



Università degli Studi di Palermo

Dipartimento di Matematica e Informatica

Dottorato di ricerca in

MATEMATICA E INFORMATICA

- XXIV CICLO -

FORMAZIONE DI PATTERN

PER IL PROCESSO DELL'ELETTRODEPOSIZIONE

IN MODELLI DI TIPO REAZIONE-DIFFUSIONE

Candidato

SALVATORE LUPO

Relatore

PROF. MARCO SAMMARTINO

Coordinatore

PROF.SSA LUISA DI PIAZZA

Settore Scientifico Disciplinare MAT/07

TRIENNIO 2011-2013

Indice

Ringraziamenti	1
Introduzione	2
1 Pattern in sistemi di tipo reazione-diffusione	7
1.1 Biforcazione di Turing	11
1.2 Biforcazione di Hopf	13
2 L'elettrodeposizione	14
2.1 Derivazione del modello	14
2.2 Analisi di stabilità lineare	18
2.2.1 Pattern di Turing	19
2.2.2 Pattern oscillanti	24
3 Analisi debolmente non lineare	26
3.1 Il caso supercritico	30
3.2 Il caso subcritico	31
3.3 Onde viaggianti	34
3.4 Equazioni di ampiezza complesse	35
4 Formazione di pattern in un dominio $2D$	44
4.1 Analisi debolmente non lineare	45
4.1.1 Autovalore semplice, $m = 1$	46
4.1.2 Autovalore doppio e termini secolari a $O(h^3)$	48
4.1.3 Autovalore doppio e termini secolari a $O(h^2)$	50

5	Simulazioni numeriche e confronti tra le soluzioni	52
5.1	Autovalore semplice	52
5.2	Autovalore doppio e termini secolari a $O(h^3)$	54
5.3	Autovalore doppio e termini secolari a $O(h^2)$	59
A	Derivazione dell'equazione di Stuart-Landau $1D$	61
B	L'equazione di Stuart-Landau al V ordine $1D$	67
C	Equazione di Ginzburg-Landau	74
D	Equazione complessa di Ginzburg-Landau	76
E	Analisi debolmente non lineare nel caso $2D$ ($m = 1$)	80
F	Analisi debolmente non lineare nel caso $2D$ ($m = 2$)	87
F.1	Autovalore doppio e condizioni di non risonanza	87
F.2	Autovalore doppio e condizioni di risonanza	90
	Bibliografia	93

Ringraziamenti

A conclusione di questo triennio desidero ringraziare alcune persone per il loro fondamentale contributo che ha reso possibile la stesura di questo lavoro di tesi di dottorato.

Innanzitutto un sincero ringraziamento va al mio advisor, prof. Marco Sammartino, che con pazienza e piena disponibilità mi ha sempre suggerito preziosi consigli. Forse non esistono parole che possano esprimere la mia immensa gratitudine e riconoscenza nei suoi confronti.

Desidero ringraziare altresì la dott.ssa Gaetana Gambino, alla quale devo molto per i suoi incoraggiamenti e per avermi insegnato delle utili tecniche di lavoro, trasmettendomi molta serenità ed entusiasmo.

Un doveroso ringraziamento è rivolto alla prof.ssa Maria Carmela Lombardo, per la quale ho sempre nutrito sentimenti di profonda stima e ammirazione, che con gentilezza e professionalità mi ha sempre dato suggerimenti molto utili in contesti diversi.

Desidero anche ringraziare il dott. Vincenzo Sciacca per il suo fondamentale supporto nell'implementazione dei metodi numerici al computer.

E poi il dott. Francesco Gargano che con la sua simpatia ha contribuito a rendere più piacevoli le giornate trascorse in dipartimento.

E all'elenco non posso non annoverare anche l'attuale Direttore del Dipartimento, prof. Camillo Trapani, che ha permesso di poter usufruire di spazi più confortevoli e di disporre di strumentazioni nuove, e la coordinatrice del Dottorato di ricerca, prof.ssa Luisa Di Piazza, la quale ha mostrato sempre molta attenzione alle singole richieste sollevate, adoperandosi prontamente.

Un ultimo ringraziamento va ai miei genitori che hanno sempre creduto in me e a mio fratello Nino che ha sempre gioito di ogni mio successo.

Introduzione

La natura genera una numerosa quantità di strutture organizzate, come la colorazione a strisce di una zebra o la distribuzione delle macchie sul mantello di una giraffa o ancora la formazione delle dune di sabbia nei deserti, la ramificazione degli alberi, fino alla formazione di cristalli speciali come i fiocchi di neve (Vedi Figura 1).

Tutti questi fenomeni, a dispetto della loro diversa origine, sono accomunati da una stessa teoria modellistica che costituisce il punto di partenza del fenomeno chiamato formazione di pattern.

Il matematico inglese Alan Turing (1952), nell'articolo "*The chemical basis of morphogenesis*", mostrò che, sotto certe condizioni, determinati componenti chimici possono reagire e diffondere in modo tale da produrre distribuzioni spaziali di concentrazione di elementi chimici o morfogeni, non omogenei nello spazio: i pattern.

Oggetto di questa tesi è lo studio della formazione dei pattern per sistemi di reazione-diffusione soggetti ad instabilità in prossimità di un punto di equilibrio del sistema.

Nelle situazioni più semplici, come quelle che considereremo in questo lavoro, i pattern emergono dall'interazione di due sostanze, dette attivatore e inibitore: l'attivatore, che si suppone si diffonda lentamente, favorisce la crescita dell'inibitore; l'inibitore, al contrario, che supponiamo si diffonda più rapidamente, rallenta la crescita dell'attivatore. In assenza di diffusione, un tale sistema tenderebbe all'equilibrio omogeneo all'aumentare del tempo.

Il fatto che le due sostanze (dette morfogeni) si diffondano con velocità molto diverse destabilizza l'equilibrio e può portare alla formazione di pattern regolari.

Poiché la diffusione è solitamente un elemento stabilizzante, la dimostrazione di Turing risultò piuttosto sorprendente [1].

Per dare una spiegazione qualitativa del fenomeno, Murray in [2] descrive il seguente scenario.

Consideriamo un campo di erba secca nel quale si annida un gran numero di cavallette. Sottoposte a forte calore, queste ultime generano un alto tasso di umidità per sudorazione.

Supponiamo che in un certo punto del campo si dia fuoco all'erba e che quindi un fronte di combustione comincia a propagarsi. Pensiamo al fuoco come attivatore e alle cavallette (o meglio l'umidità da esse prodotta) come inibitore.

Se non si creassero zone umide, il fuoco si propagherebbe ovunque e si raggiungerebbe uno stato di carbonizzazione uniforme.

Supponiamo invece che all'avvicinarsi del fuoco le cavallette creino zone umide che attenuino fino ad estinguere il fuoco. Quindi, quando il fuoco raggiunge queste zone l'erba non brucia.

Lo scenario è allora il seguente. Il fuoco comincia a diffondersi con coefficiente, diciamo, D_f . Quando le cavallette sentono il fronte avvicinarsi, cominciano a muoversi velocemente con un coefficiente D_c maggiore di D_f .

Contemporaneamente le cavallette generano una zona umida nella quale il fuoco non si propaga. In questo modo, la zona carbonizzata è delimitata dalla zona umida e la dimensione di questa area dipende dai coefficienti di diffusione e dai vari parametri che entrano nelle reazioni chimiche.

Se invece di un singolo fuoco ci fosse un'accensione in vari punti distribuiti in modo casuale, il processo descritto condurrebbe alla fine ad una configurazione spaziale non omogenea, ma costituita da zone arse e zone umide.

Se le cavallette si diffondessero alla stessa velocità del fuoco, quest'ultimo tipo di configurazione non potrebbe essere possibile.

Turing fu il primo che cercò di spiegare teoricamente la formazione di tali strutture, al fine di rispondere alla principale domanda della Morfogenesi: *Come da una singola cellula può autonomamente svilupparsi un organismo complesso, diversificato e unico?*

In questa tesi, viene precisamente analizzato un caso particolare di formazione di pattern, quello della crescita di una superficie attraverso processi di elettrodeposizione. Oltre ai pattern di Turing, nell'ambito delle reazioni chimiche, qualche volta, sono state osservate delle oscillazioni, che si presentano quando il parametro di biforcazione (di Hopf) supera un certo valore soglia, dando origine ad un moto periodico.

Essi hanno sin da subito riscosso molta ammirazione. Come spiegato in [3], forse, ciò che rende le reazioni chimiche così affascinose ai chimici è che esse sembrano contraddire il senso comune: l'esperienza ci dice che, sotto un dato insieme di condizioni, le reazioni chimiche vanno in una sola direzione. Le reazioni oscillanti, invece, oscillano da un punto di equilibrio all'altro, contravvenendo al secondo principio della termodinamica che asserisce che, una volta raggiunto un punto di equilibrio, un sistema chimico non può deviare da esso spontaneamente.

Il seguente lavoro è suddiviso in cinque capitoli.

Nel primo capitolo viene presentato un sistema di reazione-diffusione generico al fine di far emergere le caratteristiche essenziali sui parametri significativi che sono responsabili della formazione dei pattern. Il sistema è studiato sia nel caso in cui ammette biforcazione di Turing sia nel caso in cui si ha una biforcazione di Hopf.

Nel secondo capitolo viene studiato il sistema di reazione-diffusione proposto da Bozzini, Lacitignola e Sgura nel loro articolo [4], concernente il processo di elettrodeposizione per il ricoprimento di metalli con oro. Esso consiste di due equazioni accoppiate, una per la dinamica morfologica e l'altra per la dinamica della concentrazione chimica sulla superficie.

Inoltre viene svolta un'analisi lineare del modello per studiare gli equilibri del sistema ed essere in grado di determinare le condizioni a cui devono soddisfare i parametri del sistema al fine di garantire la formazione dei pattern.

L'analisi di stabilità lineare risulta particolarmente preziosa in quanto rappresenta il modo più semplice per fare previsioni che possono essere verificate sperimentalmente e inoltre consente di determinare i parametri di biforcazione oltre i quali si sviluppa l'instabilità.

Tuttavia, arrestarsi solo ad un'analisi lineare renderebbe il metodo eccessivamente grossolano se si pensa che le soluzioni esponenziali ottenute hanno significato fisico solo localmente, cioè in prossimità dell'equilibrio.

Per predire la forma e l'ampiezza del pattern occorre includere anche i termini non lineari.

Il terzo capitolo sarà dunque incentrato sull'analisi debolmente non lineare, in cui si farà uso del metodo perturbativo delle scale multiple, che permette di separare le variabili temporali veloci da quelle lente. Tale separazione è cruciale in quanto le deformazioni che avvengono su scala veloce sono regolate dall'analisi lineare, mentre le variazioni su scala lenta evolvono secondo le cosiddette equazioni di ampiezza.

Tale approccio consente in ultima analisi di determinare l'equazione di Stuart-Landau, un'equazione differenziale ordinaria, la risoluzione della quale fornisce il valore dell'ampiezza cercato e quindi anche l'espressione per ricavare la forma del pattern.

Ci sono dei casi in cui mantenere il formalismo della teoria delle biforcazioni fa trascurare un fatto di considerevole importanza fisica. Ciò accade quando la dimensione del sistema del dominio spaziale è molto grande.

In tal caso, infatti, le tecniche formali della teoria delle biforcazioni applicate in prossimità del valore critico del parametro di biforcazione hanno piena validità solo in un range assai ristretto del parametro attorno al suo valore critico.

In tale situazione, oltre ai numeri d'onda critici che diventano instabili, appena il parametro di biforcazione si discosta dal suo valore soglia, viene introdotto un grande numero di gradi di libertà.

Nasce quindi l'esigenza di generalizzare l'equazione di Stuart-Landau in modo che possa contemplare pure questa circostanza.

Il metodo ideato per assolvere a tale richiesta è stato quello di considerare anche per la variabile spaziale la separazione tra scale lente e veloci.

La corrispondente equazione di ampiezza prende il nome di equazione di Ginzburg-Landau.

Le stesse equazioni di ampiezza sono a coefficienti complessi nel caso in cui il pattern emerge da una biforcazione di Hopf.

Uno studio certamente più interessante, sebbene molto più complesso, riguarda i modelli bidimensionali.

Con l'aiuto della teoria delle biforcazioni, nel quarto capitolo, mostriamo che lo stesso modello su un dominio bidimensionale può esibire vari tipi di pattern complessi, qualche volta osservati in natura: strisce, rombi, esagoni e pattern misti più complessi.

Esempi di formazioni di tali strutture sono state studiate, ad esempio, con riferimento alla pelle dei vertebrati che forma strutture specializzate come i capelli, le squame, le piume e le ghiandole [5, 6].

Per avere un'idea migliore dei possibili pattern, esaminiamo il sistema e da un punto di vista analitico e da quello numerico, in prossimità del punto di biforcazione.

Nel quinto e ultimo capitolo consideriamo esempi specifici per ciascun caso analizzato nel capitolo precedente e, tramite dei codici numerici, rappresentiamo i pattern risultanti assieme ai corrispondenti spettri della soluzione numerica.

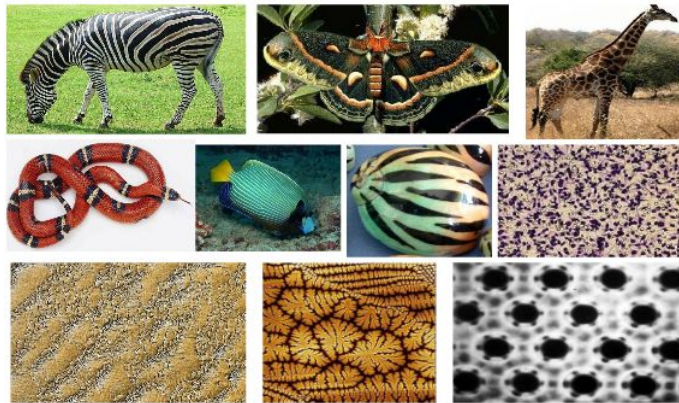


Figura 1: Esempi di pattern in natura.

Capitolo 1

Pattern in sistemi di tipo reazione-diffusione

Prima di formulare una teoria matematica dell'instabilità lineare e discutere le applicazioni, consideriamo una generica equazione di reazione-diffusione che permetta di evidenziare i concetti essenziali.

Il più semplice caso possibile si ottiene eliminando i dati al contorno laterali, usando condizioni al contorno infinite o periodiche.

Vogliamo derivare le condizioni necessarie e sufficienti che garantiscono la formazione del pattern di Turing.

$$\begin{cases} u_t = f(u, v) + D_1 \nabla^2 u \\ v_t = g(u, v) + D_2 \nabla^2 v \end{cases} \quad (1.1)$$

o in forma vettoriale

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{f}(\mathbf{u}) + D \nabla^2 \mathbf{u},$$

dove

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}.$$

Questa equazione descrive l'evoluzione di due concentrazioni u e v che sono funzioni di una coordinata spaziale e del tempo.

Le funzioni non lineari $f(u, v)$ e $g(u, v)$ sono i termini di reazione non lineari di due prodotti chimici, mentre D_1 e D_2 sono i corrispondenti coefficienti di diffusione.

La forma dei termini di reazione che costituiscono la cinetica, f e g , determina il comportamento del sistema.

Tali termini possono essere ricavati da formule chimiche che descrivono la reazione o sulla base di risultati sperimentali.

Dato che i fenomeni in natura sono intrinsecamente non lineari, un modello più realistico prevede la presenza di alcuni termini non lineari in f e g [7].

Nel 1952 Turing fece una sorprendente e importante scoperta: un sistema di reazione-diffusione esibisce instabilità indotta dalla diffusione, detta anche instabilità di Turing, se lo stato stazionario omogeneo è stabile rispetto a piccole perturbazioni in assenza di diffusione ma instabile a piccole perturbazioni spaziali quando è presente la diffusione.

Da un punto di vista matematico, la diffusione può essere soppressa semplicemente ponendo i coefficienti di diffusione pari a zero, mentre da un punto di vista chimico, si suppone di mescolare i prodotti chimici così da eliminare la non uniformità spaziale.

Lo stato stazionario omogeneo rilevante $\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0)$ si ottiene da

$$\begin{cases} f(u_0, v_0) = 0 \\ g(u_0, v_0) = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Linearizzando intorno al punto di equilibrio \mathbf{u}_0 , un'arbitraria perturbazione

$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix}$ dello stato stazionario evolverà nel tempo in accordo al seguente sistema:

$$\dot{\mathbf{w}} = A\mathbf{w} + D\nabla^2\mathbf{w}, \quad (1.3)$$

con A la matrice Jacobiana valutata nel punto di equilibrio \mathbf{u}_0 :

$$A = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix} \Big|_{(u_0, v_0)}$$

Dato che (1.3) è lineare e a coefficienti costanti possiamo cercare una soluzione particolare della forma

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}_k e^{\lambda_k t} e^{ikx}, \quad (1.4)$$

Poiché le condizioni al contorno sono di tipo periodico si ha che $\mathbf{w}(x, t) = \mathbf{w}(x + L, t)$, per ogni tempo t e per ogni posizione x . La soluzione particolare sarà periodica con periodo L se e solo se

$$e^{ikx} = e^{ik(x+L)} \quad \text{per ogni } x.$$

Questo implica che $e^{ikL} = 1$ ossia $kL = (2\pi)m$ per qualche intero m , per cui il numero reale k è ristretto ad assumere uno dei seguenti valori reali:

$$k = m \left(\frac{2\pi}{L} \right), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Sostituendo l'equazione (1.4) nell'equazione (1.3) si ottiene

$$\lambda_k \mathbf{w}_k = A_k \mathbf{w}_k,$$

e quindi

$$A_k \mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k, \quad (1.5)$$

dove la matrice 2×2 reale A_k è definita da

$$A_k = A - Dk^2 = \begin{pmatrix} f_u - D_1 k^2 & f_v \\ g_u & g_v - D_2 k^2 \end{pmatrix}.$$

Dall'equazione (1.5) si nota che λ_k è l'autovalore e \mathbf{u}_k il corrispondente autovettore della matrice A_k , pertanto il sistema di partenza si traduce in un problema agli autovalori per ogni numero d'onda k .

Il problema agli autovalori per un dato k ha generalmente due autovettori linearmente indipendenti, \mathbf{u}_{1k} e \mathbf{u}_{2k} .

Se i corrispondenti autovalori sono λ_{1k} e λ_{2k} , la soluzione particolare con numero d'onda k avrà la forma

$$(c_{1k} \mathbf{u}_{1k} e^{\lambda_{1k} t} + c_{2k} \mathbf{u}_{2k} e^{\lambda_{2k} t}) e^{ikx},$$

in cui i coefficienti c_{ik} sono costanti complesse che dipendono dalla perturbazione iniziale.

Questa soluzione tende a zero se $\Re\{\lambda_{ik}\} < 0$ per $i = 1, 2$.

Dato che la (1.3) è lineare, una soluzione generale può essere ottenuta come sovrapposizione di soluzioni particolari

$$\sum_k (c_{1k} \mathbf{u}_{1k} e^{\lambda_{1k} t} + c_{2k} \mathbf{u}_{2k} e^{\lambda_{2k} t}) e^{ikx}. \quad (1.6)$$

La soluzione uniforme \mathbf{u}_0 è stabile se entrambi gli autovalori λ_{ik} hanno parte reale negativa per tutti i numeri d'onda k , cioè se

$$\max_i \max_k \Re\{\lambda_{ik}\} < 0.$$

Al variare di qualche parametro del sistema, lo stato uniforme diventa linearmente instabile quando $\Re\{\lambda_k\}$ diventa positivo per un particolare valore critico del parametro. Tale instabilità determina un cambiamento nella natura delle soluzioni: si ha una biforcazione [8].

Il corrispondente vettore \mathbf{k}_c per cui il massimo della parte reale diventa positivo è chiamato vettore d'onda critico e il suo valore k_c è detto numero d'onda critico.

Tale valore k_c è una delle più importanti quantità ottenute dall'analisi di stabilità lineare in quanto predice la lunghezza scala, $\frac{2\pi}{k_c}$, della perturbazione.

Il polinomio caratteristico per il problema agli autovalori può essere scritto come

$$0 = \det(A_k - \lambda_k I) = \lambda_k^2 - (\text{tr } A_k) \lambda_k + \det A_k. \quad (1.7)$$

Gli autovalori λ_{1k} e λ_{2k} sono dati pertanto da

$$\lambda_k = \frac{1}{2} \text{tr } A_k \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\text{tr } A_k)^2 - 4 \det A_k}. \quad (1.8)$$

Entrambi gli autovalori hanno parte reale negativa se la traccia della matrice A è negativa mentre il suo determinante è positivo:

$$\text{tr } A_k = f_u + g_v - (D_1 + D_2)k^2 < 0, \quad (1.9)$$

$$\det A_k = (f_u - D_1 k^2)(g_v - D_2 k^2) - f_v g_u > 0. \quad (1.10)$$

Se entrambe le condizioni sono soddisfatte per tutti i numeri d'onda k , lo stato stazionario uniforme \mathbf{u}_0 è linearmente stabile.

La stabilità della soluzione uniforme \mathbf{u}_0 è dunque legata alla distribuzione degli autovalori λ nel piano complesso.

Inizialmente, dato che stiamo ipotizzando che \mathbf{u}_0 è stabile, gli autovalori sono entrambi negativi. Quando il parametro di biforcazione, diciamo μ , supera un certo valore soglia, μ_c , almeno uno degli autovalori attraversa l'asse immaginario.

Dato che gli autovalori sono le radici di un polinomio di secondo grado a coefficienti reali, si hanno le due seguenti possibilità:

- un autovalore attraversa l'origine degli assi;
- una coppia di autovalori complessi coniugati attraversa l'asse immaginario contemporaneamente.

In entrambi i casi si assume che gli autovalori soddisfino la condizione di attraversamento, quando intersacano l'asse immaginario:

$$\frac{d\Re\{\lambda_{ik}(\mu)\}}{d\mu} > 0|_{\mu=\mu_c}.$$

Il primo caso corrisponde alla biforcazione di Turing; il secondo caso, invece, corrisponde alla biforcazione di Hopf.

1.1 Biforcazione di Turing

Seguendo l'idea di Turing si può immaginare che per qualche motivo la diffusione venga azzerata, condizione che sperimentalmente si ottiene mescolando le soluzioni ad alta velocità, quindi si comincia ad aumentare lentamente il valore del coefficiente di diffusione per vedere se si origina l'instabilità.

Adottando questa strategia, è necessario assumere che i reagenti chimici formino uno stato stazionario stabile in assenza di diffusione.

Ponendo le costanti di diffusione uguali a zero, il criterio per la lineare stabilità dello stato uniforme in assenza di diffusione è

$$f_u + g_v < 0 \tag{1.11}$$

$$f_u g_v - f_v g_u > 0 \tag{1.12}$$

Ne segue che

$$\text{tr } A_k = f_u + g_v - (D_1 + D_2)k^2 < f_u + g_v < 0, \tag{1.13}$$

quindi la traccia della matrice è sempre negativa.

Si può concludere che il solo modo affinché la diffusione destabilizzi lo stato uniforme è far sì che il determinante di A_k cambi segno, da positivo a negativo.

Ora, dall'equazione (1.10) si ottiene che $\det A_k$ è una parabola rispetto a k^2 che rivolge la concavità verso l'alto, pertanto una condizione per l'instabilità lineare in presenza di diffusione si ottiene richiedendo che il valore minimo di questa parabola risulti negativo. Derivando rispetto a k^2 si ricava che

$$k_c^2 = \frac{D_1 g_v + D_2 f_u}{2D_1 D_2}. \quad (1.14)$$

Il corrispondente valore di $\det A_k$ è

$$\det A_{k_c} = f_u g_v - f_v g_u - \frac{(D_1 g_v + D_2 f_u)^2}{4D_1 D_2}. \quad (1.15)$$

La condizione necessaria e sufficiente per la lineare instabilità di uno stato uniforme, che è stabile in assenza di diffusione, è

$$D_1 g_v + D_2 f_u > 2\sqrt{D_1 D_2 (f_u g_v - f_v g_u)} \quad (1.16)$$

Per la (1.12) la quantità sotto radice è positiva, per cui si ottiene

$$D_1 g_v + D_2 f_u > 0 \quad (1.17)$$

Dalle condizioni (1.11) e (1.17), risulta che $-\frac{D_1}{D_2} < \frac{f_u}{g_v} < -1$, pertanto le quantità f_u e g_v hanno segno discorde.

Per concretezza, scegliamo $f_u > 0$ e $g_v < 0$.

Come in [9], ponendo $l_1 = \sqrt{\frac{D_1}{f_u}}$ e $l_2 = \sqrt{\frac{D_2}{-g_v}}$, la condizione (1.16) può anche essere espressa nella forma

$$k_c^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{l_1^2} - \frac{1}{l_2^2} \right) > \sqrt{\frac{f_u g_v - f_v g_u}{D_1 D_2}}. \quad (1.18)$$

Questo implica che la lunghezza l_2 deve essere sufficientemente più grande della lunghezza l_1 .

L'assunzione che $f_u > 0$ implica che il primo prodotto chimico favorisce l'instabilità e per questo prende il nome di attivatore; analogamente, poiché $g_v < 0$, il secondo prodotto chimico ne rallenta la diffusione e viene quindi chiamato inibitore.

1.2 Biforcazione di Hopf

La scoperta di possibili oscillazioni nell'ambito delle reazioni chimiche è stata un fatto rivoluzionario, in quanto prima di allora l'opinione prevalente tra i chimici era che le componenti di una reazione chimica tendessero sempre a un punto di equilibrio.

L'esempio più noto di reazione oscillante è quella scoperta da B.P. Belousov (1951) e studiata successivamente anche da A. M. Zhabotinsky (1964), in cui il meccanismo di base, come riassunto in [10], consiste nell'ossidazione dell'acido malonico $CH_2(COOH)_2$ in un mezzo acido, mediante ioni di bromato, BrO_3 , e catalizzata dal cerio. Oscillazioni periodiche sono osservate negli ioni di cerio.

Con altri ioni metallici catalizzatori e appropriate colorazioni, si può visualizzare in maniera estremamente evidente il cambiamento periodico di colore (dall'arancione al blu). Naturalmente, non è la sola concentrazione del catalizzatore ionico a variare con il tempo, ma anche le concentrazioni di tutte le altre sostanze coinvolte nella reazione. Problemi strettamente connessi con lo studio delle oscillazioni nei sistemi chimici sono quelli relativi al ripetersi periodico di alcuni fenomeni: i cosiddetti ritmi circadiani, l'alternarsi del giorno e della notte, il ciclo annuale delle stagioni e le fasi della luna, la periodicità dei moti planetari, costituiscono solo alcuni esempi.

Dal punto di vista analitico, i moti periodici si possono verificare quando uno stato stazionario perde stabilità per qualche valore critico μ_c del parametro di biforcazione μ . Quando ciò accade si è in presenza di una biforcazione di Hopf. La condizione affinché vi sia una biforcazione di Hopf è data dall'esistenza di qualche k tale che

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} A_k(k_H^2) &= 0 \\ \operatorname{tr} A_k(k^2) &= f_u + g_v - k^2(D_1 + D_2) < 0 \quad \text{per tutti gli altri } k^2 \\ \det A_k(k^2) &> 0 \quad \text{per ogni } k^2 \end{aligned} \quad (1.19)$$

Segue immediatamente che il valore di k_H è zero, mentre $f_u + g_v = 0$.

Imporre tali condizioni, quando $\mu = \mu_H$, significa richiedere, come ci si aspettava, che gli autovalori siano puramente immaginari:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega.$$

Capitolo 2

L'elettrodeposizione

In questo capitolo applichiamo le condizioni per l'instabilità di uno stato uniforme ad un sistema di reazione-diffusione che modella la relazione tra la morfologia della superficie e la composizione chimica superficiale, con lo scopo di comprendere la formazione dei pattern nei processi di elettrodeposizione.

