofici e teologici che essa ebbe nel contesto culturale europeo dell'epoca.

Un percorso multidisciplinare che preveda l'uso di GeoGebra è molto utile ai fini didattici per potere fare "toccare con mano" il cambiamento radicale di punto di vista introdotto da Copernico nel suo *De revolutionibus orbium coelestium*. Un altro punto di forza di questo approccio è sicuramente la possibilità di mostrare agli studenti la perfetta equivalenza tra il sistema geocentrico e quello eliocentrico, avendo un immediato riscontro visivo e senza dover ricorrere a complicate dimostrazioni.

4.1 Il Sistema Tolemaico e la Rivoluzione Copernicana

La trattazione didattica, se vuole essere efficace, non può prescindere dall'integrazione dei concetti matematici e fisici con quelli correlati ai problemi filosofici e teologici che involontariamente sollevò Copernico teorizzando un modello eliocentrico del sistema planetario.

Il percorso prevede pertanto una collaborazione attiva con il docente di Storia e Filosofia e quello di Religione, in modo tale da evidenziare da un lato le implicazioni filosofiche e sociologiche che un cambiamento

di paradigma, come quello proposto da Copernico, ha comportato; dall'altro le problematiche teologiche generate dalla "sparizione" di Dio nella rappresentazione fisica dell'Universo.

Il **sistema geocentrico** (detto anche **aristotelico-tolemaico**) è un modello astronomico che pone la Terra al centro dell'Universo, laddove tutti gli altri corpi celesti ruoterebbero attorno ad essa.

In Occidente esso fu soppiantato fra il XVI ed il XVII secolo dal **sistema eliocentrico**, che poneva invece il Sole al centro dell'Universo. Questo passaggio, noto come Rivoluzione Copernicana segnò l'affermazione del metodo scientifico introdotto da Galileo Galilei e la nascita della scienza moderna.

Secondo Tolomeo (100 ca – 175 ca) i pianeti si trovavano nell'iperuranio (lo spazio "oltre il cielo", cioè sovralunare) ed erano perfetti, pertanto dovevano avere orbite perfette. Dal momento che il cerchio era considerato la forma perfetta, i movimenti dei corpi celesti dovevano essere circolari ed il cosmo doveva essere suddiviso in una serie di sfere concentriche.

La sfera centrale (detta anche sublunare) era occupata dalla Terra e dalla sua atmosfera; essa era l'unica parte "imperfetta" del cosmo, sia perché entro di essa i moti erano rettilinei, sia perché mutevole. Al di fuori di questa sfera ve ne erano altre otto, le prime corrispondenti ai sette pianeti conosciuti (nell'ordine: Luna, Mercurio, Venere, Sole, Marte, Giove e Saturno) e l'ultima alle stelle fisse. Ogni oggetto celeste sarebbe stato "incastonato" nella propria sfera e ne avrebbe quindi condiviso il moto circolare uniforme (perfetto, immutabile ed eterno) attorno alla Terra. In età medievale, i Cristiani aggiunsero anche una nona "sfera", chiamata Primo Mobile e successivamente una decima, che fu chiamata Empireo, luogo nel quale risiedeva Dio.

Ciò però non era pienamente conforme con le osservazioni che andavano facendosi sempre più precise. In particolare, con tale sistema non venivano spiegati i moti retrogradi di Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno: se essi si fossero effettivamente trovati in moto circolare semplice attorno alla Terra, non si sarebbero potute osservare le retrogradazioni che in alcuni momenti dell'anno essi compiono.

Ad esempio, in figura 1 è rappresentato il moto retrogrado di Marte che non rientrava negli schemi del modello tolemaico.

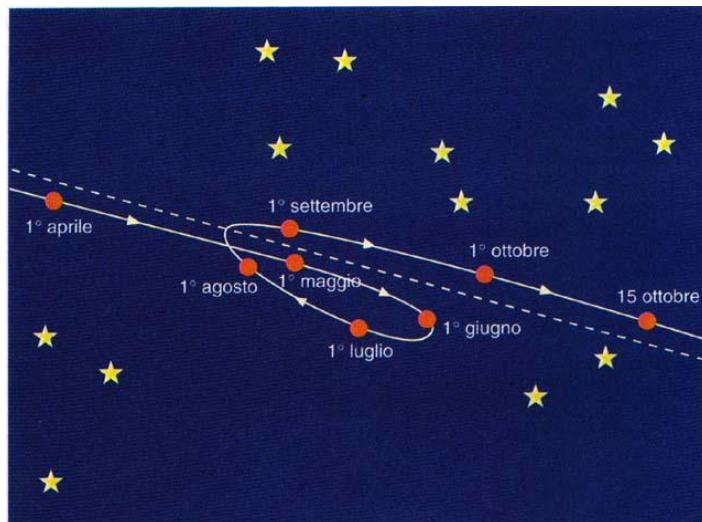


Figura 8 Il moto retrogrado di Marte osservato dalla Terra.

Per ovviare al problema, si suppose che i pianeti in questione si muovessero di moto uniforme su circonferenze, dette **epicicli**, i cui centri si muovevano, sempre di moto uniforme, su altre circonferenze di diametro maggiore, chiamati **deferenti**: la traiettoria di un pianeta che possiede un siffatto moto è proprio un'epicicloide.

Anche se del tutto privo di senso fisico, il sistema tolemaico costituiva una grandiosa costruzione geometrica, capace di rappresentare in modo completo, particolareggiato ed anche quantitativo, tutti gli aspetti del cielo e di prevedere il corso di tutti i pianeti. Il metodo tolemaico era comunque estremamente complicato: erano necessari, in qualche caso, fino a 33 epicicli su epicicli per descrivere le più piccole irregolarità osservate nel moto dei pianeti.

Uno dei motivi che portarono Copernico ad abbandonare il sistema tolemaico fu quindi questa enorme complessità del sistema stesso. Propose pertanto un sistema più semplice, equivalente al precedente, che

spiegasse i moti celesti in modo più lineare e ragionevole: intorno al Sole, immobile, ruotano nell'ordine Mercurio, Venere, la Terra con la Luna, Marte, Giove ed infine Saturno. Tutto intorno si trovano le stelle, immobili, il cui moto diurno rispetto alla Terra è apparente in quanto dovuto alla rotazione della Terra intorno a se stessa. Allo stesso modo è apparente il moto diurno del Sole e così pure quello annuo, dovuto quest'ultimo al moto della Terra intorno al Sole. E così per i cinque pianeti.

Copernico tuttavia rimase vincolato all'idea platonica dell'esistenza di sfere in moto circolare ed uniforme (le *orbium coelestium* di cui si parla nel titolo stesso dell'opera) in cui sono rigidamente incastonati i pianeti, Terra compresa. Bisognerà aspettare l'opera di Keplero (1571 – 1630) per accantonare definitivamente le orbite circolari e passare a quelle ellittiche. Per un approfondimento sugli aspetti salienti e sulle implicazioni della Rivoluzione Copernicana si consultino ad esempio S. Bergia, *Dal cosmo immutabile all'universo in evoluzione* e T. Khun, *La rivoluzione copernicana*.

Da un punto di vista didattico, è interessante osservare come spesso gli studenti sono portati ad affrontare il tema della Rivoluzione Copernicana come il momento *della scoperta* della centralità del Sole all'interno del sistema planetario, alla stessa stregua della scoperta di questa o quella legge fisica. Tale impostazione non permette di cogliere appieno il senso profondo del lavoro di Copernico stesso: egli non era tanto interessato a dimostrare quella che oggi definiremo la validità scientifica della sua teoria, quanto era intenzionato a fornire un *modello* di rappresentazione della realtà che fosse il più semplice e significativo possibile.

La parola – chiave su cui il docente dovrebbe mettere l'accento è proprio la parola modello. Esso è definito come una rappresentazione esemplificativa e significativa di un sistema reale, in cui vengono schematizzate le sole caratteristiche fisiche che interessa studiare, tramite una serie di regole che legano i parametri (ossia le grandezze non manipolabili), le sollecitazioni (ovvero le variabili indipendenti nell'ambito delle proprie ipotesi di lavoro) e le uscite (cioè le variabili dipendenti).

4.2 Definizione matematica e costruzione con GeoGebra

In geometria, un'epicicloide è una curva piana appartenente alla categoria delle rullette, ovvero delle curve generate da un punto di una figura che rotola su di un'altra.

L'epicicloide infatti è definita come la curva generata da un punto di una circonferenza che rotola sulla superficie esterna di un'altra circonferenza.

La rappresentazione parametrica di un'epicicloide generata da una circonferenza di raggio r che rotola su di una circonferenza più grande di raggio $R = kr$ è data da

$$\begin{cases} x = (R+r) \cos \phi - r \cos \left(\frac{R+r}{r} \phi \right) \\ y = (R+r) \sin \phi - r \sin \left(\frac{R+r}{r} \phi \right) \end{cases}$$

A seconda del rapporto tra i raggi, ossia del valore di k , ed in relazione alla velocità angolare con cui la circonferenza esterna rotola su quella interna, l'epicicloide può assumere forme ben diverse tra loro, ma matematicamente equivalenti.

L'approccio algebrico con la definizione tramite le equazioni parametriche può risultare ostico per degli studenti di terzo anno, pertanto è più proficuo procedere con una trattazione di tipo cinematico/geometrico.

Da un punto di vista cinematico difatti, l'epicicloide può essere vista come il moto di un punto materiale che ruota di moto circolare uniforme attorno ad un punto che, a sua volta, ruota di moto circolare uniforme rispetto ad un altro punto fisso.

Si propone allo studente di costruire una curva epicicloideale tramite l'uso di GeoGebra, attenendosi alle seguenti istruzioni:

1. Si definiscano gli *sliders* del tempo t , dei raggi R_1 ed R_2 rispettivamente della prima e della seconda circonferenza, delle velocità angolari ω_1 e ω_2 dei punti in moto circolare uniforme.
2. Si costruisca una circonferenza C_1 di centro un punto A e raggio R_1 e si scelga un punto B qualsiasi di C_1 .
3. Tramite il comando *Rotazione* di GeoGebra, si faccia ruotare il punto B attorno al centro A della

- circonferenza con una velocità angolare pari a ω_1 . Si è quindi ottenuto un nuovo punto B' .
4. Si costruisca la circonferenza C_2 di centro B' e raggio R_2 e si scelga su tale circonferenza un punto D qualsiasi.
 5. Si faccia ruotare adesso il punto D attorno a B' con velocità angolare ω_2 , ottenendo così il punto D' .

In figura 2 è rappresentato ciò che lo studente ottiene dopo aver seguito le istruzioni precedenti.

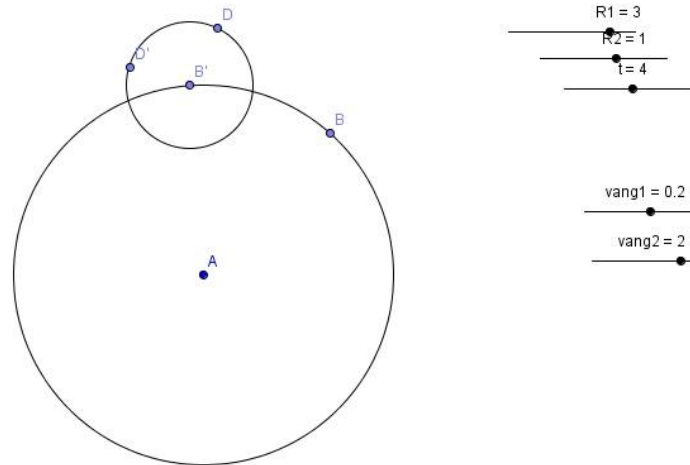


Figura 9 Una volta eseguite le istruzioni da 1. a 5. si ottiene la seguente costruzione.

Per ottenere l'epicloide, tramite il comando *Luogo*, si tracci il luogo geometrico dei punti del piano percorso dal punto D' in funzione del tempo t . In figura 3, è disegnata in rosso l'epicloide corrispondente ai valori $R_1 = 3$, $R_2 = 1$, $\omega_1 = 0,2$ e $\omega_2 = 2$.

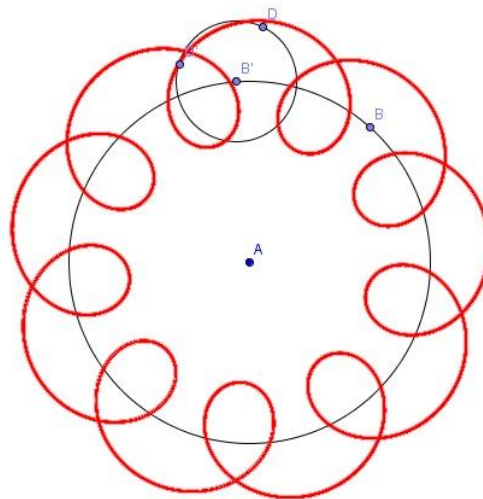


Figura 10 In rosso, un esempio di epicicloide

Arrivati alla costruzione dell'epicloide, si invitano gli studenti a “giocare” con i parametri della curva, osservando le varie forme che la curva assume quando variano in particolare i parametri delle velocità angolari ω_1 e ω_2 .

Possibili spunti di riflessione da proporre agli studenti:

- Che accade quando ω_1 e ω_2 coincidono?
- Che accade quando il rapporto tra ω_1 e ω_2 è un numero razionale? E quando è irrazionale?
- Quali sono i valori di ω_1 e ω_2 per i quali si presenta almeno un *intrecciamento*?
- Che relazione sussiste tra il valore del rapporto tra i raggi delle circonferenze e la forma dell'epicicloide, fissate le velocità angolari?
- A quali tipi di fenomeni cinematici è possibile associare l'epicicloide?

Particolarmente interessante è il secondo interrogativo, difatti la razionalità o meno del rapporto tra le due velocità angolari determina la chiusura o meno dell'epicicloide. Più nello specifico, se

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{a}{b},$$

allora la curva si chiude dopo un tempo t pari al minimo comune multiplo tra a e b . Ciò significa che se gli estremi dell'intervallo dello slider del tempo non sono sufficientemente grandi, l'epicicloide risultante sarà una curva non chiusa. Per lo stesso motivo, se il rapporto tra le velocità angolari fosse un numero irrazionale, l'epicicloide ottenuta non potrà mai essere una curva chiusa.

4.3 Una scheda di lavoro

Di seguito presentiamo una possibile scheda di lavoro da proporre agli studenti, nella quale vi sono elencati i punti salienti dell'esperimento laboratoriale con l'epicicloide.

1. Con l'ausilio dell'insegnante, costruisci una epicicloide di parametri $R_1 = 1$, $R_2 = 1$, $\omega_1 = 1$ e $\omega_2 = 1$. Definisci inoltre lo slider del tempo tra -50 e +50 con un incremento di 0,1. Perché ottieni una circonferenza di centro il punto A?
2. Prova a variare adesso i due raggi: cosa ti aspetti che cambi nella forma dell'epicicloide?
3. Siano adesso $R_1 = 3$, $R_2 = 1$ e $\omega_2 = 1$. Fai variare il valore di ω_1 : quali sono i valori limite per i quali la forma dell'epicicloide subisce maggiori modifiche?
4. Nelle ipotesi del punto 3. osserva le forme dell'epicicloide per $\omega_1 = 2$ e per $\omega_1 = 2,1$. Perché la complessità dell'epicicloide è variata in modo sensibile?
5. Prova adesso a restringere lo slider del tempo, facendo variare t da -5 a +5: in cosa sono cambiate le due epicicloidi del punto 4.? Perché?
6. Sia adesso $\omega_1 = \pi$: perché l'epicicloide risulta essere molto più complessa dei casi precedenti?
7. Per tutti i valori fissati precedentemente di ω_1 e ω_2 , prova a far variare i raggi delle circonferenze: essi modificano in qualche modo la struttura qualitativa dell'epicicloide?

Da una analisi a priori, è possibile supporre che gli studenti sappiano rispondere ai quesiti posti ai punti 1. e 2. poiché essi richiedono semplici nozioni di cinematica del moto circolare uniforme.

Più interessanti sono i punti 3, 4 e 5, poiché essi vogliono indirizzare lo studente a capire quale è il motivo per cui per certi valori delle velocità angolari l'epicicloide assume forme molto semplici e per altri invece no. Già dal punto 4. è possibile aspettarsi la risposta al problema in termini di minimo comune multiplo tra i numeri interi della frazione che esprime il rapporto delle velocità angolari, tuttavia l'utilità del punto 5. sta proprio nel volere sottolineare la stretta correlazione tra l'intervallo di tempo considerato e la possibilità che la curva epicicloideale si chiuda.

Il sesto punto prevede l'introduzione del numero trascendente π come velocità angolare del punto sulla prima circonferenza e pertanto vuole evidenziare la differenza sostanziale tra le forme dell'epicicloide così ottenuta e quella risultante nei casi precedenti. Lo studente che ha compreso il meccanismo tra il rapporto delle velocità angolari e la forma dell'epicicloide, non ha alcun problema a spiegare il motivo per il quale un numero trascendente dà origine ad una curva così complessa.

Infine, il punto 7. vuole sottolineare la relazione tra i raggi delle circonferenze e la forma dell'epicicloide: lo studente può comprendere così che tali valori non influiscono sulla complessità della curva come accadeva per le velocità angolari, ma solamente sugli eventuali intrecciamenti.

4.4 L'equivalenza tra i due Sistemi

Per dimostrare la perfetta equivalenza tra i due sistemi, è necessario prima procedere alla costruzione della traiettoria di un pianeta osservata dalla Terra, secondo le regole del sistema eliocentrico.

Ricostruiamo pertanto l'orbita di Marte usando dei parametri in scala per le velocità angolari e per le distanze dal Sole.

La distanza media della Terra dal Sole è di 1 U.A. (circa 149 milioni di km), laddove invece la distanza tra Marte e il Sole è di circa 1,55 U.A. Una buona approssimazione può essere quindi un rapporto di due a tre fra le distanze dei due pianeti. Per quanto concerne le velocità angolari, invece, la velocità di Marte è circa la metà di quella della Terra.

Le istruzioni da seguire sono le seguenti:

1. Si definisca lo slider del tempo t , avendo cura che gli estremi dell'intervallo di variazione siano sufficientemente grandi (una buona scelta è far variare lo slider da -100 a +100 con un incremento di 0,1 ad ogni passo).
2. Si costruisca una circonferenza di centro A e raggio 2 e si scelga un punto B di tale circonferenza. I punti A e B rappresentano rispettivamente il Sole e la Terra.
3. Analogamente, si costruisca una circonferenza di centro il Sole e raggio 3 e si scelga su di essa un qualunque punto C , che rappresenta Marte.
4. Tramite il comando *Rotazione* si facciano ruotare attorno al Sole la Terra con velocità angolare pari ad 1, ottenendo il punto B' , e Marte con velocità angolare pari a 0,5, ottenendo il punto C' .

Arrivati a questo punto, si è ricostruito il sistema eliocentrico per quanto riguarda i pianeti Terra e Marte. Adesso bisogna però tracciare l'orbita di Marte per come potrebbe essere osservata dalla Terra. Per fare ciò, si seguano i seguenti passi:

5. Si scelga un punto qualunque del piano e lo si chiami $Terra_1$.
6. Si riporti il segmento $B'C'$ sul punto $Terra_1$ in questo modo: si tracci la retta passante per B' e C' e successivamente si tracci la retta passante per $Terra_1$ e parallela a $B'C'$; si costruisca quindi la circonferenza di centro $Terra_1$ e raggio la lunghezza del segmento $B'C'$; si nomini $Marte_1$ il punto di intersezione tra tale circonferenza e la retta passante per $Terra_1$; il punto così ottenuto dista esattamente dal punto $Terra_1$ la lunghezza del segmento $B'C'$.
7. Tramite il comando *Luogo*, si tracci il luogo dei punti del piano percorsi da $Marte_1$ in funzione del tempo t : la curva così ottenuta è proprio l'orbita di Marte vista dalla Terra.

Con i parametri delle velocità angolari e dei raggi elencati in precedenza, ciò che si ottiene è rappresentato in figura 4.

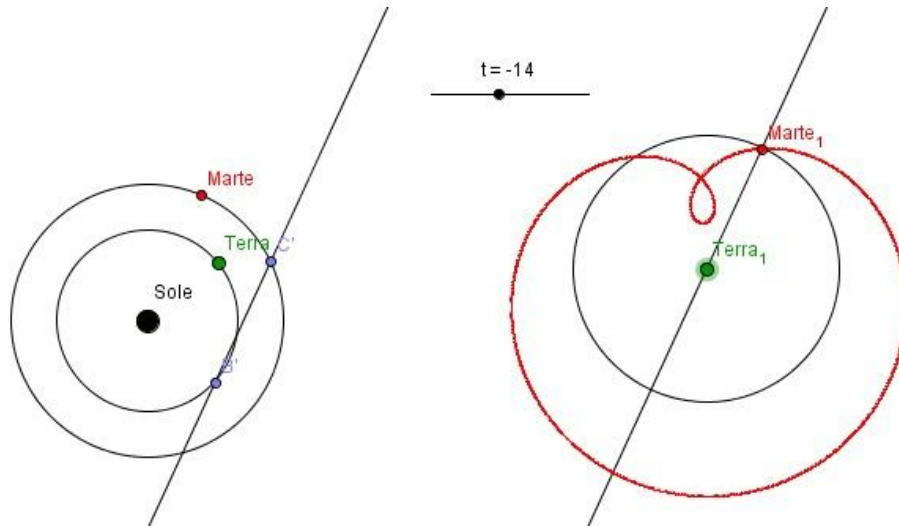


Figura 11 In rosso, la traiettoria di Marte osservata dalla Terra secondo il Sistema eliocentrico.

Usando la procedura descritta al paragrafo precedente, si costruisca adesso l'epicicloide avente come parametri $R_1 = 3$, $R_2 = 2$, $\omega_1 = 1$ e $\omega_2 = 2$ (vedi figura 5).

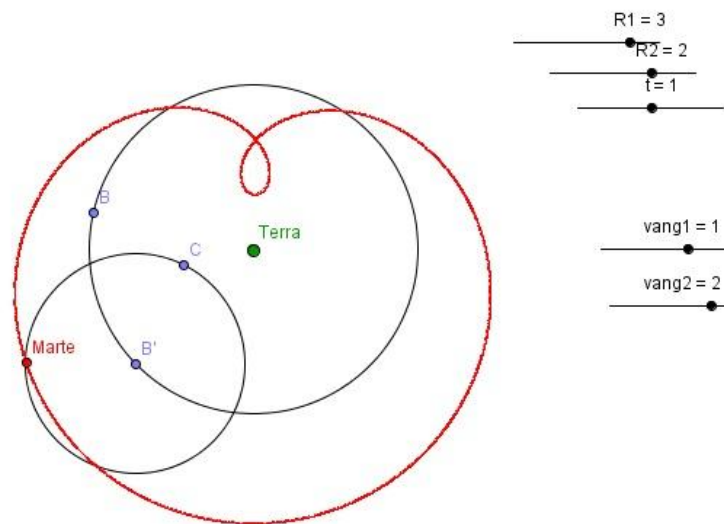


Figura 12 In rosso, la traiettoria di Marte osservata dalla Terra secondo il Sistema geocentrico.

Come è possibile osservare, le due curve sono esattamente le stesse. Questo porta alla conclusione che dal punto di vista geometrico, il sistema tolemaico è esattamente equivalente al sistema copernicano.

4.5. Un esercizio per gli studenti

Una volta mostrato alla classe come potere ricostruire le orbite dei pianeti, sia dal punto di vista geocentrico sia da quello eliocentrico, si invitano gli studenti a lavorare in gruppo con l'obiettivo di ricostruire in scala il moto di un dato pianeta e successivamente il Sistema Solare.

Seguendo la strategia didattica di scaffolding, non si anticipa nulla allo studente, ma anzi lo si lascia libero dandogli di fatto il compito di scoprire da solo quali sono le problematiche insite in un esercizio di questo genere.

Il primo problema da dover affrontare riguarda il recupero delle informazioni necessarie per la costruzione delle epicicloidi, ossia da un lato le distanze dal Sole ma, soprattutto, dall'altro le velocità angolari dei

pianeti. In secondo luogo, vi è un problema di distanze talmente differenziate, che una loro rappresentazione in scala risulta poco attuabile: gli unici pianeti significativamente rappresentabili sono Venere, Marte ed uno tra Mercurio e Giove, perché la differenza tra le distanze dal Sole di Mercurio e Giove è troppo grande ed in più poiché da Saturno in poi le distanze diventano enormi.

La tabella 1 riporta i dati dei pianeti del Sistema Solare in scala e approssimati.

Tabella 1. Valori delle distanze dal Sole e delle velocità angolari adimensionalizzati e tarati sulla scala della Terra.

