UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PALERMO

DIPARTIMENTO DI ENERGIA, INGEGNERIA
DELL'INFORMAZIONE E MODELLI MATEMATICI

TESI DI DOTTORATO IN: **Matematica ed Automatica per l'Innovazione Scientifica e Tecnologica**

$\mathcal{D}$ pseudo-bosoni in modelli quantistici

Settore scientifico disciplinare **MAT/07**

AUTORE

Dott.ssa Margherita Lattuca

TUTOR

Prof. Fabio Bagarello

COORDINATORE DEL DOTTORATO

Prof. Francesco Alonge

XXIV CICLO - ANNO ACCADEMICO 2013-2014

DOTTORATO

Ringraziamenti

Alla fine di questo mio percorso è doveroso ringraziare tutti coloro i quali hanno contribuito al raggiungimento di questo traguardo.
Ringrazio il mio tutor, il Prof. Bagarello, per la sua continua e solerte guida e per avermi supportato e sopportato anche nei momenti difficili.
Un ringraziamento speciale è rivolto al Coordinatore di questo Dottorato di Ricerca, il Prof. Alonge che, come un padre ha saputo guidarmi e sostenermi anche quando il percorso si è fatto tortuoso. Ed ancora la Prof.ssa Mongiovì per avermi spronato ad aver fiducia in me stessa.
Vorrei inoltre ringraziare il Dott. Triolo per i suoi preziosi ed illuminanti consigli. E non ultimo il Dott. Gargano per la sua disponibilita.

Indice

Capitolo 1

Introduzione

All'inizio del secolo scorso, con le nuove scoperte fisiche, le leggi della meccanica classica entrarono improvvisamente in crisi poiché non erano più in grado di dare una risposta a molti problemi riguardanti sistemi di particelle elementari e, più in generale, sistemi microscopici. Ecco che nasceva la meccanica quantistica, che aveva come ambito fondamentale di ricerca il comportamento dei più piccoli costituenti della materia. Da allora questa teoria ha avuto una continua evoluzione che continua ancora oggi. Un grosso contributo all'assetto rigoroso che ha assunto ai nostri giorni è stato dato da Heisenberg, Scrödinger, Dirac, Pauli, Feynman ed altri ancora.

Quando si studia un sistema conservativo in meccanica classica, esso viene in generale descritto tramite la sua energia meccanica H, somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale. Le equazioni che descrivono l'evoluzione temporale del sistema nel formalismo Hamiltoniano sono

$$\dot{q}_i = \frac{dH}{dp_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{dH}{dq_i},$$

in cui $q_i\left(t\right)$ e $p_i\left(t\right)$ sono funzioni del tempo che commutano tra loro,

$$q_j\left(t\right) p_k\left(t\right) = p_k\left(t\right) q_j\left(t\right),$$

e rappresentano rispettivamente le coordinate generalizzate ed i loro momenti coniugati.

Anche in meccanica quantistica, per descrivere un sistema, consideriamo H, l'energia totale del sistema ma essa non è più una funzione, e di conseguenza non è più costruita in termini di funzioni. Al contrario, tanto H quanto i suoi *costituenti* sono, in generale, operatori e, come tali, non necessariamente commutano tra loro. Molto spesso, tali operatori 'di partenza' sono ancora la posizione ed il momento coniugato, che però stavolta soddisfano la relazione

$$[x_j, p_k] = x_j p_k - p_k x_j = i\delta_{j,k}\mathbb{1},$$

in cui il simbolo $[A, B] = AB - BA$ è il commutatore degli operatori A e B.

Già adesso capiamo che in meccanica quantistica gli operatori giocano un ruolo essenziale: ciò che in meccanica classica commuta, in meccanica quantistica potrebbe non farlo.

Quando ci si approccia allo studio della meccanica quantistica, è quasi sempre inevitabile scontrarsi con l'analisi dell'operatore Hamiltoniano H, operatore, che, come si è detto, è associato all'energia del sistema. Esso agisce su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ e si richiede spesso che sia auto-aggiunto, cioè che risulti $H = H^\dagger$. Questo garantisce che gli autovalori dell'energia siano reali e che l'evoluzione temporale sia unitaria, il che è essenziale per mantenere l'interpretazione probabilistica intrinseca alla meccanica quantistica.

Da qualche anno a questa parte, fisici e matematici si sono resi conto che questa condizione ($H = H^\dagger$), essendo sufficiente ma non necessaria per la realtà dello spettro di H, escludeva dallo studio teorico moltissime Hamiltoniane che, pur avendo livelli di energia reali, non risultano auto-aggiunte. Basti pensare alle Hamiltoniane del tipo:

$$H = p^2 + x^2 (ix)^\epsilon$$

dove $\epsilon > 0$.

In [36] Dorey dà una prova del fatto che queste Hamiltoniane hanno uno spettro reale e positivo sebbene H sia manifestatamente non-autoaggiunta per alcuni valori di ϵ, ad esempio per $\epsilon = 1$.

Si sviluppa così una nuova teoria che sfrutta non più la condizione di Hermiticità [1] bensì una più debole detta di quasi-Hermiticità o di $\mathcal{PT}$-simmetria, in cui la condizione $H = H^\dagger$ è sostituita dalla

$$H = H^{\mathcal{PT}} \equiv ((\mathcal{PT})\, H\, (\mathcal{PT}))\,. \tag{1.0.1}$$

Qui P rappresenta l'operatore lineare di parità (riflessione temporale) e T rappresenta l'operatore antilineare di inversione temporale. Questi due operatori, P e T, conservano la relazione fondamentale $[x,p] = i\mathbb{1}$, nel senso che, detti $x^{\mathcal{PT}} := \mathcal{PT}x\mathcal{PT}$ e $p^{\mathcal{PT}} := \mathcal{PT}p\mathcal{PT}$ vale la $[x^{\mathcal{PT}}, p^{\mathcal{PT}}] = -i\mathbb{1}$ che è equivalente alla $[x,p] = i\mathbb{1}$ [2]. L'uso di questa nuova condizione alternativa permette di costruire e studiare molti più tipi di Hamiltoniane.

Nella prossima sezione descriveremo brevemente l'evoluzione storica che ha portato alla nascita della Teoria Quantistica $\mathcal{PT}$-simmetrica.

1.1 Aspetti storici della Teoria quantistica $\mathcal{PT}$-simmetrica

Dalla seconda metà del secolo scorso appaiono in letteratura descrizioni di fenomeni fisici attraverso l'utilizzo di Hamiltoniane non-Hermitiane con spettro reale. Wu, in [1], osservò che lo stato fondamentale di un sistema di Bose di sfere dure era descritto da una Hamiltoniana non Hermitiana. Inoltre, nel 1978, Brower [2], studiando la teoria del campo di Reggeon, si scontrò con l'analisi di Hamiltoniane non Hermitiane. In seguito Caliceti [3] nello studio della Teoria delle perturbazioni di oscillatori anarmonici analizzò l'Hamiltoniana del tipo

$$H = p^2 + x^2 + \beta x^3$$

e dimostrò che essa aveva spettro reale anche se manifestatamente non-Hermitiana (se $\beta \in \mathbb{C}$). Ed ancora Hollowood [8], nel 1992, osservò

[1] Nel seguito i concetti di auto-aggiunzione ed hermiticità saranno spesso trattati come equivalenti

[2] Osserviamo che, in virtù della definizione di $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$, si deduce che $x^{\mathcal{PT}} = -x$, $p^{\mathcal{PT}} = p$ e che $\mathcal{PT}i\mathcal{PT} = -i$

che l'Hamiltoniana non Hermitiana del reticolo complesso di Toda aveva livelli di energia reali.

Tuttavia la comunità scientifica appariva non particolarmente interessata ad un'analisi approfondita di questo tipo di Hamiltoniane. Infatti si pensava che la perdita dello stato di Hermiticità avrebbe portato ad una teoria quantistica non unitaria in contraddizione con gli assiomi della meccanica quantistica. Dobbiamo aspettare il 1998, anno in cui Bender e Boettcher [6], incuriositi dall'ipotesi fatta da Bessi e Zinn-Justin riguardante la realtà dello spettro di alcune Hamiltoniane non Hermitiane, decisero di studiare più nel dettaglio

$$H = p^2 + ix^3 \tag{1.1.1}$$

usando una tecnica perturbativa chiamata *espansione delta*. Quest'ultima, sviluppata alcuni anni prima dallo stesso Bender ([4]), era stata originariamente usata nella risoluzione di problemi non lineari.

L'analisi dell'Hamiltoniana in (1.1.1), tuttavia, dava soltanto una risposta parziale: fino ad un certo n si avevano livelli di energia reali. Questo però stimolò la loro curiosità e li spinse ad investigare ulteriormente il problema fino alla definizione di $\mathcal{PT}$-simmetria. Essa si fonda sull'ipotesi che la condizione di Hermiticità ($H = H^\dagger$) sia, come già si è detto, solo sufficiente ma non necessaria a garantire che lo spettro dell'energia sia reale e che l'evoluzione temporale sia unitaria. Infatti, essi compresero che è possibile sostituirla con una più debole, detta di $\mathcal{PT}$-simmetria; una Hamiltoniana H è detta $\mathcal{PT}$-simmetrica se vale la

$$H = H^{\mathcal{PT}}$$

in cui $H = H^{\mathcal{PT}}$ è definita tramite gli operatori di parità e di inversione temporale precedentemente introdotti, vedi (1.0.1).

Successivamente molti lavori di ricerca si orientarono in questa direzione, eventualmente generalizzando questa condizione, come vedremo più avanti.

Nel 2001 Dorey et al in [36] dimostrarono rigorosamente, in accordo con la congettura di Bessi e Zinn-Justin, che certe Hamiltoniane non Hermitiane, ed in particolare quella in (1.1.1), avevano autovalori reali.

Un altro articolo di Bender et al., [5], propose una struttura più definita per la Teoria quantistica $\mathcal{PT}$-simmetrica. In questo lavoro essi introdussero un nuovo operatore $\mathcal{C}$ per definire una norma definita positiva per la Meccanica quantistica $\mathcal{PT}$-simmetrica e ancora una volta conclusero che Hamiltoniane non-Hermitiane hanno autovalori reali se risultano $\mathcal{PT}$-simmetriche cioè $[H, \mathcal{PT}] = 0$. Incidentalmente, osserviamo che questa è equivalente alla condizione (1.0.1) visto che, $[\mathcal{P}, \mathcal{T}] = 0$ e che $P^2 = T^2 = \mathbb{1}$

Hamiltoniane con tale proprietà possono definire una Teoria quantistica unitaria. Infatti si preservano le tre condizioni fondamentali affinchè una teoria quantistica sia valida:

1. avere uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ con prodotto interno la cui norma associata è definita positiva;
2. avere uno spettro dell'energia limitato inferiormente;
3. avere un'evoluzione temporale unitaria.

L'ultima proprietà è garantita dall'introduzione di un terzo operatore, $\mathcal{C}$, che commuta con H e con $\mathcal{PT}$: $[H, \mathcal{C}] = 0$, $[\mathcal{C}, \mathcal{PT}] = 0$. In altre parole, per queste Hamiltoniane esiste una simmetria aggiuntiva. In questo nuovo ambiente non si considera più l'unitarietà classica ma quella rispetto all'invarianza $\mathcal{CPT}$: si cambia il prodotto scalare e dunque operatori che non erano unitari, rispetto al prodotto originale di H, possono esserlo rispetto a questo nuovo prodotto scalare, vedi sotto.

La teoria $\mathcal{PT}$ può essere brevemente riassunta come segue. Non forniremo qui i dettagli, che non sono rilevanti per questa tesi, rimandando ai lavori originali per ulteriori chiarimenti:

1. il nuovo sistema quantistico è descritto da $(\mathcal{H}, H, \langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathcal{CPT}})$, dove $\mathcal{H}$ è lo spazio di Hilbert con prodotto interno $\mathcal{CPT}$ definito sotto ed H è l'Hamiltoniana $\mathcal{PT}$-simmetrica;
2. presi due qualunque vettori $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ in $\mathcal{H}$ il prodotto interno CPT è definito da
$$\langle\phi|\psi\rangle_{\mathcal{CPT}} = \int \phi^{\mathcal{CPT}}(x)\, \psi(x)\, dx$$

dove $\phi^{\mathcal{CPT}} = \int \mathcal{C}\,(x,y)\,\overline{\phi\,(-y)}dy$;

3. l'evoluzione temporale di uno stato è unitaria rispetto al prodotto interno $\mathcal{CPT}$;

4. un'osservabile è un operatore lineare $\mathcal{O}$ Hermitiano rispetto al prodotto $\mathcal{CPT}$ cioè
$$\langle\varphi|\mathcal{O}\psi\rangle_{\mathcal{CPT}} = \langle\mathcal{O}\varphi|\psi\rangle_{\mathcal{CPT}}$$
per ogni $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$;

5. se misuriamo un'osservabile $\mathcal{O}$ allora gli autovalori sono i possibili risultati di tale misura;

6. se la misura dà un autovalore $\mathcal{O}_n$, lo stato ψ opera una transizione all'autostato, corrispondente all'autovalore $\mathcal{O}_n$, ψ_n di $\mathcal{H}$ e la probabilità di ottenere l'autovalore $\mathcal{O}_n$ in uno stato ψ è data da
$$p_n = \frac{|\langle\psi|\psi_n\rangle_{\mathcal{CPT}}|^2}{\|\psi\|^2_{\mathcal{CPT}}\,\|\psi_n\|^2_{\mathcal{CPT}}};$$

7. Siano $\left(\mathcal{H}_1, H_1, \langle\cdot|\cdot\rangle^{(1)}_{\mathcal{CPT}}\right)$ e $\left(\mathcal{H}_2, H_2, \langle\cdot|\cdot\rangle^{(2)}_{\mathcal{CPT}}\right)$ due sistemi quantistici, allora lo stato del sistema combinato vivrà in $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, con prodotto scalare ottenuto da $\langle\cdot|\cdot\rangle^{(1)}_{\mathcal{CPT}}$ e $\langle\cdot|\cdot\rangle^{(2)}_{\mathcal{CPT}}$.

Successivamente Mostafazadeh in [12] mostra che è possibile generalizzare questa struttura e definire una teoria più generale che chiama Meccanica Quantistica Pseudo-Hermitiana, della quale la Teoria Quantistica $\mathcal{PT}$-Simmetrica rappresenta un caso particolare. Essa si basa sulla definizione di un prodotto interno, diverso da quello *naturale*, in termini di un operatore metrico non lineare η_+, che soddisfa opportune condizioni. Ad esempio esso deve essere invertibile e positivo.

