Gli Anaglifi di Vuibert.
Origine storica e applicazioni in didattica basata sui modelli di superfici matematiche.

Nota di Nicla Palladino*

Presentata dal socio Paolo de Lucia
(Adunanza del 5 Giugno 2009)

Key words: anaglyphs, models of surfaces, history of Mathematics.

Abstract – This paper sketchs out a brief history of the birth of anaglyphs, to their use in virtual reality. Role of virtual reality in didactical is considered and models of famous plastic surfaces that mathematicians built between XIX-th and the first thirty years of the XX-th century are carried out by anaglyphs. These models were used in several fields of pure and applied mathematics, in order to show results of researches or to teach "high mathematics".

Riassunto – Si traccia una breve storia della nascita degli *anaglifi*, fino all'uso odierno nella *realtà virtuale*. Si considera il ruolo del virtuale nella didattica e si danno alcune rappresentazioni, mediante anaglifi, di famose superfici, costruite in gesso tra la seconda metà dell'Ottocento e gli anni Trenta del Novecento, per la ricerca e l'insegnamento delle "matematiche superiori".

1 – Gli anaglifi geometrici di Vuibert

Nel ripercorrere alcune tappe della storia della Matematica, talvolta sembra che vi si ritrovino idee tanto più attuali quanto ancora efficacemente utilizzabili in un contesto moderno.

Il matematico Henri Vuibert aveva fondato a Parigi (in Boulevard Saint Germain, n° 63), nel 1877 (sembra che egli fosse in quell'anno il più giovane "agrégé de mathématiques" di Francia), la libreria editrice *Vuibert et Nony* (poi libreria *Vuibert* che vive a tutt'oggi sotto questo nome) e, tra le diverse pubblicazioni scientifiche di cui fu direttamente autore e, in questo caso,

* Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Salerno. Lavoro eseguito nell'ambito dell'assegno di ricerca *Metodi matematici e informatici per il trattamento dell'informazione*, responsabile prof. Vincenzo Loia.

editore, vi è il trattatello, *Les Anaglyphes géométriques*[1], edito nel 1912, interamente dedicato ai principi ottici e alle applicazioni, alla geometria solida, degli *anaglifi* da lui pensati, allora, esclusivamente come un nuovo strumento utile per "un approccio intuitivo alla geometria".

È forse il caso di ricordare che anche una personalità scientifica come quella di David Hilbert (1862-1943), a giusta ragione tanto celebrata pure per aver definito l'idea del moderno metodo assiomatico, ebbe forte attenzione per il punto di vista intuitivo; egli pubblicò, infatti, assieme con Stefan Cohn-Vossen (1902-1936), nel 1932, un volume di *Geometria intuitiva*, l'*Anschauliche Geometrie*[2].

Per testimoniare, ancora, della considerazione goduta dalla tendenza "intuitiva", si può ricordare l'affermazione di William Thomson (1824-1907), ben noto col titolo di Lord Kelvin, pronunciata nel pieno del clima positivista della seconda metà dell'Ottocento:

Io non sono soddisfatto finché non ho potuto costruire un modello meccanico dell'oggetto che studio. Se posso costruire un tale modello meccanico, comprendo; sino a che non posso costruirlo, non comprendo affatto[3].

La prima parte dello scritto di Vuibert sugli anaglifi esplicita esaurientemente gli intenti dell'autore, il quale osserva, in linea preliminare, che una delle difficoltà nell'insegnamento della geometria deriva dal fatto che non è facile "vedere nello spazio" ("voir dans l'espace") figure di corpi dei quali si disponga soltanto della loro rappresentazione nel piano, soprattutto quando queste figure piane sono di complicata espressione. Così può accadere che uno studioso riesca pure a comprendere e ad assimilare una dimostrazione matematica senza però familiarizzare con le corrispondenti figure della geometria dello spazio. Anche la geometria descrittiva, per quanto precisi meglio, con linguaggio convenzionale, la forma dei corpi solidi, spesso non è di grande aiuto. Monge ha detto –ricorda Vuibert– che la geometria descrittiva[4]

---

[1] H. Vuibert, *Les Anaglyphes géométriques*, Paris, Librairie Vuibert Boulevard Saint Germain, 63, 1912, 32 pagine.

[2] Berlin, Julius Springer; trad. ital. *Geometria intuitiva*, Torino, Paolo Boringhieri, 1960.

[3] "I am never content until I have constructed a mechanical model of the subject I am studying. If I succeed in making one, I understand; otherwise, I do not", in W. Thomson, *Molecular dynamics and the wave theory of light: notes of lectures delivered at the Johns Hopkins University, Baltimore by Sir William Thomson, ... stenographically reported by A.S. Hathaway*, Baltimore (Maryland – U.S.A.), Johns Hopkins University, ca 1884.

[4] La quale, come si sa, serve a rappresentare nel piano oggetti dello spazio a tre dimensioni. Gaspard Monge (1746-1818) è ritenuto essere l'inventore di questa geometria. Nel 1795 si pubblicavano le sue *lezioni* di geometria descrittiva, date in quell'anno nella *Scuola Normale* di Parigi, inserite nelle *Sèances des Écoles Normales recueillies par les sténographes et revues par les professeurs*, edite a Parigi, presso L. Reynier, nell'anno III della Repubblica, corrispondente

è una lingua necessaria all'uomo di genio che concepisce un progetto, a coloro che debbono dirigerne l'esecuzione e, infine, agli artisti che devono essi stessi eseguirne le diverse parti; ma, annota nello stesso tempo Vuibert, se con questo linguaggio si comunica e si comprende bene, esso è però ancora più difficile da apprendere di quello della geometria ordinaria o, almeno, è più difficile cogliere con chiarezza, nella loro disposizione spaziale, le figure espresse nella geometria descrittiva rispetto a quelle della geometria ordinaria.

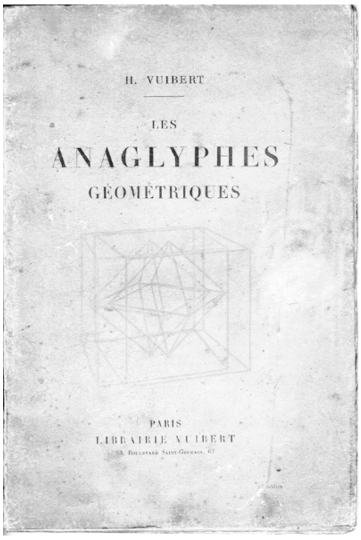

Fig. 1. Copertina del volumetto *Les anaglyphes géométriques* di Vuibert.

Per aiutare gli studenti a vedere nello spazio –ricorda ancora Vuibert– si sono costruite materialmente, in tre dimensioni, le principali figure sia della geometria ordinaria sia della geometria descrittiva; un aiuto prezioso per gli studenti, specialmente quando sono proprio essi a costruire questi modelli materiali. Ma le collezioni che sono state realizzate hanno un prezzo molto alto, non sono facilmente disponibili e possono contare solo su un numero limitato (per quanto cospicuo) di modelli. Inoltre, se i modelli solidi sono in legno, gesso, o cartone, ecc., di essi se ne vede solo la forma esteriore poiché non è possibile osservare tutti gli elementi interni e le linee di costruzione; se invece sono confezionati con fili, la loro fragilità non ci permette di

per l'appunto al 1795; poi ripubblicate a parte, a cura di J.-P.-N. Hachette, nel 1799, a Parigi, col titolo di *Géométrie descriptive*.

manipolarli; e, qualunque sia il modo di costruirli, le linee non si possono "intrecciare all'infinito" perché la fabbricazione diventerebbe difficile e troppo costosa.

Il problema sembrava insolubile finché, scrive Vuibert, Henri Richard – preside del Liceo della città francese di Chartres– trovò una soluzione elegante e definitiva: egli non costruì materialmente gli oggetti corrispondenti alle figure geometriche, bensì disegnò le figure stesse in modo che l'osservatore avesse l'illusione, guardandole, che al loro posto corrispondessero oggetti autenticamente reali, sviluppati in tre dimensioni (realizzando così l' "effetto rilievo"), vale a dire disegnò degli *anaglifi*, parola proveniente dall'antica lingua greca[5].