Inoltre indagheremo la stabilità lineare del modello proposto.

2.1 Derivazione del modello

L'elettrodeposizione è una tecnica, usata per di più in ambito industriale, che permette di ricoprire un metallo non prezioso con un sottile strato di un metallo più prezioso sfruttando la deposizione elettrolitica.

Questo processo viene solitamente sfruttato per proteggere strutture metalliche dalla corrosione provocata da agenti atmosferici e chimici, ma può avere anche scopo decorativo.

La procedura standard per svolgere un trattamento di elettrodeposizione prevede una vasca, che costituisce il cosiddetto bagno galvanico, contenente una soluzione acquosa

del sale del metallo (detto elettrolita) da depositare.

In detta vasca sono inoltre immersi due elettrodi: il catodo (caricato negativamente) e l'anodo (caricato positivamente).

Per effetto del campo elettrico generato dalla differenza di potenziale applicata tra i due elettrodi del generatore, i cationi migrano verso il polo negativo e gli anioni verso quello positivo e si realizza il passaggio di corrente elettrica nella soluzione.

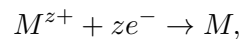
A contatto con gli elettrodi avvengono reazioni di ossido-riduzione degli ioni in soluzione con trasferimento di elettroni, precisamente la riduzione al catodo, che acquista elettroni, e l'ossidazione all'anodo, che cede elettroni.

Questo processo si chiama elettrolisi.

Nella cella elettrolitica gli oggetti da ricoprire sono collegati al polo negativo di una sorgente di corrente continua e costituiscono il catodo, mentre l'anodo è collegato al polo positivo e chiude il circuito.

Sul catodo si depositano quindi i cationi, che acquistano elettroni all'anodo e si trasformano in atomi metallici. In tal modo il catodo viene lentamente ricoperto da un sottile strato metallico, mentre l'anodo viene lentamente consumato rilasciando ioni in soluzione.

I cationi metallici liberi in soluzione si scaricano sulla superficie del catodo, ossia acquistano un numero di elettroni pari alla propria carica positiva e si riducono al metallo M , secondo la seguente reazione elettrochimica [11]:



dove M^{z+} rappresenta il catione;

e^{-} denota l'elettrone;

z è la valenza (cioè il numero di elettroni che uno ione impegna per formare legami);

M è il metallo.

Il processo catodico esaminato è mostrato in Figura 2.1 [12].

In relazione allo strato metallico che si intende depositare, per un determinato valore di densità di corrente alla quale lavora il bagno e conoscendo la velocità di deposizione, basta impostare il tempo necessario per formare un deposito dello spessore desiderato. Alcuni bagni, come quelli utilizzati per il deposito dei metalli nobili quale l'oro, utilizzano anche una soluzione di ioni di cianuro e per tale motivo sono detti bagni al cianuro.

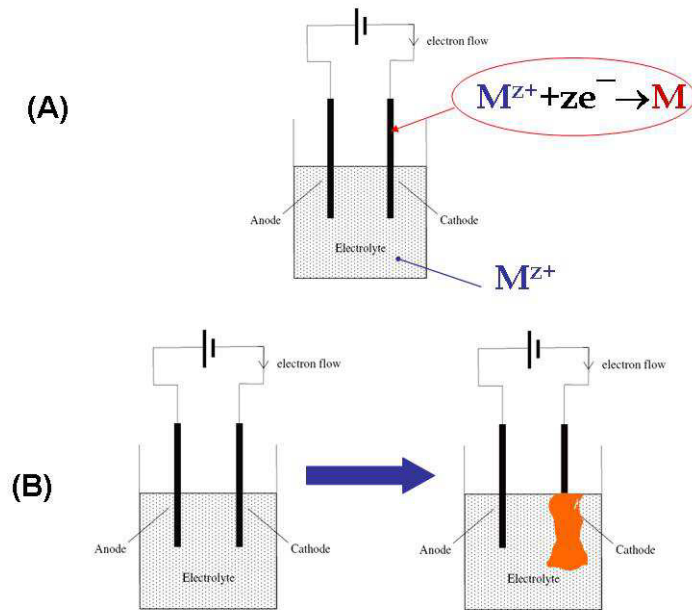


Figura 2.1: Cella elettrochimica con indicazione del processo catodico di riduzione del metallo (A); reazione di elettrodeposizione con deposito del metallo sul catodo (B).

L'oro è infatti un metallo inattaccabile dalla maggior parte dei composti chimici, inalterabile all'ossigeno, all'umidità, al calore, agli acidi; tuttavia può essere ossidato con soluzioni acquose contenenti lo ione cianuro, con l'acqua regia o col mercurio.

Sperimentalmente si è visto che il processo di elettrodeposizione della lega oro-rame esibisce delle instabilità che possono portare ad una eterogeneità compositiva nella massa elettrodepositata.

Per spiegare qualitativamente tali dinamiche introduciamo un modello di reazione-diffusione che sia in grado di catturare le caratteristiche essenziali per lo sviluppo dei pattern osservati negli esperimenti.

È possibile considerare una versione unidimensionale del modello in quanto la superficie da ricoprire può essere pensata isotropica nel piano del substrato.

Nello specifico si tratta di una modificazione del modello studiato in [13, 14, 15, 16] con una cinetica più semplice che aiuta ad esaminare più facilmente il ruolo giocato dai differenti processi chimici coinvolti nella formazione del pattern.

Le equazioni per la dinamica della morfologia e quella per la composizione chimica superficiale sono rispettivamente

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \Delta \eta + f(\eta, \vartheta) \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = d \Delta \vartheta + g(\eta, \vartheta) \end{cases} \quad (2.1)$$

$\eta(x, t)$ è la forma dell'elettrodo, cioè l'intersezione della superficie ricoperta con un piano normale al substrato, che si può interpretare come lo spostamento dal piano medio del deposito e può pertanto assumere valori sia positivi che negativi; $0 \leq \vartheta(x, t) \leq 1$ è la concentrazione della specie chimica assorbita sulla superficie da ricoprire; x è la coordinata spaziale; t è il tempo; η e ϑ sono definiti per $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$, con $\Omega = [0, L_1]$ dove L_1 è la lunghezza caratteristica dell'elettrodo e T è un tempo caratteristico del processo di elettrodeposizione; $d = \frac{D_\vartheta}{D_\eta}$ è il rapporto tra i due coefficienti di diffusione per le due equazioni. Precisamente D_η è il coefficiente di diffusione degli atomi adsorbiti, mentre D_ϑ è il coefficiente di diffusione del cianuro.

Una trattazione matematica completa del problema richiede l'imposizione delle condizioni iniziali e al contorno di flusso nullo in quanto siamo interessati a specie autorganizzate:

$$\begin{aligned} \eta(x, 0) = \eta_0 \quad \vartheta(x, 0) = \vartheta_0, \quad x \in [0, L_1] \\ \frac{\partial \eta}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = 0. \end{aligned}$$

Motivati dalle assunzioni fisiche descritte in [4], consideriamo i seguenti termini sorgenti:

$$\begin{cases} f(\eta, \vartheta) = A_1(1 - \vartheta)\eta - A_2\eta^3 - B(\vartheta - \alpha) \\ g(\eta, \vartheta) = (1 + k_2\eta)(1 - \vartheta)[1 - \gamma(1 - \vartheta)] - D\vartheta(1 + \gamma\vartheta) - Dk_3\eta\vartheta(1 + \gamma\vartheta) \end{cases} \quad (2.2)$$

dove, al fine di ridurre la dimensionalità dello spazio dei parametri, poniamo

$$D = \frac{C(1 - \alpha)(1 - \gamma + \gamma\alpha)}{\alpha(1 + \gamma\alpha)}.$$

Tutte le costanti presenti in (2.2) sono considerate positive o uguali a zero, con $0 < \alpha \leq 1$ e $0 \leq \gamma \leq 1$.

Inoltre assumiamo che $k_3 < k_2$ semplicemente per garantire che l'effetto elettrochimico di desorbimento sia più debole di quello di assorbimento.

2.2 Analisi di stabilità lineare

L'analisi di stabilità lineare è considerata un'utile tecnica per ottenere delle condizioni espresse in termini dei parametri del sistema che permettono di spiegare l'origine della diffusione e determinare la lunghezza caratteristica del relativo pattern spaziale.

Gli stati stazionari omogenei sono le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} A_1(1 - \vartheta)\eta - A_2\eta^3 - B(\vartheta - \alpha) = 0 \\ (1 + k_2\eta)(1 - \vartheta)[1 - \gamma(1 - \vartheta)] - D\vartheta(1 + \gamma\vartheta) - Dk_3\eta\vartheta(1 + \gamma\vartheta) = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava che il punto

$$P_e = (\eta_e, \vartheta_e) = (0, \alpha)$$

è particolarmente significativo da un punto di vista fisico in quanto $\eta_e = 0$ corrisponde ad una superficie inizialmente piatta, da cui si sviluppa la morfologia.

A questo punto investighiamo sulla stabilità di tali punti, considerando la matrice Jacobiana

$$J(\eta, \vartheta) = \begin{pmatrix} f_\eta & f_\vartheta \\ g_\eta & g_\vartheta \end{pmatrix},$$

che valutata nel punto P_e diventa:

$$J(P_e) = \begin{pmatrix} A_1(1 - \alpha) & -B \\ C(1 - \alpha)(1 - \gamma + \gamma\alpha)(k_2 - k_3) & 2C\gamma - (C + D)(1 + 2\gamma\alpha) \end{pmatrix}$$

L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 - (\text{tr } J(P_e))\lambda + \det J(P_e) = 0,$$

da cui

$$\lambda_{1,2} = \frac{(\text{tr } J(P_e)) \pm \sqrt{(\text{tr } J(P_e))^2 - 4 \det J(P_e)}}{2}.$$

Gli autovalori sono complessi coniugati se $(\text{tr } J(P_e))^2 - 4 \det J(P_e) < 0$, ovvero se

$$C_2 A_1^2 + C_1 A_1 + C_0 < 0, \quad \text{con } C_2 = (1 - \alpha)^2;$$

$$C_1 = -4(1 - \alpha)C\gamma + 2(1 - \alpha)(C + D)(1 + 2\gamma\alpha);$$

$$C_0 = 4C^2\gamma^2 + (C + D)^2(1 + 2\gamma\alpha)^2 - 4C\gamma(C + D)(1 + 2\gamma\alpha) - 4BC(1 - \alpha)(1 - \gamma + \gamma\alpha)(k_2 - k_3).$$

Inoltre, per le assunzioni fatte sui parametri, risulta che

$$C_1^2 - 4C_0C_2 = 16BC(1 - \alpha)^3(1 - \gamma + \gamma\alpha)(k_2 - k_3) > 0.$$

Dunque se $A_1 \in (A_-, A_+)$,

con

$$\begin{aligned} A_{-,+} &= \frac{-C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4C_0C_2}}{2C_2} \\ &= \frac{2C\gamma - (C + D)(1 + 2\gamma\alpha) \pm \sqrt{4BC(1 - \alpha)(1 - \gamma + \gamma\alpha)(k_2 - k_3)}}{2(1 - \alpha)} \end{aligned}$$

il punto di equilibrio stazionario P_e è un fuoco.

In tale range la parte reale degli autovalori è negativa se $\text{tr } J(P_e) < 0$, ossia se

$$A_1 < \frac{(C + D)(1 + 2\gamma\alpha) - 2C\gamma}{1 - \alpha} \equiv A_{\text{tr}}.$$

Un ruolo fondamentale è giocato dalla scelta dei parametri del sistema, in base ai quali si possono delineare le condizioni per la formazione di pattern di tipo Turing o pattern oscillanti che nascono da biforcazioni di Hopf.

2.2.1 Pattern di Turing

Fissati i seguenti parametri:

$$A_2 = 30 \quad B = 21 \quad C = 5 \quad k_2 = 2.5 \quad k_3 = 1.5 \quad \alpha = 0.5 \quad \gamma = 0.2 \quad (2.3)$$

si ha che $A_{\text{tr}} > A_+$, pertanto il fuoco è sempre stabile.

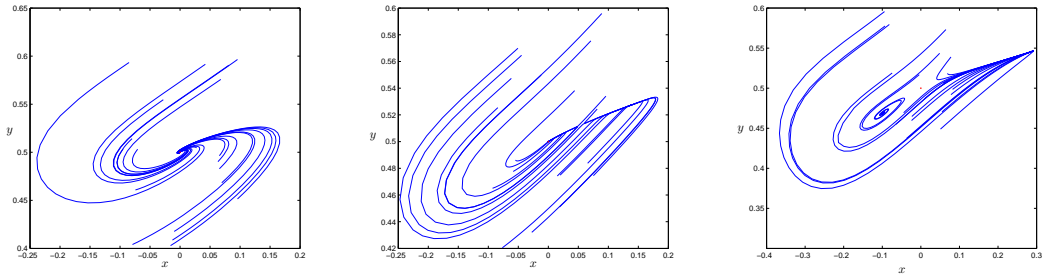
Se invece $A_1 > A_+$ gli autovalori sono reali; in particolare,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{(\text{tr } J(P_e)) - \sqrt{(\text{tr } J(P_e))^2 - 4 \det J(P_e)}}{2} < 0 && \text{sempre,} \\ \lambda_2 &= \frac{(\text{tr } J(P_e)) + \sqrt{(\text{tr } J(P_e))^2 - 4 \det J(P_e)}}{2} && \text{cambia segno.} \end{aligned}$$

Precisamente si ha che $\lambda_2 < 0$ se $\det J(P_e) > 0$, cioè quando

$$A_1 < \frac{BC(1 - \gamma + \gamma\alpha)(k_2 - k_3)}{(C + D)(1 + 2\gamma\alpha) - 2C\gamma} \equiv A_{\text{det}}.$$

Dunque se $A_1 \in (A_+, A_{\text{det}})$ entrambi gli autovalori sono reali e negativi e il punto P_e è un nodo attrattivo; viceversa, se $A_1 > A_{\text{det}}$ il punto stazionario diventa un punto sella, che non è di nostro interesse.



(a) $A_1 = 5$, P_e è un fuoco (b) $A_1 = 10$, P_e è un nodo (c) $A_1 = 13$, P_e è un punto sella stabile

Figura 2.2: Ritratti di fase ottenuti fissando i parametri come in (2.3) e facendo variare A_1 .

Il punto sella, infatti, analiticamente è un punto di equilibrio semistabile, ma da un punto di vista fisico si può considerare instabile in quanto gli autovalori della matrice Jacobiana associata sono di segno opposto, il che comporta che a seguito di piccole perturbazioni, di natura casuale, le traiettorie divergono.

Con la scelta dei parametri effettuata come in (2.3), si ha che

$$A_+ = 9.6773 \quad A_{det} = 10.6071 \quad A_{tr} = 17.8182$$

La seguente tabella riassume tutti i possibili scenari:

Equilibrio	$0 < A_1 < A_+$	$A_+ < A_1 < A_{det}$	$A > A_{det}$
$P_e = (0, \alpha)$	fuoco stabile	nodo stabile	punto sella

Tabella 2.1: Differenti configurazioni degli equilibri del sistema al variare di A_1

In accordo con la Tabella 2.1, al variare di A_1 si ottengono differenti ritratti di fase, come mostrato in Figura 2.2.

Ripercorrendo l'analisi svolta nel Capitolo 1 di questa tesi, introduciamo una piccola perturbazione nell'intorno del punto di equilibrio P_e , che può essere scritta in termini della sua decomposizione spettrale come

$$\delta \mathbf{w}(x, t) = \sum_j c_j e^{\lambda_j t} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (2.4)$$

da cui si evince che quei numeri d'onda k caratterizzati da $\Re\{\lambda(k)\} > 0$ cresceranno esponenzialmente, mentre quelli per cui $\Re\{\lambda(k)\} < 0$ decadranno.

Il modello da studiare si può schematizzare in questo modo:

$$\dot{\mathbf{w}} = D\Delta\mathbf{w} + F(\mathbf{w}) \quad (2.5)$$

dove

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \eta \\ \vartheta \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} f(\eta, \vartheta) \\ g(\eta, \vartheta) \end{pmatrix},$$

con

$$f(\eta, \vartheta) = A_1(1 - \vartheta)\eta - A_2\eta^3 - B(\vartheta - \alpha)$$

$$g(\eta, \vartheta) = (1 + k_2\eta)(1 - \vartheta)[1 - \gamma(1 - \vartheta)] - D\vartheta(1 + \gamma\vartheta) - Dk_3\eta\vartheta(1 + \gamma\vartheta)$$

e punto di equilibrio

$$P_e = (0, \alpha).$$

Sostituendo la soluzione nella forma (2.4) in (2.5) e mantenendo solo i termini lineari si ottiene per ogni k_j l'equazione caratteristica

$$|\lambda_j I - J(P_e) + Dk_j^2| = 0$$

Tale equazione fornisce la relazione di dispersione:

$$\lambda^2 + t(k^2)\lambda + h(k^2) = 0, \quad (2.6)$$

con

$$t(k^2) = k^2(1 + d) - \text{tr} J(P_e)$$

$$h(k^2) = k^4 d - k^2(J_{22} + dJ_{11}) + \det J(P_e)$$

dove J_{ij} indica l'elemento di posto ij della matrice $J(P_e)$.

Affinché lo stato stazionario sia instabile richiediamo che $\Re\{\lambda(k^2)\} > 0$ per qualche $k \neq 0$ e questa condizione si può verificare o se il coefficiente di λ in (2.6) è negativo oppure se $h(k^2) < 0$ per qualche $k \neq 0$.

Ma dato che $\text{tr} J(P_e) < 0$, in quanto si suppone che in assenza di diffusione l'equilibrio sia stabile, si ha subito che $t(k^2) > 0$.

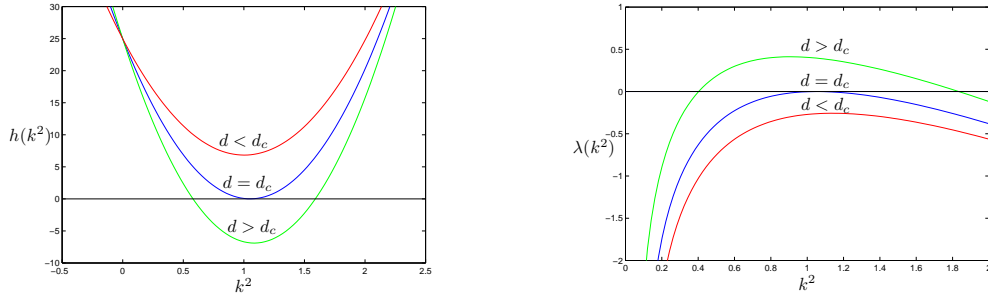


Figura 2.3: Per $d > d_c$ nasce una banda di numeri d'onda instabili $[k_1^2, k_2^2]$. Fissati i parametri come in (2.3), si ha $d_c = 22.5495$.

Dunque, la sola possibilità perché $\Re\{\lambda(k^2)\}$ sia positivo si può realizzare se $h(k^2) < 0$, ed essendo $J(P_e) > 0$, necessariamente deve essere $dJ_{11} + J_{22} > 0$, da cui segue che $d > 1$ e J_{11} e J_{22} hanno segno opposto.

Tuttavia quest'ultima è una condizione necessaria ma non sufficiente: per garantire che $\Re\{\lambda(k^2)\} < 0$ per qualche $k \neq 0$, il minimo h_{\min} deve essere negativo.

Differenziando $h(k^2)$ rispetto a k^2 si ottiene:

$$h_{\min} = |J| - \frac{(dJ_{11} + J_{22})^2}{4d} < 0, \quad \text{da cui} \quad \frac{(dJ_{11} + J_{22})^2}{4d} > |J|.$$

Inoltre,

$$k^2 = \frac{dJ_{11} + J_{22}}{2d}.$$

Al valore di biforcazione, per $h_{\min} = 0$, richiediamo che $|J| = \frac{(dJ_{11} + J_{22})^2}{4d}$, da cui si ricava il valore soglia del parametro di biforcazione:

$$d_c = \frac{J_{11}J_{22} - 2J_{12}J_{21} \pm \sqrt{(J_{11}J_{22} - 2J_{12}J_{21})^2 - J_{11}^2J_{22}^2}}{J_{11}^2}$$

e quindi il numero d'onda critico k_c è dato da

$$k_c^2 = \frac{dJ_{11} + J_{22}}{2d} = \sqrt{\frac{\det J}{d_c}},$$

mentre la lunghezza caratteristica del pattern è

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c}.$$

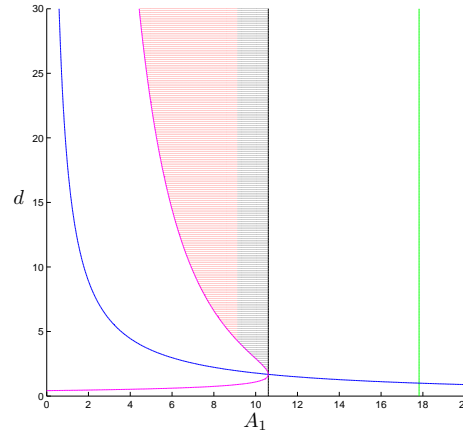


Figura 2.4: spazio di Turing ottenuto fissando tutti i parametri come in (2.3) e facendo variare A_1 e d .

In Figura 2.3 è mostrato come variano $h(k^2)$ e $\lambda(k^2)$ rispetto a k^2 per differenti valori di d .

In sintesi, le condizioni a cui devono soddisfare i parametri del sistema sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{11} + J_{22} < 0 \\ J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} > 0 \\ dJ_{11} + J_{22} > 0 \\ \frac{(dJ_{11} + J_{22})^2}{4d} > J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} \end{array} \right.$$

Tali condizioni permettono di rappresentare lo spazio di Turing che fornisce indicazioni preziose sui possibili valori da assegnare ai parametri (vedi Figura 2.4).

Con la scelta dei parametri effettuata, il valore soglia del parametro di biforcazione d è $d_c = 3.431$.

Quando il coefficiente di diffusione d cresce oltre il valore critico d_c , $h(k^2)$ diventa negativo per un range finito di $k^2 > 0$ e per quegli stessi valori la relazione di dispersione ha una soluzione λ che è positiva.

Precisamente se $d > d_c$, il range di numeri d'onda instabili $k_1^2 < k^2 < k_2^2$ è ottenuto

dagli zeri, k_1^2 e k_2^2 , di $h(k^2) = 0$:

$$k_{1,2}^2 = \frac{dJ_{11} + J_{22} \pm \sqrt{(dJ_{11} + J_{22})^2 - 4d \det J(P_e)}}{2d}.$$

2.2.2 Pattern oscillanti

Attraverso l'analisi di stabilità lineare si ricava la relazione di dispersione (2.6).

La biforcazione di Hopf si verifica quando

$$t(k^2) = 0 \quad \text{e} \quad h(k^2) > 0 \quad (2.7)$$

I valori minimi di A_1 e k per cui $t(k^2) = 0$ sono:

$$A_H = \frac{(C + D)(1 + 2\gamma\alpha) - 2C\gamma}{1 - \alpha} \quad \text{e} \quad k = 0 \quad (2.8)$$

e per $A_1 > A_H$ nasce un moto oscillatorio spazialmente omogeneo [17].

Il corrispondente valore critico di A_1 nel caso di biforcazione di Turing si ottiene, come visto nel paragrafo precedente, da

$$h(k_c^2) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dh(k_c^2)}{dk_c^2} = 0,$$

cioè quando $k_c^2 = \frac{dJ_{11} + J_{22}}{2d}$ e A_1 soddisfacente a $|J(P_e)| = \frac{(dJ_{11} + J_{22})^2}{4d}$, da cui si ricava il valore critico

$$A_T = \frac{J_{22} + \sqrt{-4dJ_{12}J_{21}}}{d(1 - \alpha)}.$$

Stavolta scegliamo i parametri del sistema in modo tale che $A_H < A_T$, così da eliminare la possibilità che al crescere di A_1 si possa verificare dapprima una biforcazione di Turing.

Fissati i seguenti parametri

$$A_2 = 20 \quad B = 50 \quad C = 5 \quad k_2 = 6.5 \quad k_3 = 2 \quad \alpha = 0.3 \quad \gamma = 0.5 \quad d = 10 \quad (2.9)$$

risulta

$$A_H = 14.3892 < A_T = 24.9510 \quad A_+ = 69.0631 \quad A_{det} = 120.9982$$

In particolare evidenziamo che quando $A_1 = A_H$, una coppia di autovalori complessi coniugati attraversa l'asse immaginario (pertanto il punto di equilibrio da spirale attrattiva diventa una spirale repulsiva) e inoltre il determinante della matrice associata è positivo: si ha quindi una biforcazione di Hopf.

Capitolo 3

Analisi debolmente non lineare

Per predire l'ampiezza e la forma del pattern vicino al punto di equilibrio, occorre includere anche i termini non lineari.

In questo capitolo svolgiamo un'analisi debolmente non lineare basata sul metodo delle scale multiple.

Se indichiamo con $h^2 = \frac{d-d_c}{d_c}$ il parametro di biforcazione, il metodo consiste nello sviluppare la soluzione del sistema originale in termini del parametro di biforcazione h , scrivendo il termine dominante di tale espansione come il prodotto di un'ampiezza che varia lentamente e un pattern basilare che è la soluzione critica dell'equazione linearizzata [18].

Il nostro obiettivo sarà quindi quello di derivare un'equazione del moto per l'ampiezza lentamente variabile (equazione di ampiezza).

Dall'analisi del tasso di crescita lineare λ , mostrato a destra di Figura 2.3, scritto ai più bassi ordini in h^2 e $(k - k_c)$

$$\lambda = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial h^2} \right)_{|0} h^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial k^2} \right)_{|k_c} (k - k_c)^2 + \dots,$$

si nota che solo i modi che hanno un tasso di crescita positivo risiedono in un intorno di k_c di larghezza $\approx h$.

Da un'analisi dimensionale della soluzione $\mathbf{w} = e^{\lambda t + ik_c x}$ risulta che $x \approx h^{-1}$, mentre il tempo scala caratteristico di evoluzione è $t = O(h^{-2})$.

Pertanto le variabili lente sono per costruzione

$$X = hx \quad T = h^2 t$$

Conseguentemente le derivate si riscrivono come

$$\partial_x \rightarrow \partial_x + h\partial_X \quad \partial_t \rightarrow h^2\partial_T \quad (3.1)$$

dove x e t sono le scale spaziale e temporale del pattern portante, mentre X e T sono le scale dell'equazione di ampiezza.

In questo stadio trascuriamo la modulazione spaziale dell'ampiezza del pattern e quindi nell'espansione asintotica non includiamo la scala spaziale lenta.

L'analisi perturbativa, in un intorno di k_c^2 , dell'equazione

$$\dot{\mathbf{w}} = D^d \Delta \mathbf{w} + F(\mathbf{w}) \quad \text{con} \quad F(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} f(\eta, \vartheta) \\ g(\eta, \vartheta) \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

si ottiene espandendo d , \mathbf{w} e t come segue:

$$\begin{aligned} d &= d_c + hd^{(1)} + h^2 d^{(2)} + h^3 d^{(3)} + h^4 d^{(4)} + h^5 d^{(5)} + O(h^6) \\ \mathbf{w} &= h \mathbf{w}_1 + h^2 \mathbf{w}_2 + h^3 \mathbf{w}_3 + h^4 \mathbf{w}_4 + h^5 \mathbf{w}_5 + O(h^6) \\ t &= \frac{T_1}{h} + \frac{T_2}{h^2} + \frac{T_3}{h^3} + \frac{T_4}{h^4} + \frac{T_5}{h^5} + O(h^6), \end{aligned} \quad (3.3)$$

pertanto introduciamo le scale temporali multiple:

$$T_1 = ht, \quad T_2 = h^2 t, \quad T_3 = h^3 t, \quad T_4 = h^4 t, \quad \dots$$

D'ora in poi misureremo la distanza dalla soglia usando come riferimento sempre il valore critico d_c , pertanto, quando $d_c \neq 0$, poniamo $d^{(i)} = d_c$.

