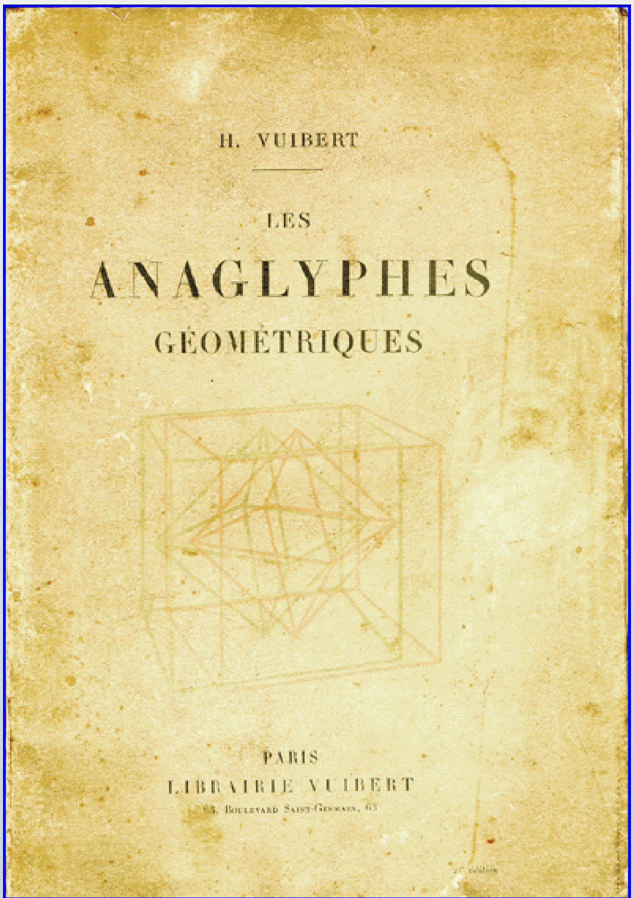
European Pupils Magazine

**Nicla Palladino**
University of Salerno, Italy
nicla_palladino@libero.it

General

# Vuibert's Geometric anaglyphs.

The mathematician **Henri Vuibert** in **1877** founded in **Paris** (in **Boulevard Saint Germain**, n° 63) the bookshop and publishing press ***Vuibert et Nony*** (today ***Vuibert library***) and in **1912** he edited the booklet ***Les Anaglyphes géométriques***[1], devoted to explain the optical criterion of **anaglyphs** and their applications to **solid geometry**; in fact he thought **anaglyphs** as a useful tool for ***studying intuitive geometry***.




*Les Anaglyphes géométriques*

We can consider two relevant trends in the evolution of **geometry**: the ***rational*** trend, which gave rise to grand systematic structures, and the ***intuitive*** one, which allows to better understand and appreciate the geometric research results. The intuitive trend, in the **history of Geometry**, was more or less appreciated and used in didactics. We can cer-

# Gli anaglifi geometrici di Vuibert

Il matematico **Henri Vuibert** aveva fondato a **Parigi** (in **Boulevard Saint Germain**, n° 63), nel **1877**, la libreria editrice ***Vuibert et Nony*** (poi ***libreria Vuibert*** che vive a tutt'oggi sotto questo nome) e, tra le diverse pubblicazioni scientifiche di cui fu direttamente autore vi è il trattatello, ***Les Anaglyphes géométriques***[1], edito nel **1912**, interamente dedicato ai principi ottici e alle applicazioni, alla **geometria solida**, degli **anaglifi** da lui pensati, allora, esclusivamente come un nuovo strumento utile per ***un approccio intuitivo alla geometria***.

Ripensando storicamente all'evoluzione della **geometria**, si possono, volendo, considerare due rilevanti tendenze di fondo: quella ***astratta***, che ha dato origine ai grandiosi edifici sistematici, e quella ***intuitiva***, che permette di comprendere ed apprezzare, si potrebbe dire ***vedere*** meglio, i risultati delle ricerche. Per testimoniare della considerazione goduta dalla tendenza ***intuitiva***, si può ricordare l'affermazione di **William Thomson** (**1824-1907**), ben noto col titolo di **Lord Kelvin**, pronunciata nel pieno del clima positivista della seconda metà dell'Ottocento:

***Io non sono soddisfatto finché non ho potuto costruire un modello meccanico dell'oggetto che studio. Se posso costruire un tale modello meccanico, comprendo; sino a che non posso costruirlo, non comprendo affatto***[2].