Pianeta	Distanza dal Sole	Velocità angolare
Mercurio	0.4	4.2
Venere	0.7	1.6
Terra	1	1
Marte	1.5	0.5
Giove	5.2	0.1
Saturno	9.5	0.03
Urano	19.2	0.01
Nettuno	30.1	0.006

Inseriti correttamente i dati nelle costruzioni con Geogebra, il risultato che gli studenti dovrebbero ottenere riguardo le orbite di Venere, Marte e Giove è rappresentato in figura 6.

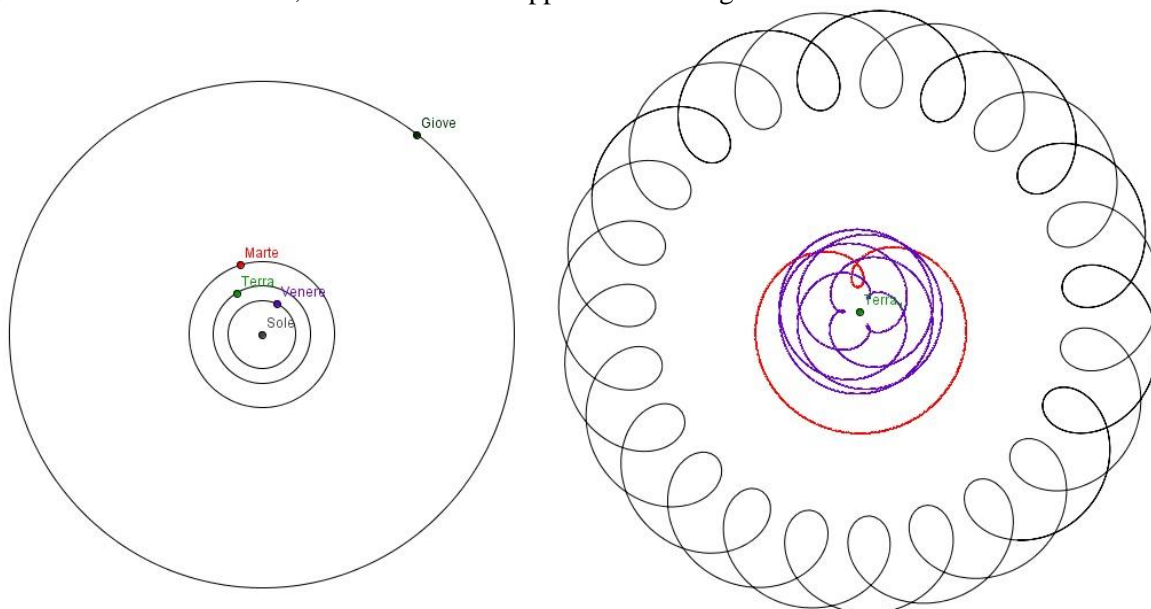


Figura 13 Le traiettorie di Venere (viola), Marte (rossa) e Giove (nera) osservate dalla Terra, ricostruite secondo il modello eliocentrico.

Una volta ottenuto questo risultato, si potrebbe stimolare il dibattito tra gli alunni con vari spunti di riflessione. Ad esempio, perché storicamente il moto retrogrado di Marte è stato quello che per primo ha acceso il dibattito sulla validità del sistema tolemaico? O ancora, come si dovrebbero modificare i parametri delle ve-

locità angolari se si suppone che la scala venga tarata non sulla Terra, ma su un altro pianeta, ad esempio Giove? E questa operazione comporta la modifica della forma delle epicicloidi? Infine, quali sarebbero le traiettorie di Saturno, Urano e Nettuno osservate da un ipotetico osservatore che si trova sulla superficie di Giove?

5. Conclusioni

Come si è potuto osservare, l'unità didattica proposta possiede un duplice punto di forza. Da un lato, tende ad incoraggiare negli studenti la capacità di produrre collegamenti interdisciplinari, cercando quindi di confutare la convinzione diffusa tra gli stessi alunni, che le materie scolastiche siano alla stregua di scompartimenti a tenuta stagna, completamente indipendenti gli uni dagli altri. Dall'altro, vuole mettere in risalto l'importanza del laboratorio, non solo come momento di rottura rispetto alla classica lezione svolta in classe, ma come reale ed efficace strumento didattico. Una tale impostazione non può che portare a risultati positivi e gratificanti sia per il docente che per il discente.

Analizzando più nello specifico gli aspetti correlati alle discipline della matematica e della fisica, si è visto come la dimostrazione dell'equivalenza geometrica tra il sistema eliocentrico ed il sistema geocentrico ha portato all'introduzione di due concetti fondamentali nella storia della Scienza: il problema del modello, inteso come uno strumento di rappresentazione della realtà, e la questione delle rivoluzioni scientifiche e, di conseguenza, dell'evoluzione delle teorie e delle conoscenze sulla Natura. Spesso i docenti, per mancanza di tempo, non sono portati a curare quelli che sono gli aspetti più storici degli argomenti trattati e, per tale ragione, negli studenti frequentemente si crea la convinzione che le scoperte ed il progresso scientifico si siano evoluti *linearmente* durante i secoli. Un processo che quindi viene erroneamente percepito come un accumulo di leggi, teorie, conoscenze piuttosto che come una continua rivisitazione delle stesse teorie nel momento in cui qualche evidenza sperimentale non combacia più con i modelli accettati.

Bibliografia

- F. Arzarello, L. Ciarrapico (2003). *Matematica 2003*. UMI – Unione Matematica Italiana. <http://umi.dm.unibo.it/old/italiano/Matematica2003/matematica2003.html>. Accessed 12 September 2013.
- M. Barbaini, S. Casaroli (2010). *Matematica con GeoGebra*. Edizioni Principato.
- S. Bergia (1995). *Dal cosmo immutabile all'universo in evoluzione*. Edizioni Bollati – Boringhieri.
- T. Khun (2000). *La rivoluzione copernicana*. Edizioni Piccola Biblioteca Einaudi.
- F. Frabboni (2004). *Il Laboratorio*. Manuali Laterza, vol. 194. Edizioni Laterza.
- A. La Marca (2010). *Voler apprendere per imparare a pensare*. Edizioni Palumbo.
- Cosediscienza website per la figura 1: http://www.cosediscienza.it/fisica/il_pianeta-Marte.htm. Accessed 12 September 2013.

Forze di attrito e determinazione del coefficiente di attrito statico

Giovanna Navarra

Dipartimento di Fisica e Chimica, Università di Palermo, Via Archirafi 36, 90123 Palermo

E-mail: giovanna.navarra@unipa.it

Riassunto. In questo articolo verrà descritto l'argomento delle forze di attrito, focalizzando l'attenzione su una esperienza di laboratorio che studenti, ad esempio, di una classe terza di un liceo scientifico dovranno condurre per poter determinare il coefficiente di attrito statico tra due superfici a contatto. In particolare, verranno presentate due differenti metodologie attraverso le quali l'esperienza può essere realizzata: una realizzabile con l'utilizzo di strumentazione tradizionale; l'altra che fa uso delle nuove tecnologie, come i sensori di forza e programmi software per l'acquisizione e l'analisi *real time* di dati sperimentali. Nel lavoro saranno descritte le caratteristiche degli studenti ai quali la lezione e la descrizione dell'esperienza di laboratorio sono rivolte. Saranno descritti gli obiettivi specifici di apprendimento raggiungibili e le competenze, il cui sviluppo risulta stimolato dalla trattazione della problematica e dallo svolgimento dell'esperienza in laboratorio.

1. Introduzione

L'argomento delle forze di attrito è uno degli argomenti della fisica che, in accordo con le indicazioni nazionali, gli studenti incontrano già al biennio delle scuole secondarie di secondo grado e che poi in alcune tipologie di scuole, come il liceo scientifico, viene ripreso e trattato nella sua completezza al triennio. L'argomento scelto dà la possibilità di ragionare sull'esistenza dell'attrito, di riflettere se questa sia un vantaggio o uno svantaggio. Inoltre, pur essendo la sua esistenza sperimentata da ognuno di noi quotidianamente (grazie alle forze d'attrito si riesce a camminare!), alcuni aspetti non risultano intuitivi per gli studenti. Quindi, esso fornisce spunti di approfondimento e riflessione. Inoltre, pensare di programmare un'attività didattica che culmini con una esperienza di laboratorio che gli studenti dovranno svolgere in piccoli gruppi, rende tale attività caratterizzata da diversi punti di forza sia per gli alunni che per il docente (Baldacci, 2005). Infatti, l'attività laboratoriale, che molto bene si addice a materie curriculari come la matematica o la fisica, possiede diverse caratteristiche positive. Dal punto di vista della disciplina, stimola l'interesse degli studenti sull'argomento perché li pone di fronte ad esso con un ruolo attivo. Posti davanti ad un obiettivo, anche se con l'ausilio dell'insegnante, gli studenti devono programmare un esperimento, individuare le grandezze in gioco e dall'osservazione, individuare il metodo risolutivo più opportuno, al fine del raggiungimento di un obiettivo precedentemente dichiarato. In altre parole, l'attività di laboratorio li costringe ad affrontare il problema con l'utilizzo di un metodo rigoroso. È ovvio che nel fare ciò, gli studenti siano portati a porsi dubbi e domande sull'argomento trattato, stimolando così anche competenze di tipo trasversale. L'attività laboratoriale è infatti quella metodologia che riesce a realizzare quel sapere e fare che formano l'essere dell'allievo e che favorisce l'acquisizione di alcune competenze chiave, come l'autonomia del pensiero e della progettazione (Sandrone Boscarino, 2004). La cooperazione, che è alla base del lavoro di gruppo, contribuisce efficacemente a liberare e organizzare le capacità di chi apprende e a trasformarle in competenze, oltre che dare all'alunno un senso di responsabilità nel portare a termine il proprio compito al fine del raggiungimento di un obiettivo comune. Un altro aspetto enormemente positivo è la possibilità che l'alunno ha, nel realizzare l'esperimento, di entrare a contatto e utilizzare alcuni tipi di nuove tecnologie. Quindi, l'attività svolta in laboratorio assume un'importante valenza educativa che sta nell'insieme di connessioni e percorsi compiuti dall'alunno e riconosciuti come significativi per sé, fino a riconoscerli come spendibili nel compito concreto di intervenire sulla realtà. D'altra parte, essa è rilevante anche per il docente. Durante l'attività di laboratorio, il docente non è più il protagonista come tende ad essere durante una lezione tradizionale, ma diviene il regista del processo complessivo di insegnamento/apprendimento. Egli è profondo conoscitore

dell'epistemologia della disciplina e conseguentemente sa mettere in evidenza e sfruttare proficuamente le valenze formative di essa. Inoltre, sa riconoscere oltre le caratteristiche dei suoi alunni anche quelle affettivo-relazionali che si manifestano durante l'interazione tra di essi, in modo da fornire ad ognuno opportunità di apprendimento secondo le proprie peculiarità. In accordo con quanto detto da Bruner, l'insegnante di laboratorio collabora come membro di una comunità ad un processo interpretativo, a cui partecipano tutti i membri in quanto soggetti capaci di pensare, come soggetto esperto in grado di fornire consulenza in funzione della costruzione della conoscenza e di competenze (Bruner, 1997). Quanto descritto nel presente articolo può essere considerato come un'azione di programmazione di un percorso didattico costituito da una lezione di due ore sulle forze di attrito e da quattro a sei ore di attività svolta in laboratorio, dove attraverso l'esperienza gli studenti dovranno stimare il coefficiente di attrito statico. Si cercherà di mettere in evidenza quali potrebbero essere le difficoltà che gli alunni potranno incontrare. In tal senso, verranno descritte le caratteristiche degli studenti che potrebbero essere i fruitori di tale percorso didattico e il tipo di competenze e obiettivi raggiungibili.

Destinatari: studenti di una classe terza di un liceo scientifico.

Tempo di svolgimento: da 6 a 8 ore.

Prerequisiti: composizione e scomposizione di vettori; concetti base di trigonometria e similitudine di triangoli, già trattati al biennio; valore medio di una serie di valori; errori casuali e sistematici di una misura; errore assoluto ed errore relativo; errore assoluto massimo; i tre principi della dinamica; equilibrio tra le forze.

Collocazione temporale all'interno del programma: l'attività si inserisce certamente dopo aver svolto la cinematica ed immediatamente dopo aver svolto le leggi di Newton a completamento dell'argomento "forze"; per quanto riguarda l'acquisizione delle nozioni di matematica necessarie per affrontare e comprendere l'argomento proposto, nonostante gli studenti di un terzo anno di un liceo scientifico non abbiano ancora svolto trigonometria, i concetti base necessari insieme con le proprietà dei triangoli simili sono stati certamente già forniti al biennio prima di introdurre la dinamica.

Materiale da utilizzare: piano inclinato regolabile, con la superficie superiore intercambiabile; blocchi di legno di differente massa; riga graduata; goniometro.

Competenze di base trasversali: acquisire rigore espositivo e consapevolezza del ruolo svolto dal codice linguistico; padroneggiare gli strumenti espressivi ed argomentativi indispensabili per gestire l'interazione comunicativa verbale in vari contesti; comprendere il legame tra la fisica e altre discipline scientifiche, come la matematica, la biologia, la geografia astronomica; osservare, descrivere ed analizzare fenomeni appartenenti alla realtà naturale e artificiale e riconoscere nelle sue varie forme i concetti di sistema e di complessità; essere consapevole delle potenzialità delle tecnologie rispetto al contesto culturale (e sociale) in cui vengono applicate.

Obiettivi specifici di apprendimento: sa riconoscere le grandezze fisiche fondamentali; sa interpretare il concetto di misura e legge fisica; sa riconoscere, in semplici casi, il rapporto esistente tra moto e forza; enuncia ed applica, in semplici problemi, i principi della dinamica; sa descrivere e definire la forza di attrito.

Verifiche: potrebbero consistere in verifiche orali mirate a verificare l'apprendimento delle conoscenze, nell'osservazione da parte del docente dei comportamenti tenuti dallo studente durante lo svolgimento dell'attività di laboratorio e nella stesura di una relazione su una delle attività svolte in laboratorio.

Valutazione: potrebbe essere eseguita con l'ausilio di griglie di valutazione già presenti nel POF della scuola o preparate appositamente dal docente.

2. La forza di attrito

La forza di attrito si manifesta quando, in tutte le situazioni reali, si tenta di far scivolare un corpo su un altro. Ciò è dovuto al fatto che nessuna superficie è totalmente liscia, ma ogni superficie, anche quella apparentemente liscia, se analizzata microscopicamente, mostrerà asperità e protuberanze che la rendono rugosa a livello microscopico, come mostrato in figura 1.

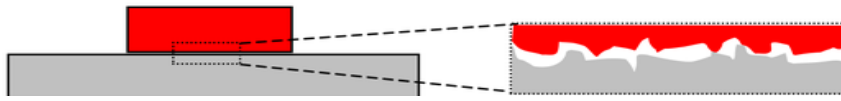


Figura1. Illustrazione delle asperità microscopiche presenti tra due superfici a contatto.

La forza di attrito è dovuta all'instaurarsi di microsaldature (forze di adesione) tra gli atomi posti sulle protuberanze delle due superfici. Tali microsaldature hanno una probabilità minore di instaurarsi, e quindi si riducono certamente in numero, se le due superfici sono l'una in moto rispetto all'altra. Quanto detto rende chiaro che nel momento in cui tentiamo, applicando una debole forza esterna, di muovere un corpo poggiato su una qualunque superficie, necessariamente deve esistere una forza di attrito esercitata dal piano sul blocco. Tale forza è detta forza di attrito statico. Nel momento in cui, aumentando opportunamente la forza esterna applicata, il corpo viene messo in movimento, l'attrito esistente tra le due superfici si manifesta sotto forma di una forza resistente al moto. Tale forza è detta forza di attrito dinamico.

Quando la forza d'attrito nasce per lo scivolamento di una superficie su un'altra, come il caso descritto finora, si parla di attrito radente. Esistono anche altre tipologie di attrito, come l'attrito volvente esistente quando un corpo rotola su un altro o l'attrito viscoso quando un corpo si muove all'interno di un fluido viscoso (fluido reale).

Immaginando di effettuare l'attività di didattica disciplinare e laboratoriale qui descritta in una classe terza di un liceo scientifico, l'argomento verrebbe introdotto subito dopo aver spiegato le tre leggi del moto di Newton e facendo riferimento al solo attrito radente. Quindi, nel seguito non si farà cenno a casi in cui si manifesta attrito volvente o viscoso.

Consideriamo un oggetto di massa m in quiete su una superficie orizzontale piana, come mostrato in figura 2.

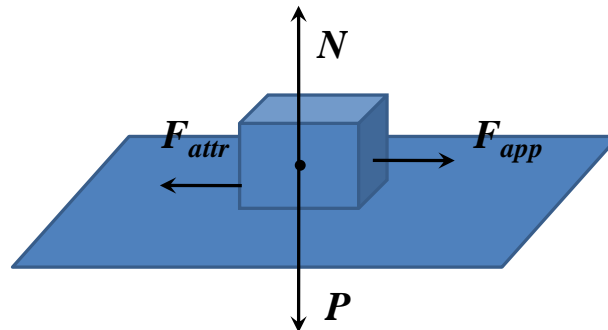


Figura 2. Schema delle forze agenti su un corpo poggiato su una superficie orizzontale piana al quale è applicata una forza esterna in presenza di attrito.

Su di esso agiscono, in assenza di forze esterne, due sole forze lungo la direzione verticale: la forza peso dell'oggetto $P = mg$, agente verso il basso e la reazione vincolare o forza normale N che la superficie di appoggio applica all'oggetto verso l'alto. Poiché in questa configurazione l'oggetto permane nel suo stato di quiete, per il I principio della dinamica la risultante delle forze deve essere nulla e quindi, il modulo della reazione vincolare è uguale a mg

$$\vec{N} + \vec{P} = 0 \quad (1)$$

Considerando un sistema di riferimento con asse orizzontale crescente verso destra e asse verticale crescente verso l'alto, si ottiene:

$$N - P = 0 \quad (2)$$

$$N = P \quad (3)$$

Immaginiamo adesso di applicare una forza esterna $F_{applicata}$, per semplicità lungo la direzione orizzontale, e di osservare che l'oggetto continua a rimanere nel suo stato di quiete. In accordo con il I principio della dinamica, concludiamo che deve esistere una forza, agente anch'essa lungo l'asse orizzontale, avente verso opposto e modulo uguale alla forza esterna applicata. Tale forza è la forza d'attrito statico, che agisce nella direzione parallela alla superficie di contatto e impedisce all'oggetto di muoversi

$$\vec{F}_{applicata} + \vec{F}_{attrito} = 0 \quad (4)$$

$$F_{applicata} - F_{attrito} = 0 \quad (5)$$

$$F_{applicata} = F_{attrito} \quad (6)$$

Aumentiamo la forza esterna molto lentamente e distinguiamo l'intervallo di tempo in cui l'oggetto continua a rimanere fermo, dall'istante in cui esso abbandona lo stato di quiete. Nell'intervallo in cui l'oggetto continua a rimanere fermo pur variando l'intensità della forza esterna, continuano a valere le relazioni sopra indicate. In ragione del fatto che i principi della dinamica devono essere soddisfatti istante per istante, l'intensità della forza d'attrito è uguale all'intensità della forza esterna o in generale alla risultante delle forze esterne agenti lungo la direzione del moto.

Nell'istante in cui l'oggetto inizia a muoversi, la forza esterna è la massima forza esterna che può essere applicata senza far muovere il corpo. In questo istante, la forza d'attrito statico assumerà il massimo valore. Sperimentalmente, si osserva che, dato un corpo posto su una superficie, la forza di attrito massima è proporzionale alla forza normale; più precisamente, vale la relazione:

$$F_{attr}^{\max} = \mu_s N \quad (7)$$

dove μ_s è il coefficiente di attrito statico, che dipende solamente dalla natura delle superfici ed N è la forza normale esercitata dal piano sull'oggetto, nella direzione normale al piano stesso.

A questo punto, al fine di evitare che lo studente apprenda dei concetti non totalmente ben chiariti, bisogna sottolineare che la (7) non è una relazione vettoriale, dal momento che le due forze che compaiono in tale relazione non agiscono nella stessa direzione. La relazione (7) permette di trovare il modulo della forza di attrito statico massima ed esprime la sua dipendenza dal valore della forza normale agente sul corpo stesso. La comprensione dell'andamento del modulo della forza d'attrito statico al variare dell'intensità della forza motrice (responsabile del moto) rappresenta un punto di debolezza nel processo di apprendimento di tale argomento. Infatti, se quanto appena detto non viene dal docente ben messo in evidenza, anche con l'ausilio di esempi, lo studente sarà portato a ricordare ed utilizzare sempre, e quindi anche in modo non opportuno, la relazione che invece permette di trovare correttamente il modulo della forza d'attrito statico solo nel caso in cui questa sia massima. Questo aspetto deve essere adeguatamente sottolineato dal docente durante la spiegazione dell'argomento.

Aumentando ulteriormente la forza esterna applicata, il corpo comincerà a muoversi. La forza d'attrito, in questo caso dinamico, rimarrà costante durante il moto del corpo. Ciò si può dedurre dal fatto che il corpo continuerà a muoversi con velocità costante. Anche la forza di attrito dinamico è direttamente proporzionale alla forza normale e sperimentalmente si ottiene la relazione che permette di calcolarne il modulo:

$$F_{attr}^{dm} = \mu_d N \quad (8)$$

dove μ_d è il coefficiente di attrito dinamico, che dipende sempre solamente dalla natura delle superfici ma che adesso a parità di superficie ha un valore poco minore del coefficiente di attrito statico.

Al variare della forza esterna applicata fino all'istante in cui il corpo inizia a muoversi, la forza di attrito aumenta uguagliando istante per istante la forza esterna. In figura 3 è riportato l'andamento della forza esterna applicata al variare del tempo, che per l'equazione (6) è uguale istante per istante alla forza di attrito.

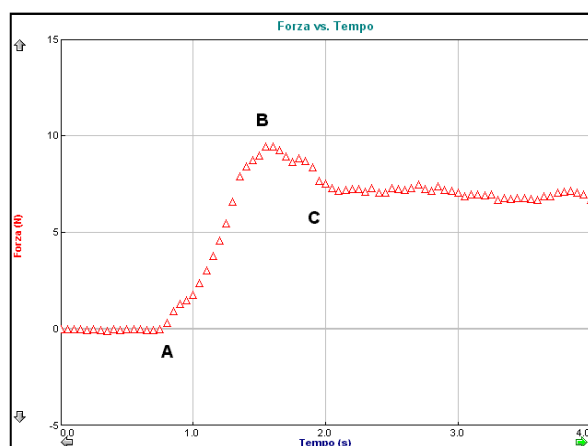


Figura 3. Andamento della forza esterna applicata in funzione del tempo.

A cosa è dovuta la diminuzione della forza d'attrito nel passaggio dallo stato di quiete a quello di moto del corpo rilevata tra gli istanti di tempo compresi tra i punti **B** e **C** indicati in figura 3? Si può anche verificare che il coefficiente d'attrito non dipende né dalla massa, né dall'estensione della superficie di contatto (tale verifica potrebbe essere un obiettivo dell'attività di laboratorio proposta). Queste ed altre specifiche peculiarità dell'attrito possono risultare più intuibili se si accenna ai meccanismi all'origine di esso. Un tale approfondimento potrebbe essere svolto con gli studenti che durante l'attività di laboratorio si mostrano più curiosi e interessati verso l'argomento (Per una trattazione più completa dell'argomento, che contempli casi diversi da quelli qui illustrati, si veda Arons, 1992).

3. Determinazione sperimentale del coefficiente di attrito statico

Dopo avere introdotto l'argomento delle forze d'attrito, si propone agli studenti di determinare, attraverso un'attività da svolgere in laboratorio, il valore del coefficiente di attrito statico di differenti materiali e di verificare che esso non dipende né dalla massa del corpo né dall'estensione della superficie del blocco a contatto con la superficie di appoggio. In un laboratorio di fisica, gli studenti avranno come materiale a disposizione un piano inclinato regolabile con la superficie superiore intercambiabile per cambiare la natura delle superfici sulle quali il blocco di legno può scivolare, parallelepipedi di legno aventi massa differente, riga graduata, goniometro, bilancia di precisione. In laboratorio, essi misureranno grandezze fisiche e stimeranno le loro incertezze. Infatti, come evidente dai prerequisiti, essi conoscono già il concetto di valore vero di una grandezza, di valore medio di una serie di valori, di errore assoluto massimo e in generale di errore assoluto e relativo.

Il metodo più semplice per determinare il valore del coefficiente di attrito statico tra due superfici a contatto è quello che fa uso di un piano inclinato (Fiordilino e Agliolo Gallitto 2010). In particolare, si utilizza un piano inclinato regolabile, con angolo iniziale nullo. Su di esso si pone un blocco di legno. Successivamente, si aumenta gradualmente l'angolo di inclinazione α fino a quando il blocco non comincerà a scivolare lungo il piano inclinato. Uno schema dell'apparato sperimentale è mostrato in figura 4. Si assume come angolo critico il valore dell'angolo per cui un ulteriore suo aumento causa lo scivolamento del blocco lungo il piano. La misura dell'angolo critico permette di stimare il coefficiente di attrito statico.