L'autore sostiene che al fine di definire una teoria quantistica valida non è necessario usare naturalmente gli operatori $\mathcal{PT}$ e $\mathcal{C}$, ma basta ottenere, ove possibile, un operatore positivo invertibile η_+ per il quale valga la condizione di pseudo-Hermiticità
$$H^\dagger = \eta_+ H \eta_+^{-1}. \tag{1.1.2}$$

In un modo simile, Znojil in [9] introduce le Hamiltoniane Crypto Hermitiane, ovvero quelle per cui esiste un operatore autoaggiunto, invertibile Θ che soddisfi la

$$H = \Theta^{-1} H^{\dagger} \Theta.$$

E' evidente che questa condizione è molto simile a quella in (1.1.2) fornita da Mostafazadeh, ed in effetti tanto Θ che η_{+} sono noti in letteratura come operatori metrici, in quanto entrambi consentono di definire un nuovo prodotto scalare ed una nuova norma a partire da quelli originali.

Occorre pure dire che, mentre i lavori di Bender e di Znojil hanno un'impronta fortemente fisica, quelli di Mostafazadeh sono certamente più dettagliati da un punto di vista matematico.

Abbiamo voluto dare una brevissima sintesi di tre approcci all'analisi delle Hamiltoniane non Hermitiane con spettro reale presenti in letteratura, ma questo è soltanto un assaggio di tutti gli studi fatti in questa direzione, si veda ad esempio [13].

1.2 Recenti risultati sulle regole di commutazione

Negli ultimi anni l'interesse di molti matematici e fisici si è rivolto verso l'analisi delle regole di commutazione. In meccanica quantistica sappiamo che già in sistemi molto semplici quale l'oscillatore armonico quantistico, vale la relazione di commutazione canonica $[a, a^{\dagger}] = \mathbb{1}$, in cui l'operatore a, detto bosonico, è combinazione lineare $\frac{1}{\sqrt{2}}(x + ip)$ dell'operatore di posizione e di momento dell'oscillatore. Ma cosa succede se invece di $a^{\dagger}$ considerassimo un operatore b, non necessariamente in relazione con a, per cui vale ancora $[a, b] = \mathbb{1}$? Cioè cosa accade se generalizziamo la relazione di commutazione canonica e consideriamo due generici operatori, ancora una volta, in un certo senso coniugati? In letteratura, l'estensione della relazione di commutazione canonica ha visto nascere parecchi tipi di pseudo-particelle tra le quali gli anioni e i quons, ma l'interesse qui è concentrato sui cosiddetti pseudo-bosoni. Quest'ultimi furono definiti per la prima volta da Trifonov in [14].

In questo lavoro Trifonov considera due operatori b e $b^\sharp$ che soddisfano la relazione di commutazione

$$[b, b^\sharp] = \mathbb{1} \tag{1.2.1}$$

dove $b^\sharp := \eta^{-1} b \eta$. Per $\eta = \mathbb{1}$, operatore identico, la relazione (1.2.1) si riduce alla relazione di commutazione canonica; Trifonov chiamò b e $b^\sharp$ *operatori pseudo-bosonici*. Egli utilizzò questi nuovi operatori per la costruzione di due famiglie di vettori, che *ottimisticamente* assunse essere basi di $\mathcal{H}$ e di stati coerenti generalizzati per sistemi non Hermitiani.

Prima di lui altri autori avevano usato operatori analoghi senza però chiamarli con lo stesso nome. Per esempio, Roy et al. [16] li costruirono sull'esempio del potenziale di Scarf, Znojil in [10] li considerò in modelli non Hermitiani supersimmetrici ed ancora Bagchi e Quesne li usarono per oscillatori $\mathcal{PT}$-simmetrici [11]. Anche Bender in [7] usa lo stesso tipo di operatori in altri modelli, ad esempio

$$H = (p_1^2 + x_1^2) + (p_2^2 + x_2^2 + 2ix_2) + 2\epsilon x_1 x_2.$$

che rappresenta una delle Hamiltoniane non autoaggiunte che analizzeremo in seguito.

Questa particolare modificazione della relazione di commutazione canonica, considerata nei precedenti lavori, ed in particolare in quello di Trifonov, fu ripresa da Bagarello che decise di investigare più approfonditamente le conseguenze di tale commutatore e darne una prima formalizzazione matematica in [17]. Nello stesso lavoro, Bagarello rianalizza i modelli proposti da Trifonov alla luce della nuova rigorosa definizione di pseudo-bosoni, ponendo l'accento sul ruolo fondamentale che ricoprono le basi di Riesz in questa nuova struttura. Dalla suddetta formalizzazione matematica vennero fuori le seguenti considerazioni:

1. nasce un'interessante relazione di intertwining tra operatori non autoaggiunti,

2. è possibile introdurre due operatori di tipo numero non autoaggiunti, N ed $N^\dagger$, che soddisfano una condizione analoga a quella di pseudo-Hermiticità,

3. N ed $N^\dagger$ hanno spettro discreto e reale.

L'evoluzione degli pseudo-bosoni non finisce qui.

Bagarello, analizzando più a fondo la loro struttura, si pone delle nuove domande

1. $\mathcal{F}_\varphi$ e $\mathcal{F}_\Psi$, gli insiemi biortogonali di autovettori degli operatori $N = ba$ e $N^\dagger$, sono necessariamente basi per lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$?

   ed ancora

2. Se $\mathcal{F}_\varphi$ and $\mathcal{F}_\Psi$ sono basi di Riesz cosa succede? E cosa succede quando invece non lo sono?

La risposta alla prima domanda è, contrariamente a quanto spesso affermato in letteratura, generalmente 'no'. Un controesempio banale è il seguente: consideriamo gli operatori bosonici c e $c^\dagger$ con $[c, c^\dagger] = \mathbb{1}$. L'insieme $\mathcal{F}_\chi = \left\{ \chi_n := \frac{1}{\sqrt{n!}} {c^\dagger}^n \chi_0 \right\}$, dove $c\chi_0 = 0$ è una base ortonormale per $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ma non lo è certamente nello spazio di Hilbert $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$.

Inoltre, il fatto che $\mathcal{F}_\varphi$ e $\mathcal{F}_\Psi$ non siano basi di Riesz ci dice che esistono degli operatori di intertwining S_φ e S_Ψ che non sono limitati. Questo crea una serie di difficoltà matematiche di non facile trattazione. Ad esempio nascono parecchi problemi con i domini degli operatori. Torneremo su questi aspetti in seguito.

Vari tentativi sono stati fatti per dare una trattazione completa di questa situazione, vedi [39], [41], tuttavia le condizioni trovate affinchè queste due famiglie siano basi non sono applicabili a tutti i sistemi fisici ma solo ad alcuni, e questo ci suggerisce di cercare un approccio più generale.

Viene in nostro aiuto, per queste ed altre questioni, Bagarello che in [29] rende la definizione degli pseudo-bosoni più semplice ed elegante aggiungendo alcune proprietà alle ipotesi, snellendo così le verifiche da effettuare. Nella nuova struttura degli pseudo-bosoni, $\mathcal{D}$, un sottospazio denso di $\mathcal{H}$, stabile sotto l'azione di $a, b, a^\dagger, b^\dagger$, gioca un ruolo fondamentale, e da qui la ragione del termine $\mathcal{D}$ nel nome delle particelle.

L'introduzione di $\mathcal{D}$ infatti porta a semplificare le assunzioni fatte nella precedente definizione di pseudo-bosoni, ed ha anche conseguenze sulle applicabilità del formalismo matematico a modelli fisici concreti, fornendo in questo modo risultati rigorosi per modelli che, fino a poco tempo prima, venivano trattati a livello euristico.

Queste ed altre proprietà saranno discusse nel dettaglio nel Capitolo 2.

Un'altra struttura simile, nuovamente inspirata da Trifonov et al. in [15], è stata recentemente introdotta in [18]. Questa struttura nasce dalla deformazione delle regole di anticommutazione canoniche. Si considerano due operatori a e b agenti su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ e che soddisfano le regole di anticommutazione

$$\{a, b\} = \mathbb{1}, \tag{1.2.2}$$

dove $\mathbb{1}$ è l'identità su $\mathcal{H}$ ed $a^2 = b^2 = 0$. Ovviamente se $b = a^\dagger$ la (1.2.2) diventa la regola di anticommutazione canonica. Gli operatori a e b sono detti pseudo-fermioni.

Il vantaggio di questa struttura rispetto a quella degli pseudo-bosoni è che qui lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, nel quale questi operatori vivono, è finito dimensionale e quindi non abbiamo più problemi derivanti dalla presenza di operatori non limitati poichè le osservabili, in questo caso, sono tutte rappresentabili tramite operatori limitati.

Questo tipo di struttura è interessante per molti modelli finito dimensionali considerati in meccanica quantistica quasi-Hermitiana. In particolare, in [18], l'autore mostra come un'Hamiltoniana non-autoaggiunta effettiva, usata per descrivere un atomo a due livelli interagente con un campo elettromagnetico, può essere scritta in termini di pseudo-fermioni. Bagarello successivamente in [25], considerando nuovamente i modelli discussi in precedenza, studia il decadimento del sistema attraverso l'uso degli pseudo-fermioni.

1.2.1 Concludendo...

Il tema centrale di questa tesi è mostrare come studi rigorosi della deformazione delle regole di commutazione portino alla costruzione di un framework generale, quello degli $\mathcal{D}$ pseudo-bosoni, le cui assunzioni sono direttamente verificate in alcuni modelli fisici dimostrando che questi modelli $\mathcal{PT}$-simmetrici possono essere riscritti in termini di $\mathcal{D}$ pseudo-bosoni. Si vogliono altresì sottolineare i vantaggi che l'uso di questo framework porta all'analisi dei modelli che considereremo.

A questo scopo, nel prossimo capitolo analizzeremo in dettaglio la struttura matematica degli pseudo-bosoni. Introdurremo la definizione di pseudo-bosoni sia nella forma originale che in quella in cui sono associati ad un certo sottospazio $\mathcal{D}$, mettendo a confronto la prima definizione con quella degli $\mathcal{D}$ pseudo-bosoni per meglio evidenziare i vantaggi di questi ultimi.

Nel Capitolo 3, dedicato ai modelli fisici $\mathcal{PT}$-simmetrici, analizzeremo modelli di sistemi non-hermitiani recentemente studiati e mostreremo come essi siano totalmente immersi nella struttura degli $\mathcal{D}$ pseudo-bosoni.

L'ultimo capitolo sarà dedicato alle nostre conclusioni.

Capitolo 2

$\mathcal{D}$ pseudo-bosoni

In questo capitolo analizzeremo in maggiore dettaglio la struttura recentemente introdotta da Bagarello in [29] i cui costituenti principali sono chiamati $\mathcal{D}$ pseudo-bosoni. Essa è una versione più elegante degli pseudo-bosoni precedentemente definiti da Bagarello stesso in [17] e ben si adatta a modelli di meccanica quantistica $\mathcal{PT}$-simmetrica. Ma andiamo con ordine.

2.1 Pseudo-bosoni: le origini

Gli pseudo-bosoni nascono da una opportuna deformazione della relazione di commutazione canonica e sono stati introdotti con questo nome per la prima volta da Trifonov in [14]. E' comunque opportuno ricordare che questa stessa terminologia veniva usata anni prima con un differente significato, [24]. Trifonov, nel suo lavoro, definisce operatori pseudo-bosonici quelli che soddisfano la relazione

$$[a, b] = \mathbb{1},$$

con b non necessariamente uguale ad $a^\dagger$ ed $\mathbb{1}$ l'identità di $\mathcal{H}$. Molti altri autori introdussero operatori soddisfacenti analoghe regole di commutazione anche se non usarono la stessa nomenclatura. Per esempio in Bender et al. [7] si usano regole di commutazione simili per lo studio di modelli $\mathcal{PT}$-simmetrici.

2.2 Definizione originaria degli pseudo-bosoni

In questa sezione richiameremo brevemente, per meglio inquadrare storicamente ciò che seguirà, il primo formalismo matematico dato in [17] agli pseudo-bosoni. I risultati qui riportati sono dimostrati in [17].

Per prima cosa dobbiamo definire l'ambiente nel quale stiamo lavorando. Per questo consideriamo $\mathcal{H}$, uno spazio di Hilbert dotato di prodotto scalare $\langle .,. \rangle$ e relativa norma $\|.\|$. Siano quindi a and b due operatori che agiscono su $\mathcal{H}$ per i quali vale (in un senso opportuno, ovvero almeno su un sottospazio denso di $\mathcal{H}$) la seguente regola di commutazione

$$[a, b] = \mathbb{1}, \tag{2.2.1}$$

in cui $\mathbb{1}$ è l'identità in $\mathcal{H}$. Come già affermato più volte questa è una generalizzazione della regola di commutazione canonica. Quest'ultima infatti ne rappresenta un caso particolare ($b = a^\dagger$). Inoltre la relazione (2.2.1) implica che gli operatori considerati non possono essere entrambi limitati ed è per questo che è opportuno fare delle ipotesi di lavoro aggiuntive:

Ipotesi pb 1.– Esiste un vettore non nullo $\varphi_0 \in \mathcal{H}$ tale che $a\varphi_0 = 0$ e $\varphi_0 \in D^\infty(b)$.

Qui $D^\infty(b)$ rappresenta il dominio comune di tutte le potenze di b.

La seconda ipotesi è analoga alla precedente:

Ipotesi pb 2.– Esiste un vettore non nullo $\Psi_0 \in \mathcal{H}$ tale che $b^\dagger \Psi_0 = 0$ e $\Psi_0 \in D^\infty(a^\dagger)$.

Anche qui, come nel caso precedente, $D^\infty(a^\dagger)$ rappresenta il dominio comune di tutte le potenze di $a^\dagger$.

Osserviamo che queste prime due ipotesi limitano la scelta degli operatori a e b con cui abbiamo a che fare. Infatti, se prendessimo gli operatori $a = ip$ e $b = x$, che vivono nello spazio di Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, d\nu(x))$ dove $d\nu(x) = \frac{dx}{1+x^2}$ si ha che l'ipotesi $a\varphi_0(x) = 0$ implica che $\varphi_0(x)$ sia una costante. Quindi $\varphi_0(x) \in \mathcal{H}$ ma $\varphi_0(x) \notin D^\infty(b)$. In questo caso gli operatori a e b considerati non verificano l'Ipotesi pb 1 e quindi non sono candidabili al ruolo di operatori pseudo-bosonici, nonostante formalmente soddisfino la (2.2.1).

Sotto le ipotesi precedentemente fatte, consideriamo adesso le due seguenti famiglie di vettori:

$$\mathcal{F}_\varphi = \left\{ \varphi_n := \frac{1}{\sqrt{n!}}\, b^n \varphi_0 \right\} \qquad \mathcal{F}_\Psi = \left\{ \Psi_n := \frac{1}{\sqrt{n!}}\, {a^\dagger}^n \Psi_0 \right\}.$$

E' evidente che, i vettori appartenenti a $\mathcal{F}_\varphi$ e $\mathcal{F}_\Psi$ sono tutti ben definiti. Si dimostra che $\mathcal{F}_\varphi$ e $\mathcal{F}_\Psi$ sono biortogonali. Infatti, scegliendo una normalizzazione di φ_0 e Ψ_0 in modo tale che $\langle \Psi_0, \varphi_0 \rangle = 1$ si dimostra che:

$$\langle \Psi_n, \varphi_m \rangle = \delta_{n,m}. \tag{2.2.2}$$

La verifica della biortogonalità delle due famiglie sfrutta alcune relazioni che vengono fuori dalla definizione dei due operatori illimitati $N := ba$ e $N^\dagger := a^\dagger b^\dagger$ per i quali valgono

$$N\varphi_n = n\varphi_n, \qquad N^\dagger \Psi_n = n\Psi_n. \tag{2.2.3}$$

E' possibile dare una dimostrazione di quest'ultime e della (2.2.2)per induzione, come vedremo nella sezione successiva. Dalle (2.2.3) si evince che i vettori φ_n e Ψ_n sono autostati di due operatori N e $N^\dagger$ che, pur non essendo autoaggiunti, hanno, come si vede, autovalori reali. Inoltre in [17] è dimostrato che φ_n appartiene al dominio di N e Ψ_n appartiene al dominio di $N^\dagger$ per tutti i possibili n.