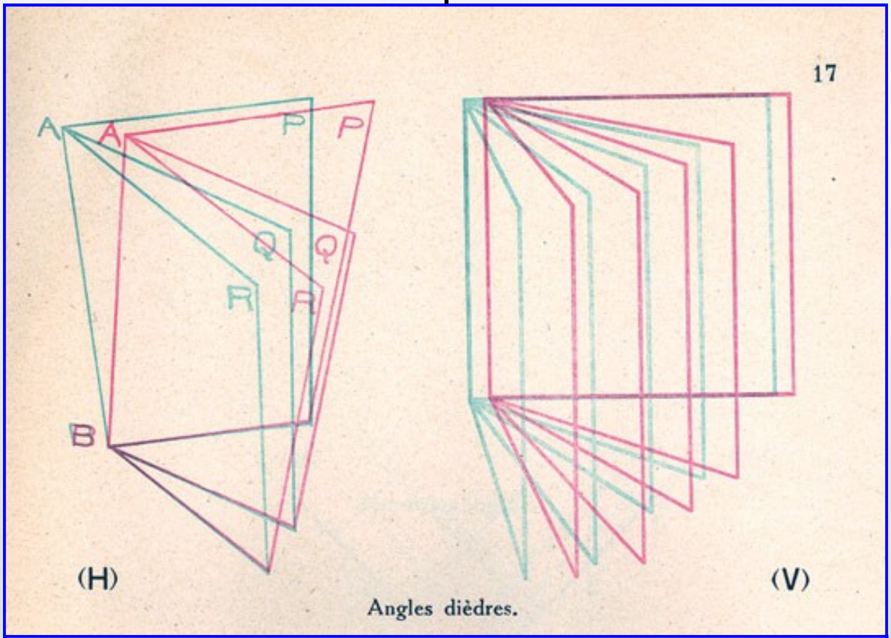
La prima parte dello scritto di **Vuibert** sugli **anaglifi** esplicita esaurientemente gli intenti dell'autore, il quale osserva, in linea preliminare, che una delle difficoltà nell'insegnamento della geometria deriva dal fatto che non è facile ***vedere nello spazio*** (***voir dans l'espace***) figure di corpi dei quali si disponga soltanto della loro rappresentazione nel piano, soprattutto quando queste figure piane sono di complicata espressione. Anche la geometria descrittiva, per quanto precisi meglio, con linguaggio convenzionale, la forma dei corpi solidi, spesso non è di grande aiuto. **Monge** ha detto, ricorda **Vuibert**, che la **geometria descrittiva**[3] è una lingua necessaria all'uomo di genio che concepisce un progetto, a coloro che debbono dirigerne l'esecuzione e, infitainly consider it as a valid support for our imagination because it helps us to better see some geometric concepts.

The mathematical physicist and engineer **William Thomson** (**1824-1907**) said:

***I am never content until I have constructed a mechanical model of the subject I am studying. If I succeed in making one, I understand; otherwise, I do not***[2].

In the first part of his booklet on **anaglyphs**, **Vuibert** exhaustively explicated his purposes, and said that one of the greatest difficulties in didactics of the **Geometry** arises from the fact that is not easy ***to see in the three-dimensional space*** (***voir dans l'espace***) plane figures of solids, especially if these plane figures have complicated expressions. So he says that it is possible that students are able to understand and assimilate mathematical proofs, but they don't become acquainted with the respective corps in the space. The **descriptive Geometry** often does not help, although it better describe the shapes of solid corps through a formal language. **Vuibert** recalls that **Monge** said that the **descriptive Geometry**[3] is a necessary language for the scholars who create a project, for who have to direct its execution and for the artists who have to build its components; but, **Vuibert** explains, through this language it is possible to communicate and explain **geometric** concepts, but it is even more difficult to learn than the language of the ***ordinary* Geometry** or clearly to imagine the three dimensional figures described through the **descriptive Geometry**.

