QUADERNI
DI
STORIA DELL'UNIVERSITÀ DI TORINO

10

(2009-2011)

Celid

«Quaderni di Storia dell'Università di Torino»

Le fotografie inserite in questo *Quaderno* sono di proprietà dell'Università di Torino, conservate presso l'Archivio Storico e il Dipartimento di Matematica G. Peano.

In copertina: Giuseppe Peano, Mario Pieri, Giovanni Vacca, Giovanni Vailati.

Il volume è pubblicato con il contributo del CSSUT (Centro Studi di Storia dell'Università di Torino).

via Cialdini 26, 10138 Torino
tel. 011.44.74.774
edizioni@celid.it
www.celid.it/casaeditrice

ISBN 978-88-7661-969-4

Progetto grafico: Ezio Aluffi - Leprechaun, Torino
Stampa: DigitalPrint, Segrate (Mi)

Indice

Questo «Quaderno»

Si conclude con questo numero la serie dei Quaderni di Storia dell'Università di Torino, iniziata nel 1996. Nell'assemblea del 6 giugno 2011, in seguito alle dimissioni del direttore Angelo D'Orsi, che l'aveva curata con professionalità e impegno fino al 2009, si è infatti deciso di proseguire la rivista del Centro di Studio della Storia dell'Università di Torino in forma elettronica, con un nuovo Comitato redazionale ed un ampio Comitato scientifico esteso ad esperti internazionali. In quella sede mi è stato affidato dal Presidente del Centro, Prof. Giovanni Carpinelli, e dall'assemblea l'incarico di curare quest'ultimo volume dei Quaderni che raccoglie studi e saggi su alcuni illustri matematici, storici e filosofi della scienza che operarono nel nostro Ateneo fra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento.

Il primo nucleo di articoli è dedicato alla figura e all'opera di Mario Pieri (1860-1913), assistente, libero docente e poi professore incaricato di Geometria proiettiva e descrittiva all'Università di Torino dal 1888 al 1900. La biografia scientifica di Pieri e i suoi contributi alla geometria differenziale, alla geometria algebrica e ai fondamenti della geometria e dell'aritmetica sono delineati nello studio d'apertura di Elena Anne Corie Marchisotto della California State University che si sofferma anche sugli aspetti didattici del suo insegnamento nei corsi svolti a Torino. Da molti anni questa studiosa americana si è occupata della produzione matematica di Mario Pieri e su questi temi ha pubblicato, insieme al collega James Smith, professore emerito della San Francisco State University, il volume *The Legacy of Mario Pieri in Geometry and Arithmetic* (Boston, Birkhäuser, 2007) e altre due monografie sulla geometria differenziale e algebrica, e sui fondamenti della matematica dovrebbero uscire a breve.

I successivi saggi di Aldo Brigaglia e di Erika Luciano evidenziano, con ampiezza di vedute, l'operato di Pieri all'interno della Scuola di geometria algebrica capeggiata da Corrado Segre, il primo, e quello nella Scuola di logica matematica, il cui *leader* era Giuseppe Peano, il secondo. Pieri seppe infatti cogliere da entrambi questi colleghi stimoli e influenze che indirizzarono in modo originale le sue ricerche sulla geometria enumerativa, sulla geometria degli iperspazi e sulla geometria proiettiva complessa, e in modo altrettanto pregnante le sue indagini di carattere logico-fondazionale sulla geometria proiettiva, sull'aritmetica e sulla geometria elementare. Lo studio di Luciano si sofferma anche sulle motivazioni che spinsero Pieri ad evitare il ricorso al linguaggio ideografico negli scritti dell'ultimo periodo e sui dibattiti intercorsi nella comunità italiana dei matematici e degli insegnanti di matematica relativamente alla trasposizione didattica delle ricerche sui fondamenti della geometria elementare nei libri di testo in uso nelle scuole.

Alcuni aspetti di tipo logico fondazionale e metodologico 'sperimentale' – come amava definirli Pieri – in quanto basati sull'impiego di strumenti per l'insegnamento scolastico della geometria elementare sono infine analizzati nell'interessante saggio di Ferdinando Arzarello che mostra l'attualità dell'approccio logico e metodologico di Pieri negli odierni stili educativi, evidente ad esempio nelle moderne tecnologie didattiche dei *software* di geometria dinamica.

Il secondo gruppo di studi è incentrato su Giovanni Vailati (1863-1909) e su Giovanni Vacca (1872-1953), due esponenti della Scuola di Giuseppe Peano, assistenti nel nostro Ateneo fra la fine dell'Ottocento e i primi del Novecento, che si occuparono di ricerche di logica, di storia delle matematiche, di filosofia delle scienze, e di strategie per migliorare l'insegnamento della matematica. Nel primo articolo si accenna al loro apprendistato a Torino, nel vivace ambiente culturale post-unitario del positivismo progressista e del darwinismo, favorevole a ideali di tipo socialista umanitario e con aperture internazionali, che incisero fortemente sulle loro scelte di vita e di carriera. In particolare si rileva l'influenza esercitata da Peano nel loro avvio alla ricerca storica, con la collaborazione al *Formulario* e con la rete di rapporti instaurati con matematici, filosofi, storici e filologi di varie nazionalità durante i congressi, cui parteciparono fin dagli esordi. Nel ricordare i corsi di storia della meccanica, svolti da Vailati fra il 1897 e il 1899 per gli studenti di Matematica, con il beneplacito di Vito Volterra e le sollecitazioni di Peano a Vacca per la stesura di un testo storico-scientifico, si mostrano le proposte, suggerite ai due giovani, di richiedere libere docenze in Storia delle matematiche all'Università di Torino.

I contributi specifici di Vacca alla storia della logica sia nell'ambito del *Formulario*, che nella produzione successiva fino alla valutazione della logica contemporanea, sono analizzati nell'accurato studio condotto da Erika Luciano, valendosi anche dei materiali editi e inediti del ricco Archivio Peano-Vacca conservato presso il Dipartimento di Matematica del nostro Ateneo. Fra gli elementi di novità si segnalano le ricerche compiute da Vacca ad Hannover sui manoscritti di Leibniz e i dialoghi con Louis Couturat su questi temi, come pure l'incontro a Roma nel 1903 con Georg Itelson al congresso internazionale di scienze storiche.

Anche nell'interessante saggio di Livia Giacardi si registra l'importanza delle relazioni internazionali, questa volta in riferimento a Vailati e alla sua proposta di un insegnamento 'laboratoriale' della matematica. Partendo appunto dal panorama dei contributi di pedagogisti, psicologi, educatori e matematici di varie nazioni sulla "scuola attiva" si indagano le fonti che possono aver stimolato le riflessioni di Vailati sulla "scuola laboratorio", fra cui anche il manuale di Maria Begey edito a Torino nel 1900. Si evidenziano inoltre gli aspetti più innovativi del suo progetto educativo, che risulta di viva attualità ancor oggi, e gli esiti purtroppo negativi nelle riforme italiane di epoca fascista.

Nella sezione Archivi sono presentati alcuni inediti quaderni di Lezioni, autografi di Mario Pieri, conservati a Lucca, che documentano la formazione del matematico a Pisa, alla Scuola di Enrico Betti, fra il 1882 e il 1884.

L'edizione critica di un manoscritto autografo di Peano per Vailati, nel secondo articolo, contribuisce a mostrare le strategie messe in atto dal logico piemontese per diffondere a livello internazionale le sue idee e i suoi progetti, inseriti in un contesto storico-matematico.

In chiusura sono ricordati alcuni colleghi delle Facoltà di Lettere e Filosofia e di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali, recentemente scomparsi: Margherita Plassa, Carla Roetti, Claudio Sensi e Cesare Pisani. Ci è sembrato doveroso rendere omaggio alla memoria di validissimi ricercatori che con la loro intelligenza e operosità hanno contribuito ad elevare il prestigio della nostra Università.

CLARA SILVIA ROERO

G. Peano con colleghi e allievi a Superga nel 1928

Saggi e Studi

Mario Pieri (1860-1913)

The legacy of Mario Pieri: the man, the scholar, the teacher

ELENA ANNE CORIE MARCHISOTTO

Introduction

This article is intended to present a brief synopsis of the panorama of Mario Pieri's mathematical research and the legacy he has left for today's scholars. It also focuses on Pieri's concern for mathematics education, and in particular, with how he dealt with the tension between his demand for rigor and his concern for students.

Pieri the Man

Mario Pieri was born in Lucca on June 22, 1860, just as Italy became unified. Pieri's mother was Erminia Luporini. His father Pellegrino, a respected lawyer and scholar, belonged to an old family from Vellano, a village east of Lucca. Mario was the third of eight children of Erminia and Pellegrino, all born in Lucca.

Pieri's life reflected his close ties with his family. During his first year of university study, Mario lived with his brother Silvio. After the death of his father, Mario cared for his mother and his sister Virginia. At age forty-one, Pieri married Angiolina Anastasio Janelli, the sister of Virginia's husband. They had no children. However, when Pieri's sister Gemma traveled to Brazil to join her husband Umberto Campetti, she left at least two of their sons, Pellegrino and Ottorino, with Pieri for several years. It is likely that Pieri was also caring for his mother during this time.

Pieri completed elementary and technical school in Lucca. He loved both music and mathematics. As a young boy he was uncertain about which field to pursue. Once he made his choice, he excelled in his courses and earned the admiration of his teachers. When, at age sixteen, he was enrolled in the Royal Technical Institute in Bologna, Pieri particularly impressed his physics instructor, Augusto Righi, who would eventually become Italy's leading physicist.

At age twenty, Mario was ready for university. The family wanted him to attend the Scuola Reale Normale Superiore in Pisa. But finances were strained and his brother Silvio needed one more year of research at Bologna, so it was decided that Mario should enter the university there. He then competed for a scholarship, and transferred the following year to the Scuola in Pisa. The Scuola was extremely selective. When Pieri won admission as a second year student in 1881, the number of students in attendance averaged only thirteen, about half in science and half in liberal arts. As did all the Scuola students, Pieri took courses there and at the nearby University of Pisa. He received degrees from both schools. Pieri earned certification to teach in the middle schools in 1883, and the doctorate with commendation in mathematics in 1884.

Pieri began his career by teaching at the pre-university level. He taught briefly at a *ginnasio* in Livorno, and from October 1885, to November 1886, he served as professor *reggente* at the Royal Technical School in Pisa. Concurrently at his alma mater, the Scuola Reale Normale Superiore, Pieri gave a special lecture series on polyhedra. At age twenty-six Pieri won a competition for the position of professor of projective and descriptive geometry at the Royal Military Academy, which was located next to the University of Turin. He began teaching there in 1886.

Two years later, at age twenty-eight, Pieri obtained a position at the University of Turin. But he did not give up his post at the Military Academy. He served concurrently as assistant to the chair of projective geometry at the University of Turin, held by Giuseppe Bruno. In 1891, Pieri, then age thirty-one, was awarded the position of *libero docent* at the university. He gave courses in projective geometry and in fundamentals (*complementi*) of geometry.

In 1893, Augusto Righi took pleasure in informing Pieri that he had been confirmed by the faculty of science at the University of Bologna to assume the position of professor *straordinario* of descriptive and projective geometry that had been vacated by Domenico Montesano[1]. However, for a variety of reasons (administrative red tape, politics, etc.) Pieri was ultimately denied the post. The saga of the Bologna affair lasted four years, and no doubt took its toll on Pieri[2]. He eventually secured the position of chair of projective and descrip-

[1] Telegram of November 18, 1893, published in G. Arrighi (ed.), *Lettere a Mario Pieri* (*1884-1913*), in «Quaderni Pristem», Milano, 1997, p. 103.

[2] Cfr. E.A. Marchisotto, J.T. Smith, *The Legacy of Mario Pieri in Geometry and Arithmetic*, Boston, Birkhäuser, 2007, Chapter 1.1.5.

tive geometry at the University of Catania in Sicily and began teaching there, at age thirty-nine, in spring 1900.

Eight years later, an opportunity presented itself to Pieri to transfer to a place not far from his beloved Tuscany. In October 1908, he joined the faculty of science at the University of Parma, as professor *ordinario* and director of the School of Projective and Descriptive Geometry with Design. The University of Parma was very small. Pieri and his assistant Attilio Vergerio and were the only members of Pieri's school there. But during Pieri's tenure, he recruited Beppo Levi and together they worked to enhance the university's offerings in mathematics, creating schools of fundamentals of algebra, of ornamental design and architecture, and of infinitesimal calculus in 1911. In the midst of his productive work in research and teaching, Pieri was diagnosed with cancer. This may have been foreshadowed by his serious illness five years earlier in Catania. Pieri died on March 1, 1913 at the young age of fifty-two.

Five obituaries for Pieri were published in professional journals by his friends and colleagues[3]. All attested to his scholarship, life-long love of learning, generosity of spirit, and humility. Francesco Campetti, Pieri's great grand nephew, recently recalled:

My grandmother Beatrice always told me that Pieri used to spend quite all his time studying, but he didn't like to be considered a genius … He was really modest.

Pieri the Scholar

Pieri wrote two dissertations: one in differential geometry and one in algebraic geometry, both under the direction of Luigi Bianchi. Neither were published, but are available on microfiche in the archives of the library of the University of Pisa. Pieri's research would not only focus on these areas, but also on vector analysis, foundations of mathematics, and logic and philosophy of science.

[3] B. Levi, *Mario Pieri,* in «Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche», 15, 1913-14, p. 65-74; 16, 1914-15, p. 32, reprinted in *Opere di Mario Pieri sui fondamenti della matematica*, Bologna, Cremonese, 1980, edited by the UMI with contributions by the CNR; G. Giambelli, *Mario Pieri*, in «Bollettino di matematica», 12, 1913, p. 291-293; G. Peano, *Mario Pieri*, in «ApI *Discussiones*», 4, 1913, p. 31-34, included in *L'Opera omnia e i Marginalia di Giuseppe Peano (with English version)*, C.S. Roero (ed.), Torino, Dip. Mat. Peano, Univ., dvd-rom 2008, as file 1913f.pdf; *Le Riviste di Giuseppe Peano (with English version)*, C.S. Roero (ed.), Torino, Dip. Mat. Peano, Univ., cd-rom N. 4, 2008; G. Castelnuovo, *Mario Pieri,* in «Bollettino della Mathesis Società Italiana di Matematica», 5, 1913, p. 40-41; S. Rindi, *Notizie intorno al defunto socio corrispondente Prof. Mario Pieri*, in «Atti R. Accademia Lucchese di Scienze, Lettere ed Arti», 35, 1913 (1919), p. 435-459.

A. Differential and Algebraic Geometry, and Vector Analysis[4]

Early in his career, Pieri published several papers largely devoted to examining surfaces using methods of differential geometry. In several he would enlarge his environment to include techniques of algebraic geometry, publishing at least one paper that can be seen as belonging to both fields. Just before he died, Pieri would similarly connect differential geometry with vector analysis. The idea that he would begin such research at that time in his life demonstrates his life-long love of learning. With *Notes géométriques* (1912), Pieri contributed an appendix to a book by Cesare Burali-Forti and Roberto Marcolongo in which the two authors developed Giuseppe Peano's geometrical calculus into a system of vector analysis[5]. Pieri believed such methods would be effective in simplifying much of differential geometry. He published two other works that same year relating the differential geometry of line congruences and systems of surfaces to that of vector fields. Pieri's research in differential geometry was primarily focused on the following areas:

- the examination of helicoidal and higher dimensional surfaces with arbitrary curvature.
- its connections to algebraic geometry, in particular, the determination of lines of maximum curvature of quadric surfaces.
- its connections to vector analysis, in particular, the relation of the differential geometry of line congruences and systems of surfaces to that of vector fields.

Pieri's research in algebraic geometry produced thirty-one papers that can be partitioned into the following categories: two papers (one of which was his dissertation) at the beginning of his career; seven papers on tangents and normals published between 1886 and 1897; seventeen papers in enumerative geometry published between 1886 and 1902; five papers on birational transformations between 1889 and 1895. His *Méthodes enumerative* (1915) was a revision and translation of Hieronymous Georg Zeuthen's *Abzählende Methoden* (1905)[6]. A summary of Pieri's legacy for today's scholars should focus,

[4] A summary of Pieri's contributions to these fields and the titles of all his papers is included in Marchisotto, Smith 2007 cit. A detailed analysis of these particular works is planned for the third volume by the authors in this series of books about the life and work of Mario Pieri that is being published by Birkhäuser.

[5] M. Pieri, *Notes géométriques,* in C. Burali-Forti, R. Marcolongo, *Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria, alla meccanica e alla fisica-matematica,* Bologna, Zanichelli, 1912, p. 156-168.

[6] H.G. Zeuthen, *Abzählende Methoden,* in F. Meyer, H. Mohrmann (eds.), *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, Volume 3, Part 2, *Geometrie*, Leipzig, Teubner, 1907-1934, p. 257-312; *Méthodes énumeratives by H. G. Zeuthen*, M. Pieri, (ed. and translator), in J. Molk, F. Meyer (eds.), *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, Tome 3, *Fondements de la géométrie, Géométrie générale,* Paris, J. Gabay, 1911-1915, (1991).

in particular, on the following of his results that continue to be discussed in the literature:

- the first synthetic proof of an n-dimensional generalization of Bézout's theorem.
- his coincidence formulas that count the virtual number of fixed points of a correspondence on an n- dimensional projective space.
- his multiplication formula that computes the number of s-dimensional subspaces in an n-dimensional complex projective space satisfying more general incidence conditions imposed by nested sequences of linear subspaces.
- the multiplication table of the homology classes of the Schubert varieties that he constructed with Giovanni Giambelli.

Pieri's studies in algebraic geometry flourished in the environment of the school of established by Corrado Segre and Enrico D'Ovidio at the University of Turin. Indeed, this school of algebraic geometry made «Turin, at the end of the XIX century, one of the most important points of reference for scholars in Italy and across Europe»[7]. And among those scholars, Pieri was called «… remarkable»[8] and «a brilliant student of the field»[9].

B. Foundations of Geometry

The school of algebraic geometry was only one of the prestigious schools flourishing at the University of Turin around the turn to the twentieth century. Another was that of logic and foundations directed by Giuseppe Peano[10]. Pieri became a prominent member of Peano's school. In fact, Pieri has been called «a true bridge»[11] between the schools of algebraic geometry and foundations at Turin.

Largely due to the influence of Peano, Pieri would change the major direction of his research from algebraic and differential geometry to foundations.

[7] L. Giacardi, *Corrado Segre maestro a Torino. La nascita della scuola Italiana di geometria algebrica,* in «Annali di Storia delle Università Italiane», 5, 2001, p. 139-163, (quotation p. 139).

[8] G. Boffi, *On some trends in the Italian geometric school in the second half of the 19th century*, in «Rivista di Storia della Scienza», 3(1), 1986, p. 103-112,(quotation p. 109).

[9] A. Brigaglia, C. Cilberto, *Italian Algebraic Geometry between the Two World Wars*, in «Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics», 100, Ontario, Queen's University, 1995, translated by J. Duflot, (quotation p.18).

[10] Thanks to Professor Roero (for her many publications on Peano, and her dissemination of his works, bibliography and *Nachlass* in the three CDs *L'Archivio Giuseppe Peano, L'opera omnia di Giuseppe Peano* and *Le riviste di Giuseppe Peano*) and her colleagues, scholars all over the world now have access to Peano's opus.

[11] A. Brigaglia, G. Masotto, *I circolo matematico di Palermo*, Bari, Dedalo, 1982, (quotation, p. 137).

Between 1895 and 1912, Pieri published seventeen papers in foundations of geometry, presenting geometry as an abstract formal system that he called *hypothetical-deductive*, rather than as a study of space. Pieri's papers each reflected Pieri's allegiance to goals of the Peano school, and explicitly or implicitly used Peano's logical calculus. Pieri produced thirteen papers in real and complex projective geometry; two papers in elementary geometry (neutral and Euclidean); and two papers in inversive geometry. They each share the following characteristics of Pieri's foundational work:

- Constructions as purely abstract *hypothetical-deductive* systems based on a minimum number of primitives. All postulates are expressed in terms of the primitives, and there is no appeal to concepts external to the particular geometry being developed. Nearly all contain no diagrams.
- Promotion of the transformational approach to geometry proposed by Felix Klein and Sophus Lie, among others
- Endorsement of "fusionism", providing simultaneous expositions of two and three-dimensional geometry.
- Demonstration of an explicit concern for pedagogy while insisting on the need for rigor.

The historical and mathematical facts concerning Pieri's research in projective geometry are remarkable from several points of view:

- Projective geometry had been the context for much of his research in algebraic geometry. It was the subject Pieri first chose to examine from a foundational point of view.
- Corrado Segre had asked Pieri to translate into Italian and annotate a seminal work of Georg Karl Christian von Staudt. With the publication of that work, and in all his subsequent research of projective geometry, Pieri sought to build upon Staudt's vision.
- Projective geometry was prominent among the subjects Pieri researched and taught. An examination of his body of work in the field reveals how he continually strove to refine his axiomatizations and exhibit them in various ways to reveal the inner structure of the geometry.
- Pieri was the first to establish projective geometry as an autonomous science free from Euclidean.
- For his contributions to projective geometry, Pieri won *honorable mention* in the competition for the 1904 Lobachevski Prize.

Pieri's most important achievement in projective geometry was the realization of a goal advocated by Staudt in *Geometrie der Lage* (1847): to free the subject from metric ideas. With *I principii della geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo* (1898), Pieri succeeded in establishing projective geometry as an autonomous science[12]. His axiomatization was hailed by Bertrand Russell as «the best work» on projective geometry[13]. Julian Lowell Coolidge acknowledged Pieri as «the first writer to set up a suitable set of axioms for projective geometry»[14]. Indeed, Pieri's body of research in projective geometry was celebrated by many noted scholars of his era. Giovanni Giambelli noted:

> … lo spirito sommamente critico del Pieri doveva lasciare un nome molto più importante nello studio dei fondamenti della Geometria proiettiva reale e complessa. In questo campo emerge, come Maestro, il Pieri, avendo all'esposizione pesante degli immaginiari secondo Staudt sostituito un felice nuovo metodo, che permette di stabilire in modo chiaro e ben definito i postulati della Geometria proiettiva[15].

Giuseppe Peano summarized Pieri's legacy, writing:

> I risultati a cui pervenne il Pieri …costituiscono un'epoca nello studio dei principii della Geometria…E tutti coloro che in seguito trattarono dei principii della Geometria, si servirono ampiamente dei lavori del Pieri, e diedero dei giudizi equivalenti a quello riportato dal Russell[16].

Pieri did not restrict his foundational studies to projective geometry. In 1899, he produced *Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo: Monografia del punto e del moto*, an axiomatization of neutral geometry (the common part of Euclidean and hyperbolic geometry that is sometimes called *absolute geometry*)[17]. This paper is notable in several respects:

[12] G.K.C. Von Staudt, *Geometrie der Lage,* Nüremberg, Fr. Korn'schen Buchhandlung, 1847; M. Pieri (ed. and translator), *Geometria di posizione*, preceded by a study of the life and works of Staudt by C. Segre, Biblioteca matematica, 4, Torino, Bocca, 1889; M. Pieri, *I principii della geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo*, in «Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino», s. 2, 48, 1898, p. 1- 62, reprinted in *Opere*, 1980, p. 101-162. Pieri 1898 is translated into English in E.A. Marchisotto, F. Rodriguez-Consuegra, J.T. Smith, *The Legacy of Mario Pieri on the Foundations and Philosophy of Mathematics,* Boston, Birkhäuser, to appear.

[13] B. Russell, *The Principles of Mathematics,* England, Cambridge University Press, 1903, (quotation, p. 382).

[14] J. L.Coolidge, *The Elements of Non-Euclidean Geometry*, Oxford, Clarendon Press, 1909, (quotation . p.247).

[15] G. Giambelli, *Mario Pieri*, in «Bollettino di matematica», 12, 1913, p. 291-293, (quotation, p. 291-292).

[16] G. Peano, *Importanza dei simboli in matematica*, in «Scientia Rivista di scienza», 18, 1915, p. 171, (quotation p. 171), reprinted in G. Peano, *Opere scelte*, Vol. 3, *Geometria e fondamenti meccanica razionale - varie*, Roma, Cremonese, 1959, p. 389-396, included in Roero (ed.), *L'Opera omnia...*, 2008, as file 1915j.pdf.

[17] M. Pieri, *Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo: Monografia del punto e del moto.* in «Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino», s. 2, 49, 1899, p.173-222, reprinted in *Opere*, 1980, p.183-234. Pieri 1899 is translated into English and analyzed in Marchisotto, Rodriguez-Consuegra, Smith, to appear.

– It treats that part of elementary geometry that is independent of Euclid's parallel postulate.
– It was constructed on only two primitives (point and motion) that enabled Pieri to innovatively *define* a line with no appeal to order[18].
– It revealed Pieri's explicit goal for logical precision to provide rigorous arguments for Euclid's inadequate proofs.

Pieri's paper was totally eclipsed by David Hilbert's *Grundlagen der Geometrie* (1899)[19]. Nonetheless, Pieri's treatment of neutral geometry was heralded in the same year of Hilbert's publication, for its innovative results, pedagogical focus, and logical treatment. Enrico D'Ovidio and Corrado Segre called it:

> un risultato notevolissimo, nè pare che altri fosse giunto finora a tanta semplicità nel sistema degli enti da assumersi come primitivi. ... In ogni modo è certo che dal punto di vista puramente logico il sistema del Pieri è pienamente soddisfacente, e contiene…un risultato di particolare importanza nella riduzione fatta delle nozioni primitive[20].

Gino Loria recognized in this work Pieri's intent to improve pedagogy:

> …a notable result, not just because of its simplicity and originality, but also because it seems directed toward those schools which would banish motion from pure geometry. ...The future will decide whether Pieri's ideas can lead to a useful reform of elementary instruction. What is without question, however, is that they deserve the attention of scholars and teachers[21].

Louis Couturat deemed Pieri's axiomatization «l'analyse la plus approfondie des principes de la Géométrie»[22]. Edwin Bidwell Wilson affirmed that Pieri provided «a more fundamental logical treatment of the subject than Hilbert»[23]. Indeed, Cesare Burali-Forti chided his own countrymen for using «il caotico e impreciso sistema geometrico dell'Hilbert, quasi non esistessero

[18] Cfr. E.A. Marchisotto, *Lines without Order*, in «The American Mathematical Monthly», 99(8), 1992, p. 738-745.

[19] D. Hilbert, *Foundations of Geometry* (*Grundlagen der Geometrie*), 2nd ed., translated by L. Unger from the 10th German edition, revised and enlarged by P. Bernays, LaSalle, Illinois, Open Court, 1899 (1971).

[20] E. D'Ovidio, C. Segre, *Relazione sulla memoria del Prof. M.* Pieri, intitolata *Della Geometria Elementare come sistema ipotetico-deduttivo,* in «Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino», 34, 1899, p. 760-762, (quotation, p. 760).

[21] G. Loria, *Reviews 30.04026.02, 30.0426.03,* in « Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik», 30, 1899, p. 426-428, (quotation, p. 426).

[22] L. Couturat, *Les principes des mathématiques, avec un appendice sur la philosophie des mathématiques de Kant*, Paris, Alcan, 1905, (quotation, p. 193).

[23] E.B. Wilson, *The foundations of mathematics*, in «Bulletin of the American Mathematical Society», 9, 1904-1905, p.74-93, (quotation, p. 77).

i sistemi semplici, chiari e precisi (ma sono italiani!) e ben superiori a quello dell'Hilbert, di M. Pieri»[24].

Pieri's other paper in elementary geometry was an axiomatization of Euclidean geometry entitled *La Geometria Elementare istituita sulle nozioni di "punto" e "sfera"*[25]. It is notable in the following respects:

- It is based on only two primitives: points and sphere (a single ternary equidistance relation).
- It includes an innovative parallel postulate due to János Bolyai.
- It was translated into Polish in 1914 and was later adapted by the noted logician Alfred Tarski as a basis for his own construction of Euclidean geometry.
- It has stimulated modern research on basing geometry on a single undefined relation.

