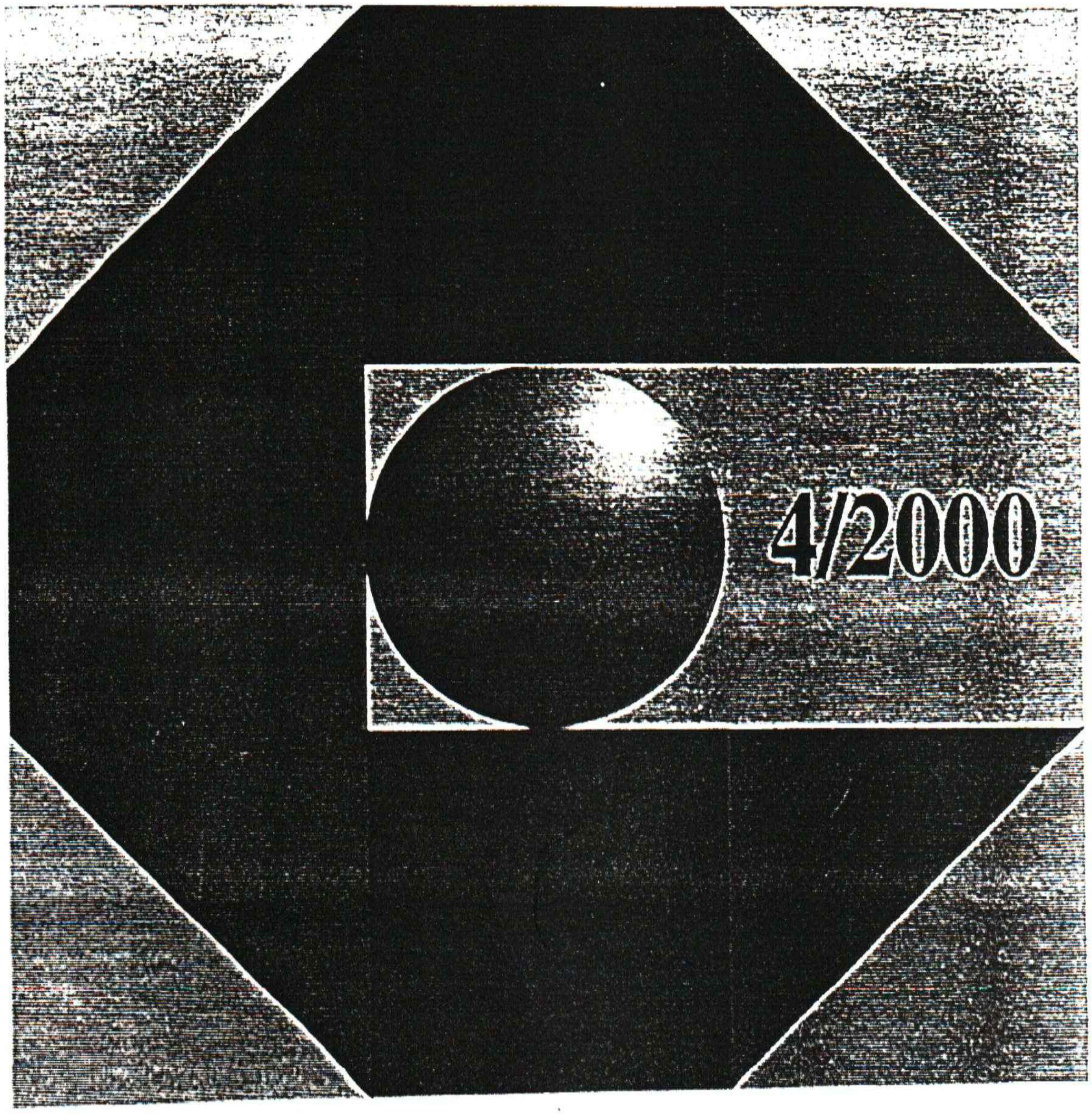
ARCHIMEDE

RIVISTA PER GLI INSEGNANTI E I CULTORI DI MATEMATICHE PURE E APPLICATE

ANNO LII OTTOBRE-DICEMBRE 2000



L E M O N N I E R

IL METODO DI ELIMINAZIONE PER LA RISOLUZIONE DI UN SISTEMA DI EQUAZIONI PROPOSTO DA NICOLÒ DE MARTINO ALLA METÀ DEL XVIII SECOLO