Inoltre, lo sviluppo in serie di Taylor dei termini di reazione f e g è:

$$\begin{aligned} f &= f_1 h + f_2 h^2 + f_3 h^3 + f_4 h^4 + f_5 h^5 + O(h^6) \\ g &= g_1 h + g_2 h^2 + g_3 h^3 + g_4 h^4 + g_5 h^5 + O(h^6) \end{aligned}$$

Le espressioni per f_i e g_i sono date in A.1.

Per non appesantire eccessivamente la notazione, facciamo le seguenti posizioni:

$$U = CK_2(1 - \alpha)[1 - \gamma(1 - \alpha)] - Dk_3\alpha(1 + \gamma\alpha)$$

$$V = C[2(1 - \alpha)\gamma - 1] - 2D\gamma\alpha - D$$

$$W = 2Ck_2\gamma(1 - \alpha) - Ck_2 - Dk_3 - 2Dk_3\gamma\alpha$$

Se con J indichiamo la matrice Jacobiana valutata nel punto stazionario, cioè

$$J = \begin{pmatrix} A_1(1 - \alpha) & -B \\ U & V \end{pmatrix},$$

possiamo separare la parte lineare L^d da quella non lineare.

L'operatore lineare L^d può essere riscritto in questo modo:

$$\begin{aligned} L^d &= D^d \nabla^2 + J = L^{d_c} \nabla^2 + h d^{(1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla^2 + h^2 d^{(2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla^2 \\ &\quad + h^3 d^{(3)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla^2 + h^4 d^{(4)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla^2 + J \quad (3.4) \\ &= L^{d_c} + h^2 d^{(2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + h^4 d^{(4)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla^2 \end{aligned}$$

dove $L^{d_c} = D^{d_c} + J$.

Sostituendo queste espansioni in (3.2) e raccogliendo i termini ai vari ordini in h , si ottengono delle equazioni che permettono di ricavare le \mathbf{w}_i .

All'ordine h ritroviamo il problema lineare

$$L^{d_c} \mathbf{w}_1 = 0 \quad (3.5)$$

la cui soluzione, dovendo soddisfare alle condizioni di Neumann, è data da

$$\mathbf{w}_1 = A \mathbf{r} \cos(k_c x), \quad \text{con } \mathbf{r} \in \text{Ker}(L^{d_c}), \quad (3.6)$$

dove A è l'ampiezza del pattern che è ancora arbitraria a questo stadio.

Ora,

$$\begin{aligned} L^{d_c} \mathbf{w}_1 &= D^{d_c} \nabla^2 \mathbf{w}_1 + J \mathbf{w}_1 = -k_c^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_c \end{pmatrix} \mathbf{w}_1 + J \mathbf{w}_1 \\ &= \begin{pmatrix} A_1(1 - \alpha) - k_c^2 & -B \\ U & V - k_c^2 d_c \end{pmatrix} \mathbf{w}_1 \quad (3.7) \end{aligned}$$

Pertanto il vettore \mathbf{r} , definito a meno di una costante, che possiamo pensare normalizzato, deve soddisfare a

$$\begin{pmatrix} A_1(1-\alpha) - k_c^2 & -B \\ U & V - k_c^2 d_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ M \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad M = \frac{A_1(1-\alpha) - k_c^2}{B}.$$

Agli ordini h^2 e h^3 si ottengono rispettivamente le seguenti equazioni lineari:

$$L^{d_c} \mathbf{w}_2 = F \tag{3.8}$$

$$L^{d_c} \mathbf{w}_3 = G \tag{3.9}$$

L'espressione esplicita di F e G è data in Appendice A.

Dato che F è ortogonale al nucleo dell'aggiunta di L^{d_c} , l'equazione (3.8) può essere risolta immediatamente.

Ciò non avviene, invece, per l'equazione (3.9) per la quale la condizione di solvibilità porta all'equazione di Stuart-Landau [19]:

$$\frac{dA}{dT_2} = \sigma A - LA^3, \tag{3.10}$$

dove i coefficienti σ e L sono calcolati esplicitamente in termini dei parametri del sistema in Appendice A.

Dato che il coefficiente di crescita σ è sempre positivo, la dinamica dell'equazione di Stuart-Landau (3.10) può essere studiata in due casi differenti a seconda del segno di L : quando L è positivo si ha il caso *supercritico*; quando L è negativo si ha il caso *subcritico*.

In Figura 2.4 sono raffigurate le due regioni dello spazio di Turing in cui si ha la biforcazione supercritica (regione in rosso) o subcritica (regione in nero).

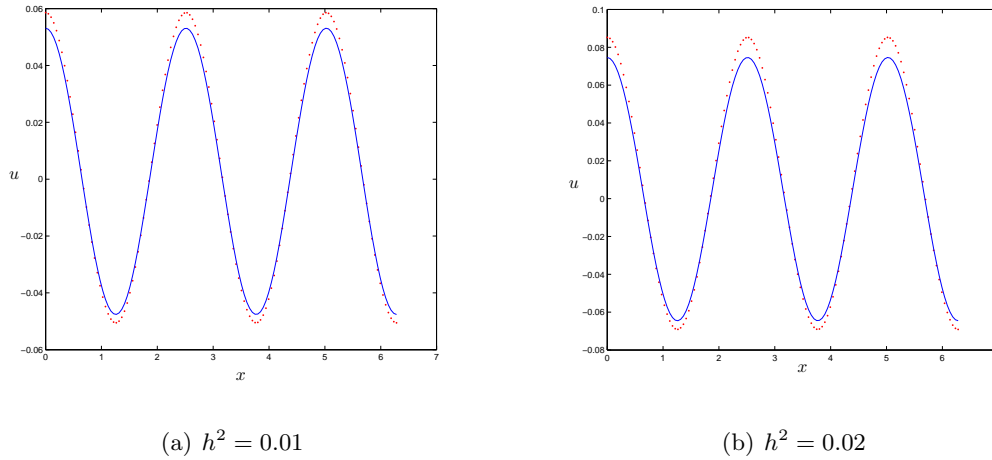


Figura 3.1: Confronto tra la soluzione ottenuta con l'analisi debolmente non lineare (linea punteggiata rossa) e la soluzione numerica (linea continua blu). I parametri sono: $A_1 = 25$, $A_2 = 50$, $B = 78$, $C = 10$, $k_2 = 2.8$, $k_3 = 1.1$, $\alpha = 0.25$, $\gamma = 0.2$. Con questa scelta dei parametri si ha che $d_c = 5.4313$, mentre $k_c = 2.5036$, pertanto il primo modo instabile ammissibile è $\bar{k}_c = 2.5$.

3.1 Il caso supercritico

Se i coefficienti σ e L che appaiono in (3.10) sono entrambi positivi, allora esiste una soluzione di equilibrio stabile $A_\infty = \sqrt{\sigma/L}$, che rappresenta il valore asintotico dell'ampiezza A .

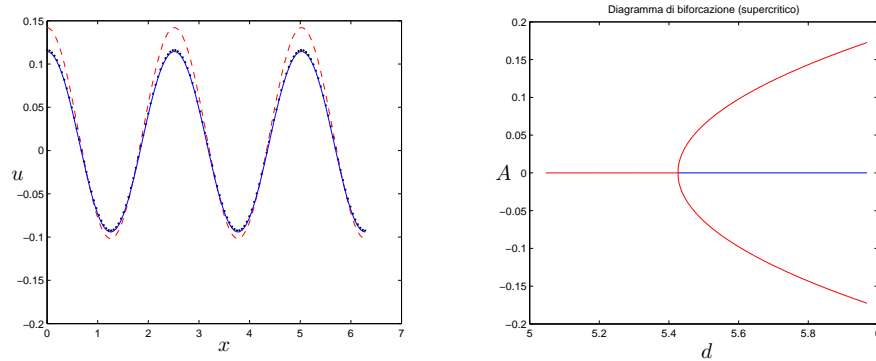
Quindi siamo in grado di predire l'ampiezza del pattern e, in accordo all'analisi debolmente non lineare, la soluzione è data da:

$$\mathbf{w} = h \mathbf{r} \sqrt{\frac{\sigma}{L}} \cos(k_c x) + h^2 \frac{\sigma}{L} (\mathbf{w}_{20} + \mathbf{w}_{22} \cos(2k_c x)) + O(h^3) \quad (3.11)$$

Chiaramente, in generale, tale soluzione non soddisfa alle condizioni al contorno di Neumann, che richiedono che k_c sia intero o semi-intero. Definiamo pertanto \bar{k}_c come il primo intero o semi-intero che diventa instabile quando d è più grande del valore critico d_c .

L'espressione (3.11) viene allora modificata in questo modo:

$$\mathbf{w} = h \mathbf{r} \sqrt{\frac{\sigma}{L}} \cos(\bar{k}_c x) + h^2 \frac{\sigma}{L} (\mathbf{w}_{20} + \mathbf{w}_{22} \cos(2\bar{k}_c x)) + O(h^3) \quad (3.12)$$



(a) Confronto tra la soluzione debolmente non lineare $O(h^3)$ (linea tratteggiata rossa) e all'ordine $O(h^5)$ (linea punteggiata nera) con la soluzione numerica di (3.2) (linea continua blu). (b) il corrispondente diagramma di biforcazione.

Figura 3.2: I parametri sono scelti come in Figura 3.1.

In Figura 3.1 confrontiamo la soluzione stazionaria (3.12) predetta dall'analisi debolmente non lineare e la soluzione stazionaria (ottenuta partendo da una perturbazione random dell'equilibrio) calcolata risolvendo numericamente il sistema (3.2) [20].

Ripetendo lo stesso raffronto scegliendo una distanza maggiore dal valore di biforcazione, si nota una maggiore discrepanza tra le due soluzioni.

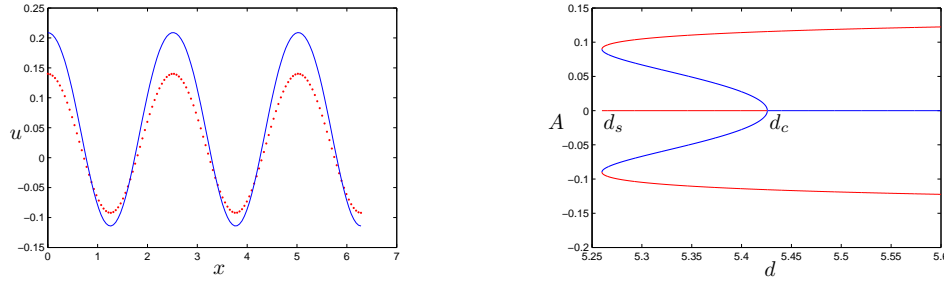
Una migliore approssimazione dell'ampiezza A del pattern può essere ottenuta usando l'equazione di Stuart-Landau di quinto grado (3.15).

In Figura 3.2 viene effettuato un confronto tra la soluzione numerica del sistema (3.2) e l'approssimazione debolmente non lineare $O(h^3)$, che mostra una discrepanza significativa, e l'approssimazione $O(h^5)$ che, invece, è molto più accurata.

A destra di Figura 3.2 è invece disegnato il corrispondente diagramma di biforcazione.

3.2 Il caso subcritico

Per altri valori dei parametri, il coefficiente di Landau L ha un valore negativo; di conseguenza con l'equazione (3.10) non si è in grado di stabilire qual è l'ampiezza del pattern.



(a) confronto tra la soluzione ottenuta con l'approssimazione non lineare (linea punteggiata rossa) e la soluzione numerica.

(b) il corrispondente diagramma di biforcazione.

Figura 3.3: I valori dei parametri sono: $A_1 = 25$, $A_2 = 50$, $B = 78$, $C = 10$, $k_2 = 4$, $k_3 = 2.3$, $\alpha = 0.25$, $\gamma = 0.2$. Con tali valori assegnati, $d_c = 5.4259$.

In questi casi, se si vuole predire l'ampiezza del pattern, bisogna continuare con l'espansione ad un ordine maggiore.

In particolare agli ordini h^4 e h^5 si trovano rispettivamente le seguenti equazioni lineari:

$$L^{d_c} \mathbf{w}_4 = H \quad (3.13)$$

$$L^{d_c} \mathbf{w}_5 = P \quad (3.14)$$

L'espressione esplicita di H e P è data in Appendice B.

Risulta che H è ortogonale al nucleo dell'aggiunta di L^{d_c} e quindi l'equazione (3.13) può essere risolta immediatamente, lasciando però ancora arbitraria l'ampiezza $A(T_2, T_4)$ del pattern.

La condizione di solvibilità, applicata all'equazione (3.14), porta finalmente all'equazione di Stuart-Landau di quinto grado per l'ampiezza A :

$$\frac{dA}{dT_2} = \bar{\sigma}A - \bar{L}A^3 + \bar{Q}A^5 \quad (3.15)$$

dove i coefficienti σ e L sono calcolati esplicitamente in termini dei parametri del sistema in Appendice B. Nel caso subcritico (cioè quando $\bar{\sigma} > 0$ e $\bar{L} < 0$) e quando $\bar{Q} < 0$, vi sono due equilibri stabili reali che rappresentano i valori asintotici dell'ampiezza A . A sinistra di Figura 3.3 è presente un confronto tra la soluzione numerica del sistema

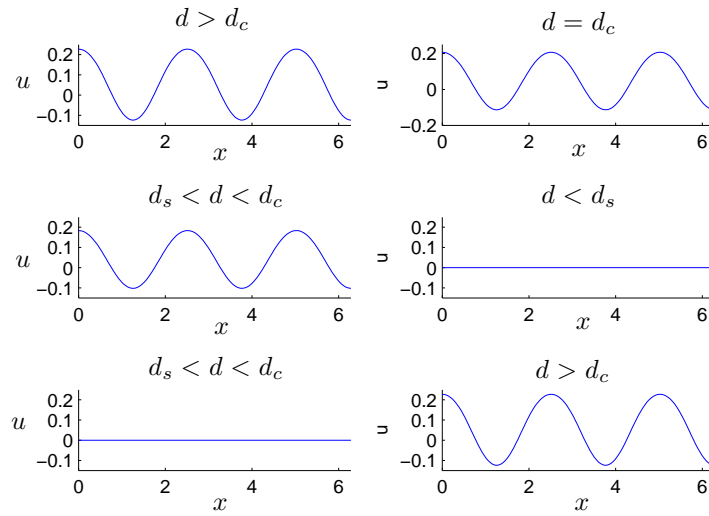


Figura 3.4: Un ciclo di isteresi. I valori dei parametri sono come quelli di Figura 3.3

(3.2) e l'approssimazione debolmente non lineare della soluzione. A destra, invece, è mostrato il corrispondente diagramma di biforcazione subcritico per alcuni assegnati valori dei parametri: l'origine è localmente stabile per $d < d_c$; quando $d = d_c$ nascono due rami all'indietro di punti fissi instabili che si biforcano dall'origine. Questi rami instabili diventano stabili e si curvano in avanti per un certo valore $d = d_s$, pertanto nel range $d_s < d < d_c$ si ha una situazione di bistabilità.

L'esistenza di differenti stati stabili per un singolo valore del parametro permette di descrivere il fenomeno dell'*isteresi*: se il parametro d viene variato, per piccoli incrementi o decrementi successivi, il sistema, all'andata e al ritorno, non ripercorre gli stessi stadi. Precisamente, come mostrato in Figura 3.4, si ha la seguente situazione: partendo da un valore del parametro maggiore di d_c la soluzione salta immediatamente al ramo stabile, corrispondente a un pattern la cui ampiezza è relativamente irrilevante al valore del parametro di biforcazione. Diminuendo d sotto il valore critico d_c la soluzione continua a rimanere sul ramo stabile e il pattern non sparisce. Con un'ulteriore diminuzione di d sotto il valore soglia d_s la soluzione salta allo stato stazionario costante. Per avere la formazione del pattern occorre incrementare il parametro d oltre il valore d_c .

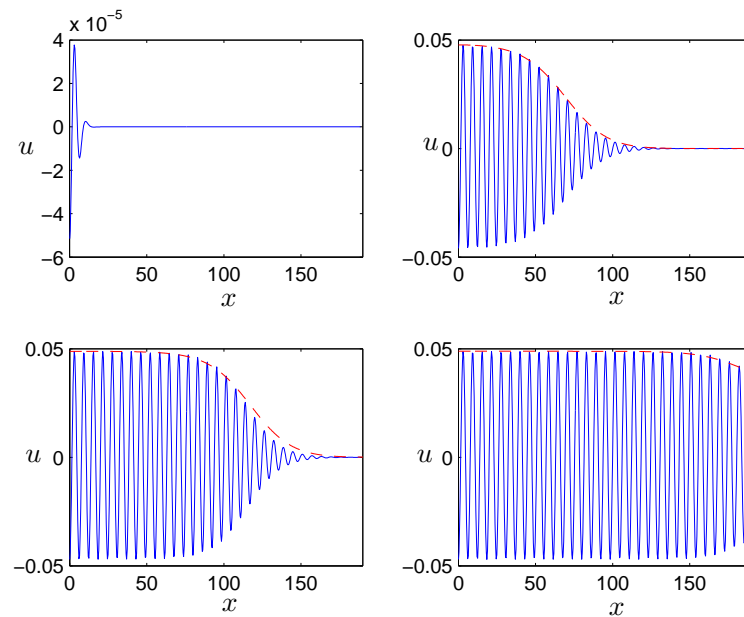


Figura 3.5: Quando la perturbazione dell'equilibrio è localizzata, il pattern invade l'intero dominio sotto forma di un'onda progressiva modulata. I parametri sono scelti come in (2.3), con $A_1 = 5$ e $h^2 = 0.05$.

3.3 Onde viaggianti

Quando la dimensione del dominio è grande e la perturbazione è localizzata un fenomeno tipico che si può osservare è la propagazione del pattern sotto forma di onda viaggiante. Per descrivere qualitativamente questo fenomeno, occorre tener conto (oltre che della dipendenza spaziale veloce) della dipendenza spaziale lenta della soluzione.

Se indichiamo con x la variabile spaziale veloce e con $X = hx$ la variabile spaziale lenta, allora occorre operare una modifica nella derivata spaziale: $\partial_x \rightarrow \partial_x + h\partial_X$ e quindi l'operatore di diffusione si riscrive come $\partial_{xx} \rightarrow \partial_{xx} + 2h\partial_{xX} + h^2\partial_{XX}$.

Ne consegue che

$$\begin{aligned} L^d &= D^d \nabla^2 + J = \left(D^{d_c} + h^2 d^{(2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) (\nabla^2 + 2h \partial_x \partial_X + h^2 \partial_X^2) + J \\ &= L^{d_c} + 2h D^{d_c} \partial_x \partial_X + h^2 \left(D^{d_c} \partial_X^2 d^{(2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla^2 \right) + O(h^3) \end{aligned}$$

L'analisi asintotica arrestata al terzo ordine in h consente di ottenere la seguente equazione per l'ampiezza A :

$$\frac{\partial A}{\partial T} = \nu \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + \sigma A - LA^3. \quad (3.16)$$

L'equazione (3.16) prende il nome di equazione di Ginzburg-Landau.

In Appendice C sono riportati tutti i dettagli della derivazione dell'equazione (3.16) e le espressioni per i coefficienti che in essa compaiono.

Tale equazione permette di determinare l'evoluzione del fronte d'onda che inviluppa un pattern che invade il dominio spaziale, come mostrato in Figura 3.5.

3.4 Equazioni di ampiezza complesse

Una tecnica per descrivere le onde chimiche dei sistemi di reazione diffusione vicino a una biforcazione di Hopf, come mostrato da Kuramoto in [21], è fornita dall'equazione complessa di Ginzburg-Landau.

In analogia con [22], determiniamo dapprima l'equazione complessa di Ginzburg-Landau e poi la corrispondente equazione di Stuart-Landau.

Dall'analisi di stabilità lineare, si è visto che la biforcazione di Hopf nasce quando $A_1 > A_H$, pertanto definiamo il parametro

$$\mu = \frac{A_1 - A_H}{A_H},$$

in modo che per $\mu > 0$ nasce un moto periodico.

Il fenomeno corrispondente nelle reazioni chimiche è detto oscillazione chimica.

Consideriamo il sistema

$$\dot{\mathbf{w}} = D\Delta \mathbf{w} + F(\mathbf{w}; \mu)$$

La dinamica di piccole perturbazioni attorno al punto stazionario $\mathbf{u}_0 = (0, \alpha)$ può essere descritta attraverso il seguente sviluppo in serie di Taylor:

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = L\mathbf{w} + M\mathbf{w}\mathbf{w} + N\mathbf{w}\mathbf{w}\mathbf{w} + \dots + D\nabla^2\mathbf{w}, \quad (3.17)$$

dove L denota la matrice Jacobiana il cui elemento di posto ij è dato da

$$L_{ij} = \frac{\partial F^i}{\partial \mathbf{u}^j} \Big|_{\mathbf{u}_0},$$

mentre $M\mathbf{w}\mathbf{w}$ e $N\mathbf{w}\mathbf{w}\mathbf{w}$ indicano i vettori le cui i -esime componenti sono date da

$$(Mab)_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 F^i}{\partial \mathbf{u}^j \partial \mathbf{u}^k} \Big|_{\mathbf{u}_0} a^j b^k$$

$$(Nabc)_i = \frac{1}{3!} \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial^3 F^i}{\partial \mathbf{u}^j \partial \mathbf{u}^k \partial \mathbf{u}^l} \Big|_{\mathbf{u}_0} a^j b^k c^l,$$

$$\text{con } \mathbf{u}^1 = \eta, \quad \mathbf{u}^2 = \vartheta, \quad F^1 = f(\eta, \vartheta), \quad F^2 = g(\eta, \vartheta).$$

La stabilità dello stato stazionario \mathbf{u}_0 è determinata dagli autovalori della matrice Jacobiana associata.

Assumendo che \mathbf{u}_0 perde stabilità a seguito di una biforcazione di Hopf per $\mu = 0$, l'autovalore λ sarà puramente immaginario: $\lambda = i\omega_0$.

Vicino al valore di biforcazione, le quantità \mathbf{w} , $L(\mu)$, $M(\mu)$, $N(\mu)$, $\lambda(\mu) = \sigma(\mu) + i\omega(\mu)$, e il parametro μ possono essere espansi in termini di un parametro formale h (definito come $h^2 = \mu$) legato all'ampiezza delle oscillazioni.

$$\mathbf{w} = h\mathbf{w}_1 + h^2\mathbf{w}_2 + h^3\mathbf{w}_3 + \dots$$

$$L = L_0 + h^2L_1 + h^4L_2 + \dots$$

$$M = M_0 + h^2M_1 + h^4M_2 + \dots$$

$$N = N_0 + h^2N_1 + h^4N_2 + \dots$$

$$\lambda = \lambda_0 + h^2\lambda_1 + h^4\lambda_2 + \dots$$

$$\mu = \mu_0 + h^2\mu_1 + h^4\mu_2 + \dots$$

$$\text{dove } \lambda_j = \sigma_j + i\omega_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Per ipotesi, $\sigma_0 = 0$, $\sigma_1 > 0$.

Denotiamo con \mathbf{U} l'autovettore destro di L_0 corrispondente all'autovalore $\lambda_0 = i\omega_0$:

$$L_0\mathbf{U} = \lambda_0\mathbf{U}, \quad L_0\bar{\mathbf{U}} = \bar{\lambda}_0\bar{\mathbf{U}}. \quad (3.18)$$

Analogamente denotiamo con \mathbf{U}^* l'autovettore sinistro di L_0 :

$$\mathbf{U}^* L_0 = \lambda_0 \mathbf{U}^*, \quad \overline{\mathbf{U}}^* L_0 = \overline{\lambda_0} \overline{\mathbf{U}}^*, \quad (3.19)$$

dove $\mathbf{U}^* \overline{\mathbf{U}} = \overline{\mathbf{U}}^* \mathbf{U} = 0$ e questi vettori sono normalizzati quando $\mathbf{U}^* \mathbf{U} = \overline{\mathbf{U}}^* \overline{\mathbf{U}} = 1$

Notiamo che λ_0 e λ_1 sono espressi come

$$\lambda_0 = i\omega_0 = \mathbf{U}^* L_0 \mathbf{U} \quad (3.20)$$

$$\lambda_1 = \sigma_1 + i\omega_1 = \mathbf{U}^* L_1 \mathbf{U} \quad (3.21)$$

Dato che λ ha una parte reale di ordine h^2 , riscaliamo opportunamente la variabile temporale introducendo la variabile lenta $\tau = h^2 t$.

Inoltre t e τ saranno considerati mutualmente indipendenti; ne segue che

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + h^2 \frac{\partial}{\partial \tau}$$

Per quanto concerne la modulazione spaziale, definiamo $s = hx$, pertanto l'operatore di derivata diventa

$$\nabla \rightarrow h\nabla_s.$$

Possiamo quindi considerare \mathbf{w} come una funzione di t , τ e s .

Sostituendo tutte le espansioni in (3.17) si ha:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + h^2 \frac{\partial}{\partial \tau} - h^2 D\nabla_s^2 - L_0 - h^2 L_1 - \dots \right) (h \mathbf{w}_1 + h^2 \mathbf{w}_2 + \dots) \\ & = h^2 M_0 \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1 + h^3 (2M_0 \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 + N_0 \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1) + O(h^4) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Questa equazione deve valere per ogni h , quindi raccogliendo i termini ai vari ordini si ottengono una serie di equazioni di bilancio della forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - L_0 \right) \mathbf{w}_\nu = B_\nu, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.23)$$

dove

$$B_1 = 0,$$

$$B_2 = M_0 \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1,$$

$$B_3 = - \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - L_1 - D\nabla_s^2 \mathbf{w}_1 + 2M_0 \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 + N_0 \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1 \right).$$

Per tali sistemi di equazioni lineari non omogenee, vale la seguente condizione di solvibilità:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/\omega_0} \mathbf{U}^* \cdot B_\nu e^{-i\omega_0 t} dt &= \int_0^{2\pi/\omega_0} \left[\mathbf{U}^* \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} - L_0 \right) \mathbf{w}_\nu \right] e^{-i\omega_0 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi/\omega_0} (i\omega_0 \mathbf{U}^* \cdot \mathbf{w}_\nu - i\omega_0 \mathbf{U}^* \cdot \mathbf{w}_\nu) e^{-i\omega_0 t} dt = 0, \end{aligned}$$

che si riduce a

$$\mathbf{U}^* \cdot B_\nu(\tau, s) = 0 \quad (3.24)$$

Per $\nu = 1$ si ha

$$\mathbf{w}_1(t, \tau, s) = A(\tau, s) \mathbf{U} e^{i\omega_0 t} + \text{c.c.}, \quad (3.25)$$

dove c.c. sta per complesso coniugato.