Ma ritorniamo a noi. Stavamo discutendo il fatto che $\mathcal{F}_\varphi$ e $\mathcal{F}_\Psi$ sono due insiemi biortogonali. Di conseguenza i vettori sono automaticamente linearmente indipendenti. Tuttavia non è detto che essi siano anche due sistemi di generatori di $\mathcal{H}$. In effetti questo è qualcosa che richiediamo nella

Ipotesi pb 3.– $\mathcal{F}_\varphi$ e $\mathcal{F}_\Psi$ sono basi di $\mathcal{H}$.

Da quest'ultima, si ha che ogni $f \in \mathcal{H}$ si può scrivere come combinazione lineare degli elementi delle basi cioè, in notazione bra-ket:

$$f = \left(\sum_n |\varphi_n\rangle\langle\Psi_n| \right) f, \tag{2.2.4}$$

in cui si è definito

$$(|h\rangle\langle g|)\, f := \langle g, f\rangle\, h. \tag{2.2.5}$$

Quindi la (2.2.4) esplicitamente diventa:

$$f = \sum_n \langle \Psi_n, f\rangle\, \varphi_n. \tag{2.2.6}$$

Analogamente può scriversi:

$$f = \sum_n \langle \varphi_n, f\rangle\, \Psi_n. \tag{2.2.7}$$

Viene allora spontaneo chiedersi: cosa succede se, piuttosto che:

$$\sum_n |\varphi_n\rangle\langle\Psi_n|, \qquad \sum_n |\Psi_n\rangle\langle\varphi_n|,$$

considerassimo gli operatori

$$S_\varphi = \sum_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|, \qquad S_\Psi = \sum_n |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|? \tag{2.2.8}$$

Ci accorgiamo subito che questi operatori soddisfano, almeno formalmente, le seguenti relazioni:

$$S_\varphi \Psi_n = \varphi_n, \qquad S_\Psi \varphi_n = \Psi_n \tag{2.2.9}$$

per tutti gli n. Infatti

$$S_\varphi \Psi_n = \sum_m |\varphi_m\rangle\langle\varphi_m|\Psi_n = \sum_m \langle\varphi_m, \Psi_n\rangle\, \varphi_m = \sum_m \delta_{n,m}\varphi_m = \varphi_n.$$

Analogamente si deduce l'altra relazione.

La (2.2.9) implica che $\Psi_n = (S_\Psi S_\varphi)\,\Psi_n$ e che $\varphi_n = (S_\varphi S_\Psi)\,\varphi_n$, per tutti gli n. Ne segue che, almeno quando S_φ e S_Ψ sono limitati

$$S_\varphi S_\Psi = S_\Psi S_\varphi = 1\!\!1 \Longrightarrow S_\Psi = S_\varphi^{-1}. \tag{2.2.10}$$

Da questa ultima relazione si evince che S_φ and S_Ψ sono invertibili ed inoltre l'uno è l'inverso dell'altro. Si può inoltre dimostrare che sono entrambi positivi, ben definiti e simmetrici (vedi [17]).

Ma guardiamo bene la (2.2.8). E' necessario chiedersi se queste serie siano sempre convergenti. Infatti, non è affatto detto che lo siano e che quindi gli operatori S_φ e S_Ψ siano limitati. Infatti da [40] sappiamo che due basi biortonormali sono legate tra di loro da operatori limitati con inverso limitato se e solo se esse sono basi di Riesz. Questo ci suggerisce di introdurre la seguente ulteriore ipotesi

Ipotesi pb 4.– $\mathcal{F}_\varphi$ e $\mathcal{F}_\Psi$ sono entrambe basi di Riesz.

Se gli operatori (a, b) soddisfano le Ipotesi pb 1,2,3, sono detti *pseudo-bosonici*; se soddisfano anche l'Ipotesi pb 4 si parla di *pseudo-bosoni regolari*. Da un punto di vista matematico avere a che fare con quest'ultimi è decisamente conveniente in quanto, essendo S_φ e S_Ψ entrambi limitati, non sorgono problemi tecnici che invece appaiono, inevitabilmente, qualora si debba trattare con operatori illimitati.

2.2.1 Alcuni commenti sugli pseudo-bosoni

Prima di procedere oltre è opportuno fare alcune considerazioni relative all'utilità di modificare la definizione di pseudo-bosoni data nella precedente sezione:

1. Dalle prime assunzioni è chiaro che $\varphi_n \in D(b)$ e $\Psi_n \in D(a^\dagger)$, ma non è del tutto evidente, per esempio, che sia anche $\varphi_n \in D(a)$ e $\Psi_n \in D(b^\dagger)$ e di conseguenza che $\varphi_n \in D(N)$ e $\Psi_n \in D(N^\dagger)$.

   Sfortunatamente le ipotesi precedenti non ci assicurano che tali condizioni siano verificate, ed esse devono essere dimostrate esplicitamente.

2. Consideriamo adesso gli operatori S_φ e S_Ψ. Sarebbe importante trovare un dominio che rimane invariante sotto l'azione di questi operatori ma anche sotto l'azione di N e $N^\dagger$, altrimenti per alcune relazioni di intertwining diventerebbe necessario uno studio ulteriore.

3. In alcuni esempi di applicazione della definizione di pseudo-bosoni a modelli di meccanica quantistica [23] viene erroneamente identificata la completezza degli insiemi $\mathcal{F}_\varphi$ e $\mathcal{F}_\Psi$ con il fatto di essere basi di $\mathcal{H}$. Questo aspetto, non sufficientemente considerato nella teoria precedente, diventa uno dei problemi fondamentali della teoria degli $\mathcal{D}$ pseudo-bosoni.

4. A monte di tutto ciò, la (2.2.1) deve poter agire, come si è detto, su un opportuno sottospazio denso di $\mathcal{H}$, il che non è garantito a priori.

Ecco che nasce la necessità di fare ipotesi alternative, che ci permettano di ridurre i controlli da effettuare e quindi di dare una riformulazione alle Ipotesi precedentemente fatte.

2.3 $\mathcal{D}$ pseudo-bosoni

Riportiamo adesso la nuova definizione degli pseudo-bosoni data da Bagarello in [29] mettendo in evidenza le analogie e le differenze con la definizione originaria.

Anche qui il campo di azione è uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ con prodotto scalare $\langle .,. \rangle$ e norma $\|.\|$, ed anche qui consideriamo a e b, due opportuni operatori di $\mathcal{H}$. Indichiamo con $D(a)$ e $D(b)$ i domini di a e b e con $a^\dagger$ e $b^\dagger$ i loro aggiunti. Consideriamo adesso $\mathcal{D}$, sottospazio denso di $\mathcal{H}$, che sia stabile sotto l'azione di $a, b, a^\dagger, b^\dagger$. Come ben si vede, $\mathcal{D}$ rappresenta la *new entry* ed ha un ruolo di fondamentale importanza nella definizione di questa nuova struttura. Osserviamo subito che qui non è richiesto che $\mathcal{D}$ debba coincidere con $D(a)$ o $D(b)$ ma possiamo concludere, vista la sua stabilità sotto l'azione dei principali operatori, che $\mathcal{D} \subseteq D(a^\sharp)$ e $\mathcal{D} \subseteq D(b^\sharp)$, in cui $a^\sharp$ è a o $a^\dagger$ e $b^\sharp$ è b o $b^\dagger$.

Dopo aver fatto le suddette premesse siamo pronti a definire questi nuovi operatori

Definizione 1 *Gli operatori* (a, b) *sono* $\mathcal{D}$*-pseudo-bosonici (*$\mathcal{D}$*-pb) se, per ogni* $f \in \mathcal{D}$*, abbiamo*

$$a\,b\,f - b\,a\,f = f. \tag{2.3.1}$$

Brevemente scriveremo spesso la (2.3.1) semplicemente $[a, b] = \mathbb{1}$, come nella sezione 2.1.

Ma vediamo come cambiano le Ipotesi rispetto a quelle fatte precedentemente:

Ipotesi $\mathcal{D}$-pb 1.– Esiste un vettore non nullo $\varphi_0 \in \mathcal{D}$ tale che $a\varphi_0 = 0$.

Ipotesi $\mathcal{D}$-pb 2.– Esiste un vettore non nullo $\Psi_0 \in \mathcal{D}$ tale che $b^\dagger \Psi_0 = 0$.

Come possiamo subito notare, in queste nuove ipotesi, φ_0 e Ψ_0 sono presi in $\mathcal{D}$ e non più in $\mathcal{H}$. Inoltre, tra le ipotesi, non abbiamo più la richiesta che sia $\varphi_0 \in D^\infty(b)$ e $\Psi_0 \in D^\infty(a^\dagger)$. Infatti non occorre più assumere che esse valgano, in quanto seguono automaticamente dal fatto che $\mathcal{D}$ sia stabile sotto l'azione di $a^\dagger$ e b.

Quindi un primo vantaggio che possiamo riscontrare, già a questo stadio, è il fatto che le ipotesi vengono snellite.

Notiamo inoltre che la scelta del sottospazio $\mathcal{D}$ è di fondamentale importanza infatti potremmo avere operatori (a, b) che non soddisfano la Definizione 1 per un sottospazio denso e invece la soddisfano per un altro sottospazio, denso anch'esso. Ad esempio, vedi [29], prendiamo $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, $a = \frac{d}{dx}$ e $b = x$. Consideriamo inoltre i due sottospazi densi di $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) : f'(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \right\}, \qquad \mathcal{D}_2 = \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

(a, b) non sono $\mathcal{D}_1$ pseudo-bosoni poichè $\mathcal{D}_1$ non è stabile sotto l'azione di $a^\sharp$ e $b^\sharp$. Infatti preso $f \in \mathcal{D}_1$ allora $(bf)(x) = xf(x) \notin \mathcal{D}_1$. Invece risultano essere $\mathcal{D}_2$ pseudo-bosoni poichè $\mathcal{D}_2$ è stabile sotto l'azione dei principali operatori ed inoltre viene soddisfatta la Definizione 1.

Detto ciò riprendiamo la nostra costruzione. A tale fine consideriamo nuovamente le due famiglie

$$\mathcal{F}_\varphi = \left\{ \varphi_n := \frac{1}{\sqrt{n!}}\, b^n \varphi_0 \right\}, \qquad \mathcal{F}_\Psi = \left\{ \Psi_n := \frac{1}{\sqrt{n!}}\, {a^\dagger}^n \Psi_0 \right\}.$$

Dalla stabilità di $\mathcal{D}$, e quindi dal fatto che φ_n e Ψ_n appartengono a $\mathcal{D}$, seguono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} b\,\varphi_n = \sqrt{n+1}\varphi_{n+1}, & n \geq 0, \\ a\,\varphi_0 = 0, \quad a\varphi_n = \sqrt{n}\,\varphi_{n-1}, & n \geq 1, \\ a^\dagger \Psi_n = \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}, & n \geq 0, \\ b^\dagger \Psi_0 = 0, \quad b^\dagger \Psi_n = \sqrt{n}\,\Psi_{n-1}, & n \geq 1. \end{cases} \tag{2.3.2}$$

Per dimostrare la prima e la terza relazione basta considerare la definizione di φ_n e Ψ_n. Dimostriamo a titolo di esempio la terza

$$\Psi_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}}\,(a^\dagger)^{n+1}\Psi_0 \Longrightarrow (a^\dagger)^{n+1}\Psi_0 = \sqrt{(n+1)!}\,\Psi_{n+1}$$

allora

$$a^\dagger\,\Psi_n = a^\dagger \frac{1}{\sqrt{n!}}\,(a^\dagger)^n \Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{n!}}\,(a^\dagger)^{n+1}\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{n!}}\,\sqrt{(n+1)!}\,\Psi_{n+1} =$$

$$= \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}.$$

Analogamente si dimotra la prima.

Per dimostrare la quarta osserviamo intanto che abbiamo già dall'Ipotesi $\mathcal{D}$-pb 2 $b^\dagger\,\Psi_0 = 0$. Dimostriamo inoltre per induzione che $b^\dagger \Psi_n = \sqrt{n}\,\Psi_{n-1}$; $\forall n \geq 1$.

Per $n = 1$, abbiamo:

$$b^\dagger \Psi_1 = b^\dagger\,\left(a^\dagger\,\Psi_0\right) = \left(\mathbb{1} + a^\dagger b^\dagger\right)\,\Psi_0 = \Psi_0.$$

Supponiamo adesso vera la $b^\dagger \Psi_n = \sqrt{n}\,\Psi_{n-1}$, per un particolare n, e dimostriamo $b^\dagger \Psi_{n+1} = \sqrt{n+1}\,\Psi_n$:

$$b^\dagger \Psi_{n+1} = b^\dagger \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} \,(a^\dagger)^{n+1} \Psi_n \right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(1\!\!1 + b^\dagger a^\dagger \right) \Psi_n =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(1\!\!1 + b^\dagger \sqrt{n} \right) \Psi_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(1\!\!1 + n \right) \Psi_n = \sqrt{n+1}\,\Psi_n,$$

che è quello che volevamo provare.

Fatte queste considerazioni sui vettori φ_n e Ψ_n, ritorniamo ad analizzare i due insiemi $\mathcal{F}_\varphi$ e $\mathcal{F}_\Psi$.

Si dimostra anche qui che questi due insiemi sono biortogonali cioè che risulta, $\forall n, m$,

$$\langle \varphi_n, \Psi_m \rangle = \delta_{n,m}, . \tag{2.3.3}$$

Per dimostrare ciò sfrutteremo alcune proprietà che nascono dalla stessa definizione degli operatori $N = ba$ ed $N^\dagger = a^\dagger b^\dagger$:

$$N\varphi_n = n\varphi_n, \qquad N^\dagger \Psi_n = n\Psi_n, \tag{2.3.4}$$

$n \geq 0$.

Per iniziare, dimostriamo per induzione l'ultima relazione della (2.3.4) :

Per $n = 0$

$$N^\dagger \Psi_0 = a^\dagger \left(b^\dagger \Psi_0 \right) = 0.$$

Supponiamo adesso sia vero $N^\dagger \Psi_n = n\Psi_n$, e dimostriamo $N^\dagger \Psi_{n+1} = (n+1)\,\Psi_{n+1}$:

$$N^\dagger \Psi_{n+1} = a^\dagger \left(b^\dagger \Psi_{n+1} \right) = \sqrt{n+1} a^\dagger \Psi_{n+1} = (n+1)\,\Psi_{n+1}.$$

Analogamente si dimostra che $N\varphi_n = n\varphi_n$.