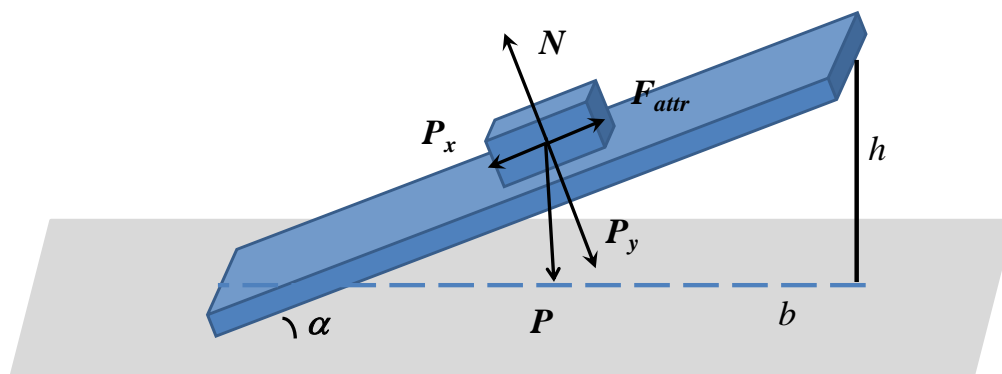


Figura 4. Schema delle forze agenti su un corpo poggiato su un piano inclinato in presenza di attrito.

Quali passi sia teorici che pratici dovrà compiere lo studente e quali difficoltà potrebbe incontrare? Seguendo un metodo di analisi sistematico del problema, col fine di capire quale sia il metodo corretto per poter misurare il coefficiente di attrito statico, per prima cosa si dovrà descrivere il sistema fisico attraverso un diagramma di corpo libero del blocco, per analizzare quali sono le forze che agiscono su di esso. Successivamente, bisognerà imporre la condizione che in corrispondenza dell'angolo critico α_c il corpo è in equilibrio sul piano inclinato. Quindi, la somma vettoriale delle forze agenti sul corpo deve essere nulla

$$\vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_{attr}^{max} = 0 \quad (9)$$

Scegliendo un sistema di riferimento in cui l'asse x coincide con l'asse lungo il piano inclinato ed il cui verso positivo è il verso del moto e l'asse y coincide con la direzione ad esso ortogonale con verso positivo verso l'alto, l'equazione vettoriale precedente si scinde nelle due equazioni scalari:

$$N - mg \cos \alpha_c = 0 \quad (10)$$

$$mg \sin \alpha_c - \mu_s N = 0 \quad (11)$$

da cui segue

$$mg \sin \alpha_c - \mu_s mg \cos \alpha_c = 0 \quad (12)$$

ovvero

$$\mu_s = \tan \alpha_c \quad (13)$$

Quindi, misurando l'angolo critico α_c , o determinando in maniera indiretta il valore della tangente di tale angolo, si può determinare il coefficiente d'attrito statico delle due superfici a contatto. Si può far osservare agli studenti che, sfruttando le proprietà trigonometriche del triangolo formato dal piano inclinato e dal piano orizzontale, la tangente dell'angolo può essere ricavata dal rapporto tra l'altezza h e la base b di tale triangolo.

A questo punto, gli studenti dovranno preparare l'esperimento. Sceglieranno una tra le superfici disponibili per preparare il piano inclinato (plexiglas, formica, velluto, ecc.), uno dei blocchi di legno a loro disposizione e la superficie di esso a contatto con il piano inclinato. Nell'esperimento, essi varieranno gradualmente l'inclinazione del piano inclinato al fine di individuare l'angolo critico. Rileveranno con il goniometro il suo valore e contemporaneamente misureranno l'altezza h corrispondente del piano inclinato. La lunghezza della base b del piano inclinato può essere ricavata dall'applicazione del teorema di Pitagora, conoscendo la lunghezza del piano inclinato. La lunghezza l potrà essere misurata solo inizialmente dato che essa non subisce modifiche nel variare l'assetto dell'esperimento. Le misurazioni necessarie dovranno essere fatte con il goniometro e la riga graduata che gli studenti hanno a disposizione. È in questo momento che essi dovranno essere seguiti dal docente per evitare che le misure non vengano effettuate con la giusta accortezza.

Utilizzando il goniometro, lo studente può compiere degli errori di parallasse se la lettura della scala non viene effettuata con l'occhio posto correttamente di fronte all'indice dello strumento di misura. Dovendo misurare l'altezza del piano inclinato con la riga graduata, gli studenti potrebbero incontrare la difficoltà di decidere autonomamente dove effettuare la lettura della riga, se in corrispondenza dell'estremità inferiore o superiore della barra inclinata. L'insegnante vigilerà sulle loro scelte fornendo le dovute spiegazioni. Fatto ciò, loro annoteranno un primo valore misurato dell'angolo critico e dell'altezza corrispondente in una tabella fornita dall'insegnante come scheda di lavoro (tabella 1). Poiché una misura non può non essere affetta da errore, al valore misurato essi dovranno associare l'errore determinato dalla sensibilità dello strumento utilizzato per effettuare la misurazione (1° nel caso del goniometro e di 0.1 cm nel caso della riga graduata). Il procedimento va ripetuto per determinare di volta in volta più valori dell'angolo critico.

Tabella 1. Tabella contenuta in una scheda di lavoro data agli studenti nella quale annoteranno i valori misurati, le loro incertezze e le grandezze di interesse ricavate.

θ_c	$err \theta_c$	$tg \theta_c = \mu_s$	h	$err h$	$h/b = tg \theta_c = \mu_s$

Raccolti i dati, il valore best del coefficiente di attrito è determinato dalla media delle misure, mentre la sua indeterminazione può essere ricavata calcolando la semidispersione dei valori. Questo errore casuale (statistico) potrebbe risultare maggiore degli errori strumentali. Se si volesse ricavare il coefficiente di attrito attraverso la misurazione dell'angolo con il goniometro e si volesse calcolare l'errore ad esso associato considerando l'errore di 1° sul valore misurato, si dovrebbe utilizzare la relazione generale della propagazione degli errori, in cui si fa uso delle derivate, che ancora non sono conosciute dagli studenti a cui proponiamo l'esperimento. Se, invece, si decide di determinare il coefficiente di attrito statico attraverso il rapporto tra l'altezza e la base del piano inclinato, l'errore relativo risultante da assegnare al coefficiente d'attrito statico è facilmente ricavabile come somma degli errori relativi associati ai valori di h e di b . Moltiplicando l'errore relativo del rapporto per il valore del rapporto otteniamo l'errore assoluto. Questi errori sono errori strumentali che si sommano agli errori casuali. Gli studenti dovrebbero calcolare entrambi gli errori per potere stimare l'errore totale da associare alla misura del coefficiente di attrito.

Attraverso l'attività svolta in laboratorio, gli studenti acquisiscono competenze sperimentali e imparano a riflettere criticamente su quanto ottenuto riuscendo a poter stabilire se si tratta di un "buon" o "cattivo" risultato. Allo stesso modo, ripetendo i passi già descritti, l'esperimento può essere realizzato cambiando la superficie del piano inclinato. Gli studenti potranno quindi confrontare il valore del coefficiente d'attrito risultante dal contatto del legno con le diverse superfici a disposizione e probabilmente rimanere sorpresi scoprendo che il coefficiente d'attrito statico relativo alle superfici legno/teflon è maggiore di quello relativo alle superfici legno/velluto, dando vita ad ulteriori spunti di approfondimento con il docente.

3.1 Verifica dell'indipendenza del coefficiente d'attrito dalla massa del corpo e dall'estensione della superficie di contatto

Lo studente può autonomamente verificare sperimentalmente che il coefficiente d'attrito non dipende né dalla massa, né dall'estensione della superficie di contatto. Per verificare la non dipendenza dalla superficie, basta ripetere l'esperimento cambiando la faccia di appoggio del parallelepipedo-blocco. Si otterranno diversi valori di μ_s che, nell'ipotesi di aver lavorato correttamente, risulteranno tra loro consistenti. Per verificare la non dipendenza dalla massa, si fissa un secondo blocco su quello già utilizzato per la prima parte dell'esperimento. In questo caso le superfici a contatto sono le stesse del caso precedente, stessa natura, stessa estensione (anche se oramai lo studente dovrebbe avere appreso che quest'ultima condizione è irrilevante) e l'unico cambiamento consiste nel valore della massa poggiata sul piano inclinato. Ripetendo l'esperimento al variare della massa del blocco aggiunto e quindi della massa totale, si otterranno diversi valori di μ_s che, nell'ipotesi di aver lavorato correttamente, risulteranno tra loro consistenti.

4. Determinazione di μ_s con l'uso delle nuove tecnologie

È possibile misurare il valore del coefficiente di attrito statico e dinamico utilizzando le nuove tecnologie per la didattica (Fiordilino e Agliolo Gallitto, 2010). Per fare ciò è necessario un PC, un'interfaccia con sensore e un software per l'acquisizione e l'analisi dei dati sperimentali, ad esempio il software LoggerPro della Vernier. Il software consente inoltre di visualizzare le grandezze osservate in opportuni grafici: per questo motivo, tale metodo ha anche il vantaggio di sviluppare un particolare obiettivo che è quello di rendere capace lo studente di dedurre un risultato dall'andamento grafico delle variabili da cui esso dipende. In particolare, tramite l'utilizzo del software di raccolta dati e l'uso di sensori di forza, è possibile ottenere un grafico della forza di attrito in funzione del tempo. Tale grafico permetterà di determinare il valore massimo della forza di attrito statico e il valore medio della forza di attrito dinamico.

Prerequisiti aggiuntivi: uso dei sensori *on-line*.

Materiale da utilizzare: un PC; un sensore di forza; un'interfaccia per collegare il sensore di forza al PC; un software di acquisizione e analisi dati; un lungo piano di legno relativamente ruvido; una fune inestensibile; un blocco di prova per l'attrito, del tipo con gancio e con superfici di appoggio di diversa area e ruvidità.

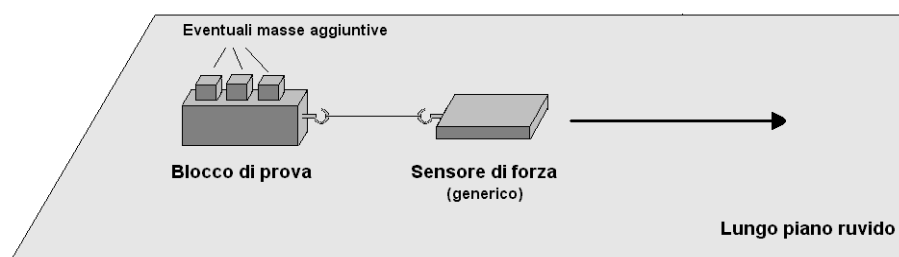


Figura 5. Schema dell'apparato sperimentale per lo studio dell'attrito con i sensori di forza.

Dopo che gli studenti, con l'aiuto del docente, hanno preparato il *setting* sperimentale, parzialmente schematizzato in figura 5, ed effettuato gli opportuni collegamenti tra il sensore di forza ed il PC, la realizzazione dell'esperimento avverrà applicando una forza esterna gradualmente crescente al sensore di forza che verrà trasmessa attraverso la fune inestensibile al blocco di prova posto sul piano orizzontale, come mostrato in figura 5. Il sensore di forza rileva la forza esercitata su di esso dal blocco che, finché il corpo è fermo, coincide con la forza di attrito esercitata dalla superficie sul blocco.

La forza applicata inizialmente sarà talmente piccola da non essere sufficiente per mettere in moto il corpo. All'aumentare della forza esterna, ad un certo istante, il corpo inizierà a muoversi. La forza di attrito statico, nell'istante immediatamente prima dell'inizio del moto, raggiunge il suo valore massimo. Non appena il blocco si muove, su di esso agirà la forza di attrito dinamico e si rivelerà attraverso il sensore una repentina diminuzione del valore del modulo della forza. L'andamento della forza rilevata dal sensore di forza in funzione del tempo è mostrato in figura 6.

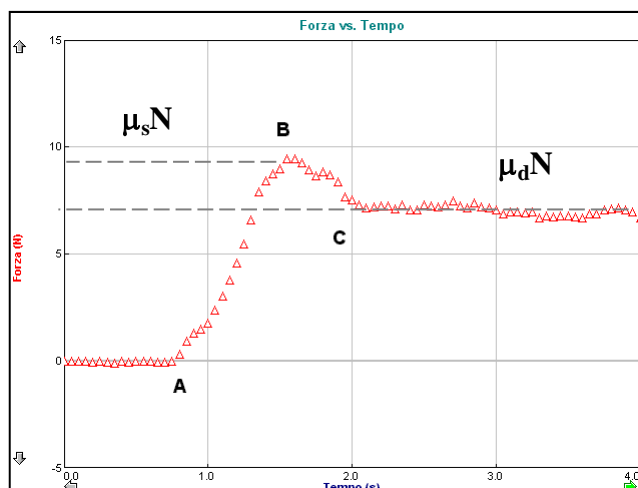


Figura 6. Andamento della forza rilevata dal sensore in funzione del tempo all'aumentare della forza esterna applicata. Le linee tratteggiate passanti per **B** e **C** individuano rispettivamente il valore della forza di attrito statico massima e il valore medio della forza di attrito dinamico.

In figura 6, il punto **A** rappresenta l'istante di tempo in cui la forza esterna inizia ad essere applicata al sensore di forza e quindi al blocco sul piano orizzontale. Conseguentemente, il sensore di forza misura una forza diversa da zero che sarà pari alla forza di attrito statico. Negli istanti di tempo compresi tra i punti del grafico **A** e **B**, la forza esterna viene gradualmente aumentata e corrispondentemente aumenta la forza di attrito, indicando che il corpo permane ancora nel suo stato di quiete. Nell'intervallo di tempo tra **B** e **C** la forza esterna è sufficiente per mettere in moto il corpo. Il valore medio dei punti presenti dopo il punto **C** determina il valore medio della forza d'attrito dinamico. Come si evince dal grafico, tale valore si mantiene costante durante il moto del corpo. Nel punto **B**, la forza di attrito statico raggiunge il suo massimo valore. Quindi, conoscendo i valori delle forze di attrito statico e dinamico e la massa del blocco, sarà possibile determinare i coefficienti di attrito statico e dinamico, rispettivamente. Ripetendo più volte tale esperimento, con lo stesso *setting* sperimentale, si otterranno più valori del coefficiente di attrito statico e dinamico. La migliore stima sarà ottenuta calcolando il valore medio di ognuno ed associando ad esso la semidispersione delle misure come errore. In questo caso, assumiamo che gli errori strumentali siano trascurabili rispetto agli errori casuali.

L'uso di strumenti di laboratorio innovativi, come sensori di forza o sensori di posizione ad ultrasuoni, dà la possibilità ai docenti e agli studenti di aumentare la varietà di esperimenti che si possono realizzare in laboratorio, nonché di rendere fattibili esperimenti non realizzabili con le metodiche tradizionali. Ad esempio, l'uso dei sensori di posizione permette di ricavare agevolmente i parametri cinematici, come la posizione, la velocità e l'accelerazione di un corpo in moto.

5. Conclusioni

In questo lavoro sono state riportate una descrizione teorica dell'attrito e degli esempi di metodologie che gli studenti possono mettere in atto durante la loro attività di laboratorio, per poter misurare il valore del coefficiente di attrito statico esistente tra due superfici a contatto. Nel lavoro viene messa in evidenza la possibilità di usare due differenti metodologie sperimentali per determinare il coefficiente di attrito statico. Si è messo in luce come entrambi le metodologie hanno aspetti positivi. Il primo metodo descritto fa uso di strumenti tradizionali e rende chiaro come è possibile determinare il coefficiente di attrito statico anche in un laboratorio cosiddetto "povero". Inoltre, poiché fa uso del piano inclinato, richiede la conoscenza dei concetti di trigonometria. Il secondo metodo, facendo uso delle nuove tecnologie, rispecchia al meglio quanto richiesto nelle indicazioni nazionali che promuovono il raggiungimento di competenze base anche con l'uso delle nuove tecnologie al fine di formare uno studente che possa essere un futuro cittadino attivo. Il secondo metodo ha anche il vantaggio di sviluppare un particolare obiettivo che è quello di rendere capace lo studente di dedurre un risultato dall'andamento grafico delle variabili da cui esso dipende.

Ringraziamenti

L'autrice desidera ringraziare il Prof. Aurelio Agliolo Gallitto per i suggerimenti e le stimolanti discussioni concretizzatisi durante la preparazione e la stesura dell'articolo.

Bibliografia

- Arons A.B. (1992). *Guida all'insegnamento della fisica*. Zanichelli.
- Baldacci M. (2005). *Il laboratorio come strategia didattica*. Bambini pensati, Newsletter n. 4.
- Bruner J. (1997). *La cultura dell'educazione*. Feltrinelli, Milano.
- Fiordilino E., Agliolo Gallitto A. (2010). *Il laboratorio di fisica nel progetto lauree scientifiche ARACNE*.
- Sandrone Boscarino G. (2004). *La didattica laboratoriale*. Scuola e Didattica. Editrice La Scuola, Inserto n. 9.

I numeri complessi dal punto di vista storico e didattico

Alberto Picone

Università degli Studi di Palermo

E-mail: picuso@inwind.it

Riassunto. Il presente manoscritto consiste nella parte della relazione finale sul Tirocinio Formativo Attivo riguardante un'esperienza significativa vissuta durante il tirocinio stesso che nel caso specifico riguarda lo studio della teoria dei numeri complessi. Prima del punto di vista didattico, tale studio viene affrontato da un punto di vista storico in modo da permettere allo studente di comprendere le motivazioni che hanno spinto i Matematici del XVI secolo a dedicarsi allo studio di tali tematiche.

1. Introduzione

In questo manoscritto, viene introdotta sia dal punto di vista didattico che dal punto di vista storico la teoria dei numeri complessi. La scelta di affrontare l'argomento anche dal punto di vista storico nasce dal fatto che solo durante il Tirocinio Formativo Attivo (TFA, vedi [3]) per il conseguimento dell'abilitazione all'insegnamento della matematica e della fisica nelle scuole secondarie di secondo grado (classe A049) l'autore ha seguito dei corsi di natura storica di matematica e di fisica realizzando quanto, per una profonda comprensione di alcuni argomenti disciplinari, sia importante la conoscenza dell'aspetto storico tanto per il docente quanto per il discente. In particolare, la scelta della teoria dei numeri complessi è dovuta al fatto che con essa si ritiene abbia avuto inizio nel 1545, anno in cui venne pubblicata l'Artis magna di Girolamo Cardano, il periodo moderno della matematica.

L'impianto teorico di riferimento per la didattica è quello di Bruno D'Amore sulle difficoltà in Matematica e gli ostacoli epistemologici [5]. Per la parte storica si fa riferimento al libro di Federico Enriques sulle *Questioni riguardanti le matematiche elementari* [7] (vedi anche [4]).

2. Storia dei numeri complessi

Il problema della risoluzione delle equazioni quadratiche si trova già affrontato nelle tavolette di argilla dei Babilonesi (2000 a.c.). Essi svilupparono un sofisticato sistema matematico, tra cui il metodo del completamento del quadrato, mediante il quale potevano determinare le soluzioni positive di qualunque equazione quadratica e le radici di alcune equazioni di terzo grado.

I primi, però, a trattare la questione dei numeri complessi furono i matematici greci. Il primo riferimento alla radice di un numero negativo si ha negli scritti di *Erone di Alessandria* nel I secolo a.c., nei quali scritti *Erone* cerca di determinare il volume di una piramide tagliata da due piani non paralleli.

Diofanto (III sec. d.c.) fu uno dei primi a riconoscere che l'insieme dei numeri reali è in un certo senso incompleto. Egli tentò di risolvere il problema, ragionevole in apparenza, di determinare i lati di un triangolo rettangolo avente perimetro 12 e area 7. Il problema porta alla risoluzione dell'equazione (scritta in termini moderni),

$$6x^2 - 43x + 84 = 0$$

dove x rappresenta la lunghezza di un lato del triangolo e che coinvolge la radice quadrata di -1 . *Diofanto* chiuse il problema dichiarandolo impossibile. I progressi compiuti dai matematici alessandrini, come *Erone di Alessandria* e *Diofanto*, sono testimoniati nell'opera di *Diofanto Arithmetica*.

A partire dal 700 d.C. la civiltà araba conobbe un forte periodo di espansione estendendo il proprio dominio dai confini della Cina fino all'Europa. Durante questo periodo gli Arabi iniziarono ad acquisire i risultati delle **scienze straniere** e intorno al 900 l'acquisizione era completa, così gli studiosi islamici poterono iniziare a costruire i loro edifici matematici sulle fondamenta greche e indiane. Il matematico arabo *Al-*

Khuwarizmi, fu il primo che introdusse il termine *al-ğabr*¹, da cui derivò *algebra*, in uno dei primi libri di algebra araba, che conteneva un'esposizione sistematica della teoria fondamentale delle equazioni. L'Occidente latino acquisì gran parte di queste conoscenze nel corso del XII secolo e ciò permise il rapido sviluppo della matematica che segnò il corso del tardo Medioevo.

2.1. Le equazioni cubiche

Diversamente da come si potrebbe pensare, la teoria dei numeri complessi ha avuto origine dalla ricerca delle soluzioni di equazioni di terzo grado e non da quelle di secondo grado. Sebbene le equazioni di secondo grado possono condurre a formule risolutive che coinvolgono radici quadrate di numeri negativi, esse sono espressione di problemi geometrici che non ammettono soluzione. Le equazioni di terzo grado invece rappresentano il primo esempio di equazioni di grado superiore al primo che, sempre come espressione di problemi geometrici, ammettono soluzioni e tali soluzioni si possono presentare mediante radici quadrate di numeri negativi.

I Matematici di inizio secolo XVI sapevano determinare quali problemi si traducevano in equazioni polinomiali di una sola variabile e distinguevano tali problemi in base al grado del polinomio. Se in una equazione di terzo grado

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

si pone $y = x - \frac{a}{3}$ si perviene ad una equazione in cui manca il termine quadratico

$$x^3 + px + q = 0.$$

Poichè però essi non consideravano i numeri negativi, dividevano i problemi relativi a equazioni di terzo grado in tre classi:

$$x^3 + px = q, \quad (1)$$

$$x^3 = px + q, \quad (2)$$

$$x^3 + q = px, \quad (3)$$

con p e q positivi. Tra queste non è presente l'equazione $x^3 + px + q = 0$ poichè non ammette radici positive.

Fu il bolognese *Scipione Dal Ferro* (1465-1526) il primo che, intorno al 1515, riuscì a risolvere l'equazione (1) anche se, non avendo mai pubblicato i risultati ottenuti, non è noto il procedimento che utilizzò².

Nel 1535 *Nicolò Fontana*, detto il *Tartaglia* (1500-1557), trovò le soluzioni per tutte e tre le tipologie di equazioni. Nel 1545, *Girolamo Cardano* (1501-1576) pubblicò, corredandole di dimostrazioni, i risultati del *Tartaglia* nel suo *Artis magna sive de regulis algebraicis liber unicus*. Ne trattarono poi il *Tartaglia* nel nono libro dei *Quesiti et invenzioni diverse* (Venezia, 1546) e, molto diffusamente, il bolognese *Raffaele Bombelli* nella sua *Algebra* (Bologna, 1572).

Vediamo le ingegnose argomentazioni geometriche che permisero per la prima volta di risolvere l'equazione (1). Si vogliono determinare un cubo e un parallelepipedo che soddisfano le seguenti condizioni (vedi Figura 1):

1. l'altezza del parallelepipedo deve essere uguale al lato x del cubo;
2. il parallelepipedo deve avere area di base p ;
3. la somma dei volumi del cubo e del parallelepipedo deve essere pari a q .

¹ *al-Kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-ğabr wa-al-muqābala*, 820 d.C.

² V.L. Frati, *Scipione dal Ferro* (Boll. di bibliogr. e storia delle Sc. matem., XII, 1910).