Per $\nu = 2$ si ha

$$B_2 = M_0(A^2 \mathbf{U} \mathbf{U} e^{2i\omega_0 t} + \bar{A}^2 \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{U}} e^{-2i\omega_0 t} + 2|A|^2 \mathbf{U} \bar{\mathbf{U}}),$$

pertanto la condizione di solvibilità (3.24) è automaticamente verificata e la soluzione è

$$\mathbf{w}_2 = A^2 \mathbf{w}_{20} e^{2i\omega_0 t} + |A|^2 \mathbf{w}_{21} + \bar{A}^2 \mathbf{w}_{22} e^{-2i\omega_0 t} \quad (3.26)$$

Sostituendo la (3.26) in (3.23) si ricavano

$$\mathbf{w}_{20} = -(L_0 - 2i\omega_0 I)^{-1} M_0 \mathbf{U} \mathbf{U}$$

$$\mathbf{w}_{21} = -2L_0^{-1} M_0 \mathbf{U} \bar{\mathbf{U}}$$

$$\mathbf{w}_{22} = \bar{\mathbf{w}}_{20} = -(L_0 + 2i\omega_0 I)^{-1} M_0 \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{U}}$$

Infine, sostituendo (3.25) e (3.26) in (3.23) quando $\nu = 3$ e imponendo la condizioni di solvibilità $\mathbf{U}^* \cdot B_3 = 0$, si ottiene:

$$B_3 = - \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - L_1 - D\nabla_s^2 \right) A \mathbf{U} + (2M_0 \mathbf{U} \mathbf{w}_{21} + 2M_0 \bar{\mathbf{U}} \mathbf{w}_{20} + 3N_0 \mathbf{U} \mathbf{U} \bar{\mathbf{U}}) |A|^2 A = 0, \quad (3.27)$$

da cui

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} = \lambda_1 A + d_1 \nabla_s^2 A - g_1 |A|^2 A, \quad (3.28)$$

dove

$$g_1 \equiv g'_1 + ig''_1 = -2 \mathbf{U}^* M_0 \mathbf{U} \mathbf{w}_{21} - 2 \mathbf{U}^* M_0 \bar{\mathbf{U}} \mathbf{w}_{20} - 3 \mathbf{U}^* N_0 \mathbf{U} \mathbf{U} \bar{\mathbf{U}} \quad (3.29)$$

$$d_1 \equiv d'_1 + d''_1 = \mathbf{U}^* D \mathbf{U} \quad (3.30)$$

L'equazione complessa di Ginzburg-Landau (3.28) spesso si trova in una forma riscaldata. Un'opportuna trasformazione potrebbe essere:

$$(\tau, s, A) \rightarrow (\sigma_1^{-1} \tau, \sqrt{d'_1/\sigma_1} s, \sqrt{\sigma_1/|g'_1|} A),$$

che porta a

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} = (1 + ic_0)A + (1 + ic_1)\nabla_s^2 A - (1 + ic_2)|A|^2 A,$$

con

$$c_0 = \frac{\omega_1}{\sigma_1}, \quad c_1 = \frac{d''_1}{d'_1}, \quad c_2 = \frac{g''_1}{g'_1}$$

Infine, con l'ulteriore trasformazione

$$A \rightarrow A \exp(ic_0 \tau)$$

si riesce ad eliminare il parametro c_0 e ottenere

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} = A + (1 + ic_1)\nabla_s^2 A - (1 + ic_2)|A|^2 A. \quad (3.31)$$

In Appendice vengono determinati i coefficienti dell'equazione complessa di Ginzburg-Landau per il modello di elettrodeposizione (2.5).

L'equazione complessa di Ginzburg-Landau ammette soluzioni di onda piana della forma

$$A_Q(s, \tau) = R_Q e^{i\vartheta_Q}, \quad \text{con} \quad \vartheta_Q = (Qs - \omega_Q \tau) \quad \text{e} \quad |Q| < 1, \quad (3.32)$$

che sostituita nella (3.31) ci dà

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} = \frac{dR_Q}{d\tau} e^{i\vartheta_Q} + i \frac{d\vartheta_Q}{d\tau} R_Q e^{i\vartheta_Q} = [1 - (1 + ic_2)R_Q^2] R_Q e^{i\vartheta_Q} - (1 + ic_1)Q^2 R_Q e^{i\vartheta_Q}.$$

Separando la parte reale dalla parte immaginaria ricaviamo

$$\begin{cases} \frac{dR_Q}{d\tau} = R_Q - R_Q^3 - Q^2 R_Q \\ \frac{d\vartheta_Q}{d\tau} = -c_2 R_Q^2 - c_1 Q^2 \end{cases}$$

da cui

$$R_Q = \sqrt{1 - Q^2} \quad \text{e} \quad \omega_Q = c_1 Q^2 + (1 - Q^2)c_2.$$

Analogamente a quanto esaminato in [23], la stabilità dell'onda piana $A_Q(s, \tau)$ può essere analizzata studiando l'evoluzione della soluzione perturbata

$$A(s, \tau) = (R_Q + u(s, \tau) + iv(s, \tau))e^{i\theta_Q},$$

dove $u(s, \tau)$ e $v(s, \tau)$ sono funzioni reali.

Sostituendo questa espressione di A in (3.31) e linearizzando rispetto a u e v si ricava la seguente equazione lineare alle derivate parziali bidimensionale:

$$\begin{pmatrix} \partial_\tau u \\ \partial_\tau v \end{pmatrix} = \left[-2R_Q^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} - 2Q \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ -1 & \beta \end{pmatrix} \partial_s + \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \partial_{ss} \right] \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Dato che l'equazione (3.33) è lineare sia in u che in v , possiamo considerare l'evoluzione temporale di ogni modo di Fourier indipendentemente:

$$\begin{aligned} u(s, \tau) &= u_0 e^{\lambda\tau + iks} \\ v(s, \tau) &= v_0 e^{\lambda\tau + iks} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Inserendo (3.34) in (3.33) si arriva al seguente problema lineare agli autovalori:

$$A \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix},$$

$$\text{con } A = \begin{pmatrix} -2R_Q^2 - 2Qik\beta - k^2 & -2Qik + k^2\beta \\ -2R_Q^2\alpha + 2Qik - \beta k^2 & -2Qik\beta - k^2 \end{pmatrix}.$$

La stabilità dell'onda piana $A_Q(s, \tau)$ è data dal segno della parte reale dei due autovalori λ_1 e λ_2 di A .

L'equazione caratteristica è:

$$\lambda^2 + 2(R_Q^2 + 2Qik\beta + k^2) + |A| = 0,$$

da cui

$$\lambda_{1,2} = -(R_Q^2 + 2Qik\beta + k^2) \pm \sqrt{R_Q^4 - 2R_Q^2\alpha\beta k^2 + 4Q^2k^2 - \beta^2k^4 + i(4\beta Qk^3 + 4R_Q^2\alpha Qk)}$$

Separando la parte reale e la parte immaginaria possiamo riscrivere l'equazione caratteristica nel seguente modo:

$$\lambda^2 + (a_1 + ia_2)\lambda + b_1 + ib_2 = 0, \quad (3.35)$$

dove

$$a_1 = 2(1 - Q^2 + k^2),$$

$$a_2 = 4c_1kQ,$$

$$b_1 = 2(1 + c_1c_2)(1 - Q^2)k^2 + (1 + c_1^2)k^4 - 4(1 + c_1^2)(kQ)^2,$$

$$b_2 = 4(c_1 - c_2)(1 - Q^2)kQ.$$

Per assegnati valori di Q e k , il cambio di stabilità si ha quando una delle radici dell'equazione (3.35) ha parte reale nulla mentre la parte reale dell'altra rimane negativa.

Dato che $|Q| < 1$ si ha che $a_1 = -(\Re\{\lambda_1\} + \Re\{\lambda_2\}) > 0$, dunque almeno una radice di (3.35) ha parte reale negativa.

Pertanto, la condizione critica per la stabilità può essere determinata richiedendo che un autovalore puramente immaginario $\lambda = i\nu$ soddisfi l'equazione (3.35).

Si ha quindi:

$$-\nu^2 + (a_1 + ia_2)i\nu + b_1 + ib_2 = 0,$$

da cui

$$\begin{cases} -\nu^2 - a_2\nu + b_1 = 0 \\ a_1\nu + b_2 = 0, \end{cases}$$

che porta alla seguente condizione di stabilità:

$$K(Q, k) \equiv b_2^2 - a_1a_2b_2 - a_1^2b_1 = 0. \quad (3.36)$$

Chiaramente, $K(Q, k) < 0$ implica stabilità, mentre $K(Q, k) > 0$ implica instabilità.

Comunque, la stabilità di A_Q finora discussa riguarda solo fluttuazioni di un assegnato valore di k .

La stabilità completa di A_Q richiede che

$$\max_k K(Q, k) \leq 0.$$

Un'analisi della stabilità per tutti i numeri d'onda Q e tutti i modi di Fourier k non è possibile. Tuttavia importanti informazioni possono essere ottenute considerando alcuni limiti per Q e k .

Cominciamo dapprima con $Q \simeq 1$ che corrisponde al caso in cui le ampiezze delle onde piane sono piccole (infatti $R_Q \simeq 0$).

Si ha

$$K(Q, k) \simeq K(1, k) = -4(1 + c_1^2)(k^2 - 4)k^6.$$

Poiché questa quantità è positiva per valori sufficientemente piccoli (non nulli) di k , le onde piane, in questo caso, sono sempre instabili.

Questo risultato non ci sorprende, in quanto l'onda piana con $Q = 1$ corrisponde allo stato stazionario omogeneo che diventa instabile in corrispondenza di una biforcazione di Hopf supercritica.

Consideriamo ora l'altro estremo, cioè $Q \simeq 0$, corrispondente al caso in cui l'onda piana $A_Q(s, \tau)$ descrive uno stato oscillatorio uniforme:

$$K(0, k) = -8(1 + k^2)^2 k^2 \left(1 + c_1 c_2 + \frac{1 + c_1^2}{2} k^2 \right).$$

La quantità $\delta \equiv 1 + c_1 c_2$ assume un ruolo decisivo per la stabilità: se $\delta > 0$ si ha stabilità in quanto $K(0, k) < 0$; se $\delta < 0$ si ha $K(0, k) > 0$ per valori di k sufficientemente piccoli, pertanto stavolta l'oscillazione uniforme è instabile.

Il parametro δ è chiamato parametro di instabilità di Benjamin-Feir-Newell.

Infine consideriamo la condizione critica per una generica Q ma rispetto a perturbazioni con $|k|$ piccolo.

Trascurando i termini di ordine superiore in k , la condizione di stabilità $K(Q, k) < 0$ ($k \neq 0$) si riduce a

$$(1 + c_1 c_2)(1 - Q^2) - 2(1 + c_2^2)Q^2 > 0.$$

Se $\alpha < 0$ questa condizione non è mai verificata, quindi non esistono onde piane stabili; viceversa, se $\alpha > 0$ esiste un valore critico Q_c di Q dato da

$$Q_c = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha + 2(1 + c_2^2)}}$$

tale che ogni onda piana con $|Q| > Q_c$ è instabile, mentre per $|Q| < Q_c$ le onde piane sono stabili.

L'equazione complessa di Stuart-Landau si ottiene semplicemente eliminando il termine di diffusione dall'equazione complessa di Ginzburg Landau, pertanto essa si presenta nella forma

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} = \lambda_1 A - g_1 |A|^2 A.$$

Definendo $A = R \exp(i\vartheta)$ possiamo spezzare l'equazione separando la parte reale da quella immaginaria:

$$\begin{cases} \frac{dR}{d\tau} = \sigma_1 R - g_1' R^3 \\ \frac{d\vartheta}{d\tau} = \omega_1 - g_1'' R^2 \end{cases}$$

La soluzione non banale è allora immediatamente determinata:

$$\begin{aligned} R &= R_s & \vartheta &= \bar{\omega}\tau + cost, \\ R_s &= \sqrt{\frac{\sigma_1}{|g_1'|}} & \bar{\omega} &= \omega_1 - g_1'' R_s^2 & \vartheta(\tau) &= \left(\omega_1 - \sigma_1 \frac{g_1''}{g_1'} \right) \tau \end{aligned}$$

Esprimendo la soluzione in termini del tempo ricaviamo che le oscillazioni delle concentrazioni chimiche sono governate dalla seguente espressione

$$\mathbf{w} = h \mathbf{w}_1 = h \{ \mathbf{U} R_s \exp[i\omega_0 + h^2 \bar{\omega}]t + c.c. \},$$

che descrive un piccolo ciclo limite.

Capitolo 4

Formazione di pattern in un dominio $2D$

Quando il dominio è bidimensionale, la biforcazione può essere regolare, come nel caso $1D$, oppure degenerare.

La possibilità che la biforcazione di Turing si sviluppi da un autovalore degenerare rende lo studio matematicamente più complicato ma dà origine a una ricca varietà di pattern come roll, quadrati, rombi, esagoni e altre strutture più complesse [24].

In un dominio rettangolare definito da $0 < x < L_x$ e $0 < y < L_y$, le soluzioni del sistema lineare (3.2) con condizioni al contorno di Neumann sono:

$$\mathbf{w} = \sum_{m,n \in \mathbb{N}} \mathbf{f}_{m,n} e^{\lambda(k_{mn}^2 t)} \cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right), \quad (4.1)$$

$$k_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{L_x} x\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y} y\right)^2 \quad (4.2)$$

dove $\mathbf{f}_{m,n}$ sono i coefficienti di Fourier delle condizioni iniziali; i valori $\lambda(k_{mn}^2)$ si ottengono dalla relazione di dispersione (2.6).

Quindi, l'insorgenza del pattern dipende dall'esistenza di coppie (m, n) tali che:

$$k_1^2 < k^2 \equiv \phi^2 + \psi^2 < k_2^2, \quad \text{dove} \quad \phi \equiv \frac{m\pi}{L_x}, \quad \psi \equiv \frac{n\pi}{L_y},$$

$$\lambda(k^2) > 0,$$

cioè per $d > d_c$.

Nel prosieguo ci limiteremo al caso in cui c'è un solo numero d'onda instabile \bar{k}_c , ammissibile per le condizioni di Neumann, che cade all'interno della banda (k_1, k_2) .

In un dominio bidimensionale, dato $\bar{k}_c \in [k_1, k_2]$, possono esistere una, due o più coppie (m, n) tali che la condizione

$$\bar{k}_c^2 = \phi^2 + \psi^2 = \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 \quad (4.3)$$

è soddisfatta e in tal caso l'autovalore λ avrà rispettivamente molteplicità singola, doppia o maggiore di due. La molteplicità dell'autovalore, e quindi del pattern finale, dipende strettamente dalle dimensioni del dominio L_x e L_y .

4.1 Analisi debolmente non lineare

In questa sezione effettuiamo un'analisi debolmente non lineare per ottenere l'equazione di ampiezza del pattern in prossimità del valore critico di biforcazione, utilizzando il metodo perturbativo delle scale multiple visto nel capitolo precedente.

Come già visto nel Capitolo 3, consideriamo le espansioni di d , \mathbf{w} e t (3.3) e le sostituiamo in (3.2).

All'ordine h si ha

$$L^{d_c} \mathbf{w}_1 = 0, \quad (4.4)$$

la cui soluzione, dovendo soddisfare alle condizioni di flusso nullo, è

$$\mathbf{w}_1 = \sum_{i=1}^m \bar{A}_i(T_1, T_2) \mathbf{r} \cos(\phi_i x) \cos(\psi_i y),$$

dove m è la molteplicità dell'autovalore.

Restringeremo la nostra analisi ai casi in cui la molteplicità è $m = 1$ o $m = 2$.

4.1.1 Autovalore semplice, $m = 1$

- $O(h)$

Se l'autovalore è semplice, cioè $m = 1$, la soluzione del problema lineare (4.4) è

$$\mathbf{w}_1 = \bar{A}_1(T_1, T_2) \mathbf{r} \cos(\phi_1 x) \cos(\psi_1 y). \quad (4.5)$$

- $O(h^2)$

$$L^{dc} \mathbf{w}_2 = \mathbf{F}^{(1)} \equiv \frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial T_1} - d^{(1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla^2 \mathbf{w}_1 - \frac{1}{4} F_1 \bar{A}_1^2 \sum_{i,j=0,2} \cos(i\phi_1 x) \cos(j\psi_1 y), \quad (4.6)$$

Sostituendo l'espressione (4.5) in (4.6), il vettore $\mathbf{F}^{(1)}$ risulta ortogonale al nucleo dell'operatore aggiunto di L^{dc} semplicemente imponendo $T_1 = 0$ e $d^{(1)} = 0$ e la soluzione è

$$\mathbf{w}_2 = \bar{A}_1^2 \sum_{i,j=0,2} \mathbf{w}_{2ij} \cos(i\phi_2 x) \cos(j\psi_2 y), \quad (4.7)$$

dove i vettori \mathbf{w}_{2ij} sono le soluzioni dei sistemi lineari scritti in Appendice E.

- $O(h^3)$

$$L^{dc} \mathbf{w}_3 = \mathbf{G}^{(1)} \equiv \frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial T_2} + \frac{\partial \mathbf{w}_2}{\partial T_1} - d^{(1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla^2 \mathbf{w}_2 - d^{(2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla^2 \mathbf{w}_1 - \mathbf{G}_1^{(1)}, \quad (4.8)$$

Sostituendo l'espressione (4.7) in (4.8) (e ricordando che $T_1 = 0$ e $d^{(1)} = 0$), il vettore $\mathbf{G}^{(1)}$ contiene termini secolari e quindi non soddisfa automaticamente la condizione di Fredholm.

Imponendo la condizione di compatibilità si ottiene l'equazione di Stuart-Landau per l'ampiezza $\bar{A}_1(T_2)$:

$$\frac{dA}{dT_2} = \sigma \bar{A}_1 - L \bar{A}_1^3, \quad (4.9)$$

dove le espressioni del vettore $\mathbf{G}_1^{(1)}$ e dei coefficienti σ e L sono riportati in Appendice E.

Mentre σ è sempre positivo, L cambia segno, pertanto si possono distinguere due casi: il caso supercritico, quando $L > 0$, e il caso subcritico, quando $L < 0$.

Tenendo in considerazione $\frac{\partial \bar{A}_1}{\partial T_2} = \sigma \bar{A}_1 - L \bar{A}_1^3$, la condizione di solvibilità è soddisfatta e la soluzione \mathbf{w}_3 è

$$\mathbf{w}_3 = \bar{A}_1 \mathbf{w}_{311}^{(1)} \cos(\phi_1 x) \cos(\psi_1 y) + \bar{A}_1^3 \sum_{i,j=1,3} \mathbf{w}_{3ij} \cos(i\phi_1 x) \cos(j\psi_1 y), \quad (4.10)$$

dove le espressioni dei vettori in (4.10) sono riportati in Appendice E.

- $O(h^4)$

$$\begin{aligned} L^{dc} \mathbf{w}_4 = \mathbf{H}^{(1)} \equiv & \frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial T_3} + \frac{\partial \mathbf{w}_2}{\partial T_2} + \frac{\partial \mathbf{w}_3}{\partial T_1} - d^{(1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla^2 \mathbf{w}_3 - d^{(2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla^2 \mathbf{w}_2 \\ & - d^{(3)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla^2 \mathbf{w}_1 - \mathbf{H}_1^{(1)}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

Sostituendo l'espressione (4.10) in (4.11), il vettore $\mathbf{H}^{(1)}$ risulta ortogonale al nucleo dell'operatore aggiunto di L^{dc} semplicemente imponendo (oltre a $T_1 = 0$ e $d^{(1)} = 0$) $T_3 = 0$ e $d^{(3)} = 0$ e la soluzione è

$$\mathbf{w}_4 = \bar{A}_1^2 \sum_{i,j=0,2} \mathbf{w}_{4ij}^{(1)} \cos(i\phi_1 x) \cos(j\psi_1 y) + \bar{A}_1^4 \sum_{i,j=0,2,4} \mathbf{w}_{4ij} \cos(i\phi_1 x) \cos(j\psi_1 y), \quad (4.12)$$

dove i vettori in (4.12) e $\mathbf{H}_1^{(1)}$ sono riportati in Appendice E.

- $O(h^5)$

$$\begin{aligned} L^{dc} \mathbf{w}_5 = \mathbf{P}^{(1)} \equiv & \frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial T_4} + \frac{\partial \mathbf{w}_2}{\partial T_3} + \frac{\partial \mathbf{w}_3}{\partial T_2} + \frac{\partial \mathbf{w}_4}{\partial T_1} - d^{(1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla^2 \mathbf{w}_4 \\ & - d^{(2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla^2 \mathbf{w}_3 - d^{(3)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla^2 \mathbf{w}_2 - d^{(4)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla^2 \mathbf{w}_1 \\ & - \mathbf{P}_1^{(1)} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Sostituendo l'espressione (4.12) in (4.13) (dopo aver rimosso in termini contenenti $T_1, T_3, d^{(1)}, d^{(2)}$), il vettore $\mathbf{P}^{(1)}$ contiene termini che non sono automaticamente ortogonali al vettore ψ .

La condizione di compatibilità porta all'equazione di Stuart-Landau di quinto grado per l'ampiezza \bar{A}_1 :

$$\frac{d\bar{A}_1}{dT_2} = \bar{\sigma}\bar{A}_1 - \bar{L}\bar{A}_1^3 + \bar{Q}\bar{A}_1^5, \quad (4.14)$$

dove il vettore $P_1^{(1)}$ e i coefficienti $\bar{\sigma}$, \bar{L} e \bar{Q} sono riportati in Appendice E.

4.1.2 Autovalore doppio e termini secolari a $O(h^3)$

- $O(h)$

Se la molteplicità è $m = 2$, la soluzione del problema lineare $L^{dc} = 0$, all'ordine h è

$$\mathbf{w}_1 = \bar{A}_1(T_1, T_2) \mathbf{r} \cos(\phi_1 x) \cos(\psi_1 y) + \bar{A}_2(T_1, T_2) \mathbf{r} \cos(\phi_2 x) \cos(\psi_2 y). \quad (4.15)$$

Supponiamo che valgano le condizioni di non-risonanza:

$$\begin{aligned} \phi_i + \phi_j \neq \phi_j \quad \circ \quad \psi_i - \psi_j \neq \psi_j \\ \text{e} \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\phi_i + \phi_j \neq \phi_j \quad \circ \quad \psi_i - \psi_j \neq \psi_j$$

- $O(h^2)$

$$\begin{aligned} L^{dc} \mathbf{w}_2 = F^{(2)} &\equiv \frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial T_1} - d^{(1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla^2 \mathbf{w}_1 - \frac{1}{4} F_1 \bar{A}_1^2 \sum_{i,j=0,2} \cos(i\phi_1 x) \cos(j\psi_1 y) \\ &- \frac{1}{4} F_1 \bar{A}_2^2 \sum_{i,j=0,2} \cos(i\phi_1 x) \cos(j\psi_1 y) \\ &- \frac{1}{2} F_1 \bar{A}_1 \sum_{m,n=-1,1} \cos((\phi_1 + m\phi_2)x) \cos((\psi_1 + n\psi_2)y). \end{aligned} \quad (4.17)$$

I termini in $\cos((\phi_1 \pm \phi_2)x) \cos((\psi_1 \pm \psi_2)x)$, tenendo conto delle condizioni di non-risonanza, verificano automaticamente la condizione di compatibilità.

Imponendo l'alternativa di Fredholm $\langle F^{(1)}, \psi \rangle = 0$, si ha

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \bar{A}_1}{\partial T_1} \mathbf{r}, \tilde{\psi} \right) &= - \left(d^{(1)} \bar{k}_c^2 \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix} \mathbf{w}_1, \tilde{\psi} \right), \\ \Rightarrow \frac{\partial \bar{A}_i}{\partial T_1} &= - \frac{d^{(1)} \bar{k}_c^2 M M^*}{1 + M M^*} \bar{A}_i \end{aligned}$$

Come nel caso in cui la molteplicità è $m = 1$, otteniamo un sistema che non dà informazioni sull'ampiezza del pattern; imponiamo pertanto che $d^{(1)} = 0$ e $T_1 = 0$ per sopprimere i termini secolari a questo livello.

Adesso la condizione di solvibilità è verificata e la soluzione è

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_2 &= \bar{A}_1^2 \sum_{i,j=0,2} \mathbf{w}_{2ij}^1 \cos(i\phi_2 x) \cos(j\psi_2 y) + \bar{A}_2^2 \sum_{i,j=0,2} \mathbf{w}_{2ij}^2 \cos(i\phi_2 x) \cos(j\psi_2 y) \\ &+ \bar{A}_1 \bar{A}_2 \sum_{m,n=-1,1} \mathbf{w}_{2mn} \cos((\phi_1 + m\phi_2)x) \cos((\psi_1 + n\psi_2)y), \end{aligned} \quad (4.18)$$

dove i vettori \mathbf{w}_{2ij}^1 , \mathbf{w}_{2ij}^2 , \mathbf{w}_{2mn} sono calcolati in Appendice F.

- $O(h^3)$

$$\begin{aligned} L^{dc} \mathbf{w}_3 &= G^{(2)} \equiv \left[\frac{d\bar{A}_1}{T_2} \mathbf{r} + \bar{A}_1 G_4^{(21)} - \bar{A}_1^3 G_5^{(21)} - \bar{A}_1 \bar{A}_2^2 G_6^{(21)} \right] \cos(\phi_1 x) \cos(\psi_1 y) \\ &+ \left[\frac{d\bar{A}_2}{T_2} \mathbf{r} + \bar{A}_2 G_4^{(22)} - \bar{A}_2^3 G_5^{(22)} - \bar{A}_1^2 \bar{A}_2 G_6^{(22)} \right] \cos(\phi_2 x) \cos(\psi_2 y) \\ &+ \bar{G}^{(2)} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Tutti i dettagli si trovano in Appendice F.

Imponendo la condizione di solvibilità $\langle G^{(2)}, \psi \rangle = 0$ si ottengono le due seguenti equazioni di Landau per le ampiezze \bar{A}_1 e \bar{A}_2 :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{A}_1}{dT_2} &= \sigma \bar{A}_1 - L_1 \bar{A}_1^3 + \Omega_1 \bar{A}_1 \bar{A}_2^2, \\ \frac{d\bar{A}_2}{dT_2} &= \sigma \bar{A}_2 - L_2 \bar{A}_2^3 + \Omega_2 \bar{A}_1^2 \bar{A}_2, \end{aligned} \quad (4.20)$$

dove le espressioni per σ , L_i , Ω_i ($i = 1, 2$) sono riportate in Appendice F.

4.1.3 Autovalore doppio e termini secolari a $O(h^2)$

- $O(h)$

Se la molteplicità dell'autovalore è $m = 2$, all'ordine h la soluzione è data da (4.15).

Se stavolta supponiamo che siano soddisfatte le condizioni di risonanza

$$\begin{aligned} \phi_i + \phi_j = \phi_j \quad \text{e} \quad \psi_i - \psi_j = \psi_j \\ \text{o} \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\phi_i + \phi_j = \phi_j \quad \text{e} \quad \psi_i - \psi_j = \psi_j$$

con $i, j = 1, 2$ e $i \neq j$, allora i termini secolari compaiono all'ordine h^2 .

- $O(h^2)$

$$\begin{aligned} L^{d_c} \mathbf{w}_2 = \mathbf{F}^{(3)} \equiv & \left(\frac{d\bar{A}_1}{dT_1} \mathbf{r} + \bar{k}_c^2 d^{(1)} \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix} \bar{A}_1 - F_1 \bar{A}_1 \bar{A}_2 \right) \cos(\phi_1 x) \cos(\psi_1 y) + \\ & + \left(\frac{d\bar{A}_2}{dT_1} \mathbf{r} + \bar{k}_c^2 d^{(1)} \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix} \bar{A}_2 - \frac{1}{4} F_1 \bar{A}_1^2 \right) \cos(\phi_2 x) + F^{(3)*}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Imponendo la condizione di compatibilità $\langle \mathbf{F}^{(3)}, \psi \rangle = 0$, si ottengono le equazioni per le ampiezze \bar{A}_1 e \bar{A}_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial T_1} &= \sigma \bar{A}_1 - L \bar{A}_1 \bar{A}_2 \\ \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial T_1} &= \sigma \bar{A}_2 - \frac{L}{4} \bar{A}_1^2. \end{aligned} \tag{4.23}$$

I dettagli delle espressioni per il vettore $\mathbf{F}^{(3)}$ e per i coefficienti σ e L sono riportati in Appendice F.