To help students to see in the space, **Vuibert** says, scholars physically built in the three dimen-




in *Les anaglyphes géométriques*

ne, agli artisti che devono essi stessi eseguirne le diverse parti; ma questo linguaggio è però ancora più difficile da apprendere di quello della **geometria ordinaria** o, almeno, è più difficile cogliere con chiarezza, nella loro disposizione spaziale, le figure espresse nella **geometria descrittiva** rispetto a quelle della **geometria ordinaria**. Per aiutare gli studenti a vedere nello spazio, ricorda ancora **Vuibert**, si sono costruite materialmente le principali figure sia della **geometria ordinaria** sia della **geometria descrittiva**; un aiuto prezioso per gli studenti, specialmente quando sono proprio essi a costruire questi modelli materiali. Ma le collezioni che sono state realizzate hanno un prezzo molto alto, non sono facilmente disponibili e possono contare solo su un numero limitato (per quanto cospicuo) di modelli. Inoltre, se i modelli solidi sono in legno, gesso, o cartone, ecc., di essi se ne vede solo la forma esteriore poiché non è possibile osservare tutti gli elementi interni e le linee di costruzione; se invece sono confezionati con fili, la loro fragilità non ci permette di manipolarli; e, qualunque sia il modo di costruirli, le linee non si possono ***intrecciare all'infinito*** perché la fabbricazione diventerebbe difficile e troppo costosa.

Il problema sembrava insolubile finché, scrive **Vuibert**, **Henri Richard** (preside del Liceo della città francese di **Chartres**) trovò una soluzione elegante e definitiva: egli non costruì materialmente gli oggetti corrispondenti alle figure geometriche, bensì disegnò le figure stesse in modo che l'osservatore avesse l'illusione, guardandole, che al loro posto corrispondessero oggetti autenticamente reali, sviluppati in tre dimensioni (realizzando così l' ***effet-***

sions the most important mathematical surfaces of the ordinary and **descriptive Geometry**; this is a valid help, especially when the students themselves built these models of surfaces. These collections are yet very expensive to buy and rare to find, and include only some models. These plastic model are moreover in wood, chalk, cardboard, etc., therefore it is possible to see only the external shape and not to see every internal element and the construction lines; if they are built by threads, their fragility does not allow us to handle then. Whatever is the way to built, we are not able to cross each other their lines infinitely.

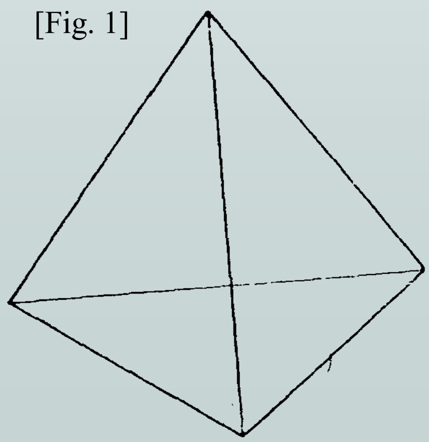
**Vuibert** writes that this problem seemed without solution until **Henri Richard** (principal at **Chartres'** high school) thought an elegant and definitive solution: he did not build physically models of surfaces, but rather drew the figures themselves so that the observer had the illusion that there were real objects in three dimensions; he drew ***anaglyphs***[4], a word that derives from the ancient **Greek** language.

At ***Fifth International Congress of Mathematicians*** in **Cambridge** in **1912**, forty **Henri Richard's** anaglyphs were exposed[5].

**How anaglyphs work**

When an observer looks at a natural scene, the views of the left and right eyes differ because of the horizontal separation of the eyes (6-7 centimeters). For example, see the two tetrahedrons in Fig. 1 and Fig. 2.

[Fig. 1]



**Regular tetrahedron seen by the left eye while the right one is closed.**
Un tetraedro regolare visto dall'occhio sinistro mentre il destro è chiuso.

***to rilievo***), vale a dire disegnò degli ***anaglifi***[4]. **Anaglifi**, tracciati geometricamente a mano, in numero di circa quaranta, realizzati da **Henri Richard**, furono esposti, riferisce **Vuibert** nel suo libretto, al ***Quinto Congresso Internazionale dei Matematici***, tenutosi dal **22** al **28 agosto** del **1912**, a **Cambridge**, in **Inghilterra**[5].