Come conseguenza di queste equazioni, e scegliendo la normalizzazione di φ_0 e Ψ_0 in modo tale che $\langle \varphi_0, \Psi_0 \rangle = 1$, la biortogonalità segue dal fatto che

$$\langle N\varphi_n, \Psi_m\rangle = \left\langle \varphi_n, N^\dagger \Psi_m\right\rangle .$$

Infatti questa implica che sia

$$n \langle \varphi_n, \Psi_m\rangle = m \langle \varphi_n, \Psi_m\rangle .$$

Ma poichè $n \neq m$, la sola possibilità è che risulti

$$\langle \varphi_n, \Psi_m\rangle = 0.$$

Quindi, se $n \neq m$ i vettori φ_n e Ψ_m sono ortogonali.

Ora supponiamo che $\langle \varphi_n, \Psi_n\rangle = 1$, per un dato n, e dimostriamo che $\langle \varphi_{n+1}, \Psi_{n+1}\rangle = 1$:

$$\langle \varphi_{n+1}, \Psi_{n+1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \langle b\varphi_n, \Psi_{n+1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left\langle \varphi_n, b^\dagger \Psi_{n+1}\right\rangle =$$

$$\langle \varphi_n, \Psi_n\rangle = 1$$

Come nella definizione di pseudo-bosoni anche qui il fatto che i due insiemi sono ortogonali nulla ci dice sulla possibilità che essi siano basi di $\mathcal{H}$. Introduciamo allora la terza assunzione:

Ipotesi $\mathcal{D}$-pb 3.– $\mathcal{F}_\varphi$ è una base di $\mathcal{H}$.

Viene spontaneo chiedersi: e $\mathcal{F}_\Psi$? non si fanno ipotesi su di esso? In realtà si dimostra che, vista la biortogonalità di $\mathcal{F}_\varphi$ e $\mathcal{F}_\Psi$, $\mathcal{F}_\varphi$ è una base di $\mathcal{H}$ se e soltanto se $\mathcal{F}_\Psi$ è anch'essa una base per $\mathcal{H}$, [29]. Inoltre, se $\mathcal{F}_\varphi$ e $\mathcal{F}_\Psi$ sono basi di Riesz per $\mathcal{H}$, gli $\mathcal{D}$-pb prendono il nome di $\mathcal{D}$-pb *regulari*.

E' chiaro che l'Ipotesi $\mathcal{D}$-pb 3 è una condizione molto più forte della richiesta di completezza. Infatti abbiamo esempi di insiemi che sono completi ma che non formano una base per $\mathcal{H}$. Un esempio di tale insieme è $\mathcal{E} = \{\tilde{e_n} := e_n + e_1, n = 2, 3, 4\}$ in cui $\{e_n\}$ è una base ortonormale di $\mathcal{H}$.

Osserviamo anche che l' Ipotesi $\mathcal{D}$-pb 3 è una richiesta forte: $\mathcal{F}_\varphi$ deve essere, ovviamente, una base di tutto lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Ma i sistemi quantistici interessanti sono tutti in grado di soddisfare questa condizione? La risposta è, molto spesso, no. Quindi nasce la necessità di migliorare ulteriormente questa struttura dando un'ipotesi alternativa, più debole, che ci permetta di adattare a più casi possibili questo nuovo framework.

Ecco che in [29] vengono definite le cosiddette $\mathcal{G}$-*quasi basi* nel seguente modo:

Si considera $\mathcal{G}$ un opportuno sottospazio denso di $\mathcal{H}$, e siano $\mathcal{F}_\eta = \{\eta_n \in \mathcal{G}, g \geq 0\}$ e $\mathcal{F}_\Phi = \{\Phi_n \in \mathcal{G}, g \geq 0\}$ due insiemi biortogonali. Se $\mathcal{F}_\eta$ e $\mathcal{F}_\Phi$ soddisfano la relazione

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n\geq 0} \langle f, \eta_n\rangle \langle \Phi_n, g\rangle = \sum_{n\geq 0} \langle f, \Phi_n\rangle \langle \eta_n, g\rangle \tag{2.3.5}$$

per ogni $f, g \in \mathcal{G}$, $\mathcal{F}_\eta$ e $\mathcal{F}_\Phi$ prendono il nome di $\mathcal{G}$-*quasi basi*.

Alla luce di quest'ultima definizione possiamo enunciare una forma più debole dell'Ipotesi $\mathcal{D}$-pb 3:

Ipotesi $\mathcal{D}$-pbw 3.– $\mathcal{F}_\varphi$ e $\mathcal{F}_\Psi$ sono $\mathcal{G}$-quasi basi per qualche sottospazio $\mathcal{G}$ denso in $\mathcal{H}$.

L'introduzione del concetto di quasi base ci permette di bypassare la richiesta che $\mathcal{F}_\varphi$ e $\mathcal{F}_\Psi$ siano basi (di Riesz). Infatti è possibile ottenere delle $\mathcal{G}$-quasi basi con $\mathcal{G}$ sottospazio denso di $\mathcal{H}$ anche mediante l'introduzione di operatori T e T^{-1} non limitati, come mostra la Proposizione seguente, [28]:

Proposizione 2 *Sia $\mathcal{E} = \{e_n \in \mathcal{H}, n \geq 0\}$ una base ortonormale di $\mathcal{H}$ e T un operatore autoaggiunto ed invertibile, tale che $e_n \in D(T) \cap D(T^{-1})$ for all n, consideriamo $\mathcal{F}_\varphi = \{\varphi_n := Te_n,\ n \geq 0\}$ e $\mathcal{F}_\Psi = \{\Psi_n := T^{-1}e_n,\ n \geq 0\}$. Allora si ha*

1. *(i) gli insiemi $\mathcal{F}_\varphi$ e $\mathcal{F}_\Psi$ sono biortogonali;*

2. *(ii) se $f \in D(T)$ è ortogonale a tutti gli φ_n, allora $f = 0$;*

3. *(iii) se* $f \in D(T^{-1})$ *è ortogonale a tutti gli* Ψ_n*, allora* $f = 0$*;*

4. *(iv) per ogni* $f, g \in D(T) \cap D(T^{-1})$ $\mathcal{F}_\varphi$ *e* $\mathcal{F}_\Psi$ *sono* $(D(T) \cap D(T^{-1}))$*-quasi basi;*

5. *(v) Se l'operatore* T^{-1} *è limitato allora ogni* $f \in D(T)$ *può essere scritta come* $f = \sum_n \langle \varphi_n, f \rangle \Psi_n$*. Inoltre se* $\hat{g} \in \mathcal{H}$ $\langle f, \hat{g} \rangle = \sum_n \langle f, \varphi_n \rangle \langle \Psi_n, \hat{g} \rangle$*;*

6. *(vi) Se l'operatore* T *è limitato allora ogni* $f \in D(T^{-1})$ *può essere scritta come* $f = \sum_n \langle \Psi_n, f \rangle \varphi_n$*. Inoltre se* $\hat{g} \in \mathcal{H}$ $\langle f, \hat{g} \rangle = \sum_n \langle f, \Psi_n \rangle \langle \varphi_n, \hat{g} \rangle$*.*

La dimostrazione di questa Proposizione è fornita in [28].

Quando si sia in grado di stabilire che $\mathcal{F}_\varphi$ e $\mathcal{F}_\Psi$ sono, ad esempio, $\mathcal{D}$-quasi basi, molti risultati di un certo interesse possono essere dedotti, come vedremo nella sezione seguente.

2.4 L'operatore metrico Θ e le sue proprietà

In questa sezione faremo vedere come l'introduzione di un opportuno operatore autoaggiunto ed invertibile al framework che stiamo considerando non solo ne rifinisce la struttura ma fa nascere delle interessanti relazioni di coniugio. Ma vediamo in dettaglio.

Sia Θ un operatore autoaggiunto ed invertibile tale che, insieme al suo inverso Θ^{-1}, lascia $\mathcal{D}$ invariante. Allora:

Definizione 3 *Diremo che* $(a, b^\dagger)$ *sono* $\Theta-$*coniugati se* $af = \Theta^{-1} b^\dagger \Theta f$*, per ogni* $f \in \mathcal{D}$*.*

Un'importante conseguenza della definizione precedentemente data è l'uguaglianza,

$$Nf = \Theta^{-1} N^\dagger \Theta f \tag{2.4.1}$$

che vale per ogni $f \in \mathcal{D}$. Infatti

$$Nf = ab = \Theta^{-1}b^\dagger\,\Theta\Theta^{-1}a^\dagger\,\Theta f = \Theta^{-1}b^\dagger a^\dagger\,\Theta f = \Theta^{-1}N^\dagger\Theta f.$$

Da ciò se ne deduce che gli autovalori di N e $N^\dagger$ sono gli stessi e che gli autovettori associati sono tra loro messi in relazione dall'operatore di intertwining Θ. Infatti dall'equazione (2.4.1) si ha:

$$\Theta N f = N^\dagger \Theta f.$$

Inotre si dimostra che, [28]:

Lemma 4 *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. $(a, b^\dagger)$ *sono* $\Theta-$*coniugati*
2. $(b, a^\dagger)$ *sono* $\Theta-$*coniugati*
3. $(a^\dagger, b)$ *sono* $\Theta^{-1}-$*coniugati*
4. $(b^\dagger, a)$ *sono* $\Theta^{-1}-$*coniugati*

Abbiamo visto dalla definizione di operatori $\Theta-$coniugati che Θ esprime una relazione di similarità tra gli operatori a e $b^\dagger$. Viene quindi naturale chiedersi se sia possibile stabilire anche una relazione tra gli elementi di due quasi basi $\mathcal{F}_\varphi$ e $\mathcal{F}_\Psi$. Una risposta al nostro interrogativo è data dalla seguente Proposizione, che ne esprime una condizione necessaria e sufficiente.

Proposizione 5 *Siano* $\mathcal{F}_\varphi$ *e* $\mathcal{F}_\Psi$ *due* $\mathcal{D}$*-quasi basi per* $\mathcal{H}$*. Allora gli operatori* $(a, b^\dagger)$ *sono* $\Theta-$*coniugati se e soltanto se* $\Psi_n = \Theta\varphi_n$*, per ogni* $n \geq 0$.

Anche in questo caso la dimostrazione è data in [28].

Osserviamo che l'equazione $\Psi_n = \Theta\varphi_n$ assomiglia tanto ad una nostra vecchia conoscenza: la relazione $S_\Psi\varphi_n = \Psi_n$ della definizione di pseudo-bosoni originaria. Allora ci chiediamo Θ e S_Ψ siano o meno lo stesso operatore, visto che operano nello stesso modo sui vettori di $\mathcal{F}_\varphi$ e $\mathcal{F}_\Psi$. In effetti tali operatori saranno in seguito spesso identificati tra loro. Un'altra caratteristica dell'operatore Θ è che risulta essere positivo come mostra la seguente proposizione.

Proposizione 6 *Se $(a, b^\dagger)$ sono $\Theta-$coniugate allora $\langle f, \Theta f\rangle > 0$ per ogni $f \in D(\Theta)$ non nullo.*

Ricapitolando, con l'introduzione di $\mathcal{D}$ e dell'operatore metrico Θ siamo riusciti a risolvere molti problemi che erano sorti in precedenza. Infatti:

1. abbiamo semplificato le Ipotesi: il fatto di avere introdotto $\mathcal{D}$ stabile sotto l'azione dei principali operatori fa si che alcune ipotesi siano sovrabbondanti risultando conseguenza di questo fatto;

2. abbiamo ridotto le verifiche: la definizione di Θ che lascia $\mathcal{D}$ invariante, a differenza di S_Ψ, ci permette di ridurre le verifiche da effettuare relativamente ad alcune relazioni di intertwining;

3. abbiamo superato il problema relativo alla verifica che $\mathcal{F}_\varphi$ e $\mathcal{F}_\Psi$ siano basi: con l'introduzione della definizione di quasi base è possibile, definendo un operatore T non necessariamente limitato, costruire delle quasi basi mediante l'introduzione di un opportuno insieme denso dato, come vedremo negli esempi concreti, dall'intersezione dei domini dell'operatore T e dell'operatore T^{-1}.

Ovviamente, il tutto assumerà un interesse fisico nel momento in cui mostreremo che sistemi fisici realistici soddisfano le ipotesi introdotte in questa sezione, e quindi forniscono un esempio concreto di $\mathcal{D}$ pseudo-bosoni. Questo sarà argomento del Capitolo 3 di questa tesi.

2.5 $\mathcal{D}$ pseudo-bosoni e la meccanica quantistica non-Hermitiana

Prima di concludere questa introduzione matematica è forse opportuno osservare che, quando Bagarello cominciò ad interessarsi agli aspetti squisitamente matematici degli pseudo-bosoni, probabilmente non poteva immaginare di imbattersi in relazioni che richiamano da vicino quelle che dovevano soddisfare gli operatori in meccanica quantistica pseudo-Hermitiana o cripto-Hermitiana, e che erano noti in un contesto completamente diverso da quello di cui Bagarello stava occupandosi.

Consideriamo per esempio la seguente

$$Nf = \Theta^{-1} N^\dagger \Theta f \tag{2.5.1}$$

per ogni $f \in \mathcal{D}$. Questa è sostanzialmente, a parte considerazioni del dominio $\mathcal{D}$ che Znojil trascura, la condizioni di cripto-Hermiticità

$$H = \Theta^{-1} H^\dagger \Theta$$

per l'operatore H, introdotto da Znojil, e non è molto diversa dalla condizione di pseudo Hermiticità di Mostafazadeh

$$H^\dagger = \eta_+ H \eta_+^{-1}.$$

Inoltre possiamo osservare come relazioni di intertwining nascono naturalmente dalla definizione stessa della struttura. Infatti, dalla (2.5.1), si ha

$$\Theta N f = N^\dagger \Theta f$$

che dimostra che Θ sia un operatore di intertwining tra N e $N^\dagger$. Ciò è connesso al fatto che N e $N^\dagger$ abbiano gli stessi autovalori e che i loro rispettivi autovettori siano messi in relazione da Θ. Esiste infatti una letteratura sconfinata su questo argomento, che qui tralasciamo non essendo rilevante per questa tesi.

Nasce quindi il sospetto che questo nuovo framework ben si presti all'analisi di modelli appartenenti a questo tipo di meccanica quantistica. Questo è esattamente il contenuto del prossimo capitolo.

Capitolo 3

$\mathcal{D}$ pseudo-bosoni in modelli quantistici

In questo capitolo analizzeremo alcuni modelli, già studiati in meccanica quantistica $\mathcal{PT}$-simmetrica, [30, 31, 32], e faremo vedere come sia possibile descriverli in termini di $\mathcal{D}$ pseudo-bosoni. In questo nuovo framework si possono non solo discutere questioni relative ad operatori illimitati ma anche analizzare aspetti del modello non precedentemente presi in considerazione da coloro che hanno introdotto originariamente tali modelli.