Le soluzioni stazionarie di (4.23) sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \sigma \bar{A}_1 - L \bar{A}_1 \bar{A}_2 = 0 \\ \sigma \bar{A}_2 - \frac{L}{4} \bar{A}_1^2 = 0 \end{cases}$$

ossia quella banale e $Q^\pm = (\pm \frac{2\sigma}{L}, \frac{\sigma}{L})$.

Gli autovalori della matrice Jacobiana associata ai due punti Q^\pm sono $\lambda_1 = -\sigma$ e $\lambda_2 = 2\sigma$, dunque si tratta di soluzioni sempre instabili.

Pertanto l'analisi debolmente non lineare, a quest'ordine, non consente di predire l'ampiezza del pattern.

Si tratta di un caso di biforcazione subcritica e l'analisi asintotica deve essere spinta a ordine maggiori per ottenere risultati qualitativamente affidabili.

Tenendo in considerazione le equazioni di Landau (4.23) la condizione di solvibilità è soddisfatta e la soluzione è

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_2 = & \left(\bar{A}_1 \mathbf{w}_{211}^{1(1)} + \bar{A}_1 \bar{A}_2 \mathbf{w}_{211}^{1(2)} \right) \cos(\phi_1 x) \cos(\psi_1 y) + \left(\bar{A}_2 \mathbf{w}_{211}^{2(1)} + \bar{A}_1^2 \mathbf{w}_{211}^{2(2)} \right) \cos(\phi_2 x) \\ & + \bar{A}_1^2 \left(\mathbf{w}_{200}^1 + \mathbf{w}_{202}^1 \cos(2\psi_1 y) + \mathbf{w}_{222}^1 \cos(2\phi_1 x) \cos(2\psi_1 y) \right) \\ & + \bar{A}_2^2 \left(\mathbf{w}_{200}^2 + \mathbf{w}_{220}^2 \cos(2\phi_2 x) \right) + \bar{A}_1 \bar{A}_2 \mathbf{w}_{231} \cos(3\phi_1 x) \cos(\psi_1 y), \end{aligned} \quad (4.24)$$

dove i vettori in (4.24) sono calcolati in Appendice F.

- $O(h^3)$

$$\begin{aligned} L^{d_c} \mathbf{w}_3 = G^{(3)} \equiv & \\ \equiv & \left[\frac{d\bar{A}_1}{T_2} \mathbf{r} + \bar{A}_1 G_4^{(31)} + \bar{A}_1 \bar{A}_2 G_5^{(31)} + \bar{A}_1^3 G_6^{(31)} + \bar{A}_1 \bar{A}_2^2 G_7^{(31)} \right] \cos(\phi_1 x) \cos(\psi_1 y) \\ & + \left[\frac{d\bar{A}_2}{T_2} \mathbf{r} + \bar{A}_2 G_4^{(32)} + \bar{A}_1^2 G_5^{(32)} + \bar{A}_2^3 G_6^{(32)} + \bar{A}_1^2 \bar{A}_2 G_7^{(32)} \right] \cos(\phi_2 x) \cos(\psi_2 y) \\ & + \bar{G}^{(3)} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Tutti i dettagli si trovano in Appendice F.

La condizione di solvibilità $\langle G^{(2)}, \psi \rangle = 0$ porta a:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{A}_1}{dT} = \bar{\sigma}_1 \bar{A}_1 - \bar{L}_1 \bar{A}_1 \bar{A}_2 + \bar{\alpha}_1 \bar{A}_1^3 + \bar{\beta}_1 \bar{A}_1 \bar{A}_2^2 \\ \frac{d\bar{A}_2}{dT} = \bar{\sigma}_2 \bar{A}_2 - \bar{L}_2 \bar{A}_1^2 + \bar{\alpha}_2 \bar{A}_2^3 + \bar{\beta}_2 \bar{A}_1^2 \bar{A}_2, \end{cases} \quad (4.26)$$

dove le espressioni dei coefficienti presenti in (4.26) sono riportate in Appendice F.

Capitolo 5

Simulazioni numeriche e confronti tra le soluzioni

In questo capitolo usiamo metodi numerici per risolvere il sistema (3.2) su un dominio rettangolare e per ogni caso studiato nel capitolo precedente ricaviamo il pattern corrispondente e il relativo spettro della soluzione numerica.

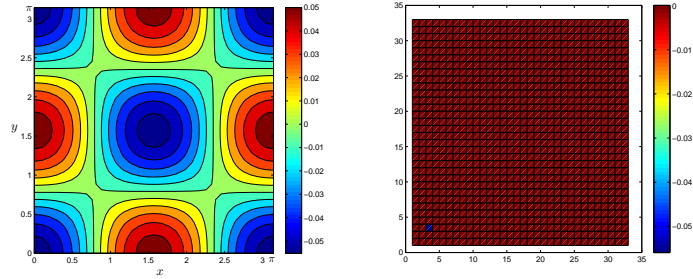
5.1 Autovalore semplice

Quando σ e L sono entrambi positivi, la soluzione dell'equazione di Stuart-Landau (4.9) evolve verso lo stato stazionario $\bar{A}_{1\infty} = \sqrt{\sigma/L}$.

Quindi, la soluzione del sistema di reazione-diffusione (3.2) è data da

$$\mathbf{w} = h \mathbf{r} \bar{A}_{1\infty} \cos(\phi x) \cos(\psi y) + O(h^2) \quad (5.1)$$

Queste soluzioni sono pattern rombici e precisamente quadrati nel caso in cui $\phi = \psi$ e roll quando ϕ o ψ sono uguali a zero.



(a) soluzione numerica. (b) spettro della soluzione.

Figura 5.1: I valori dei parametri sono: $A_1 = 24$, $A_2 = 40$, $B = 78$, $C = 10$, $k_2 = 5.39$, $k_3 = 2$, $\alpha = 0.25$, $\gamma = 0.2$. Con tali valori assegnati, $\bar{k}_c^2 = 8$ e $d_c = 16.8567$.

Fissiamo i parametri del sistema in modo che vi sia un unico modo instabile che soddisfi le condizioni al contorno e tale per cui vi sia una biforcazione supercritica (σ e L entrambi positivi).

Con la scelta dei parametri effettuata risulta $\bar{k}_c^2 = 8$, pertanto in un dominio quadrato di dimensioni $L_x = L_y = \pi$, esiste una sola coppia $(m, n) = (2, 2)$ tale che l'uguaglianza (4.2) sia soddisfatta.

In questo caso il sistema ammette pattern quadrati e la soluzione predetta dall'analisi debolmente non lineare è

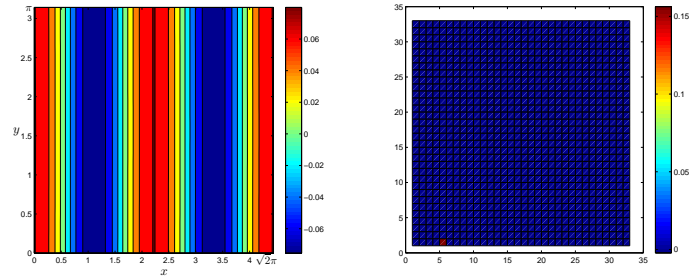
$$\mathbf{w} = h \mathbf{r} \bar{A}_{1\infty} \cos(2x) \cos(2y) + O(h^2) \tag{5.2}$$

In Figura 5.1 mostriamo il pattern risultante e il corrispondente spettro della soluzione numerica.

Con un'altra scelta dei parametri nel dominio $L_x = \sqrt{2}\pi$, $L_y = \pi$ risulta $\bar{k}_c^2 = 8$ e l'unica coppia ammissibile è $(4, 0)$: in questo caso il sistema ammette roll e la soluzione asintotica è

$$\mathbf{w} = h \mathbf{r} \bar{A}_{1\infty} \cos(2\sqrt{2}x) + O(h^2) \tag{5.3}$$

In Figura 5.2 mostriamo il pattern ottenuto e il corrispondente spettro della soluzione numerica.



(a) soluzione numerica.

(b) spettro della soluzione.

Figura 5.2: I valori dei parametri sono: $A_1 = 25$, $A_2 = 25$, $B = 30$, $C = 10$, $k_2 = 9.4$, $k_3 = 2$, $\alpha = 0.25$, $\gamma = 0.211$. Con tali valori assegnati, $\bar{k}_c^2 = 8$ e $d_c = 23.1977$.

5.2 Autovalore doppio e termini secolari a $O(h^3)$

Se la molteplicità dell'autovalore è due e valgono le condizioni di non risonanza, allora i termini secolari appaiono a $O(h^3)$ e la soluzione asintotica del sistema (3.2) è

$$\mathbf{w} = h \mathbf{r} \left(\bar{A}_{1\infty} \cos(\phi_1 x) \cos(\psi_1 y) + \bar{A}_{2\infty} \cos(\phi_2 x) \cos(\psi_2 y) \right) + O(h^2), \quad (5.4)$$

dove $(\bar{A}_{1\infty}, \bar{A}_{2\infty})$ è uno stato stazionario stabile del sistema (4.20).

Le soluzioni stazionarie del sistema (4.20) sono:

$$P_0 = (0, 0); \quad P_1^\pm \equiv \left(\pm \sqrt{\frac{\sigma}{L_1}}, 0 \right); \quad P_2^\pm \equiv \left(0, \pm \sqrt{\frac{\sigma}{L_2}} \right);$$

$$P_3^{(\pm, \pm)} \equiv \left(\pm \sqrt{\frac{\sigma(L_2 + \Omega_1)}{L_1 L_2 - \Omega_1 \Omega_2}}, \pm \sqrt{\frac{\sigma(L_1 + \Omega_2)}{L_1 L_2 - \Omega_1 \Omega_2}} \right),$$

dove la prima e la seconda coordinata sono rispettivamente l'ampiezza $\bar{A}_{1\infty}$ e l'ampiezza $\bar{A}_{2\infty}$.

Prima di analizzare la stabilità dei punti di equilibrio, occorre garantire che essi siano significativi, cioè che abbiano coordinate reali.

Considerato che $\sigma > 0$, la condizione di esistenza per i punti P_1^\pm è che $L_1 > 0$; la condizione di esistenza per P_2^\pm è che $L_2 > 0$; infine per i punti $P_3^{(\pm, \pm)}$ si possono distinguere due casi:

$$(a) \begin{cases} L_1 L_2 - \Omega_1 \Omega_2 < 0 \\ L_1 + \Omega_2 < 0 \\ L_2 + \Omega_1 < 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (b) \begin{cases} L_1 L_2 - \Omega_1 \Omega_2 > 0 \\ L_1 + \Omega_2 > 0 \\ L_2 + \Omega_1 > 0 \end{cases} .$$

A questo punto si può passare all'analisi della loro stabilità mediante lo studio degli autovalori della matrice Jacobiana associata a ciascuno di loro.

La matrice Jacobiana è:

$$M = \begin{pmatrix} \sigma - 3L_1 \bar{A}_1^2 + \Omega_1 \bar{A}_2^2 & 2\Omega_1 \bar{A}_1 \bar{A}_2 \\ 2\Omega_2 \bar{A}_1 \bar{A}_2 & \sigma - 3L_2 \bar{A}_2^2 + \Omega_2 \bar{A}_1^2 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori associati al punto banale P_0 sono $\lambda_{1,2} = \sigma > 0$, pertanto P_0 è un punto di equilibrio sempre instabile.

Gli autovalori associati a P_1^\pm sono $\lambda_1 = -2\sigma < 0$ e $\lambda_2 = \sigma + \Omega_2 \frac{\sigma}{L_1}$, che è negativo se $L_1 + \Omega_2 < 0$.

Nel caso di P_2^\pm si ha invece $\lambda_1 = -2\sigma < 0$ e $\lambda_2 = \sigma + \Omega_1 \frac{\sigma}{L_2}$, che è negativo se $L_2 + \Omega_1 < 0$.

Per i rimanenti quattro punti $P_3^{(\pm, \pm)}$, gli autovalori della corrispondente matrice sono:

$$\lambda_1 = -2\sigma < 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -2\sigma \frac{L_1 L_2 + L_1 \Omega_1 + L_2 \Omega_2 + \Omega_1 \Omega_2}{L_1 L_2 - \Omega_1 \Omega_2} .$$

Nel caso (a) l'autovalore $\lambda_2 > 0 \Leftrightarrow (L_1 + \Omega_2)(L_2 + \Omega_1) < 0$, il che viola le condizioni di esistenza, pertanto i punti sono instabili;

nel caso (b), invece, risulta che $(L_1 + \Omega_2)(L_2 + \Omega_1) > 0$, in accordo alle condizioni di esistenza, pertanto anche l'autovalore λ_2 è negativo e quindi i punti sono stabili.

I risultati dell'analisi di stabilità lineare degli otto punti di equilibrio non banali sono riassunti nella seguente tabella:

Equilibri	Esistenza	Stabilità
P_1^\pm	$L_1 > 0$	$L_1 + \Omega_2 < 0$
P_2^\pm	$L_2 > 0$	$L_2 + \Omega_1 < 0$
$P_3^{(\pm, \pm)}$	$\begin{cases} L_1 L_2 - \Omega_1 \Omega_2 < 0 \\ L_1 + \Omega_2 < 0 \\ L_2 + \Omega_1 < 0 \end{cases}$	sempre instabile
	$\begin{cases} L_1 L_2 - \Omega_1 \Omega_2 > 0 \\ L_1 + \Omega_2 > 0 \\ L_2 + \Omega_1 > 0 \end{cases}$	sempre stabile

Tabella 5.1: Esistenza e stabilità dei punti stazionari di (4.20).

Dalla Tabella 5.1 si evince che quando $P_3^{(\pm, \pm)}$ esiste ed è stabile, gli equilibri P_i^\pm , con $i = 1, 2$, sono instabili.

Dunque, quando si forma un pattern, ci sono due possibili comportamenti asintotici della soluzione: soluzioni stazionarie con modi misti in corrispondenza degli equilibri stabili $P_3^{(\pm, \pm)}$ e soluzioni stazionarie con un singolo modo in corrispondenza di P_i^\pm .

Notiamo anche che, per un dominio quadrato, c'è simmetria tra i modi (cioè $\phi_1 = \psi_2$ e $\phi_2 = \psi_1$) e si ha sempre che $L_1 = L_2$ e $\Omega_1 = \Omega_2$; pertanto le condizioni per l'esistenza e la stabilità di $P_1^{(\pm)}$ e P_2^\pm coincidono.

Quando una delle due ampiezze aintotiche $\bar{A}_{1\infty}$ o $\bar{A}_{2\infty}$ è nulla le soluzioni sono pattern rombici come quelli descritti nel caso $m = 1$; quando invece entrambe le ampiezze sono non nulle nascono delle strutture più complesse.

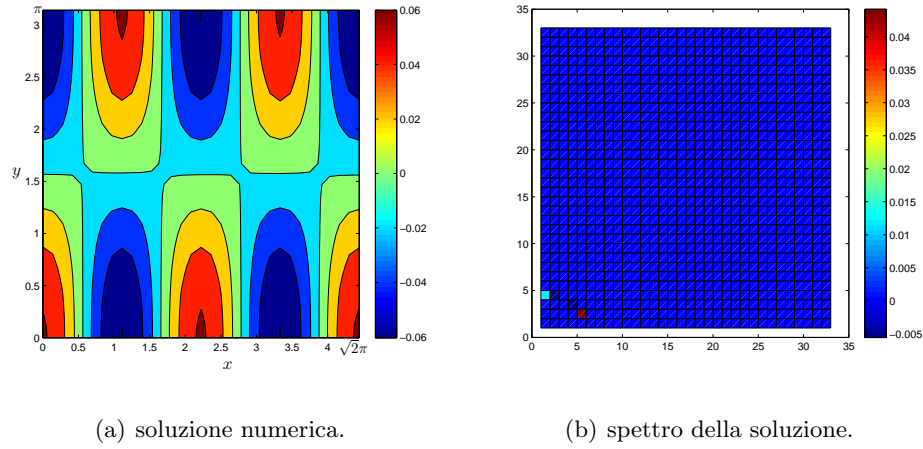


Figura 5.3: I valori dei parametri sono: $A_1 = 25$, $A_2 = 10$, $B = 126$, $C = 10$, $k_2 = 4$, $k_3 = 1$, $\alpha = 0.2$, $\gamma = 0.1$. Con tali valori assegnati, $\bar{k}_c^2 = 9$ e $d_c = 22.9994$.

Nel terzo test numerico, consideriamo un dominio rettangolare in cui $L_x = \sqrt{2}\pi$ e $L_y = \pi$ e fissiamo i parametri in modo che l'unico modo instabile ammesso sia $\bar{k}_c^2 = 9$. Le coppie che soddisfano la condizione (4.2) sono: $(0, 3)$ e $(4, 1)$. In questo caso gli equilibri $P_3^{(\pm, \pm)}$ e P_1^\pm sono instabili mentre gli stati stazionari P_2^\pm sono stabili.

La soluzione predetta dall'analisi debolmente non lineare è:

$$\mathbf{w} = h \mathbf{r} \bar{A}_{2\infty} \cos(2\sqrt{2}x) \cos(y) + O(h^2), \quad (5.5)$$

dove $\bar{A}_{2\infty}$ è la coordinata non nulla dei punti P_2^\pm (tra i due, il punto di equilibrio verso cui evolverà il sistema dipende dalle condizioni iniziali).

La Figura 5.3 mostra il pattern risultante e il corrispondente spettro della soluzione numerica.

Nel quarto test numerico consideriamo il dominio quadrato $L_x = L_y = \sqrt{2}\pi$ e fissiamo i parametri così da avere come unico modo instabile $\bar{k}_c^2 = 8.5$.

Le coppie ammesse sono pertanto $(1, 4)$ e $(4, 1)$.

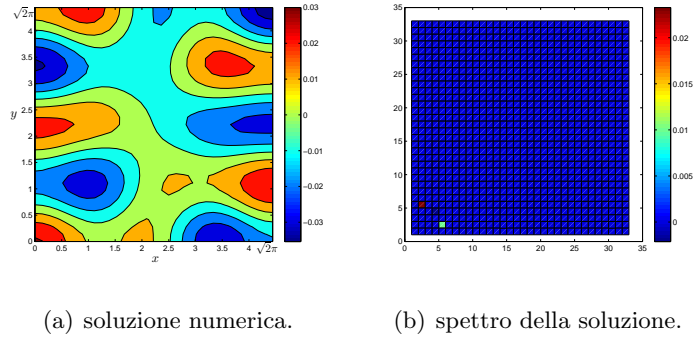


Figura 5.4: I valori dei parametri sono: $A_1 = 24$, $A_2 = 50$, $B = 62$, $C = 10$, $k_2 = 9.5$, $k_3 = 2$, $\alpha = 0.25$, $\gamma = 0.377$. Con tali valori assegnati, $\bar{k}_c^2 = 8.5$ e $d_c = 27.7165$.

Con questa scelta dei parametri, risulta che i punti P_i^\pm sono instabili mentre i punti $P_3^{(\pm, \pm)}$ sono stabili, pertanto la soluzione approssimata al primo ordine è

$$\mathbf{w} = h \mathbf{r} \left(\bar{A}_{1\infty} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{4y}{\sqrt{2}}\right) + \bar{A}_{2\infty} \cos\left(\frac{4x}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) \right) + O(h^2), \quad (5.6)$$

dove $(\bar{A}_{1\infty}, \bar{A}_{2\infty})$ sono le coordinate di uno dei quattro punti di equilibrio $P_3^{(\pm, \pm)}$.

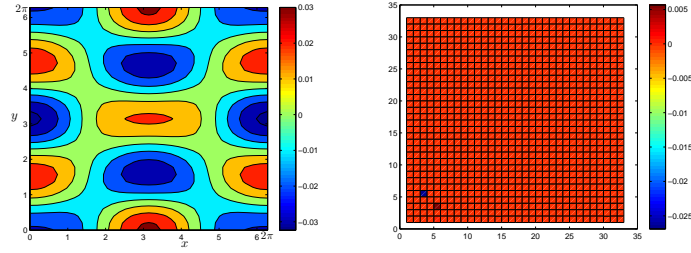
In Figura 5.4 mostriamo il pattern emergente e il corrispondente spettro della soluzione numerica.

Rimanendo ancora nel caso in cui solo i punti $P_3^{(\pm, \pm)}$ esistono e sono stabili e attribuendo nuovi valori ai parametri del sistema, è possibile ottenere altre forme di pattern: scegliamo i parametri del sistema in modo da avere $\bar{k}_c^2 = 5$ su un dominio quadrato di dimensioni $L_x = L_y = 2\pi$. Lo stato stazionario è linearmente instabile in corrispondenza delle due coppie $(2, 4)$ e $(4, 2)$.

Se consideriamo solo il punto di equilibrio $P_3^{(+, +)}$, allora la soluzione approssimata al primo ordine è

$$\mathbf{w} = h \mathbf{r} \left(\bar{A}_{1\infty} \cos(x) \cos(2y) + \bar{A}_{2\infty} \cos(2x) \cos(y) \right) + O(h^2) \quad (5.7)$$

In Figura 5.5 mostriamo il pattern corrispondente assieme allo spettro della soluzione numerica.



(a) soluzione numerica.

(b) spettro della soluzione.

Figura 5.5: I valori dei parametri sono: $A_1 = 23$, $A_2 = 30$, $B = 60$, $C = 6$, $k_2 = 8$, $k_3 = 2.51$, $\alpha = 0.55$, $\gamma = 0.1$. Con tali valori assegnati, $\bar{k}_c^2 = 5$ e $d_c = 29.6732$.

5.3 Autovalore doppio e termini secolari a $O(h^2)$

Se la molteplicità dell'autovalore è due e stavolta valgono le condizioni di risonanza, allora i termini secolari appaiono a $O(h^2)$ e la soluzione approssimata al primo ordine è

$$\mathbf{w} = h \mathbf{r} \left(\bar{A}_{1\infty} \cos(\phi_1 x) \cos(\sqrt{3}\psi_1 y) + \bar{A}_{2\infty} \cos(2\phi_1 x) \right) + O(h^2), \quad (5.8)$$

dove $(\bar{A}_{1\infty}, \bar{A}_{2\infty})$ è uno stato stazionario stabile del sistema (4.26).

Le soluzioni stazionarie del sistema (4.26) sono: $P_0 = (0, 0)$, $R^\pm \equiv \left(0, \pm \sqrt{-\frac{\bar{\sigma}_2}{\bar{\alpha}_2}} \right)$ e le sei radici $H_i^\pm \equiv (\bar{A}_{1i}^\pm, \bar{A}_{2i})$, ($i = 1, 2, 3$), del seguente sistema:

$$\begin{cases} \bar{A}_2^3 (\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 - \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2) + \bar{A}_2^2 (\bar{L}_1 \bar{\beta}_2 + \bar{L}_2 \bar{\beta}_1) + \bar{A}_2 (\bar{\alpha}_1 \bar{\sigma}_2 - \bar{L}_1 \bar{L}_2 - \bar{\beta}_2 \bar{\sigma}_1) + \bar{L}_2 \bar{\sigma}_1 = 0 \\ \bar{A}_1^2 = \frac{1}{\bar{\alpha}_1} (-\bar{\beta}_1 \bar{A}_2^2 + \bar{L}_1 \bar{A}_2 - \bar{\sigma}_1) \end{cases}$$

Quando le radici R^\pm e H_i^\pm esistono e sono reali, la soluzione corrisponde rispettivamente a roll o esagoni.

Gli equilibri R^\pm esistono e sono stabili quando $\bar{\alpha}_2 < 0$ e $\bar{L}_1 > \sqrt{-\bar{\alpha}_2/\bar{\sigma}_2} (\bar{\sigma}_1 - \bar{\beta}_1 \bar{\sigma}_2/\bar{\alpha}_2)$.

In Figura 5.6 è mostrato il pattern esagonale e lo spettro corrispondente della soluzione numerica.

I parametri sono stati assegnati in modo che l'unico modo instabile ammesso sia $\bar{k}_c^2 = 4$, nel dominio $L_x = 2\pi$ e $L_y = 2\sqrt{3}\pi$; pertanto le due coppie ammissibili sono $(2, 6)$ e $(4, 0)$.

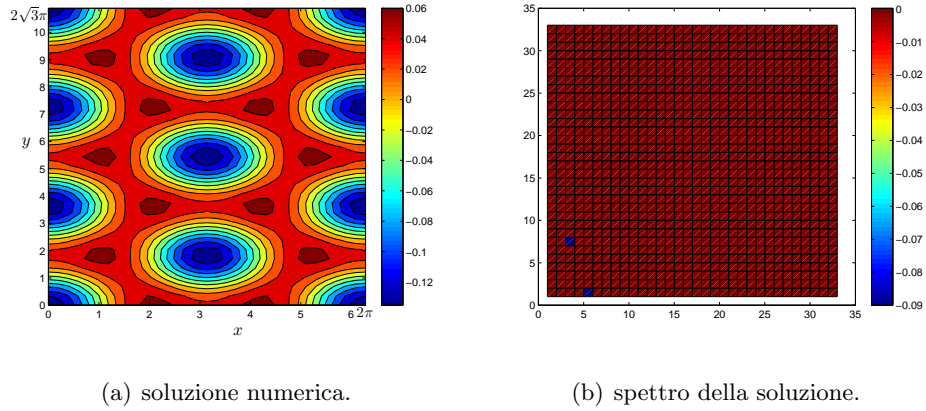


Figura 5.6: I valori dei parametri sono: $A_1 = 11$, $A_2 = 20$, $B = 19$, $C = 5$, $k_2 = 9.5$, $k_3 = 1.5$, $\alpha = 0.2$, $\gamma = 0.7$. Con tali valori assegnati, $\bar{k}_c^2 = 4$ e $d_c = 11.6132$.

Le simulazioni numeriche, eseguite scegliendo come dato iniziale una perturbazione random dell'equilibrio, mostrano che la soluzione evolve verso pattern esagonali.