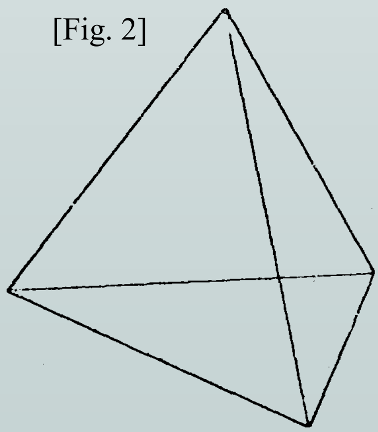
**Le tecniche per la costruzione degli anaglifi**

Il modo di rappresentare gli oggetti utilizzato da **Richard** si basa sull'ordinario meccanismo di visione tridimensionale. Gli oggetti poco lontani non sono visti da ciascun occhio (la distanza tra le pupille è di circa 6-7 centimetri) sotto lo stesso aspetto (o prospettiva).

Le due immagini sono sensibilmente diverse; ma, se si guarda il **tetraedro** con i due occhi aperti, accade che il cervello le elabora in modo tale da fonderle in una sola che ci presenta l'oggetto originario, vale a dire il tetraedro, con il suo rilievo.

**Vuibert** propone due tecniche per la formazione di immagini in due dimensioni che diano l'illusione di avere di fronte agli occhi oggetti in rilievo, fino alla tecnica che permette di realizzare propriamente degli **anaglifi**. Una prima tecnica consiste nel sistemare sopra un tavolo l'oggetto e scattare due successive fotografie dello stesso oggetto: eseguito ***il primo scatto***, il secondo viene fatto dopo aver spostato, subito poi, la macchina fotografica sul piano orizzontale (in pratica, parallelamente al bordo del tavolo), di una distanza uguale alla distanza mediamente sussistente tra i due occhi di un essere umano. Que-

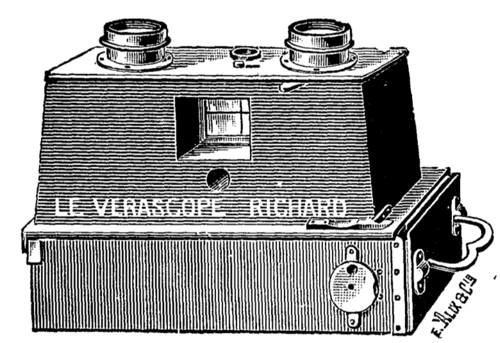
[Fig. 2]



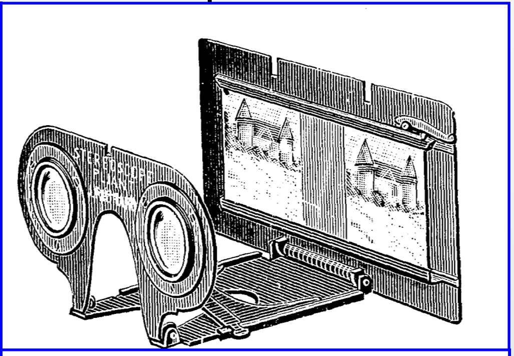
**The same tetrahedron seen by the right eye while the left one is closed.**
Lo stesso tetraedro visto dall'occhio destro mentre il sinistro è chiuso.

The two images are different, but our brain elaborates them so that we are able to see the object with its relief. Techniques for drawing with **central perspectives**, **anaglyphs** and **holograms** were developed to provide three dimensions without using a solid model. **Vuibert** used **anaglyphs** for showing geometrical surfaces in ***three dimensions*** and proposed some techniques for doing it.

**Vuibert's** first technique consisted of the union of two photos: he said that is necessary to put the object on a table and take a picture of it; then we have to move the object on the table by the horizontal separation of our two eyes (6-7 centimeters) and take another picture. Vuibert said that it is possible to make all this procedure by the **Verascope** (a stereo camera). This is an instruments provided with double camera and two lenses. The lenses are distant from each other by the horizontal separation of the eyes. **Verascope** was built and patented in **1891** by **Jules Richard** (**1848-1930**), in **Paris**. Finally in order to see the two photos, it was possible to use another nice instrument: the **stereoscope**.