Anaglifi, tracciati geometricamente a mano, in numero di circa quaranta, realizzati da Henri Richard, furono esposti –riferisce Vuibert nel suo libretto– al Quinto Congresso Internazionale dei Matematici, tenutosi dal 22 al 28 agosto del 1912, a Cambridge, in Inghilterra.[6]

Le idee di Vuibert sull'uso degli anaglifi nella didattica della matematica ebbero una notevole diffusione anche in Italia. Così, ad esempio, Roberto Marcolongo[7], nel 1921, in occasione del Congresso nazionale della Società *Mathesis*[8] a Napoli, scriveva:

"In ogni scuola, di qualsiasi grado, accanto ai gabinetti di fisica, di chimica, di scienze naturali, di disegno, di topografia, ecc., vi deve essere quello di Matematica".

E invitava i professori ad abituare gli studenti a far uso dei "semplici e antichissimi strumenti", tra i quali gli *anaglifi geometrici* di Vuibert ed, in generale, del disegno nello studio di tanti argomenti della matematica, dai più elementari a quelli un po' più complessi, dicendo:

---

[5] Il termine greco αναγλυφή vuole dire lavoro in basso rilievo, cesellatura. Esso fu scelto da Ducos du Hauron del quale si dirà più oltre.

[6] Sul congresso si veda Hobson, E.W. and Lowe, A.E.H. (Eds.), *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians (Cambridge 22-28 August 1912)*, 2 volumes, Cambridge University Press, 1913.

[7] Su R. Marcolongo (1862-1943), fisico-matematico che ebbe, tra l'altro, un ruolo fondamentale per la diffusione in Italia della teoria della relatività, si può vedere la biografia, scritta da lui stesso, dal titolo *Quaranta anni di insegnamento*, Napoli, S.I.E.M. – Stabilimento Industrie Editoriali Meridionali, 1935; e F.G. Tricomi, *Matematici Italiani del Primo Secolo dello Stato Unitario*, «Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino – Classe di Scienze Fisiche Matematiche e Naturali», Serie 4ª, n. 1, 1962, *ad vocem*.

[8] Roberto Marcolongo, *Materiale didattico ed esperienze nell'insegnamento*. *Discorso tenuto al Congresso della Società Mathesis a Napoli il 16 Ottobre 1921*, «Giornale di Matematiche di Battaglini», LX (1922), pp. 1-14.

“La pazienza e l’abilità di ottenere un disegno bello ed esatto; le dimensioni stesse del disegno ben più ampie di quelle del testo; la diversa colorazione delle parti del disegno; le piccole questioni che il giovane disegnatore deve superare da sé in ogni momento; insomma queste prime esperienze geometriche, non solo sviluppano, acuiscono il senso estetico e geometrico, non solo possono promuovere la invenzione geometrica, e la discussione dei problemi, ma danno una sicurezza ed una padronanza della materia che difficilmente si acquisterebbe in altro modo”.

2. - LE TECNICHE PER LA COSTRUZIONE DEGLI ANAGLIFI

Il modo di rappresentare gli oggetti utilizzato da Richard si basa sull’ordinario meccanismo di visione tridimensionale, mediante i due occhi, di cui gli uomini sono dotati. Si sa che gli oggetti poco lontani non sono visti da ciascun occhio (la distanza tra le pupille è di circa 6-7 centimetri) sotto lo stesso aspetto o, come pure si dice, sotto la stessa prospettiva; per questa ragione Vuibert porta, quali esempi, delle immagini (qui di seguito riprodotte): la figura 2 rappresenta un oggetto, un tetraedro regolare, così come lo vede l’occhio sinistro, mentre il destro resta chiuso; la figura 3 riporta il medesimo tetraedro come appare, invece, all’occhio destro, mentre il sinistro resta chiuso. Le due immagini sono sensibilmente diverse; ma, se si guarda il tetraedro con i due occhi aperti, accade che il cervello le elabora –cosa che ordinariamente fa per offrire una visione tridimensionale di tutti gli oggetti che sono posti davanti agli occhi– in modo tale da fonderle in una sola che ci presenta l’oggetto originario, vale a dire il tetraedro, con il suo rilievo.

Figg. 2 e 3. Tratte da *Les anaglyphes géométriques*.

Vuibert, anche sulla scia delle ricerche nate dagli studi di Helmholtz, fornisce, nella sua esposizione, utili notizie che sono servite da base per le schematiche informazioni, che ora si presentano, su alcune tecniche –esse partono tutte dall'impiego della macchina fotografica – per la formazione di immagini in due dimensioni che diano l'illusione di avere di fronte agli occhi oggetti in rilievo, fino alla tecnica che permette di realizzare propriamente degli anaglifi.

Una prima tecnica consiste nel sistemare sopra un tavolo l'oggetto –di cui si vogliono immagini, stampate su foglio, capaci di fornire l'effetto rilievo – e scattare due successive fotografie (che danno ovviamente immagini a due dimensioni) dello stesso oggetto: eseguito il "primo scatto", il secondo viene fatto dopo aver spostato, subito poi, la macchina fotografica sul piano orizzontale (in pratica, parallelamente al bordo del tavolo), di una distanza uguale alla distanza mediamente sussistente tra i due occhi di un essere umano.

Questo passo della procedura si può eseguire anche mediante il *Verascope*, un esemplare del quale, con marchio *Richard* –ma si tratta di Jules Richard – è raffigurato nello scritto di Vuibert[9].

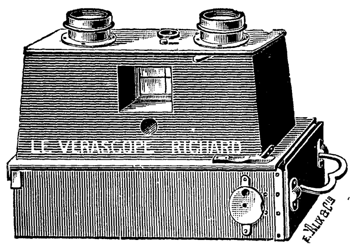

Fig. 4. Disegno del *Verascope* in *Les anaglyphes géométriques.*

Per compiere il passo successivo bisogna ottenere innanzitutto, per sviluppo, il "positivo" (d'ora in poi si preferirà dire *fotogramma*) delle due congiunte fotografie, delle quali la macchina fotografica ha dato solo il "negativo". I due fotogrammi, che sono affiancati sulla stessa superficie piana non coincidono, naturalmente, quando si osservino i primi piani delle figure che rappresentano ma vengono a coincidere solamente per i piani lontani. E questo fatto bisogna che sia tenuto sempre ben presente. Ora, mediante un

[9] In pratica il *Verascope* era un apparecchio a doppia macchina fotografica, ciascuna col suo obiettivo. Gli obiettivi, affiancati, erano posti a distanza tale da essere uguale alla distanza media che passa tra gli occhi umani ed erano comandanti da un unico pulsante. Esso fu costruito e brevettato, nel 1891, da Jules Richard (1848-1930), a Parigi, e i primi modelli entrarono in circolazione nel 1893 (su questo autore si può anche vedere Jacques Perin, *Jules Richard et la magie du relief*, vol. 1, Mialet (France), Cyclope, 1993, vol. 2, Paris, 1997, vol. 3, Paris, 2001.

cauto spostamento all'indietro (rispetto agli occhi dell'osservatore) degli stessi fotogrammi si può realizzare "ad occhio nudo"[10] l'effetto rilievo: vale a dire la sensazione di avere davanti agli occhi ancora l'oggetto originario con le sue tre dimensioni.

Anche quest'ultimo passo della procedura può essere compiuto mediante un apparecchio, e cioè mediante uno *stereoscopio*: i due fotogrammi (le "positive") precedenti, affiancati (costituiscono così uno *stereogramma*) sono inseriti in un piccolo telaio a cui, di fronte, sono connessi un paio di occhiali con lenti di ingrandimento aventi gli assi leggermente convergenti tali da produrre, rimandando all'indietro le due immagini (le "positive") e deviandole fino a sovrapporsi, il desiderato effetto rilievo[11]. È questa, essenzialmente, la

---

[10] Vuibert fornisce un rapidissimo cenno della visione stereoscopica "ad occhio nudo", mentre molto più dettagliata è la descrizione che si trova esposta, per esempio, da G. Carboni nell'articolo *Costruiamo uno Stereoscopio*, in *Fun Science Gallery* (*http://www.funsci.com/*) che qui si riporta:

"I due stereogrammi [le due "positive", n.d.r.], delle dimensioni di 6 x 9 cm circa, vanno tenuti affiancati. Appoggiate la coppia [di stereogrammi, n.d.r.] sugli occhi, a contatto del naso. A questo punto ogni occhio vede l'immagine che gli sta di fronte. Di conseguenza vedrete un'unica immagine, estremamente sfocata. Non cercate di metterla a fuoco. Allontanate il foglio di circa 10 cm e fermatevi. Ora dovreste vedere 3 immagini, molto sfocate. Ogni occhio ne vede due, ma quella centrale è dovuta alla fusione delle due "interne". Se l'immagine centrale dovesse essere in parte dissociata, attendete, rilassando gli occhi, finché le due parti non si saranno sovrapposte. Ora bisogna allontanare lentamente il foglio, finché l'immagine centrale non diventerà nitida. Se tenderà a dissociarsi, fermatevi e aspettate che si ricomponga. Quando vedrete l'immagine centrale a fuoco e bene fusa, apparirà in 3 dimensioni, come sospesa nello spazio. Vi sembrerà che il supporto di carta su cui le immagini si trovano, sia scomparso. L'effetto è sorprendente. La prima volta è un poco difficoltoso riuscire nell'impresa di vedere un'immagine stereoscopica senza l'uso di strumenti, ma le successive saranno molto più facili. Tenete presente che riviste scientifiche come *Science* e *Nature* riportano spesso immagini stereoscopiche di molecole. Le chiamano "Stereoview". Non danno nessuna indicazione sui metodi per la loro osservazione, tanta è la familiarità dei lettori di queste prestigiose riviste nei confronti delle rappresentazioni stereoscopiche, che riescono ad osservare anche ad occhio nudo. L'impiego di occhiali da lettura può facilitare questa operazione." Si ricorderà che le lenti d'ingrandimento, utilizzate anche per la lettura, sono quelle convesse, cioè quelle in cui, nella concezione classica, la curvatura di almeno una delle due facce corrisponde alla curvatura di una sfera. Una lente convessa ha il potere di far convergere in un punto un fascio di raggi paralleli che le colpisca ed è quindi detta anche lente convergente.

[11] Nello stesso articolo di Carboni è detto:

"L'apparecchio può essere dotato di 2 lenti di ingrandimento della focale di 30 cm, per persone dalla vista normale. I miopi preferiscono lenti più leggere o nulla, gli ipermetropi lenti più forti. La presenza delle lenti facilita l'uso dello strumento, ma non è indispensabile. In effetti i muscoli che regolano la convergenza degli occhi e quelli che regolano la messa a fuoco, pur essendo distinti, sono abituati a lavorare in modo congiunto. Adesso noi stiamo chiedendo agli occhi di restare paralleli, come se guardassero qualcosa lontano, mentre devono mettere a fuoco a 30 cm di distanza. Questa operazione è dunque facilitata dalla presenza di lenti di ingrandimento che permettono di tenere gli occhi accomodati all'infinito mentre osservano “fotografia stereoscopica” che applicata, ad esempio, per rilievi aerei consente rappresentazioni tridimensionali, utilizzate nella preparazione delle carte geografiche su cui sono tracciate le curve di livello. La tecnica della fotografia stereoscopica fu adottata da Christian Wiener (1826-1896) –sul quale si ritornerà al pf. 4– per ritrarre il modello in gesso della superficie, famosa nell’ambito degli studi di geometria-algebrica, del terzo ordine che va sotto il nome di *Superficie diagonale di Clebsch*, con le sue *27 rette reali*, modello che lui stesso aveva realizzato su ispirazione di Alfred Clebsch (1833-1872). Wiener pubblicò pure un corrispondente opuscolo, *Stereoscopische Photographien des Modelles einer Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Geraden. Mit erläuterndem Texte*, nel 1869,[12] in cui erano presentate due fotografie stereoscopiche della *Superficie diagonale* accompagnate da otto pagine di commento.

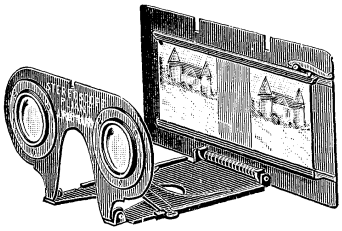

Fig. 5. Disegno dello *Stereoscopio* in *Les anaglyphes géométriques.*

La seconda tecnica è dovuta al fisico tedesco Wilhelm Rollmann (1821-1890) di Stralsund, in Prussia, il quale trovò, nel 1853, un metodo molto ingegnoso per ottenere l’effetto rilievo senza far uso dello stereoscopio. Egli pensò di proiettare, separatamente e simultaneamente, i due fotogrammi dello stereogramma, l’uno sopra l’altro, su di uno schermo, facendo passare però i raggi di proiezione di uno dei due fotogrammi attraverso un vetro di un certo colore *C* (per esempio, rosso) e i raggi di proiezione dell’altro attraverso un vetro di colore *C’* (per esempio, verde): in tal modo i due fotogrammi,

---

oggetti vicini. In mancanza di queste lenti, potete utilizzare anche occhiali da lettura. Molte persone riescono a utilizzare convenientemente lo strumento anche privo di lenti e senza impiegare occhiali.”

[12] Leipzig, B.G. Teubner. Chr. Wiener, professore di Geometria descrittiva alla *Technische Hochschule* (poi *Technische Universität*) di Karlsruhe, dal 1852 al 1896, aveva cominciato a costruire modelli in gesso di superfici matematiche fin dal 1865.

sovrapposti, di uno stereogramma vengono a colorarsi con colori diversi formando perciò una *coppia stereoscopica* che può essere già considerata un anaglifo. Gli spettatori, attrezzati con degli *anaglittoscopi*, vale a dire con degli occhialini con vetri, di cui uno del colore *C* e l'altro del colore *C'* (per questo esempio, verde il vetro sinistro e rosso il destro: il riferimento è dato considerando gli occhialini così come li vede lo spettatore quando li ha inforcati agli occhi), osservano le immagini proiettate sullo schermo (la coppia stereoscopica): a questo punto, se essi guardassero con un occhio alla volta, non percepirebbero, con ciascun occhio, che una sola proiezione e la vedrebbero nera, mentre con tutte e due gli occhi schiusi vedono un'unica immagine, in rilievo, dell'oggetto iniziale.

L'idea delle proiezioni "fugaci" di Rollmann troverà una maggiore evoluzione negli anaglifi "durevoli" di Arthur-Louis Ducos du Hauron (1837-1920). Questi pensò (brevettando il metodo nel 1891) di sovrapporre l'uno sull'altro, spostandoli orizzontalmente sul piano di appoggio, i due distinti fotogrammi, i quali erano stati già colorati, della coppia stereoscopica, fino a sovrapporli: l'immagine finale così ottenuta fu chiamata, proprio da questo autore, *anaglifo*.

Un semplice anaglifo si può realizzare, per esempio, colorando le linee con cui sono tracciati i due tetraedri delle figg. 2-3 (in rosso per la fig. 2, che sta a sinistra, e in verde per la fig. 3, che sta a destra) e sovrapponendo le figure stesse. Si viene a comporre una "figura anaglifica" che osservata con gli occhialini bicolori (aventi, per esempio, il vetro sinistro verde e il vetro destro rosso) farà apparire il tetraedro originario in rilievo.

Volendo analizzare brevemente ma più in dettaglio il fenomeno della visione anaglifica, bisogna partire da un anaglifo realizzato, per esempio, con i colori rosso e verde e stampato su di un foglio bianco. Inforcando gli occhialini, già descritti, si innesca il seguente processo. All'occhio destro la figura in verde appare nera su sfondo rosso (chiaro) mentre la figura rossa, non distinguendosi più dallo sfondo rosso, è come se venisse cancellata. Allo stesso modo il fenomeno procede per l'occhio sinistro (schermato dal vetro verde dell'occhialino): la figura in rosso appare nera su sfondo verde (chiaro), mentre la figura verde viene cancellata. A questo punto si produce, elaborato dal cervello, l'effetto rilievo: lo sfondo, che dall'occhio destro era percepito di un colore rosso chiaro e dal sinistro invece in verde chiaro, assume una tinta neutra, scompare, mentre appare ergersi solo la figura dell'oggetto originario nelle sue tre dimensioni.

Per un solido geometrico reale, quale un tetraedro *T* di generico punto *O* (fig. 6), il fenomeno della visione anaglifica si può descrivere al seguente modo. Si è detto che uno stesso oggetto, come può essere *T*, non è visto da ciascun occhio (in figura, *S* è il sinistro e *D* il destro) sotto la stessa prospettiva, per cui il generico punto O del tetraedro reale corrisponde alle posizioni, pur esse generiche, che si vogliono denotare con O_S, per la visione con l'occhio sinistro S, e O_D per l'occhio destro D (la distanza O_SO_D sarà lo "scarto" tra le due posizioni o proiezioni). Posizioni che sono raccolte sul piano P e costruite per intersezione dei raggi visivi, passanti rispettivamente per SO e DO, con lo stesso piano. Siano chiamate con T_S e T_D le intere immagini prospettiche cui appartengono, rispettivamente, i punti generici O_S e O_D. Si colorino T_S e T_D, rispettivamente, in verde e in rosso. Se si allontana il tetraedro reale e si guardano le due immagini con occhialini aventi il vetro verde a sinistra e quello rosso a destra, il tetraedro reale ritorna come immagine virtuale: il generico punto reale O del tetraedro è ora rioccupato dal corrispondente *punto-immagine* virtuale.