Pieri's1908 paper was scarcely acknowledged when it was published. But evaluations by contemporaries who did know of it, as well by as modern scholars, attest to the importance of this work. Shortly after the publication of Pieri's axiomatization, Giovanni Vailati recognized it as:

> … un passo innanzi, in quanto tratta il soggetto da un punto di vista ancora più generale e, starei per dire, dal punto più generale possibile compatibilmente colla materia concreta a cui la trattazione si riferisce. A me ha recato una soddisfazione, paragonabile a quella che si prova quando tornando da una lunga passeggiata si levano scarpe e calze per metterne un pajo nuovo e fresco[26].

Decades later, Marco Borga and Dario Palladino called it «one of the most remarkable contributions to foundations of geometry by the Peano school»[27].

Pieri's axiomatizations of inversive geometry would also be recognized only decades after they were produced. With *Nuovi principii di geometria delle inversioni: Memoria I* (1911) and *Nuovi principii di geometria delle inversioni: Memoria II* (1912a), Pieri established inversive geometry, synthetically and from a transformational point of view, as an autonomous science, independent of elementary and projective geometries[28]. Prior to his publications, noted mathemati-

[24] C. Burali-Forti, *Logica matematica*, Milano, Hoepli, 1919, (1st Ed., 1894), (quotaton, p. xxxii).

[25] M. Pieri, *La Geometria Elementare istituita sulle nozioni di "punto" e "sfera",* in «Memorie di matematica e di fisica della Società Italiana delle Scienze», s. 3, 15, 1908, p. 345-450, reprinted in *Opere*, 1980, p. 455-560. Pieri 1908 is translated into English and analyzed in Marchisotto, Smith 2007 cit.

[26] Letter of June 1908, in Arrighi, 1997 cit., p. 124.

[27] *M. Borga, D. Palladino, Logic and foundations of mathematics in Peano's school*, in «Modern Logic», 3, 1992, p. 18-44, (quotation, p. 32).

[28] M. Pieri, *Nuovi principii di geometria delle inversioni: Memoria I*, in «Giornale di matematiche» ,49, 1911, p. 49-98, reprinted in *Opere*, 1980, p. 561-608; *Nuovi principii di geometria delle inversioni: Memoria II,* in «Giornale di matematiche», 50, 1912, p. 106-140, reprinted in *Opere*, 1980, p. 609-643.

cians had articulated the need for research in inversive geometry. Before the turn of the century, Felix Klein had indicated that the study of this geometry of reciprocal radii had «not yet, like projective geometry, been united into a special geometry, whose fundamental group would be the totality of the transformations resulting from a combination of the principle group with geometric inversion»[29]. In his 1904 address in St. Louis, Missouri, Edward Kasner called for the establishment of a foundation for inversive geometry, and in an address to the American Mathematical Society in1908, John Wesley Young indicated this was still an open problem whose solution «is greatly to be desired»[30].

Yet Pieri's axiomatizations remained virtually unknown until the middle of the twentieth century. In 1951, Alan J. Hoffman observed: «It is rather surprising that the literature contains so few investigations of the foundations of inversive geometry as an autonomous subject»[31]. Those investigations which Hoffman then cited in addition to Pieri's 1911 and 1912 papers, were the 1935 and 1940 works respectively by Bartel Van der Waerden and L.J. Smid and by B. Petkantschin[32]. Decades later, the noted geometer Harold Scott MacDonald Coxeter hailed Pieri's system as «the first satisfactory set of axioms for inversive geometry»[33].

C. Foundations of Arithmetic and Logic and Philosophy of Science

Pieri did not restrict his foundational studies to geometry. With *Sopra gli assiomi aritmetici* (1907), he produced an axiomatization of arithmetic that, along with Padoa's *Théorie des nombres entiers absolus* (1902), was viewed by Giuseppe Peano himself as an improvement over the famous postulates given in Peano's *Arithmetices Principia, Nova Methodo Exposita* (1889)[34]. In 1916, Peano wrote:

[29] F. Klein, *A comparative review of recent researches in geometry*, translated into English by M.W. Haskell, in «Bulletin of the New York Mathematical Society», 1893, p. 215-249, (quotation, p. 228).

[30] E. Kasner, *The present problems of geometry*, in «Bulletin of the American Mathematical Society», 11, 1905, p. 283-315, (Cfr., p. 289-90); J.W. Young, *The geometry of chains on a complex line*, in «Annals of Mathematics», 11, 1909, p. 33-48, (quotation, p. 47).

[31] A. J. Hoffman, *On the foundations of inversion geometry*, in «Transactions of the American Mathematical Society», 71, 1951, p. 218-242 , (quotation, p. 218).

[32] B.L. Van der Waerden, L.J. Smid, *Eine Axiomatik der Kreisgeometrie und der Laguerre geometrie*, in «Mathematische Annalen», 110, 1935, p. 753-776; B. Petkantschin, *Axiomatisher Aufbau der zwei-dimensionalen Möbiusschen Geometrie*, in «Annuaire de Universite Sofia I, Faculté Physico-Mathématique», Livre 1, 36, 1940, p. 219-325.

[33] H.S. M. Coxeter, *Inversive geometry*, in N.G. Steiner (ed.), *The teaching of geometry at the pre-college level,* Holland, Reidel, 1971, (quotation p. 311).

[34] M. Pieri, *Sopra gli assiomi aritmetici*, in «Bollettino dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania», s. 2, 1907, p. 26-30, reprinted in *Opere*, 1980, p. 449-454; A. Padoa, *Théorie des nombres entiers absolus (remarques et modifications au Formulaire)*, in «Revue de mathématiques

> L'enunciazione delle proposizioni primitive dell'aritmetica fu giudicata degna di menzione nell'Encyclopädie…Però questa teoria fu, collo strumento della logica matematica, sorpassata dal prof. Padoa, e dal compianto prof. Pieri; sicchè le mie ricerche hanno ora solo un valore storico[35].

This evaluation with respect to Pieri's 1907 axiomatization of arithmetic was owed to his reduction in the number of postulates and his replacement of Peano's inductive postulate by the requirement that every nonempty set S of natural numbers have an element that is not the successor of any number in S. In modern times, scholars who know Pieri's arithmetic judge it worthy of recognition. Fulvia Skof has written:

> Nel …"Sopra gli assiomi aritmetici"…viene stabilito un sistema di postulati, che dal punto di vista logico semplifica la teoria del Peano: infatti, non solo risultano ridotti il numero dei concetti primitivi e dei postulati, ma viene sostituito al principio di induzione, che figura fra i postulati del Peano, un postulato esistenziale più semplice e di uso più facile[36].

Pieri the Teacher

Pieri believed that the ideal way to teach geometry was as a purely abstract logical system. Yet there are pedagogical obstacles to such an approach.

> It is well known that there is a strong contrast in mathematical activities between the abstract nature of mathematical objects, which are usually seen as having no perceptual existence, and their representations, which are tangible and upon which subjects' activities can develop in a concrete way. The management of such a duality is basic in all learning processes. It is important therefore to develop suitable frameworks to analyze this duality and to clarify its role in the teaching and learning of mathematics[37].

In Pieri's axiomatizations, as well as in his classroom lessons, he clearly demonstrates that he recognized the challenges of teaching geometry as an abstract system.

(Rivista di matematica)», 8, p. 45-54; reissued in Roero (ed.), *Le riviste* ..., 2003; G. Peano, *Arithmetices Principia, Nova Methodo Exposita*, Torino, Bocca, 1889, reprinted in Peano, *Opere scelte*, Vol. 2, p. 56-91, included in Roero (ed.), *L'Opera omnia...*, 2008, as file 1889d.pdf.

[35] G. Peano, *Pubblicazioni di Giuseppe Peano*, Unpublished memorandum, 1916, included in ROERO (ed.), *L'Opera omnia* ..., 2008, as file 1916e.pdf, (quotation, p. 3).

[36] F. Skof, *Sull'opera scientifica di Mario Pieri*, in «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana», s. 3, 15, 1960, p. 63-68, (quotation p. 67). Cfr. Marchisotto, Smith, 2007, where Pieri 1907 is translated into English and analyzed.

[37] F. Arzarello, F.M. Bosch, J. Gascón, C. Sabena, *The ostensive dimension through the lenses of two didactic approaches*, in «ZMD», 40 (2), (May), p. 179-188, (quotation, p. 179).

A. Pieri's Advocacy of Teaching Geometry as an Abstract System

Pieri's *hypothetical-deductive* systems were intended not only to harness the power of the axiomatic method to present a rigorous exposition of mathematics, but to give insight into the nature of the structure of the mathematics being studied. This is evident from the following features in the development of his systems:

– The exploration of geometry as the study of logical relations, with no appeal to experiential intuition.
– The construction of geometry on primitives intrinsic to it, whose properties are revealed by the postulates.
– The way that he "unfolds" the geometry – introducing postulates only as needed, and explaining why they are needed at such junctures.
– The rigor of his demonstrations which expose the deductive process, illustrating precisely how each theorem proceeds from the primitives and previously stated postulates.

Pieri saw great value in teaching geometry as a formal science because he believed it fosters in students a secure knowledge of the logical relationships of principles to consequences: in sum the art or faculty of correct argument and deduction. In his 1908 axiomatization of Euclidean geometry, Pieri wrote:

> …Geometria, come scienza formale, potrebbe anche reggersi ed essere intesa, pure senza mai fare appello al contenuto intuitivo o fisico de' suoi concetti primitivi… perchè una mente educata alle idee generali e sorretta da una discreta facoltà di astrazione, divien capace di percepire, oltre il senso logico astratto, anche il nesso delle varie proposizioni e le loro veci deduttive, la concatenazione delle parti e i loro rapporti col tutto, ecc. …Quel che importa sovra ogni cosa è la pratica del ragionare conesattezza; vale a dire la cognizione sicura dei rapporti logici di principio a conseguenza: insomma l'arte o la facoltà di rettamente argomentare e concludere: facoltà che la Geometria contribuisce, del resto, a sviluppare e promuovere[38].

Pieri envisioned logic as an instrument of abstraction and precision that fosters questions and promotes understanding. He consistently strove for what he called "deductive simplicity". He credited the "efficiency" and intellectual aspects" of logic that "promote the methods and doctrine" of geometry, recognizing its "suggestive faculty that often leads to observations and research not otherwise explored". In his 1906 address at the University of Catania, Pieri noted:

> Nè si creda, che i progressi nell'assetto logistico delle matematiche siano per nuocere allo sviluppo delle facoltà intuitive ed artistiche. Perchè, mentre si fortifica e cresce il dominio della ragione positiva, cresce in pari tempo e si allarga la zona di

[38] Pieri, *La Geometria Elementare* ..., 1908 cit., p. 447, repr. in *Opere*, p. 557.

> confine fra questo e le altre regioni del sapere…e così la funzione dell'istinto intellettuale, l'attività creatrice del genio…lungi dall'esserne infiacchite o stremate, m'esciranno anzi accresciute in dignità e vigore[39].

Pieri believed that the exposition of geometry as a system of logical relations promoted a certain type of intuition that he called rational intuition:

> un'intuizione razionale, vale a dire una apercezione di rapporti logici tra principî e consequenze[40].

Still, he did not deny the intuition of our world a role in the construction of a geometry nor its teaching. Pieri simply excluded as an instrument to justify deductive reasoning. He extolled the intuition that one extracted from logic, rather than from experience. Indeed, in his 1894 review of a book by Johannes Karl Thomae on conic sections[41], Pieri discussed the development of geometry as an abstract science as well as its "quicker" presentation as a branch of mathematics physics, noting that:

> sooner or later, the deductive principles should be identified with ideas confirmed by experience. Pieri wrote: Chè se poi vogliasi trattarla non come scienza astratta, ma più tosto come un ramo della fisica-matematica (del che non conviene dissimulare i molti vantaggi, specialmente didattici)…. parendomi in vece che a questi debba presto o tardi far luogo, se i principîe le deduzioni speculative si vorranno riscontrare coi fatti, e identificare con le idee che l'esperienza ci apprende intorno ai medesimi[42].

Pieri supported the instructional use of visual or physical representation of physical objects, but only before or after a purely deductive treatment. In 1908, he wrote:

> Molto giova all'intelligenza dei fatti geometrici l'aver sempre innanzi un'immagine or rappresentazione intuitiva del "punto" … non sarà superfluo appellarsi … ai mezzi più grossolani ed empirici per suscitare a vivificare nei giovani ogni sorta di cognizioni intuitive e sperimentali sui vari oggetti geometrici[43].

B. The Transformational Approach

Despite his expressed belief in teaching geometry as a logical system, Pieri addressed the challenges in such an approach. On one occasion he suggested

[39] Pieri, *Uno sguardo …*, 1906-07 cit., p. 80, repr. in *Opere*, p. 446.
[40] *Ibidem*, p. 78, repr. in *Opere*, p. 444.
[41] J. Thomae, *Die Kegelschnitte in rein projektiver Behandlung*, Halle, Nebert, 1895.
[42] M. Pieri, *Review of Thomae 1894,* in «Rivista di matematica», 4, p. 36-39, reissued in Roero (ed.), *Le riviste …*, 2003, (quotation in footnote, p. 39).
[43] Pieri, *La Geometria Elementare …*, 1908 cit., p. 447, repr. in *Opere*, 1980, p. 557.

compensating by adopting a transformational approach to geometry. In his 1898 axiomatization of projective geometry on the basis of point and homography, Pieri noted:

> Se il nuovo sistema è scarsamente intuitivo ne' suoi principi – da che non par facile procacciarsi ab inizio un'interpretazione concreta del "moto projettivo" – questo difetto potrà rimaner compensato, pur nei riguardi estrinseci dell'insegnamento, dalle semplificazioni veramente notevoli che si riscontran qui d'ogni parte: tanto che ne sarebber tolte di mezzo le maggiori prolissità e scabrosità che si oppongono per solito alla sposizione della Geometria projettiva in forma rigorosamente ipotetica[44].

C. *The Ideal vs. The Real: Pieri's Classroom Approach*

There is no question Pieri was truly concerned with pedagogy, and saw the teaching of geometry as an abstract system as the ideal methodology for the classroom. But the actual practice of his classroom teaching reveals that he did not achieve this ideal. Nonetheless Pieri's efforts to construct geometry as a hypothetical-deductive system did produce changes in his pedagogy. For example, an examination of his notes for courses at the Military Academy in Turin that were published in 1891, compared to his lithographed notes for his course at the University of Parma in 1909-1910, reveals the impact of Pieri's foundational research on his teaching of projective geometry[45].

Pieri's notes for the courses in projective geometry at the Military Academy were published prior to writing his first axiomatization of projective geometry, but after he had analyzed, edited and translated into Italian Georg Karl Christian von Staudt's *Geometrie der Lage*. In these notes, Pieri presented projective geometry as an extension of elementary geometry. His lessons include both metric, and projective theorems. His exposition includes diagrams (figures, constructions, problems and applications). These notes were well received by the Italian mathematical community. In an 1891 letter to Pieri, Giuseppe Bruno revealed that according to Corrado Segre, these notes played a role in the offer by the faculty at the University of Turin for Pieri to become *libero docente* there[46].

Pieri's courses at the University of Parma in the 1909-1910 academic year were conducted after he had published his axiomatizations of projective geom-

[44] M. Pieri, *Nuovo modo di svolgere deduttivamente la geometria projettiva*, in «Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Rendiconti», s. 2, 31, 1898a, p. 780-798, (quotation, p. 782), repr. in *Opere*, 1980, p.163-182, (quotation, p. 165).

[45] M. Pieri, *Geometria proiettiva: Lezioni per gli allievi nella Reale Accademia Militare di Torino*,Torino, Tip. Candeletti, 1891; *Lezioni di geometria proiettiva,* edited by M. Camvi, Parma, Lit. Anghinetti e Giaroli, 1910.

[46] Letter of October, 1891, in Arrighi 1997 cit., p. 15.

etry (from 1895 to 1906). His lecture notes for these courses alerted students to the more "desirable" view of projective geometry as an autonomous subject. Nonetheless, he did not present the subject exclusively as an extension of Euclidean geometry nor as a hypothetical-deductive system. Instead he proposed «una via di mezzo, presupponendo solamente note alcune nozioni di Geometria elementare»[47].

Pieri began the Parma lessons with an introduction that explained the traditional approach to projective geometry by noted scholars as Jean-Victor Poncelet, Michel Chasles, August Möbius, and Jakob Steiner, who viewed the subject as an extension of Euclidean. He then told of a new direction initiated by Georg Karl Christian von Staudt to establish projective geometry synthetically as an autonomous subject freed from metric relations, and spoke in general terms of the progress that had been made in that direction. But characteristic of this humble man, Mario Pieri never mentioned himself.

D. Legacy of Pieri the Teacher

Although Pieri never actually implemented what he believed was the ideal method for teaching geometry, his efforts to improve pedagogy did not go unnoticed. In evaluating Pieri for promotion to *professor ordinario* at Catania in 1902, Giulio Pittarelli reported on his legacy from Turin: « …il Comando dell'Accademia Militare e le Facoltà di Torino e di Catania sono concordi nel lodare, senza restrizioni, lo zelo e l'attitudine didattica del Prof. Pieri». Pieri's student, Giorgio Aprile, expressed his appreciation to Pieri, saying:

> Ella ha incominciato a farmi amare la scienza. Il lavoro che Ella mi propose mi ha fatto gustare le delizie del vero studio[48].

Conclusion

In a 1913 speech before the Royal Academy of Science, Scipione Rindi observed that Pieri «leaves a precious legacy to Science, the fruits of his untiring and earnest study; to the city and to his family, the honor of his name; to all the memory and the example of a life nobly spent in the search for truth»[49]. The passage of time confirms this opinion, as Ugo Cassina observed:

> …sono passati ormai più di 47 anni dalla morte del Pieri, per modo che possiamo valutare meglio-nella prospettiva del tempo-la sua opera complessiva e riconoscere

[47] Pieri, *Lezioni di geometria proiettiva*, 1910 cit., p. 5.
[48] Letter of February, 1910, in Arrighi 1997 cit., p. 1.
[49] Rindi 1913 (1919) cit., p. 452.

quella di maggior importanza, quella che ha contribuito a far si che il nome di Mario Pieri sia da inserire nella ristretta cerchia dei matematici italiana più noti in Italia ed all'estero, della fine del secolo scorso e del principio di questo secolo[50].

It is only fitting that we continue to publicize the work of Mario Pieri. My colleague James T. Smith and I, as well as many esteemed scholars in Europe, are endeavoring to expose the virtues of this modest man and his important contributions to science, philosophy and teaching.

Acknowledgements: This article emanated from a paper I gave on March 4, 2010, at Turin Conference entitled *L'opera scientifica di Mario Pieri (1860-1913) a 150 anni dalla nascita.* I thank Professors Clara Silvia Roero and Livia Giacardi for the invitation to present that paper, as well as for all the support they and the Italian mathematical and historical communities have given to me for many years. I also am very appreciative to Professors Roero and Erika Luciano for having translated my slides for the conference into Italian. As always, I am grateful to Helen Cullura Corie for her inspiration and encouragement of this research, and to Mario Pieri's relatives, Campetti families, for sharing information and documents that help complete the picture of Pieri, the man, the scholar, and the teacher.

[50] U. CASSINA, *Nel centenario della nascita del matematico Lucchese Mario Pieri*, in «Atti dell'Accademia Lucchese di Scienze, Lettere ed Arti», (2) 11, 1961, p. 189-208, (quotation, p. 191).

Mario Pieri e la Scuola di Corrado Segre

ALDO BRIGAGLIA

Mario Pieri si era laureato nel 1884 alla Scuola Normale di Pisa, sotto la direzione di Riccardo De Paolis, e il suo argomento preferito era, in quel momento, la geometria algebrica. Nel 1885 si trasferì, per insegnare geometria presso l'Accademia militare, a Torino. L'ex capitale del Regno d'Italia attraversava allora un periodo di straordinaria vivacità. Trascurando tutto il resto, per quanto riguarda la matematica, basta ricordare che a fianco di una più che dignitosa vecchia generazione di studiosi (penso soprattutto a Enrico D'Ovidio e ad Angelo Genocchi) si stava affiancando una nuova generazione veramente straordinaria. Tra tutti spiccavano Giuseppe Peano (nato nel 1858) e Corrado Segre (nato nel 1863), ma è certo da ricordare anche Gino Loria. Proprio nel 1884 Peano aveva esordito nel campo dei fondamenti dell'Analisi con le sue aggiunte al testo di Genocchi (poi noto come il Genocchi–Peano) e con le sue osservazioni critiche ad alcuni teoremi di Camille Jordan. Quanto a Segre, laureatosi nel 1883, tra quell'anno e il 1885 aveva già pubblicato 21 lavori, di cui molti in prestigiose riviste internazionali tra cui il *Journal di Crelle* e i *Mathematische Annalen*.

Se Peano divenne presto il simbolo del rigore assoluto[1], Segre rappresentava bene le caratteristiche di un'audace astrazione e di una grande capacità di generalizzazione. Insito nel metodo iperspaziale utilizzato da Segre (e contemporaneamente da Giuseppe Veronese a Padova) era l'idea che l'elemento generatore degli spazi geometrici, il punto, dovesse restare del tutto indeterminato, potendo essere interpretato di volta in volta anche come retta (principio di dualità) o conica (secondo quanto fatto da Cayley e Plücker) o altro elemento geometrico. L'indeterminazione del significato attribuito all'oggetto

[1] Mi limiterò solo a qualche cenno sui rapporti tra Peano e Pieri, in relazione a Segre e alla sua scuola. Per notizie relative alla vita e alle opere di Pieri, cfr. E. A. Marchisotto, J. T. Smith, *The legacy of Mario Pieri in Geometry and in Arithmetic*, Berlin, Springer, 2007.

punto comportava anche un'indeterminazione dell'idea di dimensione dello spazio studiato (lo spazio delle rette nello spazio tridimensionale è in effetti di dimensione 4, come avevano notato Plücker e Klein). Entrambi questi punti di vista influenzeranno moltissimo Pieri, che porterà ai massimi livelli la capacità di sintetizzarli in quella forma a un tempo rigorosa e astratta che tanto impressionerà Bertrand Russell.

Ma torniamo all'ambiente torinese ricordando che esso sarà presto ulteriormente arricchito dall'arrivo di Guido Castelnuovo (1865-1952), laureato a Padova con Veronese. Pieri restò a Torino per tutta l'ultima parte del diciannovesimo secolo (si trasferì a Catania nel 1900); durante questo periodo, fino al 1894, le sue pubblicazioni riguardano esclusivamente la geometria algebrica, campo nel quale la stella di Segre saliva in modo irresistibile: possiamo ritenere che già dal 1888, anno in cui vinse la cattedra torinese, fosse considerato un indiscusso caposcuola. In questo periodo i rapporti tra i due giovani matematici non sono documentabili, se non attraverso i loro lavori. Certo i due percorsi, pur restando nettamente distinti, si intersecarono più volte. In questo breve saggio non esaminerò a fondo tali legami, mi limiterò a segnalarne alcuni particolarmente evidenti.

La Geometria Enumerativa

Nel periodo 1887–1891 Pieri cominciò a essere particolarmente attratto da problemi riguardanti la geometria enumerativa e in particolare dal principio di corrispondenza[2]. La geometria enumerativa è quella parte della geometria algebrica che si occupa di determinare il numero di soluzioni di determinati problemi, prescindendo, eventualmente, dalla loro effettiva determinazione. Prototipo di questa tipologia di problemi è il cosiddetto *teorema di Bezout* (in realtà dimostrato soltanto in tempi recenti) che afferma che il numero di punti in comune tra due curve di ordine rispettivamente *m* ed *n* è esattamente *m*x*n*. Naturalmente affermazioni del genere richiedono un'accurata definizione del concetto di *quanti*. Per esempio è subito evidente nel teorema di Bezout che le soluzioni del problema vanno considerate con la loro molteplicità (tutta da definire nei casi più complessi) e contando anche le soluzioni immaginarie. Inoltre, per trattare problemi particolarmente complessi dal punto di vista combinatorio, erano stati introdotti vari principi (quello appunto di corrispondenza, quello di

[2] M. Pieri, *Sul principio di corrispondenza in uno spazio lineare qualunque ad n dimensioni*, in «Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei», (4) 3, 1887, p. 196-199; *Sopra un teorema di geometria ad n dimensioni*, in «Giornale di Matematica», 26, 1888, p. 251-254; *Formule di coincidenza per le serie algebriche di coppie di punti dello spazio ad n dimensioni*, in «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», 5, 1891, p. 252-268.

conservazione del numero, ecc.) la cui effettiva validità generale doveva essere ancora dimostrata. Insomma si trattava di problemi nei quali le abilità algoritmiche si intrecciavano strettamente con delicate questioni di rigore che caratterizzeranno ancora la storia della geometria algebrica nel secolo successivo.

Segre aveva cominciato a occuparsi di geometria enumerativa in modo indiretto sin dai suoi primi lavori, ma entrerà più a fondo nell'argomento successivamente. Possiamo fare iniziare questo periodo con il 1889 e con la pubblicazione di un lavoro di Segre[3]. Mi soffermerò un attimo sulle circostanze dell'apparizione di questo lavoro, perché chiariscono molto sull'atmosfera che si respirava nell'ambiente matematico torinese in quel momento.

Il lavoro di Segre cita in modo diretto – si badi, in una rivista di alto prestigio internazionale – un lavoro (immediatamente precedente) di Castelnuovo[4], così dando pieno avallo ai metodi ivi usati. Scrive infatti Segre:

> La démonstration ingénieuse, que ce géomètre y donne de cette importante formule, pourrait laisser sur sa validité absolue des doutes, qui se réfléchiraient sur le n° présent et plus loin ... ; cependant les confirmations qu'on trouve de ces résultats me portent à penser qu'ils sont absolument vrais;

e difatti Castelnuovo aveva parlato di dover usare nell'interesse dell'avanzamento delle scienze, "teoremi non ancora dimostrati per risolvere problemi difficili". Fu tra gli altri elementi di profondo dissenso quest'affermazione di Segre a suscitare una violenta reazione da parte di Peano che nel suo articolo di commento[5] la cita per esteso commentando in modo duro l'abitudine alla mancanza di rigore, senza il quale "non si può fare avanzare nemmeno di un passo la scienza".

Possiamo indirettamente cogliere la posizione di Pieri leggendo il magnifico testo postumo[6] scritto per l'*Enzyklopädie* di Klein da Zeuthen in tedesco e tradotto in francese, con numerose aggiunte e note, da Pieri poco prima di morire[7]. A proposito dell'articolo di Castelnuovo si dice:

> Le problème des sécantes multiples d'un courbe gauche a été généralisé ensuite par G. Castelnuovo, auquel on doit la recherche du nombre des espaces linéaires (...).

[3] C. Segre, *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques (II partie Surfaces réglées algébriques)*, in «Mathematische Annalen», 36, 1889, p. 1-25.

[4] G. Castelnuovo, *Numero delle involuzioni razionali giacenti sopra una curva di dato genere*, in «Rendiconti R. Accad. Naz. Lincei», (4) 5, 1889, p. 130-133.

[5] G. Peano, 1891h, *Osservazioni del Direttore sull'articolo precedente*, «RdM», 1, p. 66-69.

[6] H. Zeuthen- (trad. fr.) M. Pieri, *Géométrie énumerative*, in *Encyclopedie des Sciences Mathématiques*, III.2, Paris, Gauthier-Villars, 1915, p. 260-331.

[7] Qui e nel seguito considererò il testo, anche quando scritto da Zeuthen senza correzioni di Pieri, come sufficientemente indicativo del pensiero del matematico lucchese. D'altra parte quando Pieri vuole correggere un punto di vista del matematico danese, lo fa, con grande garbo, ma con decisione.