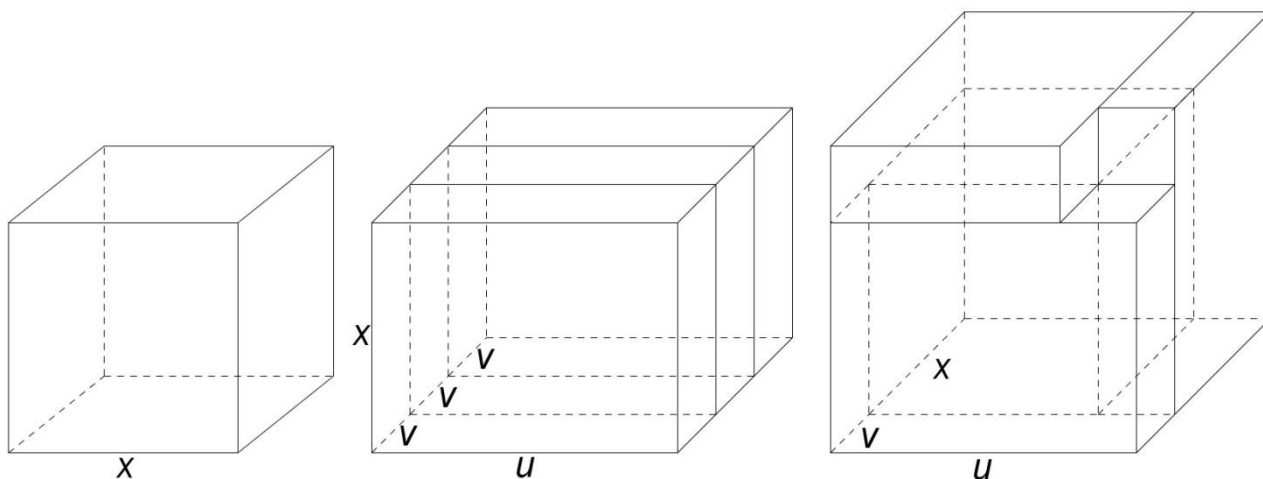


Figura 14. Costruzione geometrica per la risoluzione dell'equazione $x^3 + px = q$

È possibile supporre che esistano u e v tali che

$$\begin{cases} p = u \cdot 3v \\ x = u - v \end{cases}$$

cosicchè il parallelepipedo si possa decomporre in tre parallelepipedi uguali, aventi dimensioni u , v , e x . Si perviene così ad un solido, che il *Bombelli* chiamava *gnomonioide*, che è la differenza di due cubi: $q = u^3 - v^3$.

Ma $v = \frac{p}{3u}$, per cui $u^3 - \frac{p^3}{27u^3} = q$, ovvero

$$(u^3)^2 - qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \quad (4)$$

da cui si ricavano $u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ e $v = \frac{p}{3u} = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ e quindi

$$x = u - v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (5)$$

Poco diversa è la discussione per l'equazione (2). In questo caso si vogliono determinare un cubo e un parallelepipedo che soddisfano le seguenti condizioni (vedi Figura 2):

1. l'altezza del parallelepipedo deve essere uguale al lato x del cubo;
2. il parallelepipedo deve avere area di base p ;
3. la differenza fra il volume del cubo e quello del parallelepipedo deve essere pari a q .

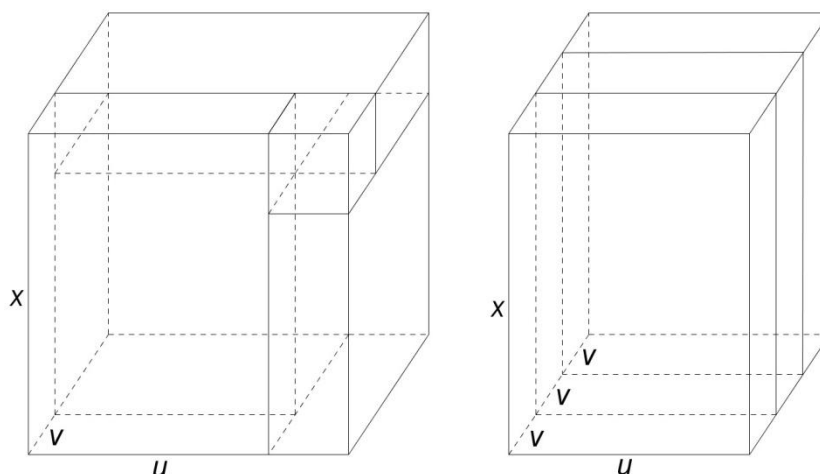


Figura 15. Costruzione geometrica per la risoluzione dell'equazione $x^3 = px + q$

Se $\frac{p}{3} \leq \frac{x^2}{4}$ è possibile supporre l'esistenza di u e v tali che

$$\begin{cases} p = u \cdot 3v \\ x = u + v. \end{cases}$$

In tal modo si perviene a un solido il cui volume è somma di due cubi: $q = u^3 + v^3$.

Ma ancora $v = \frac{p}{3u}$, per cui $u^3 + \frac{p^3}{27u^3} = q$, ovvero

$$(u^3)^2 - qu^3 + \frac{p^3}{27} = 0 \quad (6)$$

da cui si ricavano $u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$ e $v = \frac{p}{3u} = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$ e quindi

$$x = u - v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} \quad (7)$$

Per quanto riguarda l'equazione (3), essa veniva ricondotta dal *Tartaglia* all'equazione (2), infatti: se α è soluzione di $y^3 = py + q$, allora è possibile provare che $x = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{p - \frac{3\alpha^2}{4}}$ è radice dell'equazione (3).

2.2. IL caso irriducibile. Indagine di G. Cardano

Le equazioni (4) e (6) sono le risolventi di secondo grado delle equazioni (1) e (2) rispettivamente. Mentre la (4) ha discriminante sempre positivo, la (6) ha discriminante $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}$ che può essere negativo. Tale caso fu detto *irriducibile*.

È facile convincersi che anche nel caso irriducibile esistono un cubo e un parallelepipedo soddisfacenti le tre condizioni, ovvero l'equazione ammette sempre una soluzione reale. Nel procedimento *tartaelano* vi è però il problema che se $q < \frac{1}{4}x^3$ allora u e v non esistono, infatti: nel caso limite $u = v = \frac{1}{2}x$ si ha $u^3 + v^3 = \frac{1}{4}x^3$. Ma $q < \frac{1}{4}x^3$ equivale a dire $x^3 - px < \frac{1}{4}x^3$ ovvero $\frac{1}{4}x^3 < \frac{px}{3}$ da cui si perviene a $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0$.

L'operazione di estrazione della radice quadrata di un numero negativo dovette essere oggetto di discussione fra i Matematici della prima metà del XVI secolo e il *Cardano nell'Artis magnae sive de regulis alge-*

braicis liber unicus credette di doverne far cenno, esponendo una *Regula falsum ponendi*³ per la risoluzione del seguente problema:

si divida 10 in due parti a e b , il prodotto dei quali sia uguale a 40.

Il *Cardano* discusse il problema facendo uso della Proposizione V del libro di *Euclide* pervenendo alle soluzioni

$$a = 5 + \sqrt{-15} \text{ e } b = 5 - \sqrt{-15}.$$

Per quanto riguarda $\sqrt{-15}$ egli osserva:

Quae quantitas vere est sophistica, quoniam per eam non ut in puro minus (come con le comuni quantità negative), *nec in aliis operationibus exercere licet, nec venari quid sid.* E aggiunge: *Hucusque progreditur arithmetica subtilitas, cujus hoc extremum adeo est subtile ut sit inutile.*

Contemporaneamente, nel manoscritto *Ars magna Arithmeticae*⁴, si soffermava un pò più a lungo su considerazioni sulle radici quadrate. Dei sistemi⁵:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 20 \end{cases}$$

dà le soluzioni

$$(3 + \sqrt{-7}, 3 - \sqrt{-7}) \text{ e } (3 + \sqrt{-11}, 3 - \sqrt{-11}),$$

osservando:

Istud tamen verum est quod tales aequationes requirunt intellectum subtilissimum et sunt quasi entia rationis. Aggiunge subito dopo: *R m. 9 non est 3p. nec 3m.* (la $\sqrt{-9}$ non è nè $+3$ nè -3), *sed quaedam tertia natura abscondita.*

Dunque, sebbene il *Cardano* intuì l'esistenza di un nuovo insieme numerico, non decise di *avventurarvisi*. Egli, che sapeva che una equazione di terzo grado ammette fino a tre radici, nell'*Artis magna sive de regulis algebraicis liber unicus* si limita a suggerire degli artifici⁶, utili a determinare le radici di qualche equazione di terzo grado a discriminante negativo. Tali artifici consistono nel determinare quantità ausiliarie, le cui determinazioni dipendono da altre equazioni di terzo grado e che, dagli esempi che egli considera, sembrano ottenute per tentativi.

Nell'*Ars magna arithmeticae* dice dapprima⁷ che nel caso irriducibile *nulla potest sequi aequatio* ma poi⁸ posta l'equazione

$$x^3 = 9x + 6$$

e ne scrive la radice

$$x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{-18}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{-18}}$$

ottenuta dalla formula risolutiva (7).

Nella ristampa del 1570 dell'*Artis magna sive de regulis algebraicis liber unicus*, egli vi aggiunge un suo *De regula Aliza libellus*⁹, interamente dedicato allo studio delle equazioni di terzo grado e delle questioni aritmetiche ad esse connesse. Vi è esposto un complesso tentativo di aggirare le difficoltà del caso irridu-

³ Cap. XXXVII, *Regula II.*

⁴ Stampato nel 1663 a Lione.

⁵ *Quaestio XXXVIII.*

⁶ Cap. XXV.

⁷ Cap. XXX.

⁸ *Quaestio XXXVIII.*

⁹ Cioè *de regula irresolubili*, dice il Cossali.

cibile. A causa dei risultati infruttuosi, il *Cardano* arriva a sospettare che la risoluzione del caso irriducibile necessitasse la considerazione di numeri **silvestri**,

*scilicet quae non sint in aliquo genere radicum, nec compositae ex illis, nec per detractorem relictae*¹⁰ cioè pensava all'esistenza di una soluzione trascendente. In tal modo il *Cardano* si allontanava sempre più dallo studio delle radici quadrate di numeri negativi.

Anzi nel Capitolo VI del *De regula Aliza* egli scriveva:

Radix plus est (esistono le radici di numeri positivi), *radix minus quadrata nulla est, juxta communem usum* (non esistono le radici quadrate di numeri negativi, stando all'uso comune) *sed de hoc inferius agemus*.

Nel Capitolo XXII egli vuole ad ogni costo convincersi che come prodotto di due numeri negativi si possa definire il prodotto dei valori assoluti dei due numeri cambiato di segno. Ciò però gli richiede un notevole sforzo per illudersi che tale definizione possa essere compatibile con quelle comuni che egli stesso aveva sempre utilizzato.

2.3. L'opera di Raffaele Bombelli

Mentre il genio del *Cardano* si logorava in tal modo, *Raffaele Bombelli* componeva il suo trattato, che è una esposizione completa e ordinata di quanto a quel tempo era noto circa le equazioni di grado minore o uguale a 4. Specialmente importante e originale è la discussione del caso irriducibile.

Il procedimento del *Tartaglia* per la risoluzione dell'equazione (2) conduceva alla formula

$$x = u - v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

che è valida nel campo dei reali se $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} \geq 0$.

Per trattare il caso contrario il *Bombelli* si esprime così:

*Il radicale $\sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$ non si può chiamare nè più nè meno, però lo chiamerò più di meno, quando egli si doverà aggiungere, e, quando si dovrà cavare, lo chiamerò men di meno; e quest'operazione è necessarissima più che altre, ...*¹¹.

Dunque le radici quadrate di numeri negativi che oggi noi chiamiamo numeri immaginari, sono *numeri di specie nuova*, che il *Bombelli* chiama *più di meno* e *meno di meno* e che egli abbrevia con *p. di m.* e *m. di m.* Tale notazione non fu in seguito adottata da alcuno ed *Eulero* introdusse l'unità immaginaria *i* che noi tutti oggi conosciamo e che dal 1801 per primo *Gauss* usò costantemente.

Il *Bombelli* definisce prima di tutto i prodotti di numeri reali e immaginari nel seguente modo:

Prima tratterò del Moltiplicare, ponendo la regola del più et meno.

Più via più di meno fa più di meno (+ · +i = +i),

Meno via più di meno fa meno di meno (- · +i = -i),

Più via meno di meno fa meno di meno (+ · -i = -i),

Meno via meno di meno fa più di meno (- · -i = +i),

Più di meno via più di meno fa meno (+i · +i = -),

Più di meno via meno di meno fa più} (+i · -i = +),

Meno di meno via più di meno fa più} (-i · +i = +),

Meno di meno via meno di meno fa meno} (-i · -i = -).

Per quanto riguarda la somma dice:

¹⁰ Cap. X

¹¹ *Algebra*, pag. 169.

Più di meno con più di meno si somma e fa più di meno } ($ia + ib = i(a + b)$); *ma più con più di meno non si può sommare, se non dire più di meno; più cavato di più di meno non si può; se non per via del meno* } ecc. ecc..

Dunque egli considera anche i binomi del tipo $a + ib$ e $a - ib$ che con *Gauss* chiameremo *numeri complessi*¹².

Date le regole di cui sopra, il *Bombelli* usa di continuo e senza incertezza le seguenti definizioni anche senza averle mai enunciate

- α) se $a = a'$ e $b = b'$, $a + ib = a' + ib'$ e viceversa
 β) $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$
 γ) $(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$

non ponendo così in discussione la struttura di campo dell'insieme numerico che egli stesso ha definito.

Introdotti i numeri complessi e costruitasi la sua nuova e più ampia Aritmetica, il *Bombelli* poteva affermare che le equazioni di secondo grado ammettono sempre due radici, distinte o coincidenti e, ad esempio, per l'equazione:

$$x^2 - 8x + 20 = 0,$$

trova appunto:

$$x = 4 \pm 2i.$$

In particolare ammetteva sempre due radici la risolvente di secondo grado dell'equazione cubica:

$$x^3 = px + q,$$

e per tale motivo la formula tartaleana era sempre valida.

Per esempio per l'equazione

$$x^3 = 15x + 4, \tag{8}$$

si aveva

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}.$$

Ma il *Bombelli* non si fermava a questo punto. Aveva infatti studiato un metodo per estrarre la radice cubica di un binomio $a + ib$: posto

$$\xi + i\eta = \sqrt[3]{a + ib},$$

si ha, elevando alla terza potenza (vedi definizione γ) ed eguagliando le parti reali e le parti immaginarie (vedi definizione α):

$$\begin{cases} \xi^3 - 3\xi\eta^2 = a, \\ 3\xi^2\eta - \eta^3 = b \end{cases}$$

e quadrando e sommando:

$$(\xi^2 + \eta^2)^3 = a^2 + b^2.$$

Ora, se $a^2 + b^2$ era il cubo di un intero o razionale m , dalle equazioni:

$$\begin{cases} \xi^3 - 3\xi\eta^2 = a, \\ \xi^2\eta + \eta^2 = m \end{cases}$$

il *Bombelli* ricavava, come egli stesso ammette, *a tentone*¹³ ξ ed η . Così per esempio trovava $\sqrt[3]{2 + 11i} = 2 + i$ e poichè analogamente risultava $\sqrt[3]{2 - 11i} = 2 - i$ concludeva che la radice x dell'equazione (8) era uguale a $2 + i + 2 - i = 4$ in base alla definizione β .

¹² Tale denominazione fu usata per la prima volta nella *Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio II*, del 1831 (Art. 30).

Dunque attraverso un nuovo algoritmo e con l'uso dell'immaginario, era in grado di calcolare la radice positiva dell'equazione di terzo grado.

Ora, proprio perchè la soluzione era ottenuta con un algoritmo che non sembrava interpretabile mediante interpretazioni geometriche, il Bombelli deve avere a lungo meditato sulla sua invenzione. Egli dice:

...benchè a molti parerà questa cosa stravagante, perchè di questa opinione fui anche già un tempo parendomi più tosto fosse sofisticata, che vera, nondimeno tanto cercai, che trovai la dimostrazione, la quale sarà qui sotto notata, sì che questa ancora si può mostrare in linea, che pur nelle operationi serve senza dif-fucultade alcuna, et assai volte si trova la valuta del Tanto per numero...

Il Bombelli trovò dunque delle risoluzioni grafiche delle equazioni cubiche (*dimostrazioni per linea* come egli le chiamava), collocando *per tentativi* sul foglio da disegno una o due *squadre* che intercettassero delle rette in modo da individuare segmenti tali che le misure delle loro lunghezze e le aree dei quadrati e rettangoli che essi stessi determinavano verificassero certe relazioni.

Considerata ad esempio l'equazione $x^3 = px + q$, ovvero $(x^2 - p)x = q$, bisognava costruire un rettangolo di area q e lati x e $x^2 - p$.

Siano presi su una retta r i segmenti $\overline{AB} = 1$ e $\overline{BC} = p$ (vedi Figura 3).

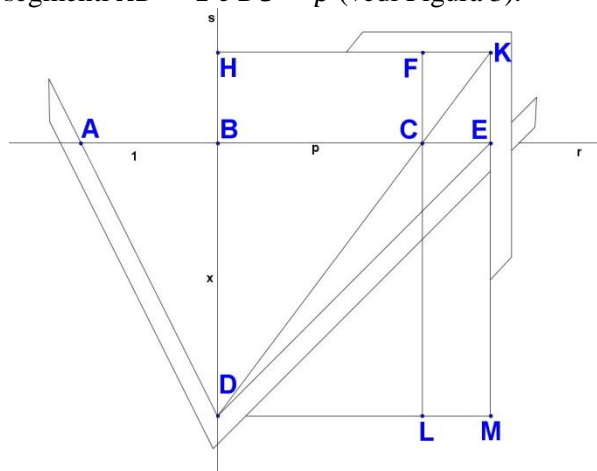


Figura 3. Costruzione geometrica per la risoluzione dell'equazione $x^3 = px + q$

Si consideri una squadra della quale un braccio passi per A e il vertice D tale da scorrere su una retta s perpendicolare ad r in B sia tale che $\overline{BD} = x$. Sia E il punto di intersezione dell'altro braccio della squadra con r . Per il **Secondo Teorema di Euclide**, il segmento $\overline{BE} = x^2$ e di conseguenza $\overline{CE} = x^2 - p$. Si collochi (per tentativi) una seconda squadra con un braccio su una retta parallela ad r tale da individuare i punti H ed F tali che il rettangolo $BCFH$ abbia area q (ovvero tale che $\overline{BH} = \frac{q}{p}$). L'altro braccio passi per E . Il Bombelli si accorse che i punti D , C e K erano allineati e, per la Proposizione 43 del I Libro di Euclide (il **Teorema dello Gnomone**), i rettangoli $BCFH$ e $CEML$ hanno la stessa area.

Nelle sue ricerche, il Bombelli scoprì come un'equazione cubica a discriminante negativo dipendesse dalla trisezione di un angolo. Dice egli:

quale agguagliamento mi serviva in dividere l'angolo in tre parti pari (come a suo luogo si dirà)

e in seguito, nella sua opera *Algebra* (che a causa della sua morte non potè stampare e che si pensava perduta fin quando venne rinvenuto dal Prof. Ettore Bortolotti nella Biblioteca comunale dell'Archiginnasio di Bologna il suo manoscritto¹⁴) diceva:

... perchè non è per ancora ridutta a quella perfettione che la eccellentia di questa disciplina ricerca, mi sono risoluto di volerla prima meglio considerare, avanti che la mandi nel conspetto degli huomini.

¹³ pag. 180.

¹⁴ V. la nota: *La trisezione dell'angolo e il caso irriducibile nell'«Algebra» di R. Bombelli* (Rendic. dell'Accad. dell'Istituto di Bologna, anno 1922-23)

In conclusione, sebbene nei trattati di Algebra, negli accenni che si fanno alle origini di tale teoria, si incontra talvolta il solo nome del *Cardano*, bisogna riconoscere in *Bombelli* il fondatore della teoria dei numeri complessi. Si è infatti visto come il *Cardano* rivolse ogni suo studio ad *evitare l'immaginario*, mentre il *Bombelli* seppe *utilizzarlo*. Se è vero che egli lo usa come espediente, è anche vero che contestualizzato nell'epoca in cui visse, epoca in cui l'algebra non era mai disgiunta dalle costruzioni geometriche, non possiamo non annoverarlo tra i nostri maggiori Matematici.

2.4. Vieta, Girard, Cartesio e Leibniz

L'opera del *Bombelli* fu studiata e meditata da tutti i cultori delle matematiche per oltre un secolo dopo di lui e, come a lui, la teoria dei numeri immaginari apparve stravagante e perciò oscura.

Le formule del *Tartaglia* non furono più adottate nel caso irriducibile, quando i progressi della Trigonometria consentirono di risolvere, in quel caso, l'equazioni mediante funzioni circolari.

Questa nuova scoperta si deve a *Francesco Vieta* da Fontenay-le-Comte (Poitou) (1540-1603) e sembra che sia derivata dal confronto dell'equazione

$$x^3 - px + q = 0 \quad (p > 0), \quad (9)$$

con la formula di triplicazione

$$4\cos^3 \frac{\vartheta}{3} - 3\cos \frac{\vartheta}{3} = \cos \vartheta.$$

Se in tale formula poniamo $\cos \frac{\vartheta}{3} = \frac{x}{\rho}$, essa diventa

$$4x^3 - 3\rho^2 x = \rho^3 \cos \vartheta \quad (10)$$

e, come equazione nell'indeterminata x , ammette soluzioni

$$x_1 = \rho \cos \frac{\vartheta}{3}, \quad x_2 = \rho \cos \frac{\vartheta+2\pi}{3}, \quad x_3 = \rho \cos \frac{\vartheta+4\pi}{3}.$$

Se fosse $\frac{3\rho^2}{4} = p$ e $-\frac{\rho^3}{4} \cos \vartheta = q$, la (10) coinciderebbe con la (9). Ma ciò avviene prendendo $\rho = 2\sqrt{\frac{p}{3}}$ e $\cos \vartheta = -\frac{q}{2} : \left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ che è possibile fare quando $\left|\frac{q}{2} : \left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right| \leq 1$ ovvero quando $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} \leq 0$.

Sotto tale ipotesi, le radici della (9) sono dunque

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos \frac{\vartheta}{3}, \quad x_2 = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos \frac{\vartheta+2\pi}{3}, \quad x_3 = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos \frac{\vartheta+4\pi}{3},$$

essendo $\vartheta = \arccos \left[-\frac{q}{2} : \left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \right]$.

Dunque è possibile costruire le radici dell'equazione (9) prendendo in considerazione la circonferenza di raggio $2\sqrt{\frac{p}{3}}$ e trisecandola a partire dall'arco ϑ .

Dopo *Vieta*, la risoluzione del caso irriducibile mediante la trisezione dell'angolo fu illustrata da *Alberto Girard* († 1632) nella sua *Invention nouvelle en l'Algebre* (1629)¹⁵ e da *Renato Descartes* (1596-1650) nella *Gèometrie* (1637), i quali, al pari di *Vieta*, pongono le formule tartaleane per il solo caso di discriminante positivo, e non si pronunciano sull'uso degli algoritmi del *Bombelli* quando entrano in gioco gli immaginari.

Il *Girard* considerava tuttavia in più luoghi le radici quadrate di numeri negativi, chiamandole *racines indicibles* e adottando per esse la notazione $\sqrt{-}$. A lui si deve una prima enunciazione del **Teorema Fondamentale dell'Algebra**, sul numero delle soluzioni di una equazione; fra queste egli chiama *solutions envelopées* quelle che coinvolgono radici indicibili, ed afferma che è utile considerarle per tre ragioni:

¹⁵ Ristampata a Leida da D. Bierens de Haan nel 1884.

*pour la certitude de la reigle generale, et qu' il ny a point d'autre solutions et pour son utilitè*¹⁶
ovvero: per la certezza della regola generale, perchè non ha altre soluzioni e per la sua utilità.

Nella Geometria di *Cartesio* è nuovamente enunciato il teorema sul numero di soluzioni di una equazione, e vi si aggiunge:

*Au reste, tant les vraies racines que les fausses ne son pas tousiours reelles, mais quelquefois seulement imaginaires*¹⁷.

Così, qui per la prima volta, la parola *immaginario* viene adottata in contrapposizione all'altra *reale*.

Il primo che tornò ad adottare le formule tartaleane anche nel caso irriducibile fu *Gottifredo Guglielmo Leibniz* (1646-1716), il quale è stato uno studiosissimo dell'opera del *Bombelli*¹⁸ e caldo ammiratore degli algebristi italiani. In un suo scritto *De ortu, progressu et natura algebrae, nonnullisque aliorum et propriis circa eam inventis* dichiara:

*...fatendum est, Algebram totam, quanta nunc habetur...revera italis deberi*¹⁹.

Ma al *Leibniz*²⁰ sembravano inutili i segni speciali *p. di m.* e *m. di m.* adottati dal *Bombelli* per gli immaginari. Egli afferma la validità delle formule del *Tartaglia* in ogni caso, e le scrive, nel caso di discriminante negativo, col simbolo $\sqrt{-}$. Ciò induce gli storici a pensare che, escludendo la possibilità di utilizzare un nuovo simbolo, pensasse di non avere a che fare con un nuovo concetto. Del resto egli stesso riconosceva di non essere riuscito a comprendere la natura di questo immaginario quando, nel 1702, lo chiamava:

*analyseos miraculum, idealis mundi monstrum, pene inter Ens et non-Ens amphibium*²¹.