**Picture of *Verascope* in *Les anaglyphes géométriques*.**
Disegno del *Verascope* in *Les anaglyphes géométriques.*



**Picture of *Stereoscope* in *Les anaglyphes géométriques***
Disegno dello *Stereoscope* in *Les anaglyphes géométriques.*

**Vuibert** showed a second technique that was an invention of the **German** physicist **Wilhelm Rollmann** (**1821-1890**) who thought an innovative method to make three dimensional figures without **stereoscope**. **Arthur** - **Louis Ducos** du **Hauron** (**1837-1920**) specialized **Rollman's** invention creating **anaglyphs**. **Rollman** projected at the same time two frames, one over the other, on a same screen.

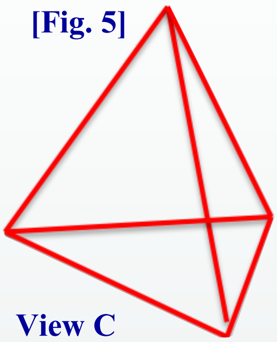
He thought to project the rays of the first frame through a red glass ($C$) and the rays of the second frame through a cyan glass ($C'$): the two frames

sto passo della procedura si può eseguire anche mediante il **Verascope**.

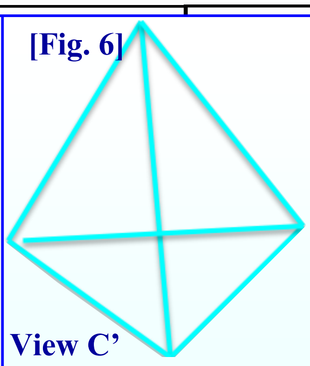
I due fotogrammi, che sono affiancati sulla stessa superficie piana non coincidono, naturalmente, quando si osservino i primi piani delle figure che rappresentano ma vengono a coincidere solamente per i piani lontani. Ora, mediante un cauto spostamento all'indietro degli stessi fotogrammi si può realizzare ***ad occhio nudo*** l'effetto rilievo. Anche quest'ultimo passo della procedura può essere compiuto mediante un apparecchio, e cioè mediante uno **Stereoscopio**.

La seconda tecnica è dovuta al fisico tedesco **Wilhelm Rollmann** (**1821-1890**) di **Stralsund**, in **Prussia**, il quale pensò di proiettare, separatamente e simultaneamente, i due fotogrammi dello stereogramma, l'uno sopra l'altro, su di uno schermo, facendo passare però i raggi di proiezione di uno dei due fotogrammi attraverso un vetro di un certo colore $C$ (per esempio, rosso) e i raggi di proiezione dell'altro attraverso un vetro di colore $C'$ (per esempio, verde): in tal modo i due fotogrammi, sovrapposti, di uno stereogramma vengono a colorarsi con colori diversi formando perciò una coppia stereoscopica che può essere già considerata un anaglifo. Gli spettatori, attrezzati con degli **anaglittoscopi**, vale a dire con degli occhialini con vetri, di cui uno del colore $C$ e l'altro del colore $C'$, osservano le immagini proiettate sullo schermo (la ***coppia stereoscopica***). Per un solido geometrico reale, quale un tetraedro $T$ di generico punto $O$, il fenomeno della visione anaglifica si può descrivere al seguente modo. Si è detto che uno stesso oggetto, come può essere $T$, non è visto da ciascun occhio sotto la stessa prospettiva, per cui il generico punto $O$ del tetraedro reale corrisponde alle posizioni che si vogliono denotare con $O_S$, per la visione con l'occhio sinistro $S$, e $O_D$ per l'occhio destro $D$. Posizioni che sono raccolte sul piano $P$ e costruite per intersezione dei raggi visivi, passanti rispettivamente per $SO$ e $DO$, con lo stesso piano. Siano chiacomposed a stereoscopic couple.

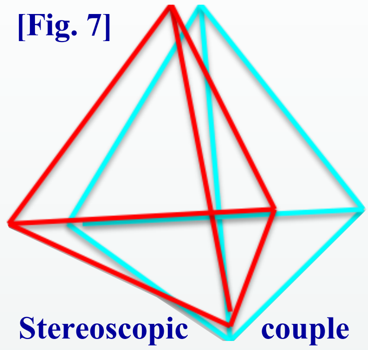
The viewers had to look at the image with an **anaglyttoscope**, a pair of spectacles with glasses of two colors: red *C* and cyan *C*'.