> A cet effet il établit, lui aussi, en principe que le nombre cherché ne dépend que de l'ordre et du genre de la courbe. C'est donc d'une hypothèse analogue à celle qu'avait faite A. Cayley pour un espace à trois dimensions que découle sa détermination, fondée sur les résultats précédents, du nombre des groups spéciaux d'une courbe auxquels appartiennent des points donnés en nombre suffisant[8].

Come si vede la trattazione è prudente: quella di Castelnuovo è una "ipotesi" (oggi diremmo una congettura), non una proprietà dimostrata. Però sono assenti del tutto le obiezioni di principio di Peano. Il metodo, da trattare con prudenza, è considerato un buon strumento di indagine. In questa direzione Segre spinse alcuni suoi allievi a proseguire le ricerche: in particolare Alberto Tanturri che nel 1900 pubblicò il lavoro[9] in cui ha

> poursuivi les résérches de G. Castelnuovo relatives à des espaces à r dimensions, regarde la courbe considérée comme suffisamment définie par son ordre et son genre; ce qui a permis de la remplacer par un système de droites[10].

A questo punto è bene ricordare il dibattito che nell'ultimo decennio del secolo diciannovesimo si era sviluppato sul problema del rigore dei metodi utilizzati, in particolare sul principio di conservazione del numero di Schubert, che Segre nelle sue lezioni di geometria numerativa del 1899 – 1900 indicherà tra le molte "ricerche da fare" che egli indica ai suoi allievi e che poi, nello stesso 1900 Hilbert indicherà come 15° dei suoi 23 celebri problemi. Il campo della geometria numerativa era quindi un campo in cui gli interessi di Pieri e di Segre si intrecciano, ma in cui si intrecciano anche i metodi più dichiaratamente euristici e gli sforzi dei matematici di ricondurli a dimostrazioni rigorose.

Mi pare quindi interessante notare come già nel 1889, anno in cui Peano ha appena pubblicato i suoi risultati sui rapporti tra logica e matematica[11] e in cui presumibilmente Pieri comincia ad addentrarsi in questa tematica, egli si venga a trovare in una posizione intellettuale che lo rende capace di dialogare con entrambi i campi contendenti nell'ambiente matematico torinese, e ciò senza improbabili commistioni e confusioni, ma con una chiara divisione di ruoli: mentre il linguaggio e il rigore di Peano diverranno di lì a qualche anno il linguaggio necessario per porre in forma assiomatica e dimostrativa i principi base delle varie strutture geometriche utilizzate, un linguaggio e un metodo del tutto analoghi a quelli della scuola di Segre saranno utilizzati nell'affrontare problemi per i quali una sistemazione rigidamente assiomatica era ancora di là

[8] Zeuthen-Pieri 1915 cit., p. 277.
[9] A. Tanturri, *Ricerche sugli spazi plurisecanti di una curva algebrica*, in «Annali di Matematica pura ed applicata», (3) 4, 1900, p. 67-121.
[10] Zeuthen-Pieri 1915 cit. p. 277.
[11] G. Peano 1888a, *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*, Torino, Bocca, 1888.

da venire. Pieri sembra a suo agio in entrambi i modi di porsi, ma non esistono due differenti personalità. Pieri è sempre capace di esaminare lucidamente i problemi che affronta, scegliendo per ciascuno di essi il linguaggio e il metodo che ritiene più appropriati. In questo senso, la scelta dell'Unione Matematica Italiana di pubblicare le sue *Opere sui fondamenti di matematica*, scorporandole da quelle di geometria algebrica, non mi è sembrata una scelta felice.

Pieri dedicherà alla geometria numerativa molti lavori di alto pregio, cogliendone appieno lo spirito fondamentalmente algebrico – combinatorico. I risultati più famosi, le cosiddette *formule di Pieri* sono contenuti in tre lavori[12]. Anche senza entrare nel merito tecnico di questi lavori, vale la pena osservare che essi seguono il cosiddetto calcolo simbolico di Schubert. In tale calcolo le varie condizioni (ad esempio che una retta passi per un punto o altre più complesse) sono espresse mediante simboli e si opera su di essi mediante prodotto logico e somma logica (and e or). Le straordinarie manipolazioni di questi simboli, con l'aiuto del principio di conservazione del numero portarono Schubert a calcolare numeri in situazioni di straordinaria complessità (ad esempio Schubert calcola che vi sono 5.819.539.783.680 cubiche sghembe tangenti a 12 quadriche nello spazio tridimensionale). Pieri lavorò su uno dei problemi centrali del calcolo simbolico, la trasformazione di prodotti in somme in spazi a più dimensioni e le sue formule rappresentano un notevole contributo in questa direzione. Anche in questo campo il lavoro di Pieri si intersecò in modo significativo con quello di allievi diretti di Segre, in particolare con Giovanni Giambelli, le cui formule rappresentano uno sviluppo diretto di quelle del matematico toscano. Ricordo che Giambelli aveva seguito il corso di Segre del 1899 – 1900 che al calcolo di Schubert aveva dedicato ampio spazio.

Ancora una volta le ricerche di Pieri nel campo della geometria algebrica si intersecano strettamente e non si contrappongono a quelle riguardanti i fondamenti. Possiamo facilmente immaginare Pieri, tra il 1889 e il 1894, fortemente impegnato nello studio del *Calcolo Geometrico* di Peano, con le sue aperture alla logica pura e con la sua introduzione di un simbolismo appropriato. La studio dei metodi di calcolo simbolico di Schubert, rappresentavano un'ulteriore prova del fatto che un linguaggio simbolico appropriato poteva gettare una luce potente anche su problemi di elevata complessità.

La prima indicazione concreta della collaborazione tra Segre e Pieri ci viene data nel 1887 in un lavoro[13] nel quale si ha, per inciso, anche il primo segno

[12] M. Pieri, *Sul problema degli spazi secanti, (Nota 1)*, in «Rend. R. Ist. Lombardo di Scienze e Lettere», 26, 1893, p. 534-546; *(Nota 2)*, ivi, 27, 1894, p. 258-273; *(Nota 3)*, 28, 1895, p. 441-454.

[13] C. Segre, *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario*, in «Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino», (2) 39, 1887, p. 3-48.

di un contatto scientifico con Guido Castelnuovo, destinato a divenire il più significativo allievo di Segre, e in cui sta scritto: “Al chiarissimo sig. Pieri pel gentile aiuto prestatomi nella pubblicazione di questo lavoro i miei vivissimi ringraziamenti”. Non so quale tipo di aiuto avesse prestato Pieri a Segre (che tra l’altro in quel periodo era stato sofferente), ma questa piccola nota ci permette di affermare che, quando nel 1889, venne pubblicata la traduzione della geometria di von Staudt da parte di Pieri con introduzione di Segre, i due giovani matematici torinesi erano in contatto scientifico ormai da qualche anno.

Il Programma di von Staudt sui Fondamenti della Geometria Proiettiva

Certo il 1889 rappresenta un anno assai significativo per la matematica torinese (e italiana). Oltre alla traduzione di von Staudt, si comincia a diffondere infatti anche il *Calcolo Geometrico*[14] di Peano che contiene una straordinaria serie di idee profondamente innovative: non solo un nuovo linguaggio matematico e un’indicazione di nuovi rapporti tra logica e matematica, ma anche, per esempio, la prima definizione assiomatica moderna di spazio vettoriale reale. Il 1889 è anche l’anno in cui la lettura dei citati lavori di Castelnuovo e di Segre spingono Peano verso una serrata polemica nei confronti di tutti quei metodi poco rigorosi che gli sembrano ostacolare lo sviluppo della matematica.

Come ho già detto nel 1889 venne pubblicata la traduzione della *Geometrie der Lage* (*Geometria di Posizione*) di Christian von Staudt da parte di Pieri, lavoro datato novembre 1888. Con questo lavoro il matematico lucchese affronta per la prima volta il problema dei fondamenti della geometria. La traduzione, oltre a contenere un’introduzione di Segre e una prefazione di Pieri, è da quest’ultimo annotata. Ed è proprio dalla lettura delle note che si può osservare l’esame critico cui il nostro sottopone il testo del matematico tedesco. Se infatti in questo testo l’impostazione è rigorosa, non così è l’esposizione. Tra i vari punti Pieri corregge e integra il testo di von Staudt, egli nota subito come manchi del tutto una netta divisione tra assiomi e teoremi e come l’andamento sia del tutto discorsivo e niente affatto formalizzato. Scrive infatti Pieri sin dall’inizio: “Molte delle proposizioni contenute in questo paragrafo e nei successivi paragrafi 2 e 3 sono date senza dimostrazione, perché veri postulati: su di essi è fondata tutta quanta l’opera”[15].

[14] Val la pena osservare che la “riscoperta” rispettivamente di Staudt e di Grassmann da parte della matematica italiana nel 1889 si inserisce nel solco della tradizione cremoniana. Cremona infatti era stato un pioniere in Europa della comprensione e della rivalutazione dei due matematici, pubblicando studi sulle loro opere rispettivamente già dal 1858 e dal 1860.
[15] C. von Staudt, *Geometria di Posizione*, *tradotto da M. Pieri*, Torino, Bocca.

Qualche mese più tardi, nello stesso 1889, Peano pubblicava anche i suoi *Principii di Geometria*[16] e si può notare il profondo divario esistente tra questo libro e la *Geometria di Posizione*. Il volumetto di Peano inizia esattamente con queste parole, che si possono mettere in relazione con le osservazioni di Pieri:

> Quali tra gli enti geometrici si possono definire e quali occorre assumere senza definizione? E tra le proprietà, sperimentalmente vere, di questi enti, quali bisogna assumere senza definizione, e quali si possono dedurre in conseguenza? L'analisi di queste questioni, appartenenti ad un tempo alla Logica ed alla Geometria, forma l'oggetto del presente scritto.

Dopo alcuni anni di attenta riflessione e di rielaborazione Pieri pubblicò il suo primo lavoro altamente significativo sui fondamenti della geometria[17]. Non mi pare dubbio che questo lavoro manifesti una piena adesione ai principi ispiratori e al linguaggio di Peano; ma va sottolineato che l'impostazione del nostro era molto diversa da quella del matematico piemontese. Scriverà infatti Pieri:

> Oggetto del presente studio è la proposta d'una nuova serie di Postulati per servir di base alla Geometria projettiva, quale oggi è intesa dai più; vale a dire come scienza deduttiva indipendente da ogni altro corpo di dottrine matematiche o fisiche (e in particolare dagli Assiomi od ipotesi della Geometria elementare).[18]

E più in là prosegue:

> Di molti ammaestramenti son debitore all'operetta "Principii di Geometria logicamente esposti" del Sig. Peano. Ma tra questo lavoro ben noto agli studiosi ed il presente non corrono altre analogie che di forma: poiché nel disegno dei "Principii di Geometria" non entra affatto il proposito che gli enti primitivi e gli Assiomi abbiano qualità invariantive per projezione e per dualità.[19]

Si possono mettere in relazione queste parole con quanto aveva scritto Segre nella sua Introduzione alla *Geometria di Posizione*:

> Trattare tutta la geometria di posizione da sé, senza introdurre concetti metrici che le sarebbero estranei, costituì un grande progresso, poiché se è vero che in varie scienze debbono prestarsi reciproci ajuti (...) non è men vero che risultati altrettanto importanti si son visti (...) quando (...) si è cercato di ridurre i postulati, i metodi e gli strumenti di ricerca la minor numero possibile.[20]

[16] G. Peano 1889d, *I Principii di Geometria logicamente esposti*, Torino, Bocca, 1889.
[17] M. Pieri, *Sui principii che reggono la geometria di posizione*, in «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», 30, 1894-95, p. 607-641, 31, 1895-96, p. 381-399; p. 457-470.
[18] Pieri 1894-95 cit., p. 607.
[19] *Ibidem*, p. 609.
[20] G.C. von Staudt, *Geometria di posizione di Giorgio Carlo Cristiano v. Staudt. Traduzione dal tedesco a cura del Dott. M. Pieri, ... preceduta da uno studio del Prof. C. Segre sulla vita e le opere del v. Staudt*, Torino, Bocca, 1889, p. XI.

Come si vede c'è una linea di continuità. Pieri rilegge Staudt servendosi del linguaggio e del metodo di Peano. In un certo senso possiamo dire che fa uso degli *ammaestramenti* di Peano per portare a buon fine un programma scientifico elaborato da Segre.

Per meglio comprendere questa affermazione è bene ricapitolare le linee guida di Segre e dei suoi allievi negli anni che vanno dal 1889 al 1894. Già nei corsi tenuti a Torino dal 1888 (e in particolare in quello, per altri versi memorabile[21], del 1890-91) Segre, trattando degli iperspazi, aveva sottolineato l'importanza della fondazione assiomatica diretta della geometria sintetica. Nello stesso 1891, nei suoi ammonimenti agli studenti[22] tanto criticati da Peano, aveva indicato un preciso indirizzo di ricerca:

> Non è ancora stato assegnato e discusso (che io sappia) un sistema di postulati indipendenti che serva a caratterizzare lo spazio lineare ad *n* dimensioni, sì che se ne possa dedurre la rappresentazione dei punti di questo con coordinate. Sarebbe conveniente che qualche giovane si occupasse di questa quistione (che non sembra difficile)[23].

Questo indirizzo di ricerche, nel pieno spirito staudtiano, diede immediatamente frutti copiosi. Mi riferisco alla pubblicazione di Amodeo[24] e soprattutto di Fano[25] ed Enriques[26] (quest'ultimo in uno spirito più indipendente dall'applicazione diretta delle indicazioni di Segre).

Vale la pena ricordare che Freudenthal, attribuisce grande importanza, in qualche modo anticipatrice, al lavoro di Fano. Egli scrive infatti:

> Se fosse andato tutto per il giusto verso, avrebbe dovuto essere un italiano a dar voce alle nuove idee poiché nessuno come in quella scuola vi si era maggiormente avvicinato ... In effetti fu anche un italiano. Solo dopo aver scritto questo saggio me ne accorsi, Fano c'era già arrivato nel 1892. Egli introduce la sua assiomatica con parole che ricordano quelle già citate di Hilbert[27].

[21] Sull'importanza di questo corso si può fare riferimento all'introduzione di Alberto Conte alla pubblicazione del corso di C. Segre, *Introduzione alla geometria sugli enti algebrici semplicemente infiniti*, nel CD-rom *I Quaderni di Corrado Segre*, a cura di L. Giacardi, Dip. Matematica Peano, Univ. Torino.

[22] C. Segre, *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche*, in «RdM», 1, 1891, p. 42-66.

[23] *Ibidem,* p. 60-61, Opere, vol. IV, Roma, Cremonese, 1963, p. 407.

[24] F. Amodeo, *Quali possono essere i postulati fondamentali della geometria proiettiva in uno* S_r, in «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», 26, 1891.

[25] G. Fano, *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni*, in «Giornale di matematica», 30, 1892, p. 106-132.

[26] F. Enriques, *Sui fondamenti della geometria proiettiva*, in «Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere», (2) 27, 1894, p. 550-567.

[27] H. Freudenthal, *Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie*, in «Nieuw Archief voor Wiskunde», (4) 5, 1957, p. 105-142, cit. p. 112: «Wenn alles mit rechten Dingen zugegangen wäre, hätte es ein Italiener sein müssen, der als erster dem neuen Gedanken das Wort verliehe, denn nirgendwo ist man ihm so nahe wie in den Arbeiten jener Schule. ... Es war auch ein Italiener.

In realtà, come vedremo più avanti, le parole di Fano:

> Una varietà [insieme] qualsiasi di enti di qualunque natura; enti che chiameremo, per brevità, *punti*, indipendentemente però, ben inteso, dalla loro stessa natura. ... Io preferisco addirittura *riservare ... il nome di postulati* [... a quelle proprietà che] ci daranno le *proprietà prime* degli enti o *punti* della nostra varietà; quelle proprietà che (opportunamente scelte) dovremo ammettere per *caratterizzare* gli enti stessi e poterne poi dedurre nuove proprietà di questi[28]

riecheggiano un punto di vista ormai affermatosi sia nella scuola di Segre (almeno dalla sua tesi del 1884) che in quella di Peano. Possiamo ben dire che si trattava di un atteggiamento mentale ben radicato almeno nell'ambiente torinese, a partire dagli anni '80.

Queste pubblicazioni, se pure, quanto a rigore nell'applicazione del metodo assiomatico, non tengono il passo con l'opera di Peano e Pieri, indicano un piano di lavoro ben preciso, indicato appunto da Segre e ben distinto da quello di Peano. "Trattare tutta la geometria di posizione da sé, senza introdurre concetti metrici che le sarebbero estranei", così aveva scritto Segre nell'Introduzione alla traduzione della *Geometrie der Lag*e, e così aveva indicato ai suoi allievi, estendendo lo stesso concetto (determinare per una teoria geometrica postulati indipendenti da quelli di altre teorie geometriche) alla geometria degli iperspazi. E quasi con le stesse parole, ma con più precisione Pieri chiarisce nettamente[29]:

> Si è tenuta per molto tempo la Geometria projettiva come un semplice prolungamento della Geometria elementare; e dai più si preferisce tuttora di stabilirne i principii come successive estensioni dei concetti che reggono la Geometria elementare, desunti dall'osservazione del mondo esterno e in tutto conformi alle idee, che si acquistano per induzione sperimentale da certe qualità di oggetti e fatti fisici. A questo modo la Geometria tutta quanta, serbando pure nei metodi quel carattere deduttivo che le appartiene dall'antichità più remota, si presenta come in aspetto di Fisica dell'estensione (...). Un altro e più moderno criterio (...) vuol che la Geometria di posizione (...) sia da considerar come scienza puramente deduttiva indipendente da ogni altro corpo di dottrine matematiche o fisiche e però anche dagli assiomi od ipotesi della Geometria elementare e da ogni sussidio di misure con unità mobili nello spazio, ecc. Quest'altra via, mostrata da G. C. von Staudt (...) conduce ormai pianamente ad una Geometria di posizione in tutto speculativa ed astratta i cui soggetti sono mere creazioni del nostro spirito.[30]

Erst nachdem ich diesen Aufsatz geschrieben hatte, merkte ich es, G. Fano war 1892 schon so weit. Er leitet seine Axiomatik mit Worten ein, die an die zitierten Hilbertschen erinnern.»

[28] FANO 1892 cit., p. 108-109.

[29] M. PIERI, *I principii della geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo*, in «Memorie R. Accademia delle Scienze di Torino», (2) 48, 1898, p. 1-62, cit. p. 1.

[30] *Ibidem*.

In questa lunga citazione la prima parte si riferisce all'impostazione programmatica di Peano, mentre la seconda a quella di Staudt, fatta propria e allargata da Segre e seguita in particolare da Fano, in cui, partendo dagli assiomi che si riferiscono puramente alla geometria proiettiva presa in sé, si arriva a dedurre "la rappresentazione dei punti projettivi mediante coordinate"[31]. Il legame con il linguaggio e i metodi di Peano, certo non meno forti, sono anch'essi delineati con precisione nel lavoro appena citato, che aggiunge a quanto già riportato:

> Al secondo indirizzo, speculativo e astratto, è da ascrivere il presente lavoro. Il quale si proporrebbe – con analisi più del solito minuta ed intrinseca, e per via di studi conformi alle cresciute esigenze speculative circa il rigore ed ai perfezionamenti recati al metodo deduttivo dalla Logica algebrica – di stabilir saldamente i cardini della Geometria projettiva[32].

Il programma di Staudt con l'ausilio potente degli strumenti logici dovuti a Peano, questo mi sembra l'indirizzo seguito da Pieri nei suoi primi lavori.

La Geometria degli Iperspazi

Gli stretti nessi tra il programma di Pieri e l'indirizzo dato da Segre sono ancora più evidenti nel secondo dei lavori che egli ha dedicato ai fondamenti della geometria, questa volta ai fondamenti della geometria iperspaziale[33]. In questo caso Pieri affronta proprio il programma che Segre aveva tracciato nei suoi ammonimenti e che avevano formato oggetto di studio già da parte di Amodeo, Fano ed Enriques, cui Pieri fa riferimento con il suo ben noto garbo ("lavori di molto pregio"), ma che, pur avendo fini comuni, sono da questo lontani per linguaggio e standards di rigore. Il quadro è quello indicato: partire da un sistema di assiomi per arrivare a rappresentare i punti dell'iperspazio come elementi di $\mathbf{R}^n$ (coordinatizzazione). In questo caso l'argomento scelto e la ribadita impostazione assiomatica astratta non potrebbero essere più lontane da quelle scelte da Peano che, ricordo, aveva da poco scritto:

> Ogni autore può assumere quelle leggi sperimentali che gli talentano, e può fare quelle ipotesi che più gli piacciono (…) Il rigore assoluto, se è condizione necessaria affinché un lavoro sia scientifico, non è ancora condizione sufficiente. Un'altra condizione sta nel1e ipotesi da cui si parte. Se u n autore parte da ipotesi 'contrarie all'esperienza, o da ipotesi non verificabili coll'esperienza , né esse, né le loro conseguenze, potrà, è

[31] M. Pieri, *Un sistema di postulati per la geometria projettiva degli iperspazii*, in «RdM», 6, 1896, p. 83-90, cit. p.9.
[32] Pieri 1898 cit., p. 2.
[33] Pieri, *Un sistema di postulati per la geometria projettiva degli iperspazii*, 1896 cit.

> vero, dedurre una qualche teoria meravigliosa, da far esclamare: quale vantaggio, se l'autore avesse applicato il suo ragionamento ad ipotesi pratiche![34]

Queste parole, dirette contro Segre e Veronese, suonano come sconfessione diretta anche del progetto di ricerca enunciato da Pieri nel suo lavoro (che comunque, ricordiamo, venne pubblicato nella rivista di Peano). Naturalmente Peano confermò più volte la sua stima e la sua ammirazione per il collega che aveva dimostrato a più riprese di essere colui che, tra i matematici italiani, meglio aveva assimilato la sua lezione e che con maggior maestria sapeva far uso del suo linguaggio; ma resta una divergenza di fondo sui temi su cui applicare questo linguaggio e sulla concezione stessa dell'assiomatica. Su questo piano Pieri si trova in più stretta risonanza con Segre e la sua scuola. D'altronde, sempre nello stesso lavoro[35], il matematico toscano ama prendere in qualche modo le distanze da Peano quando ribadisce:

> astratto, in quanto prescinde da ogni interpretazione fisica delle premesse, e quindi anche dalla loro evidenza ed intuitività geometrica: a differenza di un altro indirizzo (…) secondo il quale gli enti primitivi e gli assiomi vogliono esser desunti dall'osservazione diretta del mondo esterno, e identificati con le idee che si acquistano per via di induzione sperimentale da certi determinati oggetti e fatti fisici (Pasch, Peano, …)[36]

Come già detto, il lavoro di Pieri si può ben far rientrare nel programma di ricerca enunciato da Segre nel '91, al fianco soprattutto di quello di Fano. Però l'adozione del linguaggio logico matematico di Peano, lo caratterizzano in modo del tutto differente negli esiti. Se da un lato la trattazione di Pieri è un modello di rigore formale, Fano, esaminando l'indipendenza degli assiomi, è in grado di fornire una gran quantità di contro esempi che diverranno modelli di nuove geometrie (geometrie finite, piani di Fano, ecc.).

La Geometria Proiettiva Complessa

Ancora più stretti sembrano i legami tra alcuni lavori successivi di Pieri e alcune delle ricerche di Segre. Pieri mantiene il suo disegno relativo alla determinazione, per diverse geometrie, di un sistema assiomatico capace di derivare le proprietà relative, senza far ricorso a modelli esterni. Un esempio è la cosiddetta geometria della retta (che egli riferisce a Plücker, Klein, Segre e Sturm) che, come

[34] Peano 1891h, *Osservazioni del Direttore*, 1891 cit.
[35] Pieri, *Un sistema di postulati …*, 1896 cit., p. 2.
[36] Ci sarebbe qui da soffermarsi anche sul diverso ruolo dell'intuizione geometrica secondo Pieri e secondo altri geometri algebrici italiani, compreso, in parte, lo stesso Segre, ma questo esulerebbe dagli scopi di questo intervento. Qualche riferimento lo darò nelle conclusioni.

è noto, è la geometria dello spazio tridimensionale rigato, cioè costituito da rette piuttosto che da punti. In questo caso veniamo a determinare uno spazio a quattro dimensioni o, secondo il punto di vista di Klein, una varietà quadridimensionale immersa in uno spazio a cinque dimensioni. In ogni caso la descrizione dello spazio rigato presuppone quella dell'ordinario spazio di punti tridimensionale. Ciò che fa Pieri[37] è "di stabilire i principii di una geometria projettiva dei raggi, senza nulla accettar dal di fuori; tranne, s'intende, quel fondo di pura logica, ch'è necessario al discorso; e senza nulla presumere, insomma, di quel che appartiene ad altre dottrine analitiche o geometriche". Come si vede si tratta di una prosecuzione e di un allargamento del programma purista staudtiano, volto a determinare, per ogni geometria, un complesso di postulati astratti, atti a ricostruirla al di fuori dalla dipendenza da altre parti della stessa geometria (o dell'analisi).

Più direttamente coinvolto con le ricerche recenti di Segre fu il lavoro diretto a determinare la struttura assiomatica della geometria proiettiva complessa[38]. Anche in questo caso si trattava di sviluppare un'idea originaria di Staudt che, in particolare nei suoi *Beiträge zur Geometrie der Lage*, parzialmente tradotti da Pieri, aveva affrontato il problema di rendere autonoma dall'algebra anche la geometria proiettiva complessa. Il progetto di Staudt, considerato in generale troppo astratto e macchinoso, era stato ripreso proprio da Segre già prima di proporre la traduzione della *Geometrie der Lage*[39]. Segre aveva, oltre a rendere più snella la trattazione, introdotto il concetto di antiproiettività[40], dando all'argomento una veste del tutto analoga a quella ancora utilizzata oggi.

Il punto di vista di Pieri, che richiama ancora una volta il progetto di ricerca più volte indicato, è quello di determinare anche per la geometria proiettiva complessa un sistema di assiomi indipendenti dalla definizione algebrica di numero complesso e tale da poter ricavare da essi, in modo univoco, le proprietà del corpo delle coordinate (la più volte citata coordinatizzazione). Ciò viene fatto ponendo come concetti non definiti, a fianco del punto e del segmento (complessi) la *catena* (che nel caso della retta proiettiva complessa, cioè del piano di Möbius è la circonferenza o la retta) e sviluppando il tutto attraverso 30 assiomi che gli permettono, procedendo in modo analogo a quello usato per la coordi-

[37] M. Pieri, *Sui principii che reggono la geometria delle rette*, in «Atti R. Accademia Scienze Torino», 36, 1901, p. 335-350, cit. p. 335.

[38] M. Pieri, *Nuovi principii di geometria projettiva complessa*, in «Memorie R. Acc. Scienze Torino», (2) 55, 1905, p. 189-235.

[39] C. Segre, *Le coppie di elementi imaginari nella geometria proiettiva sintetica*, in «Memorie R. Acc. Scienze Torino», (2) 38, 1886, p. 3-24; *Un nuovo campo di ricerche geometriche,* in «Atti R. Acc. Scienze Torino», 25, 1890, p. 180-205; 290-317; 376-396; 26, p. 35-71.

[40] Sui lavori di Segre sull'argomento, sui quali non mi soffermerò, rinvio alla tesi di dottorato di C. Zappulla, *La Geometria proiettiva complessa. Origini e sviluppi da von Staudt a Segre e Cartan*, Palermo, Università, 2009, reperibile all'indirizzo: http://math.unipa.it/~grim/Thesis_PhD_Zappulla_9.pdf.

natizzazione della geometria proiettiva reale, di definire il concetto di quaterna armonica, da questa quella di *ortogonalità* tra catene e quindi, nel paragrafo finale, di procedere a definire il birapporto tra quattro punti e quindi a porre in corrispondenza biunivoca i punti di una catena con i numeri reali e, attraverso la scelta arbitraria di una di esse come asse reale e di quella ortogonale come asse immaginario, pervenire infine alla definizione della coordinata complessa di un punto generico. Le proiettività saranno inoltre quelle trasformazioni che portano catene in catene (come le proiettività reali sono le collineazioni).