Sono tuttavia notevoli gli esempi che il *Leibniz* sapeva addurre su espressioni analoghe a quelle delle radici delle equazioni cubiche, e cioè che coinvolgono quantità immaginarie pur avendo valore reale. Ad esempio trovava che $\sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}} = 6$.

2.5. Il Teorema di A. de Moivre

Abbiamo visto come il *Bombelli* si sia, tra le altre cose, occupato della ricerca delle radici cubiche di un numero complesso. *Abramo De Moivre* (1667-1754)²² si occupò invece della determinazioni delle radici *n*-esime di un numero complesso. Noti *a* e *b* reali, il problema consiste nel determinare ξ ed η tali che

$$\xi + i\eta = \sqrt[n]{a + ib}.$$

Facendo la potenza *n*-esima ambo i membri ed eguagliano parti reali e parti immaginarie, si ottiene

$$\begin{cases} \xi^n - \binom{n}{2} \xi^{n-2} \eta^2 + \binom{n}{4} \xi^{n-4} \eta^4 - \dots = a \\ \binom{n}{1} \xi^{n-1} \eta - \binom{n}{3} \xi^{n-3} \eta^3 + \binom{n}{5} \xi^{n-5} \eta^5 - \dots = b. \end{cases} \quad (11)$$

Si noti che alle stesse equazioni si porrebbe se si ponesse

¹⁶ *Invention nouvelle en l'Algèbre*, foglio F.

¹⁷ *Gèomètrie*, p. 380.

¹⁸ *Leibniz ens mathematicae Schriftem*, ed. di C.J. Gerhardt: T. 1° (Berlino, 1849), XXX,XXXVII,XLII; T. 2° (Berlino, 1850), I, II (1675-77).

¹⁹ *Math. Schriften*, ed. Gerhardt: T. 7° (Halle,1863), XVIII (p. 211) v. anche ibid. *Geometrica IV* (p. 315)

²⁰ *Math. Schriften*, ed. Gerhardt: T. 7°, XIV, De resolutionibus aequationum cubicarum triradicalium.

²¹ *Math. Schriften*, ed. Gerhardt: T. 5° (Halle, 1858), *Specimen novum analyseos pro Scientia Infiniti, circa Summas & Quadraturas* (p. 350-361).

²² Nel *Philosophical Transactions* si hanno tre memorie riguardanti il teorema che porta il suo nome: *Aequationum Quarundam Potestatis Tertiae, Quintae, Septimae, Nonae, & Superiorum, ad Infinitum Usque Pergendo, in Terminis Finitis, ad Instar Regularum pro Cubicis Quae Vocantur Cardani, Resolutio Analytica* (Vol. XXV, 1706-7, p. 2368-71); *De sectione anguli* (Vol. XXXII, 1722-3, p. 228-230) e *De Reductione Radicalium ad Simpliciores Terminos, Seu de Extrahenda Radice Quacunque Data ex Binomio a + \sqrt{+b}, vel a + \sqrt{-b}* (Vol. XL, 1737-8, p.463-478).

$$\xi - i\eta = \sqrt[n]{a - ib}.$$

Quadrando e sommando entrambe le equazioni del sistema si ottiene:

$$(\xi^2 + \eta^2)^n = a^2 + b^2.$$

quindi, posto $a^2 + b^2 = r^2$ e $\sqrt[n]{r} = \rho$ risulta $\xi^2 + \eta^2 = \rho^2$ ovvero $\eta^2 = \rho^2 - \xi^2$.

Sostituendo l' η^2 così ottenuta nella prima equazione del sistema (11), si otterrà l'equazione nella sola ξ :

$$\xi^n - \binom{n}{2} \xi^{n-2} (\rho^2 - \xi^2) + \binom{n}{4} \xi^{n-4} (\rho^2 - \xi^2)^2 - \dots = a. \quad (12)$$

Il *De Moivre* calcolò tali equazioni per i primi valori di n ottenendo:

$$\begin{aligned} \xi &= a \\ 2\xi^2 - \rho^2 &= a \\ 4\xi^3 - 3\rho^2\xi &= a \\ 8\xi^4 - 8\rho^2\xi^2 + \rho^4 &= a \\ 16\xi^5 - 20\rho^3\xi^3 + 5\rho^4\xi &= a \\ \dots &\dots \dots \end{aligned}$$

e osservò che tali equazioni avevano gli stessi coefficienti che si presentano nelle formule per la moltiplicazione degli archi:

$$\begin{aligned} \cos\vartheta &= \text{Cos}\vartheta \\ 2\cos^2\frac{\vartheta}{2} - 1 &= \text{Cos}\vartheta \\ 4\cos^3\frac{\vartheta}{3} - 3\cos\frac{\vartheta}{3} &= \text{Cos}\vartheta \\ 8\cos^4\frac{\vartheta}{4} - 8\cos^2\frac{\vartheta}{4} + 1 &= \text{Cos}\vartheta \\ 16\cos^5\frac{\vartheta}{5} - 20\cos^3\frac{\vartheta}{5} + 5\cos\frac{\vartheta}{5} &= \text{Cos}\vartheta \\ \dots &\dots \dots \end{aligned}$$

Dal confronto dedusse, sebbene non ne abbia dato la dimostrazione, che in generale, preso $\vartheta = \arccos \frac{a}{\rho^n}$, l'equazione (12) era verificata per $\xi = \rho \cos \frac{\vartheta + 2k\pi}{n}$, essendo k un qualsiasi numero intero. Risultava inoltre $\eta = \rho \sin \frac{\vartheta + 2k\pi}{n}$ e

$$\sqrt[n]{a + ib} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \pm i \sin \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \right). \quad (13)$$

Si osservi che $\vartheta = \arccos \frac{a}{\rho^n}$ esiste sempre essendo $\frac{a}{\rho^n} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1$.

Così il *De Moivre* stabiliva che le radici n -esime di un numero complesso sono n distinte e che si ottengono dalla (13) attribuendo a k ad esempio i valori da 0 a $n - 1$.

2.6. L'interpretazione geometrica della teoria dei numeri complessi

Coi risultati del *De Moivre* la teoria delle operazioni elementari sui numeri complessi $a + ib$ era completa.

Ma si doveva continuare, quasi per un altro secolo ancora, a considerarla con senso di disagio, perchè, se in essa si aveva *un assieme di algoritmi*, che serviva a determinare, mediante i dati reali di alcuni problemi, le soluzioni reali dei problemi stessi, i numeri complessi rimanevano null'altro che *segnî*: i numeri complessi

erano segni di non si sapeva quali grandezze ma tutti ritenevano necessario che fossero la rappresentazione di una qualche specie di grandezza. Non si poteva rinunciare ad una *interpretazione geometrica* della teoria. Per giungere a tale interpretazione bisognava riconoscere che *il concetto di numero complesso è svolgimento di quello di numero reale, corrispondente al passaggio dalla considerazione dell'ordine a una dimensione a quella d'un ordine doppio, a due dimensioni.*

Oggi potrebbe sembrare evidente che erano vicini alla rappresentazione che tanto cercavano grazie al nesso fra l'estrazione di radice da binomi complessi e la suddivisione del cerchio intravisto dal *Bombelli* e precisato negli studi di *Vieta* e del *De Moivre*.

Invece per molti anni vi furono solo brevi accenni a tale rappresentazione. Ad esempio, il *Wallis*, nella sua *Algebra*, cercò di costruire le radici complesse di una equazione quadratica come somma di vettori di un piano, senza però mai capire che doveva pensare ad *a* e *ia* come vettori ortogonali.

L'oscurità dell'origine del concetto di numero complesso doveva dar luogo a controversie, e se ne ebbero di importanti fra i più insigni Matematici del tempo. Qui di seguito riassumiamo le ragioni di tali controversie.

Al lume della rigida logica tutte quelle discussioni perdono valore ai nostri occhi: dov'era un ragionamento imperfetto e in forma lacunare, si sostituisce un ragionamento in forma senza lacuna; e dove il contrasto portava su enti non definiti mal definiti, il riconoscimento dell'arbitrario della definizione scioglie i dubbi, togliendo significato alla materia della lite.

*Ma gli Spiriti Magni, che si travagliarono nei fecondi contrasti, vedevano - oltre le formule logiche - una specie di **ordine naturale delle verità matematiche**, in cui teorema non è fatto, ma è scoperto, e il definire - lungi dall'apparire arbitrario - suggella un processo di pensiero che tende a **comprendere ed unificare la realtà concettuale**. Perciò essi anticipavano l'uso di concetti non definiti, e presupponevano la permanenza delle proprietà formali, e con arditezza sublime legavano i vari domini del sapere in una visione di continuità, cui non sempre ci è dato di assegnare un significato sicuro e preciso*²³.

L'interpretazione geometrica della teoria dei numeri complessi giunse a conclusione grazie ad un topografo danese *Caspar Wessel* (1745-1818) con una sua *Memoria Om Directionen analytiske Betegning* del 1797²⁴. Tale interpretazione era interamente nota a *Gauss*, quando scriveva la sua *Dissertazione inaugurale* (1797).

Ma, da una parte la memoria del *Wessel* rimase sconosciuta e d'altra parte *Gauss*, nella suddetta dissertazione, diceva che avrebbe trattato la natura delle quantità immaginarie in apposito scritto, che poi non pubblicò mai, cosicché con tale artificio evitò considerazioni sui numeri complessi.

Poco più tardi, nel 1806, *Giovanni Roberto Argand* (1768-1822) pubblicava una memoria dal titolo *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*²⁵. In questa ed in altre memorie, contenute nei tomi IV e V (1813-14, 1814-15) degli *Annali di Gergonne*, l'*Argand*, forse in modo meno chiaro di quanto avesse fatto *Wessel*, giungeva agli stessi risultati. Gli scritti dell'*Argand* furono oggetto di importanti discussioni, dalle quali l'interpretazione geometrica dell'immaginario finì con l'apparire pienamente soddisfacente. E *Gauss* e *Cauchy* si fecero assertori della sua legittimità e opportunità: il primo con una nota del 1831 alla *Theoria residuorum biquadraticorum, commeentatio secunda*²⁶, e il secondo con parecchi studi di Analisi algebrica contenuti nel IV volume degli *Exercices d'analyse et de physique mathématique* (1847).

2.7. IL Teorema Fondamentale dell'Algebra

²³ F. Enriques, *Conservazione e progresso nelle Matematiche* (Period. di Matem. 4, II, 1922, p. 483-486). - V. anche E. Rignano, *Psicologia del ragionamento* (Bologna, Zanichelli, 1920), p. 156-171.

²⁴ Fu stampata negli *Atti dell'Accademia danese di Scienze e Lettere* (9, V, 1799) e ristampata, dopo cent'anni dalla presentazione, in traduzione francese (*Essai sur la représentation analytique de la direction*, Copenhagen, Høst & Søn, 1897).

²⁵ Ristampata a Parigi da Gauthier-Villars nel 1874.

²⁶ *Göttingische gelehrte Anzeigen*, 23 aprile 1831 (Gauss, werke, T. II, p. 169).

Come abbiamo visto, il *Cardano* aveva compreso che una equazione di terzo o quarto grado ammette rispettivamente tre o quattro soluzioni. Abbiamo anche detto che il primo ad enunciare il *Teorema fondamentale dell'Algebra* fù *Girard*. Tuttavia la prima vera dimostrazione di esso è pubblicata nel 1799 da *Carlo Federico Gauss* (1777-1855) con la *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*²⁷.

Nel lungo periodo compreso tra l'enunciazione del *Girard* e la dimostrazione di *Gauss*, l'oscurità che avvolgeva il concetto di numero immaginario fece sì che la questione non fosse posta in modo preciso. Si trattava di stabilire che ogni equazione algebrica ammette soluzioni reali e/o soluzioni nella forma $a + ib$ con $i = \sqrt{-1}$.

Invece molti pensavano come *assioma* che ogni equazione ammettesse radici possibili e radici *impossibili*. Le radici possibili erano quelle reali mentre per quelle impossibili si era insinuata nelle considerazioni dei Matematici la possibilità dell'esistenza di una misteriosa *quantità impossibile* che non sapevano stabilire se coincidesse o contenesse quella di quantità complessa. Dunque per *assioma* ritenevano che ogni equazione algebrica ammettesse soluzioni reali, o della forma $a + ib$ o di una forma ancora ignota o ancora con valori non contenuti in alcuna forma. Partendo da tale *assioma*, attraverso considerazioni nelle quali *si parlava di somme e prodotti di queste quantità impossibili*, si dimostrava che le sole soluzioni erano quelle della forma $a + ib$.

Tali considerazioni, per quanto abbiano più una natura di principio, avevano in sè, per quanto rozza e imprecisa, una struttura di dimostrazione.

Si ebbero diverse dimostrazioni insufficienti. Tra queste si devono menzionare quelle di insigni Matematici come *Jean Le Rond d'Alembert* (1717-1783)²⁸ e *Leonardo Eulero* (1707-1783)²⁹ negli anni 1746 e 1749 rispettivamente. Tali insufficienze vennero messe alla luce da *Gauss* appunto nella sua *Dissertazione* sebbene ne riconosceva in esse valore e ragione. Egli dice:

³⁰*solam formam reprehendo, quae quamvis in inveniendis novis veritatibus magnae utilitatis esse possit, tamen in demonstrando, coram publico, minime probanda videtur.*

Ad ogni modo, la dimostrazione del *D'Alembert*, per quanto poco rigorosa, ha in se, più delle altre, qualcosa di vitale tale da giustificare il fatto che il teorema porti il nome dell'enciclopedista francese.

3. Ostacoli epistemologici

Il principale ostacolo epistemologico riguardante i numeri complessi, dal quale derivano molti altri, è quello di pensare l'unità immaginaria:

$$i = \sqrt{-1}$$

come un particolare radicale appartenente al campo dei reali e non come un elemento del nuovo campo dei numeri complessi con propri operatori e regole. Da questa consuetudine sbagliata deriva per esempio il seguente paradosso:

$$-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Di seguito un elenco di quelli che ritengo i principali ostacoli epistemologici riguardante i numeri complessi.

1. Pensare di estendere le usuali operazioni di radicali (algebra reale) ai numeri complessi.

²⁷ Helmsted, 1799; Werke, T. III, p. 1.

²⁸ *Historie de l'Académie royale des Sciences et belles Lettres*, Berlino, Annata II, 1746 (1748), p. 182.

²⁹ *Historie de l'Académie royale des Sciences et belles Lettres*, Berlino, Annata V, 1749 (1751), p. 222.

³⁰ Riconosce, in altro punto, *hujusmodi licentias plerumque ad solam formam et quasi velamen ratiociniorum pertinere, quod veri geometrae aciesmox penetrare possit.*

Questo errore genera situazioni paradossali come quella esposta in precedenza la cui motivazione deriva dal fatto che nel campo dei complessi vale la proprietà $(\sqrt[n]{z})^n = z$ ma non vale la proprietà $\sqrt[n]{z^n} = z$.

2. Pensare i numeri reali come particolari numeri complessi.
Lo studente non vede l'inclusione $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ come un'immersione di \mathbb{R} in \mathbb{C} , piuttosto egli identifica \mathbb{R} come un particolare sottoinsieme di \mathbb{C} con conseguenti errori nello stabilire correttamente il campo numerico in cui si opera e le proprietà da utilizzare.
3. Incapacità di risolvere equazioni di secondo grado con $\Delta < 0$.
Non di rado in questa situazione lo studente conclude che è *impossibile perché non esiste la radice quadrata di un numero negativo* dimenticando che la richiesta è della soluzione dell'equazione non è nel *vecchio* campo dei numeri reali, ma nel *nuovo* campo dei numeri complessi. Vi è una certa reticenza ad abbandonare le conoscenze pregresse.
4. Difficoltà di accettare che ogni numero possiede esattamente n radici n -esime distinte.
Se per lo studente è quasi naturale pensare che $\sqrt{9} = \{-3, +3\}$, allo stesso è difficile accettare che $\sqrt[3]{1} = \left\{1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$. Pertanto sarà sempre portato a rispondere che $\sqrt[3]{1} = 1$. D'altra parte non è per niente naturale notare che $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = 1$.
5. Difficoltà dovute alle varie rappresentazioni dei complessi:
 - coppie ordinate di numeri reali
 - punti del piano cartesiano
 - rappresentazione algebrica
 - rappresentazione trigonometrica
 - rappresentazione esponenziale

Fatta eccezione per la trasformazione dei numeri razionali in numeri decimali, questa è la prima volta che allo studente vengono presentati dei numeri appartenenti ad un certo insieme numerico di cui si fornisce più di una rappresentazione e i cui elementi peraltro non possono neanche essere convertiti in numeri decimali.

4. Proposta didattica

L'attività didattica ha inizio con la verifica dei prerequisiti e con la ricerca di eventuali misconcetti (per approfondimenti sul significato di "misconcetto" è possibile consultare [6], [8] e [9]). Per fare ciò si utilizzerà la tecnica del **brainstorming**: si chiederà quante sono le soluzioni di un'equazione di secondo grado, quante quelle di un'equazione di secondo grado con discriminante negativo e infine quante sono le soluzioni di un'equazione di grado n .

Per introdurre il nuovo argomento dei numeri complessi e catturare l'attenzione degli studenti, si potrebbe usare l'espedito del **problem solving**, ponendo ai ragazzi la seguente domanda:

Qual è quel numero il cui quadrato è uguale a -1 ?

Sperando che nessuno risponda -1 , se ciò accadesse si suggerirebbe loro di riflettere sul fatto che $(-1) \cdot (-1) = 1$, ben presto la risposta dei ragazzi sarà:

Non esiste un tale numero perché qualsiasi numero elevato al quadrato darà un risultato non negativo.

A questo punto si potrebbe formalizzare la domanda, impostando l'equazione e facendo vedere che il numero cercato è proprio la soluzione dell'equazione:

$$x^2 = -1.$$

Confermeremo che questa equazione effettivamente non ha alcuna soluzione nel campo dei reali, ma se definiamo un nuovo numero, che dà vita ad un nuovo insieme di numeri, questa equazione ha un senso e ammette due soluzioni.

Definiremo pertanto i come quel numero il cui quadrato è -1 :

$$i^2 = -1$$

motivando la sua definizione necessaria per poter risolvere una classe di equazioni che finora abbiamo definito *impossibili* e tra queste per l'appunto l'equazione $x^2 = -1$. Faremo inoltre vedere che anche $-i$ è tale che $(-i)^2 = -1$. Sarà quindi possibile affermare che $\sqrt{-1} = \{i, -i\}$.

A questo punto indicheremo la i come *unità immaginaria* che utilizzeremo per definire un nuovo insieme di numeri \mathbb{C} che chiameremo *numeri complessi*.

Definiremo *numero complesso* (in forma algebrica) una qualsiasi espressione del tipo:

$$z = a + bi \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

e daremo le definizioni di *parte reale*, *parte immaginaria*, *insieme dei numeri complessi*, *numero complesso nullo*, la *norma*, l'*opposto*, il *coniugato* (per maggiori informazioni è possibile consultare il [2]). La scelta di introdurre per prima la forma algebrica è dovuta al fatto che essa è quella che più si avvicina alle loro conoscenze sugli insiemi numerici.

Per far sedimentare l'idea che anche i numeri complessi sono numeri, definiremo nel nuovo insieme numerico \mathbb{C} alcune *operazioni familiari* all'alunno:

$$\begin{aligned}(a + ib) + (c + id) &= (a + c) + i(b + d), \\ (a + ib) \cdot (c + id) &= (ac - bd) + i(ab + bc).\end{aligned}$$

Dopo aver proposto degli esercizi per l'assimilazione di queste nuove definizioni, faremo notare che, se $z = a + bi$, allora $\bar{z} = \|z\| = a^2 + b^2$ e quindi

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\|z\|} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

da cui seguirà anche che

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}.$$

Proporremo come esercizio la verifica delle proprietà associative, commutativa e distributiva e faremo vedere come $1 + i0$ sia l'unità moltiplicativa facendogli eseguire il calcolo $(1 + i0) \cdot (a + ib)$.

Definito il prodotto tra numeri complessi, è possibile definire le potenze di un numero complesso e quindi sarà conveniente far calcolare agli studenti le prime potenze dell'unità immaginaria

$$\begin{aligned}i &= \sqrt{-1} \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i \\ i^4 &= i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1.\end{aligned}$$

Non potendo utilizzare il concetto matematico di *immersione di un insieme in un altro*, chiariremo adesso il senso di come il nuovo insieme \mathbb{C} *contenga* tanto i numeri reali quanto gli immaginari. Diremo che i numeri complessi che hanno il coefficiente della parte immaginaria nullo *si comportano* come i numeri reali, perciò li potremo assimilare ai numeri reali pur restando numeri complessi:

$$\mathbb{C} \ni a + 0i \approx a \in \mathbb{R}$$

mentre i numeri complessi che hanno il coefficiente della parte reale nullo *sono* numeri immaginari:

$$\mathbb{C} \ni 0 + bi = bi \in \mathbb{C}.$$

Dopo aver definito la forma algebrica di un numero complesso si passerà a introdurre la *forma cartesiana*, sottolineando come è possibile rappresentare un numero complesso come un punto nel piano di *Argand-*

Gauss e quindi come vettore di componenti (a, b) . Definito l'argomento di un numero complesso si potrà introdurre la *forma trigonometrica*. In quest'ultimo caso faremo notare come

il prodotto di due numeri complessi scritti in forma trigonometrica è uguale al numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti;

il quoziente di due numeri complessi scritti in forma trigonometrica è uguale al numero complesso che ha per modulo il quoziente dei moduli e per argomento la differenza degli argomenti;

la potenza con esponente intero di un numero complesso scritto in forma trigonometrica è uguale al numero complesso che ha per modulo la potenza del modulo e per argomento il prodotto dell'esponente per l'argomento del numero dato.

Anche in questo caso verranno proposti degli esercizi per una migliore comprensione dei risultati mostrati.

Diremo che $w = s(\cos\gamma + isin\gamma)$ è radice n -esima di $z = r(\cos\theta + isin\theta)$ se risulta:

$$[s(\cos\gamma + isin\gamma)]^n = r(\cos\theta + isin\theta),$$

da cui ricaveremo che

$$s^n(\cos n\gamma + isin n\gamma) = r(\cos\theta + isin\theta)$$

e dal confronto dei due membri si avrà:

$$\begin{cases} s^n = r \\ n\gamma = \theta + 2k\pi \end{cases} \text{ ovvero } \begin{cases} s = \sqrt[n]{r} \\ \gamma = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Pertanto, concluderemo che le radici n -esime di z sono:

$$\sqrt[n]{r(\cos\theta + isin\theta)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + isin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right),$$

sono in numero di n e si ottengono attribuendo a k i valori interi da 0 a $n - 1$.

Come caso particolare delle radici n -esime, chiederemo agli studenti di calcolare le radici n -esime dell'unità che ci permetteranno di trovare tutte le n soluzioni dell'equazione:

$$x^n = 1.$$

Inoltre rappresenteremo tali radici n -esime nel piano di *Argand-Gauss* e faremo vedere che esse sono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio unitario. A tal fine, risulterebbe molto utile l'uso della lavagna interattiva multimediale (LIM, vedi [1]). Potranno verificare come esercizio che l'affermazione iniziale che $\sqrt{-1} = \{i, -i\}$ è confortata dai risultati teorici.

Per ultimo affronteremo la *forma esponenziale* dei numeri complessi limitandoci a dare la formula

$$e^{i\theta} = \cos\theta + isin\theta$$

e dimostrare che

$$e^{i\theta} \cdot e^{i\gamma} = e^{i(\theta+\gamma)},$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\gamma}} = e^{i(\theta-\gamma)},$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{i(n\theta)}.$$

Infine, usando la formula trigonometrica di un numero complesso ricaveremo

$$z = r(\cos\theta + isin\theta) = re^{i\theta}.$$

In riferimento alle diverse forme di un numero complesso, si potrà chiedere agli studenti se e quando risulta più conveniente usarne una piuttosto che un'altra.

Per ultimo, si proporrà agli studenti di affrontare, mediante semplici esercizi, la risoluzione delle equazioni di secondo grado nel campo dei numeri complessi, in modo che l'alunno trovi un'immediata applicazione dei numeri complessi appena definiti. Così facendo, si porterà l'alunno a comprendere che le equazioni di secondo grado con discriminante negativo *non hanno soluzioni nel campo dei numeri reali*, mentre *hanno soluzioni complesse coniugate nel campo dei numeri complessi*.

5. Conclusioni

La didattica contemporanea si avvale di tanti strumenti che rendono il lavoro del docente più semplice. Il personal computer o la LIM sono ormai divenuti un imprescindibile ausilio del docente. Gli studenti possono imparare giocando e questo determina una più approfondita e duratura comprensione dei concetti. Ciò non di meno, l'autore resta fermamente convinto dell'importanza dell'aspetto storico che permette di acquisire una comprensione *completa* degli stessi concetti.