[Fig. 5] View C



[Fig. 6] View C'



[Fig. 7] Stereoscopic couple

Our two eyes don't see a same object under the same prospective (in picture 8, S is the left eye and *D* is the right eye); for this reason, a generic point *O* of a real object corresponds with two points: $O_S$, for the left eye view, and $O_D$ for the right eye view. Saving all the generic points of a picture on a same plane *P*, it is possible to draw two projections of the original image, *Ts* and $T_D$. Let us color $T_S$ green (or cyan) and $T_D$ red. When we remove the real image, we see the two projections with the spectacles with the left glass green and the right glass red: the real point *O* of the image is replaced by its correspondent virtual point (***image-point***).

In fact when we look at the picture with the green-red glasses, the point $O_D$ is not visible by the left eye, while $O_S$ is not visible by the right eye.

The $O_S$ point seems black for the left eye while $O_D$ seems black for the right one. The two eyes see only what they should see if a real point was in the *O* position.

Reading forward **Vuibert's** treatise, we found the geometrical method to make **anaglyphs**: known $O_S$ (the vision of a real general point by the left eye *S*) and $O_D$ (the vision of the real general point by the right eye *D*) on the plane *P*, we have to build the generic image-point *O*; we know also the distance between $O_S$ and $O_D$. From the triangles *OSD* and $OO_SO_D$ follows a proportion:

$$\frac{\overline{O_SO_D}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{OO_S}}{\overline{OS}}$$

Therefore

$$\overline{OO_S} = \overline{SO_S} \cdot \frac{\overline{O_SO_D}}{\overline{SD} + \overline{O_SO_D}}$$

and finally we are able to find $OO_S$:

$$\frac{\overline{O_SO_D}}{\overline{SD} + \overline{O_SO_D}} = \frac{\overline{OO_S}}{\overline{OS} + \overline{OO_S}} = \frac{\overline{OO_S}}{\overline{SO_S}}$$

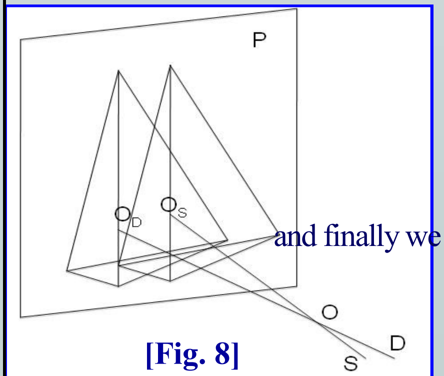
mate con $T_S$ e $T_D$ le intere immagini prospettiche cui appartengono i punti generici $O_S$ e $O_D$. Si colorino $T_S$ e $T_D$, rispettivamente, in verde e in rosso. Se si allontana il tetraedro reale e si guardano le due immagini con occhialini aventi il vetro verde a sinistra e quello rosso a destra, il tetraedro reale ritorna come immagine virtuale: il generico punto reale *O* del tetraedro è ora rioccupato dal corrispondente ***punto-immagine*** virtuale.

Immaginando la lente sinistra di colore verde e la lente di destra di colore rosso, quando si guarda l'immagine attraverso l'occhialino bicolore, il punto del disegno, colorato in verde, è invisibile per l'occhio sinistro così come il punto OS, in rosso, è invisibile per l'occhio destro.