In questo interessante e arduo percorso, Pieri tiene continuamente presente i lavori di Segre e in particolare di quello del 1890[41] che viene citato a proposito di almeno una dozzina di diversi punti nel corso della trattazione. In sostanza Pieri segue passo passo, ma capovolgendolo, il testo di Segre. Il primo aveva iniziato dalla struttura $\mathbf{C}^n$ per ricavarne le diverse proprietà (tra cui l'idea di catena, quella di birapporto e di antiproiettività); Pieri invece parte dai concetti non definiti suddetti e da alcune proprietà prese come assiomi per ricavare la corrispondenza biunivoca con $\mathbf{C}^n$ e quindi la coordinatizzazione.

Si tratta a mio avviso di un lavoro magistrale nel quale vengono superate difficoltà non indifferenti e che deve essere stata il frutto di una lunga meditazione, probabilmente iniziata già durante la lettura e la traduzione dei *Beiträge* di Staudt, ma certo illuminata dalla pubblicazione del brillante lavoro di Segre. Va inoltre notato che Pieri in questo lavoro non fa uso del linguaggio logico di Peano, ma come ha più volte notato, egli pensava i lavori in tale linguaggio, per poi tradurli nel linguaggio ordinario per ottenere una maggiore intelligibilità da parte dei lettori non adusi ad esso.

Una notazione che mi pare ora opportuna. La titolazione del lavoro di Segre (*Un nuovo campo di ricerche geometriche*) e il fatto che per tutta la vita il matematico piemontese ritornerà su argomenti analoghi mostrano, a mio avviso, che egli molto si aspettava da questo suo lavoro, che invece venne accolto senza interesse da quasi tutti i suoi allievi (peraltro impegnati in un vasto programma di ricerca sulla classificazione delle superfici e delle varietà). Pieri appare pertanto l'unico a trarre spunto dal lavoro di Segre e a svilupparlo in modo originale[42]. Solo parecchi anni dopo, negli anni '20, gli studi di Segre saranno ripresi da William Coolidge e soprattutto da Èlie Cartan che ne rivelerà fino in fondo la potenziale efficacia per l'algebra e l'analisi complessa.

[41] SEGRE, *Un nuovo campo...*, 1890 cit.

[42] Peraltro, anche il lavoro di Pieri non mi sembra abbia ottenuto da parte di matematici e di storici l'attenzione che merita. Invece a mio avviso, oltre a suscitare l'ammirazione per l'abilità del suo autore, esso indica un progetto di ricerca sui fondamenti della geometria assai proficuo, che purtroppo i matematici italiani, pur essendone stati dei veri pionieri, non svilupperanno a fondo e riprenderanno dagli studi tedeschi e americani solo cinquanta anni dopo soprattutto attraverso i contributi di Beniamino Segre, di Lucio Lombardo Radice, di Adriano Barlotti e di molti altri.

Segre proseguirà il suo indirizzo studiando varie geometrie su algebre diverse dai complessi, anche con divisori dello zero come quella dei numeri duali, ma i suoi lavori resteranno sepolti da un profondo oblio e non ci sarà più un Pieri (che nel frattempo era deceduto) a svelarne le profonde implicazioni per uno sviluppo dell'assiomatica.

Come ultimo vorrei segnalare un lavoro, a questo strettamente collegato, sulla geometria delle inversioni[43], l'ultimo lavoro pubblicato da Pieri prima della sua morte prematura. Anche se privo di riferimenti all'opera di Segre, esso costituisce un po' il culmine di un vasto progetto di ricerca: "A questo nuovo criterio è dedicato il presente Saggio, che si propone infatti di stabilire su nuove basi la Geometria dei cerchi, facendone un tutto indipendente così dalla Geometria elementare, come dalla Geometria di posizione e da qualsiasi altro presupposto analitico e geometrico". Sono quasi le stesse parole premesse al primo lavoro sui fondamenti a testimonianza di un percorso estremamente coerente secondo un programma che il tempo avrebbe dimostrato essere estremamente lungimirante, come opportunamente sottolineato, proprio con riferimento a questo lavoro, dai curatori delle sue *Opere sui Fondamenti della Matematica*.

Conclusioni

Ho fin qui cercato di mettere in luce i legami tra Pieri e la scuola di Segre, legami che mi sono parsi ben più profondi di quanto solitamente affermato. In particolare mi sembra che tali legami non riguardino soltanto la geometria numerativa, campo nel quale sono particolarmente evidenti le affinità di impostazione con Giambelli, ma anche i fondamenti della geometria, sui quali l'apporto di Segre è generalmente sottovalutato[44]. Un segno, postumo, della profondità di tali legami viene dato dallo stesso Pieri nel già citato *Geométrie Ènumerative*. A proposito di un punto che gli stava particolarmente a cuore, quello riguardante l'astrazione in matematica, Pieri scrive infatti:

> Dans la définition de C. Segre, la nature de l'élément générateur ou "point" demeure tout à fait indéterminée. On la fixe arbitrairement suivant le cas; de sorte qu'une même variété algébrique peut s'identifier tour à tour avec les figures le plus hétérogènes et même avec des entités géométriques autre que les figures ordinaires; et cela sans l'intermédiaire d'aucune représentation géométriques[45].

[43] M. Pieri, *Nuovi principii di geometria delle inversioni,* in «Giornale di matematica», 49, 1911, p. 49-96 (errata 50, 1912, 211); 50, 1911, p. 106-140.

[44] Su tale apporto rinvio a M. Avellone, A. Brigaglia, C. Zappulla, *The foundations of projective geometry in Italy from De Paolis to Pieri*, in «Archive for History of Exact Sciences», 56, 2002, p. 363-425.

[45] Zeuthen – Pieri, 1915 cit., p. 327.

In modo più esplicito Pieri aggiunge in nota:

"Cette façon d'envisager les variétés algébriques indépendamment de la nature particulière de leurs éléments, et la conception plus générale du "point" qui en résulte, est déjà mise en évidence dans les premiers travaux de C. Segre"[46].

Mi pare che sia questo un omaggio rilevante al ruolo avuto dal collega torinese nello sviluppo di quella concezione astratta della matematica a lui tanto cara. A mio avviso si tratta non tanto del primo, quanto dell'unico riconoscimento di questo ruolo dato a Segre dal mondo della matematica[47] (ivi compresi i suoi più stretti allievi); tale riconoscimento permette di inquadrare molto meglio dal punto di vista storiografico quanto affermato da Freudenthal circa il ruolo di Fano e riportato all'inizio di questo lavoro ("Fano c'era già arrivato nel 1892. Egli introduce la sua assiomatica con parole che ricordano quelle già citate di Hilbert") e di retrodatare quanto osservato a quasi dieci anni prima, alla tesi di laurea di Segre e alla straordinaria vivacità non soltanto di un singolo ricercatore, ma del giovane ambiente matematico torinese nel suo complesso.

Si può comunque valutare che una tale sottovalutazione sia anche dovuta all'atteggiamento dello stesso Segre, che pur avendo dato apporti importanti a tali studi, li ha sempre considerati in qualche modo secondari (come quando afferma che non sembrano difficili). Da questo punto di vista Pieri è molto più vicino alle posizioni destinate ad affermarsi in campo internazionale sui fondamenti della geometria.

Voglio infine ritornare su di un argomento che mi è caro: questa vicenda mostra che la tradizionale (soprattutto nella ricerca didattica) divisione che vede da una parte rigore, logica, assiomatica, astrattismo e formalismo e dall'altra intuizione, senso comune, empirismo sia un po' troppo schematica. Si può ben essere, come Pieri, un coerente esponente del complesso delle prime caratteristiche; ma anche, come Peano, a un tempo rigorosi, logici, formalisti ed empiristi; ovvero, come Segre, a un tempo astratti ed intuitivi. D'altra parte, come ha scritto Enriques con espressione felice, per i matematici e in particolare per i geometri algebrici italiani,

il concetto di geometria astratta ha ricevuto un grande sviluppo, divenendo (dopo Segre) un ordinario istrumento di lavoro nelle mani dei geometri italiani contemporanei. Infatti nulla è più fecondo che la moltiplicazione dei nostri poteri intuitivi recata da cotesto principio: pare quasi che agli occhi mortali, con cui ci è dato esaminare una figura sotto un certo rapporto, si aggiungano mille occhi spirituali per

[46] *Ibidem.*

[47] È stata la lettura di questo passo di Pieri a portarmi a riflettere sull'importante ruolo giocato da Segre nei fondamenti della geometria; in qualche modo questo lavoro è stato motivato da queste riflessioni.

> contemplarne tante diverse trasfigurazioni; mentre l'unità dell'oggetto splende alla ragione così arricchita, che ci fa passare con semplicità dall'una all'altra forma[48].

In questo senso l'intuizione di cui essi, e in particolare Segre, parlavano non ha niente a che fare con il senso comune e può essere costantemente affinata attraverso procedimenti via via più astratti e anche, come ha mostrato Pieri, attraverso l'uso di sofisticati strumenti logici.

[48] F. Enriques, *Per la storia della logica*, Zanichelli, Bologna, 1922, p. 139-140.

Mario Pieri e la Scuola di Giuseppe Peano[1]

ERIKA LUCIANO

Il riconoscimento del proprio legame con una Scuola è un elemento tipico della prosopografia e della retorica, anche in campo matematico[2], e d'altra parte la categoria stessa di Scuola è stata ripresa in esame negli ultimi anni, in relazione alle nozioni affini di rete, di tradizione e di stile[3]. Per quanto concerne l'*entourage* di Peano, la questione è stata di recente problematizzata[4], con una rivisitazione critica di due quadri ermeneutici andati cristallizzandosi nel tempo: quello che la presentava come un gruppo di studiosi tanto coeso al punto da essere indistinto, e quello che ne enfatizzava per contro la struttura gerarchica, dipingendone i membri come una pletora di spigolatori, il cui compito consisteva nel proseguire le ricerche nel solco del Maestro, arricchendole di corollari.

Le dichiarazioni di affiliazione di Pieri alla Scuola di Peano – sia dirette sia indirette – non mancano[5]: il mio obiettivo sarà allora quello di precisarne il

[1] Ricerca eseguita nell'ambito del progetto PRIN 2009 S*cuole matematiche e identità nazionale nell'età moderna e contemporanea*, unità di Torino.

[2] Cfr. P. Nabonnand, L. Rollet, *Définir, classer, compter: l'approche prosopographique en histoire des sciences, Colloque 26-27-28.11.2009*, Université Nancy 2, sito http://poincare.univ-nancy2.fr/Activites/?contentId = 6647.

[3] Cfr. P. Mancosu, *Mathematical Style*, Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2009 (http://plato.standford.edu), 23 p.; D. Rowe, *Mathematical Schools, Communities, and Networks*, in M.J. Nye (ed.), *Cambridge History of Science*, vol. 5, *Modern Physical and Mathematical Sciences*, Cambridge, UP, 2003, p. 113-132; *Making Mathematics in an Oral Culture: Göttingen in the Era of Klein and Hilbert*, in «Science in Context», 17, 2004, p. 85-129; L. Corry, *Introduction*, *ibidem*, p. 1-22.

[4] Cfr. E. Luciano, C.S. Roero, *La Scuola di Peano*, in C.S. Roero (a cura di), *Peano e la sua Scuola fra matematica, logica e interlingua*, Torino, Dep. Sub. Storia Patria, 2010, p. XI-XVIII.

[5] Cfr. U. Cassina, *Vita et Opera de Giuseppe Peano* …, in «Schola et Vita», 7, 1932, p. 124; G. Castelnuovo, *Necrologio di Mario Pieri*, in «Bollettino Mathesis», 5, 1913, p. 40; S. Rindi, *Notizie intorno al defunto socio corrispondente Mario Pieri*, in «Atti R. Accademia Lucchese di

senso, la portata e i contorni, individuando le dinamiche di costruzione, condivisione, trasmissione e diffusione del sapere matematico interne a questa *equipe*.

L'analisi mirerà in particolar modo a mostrare che Pieri si sentì effettivamente parte di questa Scuola, di cui non si limitò a condividere acriticamente gli assunti, coniando anzi una visione originale della cornice metodologica e pedagogica atta a giustificare l'utilizzo delle ricerche fondazionali nell'insegnamento.

Le riflessioni di Pieri su questi aspetti, assai meno note e studiate di quelle di G. Vailati e di A. Padoa, restarono tuttavia nell'alveo della dimensione teorica, motivo per cui spettò ad alcuni docenti di scuola media e secondaria il compito di tradurle nella prassi didattica.

Ecco allora che la mia indagine si soffermerà a individuare una rete interessante di collaborazioni fra il mondo della ricerca e quello degli insegnanti, con l'obiettivo di inficiare la tradizionale suddivisione degli esponenti della Scuola di Peano in due compagini: le 'grandi' figure, come Pieri appunto, e 'gli spigolatori' sopra citati, quali A. Pensa o C. Boccalatte.

La ricostruzione del percorso che portò Padoa e Pieri a elaborare un sistema minimo per la geometria euclidea permetterà infine di illustrare come le strategie di coordinamento della ricerca interne all'*equipe* torinese fossero assai fluide, intaccando così l'immagine, ampiamente avvalorata, di un Peano 'caposcuola' che detta in modo rigido ai suoi collaboratori le direttive sui temi da sviluppare e sull'approccio con cui farlo.

Prima di entrare *in medias res*, è opportuno riepilogare alcuni dati 'oggettivi' dei legami fra Pieri e la Scuola di Peano.

1. *Pieri e la Scuola di Peano*

Il periodo trascorso da Pieri a Torino, fra il 1886 e il 1900, costituisce un momento chiave della sua biografia. Sono gli anni in cui svolge importanti studi di geometria enumerativa, in cui consegue la libera docenza in Geometria proiettiva (1891) e in cui opera all'Università come assistente sulla cattedra di G. Bruno, tenendo corsi liberi di Geometria proiettiva (1891) e di Complementi di geometria (1891-1896)[6]. Nello stesso tempo egli insegna anche

Scienze Lettere ed Arti», 35, 1917, p. 445-446; U. Cassina, *Nel centenario della nascita del matematico lucchese Mario Pieri*, in «Atti Accademia Lucchese di Scienze Lettere ed Arti», (2) 9, 1961, p. 191-208; F. Tricomi, *Matematici italiani del primo secolo dello stato unitario*, in «Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino» , Cl. Scienze MFN, (4) 1, 1962, p. 86-87.

[6] Cfr. E.A. Marchisotto, J.T. Smith, *The Legacy of Mario Pieri in Geometry and Arithmetic*, Boston, Birkhäuser, 2007, p. 1-50; Luciano, Roero 2010 cit., p. 6-16, e il sito www.peano2008.unito.it.

all'Accademia Militare, dove è collega di Peano, R. Bettazzi, C. Burali-Forti e F. Castellano.

L'ambiente culturale del capoluogo piemontese, all'epoca, è quanto mai vivace: attirati dalla figura di C. Segre vi soggiornano, per perfezionarsi negli studi di geometria algebrica, F. Enriques, G. Castelnuovo, G. Chisholm e W. Young, mentre R. Baire raggiunge la capitale sabauda nel 1898, per lavorare con V. Volterra sulla teoria delle funzioni di variabile reale. Accanto a quelle di Segre e di Volterra, vi è la Scuola di Peano, impegnata a forgiare il linguaggio logico-ideografico e ad applicarlo alle indagini sui fondamenti. Sarà questo gruppo di studiosi a influenzare Pieri, attraverso i contatti con i colleghi di Accademia militare, orientando i suoi interessi verso la critica dei principi e il calcolo vettoriale.

Durante gli anni vissuti a Torino, Pieri è coinvolto nelle iniziative dedicate alla diffusione della logica e nelle imprese editoriali avviate dalla Scuola di Peano: la *Rivista* e il *Formulario di Matematica*. Secondo B. Levi e Peano, egli è infatti fra gli uditori del corso libero di Logica – il primo in Italia – tenuto da Burali-Forti nel 1894.[7] Impadronitosi del nuovo linguaggio simbolico, Pieri redige i primi lavori sui fondamenti della geometria di posizione e, a partire dal 1893, collabora alla *Rivista di Matematica*, su cui appaiono alcuni suoi articoli e recensioni di libri di testo di geometria[8]. Collaboratore alla seconda, alla terza e alla quarta edizione del *Formulario* – anche se in una posizione più defilata rispetto a quella di Burali-Forti, Padoa, Vacca o Vailati – Pieri vi apporta alcune integrazioni al capitolo di calcolo geometrico, e i suoi scritti sono citati nel trattato, fra le pubblicazioni che testimoniano al meglio le applicazioni della logica alla matematica[9].

[7] Cfr. B. Levi, *Mario Pieri*, in «Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche» (Loria), 12, 1913, p. 67 e G. Peano 1913f, *Mario Pieri*, in «ApI *Discussiones*», 4, 2, p. 32. Qui e nel seguito gli scritti di Peano sono citati con la sigla del dvd a cura di C.S. Roero, *L'Opera Omnia e i Marginalia di Giuseppe Peano (with English Version)*, Torino, Dipartimento di Matematica, 2008.

[8] Cfr. M. Pieri 1893h, *Dott. Giulio Lazzeri, Trattato di geometria analitica, Livorno, Giusti, 1893*, in «Rivista di Matematica» (in seguito «RdM»), 3, 1893, p. 115-117; 1894a, *Joh. Thomae in Jena, Die Kegelschnitte in rein projectiver Behandlung., Halle, L. Nebert*, *1894*, in «RdM», 4, 1894, p. 36-39; 1899b, *Giuseppe Ingrami, Elementi di Geometria per le scuole secondarie superiori, Bologna, Tip. Cenerelli, 1899*, in «RdM», 6, 1899, p. 178-182. Le sigle si riferiscono all'elenco delle pubblicazioni di Pieri in Luciano, Roero 2010 cit., p. 11-15. Queste recensioni sono state di notevole interesse ai fini della mia ricerca, dal momento che spesso Pieri ha inserito in esse le sue riflessioni di carattere didattico.

[9] G. Peano 1899b, *Formulaire de Mathématiques*, t. II, n. 3, Turin, Bocca, 1899, p. 4; 1903f, *Formulaire mathématique*, *édition de l'an 1902-03 (tome IV de l'édition complète)*, Turin, Bocca, p. 253, 264. Particolarmente significativo è il giudizio sulle memorie di Pieri concernenti la geometria euclidea, dato da Peano in 1908a, *Formulario Mathematico*, *Editio V (tomo V de Formulario completo)*, Torino, Bocca, 1908, p. XI: "M. Pieri, *Della Geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo*, Mem. Ac. Torino, a. 1898-99, t. 49, p. 173, reduce ideas non definito in Geometria ad duo: puncto et motu. Omni reductione facto ante e post scripto de prof. Pieri, contine numero excessivo de ideas non definito."

Grazie ai suoi contributi, fra i più brillanti ottenuti nella Scuola torinese, Pieri si conquista presto la stima di Peano, al punto che quest'ultimo interviene in Facoltà, nel 1900, per tentare di scongiurarne il trasferimento a Catania[10]. La partenza di Pieri per la Sicilia non interrompe comunque i contatti con 'i peaniani', documentabili grazie ai carteggi diagonali di T. Boggio, Burali-Forti, Padoa, G. Pagliero, Peano, Vacca e Vailati[11]. La corrispondenza con Peano mostra ad esempio, da parte di quest'ultimo, la reiterata richiesta di estratti di Pieri, da inviare in Italia e all'estero[12]. Parimenti, Peano cerca di coordinare con lui la partecipazione a congressi prestigiosi, come quello internazionale di Filosofia a Ginevra, nell'estate del 1904[13], e cura la relazione sui lavori del collega, per il concorso al premio Lobatchewsky della *Société fisico-mathématique* dell'Università di Kazan[14].

Fra il 1905 e il 1907 il matematico lucchese è inoltre coinvolto a pieno titolo nella polemica su rigore ed intuizione che divampa sulla *Revue de Métaphysique et de Morale* e, in questo frangente, redige l'articolo *Sur la compatibilité des axiomes de l'arithmétique*[15]. Nei mesi seguenti discute a più riprese con gli amici torinesi i temi fondazionali all'ordine del giorno e, per esempio, le antinomie della teoria degli insiemi, il principio di induzione, la coerenza dei sistemi di postulati e le posizioni di J. Richard in merito al concetto di numero naturale[16].

Pieri non resta estraneo neppure alla propaganda interlinguista di Peano, divenendo socio dal 1912 dell'*Academia pro Interlingua*[17] e, ancora durante il periodo parmense, negli ultimi anni di vita, è tenuto al corrente delle novità riguardanti la Scuola di Peano. Dopo la morte di Vailati nel 1909, e con l'allontanamento di Vacca, il gruppo iniziale di collaboratori si sta però ormai sfaldando e la crisi diventerà via via più marcata dopo il 1910.

L'appartenenza di Pieri alla Scuola di Peano è documentata, oltre che da questi elementi che mostrano la condivisione di indirizzi di ricerca e di batta-

[10] Tale proposta non sarà accolta e Pieri lascerà Torino, cedendo il posto a E. Daniele e G. Scorza, due assistenti di C. Segre, nell'attesa dell'apertura di un concorso. Cfr. Luciano, Roero 2010 cit., p. 7.

[11] Cfr. G. Arrighi (a cura di), *Lettere a Mario Pieri*, in «Quaderni Pristem», 6, 1997, p. 14, 19-35, 86, 90-92, 123-124.

[12] G. Peano a M. Pieri, 28.1.1903, in Arrighi 1997 cit., p. 90: "Il Sig. Dr. Bertrand Russell, nostro collaboratore […] ti chiede, per mio mezzo, la tua *Geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo*, di cui vuole fare uso in un libro che sta pubblicando. Spero non avrai difficoltà a trovarne copia, altrimenti gli invierò la mia."

[13] G. Peano a M. Pieri, 2.9.1904, *ibidem*, p. 90.

[14] G. Peano 1904b, *Sur les principes de la Géométrie selon Mario Pieri*, *Rapport*, in «Société physique et mathématique de Kazan», 1904, p. 1-4.

[15] M. Pieri 1906d, *Sur la compatibilité des axiomes de l'arithmétique*, in «Revue de Métaphysique et de Morale» (in seguito «RMM»), 13, 1906, p. 196-207.

[16] Cfr. C. Burali-Forti a M. Pieri, 19.9.1908, in Arrighi 1997 cit., p. 19-20.

[17] Cfr. G. Peano a M. Pieri, 2.3.1910, *ibidem*, p. 91.

glie culturali, anche dal meccanismo di ringraziamenti e di citazioni incrociate ai lavori di quell'*equipe*[18], che lasciano intuire l'esistenza di un patrimonio di letture collettivo, nella cerchia di Peano[19].

Cultore riconosciuto della logica nell'indirizzo ideografico ma attento, più di altri, alle istanze metamatematiche e agli sviluppi che la disciplina stava conoscendo all'estero, Pieri è invitato da L. Berzolari a redigere il capitolo di *Logica* per l'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari*[20]. La scelta non è casuale: Pieri è infatti considerato l'esponente della Scuola torinese più aperto alle 'recenti deviazioni dal sistema del Peano', e dunque più adatto a dare un respiro internazionale alla trattazione, aprendola al necessario tentativo di confronto e di collegamento con i sistemi di Hilbert e di Russell.

Dopo il 1911, nella redazione di questo capitolo, Pieri viene sostituito da A. Padoa[21] che, in un'ottantina di pagine, fornisce un'esposizione delle ricerche logiche contraddistinta da alcuni elementi di novità[22]. Dal punto di vista dell'approccio, egli rinuncia del tutto a toccare 'questioni controverse' come le antinomie o l'assioma della scelta, anche a rischio di dar luogo a un completo distacco fra il suo saggio ed altri affini, inerenti per esempio la teoria degli aggregati o i fondamenti dell'aritmetica. Per contro, prendendo le distanze

[18] Così egli esprime la sua riconoscenza a Padoa nella memoria *Un sistema di postulati per la geometria projettiva astratta degli iperspazi*, in «RdM», 6, 1896, p. 4: "Questa proposizione, equivalente al prodotto logico di (VII) e (IX), teneva luogo dapprima (m. 1, §2) a questi postulati: la sua scomposizione in (VII) e (IX) mi fu poi suggerita dal sig. Dott. A. Padoa."

[19] La formazione di Pieri nel settore logico-matematico è solo in parte documentabile, essendosi consolidata grazie a una rete di relazioni in larga misura orali. La comunanza quotidiana di idee e di spunti e il confronto reciproco anche su dettagli minuti delle rispettive ricerche affiora però dalle note a piè di pagina dei lavori di Pieri, cfr. M. Pieri, *Opere sui fondamenti della matematica* (a cura dell'UMI), Bologna, Cremonese, 1980, p. 14, 15, 19, 22, 31, 32, 44, 45, 69, 84, 85, 86, 88, 103, 105, 107, 122, 126, 132, 144, 145, 158, 166, 184, 185, 187, 189, 190, 209, 229, 246, 248, 250, 251, 258, 260, 307, 375, 377, 384, 385, 386, 393, 395, 397, 409, 410, 423, 424, 428, 431, 433, 435, 438, 441, 449, 456, 457, 461, 558.

[20] L. Berzolari a M. Pieri, 29.5.1910, in Arrighi 1997 cit., p. 7-8. Sulla storia dell'*Enciclopedia* cfr. E. Luciano, *The* Enciclopedia delle Matematiche elementari *and the Contributions of Bolognese Mathematicians*, in S. Coen (ed.), *Mathematicians in Bologna 1861–1960*, Basel, Springer, 2012, p. 343-372.

[21] Per ricostruire i molteplici avvicendamenti nelle fila dei redattori dell'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari*, spesso non dettati da mere motivazioni biografiche o esterne, mi sono valsa della prima lista di collaboratori, pubblicata sul «Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche» (Loria), 13, 1911, p. 44-45. Da questa si deduce che, nel 1911, il capitolo *Logica matematica* era già stato affidato a Padoa, insieme a quello sui *Massimi e minimi in geometria*, mentre Pieri avrebbe dovuto redigere il saggio dedicato agli *Elementi di geometria proiettiva*. La rinuncia di Pieri alla curatela della voce *Logica* non è dunque imputabile al manifestarsi della malattia che lo avrebbe condotto a morte nel 1913.

[22] Rispetto ai suoi precedenti lavori, Padoa abolisce ad esempio la distinzione fra logica delle classi e delle proposizioni, e completa la riduzione dei concetti primitivi ai soli segni $=$, $\cap$ ed ε.

dall'unica trattazione didattica di questi temi allora esistente – quella offerta dal *Formulario* – Padoa si propone di dare un assetto autonomo alla logica, svincolandola dalla connotazione di semplice 'strumento' della matematica e fornendone una presentazione assiomatica.

Allo stato delle attuali fonti in nostro possesso non è possibile precisare se e quanto Pieri abbia interagito con Padoa nella redazione di questo testo. Alla luce di altri scritti del matematico lucchese di poco anteriori, e in particolare sulla scorta del discorso inaugurale tenuto a Catania nel 1906, appare però plausibile affermare che egli avrebbe approvato solo in parte il taglio scelto da Padoa. Dal punto di vista della contestualizzazione storica e filosofica delle ricerche di logica, Pieri possiede infatti una cultura più solida rispetto a quella del collega, nutrita dallo studio di un *parterre* di autori che spazia da C.S. Peirce a I. Kant, da E. Goblot a F. Enriques. Ciò lo porta a cogliere con maggiore perspicacia caratteristiche, pregi e limiti di indirizzi di studi, come quello hilbertiano o russelliano, la cui assenza nella *Logica* di Padoa suscitò, non a caso, le reazioni contrarie di non pochi matematici italiani[23].

2. *Fondamenti e insegnamento: il contesto*

Il *milieu* in cui Pieri matura le sue posizioni metodologiche è contraddistinto da due elementi: il dibattito su rigore ed intuizione e quello sull'utilizzo degli *Elementi* di Euclide come manuale scolastico.