Vorrei infine fare delle considerazioni su ciò che la storia della Matematica ci insegna e non solo per quello che riguarda la teoria dei numeri complessi. Certi risultati, o più in generale certe teorie matematiche, ci sembrano oggi chiari e, magari anche elementari (riferendoci al titolo del libro di Enriques [7]). Si potrebbe erroneamente pensare che semplicemente non erano *maturi* i tempi. Ma la chiarezza e la elementarità di tali risultati la si deve solo grazie all'intuito e al genio di chi ci ha preceduto. Genio che non li ha fermati quando si sono trovati a dover maneggiare, ad esempio, le radici quadrate di numeri negativi ma che li ha spinti ad andare oltre. Oltre la naturale convinzione, oltre le opposizioni dei contemporanei, oltre il sapere comune.

Bibliografia

- [1] Barca, Ellerani, (2011). *Andiamo alla lavagna! Integrare la LIM in classe*. Zanichelli.
- [2] Bergamini, Trifone, Barozzi, (2011). *Matematica. Blu 2.0 vol. 4*. Zanichelli.
- [3] Bertuglia, Scarcella, (2012). *Tirocinio formativo attivo*. Edizioni Simone.
- [4] Boyer, C.B. (1980). *Storia della matematica*. Mondatori.
- [5] [D'Amore](#), [Fandiño](#), [Pinilla](#), [Marazzani](#), [Sbaragli](#), (2008). *La didattica e le difficoltà in matematica - Analisi di situazioni di mancato apprendimento*. Edizioni Erickson.
- [6] [D'Amore](#), [Sbaragli](#), (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La Matematica e la sua Didattica*. 2, 139-163.
- [7] Enriques, F. (1925). *Questioni riguardanti le matematiche elementari. Raccolte e coordinate da Federico Enriques. Parte Prima, Terza edizione*. Zanichelli.
- [8] [Sbaragli](#), (2005). Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili". *La Matematica e la sua Didattica*. 1, 57-71.
- [9] Zan, R. (2000). Misconceptions e difficoltà in matematica. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*. 23A(1), 45-68.

Esperimento per la misura del coefficiente di attrito dinamico

Salvatore Spagnolo

Dipartimento di Fisica e Chimica, Università degli Studi di Palermo

E-mail: salvatore.spagnolo@unipa.it

Riassunto. In questo articolo presenterò una proposta didattica laboratoriale che avrà per oggetto la misura del coefficiente di attrito dinamico fra due superfici, sfruttando il teorema lavoro-energia cinetica. Particolare attenzione sarà posta sulle problematiche tecniche e concettuali, che stanno alla base di questa attività di laboratorio, e sulla sua spendibilità in ambito scolastico.

1. Introduzione

Oggi la realtà scolastica è molto complessa e articolata; il docente che la vive quotidianamente deve essere in grado di porre in atto strategie educative e sperimentare sempre nuovi percorsi, se vuole raggiungere gli obiettivi che stanno alla base del suo lavoro. Nel corso degli anni, infatti, a seguito delle riforme che via via hanno modificato la struttura scolastica italiana in moltissimi dei suoi aspetti, abbiamo assistito al cambiamento della figura del docente: egli si è trasformato da depositario assoluto del sapere a guida propositiva e fonte continua di stimoli affinché lo studente diventi da semplice ricettore di informazioni a costruttore attivo di conoscenza.

Il percorso per diventare insegnante è stato oggetto di diversi interventi legislativi negli ultimi anni [1]. Il Tirocinio Formativo Attivo (TFA), ultima declinazione legislativa di questo percorso, ha l'intento di fornire agli aspiranti docenti, le conoscenze e gli strumenti necessari all'acquisizione delle competenze proprie della professione, nell'ottica di formare docenti sempre pronti a riflettere sul proprio ruolo, in una logica di continua integrazione e mediazione tra teoria e prassi. Nella sua articolazione in insegnamenti di scienze dell'educazione, insegnamenti di didattiche disciplinari, tirocinio diretto e indiretto, il TFA copre un ampio spettro di argomenti sia dal punto di vista concettuale, sia dal punto di vista applicativo offrendo al tirocinante una visione d'insieme generale della professione del docente. Ciò che emerge da questo quadro è una figura caratterizzata da una professionalità di livello elevato. Per il docente è indispensabile un continuo studio per l'aggiornamento delle conoscenze non solo legate alla disciplina ma anche alla metodologia didattica.

In questo articolo descriverò un'esperienza significativa condotta durante il mio Tirocinio di Formazione Attiva. Nella parte disciplinare del mio tirocinio ho seguito corsi riguardanti la storia, la didattica e il laboratorio della matematica e della fisica. In tutta questa fase è emerso in modo forte e chiaro l'importanza legata agli aspetti disciplinari della matematica e della fisica e alla loro capacità di stimolare e attivare capacità e competenze dallo spettro ampio e strutturato. In particolare, in questo articolo presenterò una proposta didattica laboratoriale riguardante la misura del coefficiente di attrito dinamico fra due superfici, sfruttando il teorema lavoro-energia cinetica. Tale esperimento è stato condotto nel corso di Laboratorio di Fisica svoltosi nella parte del TFA dedicata alla didattica disciplinare propria della classe di concorso di appartenenza. Questa esperienza permette di evidenziare le tematiche e le problematiche concettuali e tecniche che stanno alla base della gestione di un'attività di laboratorio di fisica da parte di un docente.

2. La fisica e i suoi nuclei fondanti

Negli ultimi anni abbiamo assistito ad un cambiamento fondamentale del concetto di programmazione a scuola. La riforma dei cicli e la conseguente nuova normativa sulla scuola hanno introdotto, fra le tante novità, il concetto chiave di nucleo fondante, inteso come un concetto fondamentale che ricorre in vari luoghi di una disciplina e ha perciò valore strutturante e generativo di conoscenze [2,3].

Nella logica di una costruzione sinergica e coordinata di un percorso didattico che tenga conto di questi

concetti chiave, possiamo schematizzare a grana grossa il rapporto fra competenze e nuclei fondanti, sottolineando che la natura e gli ambiti delle competenze sono determinati dai nuclei fondanti della disciplina; di contro, le competenze determinano sia le conoscenze e le abilità che gli alunni dovranno acquisire sia gli obiettivi richiesti intesi come le prestazioni che si richiedono agli alunni come indicatori quantitativi dell'acquisizione di competenze. La sintesi di questi concetti chiave va costruita dall'insegnante durante l'elaborazione del percorso didattico che sceglie per i suoi studenti. Occorre tenere conto che, in una logica moderna del concetto/strumento di autovalutazione, l'alunno deve cogliere l'acquisizione personale delle competenze, gli obiettivi delle singole attività e le conoscenze ed abilità acquisite lungo il suo percorso curricolare. Questo aspetto è essenziale affinché egli sia o diventi consapevole nel riconoscere il realizzarsi del suo apprendimento significativo come conseguenza dell'attività scolastica. È invece abbastanza raro che l'alunno, soprattutto nelle classi inferiori, riesca a cogliere o sia consapevole del quadro di insieme costruito sui nuclei fondanti, che acquistano senso solo quando la padronanza della struttura disciplinare è più avanzata e matura. Il docente, del resto, deve operare sullo schema completo. La bontà dell'attività didattica, infatti, da una parte si concretizza nelle competenze attese e negli obiettivi (funzionali alle competenze e caratterizzati da propri contenuti, metodi e finalità) raggiunti; d'altra parte, i nuclei fondanti stessi giustificano la scelta didattica compiuta a monte e il percorso costruito a partire da questa.

Il discorso condotto finora è applicabile naturalmente a qualunque disciplina, ma occorre porre particolare accento sul fatto che l'applicazione *tout court* del concetto di nucleo fondante non è affatto immediato. Nell'ambito della fisica, per esempio, occorre evidenziare alcuni elementi di riflessione. Il campo di indagine di questa disciplina è estremamente vasto e articolato e lo spettro di argomenti trattati è amplissimo. Parlare di nuclei fondanti in questo ambito richiede un'analisi molto attenta sul grado di dettaglio e di approfondimento con cui occorre gestire gli argomenti che si vogliono trattare in classe o in laboratorio. Come ho già scritto in precedenza, in fisica non esistono solo nuclei fondanti disciplinari (come per esempio energia) ma anche nuclei fondanti, che riguardano il modo di condurre la riflessione o l'indagine scientifica, che si possono definire metodologici. Un esempio è l'atto di misurare con tutto ciò che questo comporta o il ricorso a modelli descrittivi e interpretativi. Da qui si evince che uno degli aspetti fondamentali dell'importanza del laboratorio di fisica. Esso, infatti, non è soltanto un "luogo" in cui si verificano leggi o ci si esercita con gli apparati di misura. Il laboratorio è il posto in cui si fa la fisica, in cui si conduce un'indagine scientifica a tutti gli effetti. Vedremo più avanti come negli ultimi anni sia stata elaborata una specifica metodologia che in modo trasparente e altamente significativo integra nella didattica laboratoriale la strategia della ricerca scientifica.

3. Il laboratorio di fisica

Il laboratorio (inteso sia come spazio fisico sia come spazio "mentale") è un formidabile ambiente dove intercettare gran parte delle metodologie atte a stimolare un apprendimento significativo cioè quel tipo di apprendimento che consente di dare un senso alle conoscenze, permettendo l'integrazione delle nuove informazioni con quelle già possedute e l'utilizzo delle stesse in contesti e situazioni differenti, sviluppando la capacità di *problem solving*, di pensiero critico, di metariflessione e trasformando le conoscenze in vere e proprie competenze. Infatti, metodologie come apprendistato, approccio tutoriale, *cooperative learning*, *learning by doing*, *brain storming*, *problem solving*, scoperta guidata, la discussione/seminario, trovano la loro massima espressione nel contesto del laboratorio. Naturalmente, il laboratorio di fisica non si sottrae a questo "mandato" e può mettere in campo tutta una serie di dispositivi che vanno nella direzione della didattica moderna. La fisica è una disciplina epistemologicamente sperimentale e il laboratorio di fisica è il momento di effettivo avvicinamento ai fenomeni reali, alle loro caratteristiche e complessità. Durante l'attività sperimentale, lo studente entra in contatto con il fenomeno reale, può intervenire per modificare e far funzionare le cose, capisce come esse funzionano, e acquisisce tecniche sperimentali; tutto ciò non fa che aumentare le sue motivazioni. Non si tratta quindi di eseguire "ricette" ben confezionate, ma di indagare ed evincere leggi, relazioni, verificare ipotesi o leggi, costruire modelli interpretativi e poi testarli evidenziandone i limiti di validità. È importante che lo studente apprenda l'attività della sperimentazione, la capacità di enucleare gli elementi fondamentali, sui quali impostare l'attività, da quelli non interessanti. Certamente, occorre organizzare il laboratorio appropriatamente in modo che sia stimolato il *conceptual learning*, cioè la capacità di padroneggiare concetti base della fisica, affrontandoli attraverso la realtà sperimentale e riuscendo a distinguere

ciò che può essere dedotto dall'osservazione e misurazione da ciò che si deduce dalla conoscenza della legge o da un'ipotesi teorica. Lo studente deve avere la possibilità di agire in autonomia, fare scelte, sia pure minime, procedere per tentativi ed errori, sviluppare strategie.

Si possono anche evidenziare obiettivi più strettamente addestrativi o procedurali come quelli legati all'apprendimento dell'uso degli strumenti e alle procedure di misura e analisi dei dati: capire lo strumento di misura e le sue caratteristiche, imparare a usare correttamente gli strumenti per ridurre gli errori sistematici, imparare a registrare correttamente i dati e a propagarne gli errori associati secondo le modalità di misura, imparare a valutare e separare errori casuali ed errori sistematici, imparare a raccogliere i dati in tabelle e a rappresentarli graficamente in modo da interpretare i risultati, imparare a tenere un registro di laboratorio in ordine, con indicazione delle condizioni sperimentali, imparare a lavorare in team, a scambiare idee, discutere e confrontarsi.

4. Esperimento per la misura del coefficiente di attrito dinamico con il metodo energetico

Come accennato nell'Introduzione, l'esperienza significativa oggetto del presente lavoro è legata ad un'esperienza condotta all'interno del corso di Laboratorio di Fisica svoltosi nell'ambito del TFA. L'apparato di misura è mostrato in figura 1; esso sostanzialmente permette di determinare il coefficiente di attrito dinamico fra il blocchetto di legno, mostrato in figura, e il piano di lavoro su cui il blocchetto è fatto scivolare [4,5].



Figura 1. Apparato di misura [4].

Si lancia con velocità iniziale nota un oggetto di massa m sopra un piano orizzontale e si misura la posizione, rispetto al punto di lancio, in cui l'oggetto si ferma. Il corpo può essere messo in moto da una molla compressa di una quantità nota x e costante elastica nota k e quindi si può misurare la distanza l fra il punto in cui la molla è a riposo e il punto in cui l'oggetto si ferma. Come vedremo, quando $x \ll l$, si può assumere, dal principio di conservazione dell'energia, che tutta l'energia potenziale ΔU_m immagazzinata dal sistema massa-molla si converte in energia cinetica ΔK del blocco. Di contro, nella fase di moto successiva al distacco del blocco dalla molla, tutta l'energia cinetica del blocco verrà dissipata a causa del lavoro compiuto sul corpo in movimento dalla forza di attrito dinamico presente fra blocco e piano.

4.1. Percorso didattico

In questo paragrafo descriverò schematicamente le caratteristiche essenziali che devono possedere gli studenti per realizzare l'esperienza e gli obiettivi e le competenze che si possono raggiungere.

Studenti a cui è rivolto

- Alunni che conoscono l'ambiente di laboratorio di fisica

Tempi di realizzazione

- 4h in laboratorio più 1h di prova di verifica finale

Materiale necessario per lo svolgimento dell'attività

- L'apparato sperimentale mostrato in figura 1, che è costruito con materiali reperibili sul mercato assemblabili eventualmente con l'ausilio del tecnico di laboratorio

- Un computer dotato di software con foglio elettronico o, in alternativa, carta millimetrata; un metro, una bilancia.

Prerequisiti

- Leggi di proporzionalità diretta e leggi quadratiche
- Cinematica: moto rettilineo uniforme, moto rettilineo uniformemente accelerato
- Dinamica: i principi della dinamica, la legge di Hooke, forza di attrito fra superfici, principio di conservazione dell'energia meccanica, teorema lavoro-energia
- Elementi di teoria degli errori e analisi dati

Obiettivi e concetti

- Studio delle forze di attrito
- Calcolo del coefficiente di attrito dinamico
- Studio delle diverse forme di energia
- Studio dei trasferimenti di energia da una sistema ad un'altro

Competenze

- Trasporre da un linguaggio naturale a un linguaggio formale (matematico, grafico, digitale) e viceversa o da un linguaggio formale a un altro
- Sapere lavorare in gruppo
- Sapere identificare nessi di causalità
- Ricercare un riscontro obiettivo delle proprie ipotesi interpretative
- Comunicare, conformemente al rispetto dei fatti, i risultati delle proprie indagini
- Individuazione delle variabili e relazioni significative sulla base di analisi di sistema
- Raccogliere ed elaborare informazioni significative da grafici e tabelle
- Saper individuare concetti fisici fondamentali nella realtà quotidiana

Verifica degli obiettivi

- Prova scritta (durata 1h) somministrata agli studenti a fine unità
- Consegna di una relazione di laboratorio scritta dallo studente alla fine dell'unità didattica.

Strumenti di valutazione delle competenze

- Schede di osservazione compilate dal docente durante l'attività
- Relazione consegnata dagli alunni alla fine dell'unità didattica.

Il taglio didattico da dare all'esperienza dipende molto dalla classe con cui il docente lavora. Sicuramente questo tipo di attività si presta benissimo e trova la sua massima espressione in una metodologia didattica di tipo *inquiry* [6]. Il livello dell'*inquiry* va naturalmente valutato con attenzione in base al livello degli studenti. Nel caso dell'esperienza in esame, in presenza di eccellenze o di classi di alto livello, non è da escludere un *open inquiry* in cui gli studenti, opportunamente stimolati dal docente, costruiscano da soli l'apparato di misura.

4.2. Teorema lavoro-energia

Noto che il lavoro compiuto dalla forza della molla che la molla esercita sul blocco è $L_m = -kx^2/2$ e il lavoro della forza di attrito f_a è $L_{fa} = \mu_d mgd$, dove d è lo spostamento della massa, per il teorema lavoro-energia cinetica, nella fase di elongazione della molla, avremo

$$\frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} mv^2 + m_d mgx.$$

Nella seconda fase avremo invece

$$\frac{1}{2}mv^2 = m_d mgl.$$

Sostituendo il primo termine della seconda equazione nella prima equazione, otteniamo

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 + m_d mgx = m_d mgl + m_d mgx @ m_d mgl.$$

Nell'ultimo membro, il termine $\mu_d mgx$ può essere trascurato quando $x \ll l$ (vedremo che le condizioni sperimentali consentiranno di fare questa approssimazione). A questo punto, abbiamo trovato una relazione fra il coefficiente di attrito dinamico μ_d e grandezze tutte note (k e g) e misurabili (x e l).

4.3. Aspetti concettuali del problema

È di grande importanza che il docente, prima di proporre un percorso didattico o anche un'esperienza di laboratorio, tratti la tematica in tutte le sue sfaccettature. Fra le varie ragioni didattiche, metodologiche, concettuali e tecniche, due fra tutte a mio avviso emergono. Una prima ragione è che se il docente non ha chiaro il problema sin dall'inizio rischia di perdere l'occasione di sfruttare aspetti del tema che possono risultare fondamentali dal punto di vista didattico e pedagogico. Una seconda ragione è che sfaccettature non considerate inizialmente dal docente possono comunque emergere a seguito di discussioni e di interazioni in classe e questo può avere come conseguenza in alcuni casi una mancata realizzazione degli obiettivi che il docente si era prefissato.

Cosa, per esempio, possiamo dire dell'esperimento appena descritto? Quali concetti presuppone? Quali concetti introduce? Quali dispositivi possono o devono essere attivati dal docente affinché il suo lavoro abbia successo? Vediamo cosa si può dire circa l'esperienza che abbiamo scelto di analizzare. L'attrito radente, o l'attrito di scorrimento, è la forza che si esercita tra due corpi posti a contatto e che, in generale, si oppone al loro moto reciproco. Per mantenere il moto dei corpi in contatto, occorre applicare una forza esterna. La fisica che descrive l'origine di questa forza è molto complicata [7]. Per comprenderne l'origine occorre considerare il fatto che le due superfici di contatto sono irregolari a livello microscopico e quindi presentano delle protuberanze di varie dimensioni e forme. Vi sono molti punti di contatto in cui sembra che le protuberanze si congiungano l'una all'altra e poi, quando il corpo che scorre è spinto via, esse si disgiungono e ne segue una vibrazione.

Per fissare le idee, supponiamo di avere un corpo di massa m che si muove sul pavimento. È evidente dal nostro quotidiano che, se posto in movimento con una certa velocità iniziale v e lasciato libero di muoversi, il corpo dopo aver percorso un certo tratto di spazio si arresta. La sua energia cinetica iniziale $K = mv^2/2$ va cioè diminuendo durante il moto fino a diventare zero. La causa della dissipazione di energia cinetica del sistema è proprio dovuta al fatto che durante il moto il corpo che scorre "salta" sulle protuberanze che si deformano elasticamente, generando onde e moti atomici e plasticamente. Nonostante l'enorme complessità del fenomeno a livello microscopico, è notevole che, empiricamente, la forza di attrito radente dinamica f_a possa essere descritta dalla una semplice legge $f_a = \mu_d N$, dove μ_d è il coefficiente di attrito dinamico che caratterizza le due superfici ed N è la forza che il pavimento esercita sul corpo in direzione perpendicolare alla pavimento stesso.

Altro aspetto molto importante del problema è individuabile nel concetto di approssimazione. In effetti, nella prima fase del moto abbiamo supposto di trascurare il lavoro delle forze di attrito (questo può essere fatto a rigore solo se x è molto minore di l). Trascurare questo termine ha *in primis* due vantaggi, uno di tipo tecnico e l'altro di tipo didattico. Il vantaggio tecnico è legato al fatto che l'approssimazione semplifica molto le equazioni e permette di giungere ad una relazione fra le quantità misurabili che, come sarà mostrato nel prossimo paragrafo, può essere opportunamente analizzata con le tecniche della regressione lineare. Il secondo vantaggio è che trascurare il termine di lavoro della forza di attrito durante l'azione della molla, permette operativamente di veicolare il concetto di approssimazione in fisica. Questo concetto, fondamentale nell'epistemologia di questa disciplina, è insito nella strategia di indagine scientifica e consente di individuare in fase operativa quali possano essere i limiti delle leggi che si ricavano in fase di analisi. Nel nostro caso, per esempio, gli studenti avranno chiaro che la legge che ricaveranno sarà valida solo quando $x \ll l$, e (sperabilmente!) si aspetteranno una deviazione dalla relazione trovata quando x è invece dello stesso ordine di grandezza di l .

Altro vantaggio dell'approssimazione è che di fatto permette di applicare, nella prima fase del moto, il concetto di conservazione dell'energia meccanica, nucleo fondante della fisica. Inoltre, il fatto che nella prima parte del moto il valore dell'energia potenziale diminuisca fino ad essere convertita in energia cinetica e che poi quest'ultima, nella seconda parte del moto venga dissipata a causa dell'attrito conduce in modo diretto alla questione della conversione dell'energia da una forma all'altra. Questo aspetto può essere utile all'interno di un percorso formativo di laboratorio riguardante tematiche energetiche, al fine di stimolare i docenti di fisica a portare in aula e in laboratorio questi argomenti e contribuire così ad aumentare la consapevolezza che gli studenti hanno riguardo, per esempio, alle fonti energetiche rinnovabili. Al di là delle competenze enucleate nel Par. 4.1, le ulteriori possibili competenze trasversali attivate da questa macro-tematica sono pienamente inquadrabili nell'ambito delle competenze chiave di cittadinanza attiva (Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio "Relativa a competenze chiave per l'apprendimento permanente", 2006), nella parte riguardante in particolare le competenze sociali e civiche e lo spirito di iniziativa e imprenditorialità.

4.4. Misura del coefficiente di attrito dinamico

Passiamo adesso alla disamina degli aspetti legati alle misure e all'analisi dei dati. Come si può dedurre dall'ultima equazione del Par. 4.2,

$$\frac{1}{2} kx^2 = m_d Nl = m_d mgl \Rightarrow m_d = \frac{kx^2}{2mgl},$$

possiamo ricavare il coefficiente di attrito dinamico in funzione di parametri noti o misurabili. In particolare, abbiamo realizzato l'esperimento con un blocchetto di legno di massa $m = 66 \text{ g}$ e una molla di costante elastica $k = 400 \text{ N/m}$ (quest'ultimo valore rappresentava un parametro noto a priori, essendo una specifica dello strumento). Sull'asse delle ordinate si pongono i valori di l sull'asse delle ascisse i corrispondenti valori di x^2 , la distanza percorsa dal blocco dopo il distacco dalla molla. Nel grafico di figura 2 è possibile osservare la distanza percorsa dal blocco in funzione del quadrato della compressione della molla.

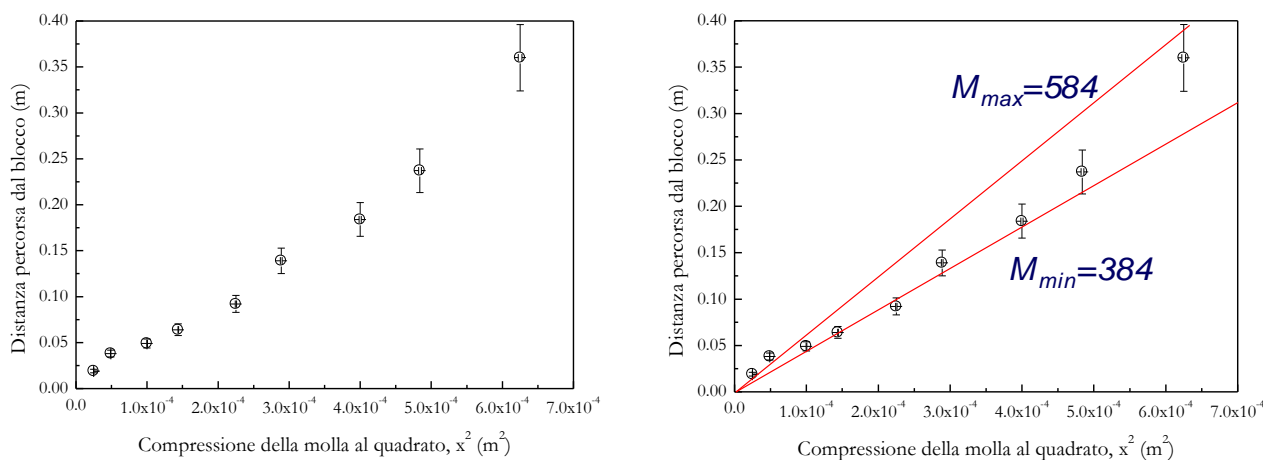


Figura 2. (grafico di sinistra) distanza percorsa dal blocco in funzione del quadrato della compressione della molla; nel grafico sono mostrati gli errori associati; (grafico di destra) le linee continue rappresentate in rosso sono le rette di minima (M_{\min}) e di massima (M_{\max}) pendenza.