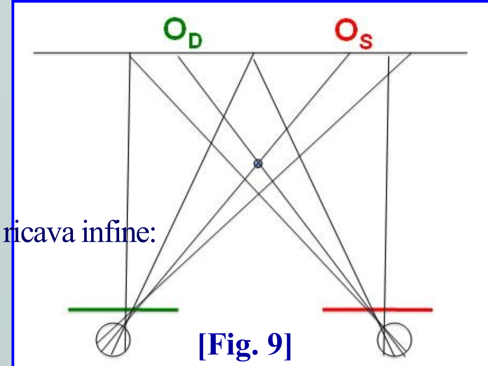
Il punto $O_S$ appare nero all'occhio sinistro e, allo stesso modo, il punto $O_D$ appare nero all'occhio destro. Entrambi gli occhi vedono solo quello che dovrebbero vedere se un oggetto reale apparisse alla posizione *O*. Si consideri la ricerca della costruzione del punto *O*, punto-immagine, generico, dell'intera figura solida, virtuale, da costruire, note le posizioni $O_S$, per la visione con l'occhio sinistro *S*, e $O_D$ per l'occhio destro *D*, impresse sul piano *P* (quindi noto lo ***scarto*** $O_SO_D$ tra le due proiezioni). Dalla similitudine dei triangoli *OSD* e $OO_SO_D$ possiamo dedurre la relazione:

Da cui

da quest'ultima si ricava infine:




[Fig. 8]




[Fig. 9]

**Steiner's Surface and anaglyphs**

**Stereoscopic vision** and **anaglyphs** are used today in a variety of application areas such as **geometry**, **chemistry**, **architecture**, **history**, **cinema**, **virtual reality**. Virtual Reality paradigm is to provide user a visually believable experience in a virtual environment, interacting within it with objects and characters. Therefore I thought to join **anaglyphs** and models of **mathematical** surfaces in order to create a new didactical instrument.

Models of mathematical surfaces were constructed between **XIX** and **XX** centuries[6]. These models, made especially by plaster or threads, were used in numerous fields of pure and applied mathematics, in order to show results of researches or to teach ***high mathematics*** in Universities and Polytechnics. They were used in a lot of fields: descriptive and analytic geometry, topology, optical geometry, theory of functions. At the same time the singular beauty of form and colour which the models possessed, aroused the admiration of those entirely ignorant of their mathematical attractions.

We can summarize the aims of visualization and modeling in: better understanding of abstract **mathematical phenomena**; help intuition in education; get new shapes from abstract research; popularization of **Mathematics**; applications in design field; discovering links between Science and Art.

The famous ***Steiner's Surface***[7] (discovered by **Jakob Steiner** in **Rome** in **1838**) is a rational surface of fourth order and third class.

Its **Cartesian equation** is:

**Steiner's Surface and anaglyphs**

La visione stereografica e gli anaglifi sono ampiamente utilizzati oggi in una vasta varietà di applicazioni in **geometria**, **chimica**, **architettura**, per la conservazione dei beni culturali, nel **cinema**, nella **realtà virtuale**.

Scopo della **realtà virtuale** (*VR*) è quello di ricreare, sulla base di opportuno software affidato al computer, mondi e oggetti che sono la trasposizione digitale di ambienti reali o fantastici, in cui valgano l'interattività con il fruitore, la risposta del sistema in tempo reale e l'immersione.

L'uso (anche molto sofisticato) che attualmente si fa degli **anaglifi** nella comunicazione per immagini, nel campo **dell'informatica**, ha fornito lo stimolo a rappresentare, mediante anaglifi, alcuni famosi modelli di superfici, in origine costruiti prevalentemente in gesso, e ideati da matematici e scienziati di prima grandezza tra la seconda metà **dell'800** e gli anni Trenta del '**900**[6].

Utilizzati soprattutto nella didattica delle ***matematiche superiori*** i modelli servivano a ***far vedere*** proprietà notevoli del tema di ricerca su cui si investigava e a ***mostrare*** alcuni risultati che si conseguivano in diversi settori delle matematiche: **Geometria descrittiva** e **proiettiva**, **Geometria analitica**, **Geometria algebrica**, **Topologia**, **Teoria delle funzioni**, **Meccanica razionale**, **Fisica-matematica**, **Scienze** delle **costruzioni**. I materiali impiegati per la costruzione erano diversi: ottone, gesso, filo di ferro o di fibra naturale, lamelle di legno, cartone, celluloide ed altri metalli.

La famosa ***Superficie romana dello Steiner***[7] (scoperta da **Jakob Steiner** a **Roma** nel **1838**) è una superficie razionale del IV ordine e di III classe.