3.1 Primo esempio

Il primo modello che considereremo è stato originariamente introdotto in [30] da Bender et al. e successivamente considerato in [31] da Miao et al. L'Hamiltoniana non-autoaggiunta che prenderemo in esame è la seguente:

$$H = (p_1^2 + x_1^2) + (p_2^2 + x_2^2 + 2ix_2) + 2\epsilon x_1 x_2. \tag{3.1.1}$$

Come ben si vede, essa è formata dalla somma dell'Hamiltoniana di un oscillatore armonico, da un'Hamiltoniana $\mathcal{PT}$-simmetrica e da un termine di interazione con una costante di accoppiamento ϵ, dove ϵ è una costante reale, $\epsilon \in]-1, 1[$. Qui valgono le seguenti regole di commutazione tra gli operatori di posizione e momento *standard* $[x_j, p_k] = i\delta_{j,k}\mathbb{1}$, dove $\mathbb{1}$ rappresenta l'operatore identità in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$. Tutti gli altri commutatori sono uguali a zero.

Ripetendo gli stessi passaggi che troviamo in [31], possiamo eseguire alcuni cambiamenti di variabile che ci permettono di scrivere l'Hamiltoniana di partenza in una forma più conveniente:

1. Per prima cosa introduciamo gli operatori P_j, X_j, $j = 1, 2$,

$$P_1 := \frac{1}{2a}(p_1 + \xi p_2), \quad P_2 := \frac{1}{2b}(p_1 - \xi p_2),$$

$$X_1 := a(x_1 + \xi x_2), \quad X_2 := b(x_1 - \xi x_2),$$

   in cui ξ può essere ± 1, mentre a e b costanti reali non nulle. Questi operatori soddisfano le stesse regole di commutazione che valevano per le variabili originarie: $[X_j, P_k] = i\delta_{j,k}\mathbb{1}$, e sono anch'essi autoaggiunti.

2. Adesso introduciamo gli operatori

$$\Pi_1 = P_1, \quad \Pi_2 = P_2, \quad q_1 = X_1 + i\frac{a\xi}{1+\epsilon\,\xi}, \quad q_2 = X_2 - i\frac{b\xi}{1-\epsilon\,\xi}.$$

   Osserviamo che $\Pi_j^\dagger = \Pi_j$, mentre $q_j^\dagger \neq q_j$, $j = 1, 2$. Tuttavia, si conservano le regole di commutazione: $[q_j, \Pi_k] = i\delta_{j,k}\mathbb{1}$.

   H diventa

$$H = H_1 + H_2 + \frac{1}{1-\epsilon^2}\,\mathbb{1},$$

   dove

$$H_1 = 2a^2{\Pi_1}^2 + \frac{1+\epsilon\,\xi}{2a^2}{q_1}^2, \quad H_2 = 2b^2{\Pi_2}^2 + \frac{1-\epsilon\,\xi}{2b^2}{q_2}^2.$$

3. Il terzo passo consiste nell'introdurre i seguenti operatori:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{a}{\sqrt[4]{1+\epsilon\,\xi}}\left(i\Pi_1 + \frac{\sqrt{1+\epsilon\,\xi}}{2a^2}\,q_1\right) \\ a_2 = \frac{a}{\sqrt[4]{1-\epsilon\,\xi}}\left(i\Pi_2 + \frac{\sqrt{1-\epsilon\,\xi}}{2b^2}\,q_2\right) \end{cases} \tag{3.1.2}$$

e

$$\begin{cases} b_1 = \frac{a}{\sqrt[4]{1+\epsilon\,\xi}} \left(-i\Pi_1 + \frac{\sqrt{1+\epsilon\,\xi}}{2a^2}\, q_1 \right) \\ b_2 = \frac{a}{\sqrt[4]{1-\epsilon\,\xi}} \left(-i\Pi_2 + \frac{\sqrt{1-\epsilon\,\xi}}{2b^2}\, q_2 \right). \end{cases} \tag{3.1.3}$$

Possiamo subito osservare che $b_j \neq a_j^\dagger$. Questo è dovuto al fatto che q_j non sono autoaggiunti. Questi operatori soddisfano formalmente le regole di commutazione pseudo-bosoniche

$$[a_j, b_k] = \delta_{j,k} \mathbb{1}, \tag{3.1.4}$$

Infatti

$$[a_1, b_1] = \frac{a^2}{\sqrt{1+\epsilon\,\xi}} \left(i\frac{\sqrt{1+\epsilon\,\xi}}{2a^2}(-i) + \frac{\sqrt{1+\epsilon\,\xi}}{2a^2}(-i)(i) \right) =$$

$$\left(\frac{a^2}{\sqrt{1+\epsilon\,\xi}} \right) \frac{2\sqrt{1+\epsilon\,\xi}}{2a^2} = 1$$

$$[a_2, b_2] = \frac{b^2}{\sqrt{1-\epsilon\,\xi}} \left(i\frac{\sqrt{1-\epsilon\,\xi}}{2a^2}(-i) + \frac{\sqrt{1-\epsilon\,\xi}}{2a^2}(-i)(i) \right) =$$

$$\left(\frac{b^2}{\sqrt{1-\epsilon\,\xi}} \right) \frac{2\sqrt{1-\epsilon\,\xi}}{2a^2} = 1$$

Gli altri commutatori sono uguali a zero.

Torniamo adesso alla nostra Hamiltoniana H che, introducendo gli operatori $N_j := b_j a_j$, può essere riscritta come

$$\begin{cases} H = H_1 + H_2 + \frac{1}{1-\epsilon^2}\, \mathbb{1}, \\ H_1 = \sqrt{1+\epsilon\,\xi}(2N_1 + \mathbb{1}), \\ H_2 = \sqrt{1-\epsilon\,\xi}(2N_2 + \mathbb{1}). \end{cases} \tag{3.1.5}$$

Infatti

$$2N_1 + 1 = 2b_1a_1 + 1 = 2\frac{a^2}{\sqrt{1+\epsilon\,\xi}} \left(-i\Pi_1 + \frac{\sqrt{1+\epsilon\,\xi}}{2a^2} q_1 \right) \left(i\Pi_1 + \frac{\sqrt{1+\epsilon\,\xi}}{2a^2} q_1 \right) + 1 =$$
$$2\frac{a^2}{\sqrt{1+\epsilon\,\xi}} \left\{ {\Pi_1}^2 + \frac{1+\epsilon\,\xi}{4a^4} {q_1}^2 + i\frac{\sqrt{1+\epsilon\,\xi}}{2a^2}[q_1, \Pi_1] \right\} + 1 = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon\,\xi}} \left(2a^2\Pi_1^2 + \frac{1+\epsilon\,\xi}{2a^2} {q_1}^2 \right) +$$
$$2\frac{a^2}{\sqrt{1+\epsilon\,\xi}} \frac{\sqrt{1+\epsilon\,\xi}}{2a^2}(-1) + 1 = H_1.$$

Inoltre
$2N_2+1=2b_2a_2+1=2\frac{b^2}{\sqrt{1-\epsilon\,\xi}}\left(-i\Pi_2+\frac{\sqrt{1-\epsilon\,\xi}}{2b^2}q_2\right)\left(i\Pi_2+\frac{\sqrt{1-\epsilon\,\xi}}{2b^2}q_2\right)+1=$
$2\frac{b^2}{\sqrt{1-\epsilon\,\xi}}\left\{{\Pi_1}^2+\frac{1-\epsilon\,\xi}{4b^4}{q_2}^2+i\frac{\sqrt{1-\epsilon\,\xi}}{2b^2}\left[q_2,\Pi_2\right]\right\}+1\;=\;\frac{2}{\sqrt{1-\epsilon\,\xi}}\left(\Pi_2^2+\frac{1-\epsilon\,\xi}{4b^4}{q_2}^2\right)\;=$
H_2.

I risultati su illustrati sono gia contenuti in [31], anche se non esattamente in questa forma. Il nostro prossimo passo consiste nel verificare se la versione bidimensionale del framework descritto nel Capitolo 2 può essere applicata al modello. In altre parole, vogliamo vedere se le Ipotesi $\mathcal{D}$-pb 1, $\mathcal{D}$-pb 2 e $\mathcal{D}$-pb 3 (o $\mathcal{D}$-pbw 3) sono verificate o meno nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}=\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ per la H in (3.1.5).

Per questo, la prima cosa da fare è riscrivere gli operatori a_j e b_j in termini delle variabili originarie x_j e p_j, usate in (3.1.1):

$$\left\{\begin{array}{l}
a_1=\frac{1}{2\sqrt[4]{1+\epsilon\,\xi}}\left((ip_1+\sqrt{1+\epsilon\,\xi}\,x_1)+\xi(ip_2+\sqrt{1+\epsilon\,\xi}\,x_2)+i\,\frac{\xi}{\sqrt{1+\epsilon\,\xi}}\right)\\
a_2=\frac{1}{2\sqrt[4]{1-\epsilon\,\xi}}\left((ip_1+\sqrt{1-\epsilon\,\xi}\,x_1)-\xi(ip_2+\sqrt{1-\epsilon\,\xi}\,x_2)-i\,\frac{\xi}{\sqrt{1-\epsilon\,\xi}}\right)\\
b_1=\frac{1}{2\sqrt[4]{1+\epsilon\,\xi}}\left((-ip_1+\sqrt{1+\epsilon\,\xi}\,x_1)+\xi(-ip_2+\sqrt{1+\epsilon\,\xi}\,x_2)+i\,\frac{\xi}{\sqrt{1+\epsilon\,\xi}}\right)\\
b_2=\frac{1}{2\sqrt[4]{1-\epsilon\,\xi}}\left((-ip_1+\sqrt{1-\epsilon\,\xi}\,x_1)-\xi(-ip_2+\sqrt{1-\epsilon\,\xi}\,x_2)-i\,\frac{\xi}{\sqrt{1-\epsilon\,\xi}}\right).
\end{array}\right.$$

Adesso dobbiamo trovare un sottospazio denso $\mathcal{D}$ di $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ che è stabile sotto l'azione di a_j, b_j e dei loro aggiunti. Inoltre $\mathcal{D}$ deve anche contenere due vettori non nulli annichilati da a_j e $b_j^\dagger$, se tali vettori esistono. Quindi, da un punto di vista pratico, occorre risolvere le equazioni $a_1\varphi_{0,0}(x_1,x_2)=a_2\varphi_{0,0}(x_1,x_2)=0$ e $b_1^\dagger\Psi_{0,0}(x_1,x_2)=b_2^\dagger\Psi_{0,0}(x_1,x_2)=0$. Usando $p_j=-i\frac{\partial}{\partial x_j}$, queste diventano due semplici equazioni differenziali bidimensionali che possono essere facilmente riscritte come segue

$$a_1\varphi_{0,0}(x_1,x_2)=0\Rightarrow$$

$$\left(\frac{d}{dx_1}+\sqrt{1+\epsilon\,\xi}\,x_1+\xi\frac{d}{dx_2}+\xi\sqrt{1+\epsilon\,\xi}\,x_2+i\,\frac{\xi}{\sqrt{1+\epsilon\,\xi}}\right)\varphi_{0,0}(x_1,x_2)=0 \tag{3.1.6}$$

e

$$a_2\varphi_{0,0}(x_1,x_2)=0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{d}{dx_1}+\sqrt{1-\epsilon\,\xi}\,x_1-\xi\frac{d}{dx_2}+\sqrt{1-\epsilon\,\xi}\,x_2-i\,\frac{\xi}{\sqrt{1+\epsilon\,\xi}}\right)\varphi_{0,0}(x_1,x_2)=0 \tag{3.1.7}$$

Procedendo analogamente con le equazioni $b_1^\dagger\Psi_{0,0}(x_1,x_2)=b_2^\dagger\Psi_{0,0}(x_1,x_2)=0$ si ha:

$$\left(\frac{d}{dx_1}+\sqrt{1+\epsilon\,\xi}\,x_1+\xi\frac{d}{dx_2}+\xi\sqrt{1+\epsilon\,\xi}\,x_2-i\,\frac{\xi}{\sqrt{1+\epsilon\,\xi}}\right)\psi_{0,0}(x_1,x_2)=0$$

$$\left(\frac{d}{dx_1}+\sqrt{1-\epsilon\,\xi}\,x_1-\xi\frac{d}{dx_2}+\sqrt{1-\epsilon\,\xi}\,x_2+i\,\frac{\xi}{\sqrt{1+\epsilon\,\xi}}\right)\psi_{0,0}(x_1,x_2)=0.$$

Confrontando quest'ultime con le (3.1.6) e (3.1.7) ci accorgiamo subito che

$$\Psi_{0,0}(x_1,x_2)=\overline{\varphi_{0,0}(x_1,x_2)},$$

e quindi ci concentreremo sulla risoluzione delle (3.1.6) e (3.1.7).

Introduciamo adesso le seguenti costanti

$$\alpha_\pm=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\epsilon\,\xi}\pm\sqrt{1-\epsilon\,\xi}\right),\quad k_-=\frac{-i\xi\alpha_-}{\sqrt{1-\epsilon^2}},\quad k_+=\frac{i\alpha_+}{\sqrt{1-\epsilon^2}}.$$

Le equazioni per $\varphi_{0,0}(x_1,x_2)$ diventano

$$\left(\frac{d}{dx_1}+\alpha_+x_1+\xi\alpha_-x_2+k_-\right)\varphi_{0,0}(x_1,x_2)=0$$
$$\left(\frac{d}{dx_2}+\alpha_+x_2+\xi\alpha_-x_1-k_+\right)\varphi_{0,0}(x_1,x_2)=0$$

la cui soluzione è

$$\varphi_{0,0}(x_1,x_2)=N\exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha_+(x_1^2+x_2^2)-k_-x_1-k_+x_2-\xi\alpha_-x_1x_2\right\}, \tag{3.1.8}$$

e di conseguenza, per l'osservazione fatta precedentemente,

$$\Psi_{0,0}(x_1,x_2) = N' \exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha_+(x_1^2+x_2^2) + k_- x_1 + k_+ x_2 - \xi\alpha_- x_1 x_2\right\}. \tag{3.1.9}$$

Le quantità N e N' in (3.1.8) e (3.1.9) sono costanti di normalizzazione, fissate dalla richiesta che $\langle\varphi_{0,0}, \Psi_{0,0}\rangle = 1$. Questo è possibile, dal momento che possiamo facilmente verificare che $\varphi_{0,0}(x_1,x_2), \Psi_{0,0}(x_1,x_2) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$. Infatti sia $\varphi_{0,0}(x_1,x_2)$ che $\Psi_{0,0}(x_1,x_2)$ appartengono in effetti a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, poichè sono funzioni di classe C^∞ decrescenti a zero, insieme con le loro derivate, più velocemente di qualsiasi potenza di x_1 e x_2. Poichè $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ è denso in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$, viene naturale identificare $\mathcal{D}$ con $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Questa risulta essere una buona scelta. Infatti non solo $\varphi_{0,0}(x_1,x_2)$ e $\Psi_{0,0}(x_1,x_2) \in \mathcal{D}$, ma $\mathcal{D}$ è anche stabile sotto l'azione di a_j, b_j e dei loro aggiunti.