Nel curare l'edizione della corrispondenza epistolare tra il matematico napoletano Nicolò De Martino (1701-1769) ([1]) e il palermitano Girolamo Settimo (1706-1762) ([2]), che sarà prossimamente pubblicata, ci siamo imbattuti nel poscritto di una lettera inviata (Napoli, 11 novembre 1751) dal De Martino ([3]). Va ricordato che questi fu l'esponente più importante tra i matematici del Meridione d'Italia attivi nel primo Settecento e fu in stretti, e proficui, rapporti scientifici con i matematici bolognesi Eustachio (1674-1739) e Gabriele (1681-1761) Manfredi che, a loro volta, si distingueranno per essere tra i non molti promotori della diffusione del calcolo differenziale nella penisola italiana. Nel rivolgersi al suo interlocutore, a cui va fornendo istruzioni sia sul modo di calcolare l'integrale di una funzione razionale fratta sia sulla risoluzione delle equazioni (algebriche), De Martino descrive a Settimo «una nuova maniera, che mi è venuta in mente, per dedurre da due equazioni, che contengono due incognite, una terza che racchiude un'incognita sola». Vale a dire come trovare la risolvente di due equazioni algebriche, di grado qualsiasi, in due incognite.

Il poscritto si chiude con la seguente affermazione: «Io mi lusingo, che questo metodo sia più facile dell'altro proposto dal Newton nella sua *Aritmetica Universale*». (Più avanti accenneremo pure ai modi con cui Newton, nell'*Arithmetica Universalis*, procede alla risoluzione di un sistema di due equazioni in due incognite).

Presentiamo il metodo di De Martino, metodo che non è soltanto semplice e capace di destare curiosità ma, storicamente, serve a fornire un esempio significativo della ricerca di quell'automatismo (è la *cogitatio caeca* che libera dal «peso dell'immaginazione» da invocare caso per caso) nella risoluzione di problemi e nell'esecuzione di calcoli a cui un matematico «moderno», quale era De Martino rispetto al suo tempo, non può rinunciare dopo aver provato la potenza degli algoritmi infinitesimali. Ricorriamo, innanzitutto, alle parole e all'esempio di calcolo proposto dal De Martino, dopo di che proporremo qualche altro

([1]) Sul quale cfr. la voce a cura di P. Nastasi in *Dizionario Biografico degli Italiani*, Roma, Istituto della Enciclopedia Italiana, 1960, *ad vocem*.

([2]) Cfr. A. Brigaglia – P. Nastasi, *Due matematici siciliani della prima metà del '700: Girolamo Settimo e Nicolò Cento*, in «Archivio Storico per la Sicilia Orientale», LXXVII (1981), Fasc. II-III.

([3]) La lettera, insieme ad altre quattro di De Martino, si trova nel volume, contenente manoscritti, che ha per titolo *Miscellanee Matematiche di Geronimo Settimo (M.SS del secolo XVIII)*; il volume è reperibile presso la Biblioteca della Società Siciliana di Storia Patria di Palermo, alla collocazione I.D.13, Mss Fitalia (Sala Lodi). Siamo grati al prof. Pietro Nastasi per averci inviato copia di queste lettere.

esempio forse meglio utilizzabile anche per l'insegnamento liceale o, più in generale, per le Scuole superiori.

«*Si dispongano le due equazioni date secondo quella incognita* [sarà, in questo caso, la x, n.d.r.] *che si vuol mandare via da esse. Indi la maggiore* [in grado, n.d.r.] *di esse, si divida per la minore* [in grado; più precisamente: si divida il polinomio al primo membro dell'equazione di grado maggiore (il cui secondo membro è zero) per il polinomio al primo membro dell'equazione di grado minore (il cui secondo membro è ancora ridotto al solo zero), n.d.r.], *e si noti il residuo* [termine che sta per 'resto', n.d.r.]; *si divida di poi la minore per questo residuo, e si noti l'altro residuo. Si divida in appresso il primo residuo per il secondo, e si noti il terzo residuo. Si continui l'operazione per sino a che si abbia un residuo, in cui non s'incontri la detta incognita, e quest'ultimo residuo uguagliato a zero ci darà l'equazione ricercata.*

Sia $x^3 + yyx + ayx - b^3 = 0$ ... *la prima equazione; ed* $x^2 + ax - yy + cy = 0$ *la seconda, dalle quali debba togliersi l'incognita* [x, n.d.r.] *per rapporto a cui di già si ritrovano ordinate.*

Io divido la maggiore per la minore, e siccome il quoziente della divisione è $x - a$, *così il suo residuo sarà* $2yyx + ayx - cyx + aax - b^3 - ayy + acy$,

$$\textit{o pure} \quad x + (-b^3 - ayy + acy) / (2yy + ay - cy + aa)\,.$$

Io divido in appresso la minore [$x^2 + ax - yy + cy$, n.d.r.] *per questo residuo e conforme il quoziente di quest'altra divisione sarà*

$$x + a + (b^3 + ayy - acy) + (2yy + ay - cy + aa)$$

così il suo residuo sarà

$$(ab^3 + a^2y^2 - a^2cy)/(2yy + ay - cy + aa) +$$
$$+ (b^3 + ay^2 - acy)^2/(2yy + ay - cy + aa)^2 - yy + cy.$$

Ora in questo residuo di già manca l'incognita x, *dunque uguagliando a zero, avremo*

$$(ab^3 + a^2y^2 - a^2cy) \cdot (2yy + ay - cy + aa) + (b^3 + ay^2 - acy)^2 -$$
$$- (y^2 - cy) \cdot (2yy + ay - cy + aa)^2 = 0$$

che sarà l'equazione che si dimanda.