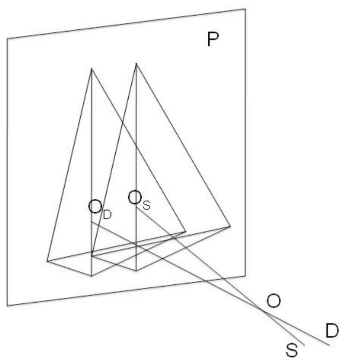

Fig. 6.

La fig. 7, ristretta allo studio del punto O, completa l'analisi del fenomeno.

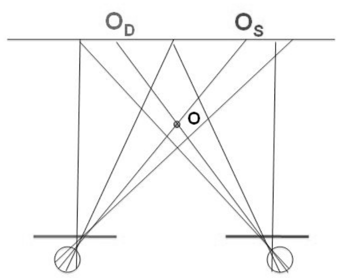

Fig. 7.

Immaginando la lente sinistra di colore verde e la lente di destra di colore rosso, quando si guarda l’immagine attraverso l’occhialino bicolore, il punto O_D del disegno, colorato in verde, è invisibile per l’occhio sinistro così come il punto O_S, in rosso, è invisibile per l’occhio destro. Il punto O_S appare nero all’occhio sinistro e, allo stesso modo, il punto O_D appare nero all’occhio destro. Entrambi gli occhi vedono solo quello che dovrebbero vedere se un oggetto reale apparisse alla posizione *O*.

3. - UN’INTRODUZIONE AL METODO GEOMETRICO

Un anaglifo guardato senza gli appositi occhialini (*anaglittoscopi*) appare solo come una immagine confusa e sbiadita: la sovrapposizione dei colori sfuma e sfigura tutta l’immagine; ma inforcati gli occhialini, lo spettacolo cambia completamente: la figura cessa di essere “doppia”, i colori scompaiono e si vede una immagine semplice, netta, dentro la quale si rivelano le distanze, le sporgenze, le rientranze.

Tra le applicazioni degli anaglifi vi è, si è detto, la rappresentazione di figure della geometria nello spazio. È il disegno, in aiuto al calcolo, che fornisce gli elementi della figura: la doppia prospettiva è tracciata su un foglio bianco. Osservando l’immagine con gli occhialini, la superficie bianca che serve da supporto svanisce e il solido geometrico si stacca, avanzando verso lo spettatore, lasciandosi dietro sia le facce che le linee, planando nello spazio come se fosse un modello materiale a tre dimensioni.

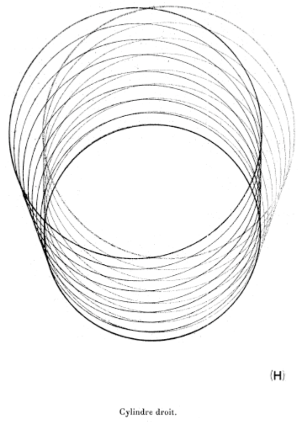

Fig. 8. Una pagina del lavoro di Vuibert che riproduce l’*anaglifo di un cilindro*.

In verità, specifica Vuibert, l'immagine non si rivela tutta d'un colpo all'osservatore non esercitato. Anche con un disegno ben costruito ed una luce abbastanza intensa, ci vuole spesso un istante d'attesa; quando l'accomodamento avviene, il cervello riunisce le due immagini, si comincia a riconoscere la figura; ma bisogna munirsi ancora di un po' di pazienza e continuare ad applicarsi per *godere* veramente dell'anaglifo: in certi momenti lo si può vedere sollevarsi, sembra di poterlo toccare con la mano. È una visione che colpisce in modo strano. La rapidità e la perfezione della visione di un anaglifo dipendono essenzialmente, per alcuni individui, dalla qualità della sua vista. Delle persone lo vedono quasi istantaneamente; alla maggior parte è necessario esercitarsi; altre, infine, non riescono mai a vederlo.

Opposta è la disposizione, al fine di ottenere lo stesso effetto di fluttuazione nello spazio, che si realizza con un *foglio per disegnare in 3D* (ovvero *3D drawing sheet*). In questo caso il foglio anziché essere bianco è fittamente quadrettato mediante linee rosse e verdi, orientate trasversalmente: è come se sul foglio si fossero quasi sovrapposti, orientandoli trasversalmente, due fogli di carta millimetrata, sfalsati di circa un millimetro, l'uno a linee rosse e l'altro a linee verdi; tracciando, con una normale penna a biro, preferibilmente di colore nero, una figura, se si vuole geometrica (per esempio, un prisma o una piramide) si vede, inforcando gli "occhialini rosso/verde", la figura sollevarsi dal foglio (che continua ad essere visto) e stagliarsi nello spazio.

Procedendo più innanzi nel suo trattatello, Vuibert dà un cenno al metodo geometrico per la costruzione di anaglifi.

Si consideri la ricerca della costruzione del punto O, punto-immagine, generico, dell'intera figura solida, virtuale, da costruire, note le posizioni O_S, per la visione con l'occhio sinistro S, e O_D per l'occhio destro D, impresse sul piano P (quindi noto lo "scarto" O_SO_D tra le due proiezioni). Dalla similitudine dei triangoli OSD e OO_SO_D possiamo dedurre la relazione:

$$\frac{\overline{O_SO_D}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{OO_S}}{\overline{OS}},$$

da cui, per la proprietà del componendo, di cui godono le proporzioni, si ha:

$$\frac{\overline{O_SO_D}}{\overline{SD}+\overline{O_SO_D}} = \frac{\overline{OO_S}}{\overline{OS}+\overline{OO_S}} = \frac{\overline{OO_S}}{\overline{SO_S}};$$

da quest'ultima si ricava infine $\overline{OO_S}$:

$$\overline{OO_S} = \overline{SO_S} \cdot \frac{\overline{O_SO_D}}{\overline{SD} + \overline{O_SO_D}} \quad . \quad (1)$$

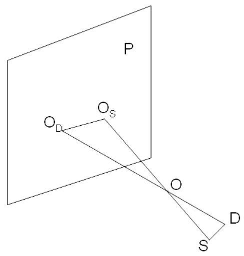

Fig. 9.

Si supponga che la figura solida da rappresentare sia posto di fronte all'osservatore e ad una certa distanza: si può dunque ammettere che $\overline{OO_D}$ è uguale a $\overline{OO_S}$ e che $\overline{DO_D}$ è uguale a $\overline{SO_S}$. Considerata la (1) e fissato una volta per tutte il valore di $\overline{SD}$ che è la distanza media (vale a dire lo "scarto") tra i due occhi, la formula permette allora di trovare, dato $\overline{SO_S}$, la posizione del generico punto-immagine O corrispondente ad un certo $\overline{O_SO_D}$. Un calcolo analogo dà le dimensioni dell'immagine in rilievo che corrispondono alle dimensioni delle prospettive tracciate sul piano.

Ad esempio: se l'osservatore è posto a 70 cm dal foglio di carta, una distanza tra le due prospettive di 2 cm darà un punto-immagine posto a 15,2 cm dal foglio, e un segmento di retta di cui ciascuna prospettiva misura 6 cm darà all'immagine in rilievo un segmento di 4,9 cm.

Inversamente, dalla (1) si può ricavare, nota la posizione del punto reale O, quale sia lo "scarto" O_SO_D, per un dato punto di vista.

4 - La realtà virtuale nella didattica

La visione stereografica e gli anaglifi sono ampiamente utilizzati oggi in una vasta varietà di applicazioni in geometria, chimica, architettura, per la conservazione dei beni culturali, nel cinema[13], nella realtà virtuale[14].

[13] Un'interessante applicazione degli anaglifi si ha nel cinema stereoscopico. L'anno di partenza di questo tipo di cinema può essere fissato al 1895 quando i fratelli Auguste e Louis Lumière realizzarono il film *L'arrivée du train en gare de la Ciotat* con "fotografia animata", dando l'illusione della terza dimensione, per cui il treno in moto sembrava venir fuori dallo schermo e

Scopo della realtà virtuale (*VR*) è quello di ricreare, sulla base di opportuno software affidato al computer, mondi e oggetti che sono la trasposizione digitale di ambienti reali o fantastici, in cui valgano l'interattività con il fruitore, la risposta del sistema in tempo reale e l'immersione.