Testimone della polemica sviluppatasi fra Segre e Peano nel 1891 sulla

[23] La voce *Logica* dell'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari* è valutata in modo discorde, sia all'interno che all'esterno della cerchia di collaboratori di Peano. Apprezzata da quest'ultimo come "una chiara ed esauriente esposizione storica e critica di quanto fu fatto finora" (Archivio dell'Accademia delle Scienze di Torino Cat. 3ª, *Adunanze di Classe e Verbali, Classe I, Mazzo 38, Verbali originali della Classe di Scienze Fisiche e Matematiche*, 1920–1933, 1.12.1929, p. 2), è invece recepita con perplessità da U. CASSINA (in «Bollettino di Matematica», 27, 1931, p. LV), che critica l'eccessivo peso dato all'analisi dei concetti primitivi, rispetto a quella delle proposizioni primitive, ritenendo quest'ultima una problematica di pertinenza della logica come scienza in sé, e non della logica quale introduzione alla matematica. F. ENRIQUES (in «Periodico di Matematiche», (4) 10, 1930, p. 40-41) denuncia inoltre fortemente la partigianeria di Padoa, reo di essersi 'chiuso in una Scuola particolare e quasi nel suo sistema attuale' e di aver rinunciato ad un confronto con gli indirizzi stranieri d'avanguardia. Si riscontra tuttavia un'ampia convergenza di opinioni sul fatto che l'inserimento di un capitolo di *Logica*, in un'*Enciclopedia* rivolta agli insegnanti, fosse stata un'occasione culturalmente rilevante e che fosse stato "… giusto che questo ramo di scienza, che la Scuola del Peano pone a fondamento di ogni altra e che ha fatto anche recentemente notevoli progressi, avesse trovato posto in una raccolta di matematiche elementari" (cfr. L. ONOFRI, in «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana», (1) 8, 1929, p. 276).

Rivista di Matematica[24] e consapevole delle riflessioni di Vailati e di F. Klein[25] sul ruolo dell'intuizione nei processi cognitivi, Pieri manterrà sempre una posizione salomonica al riguardo[26], rivolgendosi per esempio in questi termini a Klein, nell'aprile del 1897:

> Io, senz'esser fanatico dei simboli logico-matematici del prof. Peano, ho creduto per altro ben fatto di tenerne conto nei miei studi sui fondamenti della Geometria. […] Per rispondere ad una Sua domanda circa l'influenza che possono avere queste ricerche puramente deduttive sopra l'insegnamento elementare delle matematiche (dove l'intuizione deve avere una parte principalissima) Le dirò che, a mio parere, molti miglioramenti nel senso strettamente deduttivo, di cui sembrano capaci per es. la Logica e la Geometria elementare, gioverebbero forse a render queste dottrine di più facile intelligenza che non siano al presente: in quanto la maggiore *astrazione* sarebbe compensata dalla maggior *semplicità* dei concetti fondamentali. Così vediamo spesso i giovani maravigliati di trovar più facile l'Algebra dell'Aritmetica[27].

Il parere espresso da Klein in quell'occasione è *tranchant* e Pieri ne sarà influenzato:

> Invero questi modi puramente deduttivi di rappresentazione – sebbene io aderisca sempre all'intuizione e sia a questa legato con tutto il mio interesse – mi sembrano scientificamente molto importanti. Un'altra domanda è quale significato si vuole attribuire a questi nell'insegnamento ai principianti. Caratteristico in quest'ottica è il nuovo manuale elementare di Veronese. Devo dire che relativamente ad una pedagogia pratica, non posso essere d'accordo. Che nell'insegnamento si debba iniziare con l'intuizione (per salire poi gradualmente a vedute più astratte) è attualmente in Germania anche la concezione comune della cerchia degli insegnanti[28].

[24] Cfr. C. Segre, *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche. Osservazioni dirette ai miei studenti*, in «RdM», 1, 1891, p. 42-66; G. Peano 1891h, *Osservazioni del Direttore sull'articolo precedente*, in «RdM», 1, p. 66-69; C. Segre, *Una dichiarazione*, in «RdM», 1, 1891, p. 154-156, G. Peano 1891k, *Risposta*, in «RdM», 1, p. 156-159. La polemica fra Segre e Peano riguarda inizialmente il modo di concepire la ricerca scientifica, ma fin da subito essa cela un corrispettivo scontro fra differenti impostazioni didattiche. Ciò ben traspare dalle successive allusioni: cfr. ad esempio G. Peano 1910a, *Sui fondamenti dell'Analisi*, in «Bollettino della Mathesis», giugno 1910, p. 31-37 e C. Segre, [*Appunti relativi alle lezioni tenute per la Scuola di Magistero*], *Quaderno n. 40*, s.d., p. 23-26, in L. Giacardi (a cura di), *I quaderni di Corrado Segre*, Torino, Dipartimento di Matematica, cd-rom n. 1, 2001.

[25] Cfr. M. Pieri 1907a, *Uno sguardo al nuovo indirizzo logico-matematico delle scienze deduttive*, in «Annuario della R. Università di Catania», 1906-07, p. 23, 24, 27-28, 53-55.

[26] Cfr. Pieri 1907a cit., p. 21-82, in particolare p. 59-61. Particolarmente pacati appaiono anche i suoi interventi a proposito del rigore e dell'intuizione, in occasione del dibattito fra S. Catania e G. Castelnuovo, in cui era stato chiamato in causa, in quanto promotore della logica in Sicilia.

[27] Cfr. M. Pieri a F. Klein, 9.4.1897, in E. Luciano, C.S. Roero, *From Turin to Göttingen: dialogues and correspondence (1879-1923)*, in «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche», 32, 2012, lettera 73.

[28] F. Klein a M. Pieri, 31.3.1897, *ibidem*, lettera 72, trad. it. a cura dell'autrice.

Una costola italiana del dibattito su rigore ed intuizione riguarda, in particolare, l'uso degli *Elementi* di Euclide nell'istruzione secondaria[29]. Le discussioni su questo tema si protraggono fin dal 1867 e la Scuola di Peano vi prende parte attiva. Gli anni torinesi di Pieri sono infatti gli stessi in cui Peano esprime in simboli alcuni libri degli *Elementi*[30]. La traduzione delle 'verità' di Euclide è non solo propedeutica al loro inserimento nel *Formulario*, ma è anche volta a trasporre in linguaggio algebrico i contenuti dei libri VII-X, al fine di fornire una base adeguata alla redazione di manuali razionali di aritmetica e di algebra. Non si possono infine dimenticare i dibattiti interni alla Scuola di Peano sui pro e i contro del ricorso al V libro di Euclide, con gli interventi di Bettazzi, Burali-Forti e Vailati, in occasione del questionario della Commissione Reale per la riforma della Scuola media (1905). La *Rivista di Matematica* dà risalto a queste tematiche, ospitando fra l'altro una polemica fra G. Lazzeri e M. Gremigni, a proposito dell'edizione degli *Elementi* curata da quest'ultimo nel 1893[31].

Senza banalizzare eccessivamente le posizioni dei singoli, si può dire che Pieri, come la maggior parte della Scuola di Peano, si schieri a favore dell'utilizzo di Euclide, sia per quanto riguarda i libri geometrici, con l'eccezione della teoria delle proporzioni, sia per quelli aritmetici, purché illustrati in forma algebrica.

3. *L'analisi metodologica di Pieri*

Il settore dei fondamenti della geometria euclidea, cui Pieri dedica tre lavori nel 1899, 1900 e 1908[32], è particolarmente atto a far emergere la sinergia fra le ricerche d'indole scientifica e quelle di natura pedagogica condotte nell'*equipe* di Peano.

[29] Cfr. L. Giacardi, *L'insegnamento della matematica in Italia dall'Unità al Fascismo* in L. Giacardi (a cura di), *Da Casati a Gentile. Momenti di storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia*, La Spezia, Agorà, 2006, p. 1-14.

[30] Cfr. G. Peano 1890d, *Les propositions du cinquième livre d'Euclide, réduites en formules*, «Mathesis» (Gand), 10, 1890, p. 73-74; 1891d, *Sommario dei libri VII, VIII, IX di Euclide*, in «RdM», 1, 1891, p. 10-12; 1892c, *Sommario del libro X d'Euclide*, in «RdM», 2, 1892, p. 7-11; 1906c, *Sul libro V di Euclide*, in «Il Bollettino di Matematica», Maggio-Giugno 1906, p. 87-91.

[31] Cfr. G. Lazzeri, *Gli elementi di Euclide, Nuova edizione modificata ed accresciuta dal Dott. Michele Gremigni, Libro I, Firenze, Successori Le Monnier, 1893*, in «RdM», 2, 1892, p. 188-191; *Sulla seconda edizione degli Elementi di Euclide. Risposta al prof. Gremigni*, in «RdM», 3, 1893, p. 121-127; M. Gremigni, *A difesa della seconda edizione degli Elementi di Euclide. Altra risposta al prof. Lazzeri*, in «RdM», 4, 1894, p. 17-21.

[32] M. Pieri 1899a, *Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo. Monografia del punto e del moto*, in «Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino», (2) 49, 1898-99, p. 173-222; 1901a, *Sur la Géométrie envisagée comme un système purement logique*, Bibliothèque du Congrès International de Philosophie, vol. III, *Logique et histoire des sciences*, Paris, Colin, 1901, p. 367-404; 1908, *La geometria elementare istituita sulle nozioni di «punto» e «sfera»*, in «Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL)», (3) 15, 1908, p. 345-450.

La posizioni di Pieri – se si esclude il suo discorso inaugurale del 1906[33] – non sono oggetto di scritti organici, ma possono essere ricostruite sulla base di una serie di osservazioni minute quanto puntuali, spesso affidate alle note a piè di pagina e alle appendici dei suoi saggi[34]. Esse scaturiscono dall'attività di ricerca del matematico lucchese e si consolidano in rapporto ad una sua parentesi giovanile di insegnamento nelle Scuole tecniche di Livorno e di Pisa (1885-86). Più precisamente, a indirizzarlo verso gli studi fondazionali sono alcuni fattori concomitanti: i contatti con il gruppo di Peano, la traduzione della *Geometrie der Lage* e dei primi capitoli dei *Beiträge* di C. Von Staudt, e l'edizione delle lezioni di Geometria proiettiva per gli studenti dell'Accademia militare[35].

Gli assunti didattici di Pieri si basano su una precisa visione epistemologica che prende le mosse dall'*Essai sur la classification des sciences* di E. Goblot (Paris, Alcan, 1898) e da uno scritto del 1885 del filosofo F. Masci[36]. La convinzione che egli ne trae, e che ribadirà più volte nel corso degli anni, è la naturale evoluzione di tutte le scienze, e *in primis* della geometria, verso l'assetto di sistema ipotetico-deduttivo, da cui discende la corrispettiva evoluzione dell'insegnamento verso l'indirizzo razionale-astratto:

> Da gran tempo si disputa se la Geometria elementare debba aversi, o no, quale scienza ipotetica, e di sola ragione […]. A me par che sia sempre per esser come noi la facciamo: e che se per anco non è istituita in qualità di dottrina puramente deduttiva (di scienza, cioè, del possibile, anzi che del reale) potrà nondimeno ricevere prima o poi cotal forma; e che nulla in essa ripugni da cotesta evoluzione, alla quale anzi sembrano propriamente avviate le scienze che progrediscono; ma la Geometria si dee riconoscer più prossima di qualunque altra allo scopo. […] Una riforma della Geometria Elementare, con intento d'istituirla a mo' di scienza puramente deduttiva e senza troppo scostarsi dagli "Elementi d'Euclide" sembra oggimai per molti indizi effettivamente matura; e ci sarà forse [di] stimolo ad altre ricerche più minute ed intrinseche[37].

A queste letture, Pieri accosta una buona conoscenza delle analisi di F. Enriques[38] sul fondamento psicologico dei postulati, al punto che in apertura

[33] Pieri 1907a cit.

[34] Cfr. Pieri 1980 cit., p. 185, 245, 253, 290, 310, 398, 413, 442-443, 455-457, 557-560 e *Una lettera inedita a E. Maccaferri*, in «Bollettino di Matematica», (n. s.) 4, 1925, p. 49-50.

[35] Levi 1913 cit., p. 67.

[36] F. Masci, *Sulla natura logica delle conoscenze matematiche. Contribuzione alla teoria della conoscenza*, in «Filosofia delle Scuole Italiane», 32, 1885, p. 3-51, 115-150, 273-293.

[37] Pieri 1899a cit., p. 175.

[38] Agli scritti di Goblot, Masci ed Enriques, Pieri affianca pure l'esame dei saggi di G. Vailati, *Des difficultés qui s'opposent à une classification rationnelle des sciences*, Bibliothèque du Congrès International de Philosophie, vol. III, *Logique et histoire des sciences*, Paris, Colin, 1901, p. 603-632; E. Le Roy, *Science et Philosophie*, in «RMM», 7, 1899, p. 375-425, 562; 8, 1900, p. 37-72.

alla memoria del 1908 *La geometria elementare istituita sulle nozioni di "punto" e "sfera"* scrive significativamente, riferendosi agli studi di fisiologia di H. Spencer, G. Romanes, G.H. Lewes, W. Wundt e V. Henri:

> Tutto sommato, parrebbe che gli elementi costruttivi primordiali, che più spicciamente intervengono a formare lo spazio tattile-muscolare, non siano le nozioni della retta e del piano, ma sì della distanza e quindi dei cerchi e delle sfere[39].

Il passo è tratto dai *Problemi della scienza*[40] di Enriques ed è scelto a ragion veduta per dimostrare che la selezione delle nozioni comuni deve essere non solo la più appropriata dal punto di vista logico, ma anche da quello percettivo.

Per Enriques, come per Pieri, gli enunciati alla base della geometria correlano concetti primitivi cui non è associato alcun significato. In questo senso il *punto* e lo *spazio* non sono enti univocamente determinati *a priori*, anzi essi sono caratterizzati da condizioni formali liberamente imposte e si risolvono nella classe di tutte le interpretazioni che le soddisfano, soggette al solo vincolo della consistenza.[41] Conseguentemente, ritenere che i postulati della geometria non siano altro che forme rigorose e necessariamente euclidee del concetto intuitivo di spazio significa, per Pieri, rimanere legati ad una rappresentazione schematica e soggettiva, comportandosi in modo analogo a chi, rimanendo ancorato alla rappresentazione del numero come moneta, scambiasse l'aritmetica con la contabilità[42].

Nonostante queste convinzioni di fondo, Pieri colloca tuttavia parte del proprio lavoro, e soprattutto le relative ricadute didattiche, in una prospet-

[39] Pieri 1908 cit., p. 345. Anche in altre occasioni (per esempio in 1907a cit., p. 28-30) Pieri fa riferimento esplicito al programma di una gnoseologia positiva elaborato da Enriques e volto a chiarire il processo di acquisizione e costruzione della conoscenza, a partire dall'esame dei concetti più generali della geometria e della meccanica.

[40] F. Enriques, *Problemi della scienza*, Bologna, Zanichelli, 1906. Cfr. anche F. Enriques, *Sulla spiegazione psicologica dei postulati della Geometria*, in «Rivista filosofica», 3, 4, 1901, p. 171-195.

[41] Lo spazio, dunque, non è un oggetto reale esterno assolutamente dato, come vorrebbe la posizione empirista, ma è un insieme di relazioni denotanti rapporti tra i corpi, il cui elemento formale è offerto dalle operazioni della struttura mentale. In Pieri 1907a cit., p. 27 si afferma: "In sostanza il Peirce, con la più parte dei filosofi, concepiva la Geometria, per es., come un ramo di matematica applicata; a un dipresso come una fisica matematica dell'estensione, dove i concetti fondamentali non fosser capaci di un contenuto diverso da quello che ci viene dall'ordinaria intuizione spaziale. […] Per certo nessuno vorrà negare l'importanza euristica, e molto meno il valore didattico, di codesta interpretazione concreta degli enti geometrici: ma sostenere (come fa p. es. il Kant) che i postulati della Geometria non siano altro che forme rigorose del concetto intuitivo di spazio; né che spetti loro altro ufficio, tranne quello di imprimere, con suggello razionale, un certo carattere di stabilità nei fatti dell'intuizione spaziale, sarà forse un attribuire importanza soverchia a una speciale rappresentazione objettiva, facendone quasi una condizione *sine qua non* per l'esistenza stessa della Geometria."

[42] Cfr. Pieri 1907a cit., p. 28.

tiva diversa, sottolineando che, pur essendo la geometria un sistema ipotetico-deduttivo, bisogna però tener conto dei suoi legami con il modo esterno, motivo per cui i suoi postulati possono e devono trovare un'immagine esatta e conforme nei fenomeni ai quali si applica il sistema.

La riflessione di natura teorica si coniuga in Pieri a una chiara visione del problema dell'insegnamento "ch'è oramai nel pensiero di tutti", ossia a una lucida disamina dei difetti della presentazione scolastica della geometria, condivisa con Peano, Padoa e Burali-Forti:

> Les conséquences n'y découlent pas toujours des prémisses par la Logique pure: les arguments d'*évidence* (ou, comme on dit à présent, d'*intuition*) se dissimulent derrière les syllogismes les mieux ajustés, ou même sont invoqués ouvertement. Les notions primitives y sont plus nombreuses qu'il n'est besoin; etc.[43].

La soluzione a questi problemi deve essere ravvisata nell'opportunità di riversare nel campo dell'istruzione e nella manualistica le ricerche sui fondamenti che, anzi, giustificano il loro interesse e la loro utilità proprio in virtù di questo risvolto 'pratico'. Non stupisce quindi che la connotazione didattica sia spesso sottolineata da Pieri nei suoi lavori:

> l'a[utore] si lusinga di ravvisare in tutto l'insieme un andamento più facile, ed un maggior grado di semplicità reale in confronto dei precedenti sistemi; da farne insino sperare una qualche riforma degli Elementi di Geometria per le scuole, secondo i principi qui esposti, od altri poco dissimili[44]

e che essa sia espressamente richiamata dai primi colleghi che ne commentarono gli scritti. Peano ad esempio afferma, nel necrologio del collega:

> Post analysi de principios de Geometria superiore, nostro auctore incipe analysi multo superiore de principios de Geometria elementare. Geometria elementare es objecto de studio ab ultra 23 seculo; ergo es plus difficile de inveni novitates. Et omni perfectionamento habe interesse practico fundamentale, nam in omni schola discipulos stude Geometria elementare. Illos [studios] es puro theorico, sed in idem tempore, de magno utilitate pro didactica in scholas inferiore, ut juvenes disce geometria elementare[45].

[43] Pieri 1901a cit., p. 377.

[44] Pieri 1899a cit., p. 175. In Pieri 1908 cit., p. 6-7 si ribadisce: "Il nuovo Saggio, che or si espone al giudizio del pubblico, palesa intenti speculativi e critici. […] Non ha vesti o pretese didattiche; ma neppur vorrebbe apparire così remoto dalla Scuola, né di sì ardua o preziosa fattura, da non potersene avvantaggiare anche i giovani poco più che iniziati allo studio delle Matematiche." Analogamente, nel lavoro dedicato ai fondamenti dell'Aritmetica si legge (M. Pieri 1907b, *Sopra gli assiomi aritmetici*, in «Bollettino dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania», (2) 2, 1908, p. 30): "I fatti allegati a questa dimostrazione (§4) son tutte cose fondamentali, di cui l'Aritmetica non può passarsi in niun modo: onde sarà manifesto, che il nuovo sistema di pstl. I), … IV) non implica, rispetto a quelli già noti, alcuna maggiore difficoltà deduttiva o didattica".

[45] Peano 1913f cit., p. 32-34.

Dal canto loro, C. Segre ed E. D'Ovidio, nella relazione ad un corposo saggio di Pieri sulla geometria elementare, redatta per la sua accettazione nelle *Memorie* dell'Accademia delle Scienze di Torino, concludono:

> In ogni modo è certo che dal punto di vista puramente logico il sistema del Pieri è pienamente soddisfacente, e contiene, come abbiamo già rilevato, un risultato di particolare importanza nella riduzione fatta delle nozioni primitive. Dal punto di vista didattico poi possiamo dire che, se anche non si vorrà adottare in tutti i particolari l'attuale trattazione, pure molta parte di quanto in essa si contiene potrà essere utilizzata con vantaggio[46].

Ammesso che sia opportuno valersi, nell'insegnamento, delle indagini sui fondamenti, occorre domandarsi in che misura e in che modo Pieri intendesse adattare questi studi fatti 'con puro spirito scientifico'. Ecco allora che acquisiscono maggior peso le sue riflessioni sul problema dei criteri di scelta degli enti e delle proposizioni primitive, sulla loro indipendenza, sulla preoccupazione di evitare ammissioni sottointese, sull'importanza dell'aderenza alla realtà fisica o psicologica, in opposizione allo scheletrico formalismo dell'impalcatura logico-deduttiva, e sulla "diversa cura nello schematizzare il linguaggio fra gli opposti poli dell'espressione corrente e del simbolismo logico-matematico"[47].

L'ideale di Pieri è quello di un insegnamento che presenti la geometria euclidea come un sistema speculativo astratto, una dottrina o una scienza 'di tutto ciò che è figurabile ovvero rappresentabile', svincolata da qualsiasi interpretazione empirica[48]. Una mente educata alle idee generali e sorretta da una discreta facoltà di astrazione – argomenta il matematico lucchese – diventa infatti capace di percepire sia il senso, sia il nesso delle varie proposizioni e le loro 'veci deduttive', cioè la loro concatenazione e i rapporti reciproci, facendo appello solo alle proprietà che gli assiomi conferiscono alle nozioni primitive e richiamandosi unicamente alle definizioni dei singoli oggetti. Scopo dell'in-

[46] C. Segre, E. D'Ovidio, *Relazione sulla Memoria del prof. M. Pieri intitolata: Della geometria elementare come sistema ipotetico-deduttivo*, in «Atti R. Accademia delle Scienze di Torino», 34, 1898-99, p. 760-762. Cfr. anche G. Peano, E. D'Ovidio, C. Segre 1897d, *Relazione sulla memoria "I principii della geometria di posizione composti in sistema logico-deduttivo" del prof. Mario Pieri*, in «Atti R. Accademia delle Scienze di Torino», 33, 1897-98, p. 148-150; G.Z. Giambelli, *Mario Pieri*, in «Bollettino di Matematica», 12, 1913, p. 291-293 e G. Marletta, *M. Pieri, La geometria elementare istituita sulle nozioni di punto e sfera …*, in «Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche» (Loria), 12, 1910, p. 6-13.

[47] L. Brusotti, *Questioni didattiche* in L. Berzolari, D. Gigli, G. Vivanti (a cura di), *Enciclopedia delle Matematiche Elementari*, 3_2, Milano, Hoepli, 1949, p. 924.

[48] Tale interpretazione fisica era invece ritenuta imprescindibile dai matematici di orientamento positivista. Cfr. ad esempio G. Peano 1894c, *Sui fondamenti della Geometria*, in «RdM», 4, p. 52, 54-55; C. Segre, *Vedute superiori sulla Geometria elementare*, *Quaderno* 29, 1916-17, p. 7-27 e [*Appunti relativi alle lezioni tenute per la Scuola di Magistero*], *Quaderno n. 40*, p. 1-7, 14-22, in Giacardi 2001 cit.

segnamento geometrico diventa dunque quello di sviluppare e promuovere la "pratica del ragionare con esattezza, vale a dire la cognizione sicura dei rapporti logici di principio e conseguenza: insomma l'arte o la facoltà di rettamente argomentare e concludere"[49]. D'altra parte un approccio assiomatico costituisce l'unica via percorribile per colmare il divario fra l'educazione elementare, media e secondaria, che è e deve essere necessariamente intuitiva, e quella universitaria, che invece non può che essere formale e ipotetico-deduttiva[50].

Appare quindi indispensabile introdurre gli oggetti geometrici (punti, rette, figure e così via) come pure creazioni dello spirito e i postulati come semplici atti della nostra volontà ovvero "scelte dello spirito o verità di definizione"[51], arbitrarie nella misura in cui il loro ordinamento è determinato dal fine deduttivo che ci si propone[52]. Una peculiare sensibilità per le problematiche dell'apprendimento porta tuttavia Pieri a ritenere che non si possa ragionevolmente prescindere, nella scuola, dal presentare la geometria elementare anche nella veste di una 'fisica matematica dell'estensione': una veste che la storia, la tradizione didattica e il frutto delle ricerche cognitive sembrano necessariamente conferirle[53].

Un ulteriore tema di riflessione è costituito dai simboli della logica e, in quest'ambito, appare quanto mai chiaro il retaggio della personale esperienza di Pieri, quale matematico professionista e docente scrupoloso. Fin dalle memorie del 1894 egli sottolinea infatti di essere ricorso alla logica per 'pensare' e scrivere le singole proposizioni, ravvisando in essa un valido strumento di analisi:

> non soltanto per l'efficacia dei simboli in sé, quanto ancora in virtù degli abiti intellettuali, che i metodi e le dottrine di questa scienza si manifestan capaci di educare e promuovere, ed anche per certa loro facoltà suggestiva, che guida spesso ad osservazioni e ricerche non curate altrimenti[54].

[49] Pieri 1908 cit., p. 107.

[50] Cfr. *ibidem*, p. 7: "Certo è che l'insegnamento della Geometria Elementare, quale oggi s'imparte nelle nostre scuole medie, è troppo impari al bisogno di chi più tardi abbia a fare di quelle scienze il suo studio principale: onde più volte da valorosi e provetti docenti mi avvenne di udire espresso il desiderio, che i loro giovani scolari trovasser poi modo di approfondirne o rifarne il trattato, con mezzi più idonei e più rigorosi, nelle scuole universitarie."

[51] Pieri 1901a cit., p. 373.

[52] A questa conclusione giungono negli stessi mesi, in termini analoghi, anche Vailati, Vacca e F. Brentano.

[53] Cfr. Pieri 1901a cit., p. 377: "[…] étant données les qualités de l'esprit des adolescents, les exigences de l'école et les bonnes règles didactiques, etc. il ne sera jamais permis dans ce domaine de faire un trop grand usage des abstractions, ni de détourner l'esprit des jeunes gens des phénomènes de l'étendue; de sorte que, dans les écoles, la Géométrie élémentaire ne pourra peut-être jamais quitter le caractère d'une Physique de l'étendue qu'elle possède depuis l'antiquité la plus reculée".

[54] Pieri 1899a cit., p. 177.

A partire dal 1897, tuttavia, egli rinuncia al simbolismo in tutti i suoi articoli, sia specialistici sia divulgativi, giustificando tale scelta in virtù della "considerazione dei molti, a cui [esso] non è familiare"[55]. Ad orientarlo verso un uso dei segni esclusivamente confinato all'attività privata di ricerca potrebbe aver contribuito sia il rifiuto di Klein a pubblicare sui *Mathematische Annalen* un compendio dei suoi scritti fondazionali redatto in linguaggio ideografico,[56] sia una polemica con F. Amodeo sul *Periodico di Matematica*. Il dibattito fra i due era nato da alcuni rilievi mossi dal matematico napoletano al sistema di postulati per la geometria proiettiva elaborato da Pieri, ma si era ben presto spostato sui vantaggi dell'ideografia[57].

Un atteggiamento di cautela è parallelamente tenuto da quest'ultimo riguardo all'uso dell'algoritmo logico a livello di educazione pre-universitaria. Recensendo il manuale di *Aritmetica generale ed Algebra elementare* di Peano (1902), tutto redatto in simboli, Pieri non esita infatti ad osservare:

> Non c'è troppo da illudersi sull'accoglienza, che una riforma di questo genere è per trovare in buona parte del pubblico [...] . Ma nondimeno è lecito sperare che la bontà del presente trattato vincerà molte ritrosie, spegnerà molti pregiudizi, e farà nascere in qualche volenteroso docente il proposito di sperimentalo per sé e per la Scuola[58].