Se consideriamo $H_1^+ \equiv (\bar{A}_{11}^+, \bar{A}_{21})$, che è uno dei punti di equilibrio del sistema (4.26), la forma del pattern esagonale di Figura 5.6 si ottiene dalla seguente soluzione approssimata al primo ordine

$$\mathbf{w} = h \mathbf{r} \left(\bar{A}_{11}^+ \cos(x) \cos(\sqrt{3}y) + \bar{A}_{21} \cos(2x) \right) + O(h^2).$$

Appendice A

Derivazione dell'equazione di Stuart-Landau $1D$

Per applicare il metodo perturbativo delle scale multiple, espandiamo innanzitutto le variabili indipendenti η e ϑ come segue:

$$\begin{aligned}\eta &= \eta_0 + h\eta_1 + h^2\eta_2 + h^3\eta_3 + h^4\eta_4 + h^5\eta_5 + O(h^6) \\ \vartheta &= \vartheta_0 + h\vartheta_1 + h^2\vartheta_2 + h^3\vartheta_3 + h^4\vartheta_4 + h^5\vartheta_5 + O(h^6)\end{aligned}$$

Le espansioni dei termini della cinetica f e g sono le seguenti:

$$\begin{aligned}f &= f_1h + f_2h^2 + f_3h^3 + f_4h^4 + f_5h^5 + O(h^6) \\ g &= g_1h + g_2h^2 + g_3h^3 + g_4h^4 + g_5h^5 + O(h^6)\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
f_1 &= A_1(1 - \alpha)\eta_1 - B\vartheta_1 \\
f_2 &= A_1(1 - \alpha)\eta_2 - B\vartheta_2 - A_1\eta_1\vartheta_1 \\
f_3 &= A_1(1 - \alpha)\eta_3 - B\vartheta_3 - A_1\eta_1\vartheta_2 - A_1\eta_2\vartheta_1 - A_2\eta_1^3 \\
f_4 &= A_1(1 - \alpha)\eta_4 - B\vartheta_4 - A_1\eta_1\vartheta_3 - A_1\eta_2\vartheta_2 - A_1\eta_3\vartheta_1 - 3A_2\eta_1^2\eta_2 \\
f_5 &= A_1(1 - \alpha)\eta_5 - B\vartheta_5 - A_1\eta_1\vartheta_4 - A_1\eta_2\vartheta_3 - A_1\eta_3\vartheta_2 - A_1\eta_4\vartheta_1 - 3A_2\eta_1^2\eta_3 - 3A_2\eta_1\eta_2^2 \\
\\
g_1 &= U\eta_1 + V\vartheta_1 \\
g_2 &= U\eta_2 + V\vartheta_2 + W\eta_1\vartheta_1 - \gamma(C + D)\vartheta_1^2 \\
g_3 &= U\eta_3 + V\vartheta_3 + W\eta_1\vartheta_2 + W\eta_2\vartheta_1 - 2\gamma(C + D)\vartheta_1\vartheta_2 - \gamma(Ck_2 - Dk_3)\eta_1\vartheta_1^2 \\
g_4 &= U\eta_4 + V\vartheta_4 + W\eta_1\vartheta_3 + W\eta_2\vartheta_2W + \eta_3\vartheta_1 - \gamma(C + D)\vartheta_2^2 - 2\gamma(C + D)\vartheta_1\vartheta_3 \\
&\quad - \gamma(Ck_2 - Dk_3)\eta_2\vartheta_1^2 - 2\gamma(Ck_2 - Dk_3)\eta_1\vartheta_1\vartheta_2 \\
g_5 &= U\eta_5 + V\vartheta_5 + W\eta_1\vartheta_4 + W\eta_2\vartheta_3W + \eta_3\vartheta_2 + W\eta_4\vartheta_1 - 2\gamma(C + D)\vartheta_1\vartheta_4 - 2\gamma(C + D)\vartheta_2\vartheta_3 \\
&\quad - 2\gamma(C + D)\vartheta_2\vartheta_3 - \gamma(Ck_2 - Dk_3)\eta_1\vartheta_2^2 - \gamma(Ck_2 - Dk_3)\eta_3\vartheta_1^2 - \gamma(Ck_2 - Dk_3)\eta_1\vartheta_1\vartheta_3 \\
&\quad - 2\gamma(Ck_2 - Dk_3)\eta_2\vartheta_1\vartheta_2
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Definiamo gli operatori

$$L_i = J - i^2 D^{d^c}$$

All'ordine h^2 si ricava:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial T_1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_c \end{pmatrix} \nabla^2 \mathbf{w}_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{(1)} \end{pmatrix} \nabla^2 \mathbf{w}_1 + J \mathbf{w}_2 + \begin{pmatrix} -A_1\eta_1\vartheta_1 \\ W\eta_1\vartheta_1 - \gamma(C + D)\vartheta_1^2 \end{pmatrix} \\
&= L^{d_c} \mathbf{w}_2 - Ak_c^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ M \end{pmatrix} \cos(k_c x) + \underbrace{\begin{pmatrix} -A_1M \\ WM - \gamma(C + D)M^2 \end{pmatrix}}_{F_1} A^2 \cos^2(k_c x)
\end{aligned}$$

Segue che

$$\begin{aligned}
 L^{d_c} \mathbf{w}_2 &= Ak_c^2 \begin{pmatrix} 0 \\ Md^{(1)} \end{pmatrix} \cos(k_c x) - F_1 A^2 \cos^2(k_c x) + \frac{\partial A}{\partial T_1} \mathbf{r} \cos(k_c x) \\
 &= Ak_c^2 \begin{pmatrix} 0 \\ Md^{(1)} \end{pmatrix} \cos(k_c x) - \frac{1}{2} F_1 A^2 - \frac{1}{2} F_1 A^2 \cos(2k_c x) + \frac{\partial A}{\partial T_1} \mathbf{r} \cos(k_c x) \equiv F
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Per il teorema dell'alternativa di Fredholm [25, 26], l'equazione

$$L^{d_c} \mathbf{w}_2 = F \tag{A.3}$$

ammette soluzione se e solo se

$$\langle F, \psi \rangle = 0, \tag{A.4}$$

con $\psi \in Ker(L^{d_c})^\dagger$,

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il prodotto scalare in $L^2(0, 2\pi/k_c)$.

Il problema omogeneo aggiunto $(L^{d_c})^\dagger = 0$ ha, quindi, soluzione

$$\psi = A^* \tilde{\psi} \cos(k_c x),$$

ove

$$\tilde{\psi} = \begin{pmatrix} 1 \\ M^* \end{pmatrix}$$

Il vettore $\tilde{\psi}$ deve quindi soddisfare a

$$\begin{pmatrix} A_1(1 - \alpha) - k_c^2 & U \\ -N & V - k_c^2 d_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ M^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$M^* = \frac{B}{V - k_c^2 d_c}$$

Imponendo la condizione di compatibilità (A.4) si ha

$$\left(\frac{\partial A}{\partial T_1} \mathbf{r}, \tilde{\psi} \right) + \left(Ak_c^2 \begin{pmatrix} 0 \\ Md^{(1)} \end{pmatrix}, \tilde{\psi} \right) = 0$$

da cui

$$\frac{\partial A}{\partial T_1} = -\frac{k_c^2 d^{(1)} MM^*}{1 + MM^*} A$$

Otteniamo, dunque, dei termini secolari che, tutt'altro che correttivi, non costituiscono più un ordine trascurabile rispetto al precedente, ma anzi danno contributi divergenti, rendendo dunque la teoria inconsistente.

Richiedere che questi termini risonanti si annullino non è una forzatura, poiché l'aver distinto più scale temporali in luogo della sola variabile t funge come introduzione di gradi di libertà in più nel sistema e ciò giustifica il ricorso alle condizioni ulteriori

$$T_1 = 0 \quad \text{e} \quad d^{(1)} = 0$$

Adesso la condizione di compatibilità è automaticamente soddisfatta, pertanto l'equazione (A.3) ammette la seguente soluzione:

$$\mathbf{w}_2 = A^2(\mathbf{w}_{20} + \mathbf{w}_{22} \cos(2k_c x)) \quad (\text{A.5})$$

dove le \mathbf{w}_{2i} , $i = 0, 2$, sono le soluzioni dei seguenti sistemi lineari:

•

$$\begin{aligned} L^{dc} \mathbf{w}_{20} &= J \mathbf{w}_{20} \\ \Rightarrow J \mathbf{w}_{20} &= -\frac{1}{2} F_1 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

•

$$\begin{aligned} L^{dc} \mathbf{w}_{22} \cos(2k_c x) &= D^{dc} \nabla^2 \mathbf{w}_{22} \cos(2k_c x) + J \mathbf{w}_{22} \cos(2k_c x) \\ &= -4k_c^2 D^{dc} \mathbf{w}_{22} \cos(2k_c x) + J \mathbf{w}_{22} \cos(2k_c x) \\ &= L_2 \mathbf{w}_{22} \cos(2k_c x) \\ \Rightarrow L_2 \mathbf{w}_{22} &= -\frac{1}{2} F_1 \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

All'ordine h^3 si ricava:

$$\frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial T_2} + \frac{\partial \mathbf{w}_2}{\partial T_1} = L^{dc} \mathbf{w}_3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{(1)} \end{pmatrix} \nabla^2 \mathbf{w}_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{(2)} \end{pmatrix} \nabla^2 \mathbf{w}_1 + G_1,$$

con

$$\begin{aligned}
 G_1 &= \begin{pmatrix} -A_1\vartheta_1 & -A_1\eta_1 \\ W\vartheta_1 & W\eta_1 - 2\gamma(C+D)\vartheta_1 \end{pmatrix} \mathbf{w}_2 + \begin{pmatrix} -A_2\eta_1^3 \\ \gamma(Ck_2 - Dk_3)\eta_1\vartheta_1^2 \end{pmatrix} \\
 &= \underbrace{\begin{pmatrix} -A_1M & -A_1 \\ WM & W - 2\gamma(C+D)M \end{pmatrix}}_{G_2} A^3 \cos(k_c x) (\mathbf{w}_{20} + \mathbf{w}_{22} \cos(2k_c x)) \\
 &\quad + \underbrace{\begin{pmatrix} -A_2 \\ -\gamma M^2(Ck_2 - Dk_3)M \end{pmatrix}}_{G_3} A^3 \cos^3(k_c x) \\
 &= A^3 G_2 \left(\mathbf{w}_{20} + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{22} \right) \cos(k_c x) + \frac{1}{2} A^3 G_2 \mathbf{w}_{22} \cos(3k_c x) + \frac{3}{4} A^3 G_3 \cos(k_c x) \\
 &\quad + \frac{1}{4} A^3 G_3 \cos(3k_c x)
 \end{aligned}$$

Segue che

$$\begin{aligned}
 L^{dc} \mathbf{w}_3 &= \frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial T_2} + \frac{\partial \mathbf{w}_2}{\partial T_1} + k_c^2 A d^{(2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{r} \cos(k_c x) + 4k_c^2 A^2 d^{(1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{w}_{22} \cos(2k_c x) \\
 &\quad - A^3 G_2 \left(\mathbf{w}_{20} + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{22} \right) \cos(k_c x) - \frac{1}{2} A^3 G_2 \mathbf{w}_{22} \cos(3k_c x) - \frac{3}{4} A^3 G_3 \cos(k_c x) \\
 &\quad - \frac{1}{4} A^3 G_3 \cos(3k_c x) \equiv G
 \end{aligned}$$

Poniamo

$$\begin{aligned}
 G_4 &= d^{(2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k_c^2 \begin{pmatrix} 1 \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d^{(2)} k_c^2 M \end{pmatrix} \\
 G_5 &= G_2 \left(\mathbf{w}_{20} + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{22} \right) + \frac{3}{4} G_3 \\
 G_6 &= \frac{1}{2} G_2 \mathbf{w}_{22} + \frac{1}{4} G_3
 \end{aligned}$$

Dalla condizione di compatibilità

$$\langle G, \psi \rangle = 0, \tag{A.8}$$

segue che

$$\left(\frac{\partial A}{\partial T_2} \mathbf{r}, \tilde{\psi} \right) + (G_4, \tilde{\psi})A - (G_5, \tilde{\psi})A^3 = 0$$

Ponendo

$$\sigma = -\frac{(G_4, \tilde{\psi})}{(\mathbf{r}, \tilde{\psi})} \tag{A.9}$$

e

$$L = -\frac{(G_5, \tilde{\psi})}{(\mathbf{r}, \tilde{\psi})} \tag{A.10}$$

si ottiene l'equazione di Stuart Landau per l'ampiezza $A(T_2)$.

Appendice B

L'equazione di Stuart-Landau al V ordine $1D$

Vogliamo ora ricavare l'equazione di Stuart-Landau al quinto ordine per l'ampiezza $A(T_2, T_4)$.

Tenendo in considerazione la (3.10), dove però stavolta la derivata rispetto a T_2 è una derivata parziale, la condizione di solvibilità è soddisfatta e risulta:

$$\begin{aligned} L^{d_c} \mathbf{w}_3 &= \frac{\partial}{\partial T_2} A \mathbf{r} \cos(k_c x) + \frac{\partial}{\partial T_1} A^2 (\mathbf{w}_{20} + \mathbf{w}_{22} \cos(2k_c x)) + A G_4 \cos(k_c x) \\ &+ 4k_c^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{(1)} \end{pmatrix} A^2 \mathbf{w}_{22} \cos(2k_c x) - A^3 G_5 \cos(k_c x) - A^3 G_6 \mathbf{w}_{22} \cos(3k_c x) \\ &= A(\sigma \mathbf{r} + G_4) \cos(k_c x) - A^3 (L \mathbf{r} + G_5) \cos(k_c x) - A^3 G_6 \cos(3k_c x), \end{aligned}$$

Allora la soluzione è:

$$\mathbf{w}_3 = (A \mathbf{w}_{32} + A^3 \mathbf{w}_{32}) \cos(k_c x) + A^3 \mathbf{w}_{33} \cos(3k_c x) \quad (\text{B.1})$$

dove i vettori \mathbf{w}_{3i} , $i = 1, 2, 3$, sono le soluzioni dei seguenti sistemi lineari:

•

$$\begin{aligned} L^{dc} \mathbf{w}_{32} \cos(k_c x) &= (J + D^{dc} \nabla^2) \mathbf{w}_{32} \cos(k_c x) = (J - k_c^2 D^{dc}) \mathbf{w}_{32} \cos(k_c x) \\ &= (\sigma \mathbf{r} + G_4) \cos(k_c x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L_1 \mathbf{w}_{32} = \sigma \mathbf{r} + G_4,$$

$$\text{ove } L_1 = J - k_c^2 D^{dc}$$

•

$$\begin{aligned} L^{dc} \mathbf{w}_{32} \cos(k_c x) &= (J + D^{dc} \nabla^2) \mathbf{w}_{32} \cos(k_c x) = (J - k_c^2 D^{dc}) \mathbf{w}_{32} \cos(k_c x) \\ &= (-L \mathbf{r} - G_5) \cos(k_c x), \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L_1 \mathbf{w}_{32} = -L \mathbf{r} - G_5$$

•

$$\begin{aligned} L^{dc} \mathbf{w}_{33} \cos(3k_c x) &= (J + D^{dc} \nabla^2) \mathbf{w}_{33} \cos(3k_c x) = (J - 9k_c^2 D^{dc}) \mathbf{w}_{33} \cos(3k_c x) \\ &= -G_6 \cos(3k_c x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L_3 \mathbf{w}_{33} = -G_6,$$

All'ordine h^4 si ricava:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial T_3} + \frac{\partial \mathbf{w}_2}{\partial T_2} + \frac{\partial \mathbf{w}_3}{\partial T_1} &= L^{dc} \mathbf{w}_4 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{(1)} \end{pmatrix} \nabla^2 \mathbf{w}_3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{(2)} \end{pmatrix} \nabla^2 \mathbf{w}_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{(3)} \end{pmatrix} \nabla^2 \mathbf{w}_1 \\ &+ H_1 \end{aligned} \tag{B.2}$$

ove

$$\begin{aligned} H_1 &= \begin{pmatrix} -A_1 \vartheta_1 & -A_1 \eta_1 \\ W \vartheta_1 & W \eta_1 - 2\gamma(C + D) \vartheta_1 \end{pmatrix} \mathbf{w}_3 \\ &+ \begin{pmatrix} -3A_2 \eta_1^2 & -A_1 \eta_2 \\ W \vartheta_2 - \gamma(Ck_2 - Dk_3) \vartheta_1^2 & -\gamma(C + D) \vartheta_2 - 2\gamma(Ck_2 - Dk_3) \eta_1 \vartheta_1 \end{pmatrix} \mathbf{w}_2 \\ &= G_2 A \cos(k_c x) \mathbf{w}_3 + H_2 A^2 \mathbf{w}_2 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
 H_2 = & \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}A_2 & -A_1 \mathbf{w}_{20}(1) \\ W \mathbf{w}_{20}(2) - \frac{1}{2}\gamma(Ck_2 - Dk_3)M^2 & -\gamma(C+D) \mathbf{w}_{20}(2) - \gamma(Ck_2 - Dk_3)M \end{pmatrix}}_{H_3} \\
 & + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}A_2 & -A_1 \mathbf{w}_{22}(1) \\ W \mathbf{w}_{22}(2) - \frac{1}{2}\gamma(Ck_2 - Dk_3)M^2 & -\gamma(C+D) \mathbf{w}_{22}(2) - \gamma(Ck_2 - Dk_3)M \end{pmatrix}}_{H_4} \cos(2k_c x)
 \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
 H_1 &= G_2 A \cos(k_c x) \mathbf{w}_3 + H_3 A^2 \mathbf{w}_2 + H_4 A^2 \cos(2k_c x) \mathbf{w}_2 \\
 &= \left(\frac{1}{2} G_2 \mathbf{w}_{32} \right) A^2 + \left(\frac{1}{2} G_2 \mathbf{w}_{32} + H_3 \mathbf{w}_{20} + \frac{1}{2} H_4 \mathbf{w}_{22} \right) A^4 + \frac{1}{2} G_2 \mathbf{w}_{32} A^2 \cos(2k_c x) \\
 &+ \left(\frac{1}{2} G_2 \mathbf{w}_{32} + \frac{1}{2} G_2 \mathbf{w}_{33} + H_3 \mathbf{w}_{22} + H_4 \mathbf{w}_{20} \right) A^4 \cos(2k_c x) \\
 &+ \left(\frac{1}{2} G_2 \mathbf{w}_{33} + \frac{1}{2} H_4 \mathbf{w}_{22} \right) A^4 \cos(4k_c x)
 \end{aligned}$$

Segue che

$$\begin{aligned}
 L^{dc} \mathbf{w}_4 &= \frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial T_3} + \frac{\partial \mathbf{w}_2}{\partial T_2} + \frac{\partial \mathbf{w}_3}{\partial T_1} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{(1)} \end{pmatrix} \nabla^2 \mathbf{w}_3 - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{(2)} \end{pmatrix} \nabla^2 \mathbf{w}_2 \\
 &- \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{(3)} \end{pmatrix} \nabla^2 \mathbf{w}_1 - H_1 \equiv H
 \end{aligned}$$

Ricordando che $T_1 = 0$ e $d^{(1)} = 0$ e imponendo la condizione di solvibilità

$$\langle G, \psi \rangle = 0, \tag{B.3}$$

otteniamo

$$\left(\frac{\partial A}{\partial T_3} \mathbf{r}, \tilde{\psi} \right) + \left(Ak_c^2 \begin{pmatrix} 0 \\ M d^{(3)} \end{pmatrix}, \tilde{\psi} \right) = 0,$$

da cui

$$\frac{\partial A}{\partial T_3} = - \frac{k_c^2 d^{(1)} M M^*}{1 + M M^*} A$$

che, a causa dei termini secolari che compaiono, non dà indicazioni sul comportamento asintotico dell'ampiezza del pattern.

Per sopprimere tali termini risonanti imponiamo che

$$T_3 = 0 \quad \text{e} \quad d^{(3)} = 0$$

Adesso la condizione di solvibilità (B.3) è soddisfatta e la soluzione è:

$$\mathbf{w}_4 = A^2 \mathbf{w}_{40} + A^4 \mathbf{w}_{41} + (A^2 \mathbf{w}_{42} + A^4 \mathbf{w}_{43}) \cos(2k_c x) + A^4 \mathbf{w}_{44} \cos(4k_c x), \quad (\text{B.4})$$

dove i vettori \mathbf{w}_{4i} , $i = 0, 1, 2, 3, 4$, sono le soluzioni dei seguenti sistemi lineari:

•

$$L^{d_c} \mathbf{w}_{40} = J \mathbf{w}_{40}$$

$$\Rightarrow \quad J \mathbf{w}_{40} = H_5,$$

$$\text{ove } H_5 = 2\sigma \mathbf{w}_{20} - \frac{1}{2} G_2 \mathbf{w}_{32}$$

$$L^{d_c} \mathbf{w}_{41} = J \mathbf{w}_{41}$$

$$\Rightarrow \quad J \mathbf{w}_{41} = H_6,$$

$$\text{ove } H_6 = - \left(2L \mathbf{w}_{20} + \frac{1}{2} G_2 \mathbf{w}_{32} + H_3 \mathbf{w}_{20} + \frac{1}{2} H_4 \mathbf{w}_{22} \right)$$

•

$$\begin{aligned} L^{d_c} \mathbf{w}_{42} \cos(2k_c x) &= (J + D^{d_c} \nabla^2) \mathbf{w}_{42} \cos(2k_c x) = (J - 4k_c^2 D^{d_c}) \mathbf{w}_{42} \cos(2k_c x) \\ &= H_7 \cos(2k_c x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad L_2 \mathbf{w}_{42} = H_7$$

$$\text{ove } H_7 = \left(2\sigma \mathbf{w}_{22} + 4k_c^2 d^{(2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{w}_{22} - \frac{1}{2} G_2 \mathbf{w}_{32} \right)$$

•

$$\begin{aligned} L^{d_c} \mathbf{w}_{43} \cos(2k_c x) &= (J + D^{d_c} \nabla^2) \mathbf{w}_{43} \cos(2k_c x) = (J - 4k_c^2 D^{d_c}) \mathbf{w}_{43} \cos(2k_c x) \\ &= H_8 \cos(2k_c x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad L_2 \mathbf{w}_{42} = H_8$$

$$\text{ove } H_8 = - \left(2L \mathbf{w}_{22} + \frac{1}{2} G_2 \mathbf{w}_{32} + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{33} + H_3 \mathbf{w}_{22} + H_4 \mathbf{w}_{20} \right)$$

•

$$\begin{aligned} L^{d_c} \mathbf{w}_{44} \cos(4k_c x) &= (J + D^{d_c} \nabla^2) \mathbf{w}_{44} \cos(4k_c x) = (J - 16k_c^2 D^{d_c}) \mathbf{w}_{44} \cos(4k_c x) \\ &= H_9 \cos(4k_c x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L_4 \mathbf{w}_{44} = H_9$$

$$\text{ove } H_9 = -\left(\frac{1}{2}G_2 \mathbf{w}_{33} + \frac{1}{2}H_4 \mathbf{w}_{22}\right)$$

All'ordine h^5 si ricava:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial T_4} + \frac{\partial \mathbf{w}_2}{\partial T_3} + \frac{\partial \mathbf{w}_3}{\partial T_2} + \frac{\partial \mathbf{w}_4}{\partial T_1} &= L^{d_c} \mathbf{w}_4 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{(1)} \end{pmatrix} \nabla^2 \mathbf{w}_4 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{(2)} \end{pmatrix} \nabla^2 \mathbf{w}_3 \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{(3)} \end{pmatrix} \nabla^2 \mathbf{w}_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{(4)} \end{pmatrix} \nabla^2 \mathbf{w}_1 + P_1 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

ove

$$\begin{aligned} P_1 &= \begin{pmatrix} -A_1 \vartheta_1 & -A_1 \eta_1 \\ W \vartheta_1 & W \eta_1 - 2\gamma(C + D) \vartheta_1 \end{pmatrix} \mathbf{w}_4 \\ &+ \begin{pmatrix} -A_1 \vartheta_2 - 3A_2 \eta_1^2 & -A_1 \eta_2 \\ W \vartheta_2 - \gamma(Ck_2 - Dk_3) \vartheta_1^2 & W \eta_2 - 2\gamma(C + D) \vartheta_2 - 2\gamma(Ck_2 - Dk_3) \eta_1 \vartheta_1 \end{pmatrix} \mathbf{w}_3 \\ &+ \begin{pmatrix} -3A_2 \eta_1 \eta_2 & 0 \\ -2\gamma(Ck_2 - Dk_3) \vartheta_1 \vartheta_2 & -\gamma(Ck_2 - Dk_3) \eta_1 \vartheta_2 \end{pmatrix} \mathbf{w}_2 \\ &= G_2 A \cos(k_c x) \mathbf{w}_4 + P_2 A^2 \mathbf{w}_3 + P_3 A^2 \cos(2k_c x) \mathbf{w}_3 + P_4 A^3 \cos(k_c x) \mathbf{w}_2 \\ &+ P_5 A^3 \cos(k_c x) \cos(2k_c x) \mathbf{w}_2 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
 P_2 &= \begin{pmatrix} -A_1 \mathbf{w}_{20}(2) - \frac{3}{2}A_2 & -A_1 \mathbf{w}_{20}(1) \\ W \mathbf{w}_{20}(2) - \frac{1}{2}\gamma(Ck_2 - Dk_3)M^2 & W \mathbf{w}_{20}(1) - 2\gamma(C + D) \mathbf{w}_{20}(2) - \gamma(Ck_2 - Dk_3)M \end{pmatrix} \\
 P_3 &= \begin{pmatrix} -A_1 \mathbf{w}_{22}(2) - \frac{3}{2}A_2 & -A_1 \mathbf{w}_{22}(1) \\ W \mathbf{w}_{22}(2) - \frac{1}{2}\gamma(Ck_2 - Dk_3)M^2 & W \mathbf{w}_{22}(1) - 2\gamma(C + D) \mathbf{w}_{22}(2) - \gamma(Ck_2 - Dk_3)M \end{pmatrix} \\
 P_4 &= \begin{pmatrix} -3A_2 \mathbf{w}_{20}(1) & 0 \\ -2\gamma(Ck_2 - Dk_3)M \mathbf{w}_{20}(2) & -\gamma(Ck_2 - Dk_3) \mathbf{w}_{20}(2) \end{pmatrix} \\
 P_5 &= \begin{pmatrix} -3A_2 \mathbf{w}_{22}(1) & 0 \\ -2\gamma(Ck_2 - Dk_3)M \mathbf{w}_{22}(2) & -\gamma(Ck_2 - Dk_3) \mathbf{w}_{22}(2) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Segue che

$$\begin{aligned}
 L^{dc} \mathbf{w}_5 &= \frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial T_4} + \frac{\partial \mathbf{w}_2}{\partial T_3} + \frac{\partial \mathbf{w}_3}{\partial T_2} + \frac{\partial \mathbf{w}_4}{\partial T_1} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{(1)} \end{pmatrix} \nabla^2 \mathbf{w}_4 - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{(2)} \end{pmatrix} \nabla^2 \mathbf{w}_3 \\
 &\quad - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{(3)} \end{pmatrix} \nabla^2 \mathbf{w}_2 - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{(3)} \end{pmatrix} \nabla^2 \mathbf{w}_2 - P_1
 \end{aligned}$$

Ricordando che $T_1, T_3, d^{(1)}$ e $d^{(3)}$ sono posti uguali a zero e imponendo la condizione di solvibilità

$$\langle P, \psi \rangle = 0, \tag{B.6}$$

restano solo i termini in $\cos(k_c x)$:

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{\partial A}{\partial T_4} \mathbf{r}, \tilde{\psi} \right) + \left((\sigma A - LA^3) \mathbf{w}_{32} + 3A^2(\sigma A - LA^3) \mathbf{w}_{32} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{(2)}k_c^2 \end{pmatrix} (A \mathbf{w}_{32} + A^3 \mathbf{w}_{32}) \right. \\
 &\quad + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{(4)}k_c^2 \end{pmatrix} A \mathbf{r} - G_2 A^3 \mathbf{w}_{40} - G_2 A^5 \mathbf{w}_{41} - \frac{1}{2} G_2 A^3 \mathbf{w}_{42} - \frac{1}{2} G_2 A^5 \mathbf{w}_{43} \\
 &\quad - P_2 A^3 \mathbf{w}_{32} - P_2 A^5 \mathbf{w}_{32} - \frac{1}{2} P_3 A^3 \mathbf{w}_{32} - \frac{1}{2} P_3 A^5 \mathbf{w}_{32} - \frac{1}{2} P_3 A^5 \mathbf{w}_{33} - P_4 A^5 \mathbf{w}_{20} \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} P_4 A^5 \mathbf{w}_{22} - \frac{1}{2} P_5 A^5 \mathbf{w}_{20} - \frac{1}{2} P_5 A^5 \mathbf{w}_{22}, \tilde{\psi} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Se indichiamo

$$\begin{aligned}
 P_6 &= \sigma \mathbf{w}_{32} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{(2)}k_c^2 \end{pmatrix} \mathbf{w}_{32} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{(4)}k_c^2 \end{pmatrix} \mathbf{r} \\
 P_7 &= 3\sigma \mathbf{w}_{32} - L \mathbf{w}_{32} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{(2)}k_c^2 \end{pmatrix} \mathbf{w}_{32} - G_2 \mathbf{w}_{40} - \frac{1}{2}G_2 \mathbf{w}_{42} - P_2 \mathbf{w}_{32} - \frac{1}{2}P_3 \mathbf{w}_{32} \\
 P_8 &= 3L \mathbf{w}_{32} + G_2 \mathbf{w}_{41} + \frac{1}{2}G_2 \mathbf{w}_{43} + P_2 \mathbf{w}_{32} + \frac{1}{2}P_3 \mathbf{w}_{32} + \frac{1}{2}P_3 \mathbf{w}_{33} + P_4 \mathbf{w}_{20} + \frac{1}{2}P_4 \mathbf{w}_{22} \\
 &\quad + \frac{1}{2}P_5 \mathbf{w}_{20} + \frac{1}{2}P_5 \mathbf{w}_{22}
 \end{aligned}$$

e poniamo

$$\tilde{\sigma} = -\frac{(P_6, \tilde{\psi})}{(\mathbf{r}, \tilde{\psi})} \quad (\text{B.7})$$

$$\tilde{L} = \frac{(P_7, \tilde{\psi})}{(\mathbf{r}, \tilde{\psi})} \quad (\text{B.8})$$

$$\tilde{Q} = -\frac{(P_8, \tilde{\psi})}{(\mathbf{r}, \tilde{\psi})} \quad (\text{B.9})$$

si ottiene l'equazione

$$\frac{\partial A}{\partial T_4} = \tilde{\sigma}A - \tilde{L}A^3 + \tilde{Q}A^5 \quad (\text{B.10})$$

L'equazione di Stuart-Landau di quinto grado (3.15) si ottiene sommando (3.10) con (B.10) in quanto:

$$\frac{dA}{dT_2} = \frac{\partial A}{\partial T_2} + h^2 \frac{\partial A}{\partial T_4}, \quad (\text{B.11})$$

da cui si ottengono i coefficienti

$$\bar{\sigma} = \sigma + h^2 \tilde{\sigma}, \quad \bar{L} = L + h^2 \tilde{L}, \quad \bar{Q} = h^2 \tilde{Q}.$$

Appendice C

Equazione di Ginzburg-Landau

- $O(\hbar)$

$$\begin{aligned} L^{dc} \mathbf{w}_1 &= 0 \\ \Rightarrow \quad \mathbf{w}_1 &= A(X, T) \mathbf{r} \cos(k_c x) \end{aligned}$$

- $O(\hbar^2)$

$$L^{dc} \mathbf{w}_2 = -\frac{1}{2} F_1 A^2 - \frac{1}{2} F_1 A^2 \cos(2k_c x) + 2D^{dc} k_c \frac{\partial A}{\partial X} \mathbf{r} \sin k_c x, \quad (\text{C.1})$$

Pertanto l'equazione (C.1) ammette la seguente soluzione:

$$\mathbf{w}_2 = A^2(\mathbf{w}_{20} + \mathbf{w}_{22} \cos(2k_c x)) + \frac{\partial A}{\partial X} \mathbf{w}_{21} \sin k_c x,$$

dove i vettori \mathbf{w}_{20} e \mathbf{w}_{22} sono determinati come in (A.6) e (A.7), mentre \mathbf{w}_{21} si ottiene da

$$\begin{aligned} L^{dc} \frac{\partial A}{\partial X} \mathbf{w}_{21} \sin(k_c x) &= \frac{\partial A}{\partial X} (J + D^{dc} \nabla^2) \mathbf{w}_{21} \sin(k_c x) \\ &= \frac{\partial A}{\partial X} L_1 \mathbf{w}_{21} \sin(k_c x) = 2D^{dc} k_c \frac{\partial A}{\partial X} \mathbf{r} \sin(k_c x) \\ \Rightarrow \quad L_1 \mathbf{w}_{21} &= 2D^{dc} k_c \mathbf{r} \end{aligned}$$

Affinché vengano soddisfatte le condizioni di Neumann imponiamo che $\frac{\partial A}{\partial X} = 0$.