La realtà virtuale, per sua stessa natura, assegna un ruolo centrale alle rappresentazioni visive, che possono ricoprire delle funzioni sia di facilitazione che di sostegno nei confronti degli altri tipi di rappresentazione simbolica: migliorano la comprensione, la rendono più rapida, permettono una più solida ritenzione, favoriscono la messa in evidenza di certi elementi; consentono di compiere delle operazioni mentali che non sarebbero eseguibili, o che lo sarebbero con difficoltà e/o con minor successo, attraverso le parole.

Per gli aspetti didattici, l'insegnante ha, attualmente, a sua disposizione numerosi nuovi strumenti che può utilizzare al fine di facilitare l'apprendimento da parte dello studente: *ipermedialità*, *reti* e *realtà virtuale*, i quali si associano e si fondono con i nuovi interessi che conducono alla costruzione della conoscenza, al cognitivismo, alla creatività.

In particolare, la *VR* deve essere intesa come un ambiente di apprendimento nel quale è possibile procedere alla costruzione di abilità percettivo-motorie e di concettualizzazioni logico-simboliche. Partendo dal presupposto che la conoscenza si costruisce, la realtà virtuale è, per sua struttura, idonea a costruzioni basate su dinamiche cognitive, fondate su un processo di apprendimento di tipo collaborativo e costruttivista. In questo contesto, le attività di *simulazione* giocano un ruolo fondamentale per perseguire tale obiettivo.

Sono numerosi gli studi che concordano sul fatto che la realtà virtuale ha un grande ruolo nell'insegnamento scolastico: le ragioni per usare la realtà

---

avviarsi verso gli spettatori, procurando loro un notevole sconcerto. Pur non potendo parlare ancora di "cinema 3d", si suole considerare la proiezione del film dei fratelli Lumière come inizio del cinema atto a creare la sensazione della terza dimensione. Per notizie su questo tema si può vedere il breve excursus storico sull'evoluzione delle tecniche stereoscopiche e sulle applicazioni in campo cinematografico e televisivo, dal titolo *Stereoscopia. Origini, cinema, televisione*, redatto da M. Barbero e M. Muratori, apparso su «Elettronica e Telecomunicazioni», n° 2, 2004 (reperibile anche in *http//www.crit.rai.it/elete/2004-2/42-1.pdf*).

[14] In quest'ultimo campo, recente è, per esempio, la realizzazione di un filmato in cui, attraverso la tecnica di visualizzazione stereoscopica, lo spettatore diventa visitatore condotto a girare per il sito virtuale (la sua origine reale risale all'età romana, eruzione del Vesuvio del 79 d. C.) di Moregine, a sud di Pompei. La realizzazione è stata coordinata dai professori Michele Nappi e Andrea Abate del Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università degli Studi di Salerno. Nappi è stato anche il relatore della tesi di laurea *Moregine: I beni culturali incontrano le nuove tecnologie*, redatta da Valerio Pappacena, corso di laurea in Scienze dell'Informazione, a.a. 2004-'05, Università degli Studi di Salerno. Scopo della tesi è stato quello di offrire una completa ricostruzione del sito archeologico (luoghi, oggetti, persone) usufruibile mediante una visita virtuale in un ambiente *VR* totalmente immersivo.

virtuale possono essere paragonabili a tutte le motivazione che si proporrebbero per usare la simulazione educativa bidimensionale assistita dal calcolatore, oggi abbastanza utilizzata nelle scuole, con la differenza che nello spazio tridimensionale, gli oggetti con cui l'utente può interagire sono molto più simili a quelli reali. Inoltre, i programmi di *VR* possono essere altamente motivanti, mentre il rischio di passività risulta pressoché impossibile: uno studente impegnato con un programma di realtà virtuale non può comportarsi da osservatore, la partecipazione attiva coinvolge l'utente nell'azione che è richiesta, gli alti livelli di interazione e individualizzazione promuovono un intenso interesse.

In definitiva, sembrano essere molteplici e diverse le ragioni per usare la realtà virtuale nell'educazione, poiché essa fornisce motivazione allo studente; può illustrare più accuratamente alcune caratteristiche o processi rispetto ad altri strumenti; consente di esaminare un oggetto da vicino, anche quando non se ne ha la disponibilità materiale; offre più possibilità all'intuizione; consente all'alunno di procedere secondo i propri tempi; richiede l'interazione, incoraggiando quindi la partecipazione attiva piuttosto che passiva; risulta uno strumento particolarmente gradito all'alunno e stimolante per l'apprendimento. Offre una nuova forma di esperienza che può essere al contempo divertente ed educativa.

Rory Stuart e John C. Thomas[15] elencano diverse *funzioni del virtuale nell'educazione*, che riguardano l'uso della Realtà Virtuale in una classe di studenti:

1. esplorare luoghi e cose esistenti ai quali gli studenti non avrebbero alcuna possibilità di accedere:
2. esplorare cose reali che, senza modificazioni di tempo e grandezza, non potrebbero essere in alcun modo esaminate: ci sono un certo numero di curricoli di *VR* che usano l'alterazione della grandezza o del tempo per conoscere gli oggetti;
3. creare luoghi e cose con caratteristiche modificate;
4. interagire con persone che sono in posti remoti del mondo, per condividere un interesse comune o per collaborare a progetti tra studenti;
5. interagire con una persona reale in modalità non-realistiche;
6. creare e manipolare rappresentazione concettuali astratte, come strutture di dati e funzioni matematiche.

Ancora, gli stessi studiosi affermano che ci sono almeno *due tipi di rappresentazioni nel virtuale*:

1. uso di scene naturalistiche per mostrare oggetti, attributi e relazioni;

---

[15] R. Stuart - J. Thomas, *The implications of education in cyberspace*, «Multimedia Review», vol. 2, n° 2, 1991, pp. 17-27.

2. uso di scene astratte nelle quali gli oggetti, gli attributi e le relazioni non sono come essi appaiono nel mondo reale, ma sono progettati per sottolineare relazioni concettuali.

Numerose sono le ricerche nell'ambito didattico coinvolgenti la realtà virtuale condotte per determinare se esiste «una relazione tra il percepito realismo delle immagini realizzate con la computer grafica e l'abilità dei bambini nota di risolvere i problemi spaziali». Tra queste, vengono proposti studi[16] che includono l'uso di sistemi per la realtà virtuale, ossia di *simulazione virtuale*. I bambini possono adoperare un sistema che permette loro di "entrare", "volare" e "muovere" oggetti in diversi ambienti virtuali. Le conclusioni di tali studi sono state, riassunte in poche parole, che «il cyberspazio è altamente promettente e merita un ampio sviluppo come strumento educativo». Ancora, vengono suggeriti come ulteriore utilizzo della *VR* nella scuola un «sistema di realtà mediata dal calcolatore»[17], nel quale l'utente interagisce con l'interfaccia del computer in un determinato luogo, mentre i comandi sono eseguiti, anche tramite un robot, in un altro luogo.

Le tecnologie oggi a disposizione e l'uso dei computer possono estendere e potenziare la funzione della scoperta come strategia didattica, proprio perché, come detto, dispongono della risorsa che sembra fatta apposta per esaltarne le prerogative: la simulazione.

L'uso della realtà virtuale può influenzare e trasformare l'apprendimento modificando fondamentalmente i contenuti di una materia e il modo in cui essa può essere insegnata e appresa. Per quanto concerne l'apprendimento, va osservato che la realtà virtuale, oltre ad ampliare le possibilità di accesso all'informazione, facilita la *comunicazione*, la *condivisione* e la *collaborazione* fra soggetti anche distanti permettendo la creazione di vere e proprie *comunità virtuali di apprendimento*.

5 - GENERAZIONE DI ANAGLIFI RELATIVI AI MODELLI DI SUPERFICI MATEMATICHE NELLA REALTÀ VIRTUALE

L'uso (anche molto sofisticato) che attualmente si fa degli anaglifi nella comunicazione per immagini, nel campo dell'informatica, ha fornito lo stimolo a rappresentare, mediante anaglifi, alcuni famosi modelli di superfici, in origine

[16] M.L. Merickel, *The Creative Technologies Project: Will Training in 2D/3D Graphics Enhance Kids' Cognitive Skills?*, «Technological Horizons in Education», vol. 18, 1990, pp. 55-58.

[17] Sandra Helsel, *A special issue on developing, applying, and evaluating the new Multimedia*, «Educational Technology Publications», vol. XXXII, 1992, pp. 38-42.

costruiti prevalentemente in gesso, e ideati da matematici e scienziati di prima grandezza tra la seconda metà dell'Ottocento e gli anni Trenta del Novecento[18].