Preferibile gli appare la via tentata da S. Catania, già suo studente all'Università di Catania e poi insegnante di scuola secondaria, che proprio da lui aveva ereditato il gusto per il linguaggio ideografico[59]. Nella sua *Aritmetica razionale* Catania si era proposto, con il consenso di Peano, di estrarre dal *Formulario di Matematica* le parti meno elevate dell'aritmetica, riproducendole fedelmente in scrittura ordinaria. Si trattava, in sostanza, dello stesso tipo di 'ri-traduzione' che Pieri aveva condotto dal 1897, all'atto di trasformare i suoi

[55] *Ibidem*, p. 177.

[56] F. Klein a M. Pieri, 31.3.1897, in Luciano, Roero 2012 cit., lettera 72.

[57] Cfr. F. Amodeo, *A proposito dei postulati della Geometria projettiva*, in «Giornale di Matematiche» (Battaglini), 34, 1897, p. 101-103 e M. Pieri 1897d, *Intermezzo*, in «Periodico di Matematica», (3) 12, 1897, p. 152: "A chi mi chiedesse, onde nascono gli equivoci del sig. Amodeo in questa parte, direi senza punto esitare: da poca avvertenza a certe particolarità di un'ipotesi; da poco o niun conto di certe differenze ideali, che paion piccine, e son grandi: particolarità e differenze, che men facilmente si scuoprono a chi non è familiare con quelle tali 'idee ai simboli logici', di cui tocca elegantemente il mio critico verso la fine".

[58] M. Pieri, *G. Peano, Aritmetica generale ed Algebra elementare* ..., in «Periodico di Matematiche», (2) 5, 1903, p. 293.

[59] Catania sposò la visione assiomatico-deduttiva dell'insegnamento sostenuta da Pieri e da Peano nei suoi numerosi libri di testo, cfr. per esempio S. Catania, *Aritmetica ed algebra ad uso degl'Istituti tecnici*, Catania, Giannotta, 1910[3]; *Aritmetica razionale per i ginnasi superiori e per la prima classe d'istituto tecnico*, Catania, Giannotta, 1914[4] e *Corso di Algebra elementare per i Licei secondo i nuovi programmi, parte I per la prima classe liceale*, Catania, Giannotta, 1917[4].

appunti in memorie scientifiche da destinare alla pubblicazione. Ecco allora che il libro di Catania, che ben presto si troverà al centro di un aspro dibattito nella *Mathesis*[60], è recensito elogiativamente da Pieri come

> un trattatello, che nella forma e un po' anche nella materia, si distingue dagli altri libri d'aritmetica, ed è atto a fornire una giusta idea dei vantaggi, anche didattici e pratici, che si potrebbe ritrarre da un uso discreto dei principi e dei metodi che informano la Logica[61].

4. *Pieri, Padoa e il Formulario*

Se, fino a questo punto, non sarebbe stato necessario specificare in quale lavoro emergevano le singole convinzioni di Pieri, dal momento che esse venivano ribadite in più circostanze e luoghi, lo stesso non può dirsi per quanto riguarda la scelta delle idee primitive che, come è noto, varia dal sistema 'punto e moto' del 1898-99 a quello basato su 'punto e distanza tra due punti' del 1900, per giungere a quello 'punto e sfera' del 1908[62]. La ricostruzione del percorso che lo portò a modificare più volte tale selezione è emblematica dei meccanismi di 'costruzione sociale' del sapere matematico tipici della Scuola di Peano.

La riflessione prende le mosse dal concetto di moto, già esaminato da Peano nel saggio *Sui Fondamenti della Geometria* (1894)[63] e quindi da Pieri, nella recensione al volume di J. Thomae *Die Kegelschnitte in rein projectiver Behandlung*, curata per la *Rivista di Matematica*[64].

La prima e più semplice soluzione che gli si prospetta è quella di "abbandonare una strada, che nell'ordine speculativo sarebbe forse migliore", escludendo cioè dai principi della geometria il moto come concetto primitivo e definendo la congruenza delle figure mediante la più generale nozione di omografia[65]. Ciò porterebbe tuttavia a una riforma dell'insegnamento considerata troppo radicale, sia per ragioni storiche che pedagogiche. Ecco allora che, fin dall'aprile del 1899, Pieri intuisce la possibilità di

[60] Sulle polemiche concernenti l'uso della logica e dei fondamenti nella manualistica cfr. E. Luciano, *I dibattiti sull'insegnamento della Logica, da Peano a Bourbaki*, in F. Ferrara, L. Giacardi, M. Mosca (a cura di), *Ass. Sub. Mathesis Conferenze e Seminari 2008-2009*, Torino, Kim Williams Books, 2009, p. 231-238.

[61] M. Pieri 1905b, *S. Catania, Aritmetica razionale per le scuole secondarie superiori ... 1904*, in «Periodico di Matematiche», (3) 2, 1905, p. 46-47.

[62] La sfera è definita attraverso la relazione ternaria: "*c* dista da *a* quanto *b*", "*c* appartiene alla sfera di *b*, di centro *a*" e "le coppie (*a*,*b*) ed (*a*, *c*) sono congruenti fra loro".

[63] Peano 1894c cit., p. 75-80.

[64] Pieri 1894a cit., p. 38-39.

[65] Pieri 1899a cit., p. 175.

comporre tutta quanta la Geometria elementare con queste due sole materie prime: il "punto" ed una certa relazione fra tre punti *a*, *b*, *c* che si può interpretar con le frasi "*c* dista da *a* quanto *b*", ovvero "*c* appartiene alla sfera descritta da *b*, centro *a*", "la coppia (*a*, *c*) è congruente alla coppia (*a*, *b*)"[66].

Dal punto di vista storico, l'archetipo di questo modo di procedere è ravvisato negli scritti di G.W. Leibniz sulla *Characteristica geometrica*, noti grazie ai *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* di M. Cantor.

L'eccessiva complicazione degli sviluppi di un tale sistema "date le molte pretese d'indole logico-deduttiva" necessita tuttavia "il desiderio, se non il bisogno di nuovi studi e di ricerche ulteriori"[67], che Pieri intraprende in vista del Congresso internazionale di Filosofia di Parigi, nell'estate del 1900. Organizzatore della sezione di *Logica e storia delle scienze* è il filosofo L. Couturat che, per il tramite Peano[68], invita il matematico lucchese fin dal luglio del 1899 insieme ai collaboratori del *Formulaire*. Di fatto egli non prenderà parte al congresso, ma invierà ugualmente il testo *Sur la géométrie envisagée comme système purement logique*, letto da Couturat nella seduta del 3 agosto[69].

Fra i presenti vi è Padoa, che a sua volta ha elaborato, indipendentemente da Pieri, un sistema di assiomi per la geometria euclidea, oggetto della comunicazione che intende tenere di lì a pochi giorni al II Congresso internazionale dei Matematici[70]. Nei mesi precedenti, anche Padoa ha sviluppato un'analisi dei principi della geometria elementare, mosso dal medesimo intreccio di stimoli d'indole didattica e scientifica che aveva guidato il suo collega[71].

In particolare, anch'egli ha preso le mosse da una disamina del concetto di moto, alla luce dello studio degli *Elementi di Geometria per i licei e gli istituti*

[66] *Ibidem*, p. 176.

[67] *Ibidem*, p. 176.

[68] L. Couturat a G. Peano, 8.7.1899, in E. Luciano, C.S. Roero (a cura di), *Giuseppe Peano - Louis Couturat Carteggio (1896-1914)*, Firenze, Olschki, 2005, p. 28. Cfr. anche L. Couturat a M. Pieri, 26.7.1899, in Arrighi 1997 cit., p. 42-43.

[69] Cfr. L. Couturat, *Les mathématiques au congrès de philosophie*, in «L'Enseignement mathématique», 2, 1900, p. 397-410.

[70] A. Padoa, *Un nouveau système des définitions pour la géométrie euclidienne*, in *Compte Rendu du deuxième Congrès International des mathématiciens ...*, Paris, Gauthier-Villars, 1902, p. 353-363; trad. it. *Un nuovo sistema di definizioni per la geometria euclidea*, in «Periodico di Matematiche», (3) 19, 1904, p. 74-80. Per un'analisi dei suoi contributi ai fondamenti della geometria euclidea e per un confronto con le monografie di Pieri del 1899 e del 1908 cfr. M. Borga, G. Fenaroli, A.C. Garibaldi, *Un inedito di Alessandro Padoa*, in «Epistemologia», 32, 2009, p. 233-254 e M. Borga, *Su alcuni contributi di Alessandro Padoa e Mario Pieri ai Fondamenti della Geometria*, in «Epistemologia», 34, 2011, p. 89-114.

[71] Cfr. Padoa 1902 cit., p. 356, 360; 1904 cit., p. 76, 78, citazione a p. 360: "Maintenant que nous avons accompli notre tache en laissant de coté toute préoccupation didactique, nous désirons faire remarquer la possibilité d'employer notre système de symboles non définis même dans l'enseignement élémentaire".

tecnici di G. Veronese, ed è giunto a osservare, nelle *Note critiche* a questo manuale:

> Al «*movimento*» – quale «*stromento dimostrativo di eguaglianza*» – l'A. rinuncia nel suo libro, e questa è innovazione molto importante; ma del «*movimento*» – quale «*stromento genetico*» – l'A. si giova, in modo più o meno larvato. E, precisamente, vi ricorre ogni qualvolta considera una figura non *attuale*, ma *divenente*: poiché – a chi non voglia varcare i confini che separano la matematica dalla metafisica – poco importa che il divenire sia esterno (per movimento reale dell'elemento generatore) o interno (per concezione successiva di elementi esterni attuali). [...] Tuttavia l'A. dichiara (p. VII) di non accettare l'opinione di Newton, che la *Geometria* considerava qual parte della *Meccanica*![72].

Di qui, Padoa è approdato alla stessa conclusione di Pieri: il moto deve essere bandito dal novero dei concetti primitivi e sostituito opportunamente.

La coincidenza di opinioni fra i due si spinge tuttavia ancora oltre. Convinti che in scuola sia preferibile, anche psicologicamente, procedere dall'idea di segmento a quella di retta, sia Pieri che Padoa ritengono infatti naturale chiedersi come sia possibile espungere anche il concetto di segmento, riconducendone la definizione ad una relazione fra punti. Ecco allora che entrambe si trovano ad elaborare un sistema per la geometria euclidea in cui i concetti primitivi sono, rispettivamente, il punto e una relazione ternaria "*a* sta fra *b* e *c*" per Pieri, e il punto e una relazione fra quattro punti, più precisamente una relazione di congruenza fra coppie di punti, per Padoa. Come quest'ultimo scrive a Pieri, del resto:

> Nelle ricerche scientifiche v'è una specie di filiazione; come, nell'analisi dei principi della Geometria, Peano si ispirò a Pasch ed ella a entrambi, così io, ultimo non soltanto cronologicamente, mi inspirai a tutti e tre [...]. Ed io non ho mancato – per debito di onestà scientifica e tanto più volentieri in quanto altrimenti non sarebbe stato fatto il Suo nome al Congresso matematico – di assegnarle il dovuto posto d'onore in tale categoria di ricerche, non solo per i Suoi scritti già pubblicati, ma ancora per segnalare come dal Suo lavoro inedito risultasse per lo meno l'avviamento alla semplificazione ultima[73].

Che le discussioni sui fondamenti della geometria elementare e sulla loro applicazione nell'insegnamento fossero all'ordine del giorno nella Scuola di Peano in quei mesi è ulteriormente confermato dal fatto che, ancora una volta autonomamente rispetto agli altri 'allievi', anche Vacca e Vailati stavano "discorrendo" con Peano della possibilità di costruire un sistema di geometria elementare con

[72] A. Padoa, *Note critiche agli Elementi di Geometria di Giuseppe Veronese*, Pinerolo, Chiantore-Mascarelli, 1899, p. 18.

[73] A. Padoa a M. Pieri, 6.1.1901, in Arrighi 1997 cit., p. 85.

i simboli del *Formulario*, con l'obiettivo di superare le "gravi difficoltà" che rendevano i precedenti tentativi "ancora niente didattici"[74]. La prima ipotesi ad essere presa in considerazione è quella del calcolo geometrico, seguendo la terza edizione del *Formulario*, anche se, per evitare eccessive complicazioni, Peano e Vacca si convincono presto che è preferibile assumere come idee primitive il punto e la distanza tra due punti[75]. I vaghi riferimenti di Pieri alle intuizioni di Leibniz sono precisati da Vacca, grazie ai suoi studi storici sullo *Specimen geometriae luciferae*, condotti sulle fonti a stampa e sui manoscritti di Leibniz, riscoperti ad Hannover nel luglio del 1899. Da ultimo, la sintesi dei contributi di Peano, Pieri, Padoa, Vacca e Vailati dà luogo alla trattazione contenuta nella quarta edizione del *Formulario*[76], che risulta paradigmatica del sincretismo, talora solo in parte riuscito, delle ricerche condotte da Peano e dai suoi collaboratori, talvolta all'insaputa delle intuizioni e dei progressi gli uni degli altri.

5. *La trasposizione didattica dei sistemi di Peano-Pieri*

Anche se ad accomunare gli esponenti della Scuola di Peano vi è la volontà di rinnovare i tradizionali approcci didattici per il tramite delle ricerche logico-fondazionali, non mancano significative distinzioni sull'attuazione concreta di questo tipo di istanze. Pieri è, insieme a Vailati, fra le figure più aperte dell'*entourage* nei confronti delle critiche sollevate da alcune componenti del mondo scientifico italiano, e soprattutto da figure legate alla Scuola di Segre come G. Castelnuovo o F. Enriques.

Ammesso che la geometria debba preservare il suo carattere di 'fisica dell'estensione', il matematico lucchese può infatti accettare più facilmente, rispetto ad esempio a un Padoa o a un Burali-Forti, che:

> molto giova all'intelligenza dei fatti geometrici l'aver sempre innanzi un'immagine o rappresentazione intuitiva del 'punto' e della 'sfera' d'un punto intorno ad un altro; ossia l'abito di contemplare il senso reale e concreto, che l'uso annette ai giudizi come "A, B, C sono punti, e C dista da A quanto B". Se è vero che "nihil est in intellectu, quod non fuerit in sensu" (Aristotile) e che "ogni uman sapere ha principio nell'intuizione" (Kant) non sarà mai superfluo appellarsi anche ai mezzi

[74] G. Vacca a G. Vailati, 30.9- 6.11.1902, *Archivio Peano-Vacca*, Dip. Mat. Univ. Torino, cc. 1r-2v.

[75] Cfr. G. Peano 1898c, *Analisi della teoria dei vettori*, in «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», 33, 1898, p. 513-534; 1903a, *La geometria basata sulle idee di punto e distanza*, in «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», 38, 1902-03, p. 6-10.

[76] Peano 1903f cit., p. 253-265. Solo in minima parte sono però contemplati nel *Formulario* i risultati di Pieri sui fondamenti della geometria euclidea e neutrale, nonostante il tema si prestasse ad essere integrato in questa enciclopedia, edita con esplicite finalità didattiche.

> più grossolani ed empirici per suscitare e vivificare nei giovani ogni sorta di cognizioni intuitive e sperimentali sui vari oggetti geometrici[77].

Un granello di polvere, il forellino di un ago su un foglio di carta possono allora dare un'immagine del punto; la sfera si può concepire come la superficie di un corpo rotondo, quale una palla o un arancio. E ancora, sistemi articolati di aste rigide di semplicissima struttura, o fili saldati alla trama di un telaio, si prestano alla verifica sperimentale degli assiomi esposti nella memoria del 1908. Se un'asta rigida è fissa ad un estremo – sia per es. A – ma può girare intorno ad A come perno, le posizioni dell'altro estremo forniscono infatti l'immagine dei punti che distano da A quanto B. Analogamente un filo teso tra due punti A e B, uno dei quali fisso, può rendere l'idea della sfera BA, del segmento |AB|, ecc.

Ricorrere a rappresentazioni concrete degli enti fondamentali non significa tacere la connotazione ipotetico-deduttiva della geometria, e anzi è lo stesso Pieri a fornire alcune indicazioni per impostare l'attività in aula, sostenendo che la prima lezione, in una scuola secondaria, potrebbe aprirsi con queste parole:

> La prima volta il Maestro così parli ai discepoli: Concedetemi la verità di codeste proposizioni primitive; ed io vi conduco man mano, per via di successive deduzioni, a dover riconoscere la verità di tutte le altre proposizioni geometriche. Gli assiomi son come il seme di tutte le verità geometriche: ma i germi di queste non si svolgon da quelli, se non sian fecondati dal raziocinio. A questo modo s'istituisce, p. es., la Geometria e l'Aritmetica; in ciò consiste sommariamente il processo deduttivo, che informa tutta quanta la Matematica pura[78].

L'esame di alcuni libri di testo che tentarono la trasposizione didattica dei sistemi di Peano e di Pieri consente di individuare le strategie di diffusione e divulgazione dei risultati adottate dal gruppo torinese, mostrando la labilità delle gerarchie fra i suoi membri, sovente instaurate a posteriori dalla storiografia.

L'assoluta precisione di linguaggio e un continuo riferimento a enti concreti del mondo fisico caratterizzano gli *Elementi di Geometria per le scuole secondarie superiori* di Giuseppe Ingrami, recensiti con favore da Pieri nel 1899 sulla *Rivista di Matematica*[79]. La trattazione, condotta rigorosamente secondo

[77] Pieri 1908 cit., p. 107.

[78] *Ibidem*, p. 107.

[79] Pieri 1899b, p. 178-179. Il testo di Ingrami fu pure recensito da F. Palatini sul «Periodico di Matematiche», 2, 1900, p. 85-88. Fra gli aspetti migliori del libro, "frutto di lunghe meditazioni e di uno studio accurato e intelligente dei più recenti lavori sui fondamenti della geometria" si segnala la generazione degli enti geometrici fondamentali. Presi come concetti primitivi il punto e il segmento, la retta è ad esempio definita coma la classe degli infiniti punti, formata da un segmento e dai suoi due prolungamenti; il piano e lo spazio sono generati proiettando i punti del contorno, rispettivamente di un triangolo o di un tetraedro, mediante raggi aventi l'origine nell'interno di questo triangolo e di questo tetraedro.

il metodo deduttivo a partire da tre concetti primitivi (punto, segmento e una relazione di uguaglianza fra due segmenti) applica per la prima volta in un manuale scolastico alcuni dei risultati di Pasch, Peano e Pieri. Quest'ultimo rileva come, grazie a successivi approfondimenti, si sia ormai giunti a sistemi geometrici ancor più minimali, come quello da lui ottenuto nella memoria del 1898, all'epoca ancora in corso di stampa, in cui sono sufficienti due sole idee primitive: il punto ed il moto, inteso come trasformazione dei punti in punti. Nonostante sia ben conscio delle difficoltà che ancora restano da affrontare, Pieri tuttavia conclude:

> se (didatticamente parlando) la Geometria elementare non accenna per ora a quel grado di scienza ipotetica e schiettamente deduttiva, che tanto ammiriamo nell'Aritmetica, non di meno quest'opera del prof. Ingrami, dove alcuni propositi vagheggiati speculativamente da pochi, e da non molto tempo, cominciano ad attuarsi in forma concreta e pratica, è già un ottimo pegno, e un affidamento sicuro di nuovi e sempre maggiori progressi su quella via[80].

Uno svolgimento esclusivamente assiomatico, fondato su due enti (punto e segmento)[81] è quello adottato nella *Geometria elementare ad uso dei Licei e dei Ginnasi superiori* di Michele De Franchis, edita nel 1909. Animato dalla volontà di presentare questa disciplina come una 'scienza di ragionamento fondata su basi sperimentali', proprio come Pieri aveva raccomandato, l'autore si dedica alle verifiche empiriche dei postulati ed è il primo a inserire, in un testo scolastico di geometria, un paragrafo dedicato agli elementi della logica matematica di Peano[82].

Il libro forse più emblematico della 'moderna onda' scaturita dai lavori di Pieri è però costituito dagli *Elementi di Geometria* di Angelo Pensa[83]. Il manuale, rivolto alle scuole medie inferiori e pubblicato nel 1912 presso la casa editrice Petrini-Gallizio di Torino, dietro suggerimento di Burali-Forti, assume come substrato la memoria *La Geometria elementare istituita sulle nozioni di punto e sfera*. Al concetto di sfera è tuttavia sostituito quello più intuitivo di distanza "anzi quello materiale di filo teso tra due punti, o quello fornito dal compasso"[84]. Lo stile si distingue per semplicità e chiarezza e, grazie al fatto che "la preoccupazione logica dell'insieme risiede soltanto nella

[80] Pieri 1899b, p. 182.

[81] Il moto è invece definito come un'affinità.

[82] M. De Franchis, *Geometria elementare*, Milano, Sandron, 1909.

[83] Per il profilo biografico di Pensa cfr. Luciano, Roero 2010 cit., p. 119-122 e il sito http://www.peano2008.unito.it/scuola/pensa.pdf.

[84] C. Burali-Forti, *A. Pensa, Elementi di Geometria ad uso delle Scuole secondarie inferiori ... 1912*, in «Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche» (Loria), 13, 1911, p. 117-120, cit. a p. 118 e 119.

mente dell'autore"[85], non è in alcun punto arido o noioso. Delle idee fondamentali sono offerte interpretazioni fisiche, espungendo invece quelle pseudo-definizioni che la moderna critica aveva smascherato come puri circoli viziosi. Facendo propri gli inviti di Pieri e di Peano, Pensa sopprime inoltre coraggiosamente la maggior parte delle dimostrazioni e le sostituisce con giustificazioni sperimentali, ottenute ad esempio tramite la sovrapponibilità. Del resto, secondo l'opinione di Pieri, Burali-Forti e Peano, è questa la migliore forma di mediazione epistemico-cognitiva del sistema di Pieri, dal momento che la sua completa 'giustificazione scientifica'

> non è possibile […] neanche in una scuola media superiore. Ciò non dice che dalla memoria di M. Pieri sia impossibile trarre un ottimo e semplice libro di Geometria per le scuole medie superiori. […] Certamente il lavoro da fare è vasto e non facile[86].

Ecco allora che, seguendo l'orientamento dettato dal matematico lucchese stesso, per introdurre il concetto di retta e di distanza Pensa adotta sistemi di fili e di aste rigide[87], alternando al testo un suggestivo apparato di disegni ed immagini.

Gli *Elementi* di Pensa sono recensiti assai positivamente da Peano, G. Moglia e Burali-Forti[88]. Anche G. Vacca, nei manoscritti intitolati *Sugli elementi di geometria nelle scuole secondarie inferiori* e *Sugli elementi di geometria nelle scuole*[89] analizza questo manuale, concludendo che esso è pressoché perfetto per quanto concerne l'introduzione delle nozioni di punto, figura, retta, piano, distanza, uguaglianza e sovrapponibilità, ed è assolutamente moderno per il ricorso alla piegatura della carta nella dimostrazione di alcuni teoremi sulle rette parallele.

[85] G. Moglia, *A. Pensa, Elementi di Geometria ad uso delle scuole secondarie inferiori ... 1912*, in «Bollettino di Matematica», 2, 1912, p. 194-197, cit. a p. 195.

[86] C. Burali-Forti, *Prefazione* ad A. Pensa, *Elementi di Geometria*, Torino, Petrini-Gallizio, 1912, p. III. Particolarmente riusciti sono i capitoli IV e V: nel primo, dalle costruzioni dei triangoli sono ricavati i criteri di uguaglianza, procedendo così, secondo i dettami della pedagogia positivista, dal *concreto* all'*astratto*; nel V sono dedotte le proprietà dei parallelogrammi, rettangoli e rombi, che "forniscono uno dei più notevoli e semplici esercizi logico-deduttivi".

[87] Cfr. ad esempio Pensa 1912 cit., p. 2-3: "Fissiamo su due sostegni, come indica la figura, due punte di ferro, o di legno, ecc. e indichiamone con A, B gli estremi. Due persone, *tenendo teso* un filo sottile, flessibile e inestendibile, possono fare appoggiare il filo ai punti A e B. Tutti i punti del filo teso costituiscono una *figura geometrica* che è una *parte* della retta che passa per A e B, ossia, più brevemente, è una parte della retta AB."

[88] Cfr. le note 84, 85 e G. Peano, *Dott. A. Pensa, Elementi di Geometria* ..., in «ApI *Discussiones*», 4, 1912, p. 132-133.

[89] *Archivio Peano-Vacca*, Dip. Mat. Univ. Torino, *Sugli elementi di geometria nelle scuole secondarie inferiori*, ms., 10 p. numerate; *Sugli elementi di geometria nelle scuole*, ms., 6 p. denominate a, b, c, d, e, f. Tali manoscritti furono probabilmente redatti in previsione di una recensione o di un articolo di taglio didattico che non vide mai la luce, e sono conservati nel fondo torinese, insieme all'esemplare degli *Elementi di Geometria* di Pensa, con alcuni *marginalia* autografi di Vacca.

Di fatto, benché il libro riscuota un buon successo, confermato dalle undici edizioni e ristampe successive, fino al 1928[90], la sua ricezione conosce vicende di segno opposto. Secondo il racconto di T. Boggio a Peano, ad esempio, benché esso fosse stato adottato in varie scuole e giudicato "il migliore dei libri del genere", era stato impedito allo stesso Pensa di utilizzarlo nella Scuola Tecnica Lagrange di Torino, dove prestava servizio. Un collega più anziano e "abituato ai soliti metodi sbagliati di molti anni fa", non riuscendo a comprendere l'impostazione nuova e rigorosa di questi *Elementi*, si era infatti rifiutato di consigliarne l'acquisto ed era riuscito a convincere il direttore a obbligare anche il loro autore all'uso di testi imprecisi e desueti[91].

L'episodio in sé non deve comunque stupire eccessivamente, se si tiene conto del coacervo di dibattiti che accolsero i primi esperimenti didattici basati sull'approccio ipotetico-deduttivo astratto e che portarono H. Fehr a concludere, nel suo rapporto ICMI su *La rigueur dans l'enseignement mathématique*, che in nessun paese, fatte salve le eccezioni di singoli professori, era stato accolto in modo sistematico il metodo propugnato da Peano, Hilbert e G.B. Halsted[92]. D'altro canto, non si possono neppure paragonare gli *Elementi* di Pensa a manuali come l'*Aritmetica* di Peano o la *Rational Geometry* di Halsted[93], desunti rispettivamente dal *Formulario* e dai *Grundlagen* di Hilbert. In quel libro, infatti, la trattazione è sì rigorosa, ma non strettamente logico-assiomatica; non si trovano discussioni sull'indipendenza degli assiomi, né mancano – come si è detto – gli appelli all'intuizione fisica e spaziale.

Coevo agli *Elementi* di Pensa, ma ben più noto di essi, è infine il *Trattato di Geometria elementare ad uso delle scuole secondarie superiori* di G. Marletta[94]. Allievo di Pieri a Catania, egli illustra le questioni sui principi dapprima in un saggio edito sul *Periodico di Matematiche*[95], e successivamente, a partire da questo sviluppa un manuale improntato alle ricerche logico-fondazionali, in cui la geometria euclidea è dedotta dai concetti primitivi di punto e di segmento[96].

[90] A. PENSA, *Elementi di Geometria*, 1912^1, 1914^2, 1916^3, 1918^5, 1919^6, 1922^7, 1928^{11}.

[91] T. Boggio a G. Peano, 1.7.1912, in LUCIANO, ROERO 2010 cit., p. 120.

[92] H. FEHR, *La rigueur dans l'enseignement mathématique dans les écoles moyennes*, in «L'Enseignement mathématique», 13, 1911, p. 462-463.

[93] G.B. HALSTED, *Rational Geometry. A textbook for the Science of space, based on Hilbert's Foundations*, New York, Wiley, 1906; trad. fr. P. BARBARIN, Paris, Gauthier-Villars, 1911. Cfr. anche G. VAILATI, *Halsted G.B., Rational Geometry ... 1906*, in «Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche» (Loria), 8, 1905, p. 74-77.

[94] G. MARLETTA, *Trattato di Geometria elementare ad uso delle scuole secondarie superiori*, Catania, Giannotta, 1912.