A questo punto possiamo costruire le nuove funzioni

$$\begin{cases} \varphi_{n_1,n_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{\sqrt{n_1!\,n_2!}} b_1^{n_1} b_2^{n_2} \varphi_{0,0}(x_1,x_2) \\ \Psi_{n_1,n_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{\sqrt{n_1!\,n_2!}} a_1^{\dagger n_1} a_2^{\dagger n_2} \Psi_{0,0}(x_1,x_2), \end{cases}$$

e i relativi insiemi

$$\mathcal{F}_\varphi = \{\varphi_{n_1,n_2}(x_1,x_2), n_j \geq 0\}, \qquad \mathcal{F}_\Psi = \{\Psi_{n_1,n_2}(x_1,x_2), n_j \geq 0\}.$$

E' chiaro che $\varphi_{n_1,n_2}(x_1,x_2)$ e $\Psi_{n_1,n_2}(x_1,x_2)$ differiscono da $\varphi_{0,0}(x_1,x_2)$ e $\Psi_{0,0}(x_1,x_2)$ per qualche polinomio in x_1 e x_2. Quindi, come previsto, sono ancora funzioni in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Adesso bisognerebbe provare che $\mathcal{F}_\varphi$ e $\mathcal{F}_\Psi$ sono basi per $\mathcal{H}$. Questo non è così evidente. Ciò che è più semplice da provare è che questi insiemi sono entrambi completi in $\mathcal{H}$, ma noi sappiamo che la completezza di un certo insieme non implica che l'insieme sia anche una base. Seguendo la procedura adottata in [30], definiamo un operatore autoaggiunto non limitato ed invertibile, $T = e^{\frac{1}{1-\epsilon^2}(p_2-\epsilon p_1)}$, e calcoliamo

$$T\, p_j\, T^{-1} = p_j$$

$$
\begin{aligned}
T\,X_1\,T^{-1} &= x_1 + \frac{i\epsilon}{1-\epsilon^2} \\
T\,X_2\,T^{-1} &= x_2 - \frac{i}{1-\epsilon^2}.
\end{aligned}
$$

Semplici calcoli mostrano allora che

$$
T\,H\,T^{-1} = (p_1^2 + x_1^2) + (p_2^2 + x_2^2) + 2\epsilon x_1 x_2 + \frac{1}{1-\epsilon^2} =: h. \tag{3.1.10}
$$

Notiamo subito che contrariamente ad H, $h = h^\dagger$. Per h possiamo essenzialmente ripetere la stessa procedura di prima. In particolare possiamo nuovamente introdurre gli operatori P_j, X_j, gli operatori

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{a}{\sqrt[4]{1+\epsilon\,\xi}}\left(i\Pi_1 + \frac{\sqrt{1+\epsilon\,\xi}}{2a^2}\,X_1\right), \\
A_2 &= \frac{a}{\sqrt[4]{1-\epsilon\,\xi}}\left(i\Pi_2 + \frac{\sqrt{1-\epsilon\,\xi}}{2b^2}\,X_2\right),
\end{aligned}
$$

e gli aggiunti $A_j^\dagger$. Questi sono operatori bosonici *propriamente detti*, e infatti: $[A_j, A_k^\dagger] = \delta_{j,k}1\!\!1$. In termini di questi operatori possiamo scrivere

$$
h = h_1 + h_2 + \frac{1}{1-\epsilon^2}\,1\!\!1,
$$

con

$$
h_1 = \sqrt{1+\epsilon\,\xi}(2\hat{N}_1 + 1\!\!1), \qquad h_2 = \sqrt{1-\epsilon\,\xi}(2\hat{N}_2 + 1\!\!1),
$$

dove $\hat{N}_j := A_j^\dagger A_j$ è l'operatore numero bosonico per il modo j-esimo.

Ora, se $\Phi_{0,0}$ è il vettore vuoto di A_j, $A_1\Phi_{0,0} = A_2\Phi_{0,0} = 0$, possiamo costruire l'insieme $\mathcal{F}_\Phi := \{\Phi_{n_1,n_2},\, n_j \geq 0\}$, dove

$$
\Phi_{n_1,n_2} = \frac{1}{\sqrt{n_1!\,n_2!}} A_1^{\dagger\,n_1} A_2^{\dagger\,n_2}\Phi_{0,0}.
$$

$\mathcal{F}_\Phi$ è una base ortonormale per $\mathcal{H}$, e $\Phi_{n_1,n_2}(x_1,x_2)$ può essere fattorizzato come segue:

$$
\Phi_{n_1,n_2}(x_1,x_2) = \Phi_{n_1}(x_1)\Phi_{n_2}(x_2).
$$

Qui i vari $\Phi_n(x)$ sono gli autostati di un oscillatore armonico unidimensionale:

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n \pi n!}} H_n(x) e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Ogni $\Phi_{n_1,n_2}(x_1, x_2)$ appartiene dunque a $\mathcal{D}$. Inoltre, $\Phi_{n_1,n_2} \in D(T) \cap D(T^{-1})$.

In particolare possiamo dimostrare che

$$T\Phi_{n_1,n_2}(x_1, x_2) = \Phi_{n_1,n_2}(x_1 + \delta_1, x_2 + \delta_2),$$

dove

$$\delta_1 = \frac{i}{1-\epsilon^2}(a\epsilon - \xi), \qquad \delta_2 = \frac{i}{1-\epsilon^2}(b\epsilon + \xi).$$

Inoltre, evidentemente

$$T^{-1}\Phi_{n_1,n_2}(x_1, x_2) = \Phi_{n_1,n_2}(x_1 - \delta_1, x_2 - \delta_2).$$

Si può inoltre provare che per tutti gli n_1 e n_2,

$$T\Phi_{n_1,n_2}(x_1, x_2) = \Psi_{n_1,n_2}(x_1, x_2), \qquad T^{-1}\Phi_{n_1,n_2}(x_1, x_2) = \varphi_{n_1,n_2}(x_1, x_2).$$

Per mostrare questo è opportuno ricordare che le seguenti equazioni devono essere tutte soddisfatte:

$$h\Phi_{n_1,n_2} = E_{n_1,n_2}\Phi_{n_1,n_2}, \qquad H\varphi_{n_1,n_2} = E_{n_1,n_2}\varphi_{n_1,n_2}, \qquad THT^{-1} = h,$$

come pure

$$E_{n_1,n_2} = \sqrt{1+\epsilon\,\xi}(2n_1 + 1) + \sqrt{1-\epsilon\,\xi}(2n_2 + 1) + \frac{1}{1-\epsilon^2}.$$

Se $\epsilon \neq 0$, ogni E_{n_1,n_2} è non degenere. Qui conviene lavorare in questa ipotesi, anche perché, se $\epsilon = 0$, l'hamiltoniana originale H si semplifica molto diventando per noi meno interessante.

Poichè $\Phi_{n_1,n_2} \in D(T)$, l'equazione $h\Phi_{n_1,n_2} = E_{n_1,n_2}\Phi_{n_1,n_2}$ può essere scritta come segue:

$$H(T^{-1}\Phi_{n_1,n_2}) = E_{n_1,n_2}(T^{-1}\Phi_{n_1,n_2}).$$

Quindi $T^{-1}\Phi_{n_1,n_2}$ deve essere proporzionale a φ_{n_1,n_2}. Analogamente $T\Phi_{n_1,n_2}$ deve essere proporzionale a Ψ_{n_1,n_2}, poichè

$$H^\dagger \Psi_{n_1,n_2} = E_{n_1,n_2}\Psi_{n_1,n_2},$$

sfruttando nuovamente la non degenerazione degli autovalori. Queste costanti di proporzionalità possono essere prese tutte uguali a uno. Siamo quindi nelle condizioni della Proposizione 2 del Capitolo 2, e dunque $\mathcal{F}_\varphi$ e $\mathcal{F}_\Psi$ sono entrambe $D(T)\cap D(T^{-1})$- quasi basi per $\mathcal{H}$. Questo vuol dire che l'Ipotesi $\mathcal{D}$-pbw 3 è verificata.

Prendiamo ora $\Theta := T^2$. E' chiaro che Θ^{-1} esiste e che insieme a Θ, lascia $\mathcal{D}$ invariante. Inoltre $\Psi_{n_1,n_2} = \Theta\varphi_{n_1,n_2}$ e allora, come discusso nel Capitolo 2, $(a_j, b_j^\dagger)$ risultano essere Θ-conjugate. Segue inoltre la relazione di intertwining $N_j f = \Theta^{-1}N_j^\dagger\Theta f$, $f \in \mathcal{D}$. Infine, almeno formalmente, possiamo scrivere

$$\Theta = \sum_{k_1,k_2} |\Psi_{k_1,k_2}\rangle\langle\Psi_{k_1,k_2}|, \qquad \Theta^{-1} = \sum_{k_1,k_2} |\varphi_{k_1,k_2}\rangle\langle\varphi_{k_1,k_2}|.$$

Osserviamo che queste serie non possono convergere su tutto $\mathcal{H}$ essendo Θ e Θ^{-1} non limitati.

3.2 Secondo esempio

In questa sezione considereremo un modello quantistico differente introdotto originariamente da Miao et al. in [32]. L'Hamiltoniana manifestatamente non Hermitiana che studieremo è la seguente:

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + x_1^2) + \frac{1}{2}(p_2^2 + x_2^2) + i\left[A(x_1 + x_2) + B(p_1 + p_2)\right], \tag{3.2.1}$$

dove A e B sono costanti reali, mentre x_j e p_j sono gli operatori autoaggiungi posizione e momento, soddisfacenti la relazione $[x_j, p_k] = i\delta_{j,k}\mathbb{1}$.

Come nell'esempio precedente, per scrivere H in una forma più conveniente possiamo introdurre nuove variabili. Per fare ciò abbiamo prima considerato il cambiamento di variabile

$$P_1 = p_1 + iB, \quad P_2 = p_2 + iB, \quad X_1 = x_1 + iA, \quad X_2 = x_2 + iA,$$

e successivamente abbiamo introdotto

$$a_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_j + iP_j), \qquad b_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_j - iP_j), \tag{3.2.2}$$

$j = 1, 2$. Si dimostra facilmente che $[X_j, P_k] = i\delta_{j,k}1\!\!1$, $[a_j, b_k] = \delta_{j,k}1\!\!1$, e che, essendo $X_j^\dagger \neq X_j$ e $P_j^\dagger \neq P_j$, risulta che $b_j \neq a_j^\dagger$. Introducendo inoltre $N_j = b_j a_j$ possiamo scrivere H come segue:

$$H = N_1 + N_2 + (A^2 + B^2 + 1)1\!\!1.$$

Gli autostati di H e $H^\dagger$ possono essere facilmente costruiti se le Ipotesi $\mathcal{D}$-pb 1 e $\mathcal{D}$-pb 2 sono verificate. Se è verificata anche l'Ipotesi $\mathcal{D}$-pb 3 (o la $\mathcal{D}$-pbw 3), allora gli insiemi dei loro autostati sono basi (o $\mathcal{D}$- quasi basi) biortogonali per $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$.

Per dimostrare che le Ipotesi sono verificate, procediamo come prima scrivendo a_j e b_j in termini degli operatori originali x_j e p_j:

$$a_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_j + ip_j + C), \qquad b_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_j - ip_j + D),$$

$j = 1, 2$, dove $C = iA - B$ e $D = iA + B$. I due vettori di vuoto di a_j e $b_j^\dagger$ sono rispettivamente

$$\varphi_{0,0}(x_1, x_2) = N e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - C(x_1 + x_2)},$$

$$\Psi_{0,0}(x_1, x_2) = N' e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \overline{D}(x_1 + x_2)},$$

dove N e N' sono costanti di normalizzazione scelte in modo tale che $\langle \varphi_{0,0}, \Psi_{0,0} \rangle = 1$. Anche in quest'esempio osserviamo che sia $\varphi_{0,0}(x_1, x_2)$ che $\Psi_{0,0}(x_1, x_2)$ appartengono a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, che noi identifichiamo come lo spazio $\mathcal{D}$ della definizione di $\mathcal{D}$ pseudo-bosoni. Osserviamo che il vettore $\varphi_{n_1,n_2}(x_1, x_2)$ può essere fattorizzato. Infatti abbiamo

$$\varphi_{n_1,n_2}(x_1, x_2) = \frac{N}{\sqrt{n_1! n_2! 2^{n_1+n_2}}} \left[\left(x_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} + D \right)^{n_1} e^{-\frac{1}{2}x_1^2 - Cx_1} \right] \cdot$$

$$\cdot \left[\left(x_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} + D \right)^{n_2} e^{-\frac{1}{2}x_2^2 - Cx_2} \right],$$

mentre $\Psi_{n_1,n_2}(x_1,x_2)$ può essere facilmente dedotto da $\varphi_{n_1,n_2}(x_1,x_2)$ semplicemente cambiando C con $\overline{D}$ e viceversa. Osserviamo subito che tanto $\varphi_{n_1,n_2}(x_1,x_2)$ che $\Psi_{n_1,n_2}(x_1,x_2)$ appartengono a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, come ci si attendeva, essendo prodotti di polinomi in x_1 e x_2 per le funzioni $\varphi_{0,0}(x_1,x_2)$ e $\Psi_{0,0}(x_1,x_2)$ rispettivamente.

Adesso rimane da verificare se

$$\mathcal{F}_\varphi = \{\varphi_{n_1,n_2}(x_1,x_2), n_j \geq 0\}, \quad \mathcal{F}_\Psi = \{\Psi_{n_1,n_2}(x_1,x_2), n_j \geq 0\}$$

sono basi per $\mathcal{H}$ o se almeno risultano essere $\mathcal{G}$-quasi basi, per qualche $\mathcal{G}$ denso in $\mathcal{H}$. Ancora una volta faremo vedere come la Proposizione 2 del Capitolo 2 è utile a questo scopo. Infatti, introduciamo il seguente operatore autoaggiunto non limitato ed invertibile T:

$$T = e^{-A(p_1+p_2)+B(x_1+x_2)}.$$

E' possibile dimostrare che $H = T\tilde{h}T^{-1}$, dove

$$\tilde{h} = \frac{1}{2}(p_1^2 + x_1^2) + \frac{1}{2}(p_2^2 + x_2^2) + (A^2 + B^2)1\!\!1.$$

Allora, se introduciamo gli operatori bosonici $c_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_j + ip_j)$, insieme con i loro aggiunti, si vede che

$$\tilde{h} = c_1^\dagger c_1 + c_2^\dagger c_2 + (A^2 + B^2 + 1)1\!\!1.$$

Gli autovalori di $\tilde{h}$ sono $E_{n_1,n_2} = n_1 + n_2 + A^2 + B^2 + 1$, e i rispettivi autovettori sono costruiti come al solito per un oscillatore armonico bidimensionale: $\Phi_{0,0}(x_1,x_2) \in \mathcal{H}$ tali che $c_j\Phi_{0,0} = 0$, $j = 1,2$, L'insieme degli autostati di $\tilde{h}$ è ottenuto agendo con gli operatori $c_j^\dagger$ su $\Phi_{0,0}$:

$$\Phi_{n_1,n_2} := \frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!}}(c_1^\dagger)^{n_1}(c_2^\dagger)^{n_2}\Phi_{0,0}, \quad n_j \geq 0.$$

L'insieme $\mathcal{F}_\Phi = \{\Phi_{n_1,n_2},\, n_j \geq 0\}$ è un insieme ortonormale per $\mathcal{H}$, e si dimostra facilmente che non solo $\Phi_{n_1,n_2} \in D(T) \cap D(T^{-1})$, ma anche che $\varphi_{n_1,n_2} = T\Phi_{n_1,n_2}$ e $\Psi_{n_1,n_2} = T^{-1}\Phi_{n_1,n_2}$. Siamo quindi nelle condizioni della Proposizione 2 e quindi $\mathcal{F}_\varphi$ e $\mathcal{F}_\Psi$ sono $D(T) \cap D(T^{-1})$-quasi basi per $\mathcal{H}$.