Io mi lusingo, che questo metodo sia più facile dell'altro proposto dal Newton nella sua Aritmetica Universale».

L'ultima affermazione di Nicolò De Martino rimanda all'*Arithmetica* (4) di Newton. Questi tratta dell'eliminazione (*exterminatio*) di una «quantità inco-

(4) Il cui titolo, riportato per intero, relativo alla prima edizione, è: *Arithmetica Universalis, sive de Compositione et resolutione Arithmetica liber. Cui accessit Halleiana Aequationum Radices Arithmetice inveniendi methodus. In Usum Juventutis Academicae*, Cantabrigiae [Cambridge, n.d.r.], Typis Academicis; Londini, Impensis Benj. Tooke, 1707. Noi abbiamo consultato, oltre a questa, anche le edizioni del

gnita» tra due equazioni date (non si parla né di «sistema di equazioni» né tantomeno si usa l'attuale segno di sistema, la parentesi graffa; le due equazioni sono legate da un «et») in cinque punti (chiamati poi capitoli), che sono:

Caput tertium: De duabus pluribusve aequationibus in unam trasformandis, ut incognitae quantitates exterminuntur. In cui viene mostrato quello che nelle scuole oggi viene comunemente chiamato il «metodo del confronto».

Caput quartum: Exterminatio quantitatis incognitae per aequalitatem valoris ejus. Concerne ancora l'applicazione, in forma un po' più complessa, del «metodo del confronto».

Caput quintum: Exterminatio quantitatis incognitae substituendo pro ea valorem suum. Riguarda il «metodo di sostituzione», come oggi viene detto.

Caput sextum: Exterminatio quantitatis incognitae quae plurium in utraque dimensionum existit. Tratta i casi in cui la «quantità incognita» che si vuole eliminare si presenta con diversi gradi e ciò accade per entrambe le equazioni. I «metodi» adottati sono sia di «sostituzione» che di «confronto».

Caput septimum: De modo tollendi quantitates quotcumque surdas ex aequationibus. Tratta del caso in cui le equazioni siano irrazionali (*surdae*) e non si introducono nuovi «metodi».

Vediamo ora un paio di esempi di applicazione di questo metodo; essi concernono equazioni algebriche di tipo numerico. Sono esempi che per la loro semplicità (che rende possibile un «controllo» per altra via) sono utilizzabili per mostrare a studenti di Scuola superiore (a cui è richiesta soltanto la conoscenza preliminare della divisione tra polinomi) il metodo «venuto in mente» al De Martino.

Il primo esempio è dato dal sistema delle due seguenti equazioni:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 + x - 2y = -14 \\ x + 2y = 4. \end{cases}$$

Volendo eliminare la variabile x dalle due equazioni, dividiamo la «prima equazione» (vale a dire, più precisamente, il polinomio $3x^2 - 2y^2 + x - 2y + 14$, il quale ordinato secondo le potenze decrescenti della x è: $3x^2 + x - 2y^2 - 2y + 14$) per la «seconda equazione» (cioè per il polinomio $x + 2y - 4$). Si ha per quoziente $3x$ e per «primo resto» $13x - 6xy - 2y^2 - 2y + 14 = (13 - 6y)x - 2y^2 - 2y + 14$.

Si divide poi la «seconda equazione» per questo «primo resto» e si ottiene il «secondo resto» che è $-2y - 4 - (-2y^2 - 2y + 14)/(13 - 6y)$. Uguagliandolo a zero si ha l'equazione risolvente cercata: $5y^2 - 26y + 33 = 0$, in questo caso facilmente ottenibile con gli ordinari metodi di eliminazione: bastava, per esem-

1732 (Lugduni Batavorum [Leida, n.d.r.], Apud Joh. Et Herm. Verbeek, con prefazione di G.J. s'Gravesande) e del 1761 (Amstelodami [Amsterdam, n.d.r.], Apud Marcum Michaelem Rey, *Cum Commentario Johannis Castillionei*). Le citazioni qui riportate sono riferite a quest'ultima edizione, vol. 1°, *sectio secunda*, p. 99 e seguenti.

pio, esplicitare la x nella seconda equazione e sostituire l'espressione trovata nella prima equazione.