- $O(h^3)$

$$\begin{aligned}
 L^{d_c} \mathbf{w}_3 \equiv N &= \frac{\partial}{\partial T} \mathbf{w}_1 - d^{(2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla^2 \mathbf{w}_1 - D^{d_c} \partial_X^2 \mathbf{w}_1 - 2D^{d_c} \partial_x \partial_X \mathbf{w}_2 \\
 &- G_2 A^3 \cos(k_c x) \left(\mathbf{w}_{20} + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{22} \right) - \frac{1}{2} A^3 G_2 \mathbf{w}_{22} \cos(3k_c x) \\
 &- \frac{3}{4} A^3 G_3 \cos(k_c x) - \frac{1}{4} A^3 G_3 \cos(3k_c x)
 \end{aligned}$$

Ricordando di porre $\frac{\partial A}{\partial X} = 0$, la condizione di compatibilità

$$\langle N, \psi \rangle = 0$$

ci dà l'equazione di Ginzburg-Landau (3.16), con

$$\nu = \frac{(2k_c D^{d_c} \mathbf{w}_{21} + D^{d_c} \mathbf{r}, \tilde{\psi})}{(\mathbf{r}, \tilde{\psi})},$$

mentre σ e L sono le stesse di (A.9) e (A.10).

Appendice D

Equazione complessa di Ginzburg-Landau

Consideriamo il sistema (2.1) con f e g date da (2.2).

Espandendo il parametro di biforcazione $A_1 = (1+h^2)A_H$, dove $A_H = \frac{(C+D)(1+2\gamma\alpha)-2C\gamma}{1-\alpha}$,

si ha

$$L = \begin{pmatrix} (1+h^2)A_H(1-\alpha) & -B \\ C(1-\alpha)(1-\gamma+\gamma\alpha)(k_2-k_3) & 2C\gamma - (C+D)(1+2\gamma\alpha) \end{pmatrix}$$

pertanto

$$L_0 = \begin{pmatrix} A_H(1-\alpha) & -B \\ C(1-\alpha)(1-\gamma+\gamma\alpha)(k_2-k_3) & 2C\gamma - (C+D)(1+2\gamma\alpha) \end{pmatrix}$$

$$L_1 = A_H(1-\alpha) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per il calcolo degli autovalori di L_0 ricordiamo che quando $A_1 = A_H$ la traccia è nulla, dunque l'equazione caratteristica si riduce a:

$$\lambda^2 + |L_0| = 0 \quad \text{da cui} \quad \lambda = \pm i\sqrt{|L_0|}.$$

L'autovettore destro \mathbf{u}_0 relativo all'autovalore $\lambda_0 = i\sqrt{|L_0|}$ è:

$$\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ M \end{pmatrix},$$

con M dato da

$$\begin{pmatrix} A_H(1-\alpha) - i\sqrt{|L_0|} & -B \\ C(1-\alpha)(1-\gamma+\gamma\alpha)(k_2-k_3) & -A_H(1-\alpha) - i\sqrt{|L_0|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$M = \frac{A_H(1-\alpha) - i\sqrt{|L_0|}}{B}.$$

Il corrispondente autovettore sinistro per L_0 coincide con l'autovettore destro per L_0^T :

$$\begin{pmatrix} A_H(1-\alpha) - i\sqrt{|L_0|} & C(1-\alpha)(1-\gamma+\gamma\alpha)(k_2-k_3) \\ -B & -A_H(1-\alpha) + i\sqrt{|L_0|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

pertanto

$$\mathbf{u}_0^* = n(-A_H(1-\alpha) - i\sqrt{|L_0|}, B),$$

dove $n = -\frac{1}{2i\sqrt{|L_0|}}$

è un fattore di normalizzazione in modo da garantire che $\mathbf{u}_0^* \mathbf{u}_0 = 1$.

Da (3.21) ricaviamo che

$$\lambda_1 = \mathbf{u}_0^* L_1 \mathbf{u}_0 = \frac{1}{2} A_H(1-\alpha) - i \frac{A_H^2(1-\alpha)^2}{2\sqrt{|L_0|}}$$

mentre da (3.30) si ha:

$$d_1 = \mathbf{u}_0^* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mathbf{u}_0 = \frac{d+1}{2} + i \frac{A_H(d-1)}{2\sqrt{|L_0|}}$$

Per il calcolo di g_1 occorre determinare i vettori $M_0 \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_0$, $M_0 \mathbf{u}_0 \bar{\mathbf{u}}_0$ e $N_0 \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_0 \bar{\mathbf{u}}_0$.

$$\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{A_H(1-\alpha) - i\sqrt{|L_0|}}{B} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{u}}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{A_H(1-\alpha) + i\sqrt{|L_0|}}{B} \end{pmatrix}$$

$$(M_0 \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_0)_1 = -A_H M$$

$$(M_0 \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_0)_2 = M[W - (C + D)\gamma M]$$

$$(M_0 \mathbf{u}_0 \bar{\mathbf{u}}_0)_1 = -\frac{A_H^2(1-\alpha)}{B}$$

$$(M_0 \mathbf{u}_0 \bar{\mathbf{u}}_0)_2 = W \frac{A_H(1-\alpha)}{B} - (C + D)\gamma \frac{A_H^2(1-\alpha)^2 + |L_0|}{B^2}$$

A questo punto calcolando la matrice inversa di L_0 e di $(L_0 - 2i|L_0|I)$ determiniamo i vettori \mathbf{w}_{20} , \mathbf{w}_{21} e \mathbf{w}_{22} :

$$\mathbf{w}_{20} = -\frac{1}{|L_0 - 2i\omega_0 I|} \begin{pmatrix} q - 2i|L_0| & B \\ -p & A_H(1-\alpha) - 2i|L_0| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A_H M \\ M[W(C + D)\gamma M] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{21} = -\frac{2}{|L_0|} \begin{pmatrix} q & B \\ -p & A_H(1-\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{A_H^2(1-\alpha)}{B} \\ W \frac{A_H(1-\alpha)}{B} - (C + D)\gamma \frac{A_H^2(1-\alpha)^2 + |L_0|}{B^2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_{22} = \bar{\mathbf{w}}_{20}$$

$$\text{con } p = C(1-\alpha)(1-\gamma+\gamma\alpha)(k_2 - k_3), \quad q = 2C\gamma - (C + D)(1 + 2\gamma\alpha).$$

Inoltre

$$(M_0 \bar{\mathbf{u}}_0 \mathbf{w}_{20})_1 = -\frac{1}{2} [A_H(\mathbf{w}_{20}(2) + \bar{M})]$$

$$(M_0 \bar{\mathbf{u}}_0 \mathbf{w}_{20})_2 = \frac{1}{2} [W(\mathbf{w}_{20}(2) + \bar{M}) - 2(C + D)\gamma \mathbf{w}_{20}(2)\bar{M}]$$

$$(M_0 \mathbf{u}_0 \mathbf{w}_{21})_1 = -\frac{1}{2} [-A_H(\mathbf{w}_{21}(2) + M)]$$

$$(M_0 \mathbf{u}_0 \mathbf{w}_{21})_2 = \frac{1}{2} [W(\mathbf{w}_{21}(2) + M) - 2(C + D)\gamma \mathbf{w}_{21}(2)M]$$

$$(N_0 \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_0 \bar{\mathbf{u}}_0)_1 = -A_2$$

$$(N_0 \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_0 \bar{\mathbf{u}}_0)_2 = -\frac{1}{3} \frac{Ck_2 + Dk_3}{B^2} \gamma \left[3A_H^2 (1 - \alpha)^2 - |L_0| \right]$$

Adesso abbiamo tutti gli elementi per calcolare g_1 come in (3.29).

Appendice E

Analisi debolmente non lineare nel caso $2D$ ($m = 1$)

$O(h^2)$

Definiamo preliminarmente i seguenti operatori

$$L_{ij}^1 = J - (i^2\phi_1^2 + j^2\psi_1^2)D^{dc}$$

I vettori \mathbf{w}_{2ij} , con $i, j = 0, 2$ ($i, j \neq 1$) sono le soluzioni dei seguenti sistemi lineari:

•

$$\begin{aligned} L^{dc} \mathbf{w}_{200} &= J \mathbf{w}_{200} \\ \Rightarrow J \mathbf{w}_{200} &= -\frac{1}{4}F_1 \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} L^{dc} \mathbf{w}_{220} \cos(2\phi_1 x) &= L_{20}^1 \mathbf{w}_{220} \cos(2\phi x) \\ \Rightarrow L_{20}^1 \mathbf{w}_{220} &= -\frac{1}{4}F_1 \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} L^{dc} \mathbf{w}_{202} \cos(2\psi_1 y) &= L_{02}^1 \mathbf{w}_{202} \cos(2\psi y) \\ \Rightarrow L_{02}^1 \mathbf{w}_{202} &= -\frac{1}{4} F_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^{dc} \mathbf{w}_{222} \cos(2\phi_1 x) \cos(2\psi_1 y) &= L_{22}^1 \mathbf{w}_{222} \cos(2\phi_1 x) \cos(2\psi y) \\ \Rightarrow L_{22}^1 \mathbf{w}_{222} &= -\frac{1}{4} F_1 \end{aligned}$$

$O(h^3)$

$$G_1^{(1)} = \left[\bar{A}_1^3 G_2 \left(\mathbf{w}_{200} + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{220} + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{202} + \frac{1}{4} \mathbf{w}_{222} \right) + \frac{9}{16} \bar{A}_1^3 G_3 \right] \cos(\phi_1 x) \cos(\psi_1 y) + G_1^*,$$

ove G_1^* contiene termini ortogonali a ψ .

Ponendo

$$\begin{aligned} G_4^{(1)} &= \bar{k}_c^2 \begin{pmatrix} 0 \\ Md^{(2)} \end{pmatrix} \\ G_5^{(1)} &= G_2 \left(\mathbf{w}_{200} + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{220} + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{202} + \frac{1}{4} \mathbf{w}_{222} \right) + \frac{9}{16} G_3 \end{aligned}$$

la condizione di compatibilità $\langle G^{(1)}, \psi \rangle = 0$ porta a:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial T_2} \mathbf{r}, \tilde{\psi} \right) + (G_4^{(1)}, \tilde{\psi}) A - (G_5^{(1)}, \tilde{\psi}) \bar{A}_1^3 = 0$$

Ponendo

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{(G_4^{(1)}, \tilde{\psi})}{(\mathbf{r}, \tilde{\psi})} \\ L &= -\frac{(G_5^{(1)}, \tilde{\psi})}{(\mathbf{r}, \tilde{\psi})} \end{aligned}$$

si ottiene l'equazione (4.9).

Sostituendo l'espressione (4.9) (con l'accortezza di modificare la derivata in derivata parziale) in(4.8) si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^{(1)} = & \bar{\mathbf{A}}_1 \left(\sigma \mathbf{r} + G_4^{(1)} \right) \cos(\phi_1 x) \cos(\psi_1 y) - \bar{\mathbf{A}}_1^3 \left(L \mathbf{r} + G_5^{(1)} \right) \cos(\phi_1 x) \cos(\psi_1 y) \\ & - G_6^{(1)} \cos(3\phi_1 x) \cos(\psi_1 y) - G_7^{(1)} \cos(\phi_1 x) \cos(3\psi_1 y) - G_8^{(1)} \cos(3\phi_1 x) \cos(3\psi_1 y), \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} G_6^{(1)} &= G_2 \left(\frac{1}{2} \mathbf{w}_{220} + \frac{1}{4} \mathbf{w}_{222} \right) + \frac{3}{16} G_3 \\ G_7^{(1)} &= G_2 \left(\frac{1}{2} \mathbf{w}_{202} + \frac{1}{4} \mathbf{w}_{222} \right) + \frac{3}{16} G_3 \\ G_8^{(1)} &= \frac{1}{4} G_2 \mathbf{w}_{222} + \frac{1}{16} G_3 \end{aligned}$$

Pertanto i vettori \mathbf{w}_{3ij} ($i, j = 1, 3$) sono soluzioni dei seguenti sistemi lineari:

•

$$\begin{aligned} L^{dc} \mathbf{w}_{311}^{(1)} \cos(\phi_1 x) \cos(\psi_1 y) &= L_{11}^1 \mathbf{w}_{311}^{(1)} \cos(\phi_1 x) \cos(\psi_1 y) \\ \Rightarrow L_{11}^1 \mathbf{w}_{311}^{(1)} &= \sigma \mathbf{r} + G_4^{(1)} \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} L^{dc} \mathbf{w}_{311} \cos(\phi_1 x) \cos(\psi_1 y) &= L_{11}^1 \mathbf{w}_{311} \cos(\phi_1 x) \cos(\psi_1 y) \\ \Rightarrow L_{11}^1 \mathbf{w}_{311} &= -L \mathbf{r} - G_5^{(1)} \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} L^{dc} \mathbf{w}_{331} \cos(3\phi_1 x) \cos(\psi_1 y) &= L_{31}^1 \mathbf{w}_{331} \cos(3\phi_1 x) \cos(\psi_1 y) \\ \Rightarrow L_{31}^1 \mathbf{w}_{331} &= -G_6^{(1)} \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} L^{dc} \mathbf{w}_{313} \cos(\phi_1 x) \cos(3\psi_1 y) &= L_{13}^1 \mathbf{w}_{313} \cos(\phi_1 x) \cos(3\psi_1 y) \\ \Rightarrow L_{13}^1 \mathbf{w}_{313} &= -G_7^{(1)} \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} L^{dc} \mathbf{w}_{333} \cos(3\phi_1 x) \cos(3\psi_1 y) &= L_{33}^1 \mathbf{w}_{333} \cos(3\phi_1 x) \cos(3\psi_1 y) \\ \Rightarrow L_{33}^1 \mathbf{w}_{333} &= -G_8^{(1)} \end{aligned}$$

$O(h^4)$

$$H_1^{(1)} = \sum_{i,j=0,2,4} \left(\bar{A}_1^2 H_{ij}^{(1)} + \bar{A}_1^4 H_{ij} \right) \cos(i\phi_1 x) \cos(j\psi_1 y) + H_{11} \cos(\phi_1 x) \cos(\psi_1 y),$$

con

$$H_{00}^{(1)} = 2\sigma \mathbf{w}_{200} - \frac{1}{4} G_2 \mathbf{w}_{311}^{(1)}$$

$$H_{20}^{(1)} = 2\sigma \mathbf{w}_{220} + 4\phi_1^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{(2)} \end{pmatrix} \mathbf{w}_{220} - \frac{1}{4} G_2 \mathbf{w}_{311}^{(1)}$$

$$H_{02}^{(1)} = 2\sigma \mathbf{w}_{202} + 4\psi_1^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{(2)} \end{pmatrix} \mathbf{w}_{202} - \frac{1}{4} G_2 \mathbf{w}_{311}^{(1)}$$

$$H_{22}^{(1)} = 2\sigma \mathbf{w}_{222} + 4\bar{k}_c^{-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{(2)} \end{pmatrix} \mathbf{w}_{222} - \frac{1}{4} G_2 \mathbf{w}_{311}^{(1)}$$

$$H_{00} = -2L \mathbf{w}_{200} - \frac{1}{4} G_2 \mathbf{w}_{311} - H_2^{(1)} \mathbf{w}_{200} - \frac{1}{2} H_3^{(1)} \mathbf{w}_{220} - \frac{1}{2} H_4^{(1)} \mathbf{w}_{202} - \frac{1}{4} H_5^{(1)} \mathbf{w}_{222}$$

$$H_{11} = \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial T_3} \mathbf{r} + d^{(3)} \bar{A}_1 \bar{k}_c^{-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_{20} = -2L \mathbf{w}_{220} - \frac{1}{4} G_2 \mathbf{w}_{311} - \frac{1}{4} G_2 \mathbf{w}_{331} - H_2^{(1)} \mathbf{w}_{220} - H_3^{(1)} \mathbf{w}_{200} - \frac{1}{2} H_4^{(1)} \mathbf{w}_{222} - \frac{1}{2} H_5^{(1)} \mathbf{w}_{202}$$

$$H_{02} = -2L \mathbf{w}_{202} - \frac{1}{4} G_2 \mathbf{w}_{311} - \frac{1}{4} G_2 \mathbf{w}_{313} - H_2^{(1)} \mathbf{w}_{202} - \frac{1}{2} H_3^{(1)} \mathbf{w}_{222} - H_4^{(1)} \mathbf{w}_{200} - \frac{1}{2} H_5^{(1)} \mathbf{w}_{220}$$

$$H_{22} = -2L \mathbf{w}_{222} - \frac{1}{4} G_2 \mathbf{w}_{311} - \frac{1}{4} G_2 \mathbf{w}_{331} - \frac{1}{4} G_2 \mathbf{w}_{313} - \frac{1}{4} G_2 \mathbf{w}_{333} - H_2^{(1)} \mathbf{w}_{222} - H_3^{(1)} \mathbf{w}_{202}$$

$$- H_4^{(1)} \mathbf{w}_{220} - H_5^{(1)} \mathbf{w}_{200}$$

$$H_{40} = -\frac{1}{4} G_2 \mathbf{w}_{331} - \frac{1}{2} H_3^{(1)} \mathbf{w}_{220} - \frac{1}{4} H_5^{(1)} \mathbf{w}_{222}$$

$$H_{42} = -\frac{1}{4} G_2 \mathbf{w}_{331} - \frac{1}{4} G_2 \mathbf{w}_{333} - \frac{1}{2} H_3^{(1)} \mathbf{w}_{222} - \frac{1}{2} H_5^{(1)} \mathbf{w}_{220}$$

$$H_{04} = -\frac{1}{4} G_2 \mathbf{w}_{313} - \frac{1}{2} H_4^{(1)} \mathbf{w}_{202} - \frac{1}{4} H_5^{(1)} \mathbf{w}_{222}$$

$$H_{24} = -\frac{1}{4} G_2 \mathbf{w}_{313} - \frac{1}{4} G_2 \mathbf{w}_{333} - \frac{1}{2} H_4^{(1)} \mathbf{w}_{222} - \frac{1}{2} H_5^{(1)} \mathbf{w}_{202}$$

$$H_{44} = -\frac{1}{4} G_2 \mathbf{w}_{333} - \frac{1}{4} H_5^{(1)} \mathbf{w}_{222}$$

dove

$$\begin{aligned}
 H_2^{(1)} &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}A_2 & -A_1 \mathbf{w}_{200}(1) \\ W \mathbf{w}_{200}(2) - \frac{1}{4}\gamma(Ck_2 - Dk_3)M^2 & -\gamma(C + D) \mathbf{w}_{200}(2) - \frac{1}{2}\gamma(Ck_2 - Dk_3)M \end{pmatrix} \\
 H_3^{(1)} &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}A_2 & -A_1 \mathbf{w}_{220}(1) \\ W \mathbf{w}_{220}(2) - \frac{1}{4}\gamma(Ck_2 - Dk_3)M^2 & -\gamma(C + D) \mathbf{w}_{220}(2) - \frac{1}{2}\gamma(Ck_2 - Dk_3)M \end{pmatrix} \\
 H_4^{(1)} &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}A_2 & -A_1 \mathbf{w}_{202}(1) \\ W \mathbf{w}_{202}(2) - \frac{1}{4}\gamma(Ck_2 - Dk_3)M^2 & -\gamma(C + D) \mathbf{w}_{202}(2) - \frac{1}{2}\gamma(Ck_2 - Dk_3)M \end{pmatrix} \\
 H_5^{(1)} &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}A_2 & -A_1 \mathbf{w}_{222}(1) \\ W \mathbf{w}_{222}(2) - \frac{1}{4}\gamma(Ck_2 - Dk_3)M^2 & -\gamma(C + D) \mathbf{w}_{222}(2) - \frac{1}{2}\gamma(Ck_2 - Dk_3)M \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Allora i vettori \mathbf{w}_{4ij} , ($i, j = 0, 2, 4$) sono le soluzioni dei seguenti sistemi lineari:

$$L_{ij}^1 \mathbf{w}_{4ij}^{(1)} = H_{ij}^{(1)}, \quad L_{ij}^1 \mathbf{w}_{4ij} = H_{ij}$$

$O(h^5)$

$$\begin{aligned}
 P_1^{(1)} &= G_2 \bar{A}_1 \cos(\phi_1 x) \cos(\psi_1 y) \mathbf{w}_4 + P_2^{(1)} \bar{A}_1^2 \mathbf{w}_3 + P_3^{(1)} \bar{A}_1^2 \mathbf{w}_3 \cos(2\phi_1 x) \\
 &+ P_4^{(1)} \bar{A}_1^2 \mathbf{w}_3 \cos(2\psi_1 y) + P_5^{(1)} \bar{A}_1^2 \mathbf{w}_3 \cos(2\phi_1 x) \cos(2\psi_1 y) \\
 &+ P_6^{(1)} \bar{A}_1^3 \mathbf{w}_2 \cos(\phi_1 x) \cos(\psi_1 y) + P_7^{(1)} \bar{A}_1^3 \mathbf{w}_2 \cos(3\phi_1 x) \cos(\psi_1 y) \\
 &+ P_8^{(1)} \bar{A}_1^3 \mathbf{w}_2 \cos(\phi_1 x) \cos(3\psi_1 y) + P_9^{(1)} \bar{A}_1^3 \mathbf{w}_2 \cos(3\phi_1 x) \cos(3\psi_1 y),
 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
 P_2^{(1)} &= \begin{pmatrix} -A_1 \mathbf{w}_{200}(2) - \frac{3}{4}A_2 & -A_1 \mathbf{w}_{200}(1) \\ W \mathbf{w}_{200}(2) - \frac{1}{4}\gamma(Ck_2 - Dk_3)M^2 & W \mathbf{w}_{200}(1) - 2\gamma(C + D) \mathbf{w}_{200}(2) - \frac{1}{2}\gamma(Ck_2 - Dk_3)M \end{pmatrix} \\
 P_3^{(1)} &= \begin{pmatrix} -A_1 \mathbf{w}_{220}(2) - \frac{3}{4}A_2 & -A_1 \mathbf{w}_{220}(1) \\ W \mathbf{w}_{220}(2) - \frac{1}{4}\gamma(Ck_2 - Dk_3)M^2 & W \mathbf{w}_{220}(1) - 2\gamma(C + D) \mathbf{w}_{220}(2) - \frac{1}{2}\gamma(Ck_2 - Dk_3)M \end{pmatrix} \\
 P_4^{(1)} &= \begin{pmatrix} -A_1 \mathbf{w}_{202}(2) - \frac{3}{4}A_2 & -A_1 \mathbf{w}_{202}(1) \\ W \mathbf{w}_{202}(2) - \frac{1}{4}\gamma(Ck_2 - Dk_3)M^2 & W \mathbf{w}_{202}(1) - 2\gamma(C + D) \mathbf{w}_{202}(2) - \frac{1}{2}\gamma(Ck_2 - Dk_3)M \end{pmatrix} \\
 P_5^{(1)} &= \begin{pmatrix} -A_1 \mathbf{w}_{222}(2) - \frac{3}{4}A_2 & -A_1 \mathbf{w}_{222}(1) \\ W \mathbf{w}_{222}(2) - \frac{1}{4}\gamma(Ck_2 - Dk_3)M^2 & W \mathbf{w}_{222}(1) - 2\gamma(C + D) \mathbf{w}_{222}(2) - \frac{1}{2}\gamma(Ck_2 - Dk_3)M \end{pmatrix} \\
 P_6^{(1)} &= \begin{pmatrix} -3A_2(\mathbf{w}_{200}(1) + \frac{1}{2}\mathbf{w}_{220}(1) + \frac{1}{2}\mathbf{w}_{202}(1) + \frac{1}{4}\mathbf{w}_{222}(1)) & 0 \\ -2\gamma(Ck_2 - Dk_3)M\tilde{\mathbf{w}}_2(2) & -\gamma(Ck_2 - Dk_3)\tilde{\mathbf{w}}_2(2) \end{pmatrix} \\
 P_7^{(1)} &= \begin{pmatrix} -3A_2(\frac{1}{2}\mathbf{w}_{220}(1) + \frac{1}{4}\mathbf{w}_{222}(1)) & 0 \\ -2\gamma(Ck_2 - Dk_3)M(\mathbf{w}_{220}(2) + \frac{1}{4}\mathbf{w}_{222}(2)) & -\gamma(Ck_2 - Dk_3)(\frac{1}{2}\mathbf{w}_{220}(2) + \frac{1}{4}\mathbf{w}_{222}(2)) \end{pmatrix} \\
 P_8^{(1)} &= \begin{pmatrix} -3A_2(\frac{1}{2}\mathbf{w}_{202}(1) + \frac{1}{4}\mathbf{w}_{222}(1)) & 0 \\ -2\gamma(Ck_2 - Dk_3)M(\mathbf{w}_{202}(2) + \frac{1}{4}\mathbf{w}_{222}(2)) & -\gamma(Ck_2 - Dk_3)(\frac{1}{2}\mathbf{w}_{202}(2) + \frac{1}{4}\mathbf{w}_{222}(2)) \end{pmatrix} \\
 P_9^{(1)} &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}A_2 \mathbf{w}_{222}(1) & 0 \\ -\frac{1}{2}\gamma(Ck_2 - Dk_3)M \mathbf{w}_{222}(2) & -\frac{1}{4}\gamma(Ck_2 - Dk_3) \mathbf{w}_{222}(2) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

dove il vettore $\tilde{\mathbf{w}}_2(2)$ è così definito:

$$\tilde{\mathbf{w}}_2(2) = \mathbf{w}_{200}(2) + \frac{1}{2}\mathbf{w}_{220}(2) + \frac{1}{2}\mathbf{w}_{202}(2) + \frac{1}{4}\mathbf{w}_{222}(2).$$