L'operatore Θ è ora $\Theta = T^{-2} = e^{2A(p_1+p_2)-2B(x_1+x_2)}$, che mappa $\mathcal{D}$ in se stesso. Le stesse considerazioni finali del primo esempio possono essere ripetute anche qui.

3.3 Terzo esempio

Il terzo esempio che vogliamo considerare qui è sostanzialmente una versione non commutativa del precedente. Esso ha formalmente la stessa Hamiltoniana in (3.2.1):

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}_1^2 + \hat{x}_1^2) + \frac{1}{2}(\hat{p}_2^2 + \hat{x}_2^2) + i\left[A(\hat{x}_1 + \hat{x}_2) + B(\hat{p}_1 + \hat{p}_2)\right], \qquad (3.3.1)$$

dove nuovamente A e B sono costanti reali e rappresenta un oscillatore armonico bidimensionale linearmente perturbato. La differenza rispetto all'esempio precedente sta nel fatto che gli operatori autoaggiunti $\hat{x}_j$ e $\hat{p}_k$ soddisfano le seguenti regole di commutazione:

$$[\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i\delta_{j,k}\mathbb{1}, \quad [\hat{x}_j, \hat{x}_k] = i\theta\epsilon_{j,k}\mathbb{1}, \quad [\hat{p}_j, \hat{p}_k] = i\tilde{\theta}\epsilon_{j,k}\mathbb{1}. \qquad (3.3.2)$$

Qui θ e $\tilde{\theta}$ sono due parametri piccoli, che misurano la non commutatività del sistema, ed $\epsilon_{j,j} = 0$, $\epsilon_{1,2} = -\epsilon_{2,1} = 1$.

Seguendo [32], imposteremo un approccio perturbativo per la prima parte di questo esempio. In particolare, in seguito considereremo soltanto i termini lineari in θ e $\tilde{\theta}$, non considerando tutti i termini quadratici, cubici e così via. Osserviamo che in alcuni lavori di meccanica quantistica non commutativa, vedi ad esempio [34], $\tilde{\theta}$ è preso uguale a zero e di conseguenza i termini non commutativi sono presenti soltanto negli operatori posizione e non negli operatori momento.

Detto ciò, se introduciamo due coppie di operatori canonicamente coniugati (x_j, p_j), $j = 1, 2$ [1], ed assumiamo che

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = x_1 - \frac{1}{2}\theta p_2, \quad \hat{x}_2 = x_2 + \frac{1}{2}\theta p_1, \\ \hat{p}_1 = p_1 + \frac{1}{2}\tilde{\theta} x_2, \quad \hat{p}_2 = p_2 - \frac{1}{2}\tilde{\theta} x_1, \end{cases} \qquad (3.3.3)$$

avremo le regole di commutazione (3.3.2) e $\hat{H}$ può essere riscritta in termini degli operatori canonici x_j e p_j, non considerando i quadrati in θ e $\tilde{\theta}$, come

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(p_1^2 + x_1^2) + \frac{1}{2}(p_2^2 + x_2^2) + i\left[A(x_1 + x_2) + B(p_1 + p_2)\right] +$$

[1] i.e. $[x_j, p_k] = i\delta_{j,k}\mathbb{1}$, $[x_j, x_k] = [p_j, p_k] = 0$.

$$+\frac{1}{2}(\theta+\tilde{\theta})(p_1x_2-p_2x_1)+i\left[\frac{A\theta}{2}(p_1-p_2)-\frac{B\tilde{\theta}}{2}(x_1-x_2)\right] \qquad (3.3.4)$$

Definendo ora gli operatori non autoaggiunti

$$P_j = p_j + iB_j, \qquad X_j = x_j + iA_j,$$

$j = 1, 2$, osserviamo che $[X_j, P_k] = i\delta_{j,k}\mathbb{1}$, mentre $[X_j, X_k] = [P_j, P_k] = 0$. Inoltre, abbiamo qui introdotto

$$A_1 = A + \frac{1}{2}\theta B, \quad A_2 = A - \frac{1}{2}\theta B,$$

$$B_1 = B - \frac{1}{2}\tilde{\theta}A, \quad B_2 = B + \frac{1}{2}\tilde{\theta}A.$$

Adesso introduciamo, *formalmente*, i seguenti operatori pseudo-bosonici:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2}(X_1 + iP_1 + iX_2 - P_2) \\ a_2 = \frac{1}{2}(-iX_1 + P_1 - X_2 - iP_2) \\ b_1 = \frac{1}{2}(X_1 - iP_1 - iX_2 - P_2) \\ b_2 = \frac{1}{2}(iX_1 + P_1 - X_2 + iP_2). \end{cases} \qquad (3.3.5)$$

Vediamo subito che $b_j \neq a_j^\dagger$ e che inoltre valgono le $[a_j, b_k] = \delta_{j,k}\mathbb{1}$, Infatti

$$[a_1, b_1] = [\frac{1}{2}(X_1 + iP_1) + \frac{1}{2}(iX_2 - P_2), \frac{1}{2}(X_1 - iP_1) - \frac{1}{2}(iX_2 + P_2)] =$$

$$= \frac{1}{4}[X_1 + iP_1, X_1 - iP_1] - \frac{1}{4}[X_1 + iP_1, iX_2 - P_2] + \frac{1}{4}[iX_2 - P_2, X_1 - iP_1] +$$

$$-\frac{1}{4}[iX_2 - P_2, iX_2 + P_2] = \frac{1}{4}\{[X_1, X_1] - i[X_1, P_1] + i[P_1, X_1] + [P_1, P_1]\} +$$

$$-\frac{1}{4}\{[X_1, X_2] + [X_1, P_2] - [P_1, X_1] + i[P_1, P_2]\} + \frac{1}{4}\{i[X_2, X_1] + [X_2, P_1] +$$

$$-[P_2, X_1] + i[P_2, P_1]\} - \frac{1}{4}\{-[X_2, X_2] + i[X_2, P_2] - i[P_2, X_2] - [P_2, P_2]\} = 1,$$

$$[a_2, b_2] = [\frac{1}{2}(-iX_1 + P_1) - \frac{1}{2}(X_2 + iP_2), \frac{1}{2}(iX_1 + P_1) - \frac{1}{2}(X_2 - iP_2)] =$$

$$= \frac{1}{4}[-iX_1+P_1, iX_1+P_1] - \frac{1}{4}[-iX_1+P_1, X_2-iP_2] - \frac{1}{4}[X_2+iP_2, iX_1+P_1] +$$

$$+\frac{1}{4}[X_2+iP_2, X_2-iP_2] = \frac{1}{4}\{[X_1,X_1] - i[X_1,P_1] + i[P_1,X_1] + [P_1,P_1]\} +$$

$$-\frac{1}{4}\{-i[X_1,X_2] - [X_1,P_2] + [P_1,X_2] - i[P_1,P_2]\} - \frac{1}{4}\{i[X_2,X_1] + [X_2,P_1] +$$

$$-[P_2,X_1] + i[P_2,P_1]\} + \frac{1}{4}\{[X_2,X_2] - i[X_2,P_2] + i[P_2,X_2] + [P_2,P_2]\} = 1,$$

mentre tutti gli altri commutatori sono uguali a zero. Ad esempio

$$[a_1,a_2] = [\frac{1}{2}(X_1+iP_1) + \frac{1}{2}(iX_2-P_2), \frac{1}{2}(-iX_1+P_1) - \frac{1}{2}(X_2+iP_2)] =$$

$$= \frac{1}{4}[X_1+iP_1, -iX_1+iP_1] - \frac{1}{4}[X_1+iP_1, X_2+iP_2] + \frac{1}{4}[iX_2-P_2, -iX_1+P_1] +$$

$$-\frac{1}{4}[iX_2-P_2, X_2+iP_2] = \frac{1}{4}\{-i[X_1,X_1] + [X_1,P_1] + [P_1,X_1] + i[P_1,P_1]\} +$$

$$-\frac{1}{4}\{[X_1,X_2] + i[X_1,P_2] + i[P_1,X_2] - [P_1,P_2]\} + \frac{1}{4}\{[X_2,X_1] + i[X_2,P_1] +$$

$$+i[P_2,X_1] - [P_2,P_1]\} - \frac{1}{4}\{i[X_2,X_2] - [X_2,P_2] - [P_2,X_2] - i[P_2,P_2]\} = 0,$$

ed analogamente

$$[b_1,b_2] = [\frac{1}{2}(X_1-iP_1) - \frac{1}{2}(iX_2+P_2), \frac{1}{2}(iX_1+P_1) - \frac{1}{2}(X_2-iP_2)] = 0$$

$$= \frac{1}{4}[X_1-iP_1, iX_1+P_1] - \frac{1}{4}[X_1-iP_1, X_2-iP_2] + \frac{1}{4}[iX_2+P_2, iX_1+P_1] +$$

$$+\frac{1}{4}[iX_2+P_2, X_2-iP_2] = \frac{1}{4}\{i[X_1,X_1] + [X_1,P_1] + [P_1,X_1] - i[P_1,P_1]\} +$$

$$-\frac{1}{4}\{[X_1,X_2] - i[X_1,P_2] - i[P_1,X_2] - [P_1,P_2]\} - \frac{1}{4}\{-[X_2,X_1] + i[X_2,P_1] +$$

$$+i[P_2,X_1] + [P_2,P_1]\} + \frac{1}{4}\{i[X_2,X_2] + [X_2,P_2] + [P_2,X_2] - i[P_2,P_2]\} = 0.$$

In termini di questi operatori $\hat{H}$ può essere scritta come

$$\hat{H} = (N_1 + N_2 + \mathbb{1}) + \frac{1}{2}(\theta + \tilde{\theta})(N_1 - N_2) + (A^2 + B^2)\mathbb{1}. \qquad (3.3.6)$$

Infatti

$N_1+N_2+1 = (b_1a_1)+(b_2a_2)+1 = [(\frac{1}{2}(X_1-iP_1)-\frac{1}{2}(iX_2+P_2)(\frac{1}{2}(X_1+iP_1)+\frac{1}{2}(iX_2-P_2))+(\frac{1}{2}(iX_1+P_1)-\frac{1}{2}(X_2-iP_2)(\frac{1}{2}(-iX_1+P_1)-\frac{1}{2}(X_2+iP_2))+1 = \frac{1}{2}(P_1^2+X_1^2)+\frac{1}{2}(P_2^2+X_2^2)$

$N_1 - N_2 = (b_1a_1) - (b_2a_2) = [(\frac{1}{2}(X_1 - iP_1) - \frac{1}{2}(iX_2 + P_2)(\frac{1}{2}(X_1 + iP_1) + \frac{1}{2}(iX_2 - P_2)) - (\frac{1}{2}(iX_1 + P_1) - \frac{1}{2}(X_2 - iP_2)(\frac{1}{2}(-iX_1 + P_1) - \frac{1}{2}(X_2 + iP_2))]$

Confrontando questa Hamiltoniana con quella del secondo esempio vediamo che la sola differenza è nel termine $\frac{1}{2}(\theta+\tilde{\theta})(N_1-N_2)$ che è lineare nei parametri θ e $\tilde{\theta}$. Non appaiono termini quadratici a causa del nostro approccio perturbativo.

Vogliamo evidenziare che la parola *formalmente*, introdotta precedentemente, sta ad indicare il fatto che non abbiamo ancora dimostrato che le Ipotesi $\mathcal{D}$-pb 1, $\mathcal{D}$-pb 2 e $\mathcal{D}$-pb 3 o la sua forma più debole $\mathcal{D}$-pbw 3, sono verificate; che è quello che faremo di seguito. Come per gli altri esempi, il primo passo è riscrivere gli operatori a_j e b_j in termini delle variabili x_j e p_j. Allora abbiamo:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2}(x_1 + ip_1 + ix_2 - p_2 + k_1), \\ a_2 = \frac{1}{2}(-ix_1 + p_1 - x_2 - ip_2 + k_2), \\ b_1 = \frac{1}{2}(x_1 - ip_1 - ix_2 - p_2 + \tilde{k}_1), \\ b_2 = \frac{1}{2}(ix_1 + p_1 - x_2 + ip_2 + \tilde{k}_2), \end{cases}$$

dove

$$\begin{cases} k_1 = A\left(1 - \frac{\tilde{\theta}}{2}\right)(i-1) + B\left(\frac{\theta}{2} - 1\right)(i+1), \\ k_2 = A\left(1 + \frac{\tilde{\theta}}{2}\right)(1-i) + B\left(\frac{\theta}{2} + 1\right)(i+1), \\ \tilde{k}_1 = A\left(1 - \frac{\tilde{\theta}}{2}\right)(i+1) + B\left(\frac{\theta}{2} - 1\right)(i-1), \\ \tilde{k}_2 = -A\left(1 + \frac{\tilde{\theta}}{2}\right)(i+1) + B\left(\frac{\theta}{2} + 1\right)(i-1). \end{cases}$$

La funzione annichilita da a_1 and a_2 può essere facilmente ottenuta risolvendo due equazioni differenziali accoppiate. Il risultato dedotto non si discosta molto da quello degli altri esempi, ed infatti otteniamo

$$\varphi_{0,0}(x_1,x_2) = Ne^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)-\alpha_1 x_1-\alpha_2 x_2},$$

$$\Psi_{0,0}(x_1,x_2) = N'e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)+\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2},$$

dove $\alpha_1 = \frac{k_1+ik_2}{2}$, $\alpha_2 = \frac{k_1-ik_2}{2i}$, mentre N e N' sono costanti di normalizzazione scelte richiedendo, al solito, che sia $\langle\varphi_{0,0},\Psi_{0,0}\rangle = 1$. Anche in questo modello viene naturale identificare $\mathcal{D}$ con $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Infatti, con questa scelta, $\mathcal{D}$ è stabile sotto l'azione di a_j, b_j, e dei loro aggiunti. Inoltre, sia $\varphi_{0,0}(x_1,x_2)$ che $\Psi_{0,0}(x_1,x_2)$ appartengono a $\mathcal{D}$. Le funzioni $\varphi_{n_1,n_2}(x_1,x_2)$ e $\Psi_{n_1,n_2}(x_1,x_2)$ sono costruite nel modo usuale e appartengono tutte a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. In conclusione, le Ipotesi $\mathcal{D}$-pb 1 e $\mathcal{D}$-pb 2 sono entrambe verificate.