5.1 - UN CENNO STORICO AI MODELLI DI SUPERFICI PRODOTTI DALLA SECONDA METÀ DELL'OTTOCENTO AGLI ANNI TRENTA DEL NOVECENTO

I modelli di superfici matematiche a cui si è accennato sono quelli che vennero costruiti tra la seconda metà del XIX secolo e i primi decenni del XX e utilizzati soprattutto nella didattica delle «matematiche superiori»; modelli che servivano anche a *far vedere* proprietà notevoli del tema di ricerca su cui si investigava e a *mostrare* alcuni risultati che progressivamente si conseguivano in diversi settori delle matematiche "pure" e "applicate": Geometria descrittiva e proiettiva, Geometria analitica, Geometria algebrica, Topologia, Teoria delle funzioni (anche a variabile complessa), Meccanica razionale, Fisica-matematica, Scienze delle costruzioni (senza dimenticare il loro impiego anche per scopi architettonici, scenografici, scultorei). I materiali impiegati per la costruzione erano diversi: ottone, gesso, filo di ferro o di fibra naturale, lamelle di legno, cartone, celluloide ed altri metalli.

Inizialmente la loro produzione era realizzata artigianalmente, soprattutto presso i laboratori annessi agli Istituti universitari; in seguito, grazie agli stessi Istituti ed al sorgere di laboratori extra-universitari, la diffusione dei modelli ebbe un notevole incremento, tanto che sorsero apposite case editrici le quali s'incaricarono, tra l'altro, di approntare dei cataloghi a stampa che venivano progressivamente aggiornati.

Alcuni modelli di questo tipo cominciarono ad essere costruiti in Europa in rapporto alle esigenze della Geometria descrittiva e, successivamente, proiettiva. La Francia (principalmente Parigi) fu il paese in cui vennero alla luce le prime collezioni, ma, superata la metà del secolo, si registra la forte attenzione che, presso vari centri culturali del Regno Unito, veniva prestata a tali modelli. Pochi anni dopo l'unificazione della Germania (1871), il fenomeno assunse un rilievo enorme: venne organizzata e ulteriormente

---

[18] Modelli matematici per i quali nell'articolo di N. Palladino (con F. Palladino), *Le Raccolte Museali Italiane di Modelli per l'Insegnamento delle Matematiche Superiori. Catalogo generale e sito Web*, «Nuncius» (Istituto e Museo di Storia della Scienza di Firenze), vol. XVI, 2001 sono dati i riferimenti conclusivi di un lavoro di indagine e di studio durato molti anni e, in aggiunta, è pure offerta un'ampia bibliografia nella quale sono elencati pubblicazioni che documentano in qual modo gli stessi modelli, oltre a celebrare veri e propri traguardi con cui era scandita tanta parte della ricerca nelle scienze matematiche, avessero frequentemente una notevole espressione estetica e fossero fonte di ispirazione per pittori, scultori, scenografi, architetti.

incentivata la produzione degli istituti matematici, fisici, tecnico-meccanici e geodetici esistenti presso le università e i politecnici germanici e, quindi, una ditta (una casa editrice: quella di Ludwig Brill, fondata a Darmstadt nel 1877, poi continuata da Martin Schilling in Halle an der Saale, dal 1899, e successivamente trasferita a Lipsia fino al termine della sua attività, avvenuto negli anni Trenta del XX secolo) divenne centro di raccolta, con un catalogo unico suddiviso per serie formate quasi sempre da modelli scientificamente affini i quali venivano ideati e, spesso, costruiti presso una certa sede sotto la guida di un professore[19]: la distribuzione, specialmente dei modelli in gesso, si irradiò così per la Germania, successivamente per l'Europa e, verso la fine dell'Ottocento, massicciamente si diffuse anche negli Stati Uniti d'America e persino in Giappone (intorno al 1910).

Iniziative importanti sono da segnalare in Francia: negli anni Venti del XIX secolo, quella di Irmond Bardin[20] e quella di Théodore Olivier[21] che costruì una serie di modelli in filo di superfici rigate, per alcune delle quali la conformazione non era fissa ma era possibile variarla. Più ampia e consistente fu l'impresa di Charles Muret[22], autore di *Collections* delle quali fu edito un *Catalogue*, contenente almeno 323 realizzazioni, diffuso dall'editore parigino Charles Delagrave.

Alcuni appuntamenti espositivi di particolare rilevanza permettono di avere una misura degli interessi dei matematici. Uno di questi fu promosso in Gran Bretagna dal *Dipartimento di Scienze ed Arte*, costituito nel 1853 e posto, nel 1856, sotto la direzione del *Comitato del Consiglio per l'Educazione.* Furono proprio i *Lords* del *Committee* a deliberare, il 22 gennaio del 1875, la formazione di una *Loan Collection of Scientific Apparatus*. L'esposizione londinese, aperta a maggio del 1876 e che doveva essere allestita nelle sale del *South Kensington Museum* (da cui ha avuto origine l'attuale *Science Museum*), fu, a causa del gran numero di oggetti provenienti dal Regno Unito e dal

---

[19] Il nome dato al catalogo era: *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht*. Esso era diviso in due parti; nella prima, i modelli erano ordinati per serie (nell'edizione del 1911 le serie erano 40 più una serie iniziale, o serie zero, non numerata, di modelli costruiti in cartone); nella seconda parte, i modelli erano omogeneamente raggruppati tenendo conto del loro legame scientifico.

[20] Irmond Bardin (1794-1867) fu allievo dell'*École Polytechnique* e poi anche "libero docente" di un corso di Geometria descrittiva e di scienze applicata all'industria (collaborò anche con Jean-Victor Poncelet) per la costruzione di modelli per lo studio della Geometria descrittiva.

[21] Théodore Olivier (1793-1853) fu anch'egli allievo dell'*École Polytechnique* e poi professore di Geometria descrittiva al *Conservatoire des Artes et Métiers.*

[22] Charles Muret era ingegnere della città di Parigi (vincitore della medaglia d'oro all'*Esposizione mondiale di Anversa* del 1885 per un modello plastico del *Canale interoceanico di Panama*).

continente europeo, allestita invece, in questa circostanza, nelle più vaste "galleries on the western side of the Horticultural Gardens" messe a disposizione dai commissari che avevano curato l'*Exhibition of the Works of Industry of all Nations* del 1851.

Un altro importante evento organizzato ancora nel Regno Unito fu l'esposizione di Edimburgo del 1914 (la *Napier Tercentenary Exhibition* avutasi in occasione del tricentenario della pubblicazione dell'opera di Nepero *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*), dove oltre a libri, strumenti e apparecchi per il calcolo numerico e grafico, furono esposti modelli di superfici matematiche.

La più importante esposizione internazionale riguardante modelli, apparecchi e strumenti della matematica e della fisica-matematica fu probabilmente quella che si svolse in Germania, a Monaco di Baviera, nel 1893, per il convegno dell'associazione dei matematici tedeschi, la *Deutsche Mathematiker–Vereinigung.* Per l'occasione fu edito a cura di Walther Dyck (1856-1934) un *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente* da considerarsi come una sorta di *summa* teorico-documentale, di assoluto valore internazionale, in cui furono elencati e illustrati tutti i pezzi provenienti dai cataloghi specialistici (compreso l'importantissimo *Catalog* di Ludwig Brill) fino alle singole, interessanti realizzazioni eseguite da isolati autori.

L'Italia non ebbe un ruolo di primo piano nell'ideazione e costruzione di modelli. Ad esempio, l'allora giovane professore dell'Università di Padova, Giuseppe Veronese -1854-1917- (era stato per un anno –1880-'81– a perfezionarsi in Germania) si fa promotore, nel Novembre del 1883, di una relazione al Ministro della Pubblica Istruzione, Guido Baccelli, a conclusione della quale viene chiesto che presso l'Università dove insegna si possa aprire un "atelier" per costruire modelli matematici, simile a quelli che funzionano in altri paesi europei, in modo da permettere alle istituzioni universitarie italiane di poter ottenere con minor spesa e senza dover ricorrere ad acquisti all'estero, la strumentazione utile per "fare matematica"[23].

I finanziamenti non si trovarono e l'*atelier* non s'impiantò. Le università italiane continuarono ad acquistare il grosso delle loro collezioni all'estero. Tuttavia, in qualche sede si sviluppò una notevole produzione di modelli. è

[23] F. Palladino, *Il Fondo di modelli e strumenti matematici antichi dell'Università di Padova e l'iniziativa di Giuseppe Veronese per un Laboratorio nazionale italiano*, Padova, Università degli Studi, Dipartimento di Matematica pura ed applicata, 1999, pp. 109.

questo il caso, ad esempio, di Napoli, ad opera essenzialmente di Alfonso Del Re (1859-1921), ordinario di Geometria descrittiva[24].