La sua **equazione cartesiana** è:

$$x^2y^2+y^2z^2x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+xyz=0$$

while its parametric equations are: | mentre quella parametrica è:

$$\begin{cases} x(u,v)=\sin(2u)\cdot\cos(v)^2 \\ y(u,v)=\sin(u)\cdot\sin(2v) \\ z(u,v)=\cos(u)\cdot\sin(2v) \end{cases}$$

where $0 < u, v < \pi$ | con $0 < u, v < \pi$

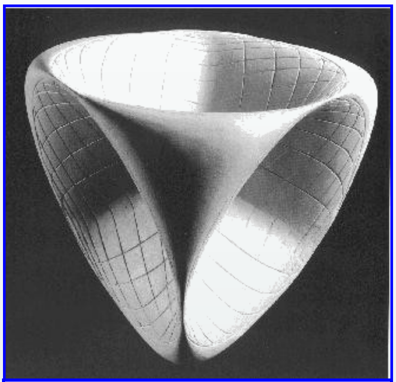
By starting from its equations, by using the software ***Mathematica*** and the ***VRML*** language,

Partendo dalle equazioni, utilizzando il software ***Mathematica*** e il ***VRML***, è stata prodotta

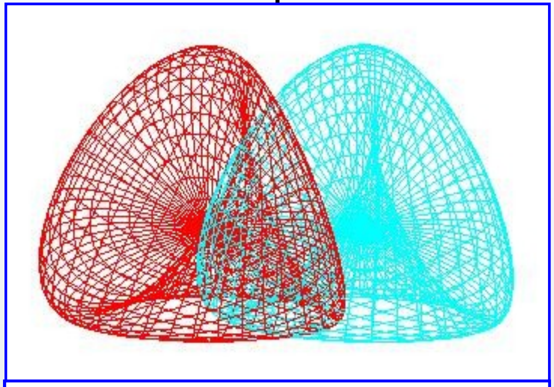
## Vuibert's Geometric anaglyphs

I built a virtual reconstruction of the surface in 3D The object that I built is three-dimensional and manipulable in a virtual ambient:

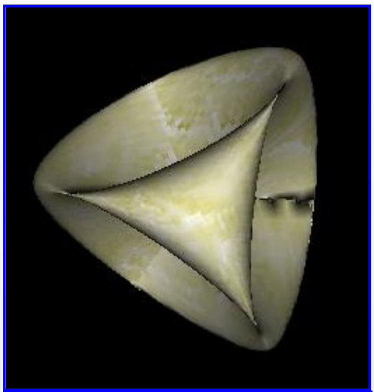
una ricostruzione virtuale tridimensionale della superficie. Gli oggetti sono manipolabili in ambiente virtuale:



**Model in chalk of *Steiner's surface***
Modello in gesso della *superficie dello Steiner*



**Anaglyph of *Steiner's surface***
Anaglifo della *superficie dello Steiner*



**VRML Model**
Modello in VRML

**Footnotes and references**

1 H. Vuibert, ***Les Anaglyphes géométriques***, Paris, Librairie Vuibert Boulevard Saint Germain, 63, 1912.

2 W. Thomson, ***Molecular dynamics and the wave theory of light: notes of lectures delivered at the Johns Hopkins University, Baltimore by Sir William Thomson***, *... stenographically* ***reported by A.S. Hathaway***, Baltimore (Maryland – U.S.A.), Johns Hopkins University, ca 1884.

3 Descriptive geometry is the branch of geometry which allows the representation of three-dimensional objects in two dimensions. Gaspard Monge (1746-1818) is usually considered the ***father of descriptive geometry***.

4 The Greek word αναγλυφή means ***relief work***, ***chiseling***.

5 See Hobson, E.W. and Lowe, A.E.H. (Eds.), ***Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians (Cambridge 22-28 August 1912)***, 2 volumes, Cambridge University Press, 1913.

6 See N. Palladino - F. Palladino, ***Le Raccolte Museali Italiane di Modelli per l'Insegnamento delle Matematiche Superiori***. Catalogo generale e sito Web, ***Nuncius***, vol. XVI, 2001.

7 Its original name is ***Die römische Fläche von Steiner mit Haupttangentencurven. Sie besitzt drei Doppelgerade, die sich in einem Punkte treffen***; it is held in M. Schilling, ***Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterrich***, Leipzig, Verlag von M. Schilling, 1911.