[95] G. MARLETTA, *Principi di geometria euclidea*, in «Periodico di Matematiche», (3) 2, 1905, p. 257-273.

[96] Per un esame di altri testi che adottarono l'impostazione fondazionale, seguendo ad esempio l'indirizzo hilbertiano, cfr. C. MAMMANA, *I* Grundlagen der Geometrie *e i libri di testo di geometria in Italia*, in «Le matematiche», 55, 2000, suppl. 1, p. 227-251 e L. GIACARDI, *From*

6. *L'influenza degli studi di Pieri sulla formazione degli insegnanti*

Mentre gli studi di Pieri sui fondamenti della geometria iniziano a penetrare nel campo della manualistica, pur in presenza di critiche e perplessità, essi diventano parallelamente parte integrante della formazione culturale dei docenti italiani.

Rinvii ai lavori del matematico lucchese si ritrovano, ad esempio, nella bibliografia posta a corredo delle lezioni di C. Segre a Torino, tenute presso la Scuola di Magistero negli anni 1907-1921[97]. Qui essi sono accostati ai saggi di M. Pasch (1882), G. Peano (1889 e 1894), G. Veronese (1891) e D. Hilbert (1899), e commentati in relazione ai libri di testo che da essi avevano tratto origine, come gli *Elementi di Geometria* di Ingrami o il volume di De Franchis, ritenuto però da Segre "poco didattico"[98].

Analogamente, i risultati di Pieri sono inclusi nelle lezioni di Matematiche complementari di Peano degli anni 1925-1932. In questo caso la documentazione è più frammentaria, poiché di esse restano solo i titoli e alcuni brevi prospetti riassuntivi, editi su *L'Enseignement mathématique*[99]. Da fonti indirette, quali le tesi di laurea guidate da Peano, si desume però che egli aveva proposto alla studentessa Cesarina Boccalatte, come oggetto della sua dissertazione, proprio l'assiomatizzazione della geometria euclidea. L'obiettivo della ricerca consisteva, in quel caso, nella costruzione di un sistema basato sui concetti primitivi di punto e di angolo retto, traendo spunto dagli studi di Pieri, Peano e Pasch[100].

Ancor più significativo è l'inserimento dei contributi sui sistemi ipotetico-deduttivi di Pieri in due *Enciclopedie* espressamente rivolte ai docenti di scuola media-secondaria e agli allievi delle Scuole di Magistero: le *Questioni riguardanti le matematiche elementari*[101] coordinate da F. Enriques e l'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari* diretta da L. Berzolari, G. Vivanti e D. Gigli.

Per quanto concerne la seconda, il capitolo sui fondamenti della geometria elementare viene inizialmente assegnato da Berzolari a U. Amaldi, cui

Euclid as Textbook to the Giovanni Gentile Reform (1867-1923). Problems, Methods and Debates in Mathematics Teaching in Italy, in «Paedagogica Historica», 17, 2006, p. 587-613.

[97] Cfr. C. Segre, [*Appunti relativi alle lezioni tenute per la Scuola di Magistero*], *Quaderno n. 40*, s.d., p. 111 in Giacardi 2001 cit.

[98] *Ibidem*, p. 113.

[99] Il corso di Peano dell'a.a. 1930-31 era ad esempio intitolato *Fondamenti dell'Aritmetica e della Geometria* (cfr. «L'Enseignement Mathématique», 30, 1931, p. 151).

[100] La tesi è presentata da Peano all'Accademia delle Scienze di Torino sotto forma di nota: C. Boccalatte, *La geometria basata sulle idee di punto e angolo retto*, in «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», 64, 1928-29, p. 47-55.

[101] Cfr. F. Enriques (a cura di), *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, Bologna, Zanichelli, 1924-1927, I.1, p. 1-40.

subentra P. Benedetti, dopo il 1911. Per la curatela di tutti i saggi concernenti tematiche logico-critiche – forse i più esposti a contestazioni dell'intera *Enciclopedia*, visti i dibattiti che si erano susseguiti in Italia – Berzolari aveva infatti ritenuto più opportuno fare affidamento su insegnanti. Solo questi ultimi, del resto, potevano a suo avviso valutare in modo obiettivo le eventuali ricadute delle ricerche fondazionali nell'insegnamento e sulla preparazione dei docenti, grazie all'esperienza maturata sul campo, a contatto diretto con gli alunni ed i colleghi[102]. Autore, insieme a C. Rosati, di un pregevole manuale di *Geometria*[103], Benedetti mostra di essere fortemente influenzato non solo dall'impostazione dei *Grundlagen der Geometrie* di Hilbert, ma ancor più dalla visione di Pieri della geometria quale sistema ipotetico-deduttivo e fisica matematica dell'estensione. Ciò appare evidente laddove, citando quasi alla lettera le parole del collaboratore di Peano, egli afferma:

> Però la questione dei due indirizzi ha importanza più filosofica che matematica; infatti, per lontana tradizione, la Geometria diviene in ogni modo e per tutti, dopo il primo stadio di posizione dei concetti, un organismo puramente logico, nel quale gli enti valgono non per quello che sono, ma per quello che se ne è affermato. E d'altra parte, anche in una Geometria concepita come sistema ipotetico-deduttivo che non voglia essere una esercitazione logica priva di reale interesse, i postulati, per quanto liberi, non possono essere senza riferimento allo spazio fisico-intuitivo, e devono esprimere proprietà riconosciute da tutti. Così rimane appagato tanto il logico che l'intuitivo[104].

Il capitolo compilato da Benedetti, seppur viziato da alcune ingenuità, contribuisce in modo essenziale a diffondere nel mondo della scuola le idee dell'*equipe* di Peano, e in particolare gli appelli all'utilizzo degli studi fondazionali nella prassi didattica orale e nella manualistica.

La scelta editoriale, da parte della direzione dell'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari*, di accordare ampia visibilità alle posizioni dell'indirizzo peaniano in merito agli studi sui principi della geometria finisce per costituire un elemento di forte originalità di questa collana, oltre a rappresentare una delle componenti di principale *distinguo* rispetto alle *Questioni* di Enriques. Di rimando, essa susciterà alcune critiche, forse le più aspre mosse all'*Enciclopedia* di Berzolari, apprezzata quasi senza riserve per le restanti parti. Fra i detrattori più severi vi è proprio Enriques che, commentando il capitolo di

[102] Analogamente, il capitolo sul *Concetto di numero e sue estensioni*, affidato a Enriques e Gigli, è poi redatto solo da quest'ultimo, anch'egli docente di scuola secondaria. Cfr. «Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche» (Loria), 13, 1911, p. 45.

[103] P. Benedetti, C. Rosati, *Geometria per i ginnasi, licei ed istituti tecnici*, Napoli, Perrella, 1924.

[104] P. Benedetti, *Fondamenti della Geometria*, in L. Berzolari, D. Gigli, G. Vivanti (a cura di), *Enciclopedia delle Matematiche Elementari*, Milano, Hoepli, 2_1, 1937, p. 6.

Benedetti e quello di E. Artom sulle *Proprietà elementari delle figure del piano e dello spazio* ad esso legato, afferma:

> [...] l'esposizione dell'argomento per l'*Enciclopedia delle matematiche elementari* non aveva da conformarsi a vedute subiettive, anzi doveva seguire un ordine storico, cominciando dal rilevare i presupposti dell'Euclide che i critici moderni hanno cercato di enunciare nella loro assiomatica: in mancanza di un tale ordine i diversi sistemi di postulati rischiano di apparire senza connessione fra loro, e i giudizi che vi si riferiscono non riesciranno prospettati nella giusta luce. La critica fatta al Benedetti si estende anche all'Artom [...]. Anzi questo autore aveva tanto meno motivo di ordinare la sua esposizione secondo un particolare sistema di postulati, che dovrebbe farsi ricevere dal lettore come presupposto. Ciò che vi è d'arbitrario nel suo procedimento appare per esempio nella dimostrazione del primo criterio dell'eguaglianza dei triangoli, che, seguendo non so quale trattato ipercritico [il manuale di De Franchis], si allontana a dire il vero dalla semplicità e dal buon gusto. Mi auguro che queste osservazioni sieno tenute in conto dai redattori dei volumi in preparazione, e in ispecie di quello che concernerà le questioni didattiche: l'*Enciclopedia* deve fornire al lettore un'informazione quanto è possibile obiettiva dei varii indirizzi e criterii scientifici, logici e didattici: i redattori non hanno il compito di risolvere, secondo un proprio criterio questioni disputate, che sono passibili soltanto d'un giudizio storico di là del presente[105].

L'invito di Enriques sarà pienamente recepito da Berzolari e da L. Brusotti, autore del saggio sulle *Questioni didattiche*[106], che darà prova di autentica equanimità di giudizio, dedicando paragrafi specifici alle istanze della Scuola geometrica italiana (l''educazione alla scoperta')[107], e a quelle della Scuola logico-matematica (l''educazione al retto dedurre e al corretto argomentare'), citando a questo proposito diffusamente gli scritti di Peano, Padoa e Pieri[108].

A colmare le lacune riscontrate nell'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari* per quanto riguarda lo sviluppo delle tematiche critico-fondazionali contribuirà infine l'*Appendice* al terzo e ultimo tomo, curata da G. Giorgi e dedicata ancora ai *Fondamenti della Geometria*[109]. Essa è il frutto di tre conferenze tenute nel 1912 al Seminario Matematico dell'Università La Sapienza di

[105] F. ENRIQUES, *Enciclopedia delle Matematiche Elementari* ..., in «Periodico di Matematiche», (4) 17, 1937, p. 113.

[106] Ancora una volta l'avvicendamento di autore è singolare: il capitolo, originariamente intitolato *Indirizzi didattici e libri di testo*, era stato affidato al geometra G. Scorza, fautore dichiarato dell'indirizzo didattico intuitivo. Cfr. «Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche» (Loria), 13, 1911, p. 45.

[107] L. BRUSOTTI, *Questioni didattiche*, in L. BERZOLARI (a cura di), *Enciclopedia delle Matematiche Elementari*, 3_2, Milano, Hoepli, 1949, p. 885-973.

[108] *Ibidem*, p. 900-902, 924.

[109] G. GIORGI, *Sui Fondamenti della Geometria*, in L. BERZOLARI (a cura di), *Enciclopedia delle Matematiche Elementari*, 3_2, Milano, Hoepli, 1949, p. 976-1014.

Roma, nelle quali l'autore – in stretto contatto con V. Volterra, F. Enriques, G. Castelnuovo, T. Levi-Civita, R. Marcolongo e F. Severi – aveva sviscerato le caratteristiche storiche e filosofiche dei vari indirizzi di studi sui fondamenti, da quello fisico-sperimentale a quello assiomatico, dimostrando di aver pienamente fatto propri alcuni capisaldi del pensiero di Pieri.

Quasi paradossalmente, proprio mentre iniziano a giungere i primi riconoscimenti dell'impegno della Scuola di Peano nel settore dell'educazione, alcuni fra gli stessi esponenti di quell'*equipe* esercitano sempre più spesso una forma di autocritica, anche radicale, dei tentativi di trasposizione didattica degli studi logico-fondazionali.

Ciò traspare ad esempio esaminando la sezione di pedagogia della matematica di *Schola et Vita*, un periodico rivolto soprattutto ai maestri di scuola elementare, redatto in *latino sine flexione* e co-diretto da Peano e N. Mastropaolo a partire dal 1926. Fra i suoi collaboratori più assidui[110] spiccano Cassina e A. Natucci che, pur avendo partecipato largamente alle 'battaglie' sostenute dalla Scuola di Peano, ne condannano ora senza reticenze gli esiti, giungendo ad affermare:

> In idea de auctore [Marletta], definitiones artificiale servi forsan ad expone cum majore rigore scientifico et logico uno theoria. Sed isto theoria es bono in scholas superiore, malo in scholas medio: geometria cum maximo rigore scientifico, ubi experientia es reducto ad minimo, nam auctore da minimo numero possibile de postulatos intuitivo, non es geometria adaptabile cum profectu ad alumnos de scholas medio: es causa, sine dubio, de odio implacabile de alumnos contra mathematica. In scholas medio es maximo damno fac consideratione philosophico super evolutione de principios de scientia. Aetate de alumnos non consenti ad illos de es philosopho. Hoc es necessario ad studentes de mathematica de Universitate, nam saepe illos ignora omne progressu de parte elementario. […] Meliore definitiones es id que de ente definito da idea que coincide cum idea que nos habe ab observationes naturale. Definitiones artificiale es cito oblivito, dum semper es circulo vitioso et causa de nihil profectu[111]

e ancora:

> Nunc nos debe cogita que methodo deductivo, proprio de mathematica, funda se super facultates magis abstracto de conceptos, et usu de symbolismo appella ad facultate de abstractione. Ce facultates de ratiocinio surge tardo in mente de

[110] Nessuno degli autori di «Schola et Vita» aveva anche collaborato alla «Rivista di Matematica», tanto che si può a questo proposito parlare di 'due generazioni' di membri della Scuola di Peano. Della prima fanno parte, fra gli altri, Pieri, Padoa, Vacca, Vailati e Burali-Forti, mentre la seconda emerge dalle fila dei partecipanti alle *Conferenze Matematiche Torinesi*, dai simpatizzanti del movimento interlinguista e dalla cerchia degli allievi e assistenti di Peano nei corsi di Matematiche complementari.

[111] V. Cavallaro, *Notione de parallelismo in scholas secundario*, in «Schola et Vita», 3, 1928, p. 80-81.

puero: in maximo numero de pueros surge cum adolescientia et postea. […] Si nos vol redde studio ipso accessibile ad pueros nos debe gradua difficultates: fac, in initio, appellatione ad intuitione, introduc symbols paulatim (paucos ad vice). Cum homine perveni ad moderno tractatione de Elementos de Algebra et Geometria per approximationes successivo, sic scholares pote perveni solo cum graduatione ad appretia valore logico de isto tractatione. […] Methodo de docentia, erroneo aut nimis rigoroso, habe aggravato male. Ex libros pleno de errores, de tautologias, de tacito referentias ad intuitione, nos transi ad libros mirabile per exactitudine et logica, sed nimis difficile et abstracto. Nunc nos debe considera non solum aspectu scientifico sed etiam aspectu didattico de problema, et nos debe utiliza resultatu de moderno critica de principios cum grano salis[112].

Della ricchezza di spunti pedagogici che aveva contraddistinto l'opera di Pieri rimangono dunque solo alcune tracce e, dopo la Riforma Gentile, l'ostilità nei confronti dell'insegnamento ipotetico-deduttivo si affermerà in modo ancor più pronunciato.

7. *Conclusioni*

L'analisi precedente, ravvisando nella storia dell'insegnamento un anello di congiunzione fra i tradizionali approcci storiografici *esterno* e *interno*, dimostra la fallacia della visione delle Scuole di Segre e di Peano come due entità separate, la prima interamente rivolta all'intuizione e la seconda alla logica e ai fondamenti. Pieri anzi, come Vailati,[113] risulta un autentico 'ponte'[114] fra questi gruppi di studiosi anche nell'ambito dell'epistemologia e dell'educazione, essendo capace di integrare, a livello teorico e pratico, le istanze di entrambi, in una sintesi originale e di sicura modernità. In particolare, egli accosta la concezione astratta della matematica, sostenuta da Segre ma senza il sostegno di un'adeguata conoscenza degli strumenti di carattere logico-linguistico, alla padronanza del formalismo ideografico e delle assiomatizzazioni di Peano, per il quale – per contro – gli enti geometrici conservavano necessariamente un referente empirico o intuitivo[115].

Come afferma Pieri, del resto:

conciliare i bisogni della Scuola con le idealità del metodo deduttivo è tale un'impresa, da non poter maturare, se mai, che per opera di molti e a fatica[116].

[112] A. Natucci, *Methodologia didactico pro mathematica*, in «Schola et Vita», 3, 1928, p. 269.

[113] Cfr. ad esempio G. Vailati, *L'insegnamento della matematica nel primo triennio della scuola secondaria*, in «Bollettino di Matematica», 6, 1907, p. 137-146.

[114] A. Brigaglia, G. Masotto, *Il circolo matematico di Palermo*, Bari, Dedalo, 1982, p. 137.

[115] Cfr. M. Avellone, M. Borga, *Mario Pieri e i Fondamenti della geometria*, in «Lettera Matematica Pristem», 26, 1997, p. 44-51.

[116] Pieri, 1899b cit., p. 181.

L'esame della manualistica che cercò di adottare i suoi risultati e le indagini sulla sua attività nel campo dell'insegnamento, possono allora effettivamente servire ad illustrare le forme di collaborazione interne alla Scuola di Peano, così come a rilevare lo iato che intercorre fra le dichiarazioni programmatiche di alcuni assunti e la loro concreta attuazione[117].

[117] Tale iato è pure segnalato da S. Invernizzi, a proposito dei docenti di Gottinga (cfr. S. Invernizzi, *Il re è nudo*, in «Pluriverso», 3, 4, 1998, p. 94-100).

Dalla monografia del ‘punto’ e del ‘moto’ di M. Pieri ai software di geometria dinamica

FERDINANDO ARZARELLO

Obiettivo di quest’articolo è di contribuire con un ‘granellino’ di natura logico-algebrica all’auspicio di E. A. Marchisotto, che osserva: “Pieri’s work in foundations of mathematics lay in the shadow of giants”[1] ma si augura che questo stato di cose possa cambiare: “new connections may be discovered, and might lead to new research strands”[2]. Mostrerò, infatti, che le basi fondazionali date da Pieri alla geometria elementare sono esattamente quelle usate oggi per progettare i software di geometria dinamica e che la metodologia didattica, da lui stesso definita sperimentale perché basata sull’uso di strumenti per l’insegnamento della geometria elementare, sia molto attuale proprio per il nesso tra il suo orientamento fondazionale e la logica che sta dietro alle moderne tecnologie didattiche dei software di geometria dinamica.

Elaborerò questa tesi in tre passi, il primo di natura storica, gli altri due più tecnici; alla fine accennerò come l’impostazione fondazionale di Pieri possa avere conseguenze pedagogiche interessanti per l’insegnamento della geometria nella scuola media, da lui stesso frammentariamente illustrate in alcune note dei suoi lavori scientifici.

1. I concetti base su cui Pieri fonda la geometria elementare sono presentati nei suoi due lavori fondamentali del 1899[3] e del 1908[4], basati ognuno su due concetti fondanti: *punto* e *moto* il primo, *punto* e *sfera* il secondo. Men-

[1] E. Marchisotto, J.T. Smith, *The Legacy of Mario Pieri in Geometry and Arithmetic*, Boston, Birkhäuser, Springer, 2007, p. 370.

[2] *Ibidem*.

[3] M. Pieri, *Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo. Monografia del punto e del moto*, in «Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino», (2) 49, 1899 (1900), p. 173-222.

[4] M. Pieri, *La geometria elementare istituita sulle nozioni di “punto” e “sfera”,* in «Memorie della Società italiana delle scienze (detta dei XL)», (3) 15, 1908, p. 345-450.

tre il concetto di punto è presente in tutte le produzioni di Pieri, la seconda nozione, che si accompagna a quella di punto, evolve nel tempo: dal 'moto' del 1899 alla 'sfera' del 1908. Si afferma dietro alle due l'idea fondante di *operazione* (trasformazione), che *genera punti da punti*.

2. L'analisi fondazionale di Pieri può servire più di altre (ad es. quelle di Hilbert[5] e di Tarski[6]) per dare una base teorica solida al metodo con cui operano i software di geometria dinamica: anche questi infatti, costruiscono gli oggetti della geometria elementare muovendo dalla sola nozione base di punto e di operazioni su punti: si tratta di una lettura della geometria tipica della progettazione dei software geometrici[7]. La sistemazione di Pieri può essere usata ottimamente come base teorica per fondare software come *Cabri géomètre, Geogebra, Sketchpad*. Pieri introduce opportuni postulati per dare all'insieme delle operazioni (ad es. al moto) il carattere di gruppo, per cui le proprietà geometriche sono definite come invarianti rispetto a tali gruppi (secondo l'impostazione di F. Klein, che Pieri cita esplicitamente). Ciò succede anche con i software di geometria dinamica, anche se a prima vista non sembra così: infatti, come provato da Bernardi[8] occorre considerare tali trasformazioni da un punto di vista più astratto.
3. La fondazione della geometria elementare secondo il metodo di Pieri, in particolare tramite l'uso delle operazioni tra punti come strumento base per le costruzioni geometriche elementari, permette di rispondere a un quesito che sorge quando si usano i software di geometria dinamica. Infatti la tipica trasformazione che si usa in geometria dinamica per cogliere gli invarianti è il cosiddetto 'trascinamento' (dragging). Ci si domanda allora che valore abbiano le congetture formulate in tali ambienti in base all'invarianza per trascinamento. La risposta è basata su di un interessante teorema di Jiawei Hong[9], il cosiddetto 'gap theorem'. Una sua conseguenza è che le congetture formulate in conformità a verifiche fatte col trascinamento sono valide con probabilità molto alta. Naturalmente il metodo non fornisce per nulla una dimostrazione del teorema.

[5] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, Teubner, 1899.

[6] A. Tarski, *What is Elementary Geometry?*, in *The Axiomatic Method, with Special Reference to Geometry and Physics*, L. Henkin, P. Suppes, A. Tarski (eds.), 1957 (1959), Amsterdam, North Holland, p. 16-29.

[7] P. Janicic, P. Quaresma, *Automated Verification of Regular Constructions, Automated Deduction in Geometry*, in *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, 2007, vol. 4869, Berlin, Springer.

[8] C. Bernardi, *Un approccio teorico ai sofware dinamici. Comandi come operazioni, trascinamento e trasformazioni geometriche*, in *Seminari di geometria dinamica*, a cura di G. Accascina, E. Rogora, Roma, Ed. Nuova Cultura, 2010, p. 25-28.

[9] J. Hong, *Proving by examples and gap theorems*, in *Proc. 27th Annual Symp. on Foundations of Computer Science*, ACM, Toronto, 1986, p. 107-16.

All'ombra dei giganti: Peano, Hilbert, Tarski

Tre lavori magistrali illustrano gli importanti contributi di M.Pieri ai fondamenti della geometria:

- Per la Geometria proiettiva: nel 1898 sia *I principi della geometria di posizione composti in un sistema logico-deduttivo*[10], sia il *Nuovo modo di svolgere deduttivamente la geometria projettiva*[11];
- Per la Geometria assoluta: nel 1899 *Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo: Monografia del punto e del moto*[12];
- Per la Geometria euclidea: nel 1908 *La geometria elementare instituita sulle nozioni di "punto" e "sfera"*[13], lavoro anticipato da sue pubblicazioni precedenti, in particolare la sua relazione al Congresso Internazionale di Filosofia a Parigi nel 1900[14] (purtroppo non la potè presentare personalmente e L. Couturat ne lesse un sommario[15]), dove, come è noto, Peano e la sua scuola (con Burali-Forti, Padoa, Vacca, Vailati) ebbero un gran successo.

In questi lavori il nostro è guidato da alcune esigenze fondamentali, spesso di impronta tipicamente peaniana, e cioè:

- Ridurre il numero degli assiomi (li chiama in realtà postulati): egli ne usa 20 per la Geometria proiettiva, come pure per la Geometria assoluta; mentre diventano 24 per la Geometria euclidea;
- Definire col minor numero possibile d'idee fondamentali (oggi diremmo 'termini primitivi') tutti gli enti che occorrono alla trattazione deduttiva[16]: tali nozioni fondamentali sono il *punto* e l'*omografia* per la Geometria proiettiva; il *punto* e il *moto* per la Geometria assoluta; *il punto e il moto*, prima, *il punto e la sfera*, dopo, quando, su suggerimento di Peano, Pieri passa dal 'moto' alla relazione 'c dista da a quanto b', cioè 'c appartiene alla sfera di b, centro a'.
- Fondare la Geometria come scienza deduttiva astratta[17].

[10] M. Pieri, *I principi della geometria di posizione composti in un sistema logico-deduttivo*, in «Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino», (2) vol. 48, 1898a, p. 1-62.

[11] M. Pieri, *Nuovo modo di svolgere deduttivamente la geometria projettiva,* in Rendiconti del Regio Istituto Lombardo», (2) vol. 31, 1898b, p. 780-798.

[12] Pieri 1899 cit.

[13] Pieri 1908 cit.

[14] M. Pieri, *Sur la géométrie envisagée comme un système purement logique,* in «International Congress of Philosophy 1900-1903», vol. 3, 1901, delivered by L. Couturat, p.367-404.

[15] Marchisotto, Smith 2007 cit., p. 341.

[16] Si veda la nota (*) in Pieri 1899 cit., p. 174.

[17] Pieri distingue due indirizzi nell'introduzione dei concetti matematici: quello *astratto* "prescinde da ogni interpretazione *fisica* delle premesse, e quindi anche dalla loro *evidenza*, ed intuitività geometrica" (M. Pieri, *Un sistema di postulati per la Geometria Projettiva astratta degli iperspazi*,

Inoltre egli formula l'auspicio che tali lavori possano aiutare a dare attuazione concreta a una "*qualche riforma degli Elementi di Geometria per le scuole*"[18].

Ovviamente Pieri non è una voce isolata in questi studi fondazionali. I suoi lavori si inseriscono in quel filone di rilettura critica e sistemazione rigorosa della Geometria, che decollò nel XIX secolo e continuò per molti anni anche nel XX. A parte Peano[19], che aveva usato tre nozioni primitive (punto, segmento, moto), ridotte a due da Pieri, le principali fonti, cui il nostro si collega, sono:

– G.K.C. Staudt, di cui Pieri traduce l'opera fondamentale[20] nel 1899[21] e che ispirò lo studioso di Lucca anche con un suo importante lavoro del 1856[22], parzialmente tradotto (i primi 6 paragrafi) nello stesso volume in cui compare la traduzione del primo[23];
– M. Pasch[24], che aveva usato come nozioni fondamentali: punto, segmento, porzione di piano, congruenza.
– R. De Paolis, per le sue idee sul fusionismo, di cui Pieri e Corrado Segre curarono la pubblicazione postuma di un lavoro presso l'Accademia delle Scienze[25].

Inoltre, come osservano North e Marchisotto[26], Pieri segue le orme di F. Klein e S. Lie, che avevano posto l'accento sui gruppi di trasformazioni e avevano avviato lo studio astratto del moto in geometria. In particolare troviamo l'influenza del Programma di Erlangen secondo due accezioni che in esso aveva avuto la nozione di invarianza. Per Klein una geometria è lo studio delle proprietà invarianti rispetto a un gruppo di trasformazioni: ad esempio la Geometria proiettiva è lo studio delle proprietà invarianti rispetto al gruppo delle omografie. Questa idea è ripresa da Pieri nel suo lavoro del 1898, *Nuovo*

«Rivista di Matematica» (poi abbr. RdM), vol.6, 1896-1899, nota (*), p. 10, corsivi dell'autore) e quello *fisico-geometrico*, "secondo il quale gli enti primitivi e gli assiomi vogliono essere desunti dall'osservazione diretta del mondo esterno" (*ibidem*). Diverso sarà il suo discorso quando affronterà il problema dell'insegamento della geometria: si veda l'ultima parte di questo articolo.

[18] Si veda la nota (*) in Pieri 1899 cit., p. 175.

[19] Si vedano ad es.: G. Peano, *I principii di geometria logicamente esposti*, 1889, Torino, Bocca; G. Peano, *Sui fondamenti della Geometria*, in «RdM», 4, 1894, p. 51-90.

[20] G.K.C. Staudt, *Geometrie der Lage*, 1847, Nürnberg, Verlag der Fr. Korn'schen Behandlung.

[21] M. Pieri, *Geometria di posizione, preceduta da uno studio di C. Segre sulla vita e le opere del v. Staudt*, Torino, Bocca, 1899. Contiene anche la traduzione dei primi 6 paragrafi dei *Beiträge*, di cui alla nota 21, p. 183-233.

[22] G.K.C. Staudt, *Beiträge zur Geometrie der Lage*, 3 vol., 1856,1857,1860, Nürnberg, Verlag der Fr. Korn'schen.