Il secondo esempio potrebbe essere dato dalle due equazioni costituenti il sistema (simmetrico):

$$\begin{cases} x^4 + y^4 - 17/16 = 0 \\ x^2y^2 + xy - 3/4 = 0. \end{cases}$$

Al fine di trovare le soluzioni di questo sistema, l'applicazione dell'ordinario metodo consistente nell'eliminazione di una incognita tra le due equazioni è un poco più complessa: se ne esce esprimendo, come è noto, $x^4 + y^4$ mediante la formula equivalente $(x + y)^4 - 4xy(x + y)^2 + 2x^2y^2$ e ponendo poi $x + y = s$ e $xy = p$, per cui il sistema dato si trasforma in:

$$\begin{cases} s^4 + 4ps^2 + 2p^2 - 17/16 = 0 \\ p^2 + p - 3/4 = 0. \end{cases}$$

E così proseguendo.

Applichiamo invece il metodo che De Martino espone a Settimo per trovare la risolvente di questo secondo sistema.

La divisione della «prima equazione» per la «seconda equazione» dà per quoziente $x^2/y^2 - x/y^3 + 7/(4y^4)$ e per «primo residuo» $-5x/(2y^5) + y^4 + 21/(16y^8) - 17/16$.

Si divida ora la «seconda equazione» per il «primo residuo»: si ottiene un polinomio in cui non compare la variabile x e che è di dodicesimo grado in y. Esso, eguagliato a zero, fornisce l'equazione risolvente il sistema dato.

Come si può constatare, il metodo di cui scrive De Martino fornisce sempre una risposta alla ricerca dell'equazione risolvente il sistema delle due equazioni date, per quanto «intrecciate», e quindi difficilmente esplicitabili l'una in funzione dell'altra, si presentino le due variabili in gioco. L'equazione risolvente esiste (il procedimento risolutivo ha termine perché il grado di x nei vari «residui» diminuisce ad ogni passaggio). In particolare, se nell'applicazione della procedura ci si imbatterà in un «residuo» che vale zero, allora il sistema è indeterminato; se invece si va a finire in un «residuo» che è espresso da una costante diversa da zero, allora il sistema è impossibile. E l'equazione risolvente è calcolabile con un algoritmo uniforme, non con un artificio da inventarsi, se è possibile, caso per caso. Il metodo ha, invece, l'inconveniente che l'equazione risolvente, a cui si va direttamente a parare, può risultare, come si osserva sia nel caso dell'esempio discusso da De Martino sia per il nostro secondo esempio (sistema di equazioni numeriche), di grado molto più alto del grado di ciascuna equazione costituente il sistema iniziale. Sebbene quest'inconveniente forse non atterrisse gli «antichi», che erano abilissimi calcolatori, nondimeno bisogna ammettere che esso non consente di determinare rapidamente valori approssimati delle soluzioni.

Del metodo qui presentato sembra che non sia rimasta memoria nei trattati d'algebra (5).

Per quanto concerne poi possibili fonti remote che abbiano potuto ispirare Nicolò De Martino, il pensiero va agli *Elementi* di Euclide e precisamente al libro VII (che assieme all'ottavo e al nono è dedicato, pur nella persistenza di un linguaggio geometrico, allo studio dei numeri interi) e alle proposizioni 1 e 2, dove si tratta del cosiddetto «algoritmo euclideo» per trovare il massimo comune divisore tra due numeri mediante sottrazioni ripetute; proposizioni e algoritmo che vengono ripresi, più in generale, nelle prime del libro X, in riferimento a una grandezza qualunque (6).

FRANCO PALLADINO
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Salerno

NICLA PALLADINO
Prima Traversa Ianniello, 2 bis
Frattamaggiore (Napoli)

(5) Non se ne trova traccia nell'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari e Complementari* (ci riferiamo all'edizione del 1964, Milano, U. Hoepli, a cura di L. BERZOLARI – G. VIVANTI – D. GIGLI) dove al vol. I, parte 2ª compaiono gli articoli di O. NICOLETTI, *Proprietà generali delle equazioni algebriche*, e di E. G. TOGLIATTI, *Equazioni di 2°, 3°, 4° grado ed altre equazioni algebriche di tipo elementare*. Neanche nell'opera *Questioni riguardanti le matematiche elementari raccolte e coordinate da Federigo Enriques* (ci si riferisce alla ristampa anastatica della terza edizione, che è del 1924-1927, edita a Bologna, da N. Zanichelli nel 1983) vi è nulla al riguardo.

(6) Cfr., ad esempio, l'edizione commentata degli *Elementi* di Euclide, curata da A. FRAJESE e L. MACCIONI, Torino, UTET, 1970.