La rappresentazione grafica dei dati di questo esperimento è un punto cruciale. In effetti, sembrerebbe più naturale rappresentare l in funzione di x (la variabile che effettivamente viene misurata direttamente). Una tale rappresentazione comporterebbe però la necessità di effettuare un'analisi dei dati per mezzo di una regressione parabolica utilizzando quindi un software specifico. Se il docente non vuole in questa fase dell'esperienza stimolare l'acquisizione di competenze tecnologiche per lo studente, può suggerire di trovare un modo per calcolare dai dati il coefficiente di attrito dinamico a partire da una legge lineare. Questo si può fare considerando di rappresentare l come funzione di x^2 , facendo attenzione a propagare l'errore correttamente sulla variabile x^2 (infatti, per la teoria degli errori, $\Delta x^2 = 2x\Delta x$). Nel grafico di destra di figura 2, si può

apprezzare l'andamento lineare abbastanza buono dei dati con le rette di minima (M_{\min}) e di massima (M_{\max}) pendenza ($M = k/(2\mu_d mg)$). Qualora il docente lo ritenesse adatto agli scopi didattici che si è prefissato, questi dati possono essere rappresentati su carta millimetrata o su un generico foglio elettronico. Si può notare come, per piccoli valori di l , le rette non si adattano bene ai dati. Ci aspettiamo che succeda questo perché siamo fuori dai limiti di validità della nostra approssimazione. Naturalmente questo è un altro punto cruciale su cui il docente deve fare in modo che gli studenti focalizzino la loro attenzione ponendo la questione in termini problematici e non fornendo direttamente alcuna risposta. Con questo tipo di esperimento e raccolta dati [8], il modo corretto di ottenere il valore della pendenza è quello della semisomma $M_{\text{best}} = (M_{\max} + M_{\min})/2 = 484$ con errore associato $\delta M_{\text{best}} = (M_{\max} - M_{\min})/2 = 100$ ottenuto con la semidispersione. Sfruttando poi la relazione $\mu_d = k/(2Mmg)$ e propagando l'errore su M (le altre grandezze hanno errore trascurabile rispetto a M), abbiamo ottenuto il valore finale $\mu_d = 0.64 \pm 0.13$.

Questo esperimento si presta a degli sviluppi che possono accrescere la spendibilità in ambito scolastico. Per esempio, dopo aver fatto la regressione lineare, si può chiedere agli studenti di procedere all'analisi dei dati con l in funzione di x e fare una regressione parabolica confrontando alla fine il valore di μ_d ricavato in questo caso con quello precedente. Oppure, cambiando piano di lavoro o blocchetto, si possono misurare i coefficienti di attrito fra varie superfici e chiedere loro di osservare fenomeni nel loro quotidiano che possano essere interpretati in base ai diversi coefficienti trovati. Oppure ancora, qualora il laboratorio ne sia dotato, si può chiedere agli studenti di misurare μ_d a partire dai valori della velocità iniziale del blocchetto al rilascio dalla molla utilizzando un sensore di posizione e velocità ad ultrasuoni e sfruttando la relazione, ricavata nel Par. 4.2,

$$\frac{1}{2}mv^2 = m_d mgl$$

Quest'ultima modifica rende ancora più interessante l'esperienza, perché stimolare l'acquisizione di competenze digitali da parte degli studenti è uno dei compiti del docente, in linea con le direttive europee circa l'acquisizione delle competenze chiave per l'apprendimento permanente.

5. Difficoltà tecniche, concettuali e problemi di linguaggio

Chiudiamo l'analisi dell'esperimento scelto analizzando le difficoltà tecniche, concettuali e i problemi di linguaggio in cui gli studenti e il docente possono incorrere durante l'attività [9]. Durante la realizzazione dell'esperienza, spesso il blocchetto ha compiuto un moto rototraslatorio. Questo effetto è dovuto al fatto che quella che definita finora forza di attrito non è un'unica forza applicata al centro di massa del sistema, ma è l'insieme di un numero enorme di forze che rappresentano le interazioni blocco-pavimento applicate localmente su tutti i punti del blocchetto. Tali forze dipendono dalla forma e dalle dimensioni delle protuberanze presenti sulle superfici di contatto e per questo motivo possono essere diverse da un punto all'altro del blocchetto. A causa di ciò, la somma dei momenti torcenti delle forze di attrito può essere diversa dal vettore nullo, causando una rotazione del blocco. In buona sostanza, ciò che accade alla separazione tra le due superfici è un problema molto complicato: si hanno abrasione, deformazione, asperità, microsaldature, tensioni e sforzi trasversali sia nel blocchetto che nel pavimento.

In fase di raccolta dei dati, sono stati rilevati soltanto valori di l relativi a moti unicamente traslatori poiché nella derivazione delle equazioni che descrivono il sistema non si è tenuto conto del termine di energia rotazionale. Questo termine, essendo essenzialmente legato alle forze di interazione microscopiche distribuite tra le superfici che variano in modo casuale da punto a punto, non può essere determinato a priori. A questa difficoltà tecnica corrisponde quella che può diventare una difficoltà concettuale, come dimostrato in letteratura [9]. Il concetto di pseudo-lavoro (lavoro fatto dalla risultante delle forze applicate a un sistema fisico) e di forze distribuite, se esposto agli studenti con la non dovuta attenzione, può ingenerare misconcetti che possono perdurare per molto. Quindi, quando il docente espone la lezione o commenta gli esperimenti deve evitare di usare locuzioni del tipo "lavoro fatto dalla forza totale" o "lavoro fatto contro la forza totale" [9].

L'attività descritta, di fatto, coinvolge sia elementi legati al tema dell'energia (lavoro della forza di attrito, lavoro della molla, energia potenziale, energia cinetica, ecc.), sia elementi propri della dinamica (forza di attrito, forza elastica ecc.). Naturalmente, quindi, il docente deve porre attenzione anche a non usare termini o locuzioni del tipo "forze che fanno muovere i corpi" (piuttosto che accelerare!), "le forze di attrito si oppo-

gono sempre al moto” (la forza di attrito esercitata sulla nostra scarpa dal terreno ci accelera mentre camminiamo!), “la forza vince l’inerzia del corpo” (lo studente potrebbe cominciare a pensare all’inerzia come una forza contrastata da altre forze!).

Infine, occorre porre molta attenzione quando abbiamo a che fare con sistemi dove agisce la forza di attrito dinamico e viene dissipata energia cinetica. In questi casi occorre evitare frasi del tipo “trasformare lavoro in calore” quando invece non avviene nessun trasferimento di calore (blocchetto e pavimento hanno la stessa temperatura!) e non c’è calore che risiede nei corpi. Questi modi di dire provengono dalla fisica del diciannovesimo secolo, non sono mai stati modificati e contribuiscono a creare preconcetti e misconcetti molto difficili a volte da trovare e correggere. In generale, l’uso di automatismi naturali del linguaggio quotidiano è dannoso per lo sviluppo e la comprensione di concetti basilari della fisica e come tale va evitato e scoraggiato.

6. Conclusioni

Il percorso tracciato in questo lavoro ha messo in evidenza come l’esperienza svolta all’interno del corso di Laboratorio di Fisica è ricca di spunti di riflessioni ed elementi di significatività. A dispetto della sua apparente semplicità (in effetti dal punto di vista meramente teorico, il sistema indagato è presente in molti libri sotto forma di esercizio), questo tipo di esperimento nasconde tutta una serie di nodi concettuali sia teorici sia sperimentali eccezionalmente utili. In effetti, abbiamo visto che molti elementi fondamentali descritti nel Par. 2 e Par. 3 (nuclei fondanti disciplinari, nuclei fondanti metodologici, significatività della didattica laboratoriale, acquisizione di competenze), sono intercettati in molte fasi dell’attività descritta. A mio avviso, quindi, questo esperimento porta in sé un bagaglio di concetti estremamente utili e importanti da renderlo proficuamente spendibile in ambiente scolastico. Inoltre, la metodologia generale con cui è stato analizzato e approfondito ha, a mio avviso, carattere generale e può essere utilizzata per qualunque altro esperimento realizzabile a scuola.

Ringraziamenti

Questo lavoro è frutto dell’esperienza maturata nei mesi di attività svolti all’interno del Tirocinio di Formazione Attiva. Per questo motivo è con grande piacere che ringrazio tutti i docenti e i colleghi che mi hanno accompagnato e sostenuto in questa avventura.

Bibliografia

- [1] S. Bertuglia, M. Scarcella, *Tirocinio Formativo Attivo - Imparare ad insegnare...insegnare ad imparare*, Edizione Simone 2012.
- [2] R. D’Alfonso, *Un linguaggio condiviso per la costruzione dei curricoli*, Convegno di studio dell’A.I.F. “Quali curricoli di Fisica nella scuola dei cicli”, Cava dei Tirreni, 8-9 aprile 2000.
- [3] S. Pugliese Jona, C. Romagnino, E. De Masi, P. Di Loreto, *Nuclei fondamentali della fisica*, API, 1-2 (2000).
- [4] A. Agliolo Gallitto, E. Fiordilino, *Piano Nazionale Lauree Scientifiche – Fisica: un percorso di laboratorio sulle tematiche energetiche*, Giornale di Fisica, Vol. LII, p.283 (2011).
- [5] E. Fiordilino, A. Agliolo Gallitto, *Il Laboratorio di fisica nel progetto lauree scientifiche*, Aracne 2010.
- [6] Work Package 3 Report: *Guide for developing ESTABLISH Teaching and Learning Units*, Project No. 244749.
- [7] R.B. Leighton, M.L. Sands, *La fisica di Feynman*, Zanichelli 2001.
- [8] J.R. Taylor, *Introduzione all’analisi degli errori*, Zanichelli 1986.
- [9] A.B. Arons, *Guida all’insegnamento della fisica*, Zanichelli 1992.

Effetto fotoelettrico: dall'osservazione del fenomeno alla nascita del fotone.

Lavinia Vaccaro

Dipartimento di Fisica e Chimica, Università degli Studi di Palermo

E-mail: lavinia.vaccaro@unipa.it

Riassunto. In questo articolo è riportata una proposta didattica sull'effetto fotoelettrico articolata in una descrizione storica e un'attività di laboratorio. Particolare attenzione è posta sul travagliato sviluppo storico e il contributo di numerosi scienziati alla comprensione di questo fenomeno che ha sancito il passaggio dalla fisica classica a quella quantistica. È anche descritta un'esperienza di laboratorio che ha come oggetto la misura dell'energia degli elettroni emessi da un metallo in funzione della frequenza e permette di misurare la costante di Planck.

Abstract. This manuscript reports a teaching proposal on the photoelectric effect, that is articulated in a historical description and a laboratory activity. Focus is given on the troubled historical development and the contribution of many scientists to the understanding of this phenomenon, which enshrined the evolution from classical to quantum physics. It is also described a laboratory experience, its goal being the energy measure of electrons emitted from a metal as a function of light frequency thus allowing to get the Planck constant.

1. Introduzione

L'effetto fotoelettrico consiste nella emissione di elettroni da parte di un metallo illuminato con luce visibile o ultravioletta (UV) [1,2]. Questo fenomeno, scoperto casualmente oltre un secolo fa, ha oggi una grande rilevanza applicativa perché è alla base del funzionamento di moderni e sensibili rivelatori di luce. La sua osservazione sperimentale è relativamente semplice e può costituire un'esperienza di laboratorio per gli studenti del quinto anno delle scuole superiori. Tale semplicità realizzativa rischia addirittura di rendere non banale il compito del docente che deve sottolineare ai discenti come questo fenomeno abbia rappresentato un elemento di rottura rispetto alla fisica classica, che assumeva la luce come un'onda elettromagnetica, e abbia contribuito in modo decisivo alla nascita del quanto di luce (il fotone) introdotto per primo da Albert Einstein nel 1905. Tuttavia sarebbe errato fermarsi a questo binomio (effetto fotoelettrico – Einstein); le prime osservazioni di questo fenomeno risalgono infatti all'800, quando la natura ondulatoria della luce era un caposaldo per la fisica, e da allora gli esperimenti condotti e i modelli interpretativi proposti hanno impegnato per oltre 50 anni molti fisici di indiscusso valore, ma spesso scettici davanti ai sorprendenti risultati che via via emergevano dagli esperimenti[3]. In retrospettiva possiamo oggi osservare come l'effetto fotoelettrico sia paradigmatico per farci capire che il passaggio dalla fisica classica a quella quantistica sia stato travagliato perché ha dovuto sconfiggere convinzioni e certezze che i fisici del tempo avevano. In prospettiva esso rappresenta un'opportunità, attraverso l'esperienza condotta in laboratorio e l'analisi dei risultati, per stimolare gli studenti ad avanzare modelli interpretativi originali rispetto alle conoscenze maturate nello studio della fisica classica.

Nel seguito sono descritte le tappe fondamentali della storia dell'effetto fotoelettrico mettendo in luce il contributo degli scienziati che hanno maggiormente contribuito all'osservazione, alla misura, e alla comprensione di questo fenomeno. Viene anche riportata un'esperienza di laboratorio che può essere condotta da studenti del V anno di liceo con lo scopo di analizzare quantitativamente questo fenomeno fino a ricavare importanti costanti della fisica quantistica (costante di Planck).

2. Sviluppo storico dell'effetto fotoelettrico

2.1 Natura ondulatoria della luce: Esperimento di Young e Equazioni di Maxwell

Nell'800 la natura ondulatoria della luce era supportata da una serie di esperimenti condotti fino ad allora e universalmente accettata nel mondo scientifico. Un risultato chiave fu quello ottenuto da **Thomas Young**

(1801) nell'esperimento dell'interferenza della luce da una doppia fenditura. Lo scienziato evidenziò infatti che da un fascio di luce incidente su due fessure parallele praticate su di uno schermo opaco si ottenevano delle bande chiare e scure su di una superficie bianca posta dietro lo schermo; la luce quindi rispettava il principio di sovrapposizione in analogia alle onde meccaniche.

La natura ondulatoria e l'origine elettromagnetica della luce fu in seguito elaborata e formalizzata da **James Clerk Maxwell** (1864) nel trattato "*A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*". Attraverso quattro equazioni, si dimostrò che elettricità, magnetismo e la luce sono tutte manifestazioni del medesimo fenomeno: il campo elettromagnetico si propaga attraverso lo spazio sotto forma di onde alla velocità costante della luce.

Le soluzioni delle equazioni di Maxwell, nell'approssimazione di onda piana e monocromatica che si propaga lungo z con velocità della luce c , hanno la forma:

$$E(z, t) = E_0 \cos\left(2\pi \nu t - \frac{2\pi}{\lambda} z + \phi_0\right) \quad (1 a)$$

per il campo elettrico

$$B(z, t) = B_0 \cos\left(2\pi \nu t - \frac{2\pi}{\lambda} z + \phi_0\right) \quad (1 b)$$

per il campo magnetico.

In accordo all'equazione di un'onda sinusoidale, ν è la frequenza (inverso del periodo di oscillazione $\nu = 1/T$), λ è la lunghezza d'onda e ϕ_0 è la fase. Campo elettrico e magnetico sono perpendicolari fra loro e

alla direzione di propagazione, le loro ampiezze sono legate dalla relazione: $E = B/c$. La luce viaggia alla velocità $c = (1/\mu_0\epsilon_0)^{1/2} = 3 \times 10^8$ m/s, μ_0 e ϵ_0 sono la permeabilità magnetica e la costante dielettrica nel vuoto.

Un'onda elettromagnetica trasporta energia alla velocità c , la sua intensità I è data dalla relazione:

$$I = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{E^2}{c\mu_0} \quad (2)$$

Se misurata in un tempo sufficientemente lungo rispetto al periodo, condizione facilmente soddisfatta per luce Visibile o UV ($T \sim 10^{-15}$ s), l'intensità media I_{media} vale:

$$I_{media} = \frac{E_0^2}{2c\mu_0} \quad (3)$$

2.2 Prime osservazioni del fenomeno "effetto fotoelettrico": esperimenti di Hertz, Hallwachs e Righi

La teoria dell'elettromagnetismo di Maxwell costituì un grande stimolo per molti fisici che cercarono di organizzare esperimenti capaci di generare e rivelare le onde elettromagnetiche e studiarne le proprietà; uno dei più attivi e pionieri in questa fase fu **Heinrich Hertz**. Nel 1886 Hertz riuscì infatti nell'intento di generare e rivelare onde elettromagnetiche attraverso un apparato sperimentale riportato in Figura 1. La generazione dell'onda elettromagnetica è indotta dalla scarica elettrica fra i due conduttori metallici sottoposti a una differenza di potenziale ottenuta per induzione con una bobina. Hertz intuì che allorché la scintilla avesse creato un percorso conduttivo tra i due pezzi di metallo, la carica elettrica avrebbe compiuto rapide oscillazioni avanti e indietro tra di essi, producendo onde elettromagnetiche di lunghezza comparabile con le dimensioni dei conduttori stessi. La rivelazione delle onde era ottenuta mediante una spira di rame (diametro di 7 cm), con una sferetta di bronzo fissata ad un estremo, e l'altro estremo posto a piccolissima distanza dalla sferetta stessa, dal lato opposto. In questo modo, la tensione indotta dall'onda elettromagnetica attraverso la spira faceva scoccare una scintilla attraverso la stretta interruzione di questa.

Fu durante l'esecuzione di questi esperimenti che Hertz osservò l'effetto fotoelettrico. Tale osservazione fu fortuita e legata alla esigenza di migliorare la sensibilità nella rilevazione delle onde elettromagnetiche rendendo più visibile la scintilla che scoccava. Per far ciò, Hertz pensò che il modo migliore fosse

l'osservazione al buio e pertanto pose la spira rivelatrice in una scatola. Con sorpresa per lo scienziato, la scintilla era meno visibile. Per capire al meglio questo "strano" fenomeno Hertz condusse una serie di prove per mettere in luce quali fattori potessero influenzare la scintilla nella spira rivelatrice.

- 1) Rimuovendo progressivamente le pareti della scatola trovò che l'unica che provocava la riduzione della scintilla era quella che schermava direttamente la scintilla del ricevitore da quella del trasmettitore; questo effetto, inoltre era indipendente dalla posizione della parete lungo la linea congiungente le due scintille, fra trasmettitore e rivelatore.
- 2) La scintilla risultava più intensa quando il ricevitore veniva raggiunto dalla luce ultravioletta emessa dalla forte scintilla nel trasmettitore.
- 3) La scintilla dipendeva dal materiale della parete schermante: era fortemente ridotta se si utilizzava una parete in vetro mentre rimaneva inalterata se la parete era in quarzo.

Sulla base di queste osservazioni, Hertz capì che il fenomeno dipendeva dalla componente della luce che investiva la spira rivelatrice. Utilizzando un prisma per scomporre la luce ed esponendo il ricevitore alle differenti componenti spettrali dimostrò che l'effetto di intensificazione della scintilla nel ricevitore era causato dalla componente ultravioletta della luce. Questi esperimenti e i risultati ottenuti furono descritti in un articolo del 1887; tuttavia Hertz si astenne dall'ipotizzare alcuna spiegazione dei fenomeni osservati.

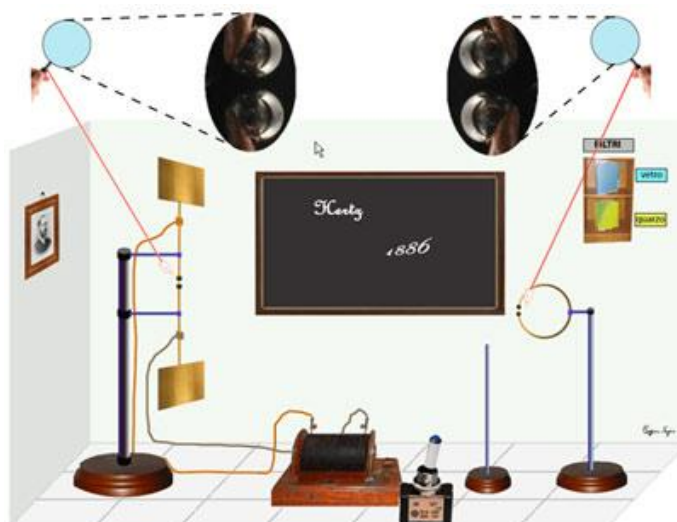


Figura 1 Schema dell'apparato sperimentale usato da Hertz per la generazione e rivelazione delle onde elettromagnetiche (Figura tratta da [4]).

Nel 1888, il fisico sperimentale tedesco **Wilhelm Hallwachs**, venuto a conoscenza delle osservazioni di Hertz, ed in particolare della conclusione che il fenomeno osservato era dovuto alla luce ultravioletta, eseguì delle verifiche in condizioni più semplici e controllabili. Rispetto all'apparato sperimentale di Hertz, Hallwachs utilizzò come rivelatore un disco di zinco su un pomello di un elettroscopio a foglie d'oro. Quindi studiò gli effetti indotti dalla luce ultravioletta prodotta da una lampada ad arco, provando a caricare l'elettroscopio sia negativamente che positivamente ed interponendo tra lampada ed elettroscopio uno schermo di gesso o di vetro. Quando l'elettroscopio era caricato negativamente, si scaricava molto rapidamente se il disco veniva illuminato direttamente o attraverso un filtro di gesso (che è trasparente alla luce ultravioletta), mentre manteneva la carica se il disco veniva illuminato attraverso un filtro di vetro opaco alla luce ultravioletta. Quando invece la carica dell'elettroscopio era positiva non veniva osservato nessun effetto e la carica era sempre mantenuta. Alla luce di questi risultati Hallwachs riuscì a chiarire che lo zinco perdeva carica elettrica negativa quando veniva irradiato con luce ultravioletta. Per il decennio successivo al 1888 la natura del fenomeno restò sostanzialmente oscura, nonostante venissero condotti una serie di altri ingegnosi esperimenti. Tra questi va sicuramente menzionato il contributo dell'italiano **Augusto Righi**, il quale osservò che la luce ultravioletta provocava una riduzione del potenziale di carica degli elettrodi di una macchina elettrostatica, e introdusse, per primo, il termine "fotoelettrico" per descrivere il fenomeno.

2.3 Emissione di elettroni causata dalla radiazione UV: esperimento di Thomson e prime ipotesi basate sulla natura ondulatoria della luce

I risultati di Hallawachs e Righi spinsero il fisico Britannico **Joseph John Thomson** a indagare sulla perdita di carica elettrica del metallo irradiato. Nel 1899, grazie anche all'esperienza maturata con lo studio dei raggi catodici, Thomson eseguì un esperimento in cui la superficie metallica era posta in un tubo a vuoto ed era illuminata con luce ultravioletta. Evidenziò così che i raggi emessi erano dello stesso tipo di quelli prodotti dall'applicazione di un forte campo elettrico: i raggi catodici, ovvero elettroni.

Questo risultato fu tentativamente interpretato in accordo al modello ondulatorio della luce: *gli atomi che costituiscono il metallo contengono elettroni che vengono sollecitati a vibrare dal campo elettrico oscillante della radiazione incidente. In queste condizioni qualche elettrone può staccarsi e fuoriuscire dal metallo.*

Il meccanismo ipotizzato cercava di prevedere alcune caratteristiche dell'emissione di elettroni da un metallo illuminato: in particolare la dipendenza del numero e velocità degli elettroni emessi dalla intensità e colore della luce. In accordo alla natura ondulatoria della luce, dalla equazione (2) si osserva che l'intensità di un'onda elettromagnetica è proporzionale al quadrato dell'ampiezza del campo elettrico

$$I_{media} = \frac{E_0^2}{2c\mu_0},$$

a sua volta il campo elettrico esercita una forza sulla elettrone di carica $-e$ pari a $F=-eE$

Pertanto ci si aspettava che:

- 1) un aumento di intensità (quindi di ampiezza del campo elettrico) avrebbe dovuto provocare una maggiore forza sugli elettroni e quindi una maggiore energia cinetica quando liberi.
- 2) la luce di colore corrispondente a frequenza maggiore (UV) avrebbe dovuto provocare una agitazione più rapida degli elettroni e quindi una maggiore velocità di emissione;
- 3) per luce molto debole sarebbe stato necessario un certo tempo di irraggiamento perché un elettrone fosse posto in vibrazione con una ampiezza sufficiente a provocarne l'emissione

2.4 Analisi quantitativa dell'effetto fotoelettrico: esperimento di Lenard

Le previsioni basate sulla natura ondulatoria della luce furono messe alla prova grazie al fisico tedesco **Philipp Lenard** che nel 1902 eseguì una serie di esperimenti che permisero di determinare l'energia degli elettroni emessi e di poter quindi verificare come essa dipendesse dall'intensità e dalla frequenza della luce. L'apparato sperimentale usato da Lenard è schematizzato in Figura 2.