Per quanto riguarda la verifica dell'Ipotesi $\mathcal{D}$-pb 3, l'idea è sempre quella di cercare una base ortonormale mappata in $\mathcal{F}_\varphi$ e $\mathcal{F}_\Psi$ da un operatore. Per fare ciò introduciamo i due operatori bosonici, $c_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_j+ip_j)$, $j=1,2$, e i loro aggiunti $c_j^\dagger$. Inoltre, seguendo [35], definiamo due nuovi operatori bosonici $c_g = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1+ic_2)$ e $c_d = \frac{-i}{\sqrt{2}}(c_1-ic_2)$. Essi soddisfano le regole di commutazione canoniche

$$[c_g, c_g^\dagger] = [c_d, c_d^\dagger] = \mathbb{1},$$

mentre tutti gli altri commutatori sono uguali a zero. Il vettore di vuoto di c_g, c_d, $\chi_{0,0}$, coincide chiaramente con quello di c_1, c_2, $\Phi_{0,0}$: in altre parole, se $c_1\Phi_{0,0} = c_2\Phi_{0,0} = 0$, allora chiamato $\chi_{0,0} = \Phi_{0,0}$, abbiamo automaticamente $c_d\chi_{0,0} = c_g\chi_{0,0} = 0$.

Sia ora $\chi_{n_d,n_g} = \frac{1}{\sqrt{n_d!\,n_g!}}(c_d^\dagger)^{n_d}(c_g^\dagger)^{n_g}\chi_{0,0}$, $n_d,n_g \geq 0$, l'insieme $\mathcal{F}_\chi = \{\chi_{n_d,n_g}\}$ di tutti questi vettori è una base ortonormale per $\mathcal{H}$, [35]. Introducendo inoltre l'operatore autoaggiunto non limitato e invertibile T

$$T = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(k_1 c_g^\dagger + k_2 c_d^\dagger + \overline{k_1}c_g + +\overline{k_2}c_d\right)\right\},$$

abbiamo che

$$\begin{cases} Tc_gT^{-1} = c_g + \frac{k_1}{2} = a_1, & Tc_dT^{-1} = c_d + \frac{k_2}{2} = a_2, \\ Tc_g^\dagger T^{-1} = c_g^\dagger - \frac{k_1}{2} = b_1, & Tc_d^\dagger T^{-1} = c_d^\dagger - \frac{k_2}{2} = b_2. \end{cases}$$

Ora, a meno di una normalizzazione, possiamo dimostrare che

$$\varphi_{0,0} = T\chi_{0,0}, \qquad \Psi_{0,0} = T^{-1}\chi_{0,0}.$$

Questo segue, per esempio, dal fatto che

$$c_g(T\chi_{0,0}) = -\frac{k_1}{2}(T\chi_{0,0}) \qquad c_d(T\chi_{0,0}) = -\frac{k_2}{2}(T\chi_{0,0}).$$

Queste uguaglianze possono essere estese facilmente a tutti i vettori:

$$\varphi_{n_1,n_2} = T\chi_{n_1,n_2} \qquad \Psi_{n_1,n_2} = T^{-1}\chi_{n_1,n_2},$$

per tutti gli $n_j \geq 0$. Siamo nelle ipotesi della Proposizione 2, e possiamo quindi concludere che $\mathcal{F}_\varphi$ e $\mathcal{F}_\Psi$ sono $D(T) \cap D(T^{-1})$-quasi basi per $\mathcal{H}$: l'Ipotesi $\mathcal{D}$-PBw 3 è verificata. E' inutile dire che, la stessa costruzione finale può essere ripetuta. In particolare, può essere introdotto l'operatore Θ che mappa $\mathcal{F}_\Psi$ in $\mathcal{F}_\varphi$, e così via.

Capitolo 4

Conclusioni

In questo lavoro di tesi abbiamo voluto, per prima cosa, richiamare la struttura degli $\mathcal{D}$ pseudo-bosoni, introdotta in [29], nata dalla deformazione delle regole canoniche di commutazione, di cui sono un'estensione con conseguenze non banali.

Inoltre, richiamando lo studio sugli $\mathcal{D}$ pseudo-bosoni fatto da Bagarello in [29] abbiamo puntato l'attenzione sulle relazioni di intertwining che legano operatori non autoaggiunti ad operatori autoaggiunti. Abbiamo visto che queste relazioni sottolineano lo stretto legame tra gli operatori pseudo-bosonici e la meccanica quantistica cripto-Hermitiano e pseudo-Hermitiana.

Un altro aspetto interessante di questa analisi è la scoperta che alcuni modelli di meccanica quantistica $\mathcal{PT}$-simmetrica si adattano perfettamente a questo tipo di struttura mettendo così in evidenza il fatto che quella che sembrava una curiosità puramente matematica trova riscontro ed applicazione esplicita in modelli fisici concreti.

Ed è appunto tale applicazione quello che abbiamo esposto nel Capitolo 3. Infatti in quest'ultimo abbiamo analizzato tre differenti modelli di meccanica quantistica $\mathcal{PT}$-simmetrica, precedentemente studiati in [30, 31, 32], alla luce della definizione di $\mathcal{D}$ pseudo-bosoni.

In particolare, abbiamo quindi fatto vedere come questi modelli soddisfano le ipotesi del framework e che quindi possono essere riscritti in termini di $\mathcal{D}$ pseudo-bosoni. Questo ci ha dato la possibilità di studiare aspetti del modello non considerati precedentemente quali ad esempio la costruzione degli autostati di $H^\dagger$.

Si nota inoltre come una particolare importanza, nell'analisi dei modelli, ricoprono le $\mathcal{G}$-quasi basi e di conseguenza la Proposizione 2 introdotta nel Capitolo 2. Infatti quest'ultima ci permette di risolvere il problema della verifica che $\mathcal{F}_\varphi$ e $\mathcal{F}_\Psi$ siano basi di $\mathcal{H}$, sostituendolo con uno di più semplice soluzione.

Questo ci porta a credere che potrebbe essere interessante e utile, sia dal punto di vista matematico che fisico, una ulteriore analisi su di esse.

Inoltre dai modelli studiati sembra quasi che ogni qualvolta che si ha a che fare con Hamiltoniane non-Hermitiane con autovalori reali e lineari nei numeri quantici è possibile riscrivere il modello in termini di $\mathcal{D}$ pseudo-bosoni, utilizzandone il formalismo ed i risultati generali.

Se questa congettura risultasse vera potrebbe risultare utile per lo studio di altri sistemi fisici concreti, per esempio quelli introdotti in ottica quantistica, per i quali, però, potrebbe essere neccessario utilizzare la generalizzazione non lineare degli $\mathcal{D}$ pseudo-bosoni, anch'essa introdotta da Bagarello in [29].

Bibliografia

[1] T. T. Wu, *Ground state of a bose system of hard spheres*, Phys. Rev., **115**, 1390 (1959)

[2] R. Brower, M. Furman, and M. Moshe *Ground state of a bose system of hard spheres*, Phys. Lett. B, **76**, 213 (1978)

[3] E. Caliceti, S. Graffi, and M. Maioli *Perturbation Theory of odd anharmonic oscillators*, Comm. Math. Phys., **75**, 51 (1980)

[4] C. M. Bender, K. A. Milton, S. S. Pinsky, and L. M. Simmons *A new perturbative approach to nonlinear problems*, Jr., J. Math. Phys., **30**, 1447 (1989)

[5] C. M. Bender, D. C. Brondy, and H. F. Jones *Complex Extension of Quantum Mechanics*, Phys. Rev. Lett., **89**, 270401 (2002)

[6] C. M. Bender, S. Boettcher *Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having $\mathcal{PT}$-Symmetry*, Phys. Rev. Lett., **80**, 5243 (1998)

[7] C. M. Bender, P. D. Mannheim *Exactly Solvable $\mathcal{PT}$-Symmetric Hamiltonian Having Hermitian Counterpart*, Phys. Rev. D, **78**, 025022 (2008)

[8] T Hollowood *Solitons in affine Toda field theories* Nuclear Physics B, (1992)

[9] M. Znojil *Time-dependent version of crypto-Hermitian quantum theory* Phys. Rev. D, **78** 085003(2008)

[10] M. Znojil *Annihilation and creation operators in non-Hermitian supersymmetric quantum mechanics* hep-th/0012002

[11] B. Bagchi and C. quesne *Creation and annihilation Operators and coherent states for PT-Symmetric Oscillator* Mod. Phys. Lett. A **16**, 2449 (2001)

[12] A. Mostafazadeh *Pseudo-Hermitian Representation of Quantum Mechanics* Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. **7**, 1191-1306 (2010)

[13] P.E.G. Assis and A. Fring *Non-Hermitian Hamiltonians of Lie algebric type* J. Phys. A: Math. Theor. **42** 015203 (2009),

[14] D.A. Trifonov *Pseudo-Boson Coherent and Fock States* Diff. Geometry, Complex Analysis and Mathematical Physics, eds.K. Sekigawa et al (W. Scientific 2009) 241-250 arXiv:0902.3744 [quant-ph]

[15] O. Cherbal, M. Drir, M. Maamache, and D.A. Trifonov *Fermionic coherent states for pseudo-Hermitian two-level system* J. Phys. A, **40** 1835-1844 (2007)

[16] B. Roy and P. Roy *Coherent states of non-Hermitisn quantum systems* Phys.Lett. A **359** 110 (2006)

[17] F. Bagarello *Pseudo-bosons, Riesz bases and coherent states*, J. Math. Phys., **50**, DOI:10.1063/1.3300804, 023531 (2010) (10pg)

[18] F. Bagarello *Linear Pseudo-fermions*, J.Phys. A **45** 444002 (2012)

[19] F. Bagarello *Construction of pseudo-bosons systems*, J. Math. Phys., **51**, doi:10.1063/1.3300804, 023531 (2010) (10pg)

[20] F. Bagarello *Mathematical aspects of intertwining operators: the role of Riesz bases*, J. Phys. A, doi:10.1088/1751-8113/43/17/175203, **43**, 175203 (2010) (12pp)

[21] F. Bagarello, F. Calabrese *Pseudo-bosons arising from Riesz bases*, Bollettino del Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici, **2**, 15-26, (2010)

[22] F. Bagarello, *(Regular) pseudo-bosons versus bosons*, J. Phys. A, **44**, 015205 (2011)

[23] F. Bagarello, *Examples of Pseudo-bosons in quantum mechanics*, Phys. Lett. A, **374**, 3823-3827 (2010)

[24] F. Besnard, *Number operator algebra*, MPEJ **7** No. 54 (2001); Ernest Baver, Doron Gepner and Umut Gursay, *Realizations of pseudo bosonic theory with non-diagonal automorphisms* Nucl. Phys. B, **561**, Issue 3, 473-479 (1999); H. J. Schmidt, J. Bartke *A solveble model of one-dimensional quantum gas with pair interactio* Physica A, **335**, 143-154 (2004)

[25] F. Bagarello, *Damping and pseudo-fermions*, J. Math. Phys. **54**, 023509 (2013)

[26] S.T. Ali, F. Bagarello, J.-P. Gazeau, *Modified Landau levels, damped harmonic oscillator and two-dimensional pseudo-bosons*, J. Math. Phys., **51**, 123502 (2010)

[27] F. Bagarello, *Pseudo-bosons, so far*, Rep. Math. Phys., **68**, No. 2, 175-210 (2011)

[28] F. Bagarello, J. P. Gazeau, F. Szafraniek and M. Znojil Eds, J. Wiley an *Deformed canonical (anti-)commutation relations and non hermitian hamiltonians, in Non-selfadjoint operators in quantum physics: Mathematical aspects*

[29] F. Bagarello *More mathematics for pseudo-bosons*, J. Math. Phys., submitted

[30] C. M. Bender, H. F. Jones, *Interactions of Hermitian and non-Hermitian Hamiltonians*, J. Phys. A, **41**, 244006 (2008)

[31] Jun-Qing Li, Qian Li, Yan-Gang Miao, *Investigation of PT-symmetric Hamiltonian Systems from an Alternative Point of View*, Commun. Theor. Phys., **58**, 497 (2012)

[32] Jun-Qing Li, Yan-Gang Miao, Zhao Xue, *Algebraic method for pseudo-Hermitian Hamiltonians*, arXiv:1107.4972 [quant-ph]

[33] C. Heil, *A basis theory primer: expanded edition*, Springer, New York, (2010)

[34] F. Bagarello, S. T. Ali, J. P. Gazeau, *Extended pseudo-fermions from non commutative bosons*, JMP, submitted

[35] A. Messiah, *Quantum mechanics*, vol. 1, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1961

[36] Dorey P., Dunning C. and Tateo R. *Spectral equivalences, Bethe Ansatz equations, and reality properties in PT-symmetric quantum mechanics*, J.Phys. A: Math Gen 34, L391 (2001)

[37] F. H. M. Faisal and J. V. Moloney, *Time-dependent theory of non-Hermitian Schrodinger equation: Application to multiphoton-induced ionisation decay of atoms*, J. Phys. B: At. Mol. Phys. 14, 3603-3620 (1981); G. Dattoli, R. Mignani, A. Torre, *Geometrical phase in the cyclic evolution of non-Hermitian systems*, J. Phys. A: Math. Gen., 23, 5795-5806 (1990); C. M. Bender and P. D. Mannheim, *Exactly Solvable PT-Symmetric Hamiltonian Having no Hermitian Counterpart*, Phys. Rev. D, 78, 025022 (2008)

[38] Y. Maleki, Para-Grassmannian *Coherent and Squeezed States for Pseudo-Hermitian q- Oscillator and their Entanglement*, SIGMA, 7, 084, 20 pages (2011); A. Ghatak, B. P.Mandal, *Comparison of Different Approaches of Finding the Positive Definite Metric in Pseudo-Hermitian Theories*, Commun. Theor. Phys. 59, 533-539 (2013)

[39] P. Siegl *PT-Symmetric Square Well-Perturbations and the Existence of Metric Operator* Int. J.Theor. Phys. **50**, 991-996, (2011); D. Krejcirik , P. Siegl, J. Zelezny, *On the similarity of Sturm-Liouville operators with non-Hermitian boundary conditions to self-adjoint and normal operators, Complex Analysis and Operator Theory*, in press 9; D. Krejcirik and P. Siegl, *On the metric operator for the imaginary cubic oscillator*, Phys. Rev. D, **86**, 121702 (2012)

[40] R. Young, *An introduction to nonharmonic Fourier series*, Academic Pree New York, (1980)

[41] D.Krejcirik and P.Siegl, *On the metric operator for the imaginary cubic oscillator* Phys. Rev. D, 86, 121702 (R) (2012)

[42] D.A.Trifonov, *Pseudo-boson coherent and Fock states*, quant-ph/0902.3744