5.2 GENERAZIONE DI ANAGLIFI

Nonostante l'oblio a cui furono sottoposti i modelli di superfici durante gli ultimi, passati decenni e nonostante che essi sembrino non far più parte della nostra cultura matematica universitaria, oggi le antiche collezioni di modelli possono invece ancora suscitare notevole interesse, grazie alla loro idoneità ad illustrare proprietà caratterizzanti teorie, a fornire concretezza ad un risultato, come convalida e conforto all'intuizione e per la loro accessibilità all'esperimento.

Ricostruire una superficie al computer ed in più visualizzarla mediante *VR* o come *anaglifo* può essere una possibilità molto interessante per sfruttare a pieno le potenzialità della *VR* e dei software matematici nelle applicazioni didattiche.

Volendo oggi rappresentare delle superfici nello spazio tridimensionale con la stessa modalità utilizzata da Vuibert, s'è adoperato, per la riproduzione delle immagini tridimensionali, il *VRML*. Il *VRML* ("Virtual Reality Modeling Language") è un linguaggio ad alto livello che consente di rappresentare oggetti e di navigare in modo interattivo in spazi a tre dimensioni; ovvero di modellare ambienti per la realtà virtuale. Permette la realizzazione di ambienti virtuali in cui l'utente può interagire con gli oggetti presenti nella scena, definendo la dinamica e la modalità d'interazione, mentre le sue recenti estensioni consentono la modellazione di oggetti ed animazioni con altissimo livello di realismo, tramite l'introduzione delle curve *spline* al posto delle classiche poligonali.

---

[24] Si vuol mettere in evidenza che anche Alfonso Del Re conosce e menziona lo scritto di Vuibert *Les Anaglyphes géométriques* (vedi *Sulla visione stereoscopica e sulla stereo-fotogrammetria*, Rendiconto dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche, LIII, serie 3°, vol. XX). Ancora, sempre presso l'Università di Napoli, Federico Amodeo (1859-1946), nel suo articolo *Rappresentazione stereoscopica delle figure dello spazio nel piano* (apparso nella rivista *Le matematiche pure e applicate* –diretta da Cristofaro Alasia–, II, 1902 ma si cita dall'opuscolo stampato a parte, l' "estratto", che si è avuto modo di consultare), presenta tre tavole in cui sono raffigurate graficamente tre distinte figure solide con la tecnica della *Rappresentazione stereoscopica* (vale a dire "quella ottenuta mediante una *doppia proiezione centrale* fatta sul quadro –cioè sul piano, n.d.r.– da due centri di proiezione situati su una parallela al quadro"). Le tavole sono staccabili e pronte ad essere osservate mediante uno stereoscopio. In questo suo articolo Amodeo guarda alle fotografie stereoscopiche come a un valido sostituto delle "raccolte di modelli, che tanto splendidamente si eseguono in Darmstadt per le scuole e per gli individui che non hanno sufficienti mezzi per provvedersene".

Per diffondere l'uso del *VRML* e facilitare la costruzione di oggetti e scene in *3D*, sono stati costruiti numerosi ambienti di sviluppo, disponibili sia gratuitamente sia in versione commerciale; inoltre, i più diffusi programmi per la modellazione di oggetti *3D* consentono di salvare le scene direttamente in *VRML*, ossia in file *ASCII* con estensione *wrl*.

Viene ora descritta la procedura che è stata eseguita per la generazione di anaglifi di alcune famose superfici che erano già state riprodotte nel passato come modelli matematici. La prima superficie che intendiamo esaminare è la pseudosfera. Eugenio Beltrami (1835-1900)[25], che aveva fornito un modello della geometria di Lobacevskij, provvide alla costruzione (nel 1869), utilizzando sostanzialmente la carta, di un modello a conformazione variabile che avrebbe dovuto rappresentare i tre tipi di superficie pseudosferica (iperbolica, ellittica, parabolica).

La superficie pseudosferica ha un'equazione non polinomiale ed è un esempio di superficie a curvatura gaussiana costante negativa. Storicamente, essa è particolarmente interessante perché fornisce un modello di spazio in cui la geometria non è più quella euclidea. Ideata da Beltrami, come si è detto, diede nuovo impulso alla geometria "immaginaria" elaborata da Lobacevskij poiché ne rappresenta un modello "locale": è stato il primo modello, per quanto molto discusso[26], proposto per le geometrie non euclidee. La curva meridiana, da cui la pseudosfera è generata mediante rotazione intorno all'asintoto della curva medesima, è la *trattrice*, definita come il luogo dei punti del piano tali che i segmenti di tangente compresi tra essa e una retta (l'asintoto) hanno lunghezza costante:

---

[25] Dalla corrispondenza scientifica di Eugenio Beltrami, emerge anche che egli insiste sulla duplice valenza dei modelli di superfici matematiche, sia come strumento di verifica per risultati già raggiunti, sia come strumento di ricerca. Per i dettagli, si può consultare Livia Giacardi, *La collezione e la sua storia*, in "La collezione dei modelli geometrici della Biblioteca di Matematica Giuseppe Peano", a cura di Giorgio Ferrarese, reperibile al sito *http://www.dm.unito.it/modelli*; si veda inoltre A.C. Capélo, M. Ferrari, *La «cuffia» di Beltrami: storia e descrizione*, «Bollettino di Storia delle Scienze matematiche», II, 1982, pp. 233-247.

[26] Si possono consultare alcune lettere di Angelo Genocchi a Enrico Betti presentate in N. Palladino, A.M. Mercurio, F. Palladino, *Per la costruzione dell'Unità d'Italia. Le corrispondenze epistolari Brioschi-Cremona e Betti-Genocchi*, Firenze, Olschki, 2009, p. XVII, e L. Boi, L. Giacardi, R. Tazzioli, *La découverte de la géométrie non euclidienne sur la pseudosphère*, Paris, A. Blanchard, 1998.

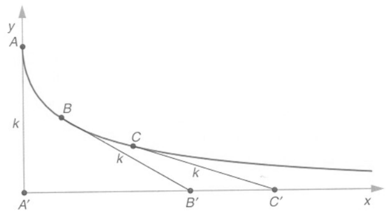

Fig. 10. Curva trattrice

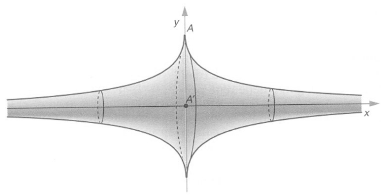

Fig. 11. Pseudosfera generata dalla rotazione della trattrice intorno al suo asintoto

L'equazione parametrica della superficie è:

$$\begin{cases} x(u,v) = \cos(u) * \sin(v) \\ y(u,v) = \sin(u) * \sin(v) \\ z(u,v) = \cos(v) + \log(\tan(v/2)) \end{cases}$$

con $0 \le u \le 2\pi$ e $0 < v < \pi$.

Altre importanti superfici di cui furono costruiti modelli e delle quali intendiamo generare l'anaglifo sono la famosa *Superficie romana di Steiner* (*Die römische Fläche von Steiner)* e l'altrettanto celebre *Superficie diagonale* (*Diagonalfläche*) di Clebsch.

La *Superficie romana di Steiner* è così detta perché fu ideata da Jacob Steiner (1796-1863) durante un suo soggiorno a Roma[27]; essa è una superficie razionale del quarto ordine e di terza classe, a simmetria tetraedale, di equazione cartesiana $x^2y^2 + y^2z^2x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz = 0$. La *Superficie diagonale* va considerata come la superficie principale tra quelle regolari (ovvero lisce, vale a dire senza punti singolari) del terzo ordine: esse contengono 27 rette ma solo per la *Diagonalfläche* tutte quante queste rette sono distinte e reali.

---

[27] La nascita della *Superficie romana* ha notevolmente incuriosito i matematici. tra le varie testimonianze in proposito, si può citare quanto segue: Francesco Gerbaldi, nella Prefazione al suo articolo *La Superficie di Steiner studiata sulla sua rappresentazione analitica mediante le forme ternarie quadratiche*, scrive: "La superficie di 4° ordine e 3ª classe non sviluppabile, che ha nome dal sommo Steiner, è stata da lui scoperta circa il 1838 (secondo Weierstrass), quando trovavasi a Roma col Jacobi; per questo fu anche detta la *superficie Romana*" (si cita da un opuscolo a parte, ovvero un "estratto" stampato a Torino, Stamperia reale di I. Vigliardi, nel 1881). Nella corrispondente nota a pie' di pagina, Gerbaldi aggiunge: "Questa notizia storica mi fu comunicata dall'egregio Prof. Beltrami".