Assemblando opportunamente i termini, possiamo riscrivere il vettore come:

$$P_1^{(1)} = \left(\frac{\partial \bar{A}_1}{\partial T_4} \mathbf{r} + P_{11}^{(1)} \bar{A}_1 + P_{11}^{(3)} \bar{A}_1^3 + P_{11}^{(5)} \bar{A}_1^5 \right) \cos(\phi_1 x) \cos(\psi_1 y) + P^*,$$

dove P^* contiene termini che sono ortogonali a ψ e

$$\begin{aligned}
 P_{11}^{(1)} &= \sigma \mathbf{w}_{311}^{(1)} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{k}_c^2 d^{(4)} \end{pmatrix} \mathbf{w}_{311}^{(1)} + \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{k}_c^2 d^{(4)} M \end{pmatrix} \\
 P_{11}^{(3)} &= -L \mathbf{w}_{311}^{(1)} + 3\sigma \mathbf{w}_{311}^{(1)} - G_2 \mathbf{w}_{400}^{(1)} - \frac{1}{2} G_2 \mathbf{w}_{420}^{(1)} - \frac{1}{2} G_2 \mathbf{w}_{402}^{(1)} - \frac{1}{4} G_2 \mathbf{w}_{422}^{(1)} - P_2^{(1)} \mathbf{w}_{311}^{(1)} \\
 &\quad - \frac{1}{2} P_3^{(1)} \mathbf{w}_{311}^{(1)} - \frac{1}{2} P_4^{(1)} \mathbf{w}_{311}^{(1)} - \frac{1}{4} P_5^{(1)} \mathbf{w}_{311}^{(1)} + \bar{k}_c^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{(2)} \end{pmatrix} \mathbf{w}_{311} \\
 P_{11}^{(5)} &= - \left(3L \mathbf{w}_{311} + G_2 \left(\mathbf{w}_{400} + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{420} + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{402} + \frac{1}{4} \mathbf{w}_{422} \right) + P_2^{(1)} \mathbf{w}_{311} \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} P_3^{(1)} (\mathbf{w}_{311} + \mathbf{w}_{331}) + \frac{1}{2} P_4^{(1)} (\mathbf{w}_{311} + \mathbf{w}_{313}) + \frac{1}{4} P_5^{(1)} (\mathbf{w}_{311} + \mathbf{w}_{331} + \mathbf{w}_{313} + \mathbf{w}_{333}) \\
 &\quad + P_6^{(1)} \left(\mathbf{w}_{200} + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{220} + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{202} + \frac{1}{4} \mathbf{w}_{222} \right) + P_7^{(1)} \left(\frac{1}{2} \mathbf{w}_{220} + \frac{1}{4} \mathbf{w}_{222} \right) \\
 &\quad \left. + P_8^{(1)} \left(\frac{1}{2} \mathbf{w}_{202} + \frac{1}{4} \mathbf{w}_{222} \right) + \frac{1}{4} P_9^{(1)} \mathbf{w}_{222} \right)
 \end{aligned}$$

Definendo

$$\tilde{\sigma} = -\frac{(P_{11}^{(1)}, \tilde{\psi})}{(\mathbf{r}, \tilde{\psi})}, \quad \tilde{L} = \frac{(P_{11}^{(3)}, \tilde{\psi})}{(\mathbf{r}, \tilde{\psi})}, \quad \tilde{Q} = -\frac{(P_{11}^{(5)}, \tilde{\psi})}{(\mathbf{r}, \tilde{\psi})}$$

si ottiene

$$\frac{\partial \bar{A}_1}{\partial T_4} = \tilde{\sigma} \bar{A}_1 - \tilde{L} \bar{A}_1^3 + \tilde{Q} \bar{A}_1^5. \quad (\text{E.1})$$

Sommando la (E.1) con la (4.9) si ottiene l'equazione di Stuart-Landau (4.14),

dove

$$\bar{\sigma} = \sigma + h^2 \tilde{\sigma}, \quad \bar{L} = L + h^2 \tilde{L}, \quad \bar{Q} = h^2 \tilde{Q}.$$

Appendice F

Analisi debolmente non lineare nel caso $2D$ ($m = 2$)

F.1 Autovalore doppio e condizioni di non risonanza

$O(\hbar^2)$

Definiamo preliminarmente i seguenti operatori

$$\begin{aligned}L_{ij}^1 &= J - (i^2 \phi_1^2 + j^2 \psi_1^2) D^{dc} \\L_{ij}^2 &= J - (i^2 \phi_2^2 + j^2 \psi_2^2) D^{dc} \\L_{mn}^1 &= J - ((\phi_1 + m\phi_2)^2 + (\psi_1 + n\psi_2^2)) D^{dc}\end{aligned}$$

I vettori in (4.18) sono le soluzioni dei seguenti sistemi lineari:

$$L_{ij}^1 \mathbf{w}_{2ij}^1 = -\frac{1}{4} F_1 \quad L_{ij}^2 \mathbf{w}_{2ij}^2 = -\frac{1}{4} F_1 \quad L_{mn} \mathbf{w}_{2mn} = -\frac{1}{2} F_1$$

$O(h^3)$

I vettori presenti in (4.19) sono i seguenti:

$$\begin{aligned}
 G_4^{(21)} = G_4^{(22)} &= d^{(2)} \bar{k}_c^2 \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix} \\
 G_5^{(21)} &= G_2 \left(\mathbf{w}_{200}^1 + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{220}^1 + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{202}^1 + \frac{1}{4} \mathbf{w}_{222}^1 \right) + \frac{9}{16} G_3 \\
 G_5^{(22)} &= G_2 \left(\mathbf{w}_{200}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{220}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{202}^2 + \frac{1}{4} \mathbf{w}_{222}^2 \right) + \frac{9}{16} G_3 \\
 G_6^{(21)} &= G_2 \left(\mathbf{w}_{200}^2 + \frac{1}{4} \mathbf{w}_{211} + \frac{1}{4} \mathbf{w}_{21-1} + \frac{1}{4} \mathbf{w}_{2-11} + \frac{1}{4} \mathbf{w}_{2-1-1} \right) + \frac{3}{4} \\
 G_6^{(22)} &= G_2 \left(\mathbf{w}_{200}^1 + \frac{1}{4} \mathbf{w}_{211} + \frac{1}{4} \mathbf{w}_{21-1} + \frac{1}{4} \mathbf{w}_{2-11} + \frac{1}{4} \mathbf{w}_{2-1-1} \right) + \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il vettore $\bar{G}^{(2)}$ ci sono tre casi da considerare

- (i) $\phi_l \neq 0$ e $\psi_l \neq 0$ ($l = 1, 2$).

In questo caso, $\bar{G}^{(2)}$ contiene solo termini che sono ortogonali a ψ , pertanto la condizione di compatibilità porta a:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d\bar{A}_1}{dT_2} \mathbf{r}, \tilde{\psi} \right) &= - \left(G_4^{(21)}, \tilde{\psi} \right) \bar{A}_1 + \left(G_5^{(21)}, \tilde{\psi} \right) \bar{A}_1^3 + \left(G_6^{(21)}, \tilde{\psi} \right) \bar{A}_1 \bar{A}_2^2 \\
 \left(\frac{d\bar{A}_2}{dT_2} \mathbf{r}, \tilde{\psi} \right) &= - \left(G_4^{(22)}, \tilde{\psi} \right) \bar{A}_2 + \left(G_5^{(22)}, \tilde{\psi} \right) \bar{A}_2^3 + \left(G_6^{(22)}, \tilde{\psi} \right) \bar{A}_1^2 \bar{A}_2
 \end{aligned}$$

Il sistema (4.20) si ottiene facendo le seguenti posizioni:

$$\sigma = \sigma_l = - \frac{\left(G_4^{(21)}, \tilde{\psi} \right)}{\left(\mathbf{r}, \tilde{\psi} \right)}, \quad L_l = - \frac{\left(G_5^{(2l)}, \tilde{\psi} \right)}{\left(\mathbf{r}, \tilde{\psi} \right)}, \quad \Omega_l = \frac{\left(G_6^{(2l)}, \tilde{\psi} \right)}{\left(\mathbf{r}, \tilde{\psi} \right)}$$

- (ii) Soltanto uno tra ϕ_l e ψ_l ($l = 1, 2$) è nullo.

Senza perdita di generalità assumiamo che $\phi_1 = 0$, quindi $\bar{k}_c^2 = \psi_1^2 = \phi_2^2 + \psi_2^2$.

In questo caso,

$$\bar{G}^{(2)} = \bar{G}_5^{(21)} \bar{A}_1^3 \cos(\psi_1 y) + \bar{G}_6^{(22)} \bar{A}_1^2 \bar{A}_2 \cos(\phi_2 x) \cos(\psi_2 y) + \bar{G}^{(2)*},$$

dove

$$\begin{aligned}\bar{G}_5^{(21)} &= \frac{1}{2} G_2 \left(\mathbf{w}_{220}^1 + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{222}^1 \right) + \frac{3}{16} \\ \bar{G}_6^{(22)} &= G_2 \left(\mathbf{w}_{220}^1 + \frac{1}{4} \mathbf{w}_{211}^1 + \frac{1}{4} \mathbf{w}_{2-11}^1 + \frac{1}{4} \mathbf{w}_{21-1}^1 + \frac{1}{4} \mathbf{w}_{2-1-1}^1 \right) + \frac{3}{4}\end{aligned}$$

mentre $\bar{G}^{(2)*}$ include termini ortogonali a ψ .

Pertanto, stavolta si ha che

$$\sigma = \sigma_l = -\frac{\left(G_4^{(21)}, \tilde{\psi} \right)}{\left(\mathbf{r}, \tilde{\psi} \right)}, \quad L_l = -\frac{\left(G_5^{(2l)}, \tilde{\psi} \right)}{\left(\mathbf{r}, \tilde{\psi} \right)} + \bar{L}_l, \quad \Omega_l = \frac{\left(G_6^{(2l)}, \tilde{\psi} \right)}{\left(\mathbf{r}, \tilde{\psi} \right)} + \bar{\Omega}_l,$$

dove

$$\bar{L}_1 = -\frac{\left(\bar{G}_5^{(21)}, \tilde{\psi} \right)}{\left(\mathbf{r}, \tilde{\psi} \right)}, \quad \bar{L}_2 = 0, \quad \bar{\Omega}_1 = 0, \quad \bar{\Omega}_2 = \frac{\left(\bar{G}_6^{(22)}, \tilde{\psi} \right)}{\left(\mathbf{r}, \tilde{\psi} \right)}. \quad (\text{F.1})$$

(iii) Soltanto una delle relazioni $\phi_1 = \psi_2 = 0$ e $\phi_2 = \psi_1 = 0$ vale.

Senza perdita di generalità assumiamo che $\phi_1 = \psi_2 = 0$, quindi $\bar{k}_c^2 = \phi_2^2 = \psi_1^2$.

In questo caso

$$\begin{aligned}\bar{G}^{(2)} &= \bar{G}_5^{(21)} \bar{A}_1^3 \cos(\psi_1 y) + \bar{G}_6^{(22)} \bar{A}_1^2 \bar{A}_2 \cos(\phi_2 x) \\ &\quad + \bar{G}_5^{(22)} \bar{A}_2^3 \cos(\phi_2 x) + \bar{G}_6^{(21)} \bar{A}_1 \bar{A}_2^2 \cos(\psi_1 y) + \bar{G}^{(2)**},\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}\bar{G}_5^{(22)} &= \frac{1}{2} G_2 \left(\mathbf{w}_{220}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{222}^2 \right) + \frac{3}{16} \\ \bar{G}_6^{(21)} &= G_2 \left(\mathbf{w}_{220}^2 + \frac{1}{4} \mathbf{w}_{211}^2 + \frac{1}{4} \mathbf{w}_{2-11}^2 + \frac{1}{4} \mathbf{w}_{21-1}^2 + \frac{1}{4} \mathbf{w}_{2-1-1}^2 \right) + \frac{3}{4}\end{aligned}$$

mentre $\bar{G}^{(2)**}$ include termini ortogonali a ψ .

Pertanto, stavolta si ha che

$$\sigma = \sigma_l = -\frac{\left(G_4^{(21)}, \tilde{\psi} \right)}{\left(\mathbf{r}, \tilde{\psi} \right)} \quad L_l = -\frac{\left(G_5^{(2l)}, \tilde{\psi} \right)}{\left(\mathbf{r}, \tilde{\psi} \right)} + \bar{L}_l \quad \Omega_l = \frac{\left(G_6^{(2l)}, \tilde{\psi} \right)}{\left(\mathbf{r}, \tilde{\psi} \right)} + \bar{\Omega}_l$$

dove le espressioni per σ , L_l e Ω_l sono come in (F.1) con la seguente modifica per i coefficienti \bar{L}_2 e $\bar{\Omega}_1$:

$$\bar{L}_2 = -\frac{\left(\bar{G}_5^{(22)}, \tilde{\psi} \right)}{\left(\mathbf{r}, \tilde{\psi} \right)}, \quad \bar{\Omega}_1 = \frac{\left(\bar{G}_6^{(21)}, \tilde{\psi} \right)}{\left(\mathbf{r}, \tilde{\psi} \right)}.$$

F.2 Autovalore doppio e condizioni di risonanza

Supponiamo che valgano le condizioni di risonanza.

Senza perdita di generalità, consideriamo

$$\begin{cases} \phi_2 - \phi_1 = \phi_1 \\ \psi_2 + \psi_1 = \psi_1 \\ \phi_1^2 + \psi_1^2 = \phi_2^2 + \psi_2^2 = \bar{k}_c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi_2 = 2\phi_1 \\ \psi_2 = 0 \\ \psi_1 = \sqrt{3}\phi_1 \\ \phi_1 = 2 = \frac{\bar{k}_c}{2} \end{cases}$$

All'ordine h^2 , l'espressione per $F^{(3)}$ è data in (4.22), dove il vettore

$$\begin{aligned} F^{(3)*} = & -\frac{1}{4} F_1 \bar{A}_1^2 - \frac{1}{2} F_1 \bar{A}_2^2 - \frac{1}{4} F_1 \bar{A}_1^2 \cos(2\psi_1 y) - \frac{1}{2} F_1 \bar{A}_1^2 \cos(2\phi_2 x) \\ & - F_1 \bar{A}_1 \bar{A}_2 \cos(3\phi_1 x) \cos(\psi_1 y) - \frac{1}{4} F_1 \bar{A}_1^2 \cos(2\phi_1 x) \cos(2\psi_1 y) \end{aligned}$$

è ortogonale a ψ .

Imponendo la condizione di compatibilità si ha:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\bar{A}_1}{dT_1} \mathbf{r}, \tilde{\psi} \right) + \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \bar{k}_c^2 d^{(1)} M \end{pmatrix}, \tilde{\psi} \right) \bar{A}_1 - (F_1, \tilde{\psi}) \bar{A}_1 \bar{A}_2 = 0 \\ \left(\frac{d\bar{A}_2}{dT_1} \mathbf{r}, \tilde{\psi} \right) + \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \bar{k}_c^2 d^{(1)} M \end{pmatrix}, \tilde{\psi} \right) \bar{A}_2 - \left(\frac{1}{4} F_1, \tilde{\psi} \right) \bar{A}_1^2 = 0 \end{aligned}$$

Le espressioni in (4.23) si ottengono con le seguenti posizioni:

$$\sigma = -\frac{\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \bar{k}_c^2 d^{(1)} M \end{pmatrix}, \tilde{\psi} \right)}{(\mathbf{r}, \tilde{\psi})}, \quad L_1 = -\frac{(F_1, \tilde{\psi})}{(\mathbf{r}, \tilde{\psi})}, \quad L_2 = -\frac{1}{4} L_1.$$

I vettori in (4.24) sono le soluzioni dei seguenti sistemi lineari:

$$\bullet L_{11}^1 \mathbf{w}_{211}^{1(1)} = \sigma \mathbf{r} + \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{k}_c^2 d^{(1)} M \end{pmatrix}$$

$$\bullet L_{11}^2 \mathbf{w}_{211}^{2(1)} = \sigma \mathbf{r} + \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{k}_c^2 d^{(1)} M \end{pmatrix}$$

$$\bullet L_{11}^1 \mathbf{w}_{211}^{1(2)} = -L_1 \mathbf{r} - F_1$$

$$\bullet L_{11}^2 \mathbf{w}_{211}^{2(2)} = -\frac{L_1}{4} \mathbf{r} - \frac{1}{4} F_1$$

$$\bullet L_{00}^1 \mathbf{w}_{200}^1 = -\frac{1}{4} F_1$$

$$\bullet L_{02}^1 \mathbf{w}_{202}^1 = -\frac{1}{4} F_1$$

$$\bullet L_{22}^1 \mathbf{w}_{222}^1 = -\frac{1}{4} F_1$$

$$\bullet L_{00}^2 \mathbf{w}_{200}^2 = -\frac{1}{2} F_1$$

$$\bullet L_{20}^2 \mathbf{w}_{220}^2 = -\frac{1}{2} F_1$$

$$\bullet L_{31}^1 \mathbf{w}_{231}^1 = -F_1$$

$O(h^3)$

I vettori presenti in (4.25) sono i seguenti:

$$\begin{aligned}
 G_4^{(31)} &= \sigma \mathbf{w}_{211}^{1(1)} + d^{(1)} \bar{k}_c^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{w}_{211}^{1(1)} + d^{(2)} \bar{k}_c^2 \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix} \\
 G_4^{(32)} &= \sigma \mathbf{w}_{211}^{2(1)} + d^{(1)} \bar{k}_c^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{w}_{211}^{2(1)} + d^{(2)} \bar{k}_c^2 \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix} \\
 G_5^{(31)} &= 2\sigma \mathbf{w}_{211}^{1(2)} - L_1 \mathbf{w}_{211}^{1(1)} + d^{(1)} \bar{k}_c^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{w}_{211}^{1(2)} - \frac{1}{2} G_2 (\mathbf{w}_{211}^{1(1)} + \mathbf{w}_{211}^{2(1)}) \\
 G_5^{(32)} &= 2\sigma \mathbf{w}_{211}^{2(2)} - \frac{L_1}{4} \mathbf{w}_{211}^{2(1)} + d^{(1)} \bar{k}_c^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{w}_{211}^{2(2)} - \frac{1}{4} G_2 \mathbf{w}_{211}^{1(1)} \\
 G_6^{(31)} &= -\frac{L_1}{4} \mathbf{w}_{211}^{1(2)} - G_2 \left(\frac{1}{2} \mathbf{w}_{211}^{2(2)} + \mathbf{w}_{200}^1 + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{202}^1 + \frac{1}{4} \mathbf{w}_{222}^1 \right) - \frac{9}{16} G_3 \\
 G_6^{(32)} &= -G_2 \left(\mathbf{w}_{200}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{220}^2 \right) - \frac{9}{16} G_3 - \frac{3}{16} \\
 G_7^{(31)} &= -L_1 \mathbf{w}_{211}^{1(2)} - G_2 \left(\mathbf{w}_{200}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{211}^{1(2)} + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{231}^1 \right) - \frac{3}{2} \\
 G_7^{(32)} &= -2L_1 \mathbf{w}_{211}^{2(2)} - G_2 \left(\mathbf{w}_{200}^1 + \frac{1}{4} \mathbf{w}_{211}^{1(2)} + \frac{1}{4} \mathbf{w}_{231}^1 \right)
 \end{aligned}$$

mentre $\bar{G}^{(3)}$ contiene termini ortogonali a ψ e quindi non ha termini secolari.

Imponendo l'alternativa di Fredholm e definendo

$$\tilde{\sigma}_l = -\frac{(G_4^{(3l)}, \tilde{\psi})}{(\mathbf{r}, \tilde{\psi})} \quad \tilde{L}_l = \frac{(G_5^{(3l)}, \tilde{\psi})}{(\mathbf{r}, \tilde{\psi})} \quad \tilde{\alpha}_l = -\frac{(G_6^{(3l)}, \tilde{\psi})}{(\mathbf{r}, \tilde{\psi})} \quad \tilde{\beta}_l = -\frac{(G_7^{(3l)}, \tilde{\psi})}{(\mathbf{r}, \tilde{\psi})} \quad (\text{F.2})$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial T_2} &= \tilde{\sigma}_1 \bar{A}_1 - \tilde{L}_1 \bar{A}_1 \bar{A}_2 + \tilde{\alpha}_1 \bar{A}_1^3 + \tilde{\beta}_1 \bar{A}_1 \bar{A}_2^2 \\
 \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial T_2} &= \tilde{\sigma}_2 \bar{A}_2 - \tilde{L}_2 \bar{A}_1^2 + \tilde{\alpha}_2 \bar{A}_2^3 + \tilde{\beta}_2 \bar{A}_1^2 \bar{A}_2,
 \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

Sommando la (F.3) con la (4.23) si ottiene il sistema (4.26) per le ampiezze \bar{A}_1 e \bar{A}_2 al tempo caratteristico T , dove

$$\bar{\sigma}_l = \sigma + h\tilde{\sigma}_l, \quad \bar{L}_l = L + h\tilde{L}_l, \quad \bar{\alpha}_l = h\tilde{\alpha}_l, \quad \bar{\beta}_l = h\tilde{\beta}_l.$$

Bibliografia

- [1] S. Salsa, F. Vegni, A. Zaretti, and P. Zunino. *An invitation to partial differential equations. Methods, models and simulations*. Springer-Verlag, Italy, Milan, 2009.
- [2] J. D. Murray. *Mathematical Biology, II: Spatial Models and Biomedical Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [3] S.S. Scott, R. Schreiner, L.R. Sharpe, B.Z. Shakhshiri, and G.E. Dirreen. *Chemical Demonstrations, II*. B.Z. Shakhshiri ed, University of Wisconsin Press, Madison, WI, Ch. 7 Oscillating reactions, 1985.
- [4] B. Bozzini, D. Licitignola, and I. Sgura. *Spatio-temporal organization in alloy electrodeposition: a morphochemical model and its experimental validation*. Journal of Solid State Electrochemistry, 2013.
- [5] G.C. Cruywagen, P.K. Maini, and J.D. Murray. *Biological pattern formation on two-dimensional spatial domains: a nonlinear bifurcation analysis*. SIAM J. Appl. Math. 57 (6), 1485-1509, 1997.
- [6] J.D. Murray and P.K. Maini. *Pattern formation mechanisms - a comparison of reaction-diffusion and mechanochemical models*. Harcourt Brace Jovanovich, London-San Diego-New York-Berkeley-Boston-Sydney-Tokyo-Toronto, 1988.
- [7] Teemu Leppänen. *The theory of Turing pattern formation*. WSPC/Trim Review Volume, 2004.

-
- [8] J.D. Crawford. *Introduction to bifurcation theory*. Reviews of Modern Physics 63, no. 4, 1991.
- [9] Michael Cross and Henry Greenside. *Pattern Formation and Dynamics in Nonequilibrium Systems*. Cambridge University, Cambridge, 2009.
- [10] V. Comincioli. *Modelli Matematici*. Metodi e Modelli per Problemi Differenziali, Università degli Studi di Pavia, 2004.
- [11] B. Bozzini, D. Licitignola, C. Mele, and I. Sgura. *Coupling of Morphology and Chemistry Leads to Morphogenesis in Electrochemical Metal Growth: A Review of the Reaction-Diffusion Approach*. A. A. Minai et al. (eds.), Unifying Themes in Complex Systems, Acta Appl Math 122:53-68, 2012.
- [12] B. Bozzini, D. Licitignola, C. Mele, and I. Sgura. *Morphogenesis in metal electrodeposition*. Note Mat. 32, 7-46, 2012.
- [13] B. Bozzini, D. Licitignola, and I. Sgura. *Morphological Spatial Patterns in a reaction diffusion model for metal growth*. Mathematical Biosciences and Engineering, 2010.
- [14] B. Bozzini, D. Licitignola, and I. Sgura. *Turing Instability in an Electrodeposition Morphogenesis Model: An Analytical, Numerical and Experimental Study*. Acta Appl Math 122:53-68, 2007.
- [15] B. Bozzini, D. Licitignola, and I. Sgura. *A reaction-diffusion model of spatial pattern formation in electrodeposition*. Journal of Physics: Conference Series 96, 2008.
- [16] B. Bozzini, D. Licitignola, and I. Sgura. *Frequency as the Greenest Additive for Metal Plating: Mathematical and Experimental Study of Forcing Voltage Effects on Electrochemical Growth Dynamics*. International Journal of Electrochemical Science, 2011.

-
- [17] G. Gambino, M. C. Lombardo, M. Sammartino, and V. Sciacca. *Turing pattern formation in the Brusselator system with nonlinear diffusion*. Physical Review E, 2013.
- [18] M. van Hecke, P. C. Hohenberg, and W. van Saarloos. *Amplitude Equation for Pattern Forming Systems*. H. van Beijeren, M. H. Ernst (eds.), Fundamental Problems in Statistical Mechanics VIII, North-Holland, Amsterdam, 1994.
- [19] G. Gambino, M. C. Lombardo, and M. Sammartino. *Turing instability and travelling fronts for a non-linear reaction-diffusion system with cross-diffusion*. Mathematics and Computers in Simulation, Volume 82, Issue 6, 1112-1132, 2012.
- [20] Roger Peyret. *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow*. Applied Mathematical Sciences, Volume 148, 2002.
- [21] Y. Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1984.
- [22] M. Ipsen, F. Hynne, and P.G. Sørensen. *Amplitude equations and chemical reaction-diffusion systems*. Int. J. Bifurcation and Chaos, 7(9), University of Copenhagen, Denmark, 1997.
- [23] M. Ipsen, L. Kramer, and P.G. Sørensen. *Amplitude equations for description of chemical reaction-diffusion systems*. Physics Report 337, 193-235, 2000.
- [24] G. Gambino, M. C. Lombardo, and M. Sammartino. *Pattern formation driven by cross-diffusion in a 2D domain*. Nonlinear Analysis. Real World Applications 14, 1755-1779, 2013.
- [25] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.
- [26] Ivar Stakgold. *Green's functions and boundary value problems*. John Wiley and Sons, Inc., New York-Chichester-Brisbane-Toronto, 1979.