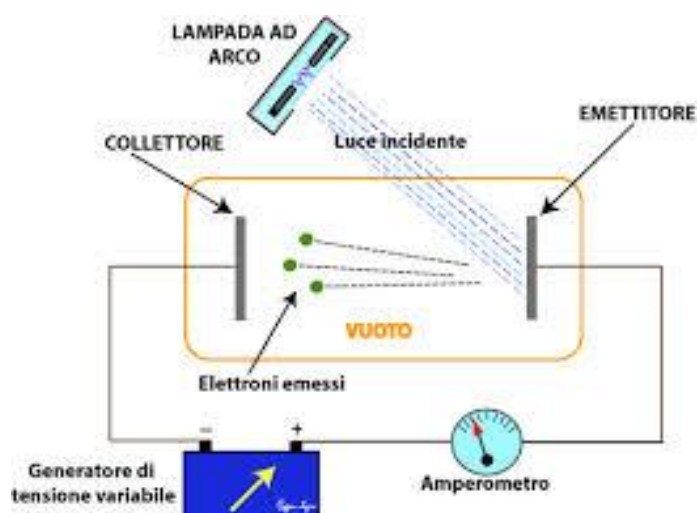


Figura 2 Schema dell'apparato sperimentale usato da Lenard per misurare l'energia cinetica degli elettroni emessi da un catodo metallico illuminato da luce UV (Figura tratta da [4]).

La sorgente luminosa era una lampada ad arco di notevole potenza, conveniente per variare l'intensità di 3 ordini di grandezza. Il catodo illuminato emetteva elettroni che erano raccolti da una piastra metallica, il collettore; il tutto era tenuto sotto vuoto per ridurre le collisioni con le particelle dell'aria. Collettore e catodo erano collegati da un circuito esterno che comprendeva un amperometro per misurare la corrente di elettroni prodotta dall'illuminazione, verificando così sia l'effetto fotoelettrico sia il numero di elettroni emessi. Per determinare l'energia cinetica $K=1/2m_e v^2$ degli elettroni emessi (m_e e v indicano la massa e la velocità degli elettroni) Lenard inserì nel circuito un generatore di tensione V variabile che conferiva agli elettroni una energia potenziale eV , con e carica dell'elettrone.

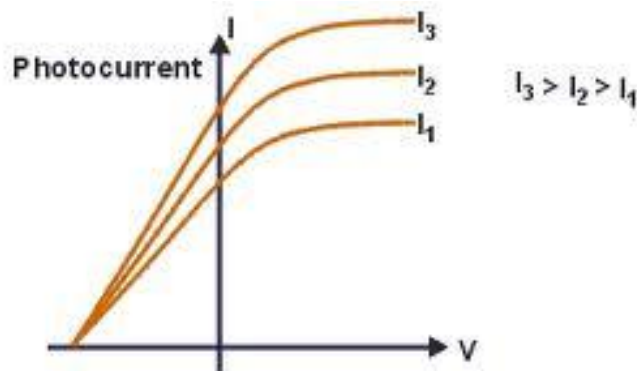


Figura 3 Intensità di corrente prodotta per diverse intensità luminose, utilizzando l'apparato sperimentale di Lenard; il potenziale negativo determinato quando la corrente è nulla rappresenta il potenziale di arresto V_s .

Come mostrato in figura 3, se V è positivo rispetto al catodo, gli elettroni sono accelerati ma la corrente misurata non varia. Se invece V è negativo rispetto al catodo si crea un campo elettrico che rallenta gli elettroni stessi; in questo modo, solo le particelle emesse con $K \geq eV$ possono giungere sul collettore dando luogo ad una corrente nel circuito.

I risultati trovati furono abbastanza sorprendenti per le aspettative, e si possono riassumere nei seguenti punti:

- 1) Esiste una differenza di potenziale minima tra le piastre in grado di arrestare completamente gli elettroni, il potenziale di arresto V_s , che soddisfa la condizione $K=eV_s$. Il valore di V_s risulta indipendente dall'intensità della luce.
- 2) Aumentando l'intensità della luce si osserva un aumento del numero di elettroni emessi (quindi dell'intensità della corrente), ma non della loro energia cinetica K .
- 3) Utilizzando le diverse componenti spettrali della luce, si trova che l'energia cinetica degli elettroni emessi dipende dal colore, in particolare luce di lunghezza d'onda minore (ovvero di frequenza più elevata) provoca l'emissione di elettroni con maggiore energia. Esiste inoltre un lunghezza d'onda limite al di sopra della quale la luce non è in grado di indurre fotoemissione, indipendentemente dalla sua intensità.

Lenard, che credeva fortemente alla teoria ondulatoria della luce avanzò un'ipotesi (*Triggering hypothesis*) per spiegare i suoi stessi risultati: *gli elettroni di un atomo possiedono già la loro velocità fotoelettrica. La luce non fornisce loro energia aggiuntiva, innesca soltanto l'emissione di elettroni selezionati.*

In accordo con tale ipotesi, la temperatura dovrebbe influenzare l'effetto fotoelettrico a causa dell'agitazione termica degli elettroni. Tuttavia, solo pochi anni dopo (1907) Millikan e Winchester mostrarono che l'effetto fotoelettrico non dipende dalla temperatura.

2.5 Teoria di Einstein e nascita del fotone

L'impatto che le evidenze sperimentali prodotte da Lenard ebbe sulla fisica del tempo fu sconvolgente; nessuna delle previsioni avanzate in accordo alla natura ondulatoria della luce si rivelò fondata. È importante sottolineare che anche altri esperimenti (spettro emesso dai corpi caldi) avevano evidenziato risultati contrastanti con la fisica classica e stimolato la necessità di trovare nuovi schemi interpretativi. In questo contesto,

Albert Einstein aiutato dal suo inarrivabile intuito, riuscì prima e meglio di tutti a sintetizzare la rivoluzione che si abbatteva sulla fisica.

Nel 1905, in uno dei tre celebri articoli di quell'anno, formulò una teoria dello scambio di energia tra radiazione elettromagnetica e materia capace di spiegare in modo semplice i risultati di Lenard. Il suo assunto centrale fu che la radiazione, negli scambi energetici, debba essere pensata come costituita da pacchetti indivisibili (quanti di luce o fotoni), di massa nulla, con velocità pari a quella della luce, e con energia proporzionale alla frequenza ν della luce stessa, secondo la formula:

$$E_{\text{fotone}} = h\nu \quad (4)$$

dove la costante di proporzionalità h è la costante di Planck, che lo stesso Planck aveva calcolato per interpretare lo spettro del corpo nero ($h = 6.6 \times 10^{-34}$ J s). In accordo all'energia associata al singolo fotone, l'energia totale trasportata da un'onda monocromatica è determinata dal numero di fotoni, quindi l'intensità media (energia trasportata nell'unità di tempo t e sull'unità di superficie S) può essere scritta come:

$$I_{\text{media}} = \frac{N h \nu}{S t} \quad (5)$$

Per modellizzare l'effetto fotoelettrico che origina dall'interazione dei fotoni con il metallo, gli elettroni di conduzione nel metallo possono essere considerati, dal punto di vista energetico, come intrappolati in una buca di energia potenziale. La profondità di tale buca, detta funzione lavoro ed indicata con W , corrisponde all'energia necessaria per strappare gli elettroni dal metallo. In questo modo l'interazione fotone-elettrone di conduzione può essere facilmente spiegata come conseguenza della conservazione dell'energia. Se un fotone interagisce con l'elettrone può cedere a questo una quantità di energia $h\nu$; di tale energia, una quantità pari a W verrà spesa per estrarre l'elettrone dal metallo, il resto costituirà l'energia cinetica dell'elettrone nel suo moto fuori dal metallo:

$$K = h\nu - W \quad (6)$$

In accordo all'apparato di Lenard, l'energia cinetica K può essere direttamente misurata come prodotto fra la differenza di potenziale di arresto, V_S e la carica dell'elettrone ($e = 1.6 \times 10^{-19}$ C):

$$eV_S = K \quad (7)$$

Confrontando tale equazione con la (6), si ottiene la condizione:

$$eV_S = h\nu - W \quad (8)$$

Attraverso tali considerazioni energetiche e alla luce della definizione dell'intensità luminosa proporzionale al numero di fotoni, è facile rendersi conto che le caratteristiche dell'emissione fotoelettrica determinate da Lenard, in particolare la dipendenza dell'energia cinetica dalla frequenza, risultano perfettamente spiegate dalla teoria proposta da Einstein.

2.6 Verifica della teoria di Einstein: esperimento di Millikan

Nonostante il successo della teoria di Einstein nell'interpretare l'effetto fotoelettrico, la comunità scientifica dell'epoca manifestò scetticismo per il concetto di fotone; Planck e Lorentz, in particolare, si opponevano perché tale teoria non era in grado di spiegare i fenomeni di interferenza e di diffrazione. In questo clima, **Robert Millikan**, pure avverso alla teoria di Einstein, tra il 1914 e il 1916 effettuò accurati esperimenti basati sulla misura del potenziale di arresto in funzione della frequenza della luce incidente[5].

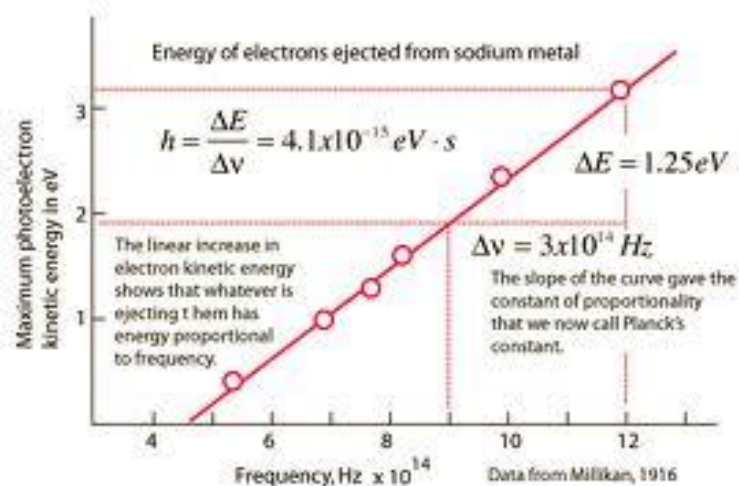


Figura 4 Risultati ottenuti da Millikan che mostrano la dipendenza dell'energia cinetica degli elettroni emessi dalla frequenza della radiazione incidente sul catodo di sodio. Figura tratta da [6]

I risultati ottenuti sono mostrati in Figura 4; essi provarono la relazione lineare tra il potenziale di arresto (ossia l'energia cinetica degli elettroni) e la frequenza della luce incidente, in accordo con la relazione (8). La misura della pendenza della retta di best-fit consentì la misura della costante di Planck (4.1×10^{-15} in unità eV s) che corrisponde a (6.6×10^{-34} in unità J s) che risultò in buon accordo (entro il 0.5%) con il valore calcolato da Planck, mentre l'intercetta rappresenta la misura della funzione lavoro W per il metallo di Na. In seguito migliorò la misura di h estendendo il metodo di misura a vari metalli; trovò che al variare dei metalli cambiava il valore di W mentre la pendenza rimaneva invariata. La spiegazione dell'effetto fotoelettrico data da Einstein, insieme alle previsioni insite in essa, furono così confermate.

E' sorprendente che Millikan, nonostante il successo degli esperimenti che gli valsero anche il Nobel nel 1923 rifiutò per anni di riconoscere la validità della "teoria" che le sue stesse precise misure avevano verificato; nella sua Nobel Lecture diceva ancora [7]: "*Si può dire senza esitazione che non soltanto l'equazione di Einstein sta avendo un successo straordinario, ma anche la sua concezione. Però, finché essa non spiegherà i fatti dell'interferenza dobbiamo trattenerci dal dare il nostro pieno assenso*".

3 Realizzazione dell'esperimento

Descriviamo ora un esperimento che può essere realizzato in un laboratorio di fisica di un liceo, che permette di analizzare in modo quantitativo l'effetto fotoelettrico. E' importante sottolineare come tale esperimento riproduca quelli condotti da Lenard e Millikan e permette di quindi di ottenere i seguenti *obiettivi specifici*:

- 1) Conoscere l'apparato sperimentale di Lenard per la misura dell'energia cinetica degli elettroni attraverso l'applicazione di un potenziale di arresto
- 2) Conoscere i risultati sperimentali sulla dipendenza dell'energia cinetica degli elettroni dall'intensità e dalla frequenza della luce
- 3) Conoscere la teoria di Einstein sull'effetto fotoelettrico e l'introduzione del quanto di luce
- 4) Conoscere l'esperimento di Millikan per la verifica sperimentale della teoria di Einstein e la misura della costante di Planck

La figura 5 mostra un'immagine dell'apparato sperimentale, che è fornito dalla PASCO Instruments [8]. Questo setup è installato presso i laboratori didattici del Dipartimento di Fisica e Chimica (Università di Palermo) ed è parte del laboratorio di Fisica Moderna per gli studenti delle scuole medie superiori nell'ambito del Piano Lauree Scientifiche. Esso è composto da una lampada a scarica contenente gas di mercurio che emette uno spettro a righe con 5 componenti nel visibile-UV. Queste 5 righe sono separate da un reticolo e incidono separatamente sul foto-catodo provocando l'emissione di elettroni (effetto fotoelettrico). L'energia cinetica degli elettroni è determinata attraverso una tensione di arresto V_s che ne impedisce l'arrivo

all'anodo, in analogia all'esperimento di Lenard descritto in figura 2. Tale tensione è applicata automaticamente e può essere letta su un tester.

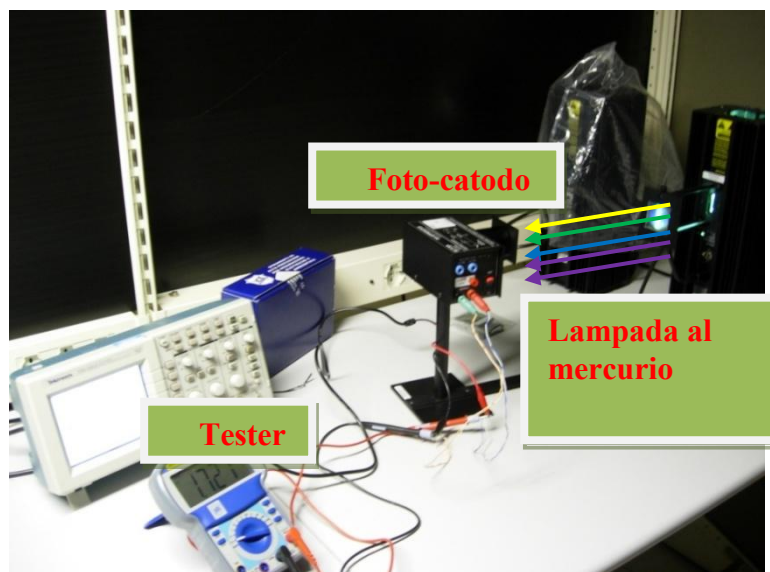


Figura 5 Immagine del setup sperimentale usato per lo studio dell'effetto fotoelettrico.

L'esecuzione dell'esperimento consiste nel posizionare la fenditura di ingresso al foto-catodo in corrispondenza di ogni riga e registrare il valore di tensione letto sul tester. A titolo esemplificativo in Tabella 1 sono riportati i valori di tensione V_s (gli errori sono determinati dalla precisione del tester) corrispondenti alle frequenze delle righe spettrali della lampada al mercurio (i cui valori sono tabulati):

Riga	ν (Hz)	V_s (Volt)
Giallo	5.19×10^{14}	0.68 ± 0.01
Verde	5.49×10^{14}	$0,78 \pm 0.01$
Blu	6.88×10^{14}	1.37 ± 0.01
Viola I	7.41×10^{14}	1.58 ± 0.01
Viola II	8.20×10^{14}	1.84 ± 0.01

Tabella 1 Righe emesse dalla lampada al mercurio, la loro frequenza e il valore della tensione di arresto misurato nell'esperimento sull'effetto fotoelettrico.

La figura 6 riporta il grafico della tensione di arresto V_s in funzione della frequenza ν della radiazione incidente sul foto-catodo. I punti sperimentali evidenziano la relazione lineare fra V_s e ν la tensione di arresto sono descritti da una relazione lineare ($y=mx + q$); i parametri m e q sono determinati dal best fit. In accordo con lo schema dell'apparato sperimentale di Lenard il prodotto eV_s (dove $e=1.6 \times 10^{-19}$ C è la carica dell'elettrone) è uguale all'energia cinetica degli elettroni $E_{cinetica}$. E' interessante notare la perfetta analogia dell'esperimento qui proposto con quello realizzato da Millikan (figura 4) che permise di verificare sperimentalmente la relazione di Einstein: $E_{cinetica} = h(\nu - \nu_0)$

Il confronto dei risultati qui mostrati con la stessa relazione permette di misurare la costante di Plank h , prodotto fra l pendenza m e la carica e dell'elettrone: $h = 6.4 \pm 0.1 \times 10^{-34}$ J s (l'errore è determinato dal best-fit dei dati) che risulta in buon accordo con il valore noto pari a $6,66 \times 10^{-34}$ J s.

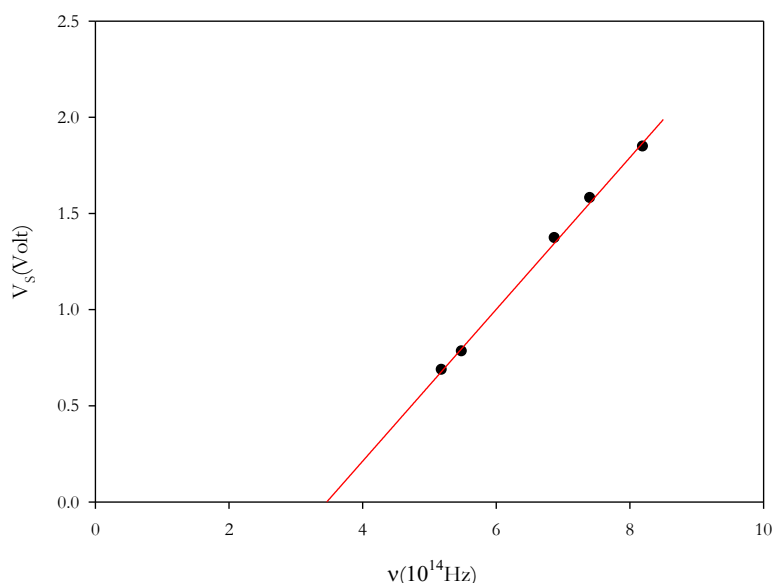


Figura 6 Tensione di arresto dei fotoelettroni in funzione della frequenza delle 5 righe delle lampada al mercurio (punti sperimentali). La linea rappresenta la retta di best-fit $y=mx +q$.

4 Discussione

L'effetto fotoelettrico è paradigmatico per sottolineare l'importanza della descrizione storica nello sviluppo scientifico, un approccio che permette di colmare il gap esistente tra la scienza insegnata a scuola e le scoperte scientifiche. L'apprendimento formale della scienza a scuola avviene principalmente attraverso una metodologia basata sulla lezione frontale che deve soddisfare criteri di sintesi, dipende dai testi scelti, è spesso decontestualizzata, e rischia quindi di essere povera di immaginazione e di spirito creativo. La storia della scienza può invece costituire un'opportunità per rendere i concetti scientifici pronti per l'apprendimento da parte degli studenti in un modo che umanizza i protagonisti e fornisce il giusto contesto. A tale proposito, Bevilacqua e Bordoni [9] hanno sottolineato che l'aspetto storico non deve essere opzionale all'insegnamento della fisica ma parte integrante di esso: "*We are not interested in adding the history of physics to teaching physics, as an optional subject: the history of physics is inside physics*". Una descrizione storica effettuata all'interno del programma curriculare dello studente, che permetta di presentare gli avvenimenti nel modo naturale in cui essi stessi si sono susseguiti, consente allo studente stesso di comprendere meglio l'argomento trattato e di non acquisire informazioni distorte derivanti da una eccessiva sintesi nei testi o nelle argomentazioni dei docenti.

Nella ricostruzione storica dell'effetto fotoelettrico, si evidenzia come l'interpretazione dei risultati sperimentali abbia incontrato non poche difficoltà prima di trovare consensi nella comunità scientifica del tempo. Le stesse difficoltà potrebbero essere incontrate oggi, dopo oltre un secolo, da alcuni studenti delle scuole medie superiori e potrebbero influenzare negativamente la comprensione e l'importanza di questo esperimento nella fisica. L'effetto fotoelettrico fu rivelato in seguito ad una serie di esperimenti che si intrecciano con possibili differenti interpretazioni basate su diverse "impalcature" teoriche; alcune fra le più significative sono:

- 1) *I risultati sperimentali di Lenard e la sua ipotesi di trigger*: Lenard, influenzato dalla teoria ondulatoria della luce in cui credeva fortemente, propose che gli elettroni in un atomo possiedono già l'energia necessaria per abbandonarlo e la luce incidente ha il solo ruolo di innescare il loro rilascio
- 2) *L'ipotesi di Einstein per spiegare l'effetto fotoelettrico*: In totale contrasto con l'ipotesi di Lenard, la teoria di Einstein spiega che la velocità degli elettroni era dipendente dalla frequenza e non

dall'intensità della luce, la luce è costituita da quanti localizzati di energia, un elettrone in un atomo riceverà energia da un "fotone". Tale teoria ha anche permesso a Einstein di prevedere che il potenziale di arresto V_S varia linearmente con la frequenza ν della luce e che la pendenza è una costante indipendente dalla natura del materiale.

- 3) *Non accettazione dell'ipotesi dei quanti di Einstein nella comunità scientifica*: La principale obiezione alla teoria di Einstein consisteva nel fatto che essa sembrava rifiutare la teoria ondulatoria classica della luce. Questo punto mette anche in luce che le idee innovative sono spesso viste con scetticismo e generalmente accettate molto lentamente
- 4) *La presupposizione di Millikan sulla natura della luce*: Millikan credeva fortemente nella teoria della luce fino al punto da rendere il suo contributo alla scienza contraddittorio ed inconsistente. Da un lato dimostrò sperimentalmente l'effetto fotoelettrico, dall'altro classificò la ipotesi interpretativa come "avventata". Il suo atteggiamento è comune ad alcuni scienziati che, prima di fare un esperimento, inevitabilmente possiedono delle convinzioni o dei presupposti teorici e sono portati a porre resistenza ad una modifica di tali credenze epistemologiche.

Questi punti sono esemplificativi per chiarire allo studente le dinamiche del progresso scientifico e alcune caratteristiche della ricerca scientifica: 1) Metodo induttivo. 2) Difficoltà da parte dello scienziato ad accettare idee innovative che stravolgono precedenti teorie già affermate. 3) Ogni scienziato è un uomo che ha delle proprie convinzioni a priori sull'esperimento che sta conducendo. 4) La conoscenza scientifica avanza per tentativi. 5) Ipotesi teoriche in contrasto possono spiegare gli stessi dati sperimentali. 6) Le teorie scientifiche non possono essere determinate attraverso la sola evidenza sperimentale; non esiste numero di evidenze sperimentali che possano provare in modo certo e conclusivo una teoria

Bibliografia

- [1] K. S. Krane "Modern Physics" John Wiley & Sons (1996).
- [2] D. Halliday, R. Resnick, K. S. Krane "Fisica 2" (Quinta Edizione) Casa Editrice Ambrosiana (2004).
- [3] M. Niaz, S. Klassen, B. McMillan, D. Metz (2010) "Science Studies and Science Education" Ed. S. Erduran and J.L. Rudolph.
- [4] <http://www.fis.unical.it/didattica/fotoelettrico/photoFrameSet.html>
- [5] R. A. Millikan (1916) "A direct photoelectric determination of Planck's h" Phys. Rev. **7**, 355.
- [6] <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/mod2.html>
- [7] Nobel Lectures, Physics 1922-1941, Elsevier Publishing Company, Amsterdam, 1965
- [8] www.elitalia.it
- [9] F. Bevilacqua, S. Bordoni "New contents for new media: Pavia project physics" Science & Education **7**, 451-469 (1998)

Quaderni di Ricerca in Didattica (Science), Supplemento n. 5

Editor in Chief: Claudio Fazio – University of Palermo, Italy

Editorial Director: Benedetto di Paola - University of Palermo, Italy

ISBN: 978-88-907460-3-1

First edition, 3rd December 2013

© 2013, Dipartimento di Fisica e Chimica dell'Università degli Studi di Palermo