S’è scelto, ancora, di ricostruire, tra gli antichi modelli contenuti negli importanti cataloghi tedeschi su menzionati, tra i tre modelli di superfici di Riemann (*Modeile einiger Riemann'schen Flächen*), la *Superficie di Riemann a 2 fogli, dotata di 1 punto di diramazione del primo ordine e semplicemente connessa* (*Zweiblättrige einfach zusammenhängende Riemann’sche Fläche, welche in ihrem Innern einen Windungspunkt erster Ordnung enthält*).

A partire dalle equazioni a disposizione, il primo passo per la realizzazione di anaglifi è stato riprodurre le superfici mediante *Mathematica*®, un programma di software matematico che consente di generare superfici sotto forma di oggetti grafici che possono essere rielaborati graficamente con software per la modellazione *3D*.

Per trasformare poi le superfici così ricostruite in oggetti grafici tridimensionali manipolabili nella realtà virtuale, è stato utilizzato il package *MathGL*®, che permette di esportare gli oggetti di *Mathematica* in oggetti *VRML*.

MathGL è un package di funzioni grafiche che si connette a *Mathematica* e consente di visualizzare oggetti con un'elevatissima qualità grafica. Tramite la tecnica di *texturing*, che consiste nel proiettare su una superficie una rappresentazione bidimensionale di un materiale, *MathGL* conferisce ad un oggetto in *3D* un aspetto realistico.

Seguendo allora quanto raccomandato da Vuibert per le esigenze della didattica, dopo aver ottenuto la superficie tridimensionale, s’è creato l’anaglifo di ognuna delle superfici realizzate, modificando ancora il codice *VRML* e creando delle nuove superfici nella maniera che segue:

```
        Shape {
                appearance Appearance { material Material {emissiveColor 0 1 1}
  }
         geometry IndexedLineSet
         {
                coord Coordinate
                        {
                                point [ … ]
             }
                coordIndex [ … ]
           }
        }
```

```
        Shape {
                appearance Appearance { material Material {emissiveColor 1 0 0}
  }
         geometry IndexedLineSet
```

```
{
        coord Coordinate
                {
                        point [ … ]
            }
        coordIndex [ … ]
    }
}
```

Utilizzando tale tecnica, il risultato è un anaglifo di una superficie tridimensionale (dai colori rosso e ciano), manipolabile nello spazio *3D* tramite *plug-in VRML*. Nelle figure seguenti, sono riportate seppur in bianco e nero, alcuni esempi di immagini delle superfici riprodotte.

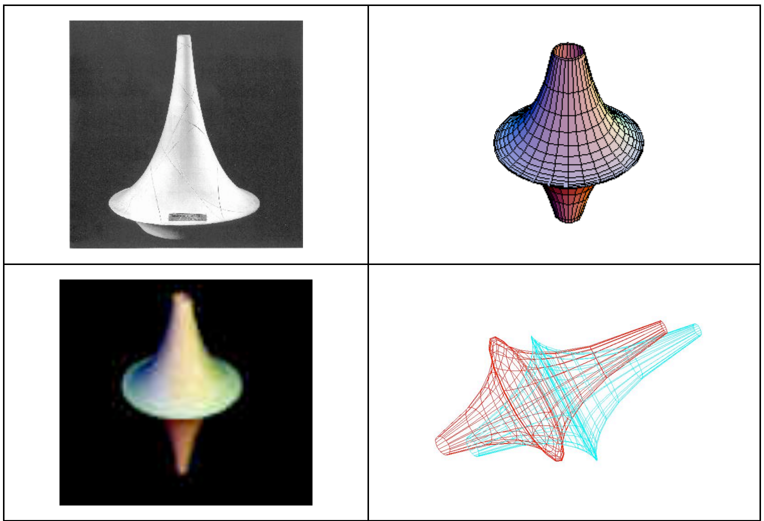

Fig. 12. Dall’alto a sinistra, in senso orario: modello originale della *Superficie pseudosferica*, ricostruzione mediante *Mathematica*, anaglifo della superficie, ricostruzione mediante *VRML*.

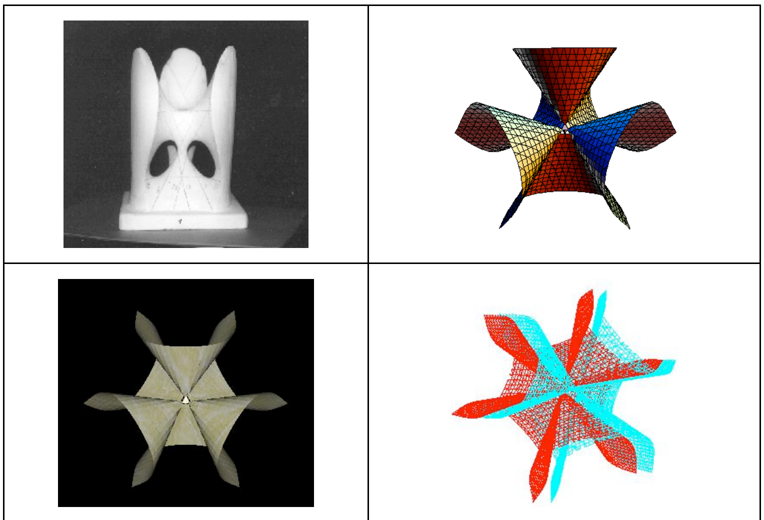

Fig. 13. Dall’alto a sinistra, in senso orario: modello originale della *Superficie diagonale*, ricostruzione mediante *Mathematica*, anaglifo della superficie, ricostruzione mediante *VRML*.

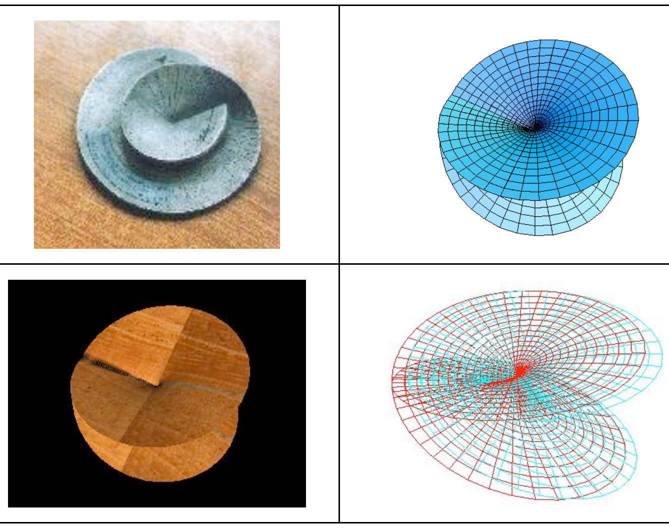

Fig. 14. Dall'alto a sinistra, in senso orario: modello originale della *Superficie di Riemann*, ricostruzione mediante *Mathematica*, anaglifo della superficie, ricostruzione mediante *VRML*.

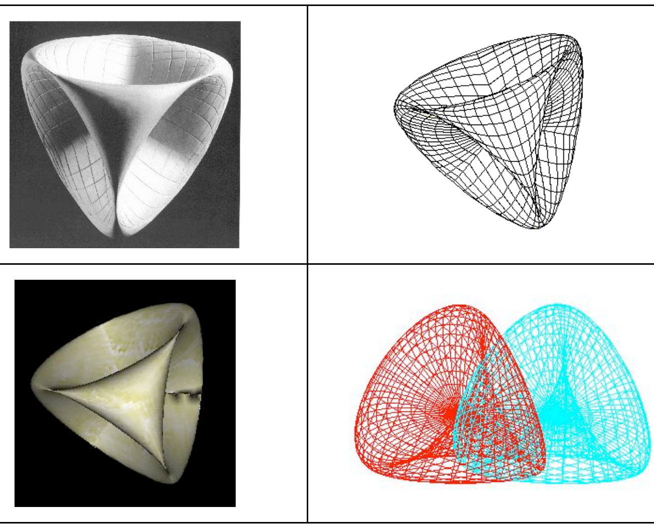

Fig. 15. Dall'alto a sinistra, in senso orario: modello originale della Superficie di Steiner, ricostruzione mediante *Mathematica*, anaglifo della superficie, ricostruzione mediante *VRML*.