[23] Pieri 1899 cit.

[24] M. Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, 1882, Leipzig, Teubner.

[25] R. De Paolis, *Le corrispondenze proiettive nelle forme geometriche fondamentali di 1ª specie*, Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino», (2) vol. 42, 1892, p. 495-584.

[26] Marchisotto, Smith 2007 cit., p. 56.

modo di svolgere deduttivamente la geometria proiettiva. Ma per Klein una geometria è anche lo studio delle proprietà invarianti rispetto al ‘contenuto’ spaziale effettivo: questo concetto troviamo in un lavoro di Pieri del 1901[27]. Va infine ricordato che Pieri afferma di seguire Leibniz[28] nel ridurre la nozione di allineamento tra tre punti a quella di sfera, come illustrato dalla fig. 1.

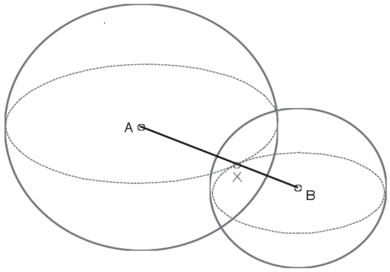


Figura 1. L’allineamento tra A, X e B tramite la nozione primitiva di sfera

Per nulla influenzato è invece Pieri, anche per motivi di uscita temporale di queste opere, dai lavori di Hilbert[29] e di Veblen e Young[30]. Il lavoro di Pieri risulta molto più rigoroso e radicale di quello di Hilbert: a fronte delle due nozioni fondamentali del nostro, Hilbert ne usa sei (*punto, retta, piano, ordine, congruenza di segmenti, congruenza di angoli*); inoltre nella prima versione come assioma di continuità compare il solo Principio di Archimede, che si rivela ben presto inadeguato e sarà sostituito nel 1900 con quello di completezza. Il confronto fra i due sul piano del rigore è nettamente a vantaggio del nostro, che però paga lo scotto con formulazioni assai complesse degli assiomi, a fronte della relativa semplicità di quelli di Hilbert: su questo punto si veda la discussione in Pambuccian[31].

Damnatio memoriae

Il lavoro di Pieri fu eclissato immediatamente da quello di Hilbert per una serie di motivi ovvi, vista la diversa statura matemaica dei due. Purtuttavia, per quanto riguarda la Geometria elementare, il lavoro di Pieri è più fine e

27 M. Pieri, *Sui principi che reggono la geometria delle rette*, in «Atti R. Acc. Scienze Torino», 36, 1900-01, p. 335-350.

28 Pieri 1908 cit., nota 2, p. 351.

29 D. Hilbert 1899 cit.. L’opera di Hilbert uscì nel giugno 1899, mentre Pieri pubblicò il suo testo presso l’Accademia delle Scienze il 14 maggio dello stesso anno.

30 O. Veblen, J.W. Young, *Projective Geometry,* two volumes, 1910-1918, Boston, Ginn & C.

31 V. Pambuccian, *Universal-existential axiom systems for Geometries expressed with Pieri’s isosceles triangle as single primitive notion*, in «Rendiconti del Seminario Matematico dell’Università e del Politecnico di Torino», 67, 2009, p. 327-339.

pulito e appare scientificamente non giustificato che sia finito nel dimenticatoio così in fretta. Riporto qui il commento di E. Marchisotto su questo punto:

> Pieri's Point and Motion memoir was totally eclipsed by Hilbert's Foundations of Geometry. Why? Social considerations (…) were certainly important: language barriers, economic and political development, and academic environment. The two works employed different styles and were produced in different surroundings, by mathematicians with greatly different entrepreneurial bents. Some of their goals coincided, but others differed. For example, both Hilbert and Pieri strove for simplicity and completeness of their postulate systems, and they achieved that partially, in different ways. But while Pieri stressed the formulation of geometry as a hypothetical-deductive system and emphasized the rigor of development, Hilbert sacrificed logical precision, eliminating details, to illustrate clearly the most important consequences of his various postulates. Neither mathematician achieved all of its goals. Pieri's eclipse was unfortunate for him, though its full effect is clouded by his later illness. It was certainly unfortunate for mathematics, for his ideas have never been pursued as thoroughly as they might have been[32].

Il guaio dell'immediata eclissi di Pieri non consiste solo nella stravincente concorrenza di Hilbert ma in una storia triste, che riguarda anche i legami tra i lavori di A. Tarski e il nostro.

Nel 1914 il lavoro del 1908 su *Punto e Sfera* è tradotto in polacco. A. Tarski lo legge nel 1924, usa gli assiomi di Pieri in un suo lavoro del 1927 e tiene anche un corso a Varsavia sui Fondamenti della Geometria, in cui usa un sistema di assiomi vicino a quello di Pieri (con 2 nozioni primitive e 20 assiomi)[33]. Tarski quindi preferisce il sistema di Pieri a quello di Hilbert. Nel 1930 Tarski dimostra che il suo sistema, che ha sviluppato nell'ambito del Calcolo dei Predicati del I ordine, è completo e decidibile. Il linguaggio di Pieri non era esplicitamente quello della logica, sviluppato in quegli anni da Peano, ma rimaneva a livello discorsivo; egli commenta tale rinuncia sottolineando che il linguaggio formale di Peano, nell'ambito del quale il suo sistema sarebbe sviluppabile, renderebbe incomprensibile ai più il suo lavoro[34]. Del resto ai primi del Novecento idee come quella di decidibilità e di completezza semantica rispetto a una teoria sono di là da venire. Anche Hilbert formula la completezza in senso più matematico che logico, con il suo celeberrimo e criticato assioma (di completezza appunto). Il lavoro di Tarski sarebbe dovuto apparire nel 1940, ma per una serie di traversie, anch'esse molto tristi, che coinvolsero Tarski, esule dalla sua patria, prima in Francia, poi in America, il testo andò distrutto; per fortuna si salvarono le bozze, che però furono pubblicate solo nel 1967. Nel

[32] Marchisotto, Smith 2007 cit., p. 151.

[33] Si vedano i dettagli in Marchisotto, Smith 2007 cit., p. 370.

[34] Pieri 1899 (1900) cit., p. 177.

frattempo Tarski negli anni Cinquanta pubblica una serie di lavori, che riprendono quello suo così sfortunato[35]: sostanzialmente il suo sistema, formulato al primo ordine, è basato su 2 nozioni indefinite[36] con 12 assiomi + 1 schema di assiomi. Curiosamente in questa vicenda di ‘damnatio memoriae’ e di manoscritti perduti Pieri è fortemente danneggiato: nel lavoro del 1951 Tarski cita la *Memoria* di Pieri del 1908 solo in bibliografia, mentre invece cita nel testo Hilbert, al cui sistema il suo è estraneo. Nel lavoro del 1959 Pieri scompare dalla bibliografia, mentre Hilbert rimane. Solo dal 1970 Pieri è ‘riabilitato’ da Tarski e dalla sua scuola: in quell’anno durante la discussione della tesi di Smith sui fondamenti della geometria, della quale Tarski è relatore, il grande logico polacco riconosce che l’ispiratore del suo sistema fu Pieri e non Hilbert; nel 1983, la relazione fondamentale usata da Tarski è riconosciuta come ‘relazione di Pieri’ nel fondamentale testo di Schwabhauser-Szemielew-Tarski[37], in cui si fa il punto sullo stato dei fondamenti della geometria elementare fino a quell’anno; infine nel 1999 Tarski-Givant[38] riconoscono che, insieme con Veblen, Pieri è “the closest in spirit” al lavoro di Tarski.

Finalmente Pieri emerge dall’ombra in cui era giaciuto fino allora; la sua impostazione nella *Memoria* del ‘punto’ e del ‘moto’ si rivela attuale proprio per i legami che la sua riflessione sul moto, considerato in modo astratto, mette in luce rispetto alla geometria elementare, così come è implementata negli attuali software geometrici. Discuterò questo punto nelle pagine successive.

Attualità del pensiero di Pieri

Nei *software* di geometria dinamica[39] essenzialmente si possono costruire nuovi punti (o oggetti geometrici) partendo da alcuni punti base[40]. Ad esempio dati due punti distinti A, B si può costruire il punto medio M del segmento AB, oppure il simmetrico C di A rispetto a B; oppure dati i punti A, B, C, D si può costruire il punto E intersezione, se esiste, della retta AB con la retta

[35] A. TARSKI 1957 (1959) cit.; A. TARSKI, *A decision method for Elementary Algebra and Geometry*, 2nd revised edition, 1951, Berkeley, University of California Press.

[36] $\beta(A,B,C)$ da interpretarsi ‘i punti *A*, *B*, *C* sono allineati e *B* è compreso fra *A* e *C*’; $\delta(A,B,R,S)$ da interpretarsi ‘i punti *A*, *B* sono estremi di un segmento uguale (congruente) al segmento di estremi *R*, *S*’.

[37] W. SCHWABHAUSER, W. SZEMIELEW, A. TARSKI, *Metamathematische Methoden in der Geometrie*, Berlin, Springer, 1983.

[38] A. TARSKI, S.R. GIVANT, *Tarski’s system of geometry,* in «Bulletin of Symbolic Logic», 5, 1999, p. 175-214.

[39] Questo paragrafo riprende in gran parte il lavoro di BERNARDI 2010 cit. La responsabilità di quanto qui scritto è comunque dell’autore.

[40] P. JANICIC, P. QUARESMA 2007 cit.

CD. Gli oggetti così costruiti dipendono sia logicamente sia informaticamente dai punti base dai quali si è partiti.

Il processo appena descritto può essere sinteticamente descritto in questo modo: *si hanno solo punti ed operazioni su questi: applicando tali operazioni a partire da un insieme di punti di partenza (tramite opportuni comandi del software), si ottengono altri punti*.

Quindi per progettare il software si pensa che *tutti gli oggetti siano punti*: ad esempio, invece di una retta, si considerano solo due suoi punti; il software opera generando un insieme di punti da un insieme di punti base. Sul piano logico, questa impostazione risale esattamente alla memoria di Pieri del 1899, che ispirò i successivi lavori di Tarski, salvo il fatto che Pieri presenta un sistema di assiomi per la Geometria dello spazio e noi qui ragioniamo di quella del piano. Con tali ricerche Pieri dimostra che i concetti e le proprietà che usualmente si studiano in geometria euclidea si riescono ad esprimere parlando *solo* di *punti* e di *operazioni* tra punti[41]. Analogamente nei software di Geometria dinamica si procede progettandoli come se si trattassero solo punti e operazioni su di questi. Se indichiamo con P l'insieme dei punti del piano, un'operazione è una funzione da P^2 a P: a ogni coppia ordinata di punti l'operazione associa un altro punto. Più in generale, si possono considerare funzioni da P^n a P. Questa problematica è alla base della progettazione dei software. Gli esempi sopra menzionati possono essere scritti così:

- M = A⊕B = punto medio di AB
- C = Simm_1(A,B) = simmetrico di A rispetto a B
- E = $\cap_1$ (A,B;C,D) = retta AB ∩ retta CD.

Secondo le operazioni che si introducono, si ottengono geometrie più o meno forti. Ad es. con le tre dell'elenco si ottiene una *geometria lineare affine* (i tre comandi sono affini). Aggiungendo altri comandi più complessi si può passare a geometrie più forti: riporto alcuni esempi.

Simm_2 (A,B,C) = simmetrico di A rispetto alla retta BC .

Con tale comando si possono 'tracciare' anche rette perpendicolari: si ottiene così una geometria che potremmo chiamare "*geometria lineare delle similitudini*".

{P, Q} = $\cap_2$ (A,B;C,D) = retta AB ∩ Crf(C;D) dove Crf(C;D) è la circonferenza di centro C e raggio CD. Con tale comando, e uno analogo $\cap_3$ tra circonferenze otteniamo la *geometria euclidea.*

Con il comando {P, Q} = $\cap_3$(A,B;B,A) otteniamo i vertici P, A, B e Q, A, B dei due triangoli equilateri di lato AB: è una costruzione che ricalca quella della Proposizione 1 del primo Libro degli *Elementi*.

[41] Scrive Pieri nella *Memoria* del 1899: "Il sistema che or si offre al giudizio del pubblico, non ammette che solo due idee prime: il punto e il moto; quest'ultimo inteso come *rappresentazione* [trasformazione] dei punti in punti, e lungi da ogni qualunque significato meccanico" (Pieri 1899 cit., p. 175, corsivo nell'originale).

Si noti che le operazioni così introdotte non sono sempre definite.

In generale il processo di costruzione di punti da alcuni punti base può essere così descritto: sia *B* un *insieme di punti base*; dagli elementi di *B,* tramite i comandi previsti dal *software* si genera un insieme *G* (i *punti generati*). *G* è formato dai punti che si sono ottenuti applicando certe operazioni agli elementi di *B* e iterando eventualmente il processo sui punti via via generati.

Ecco un altro esempio: dato il quadrilatero ABCD (punti base) si tracciano gli assi dei suoi lati (generando quindi i punti medi dei lati) e si determinano le loro intersezioni a due a due (fig. 2). Risulta perciò:

$$B = \{A, B, C, D\};\ G = \{R, S, T, U, 1, 2, 3, 4\}.$$

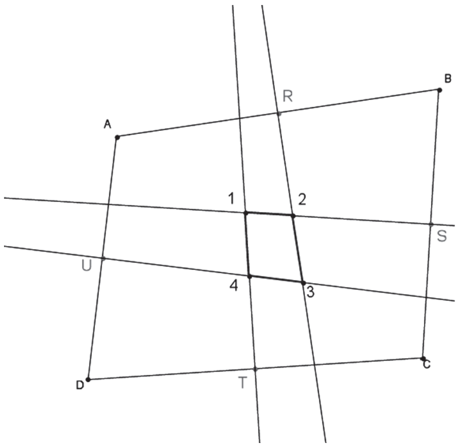


Figura 2

Una caratteristica importante dei *software* di geometria dinamica è la funzione di *trascinamento*[42]: con riferimento all'esempio in cui si sono costruiti i triangoli equilateri, cliccando su un punto base, diciamo A, è possibile muovere A (mentre l'altro punto base rimane fisso); si muovono di conseguenza i punti P, Q. Col trascinamento si vede che i punti P, Q continuano ad essere vertici dei due triangoli equilateri di lato AB. Si dice in tal caso che la costruzione supera il test di trascinamento. In generale non è però detto che una configurazione dei punti di *G* si conservi per trascinamento. Ad esempio, con riferimento all'esempio della fig. 2, può darsi che in posizioni particolari dei punti di base i quattro punti 1, 2, 3, 4 di *G* coincidano. Tale proprietà non si conserva però in generale trascinando i punti di base.

Il trascinamento, però, pur così importante, non sembra a prima vista estendibile a una trasformazione del piano in sé, analoga a quella che ad esempio si

[42] Per una discussione ampia sul significato del trascinamento si veda: F. ARZARELLO, F. OLIVERO, D. PAOLA, O. ROBUTTI, *A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments*, in «Zentralblatt für Didaktik der Mathematik», 34, 2002, p. 24-31.

ottiene in Geometria quando ruotando i vertici di un triangolo equilatero di 90° intorno a un suo vertice si ottiene immediatamente una trasformazione del piano in sé come estensione di tale operazione locale. Nel caso del trascinamento, da un lato sembra ragionevole affermare che, quando si sposta un punto base, si mandano rette in rette. Questo è quanto appare sullo schermo, e fa pensare a un'affinità (o ad una collineazione). D'altra parte, intuitivamente si può pensare che il trascinamento di un punto provochi una deformazione locale del piano, perché gli altri punti base non si spostano: questo fa pensare a un omeomorfismo. Inoltre in una trasformazione, i punti d'intersezione di due figure non si possono perdere (la funzione è bigettiva). Ma se consideriamo due segmenti con un punto in comune, è facile, spostando uno degli estremi, perdere il punto d'intersezione. Eppure lavorando con il trascinamento sembra di avere a che fare con un gruppo, addirittura commutativo!

Il gruppo, in effetti, c'è ma è nascosto dietro a una considerazione astratta dello spazio dei punti base e delle operazioni che si eseguono su di essi. Si tratta di una riflessione astratta su tale spazio, analoga a quella che Pieri ha fatto sulla nozione di moto nella sua *Memoria* del 1899.

In effetti, ha senso considerare l'insieme di n punti base B come uno spazio a $2n$ dimensioni: ciò corrisponde alla pratica dei sistemi di Geometria dinamica in cui ogni punto base conferisce alla configurazione dei punti G generati 2 gradi di libertà per ogni punto di B. Nell'esempio 4 abbiamo infatti 8 gradi di libertà: un punto singolo è un elemento di P, spazio a due dimensioni, mentre un triangolo è un elemento di P^3, spazio a sei dimensioni. In questo modo il trascinamento di una figura piana diventa una *trasformazione*, non del piano ma *dello spazio* B^n. Lo spostamento di un punto base è una *traslazione* del punto che corrisponde alla figura in questione in B^n. Per esempio, la retta costruita da due punti base A, B, è vista come coppia (A, B) ε P^2. Se si sposta A nella posizione A', allora il punto che rappresenta la retta diventa (A', B), e questo si ottiene dal punto iniziale (A, B) con la traslazione di vettore (AA', O). Viceversa, ogni traslazione in P^2 corrisponde ad uno spostamento dei punti base e, di conseguenza, ad una nuova posizione della retta.

In questo modo ogni operazione di trascinamento corrisponde a una traslazione nelle spazio P^n. Si noti che il gruppo delle traslazioni è commutativo e questo è in accordo con le pratiche di trascinamento, che sono sempre operazioni reversibili.

Interpretiamo ora nel nuovo ambiente il fatto che una configurazione soddisfi una certa proprietà, come la coincidenza di due punti costruiti con due procedimenti diversi. Sia ancora $B = \{P_0, \ldots, P_n\}$ l'insieme dei punti base; siano H e K due costruzioni, ciascuna delle quali fornisce un punto costruito a partire da B (o da un suo sottoinsieme).

Il realizzarsi dell'uguaglianza $\mathrm{H}(P_0, \ldots, P_n) = \mathrm{K}(P_0, \ldots, P_n)$ costituisce un *indizio* perché la coincidenza dei due punti sia una proprietà generale. Applicare il cosiddetto *test del trascinamento*, pratica corrente in *software* di geometria dinamica, spostando ad esempio P_0 di un vettore v, significa controllare se vale anche l’uguaglianza $H(P_0 + kv, \ldots, P_n) = K(P_0 + kv, \ldots, P_n)$ per $k \in [0, 1]$.

Ad esempio, vincolando uno dei punti base in fig. 2 alla circonferenza individuata dagli altri tre vertici, si osserva che i quattro punti 1, 2, 3, 4 coincidono in un punto diciamo O (in tal caso il numero delle dimensioni di B diminuisce di uno per le restrizioni imposte al vertice che si vincola). Il test suggerisce quindi che coincidano le due configurazioni: quella H dell’esempio e quella K che risulta costruendo un quadrilatero a partire dal punto O in modo che R, S, T, U siano assi dei suoi lati. Chiamiamo *curva di trascinamento* la curva virtuale che si fa percorrere a un punto della base B trascinandolo appunto col mouse sullo schermo in modo da mantenere coincidenti i punti 1, 2, 3, 4. In sostanza lungo la curva di trascinamento (che di solito è individuata per tentativi ed errori) si scopre una proprietà invariante del tipo $H(B) = K(B)$.

Che valore ha il test del trascinamento?

Qui scomodiamo Tarski e la sua dimostrazione di decidibilità della geometria elementare, o meglio una sua conseguenza: i problemi di complessità degli algoritmi di decidibilità. È ben noto il seguente risultato di Fischer e Rabin, che raffina quello di decidibilità di Tarski: “Esiste un c tale che ogni enunciato E della geometria elementare ($|E| < n$) è deciso in meno di $2\hat{}2\hat{}cn$ passi” [43].

Meno noto è un teorema, provato da Jiawei Hong nel 1986 e noto come ‘gap theorem’[44].

Tale teorema considera costruzioni geometriche come quelle che abbiamo illustrato sopra per i software geometrici, ad esempio costruzioni di punti da un insieme base B tramite operazioni del tipo

$$P = A \oplus B;\ P = \cap_1(A,B;C,D);\ \{P, Q\} = \cap_2(A,B;C,D);\ \{P, Q\} = \cap_3(A,B;C,D).$$

Una costruzione così ottenuta è una configurazione di un numero finito di punti, ognuno dei quali ha una rappresentazione decimale come punto del piano cartesiano. Ora, per stabilire se due costruzioni $H(B)$, $K(B)$ sono uguali, in virtù del ‘gap theorem’ è possibile limitarsi a considerare solo un numero finito C di cifre nell’allineamento decimale dei punti $H(B)$, $K(B)$: se con tali approssimazioni i punti di $H(B)$, $K(B)$ risultano a due a due uguali, allora i due insiemi risultano davvero uguali e viceversa. Il numero C di cifre necessario dipende dalle costruzioni eseguite e dal numero di punti della base, ed è comunque un numero molto grande che cresce superesponenzialmente rispetto ai parametri da cui dipende. Il risultato è quindi solo teorico, come già quello di Rabin e Fischer.

[43] M.J. FISCHER, M.O. RABIN, *Superexponential complexity of Presburger arithmetic*, in R. M. KARP (ed.) *Proceedings of the SIAM-AMS Symposium in Applied Mathematics*, 7, 1974, p. 28.

[44] J. HONG, 1986 cit.. Si veda anche G. LOLLI, *Morte e resurrezione della dimostrazione*, «Le Scienze», n. 345, 1997, p. 50-57.

Tale approssimazione è ben di là di quella raggiungibile con i pixel disponibili nello schermo di un computer. Infatti, con un calcolo molto approssimativo, si può stimare che in uno schermo da 1440×900 pixel, che misura circa 334x215 mm, il lato l di un pixel sia dell'ordine di grandezza di circa 0,25 mm. L'ampiezza d degli intervalli in ogni asse di P^n sufficienti per testare se H(B) = K(B) in modo esatto in base al 'gap theorem' è invece dell'ordine di grandezza di $d = 1/C$ mm (chiamiamo d-celle i quadratini di dimensione d): si tratta di numero enormemente più piccolo rispetto al numero p^2 (~$1{,}3 \cdot 10^6$) dei pixel contenuti nello schermo. Inoltre p è dell'ordine di grandezza (~10^3) del numero medio di pixel che si esaminano lungo una curva di trascinamento; invece c ha ordine di grandezza 10^{100000} (per enunciati geometrici di media complessità, quali quelli che si trovano in un libro di testo delle scuole superiori). Pertanto il numero $N = l^2/d^2$ di d-celle contenute in un pixel e necessarie per decidere l'uguaglianza eventuale tra due costruzioni H(B), K(B) non troppo complesse è estremamente grande (circa 10^{100000}). Limitandosi a considerare i pixel, non si ha certo l'approssimazione necessaria per ottenere la certezza del risultato in base a quanto asserisce il 'gap theorem'. Il trascinamento dà il suo responso in base a un'approssimazione più grossolana dei punti di ciascun pixel; pertanto può non essere veritiero. Occorrerebbe avere una risoluzione ben maggiore per ottenere risultati certi. Eppure l'impressione che si ha con le pratiche di trascinamento è che esso supporti sempre congetture veritiere, che cioè l'invariante scoperto lungo la curva di trascinamento corrisponda a una congettura valida.

Dimostrerò ora che questa impressione è ben fondata, basandomi su valutazioni probabilistiche. Distinguerò in primo luogo la situazione come risulta confrontando H(B) e K(B) al livello dei pixel (l-celle) coinvolti nel trascinamento con quanto risulta al livello più fine delle d-celle di dimensione $d = 1/c$, necessarie per stabilire qual è con certezza la situazione in base al 'gap theorem'.

Più precisamente, quando col trascinamento si individua una proprietà invariante, è così perché in tutti i pixel della curva di trascinamento appare che H(B) = K(B). Se si scende al livello delle d-celle contenute in un pixel P_i, che sono in numero di $N = l^2/d^2$, occorre distinguere due tipi di d-celle:

– le d-celle in cui H(B) = K(B): sia N^+ il loro numero (celle concordanti);
– le d-celle in cui H(B) ≠ K(B): sia N^- il loro numero (celle discordanti).

Ovviamente è $N^+ + N^- = N$.

Per ogni pixel P_i coinvolto nel trascinamento (fig. 3), ci configurano tre situazioni-tipo fondamentali *i, ii, iii*, cioè:

i. $N_i^+ \ll N_i^-$
ii. $N_i^+ \gg N_i^-$
iii. $N_i^+ \sim N_i^-$

Sia a il numero delle d-celle in cui si verifica il caso (*i*), b il numero delle d-celle in cui si verifica il caso (*ii*), c il numero delle d-celle in cui si verifica il caso (*iii*).

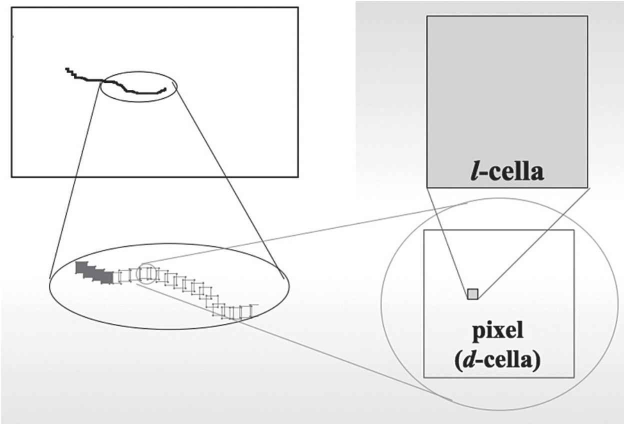


Figura 3. I p pixel (d-celle) in un trascinamento e le N l-celle in un pixel

Esaminiamo il caso (*i*): si tratta di una situazione in cui in moltissime d-celle risulta H ≠ K ma nel pixel esaminato risulta H = K. La probabilità che questo capiti è pari a $N_i^+/(N_i^- + N_i^+) \sim 0$ in quanto è già $N_i^+/N_i^- \sim 0$: la probabilità di sbagliare nel caso che il trascinamento dia H = K è praticamente 0. Cioè il caso (*i*), di fatto, ha una probabilità bassissima di presentarsi e quindi è $a \sim 0$. In prima approssimazione si può supporre l'indipendenza tra le l-celle[45]: si può quindi ragionare nell'ambito della probabilità classica. In altre parole, se dal trascinamento risulta H(B) = K(B), allora la probabilità che sia $a > 0$ è praticamente nulla e quindi con probabilità alta solo $b + c$ è diverso da 0;

Per il caso (*iii*), la probabilità che il numero c sia non trascurabile (ad es. >30) è anch'essa molto bassa: infatti se nella d-cella j si ha $N_j^+ \sim N_j^-$, la probabilità che si dichiari H(B) ≠ K(B) col trascinamento è ~ ⅝. Quindi la probabilità che trascinando in c d-celle si dichiari H(B) ≠ K(B) è circa $(1/2)^c$. Quindi se per esempio è c >30, tale probabilità è $<10^{-10}$. Se questo non si verificasse (ad es. se tale probabilità fosse >1/10) cadrebbe la dichiarazione che H(B) = K(B). Quindi quasi tutti i pixel (tranne al più un numero basso, ad es. < 30) sono di tipo (*ii*). In altre parole: se dal trascinamento risulta che H(B) = K(B) per i pixel P_i appartenenti alla curva di trascinamento, la probabilità che si verifichino i casi (*i*) o (*iii*) è ~0.

Il test di trascinamento non inganna!

[45] D. STAUFFER, A. AHARONY, *Introduction to percolation theory*, London, Taylor & Francis, 1992.

Questi risultati illustrano il legame che sussiste tra gli aspetti 'sperimentali' che può assumere l'esplorazione matematica condotta con l'utilizzo di strumenti (non necessariamente il computer, come nel caso esaminato) e la sua sistemazione teorica. È qui interessante accostare due citazioni, scritte a distanza di più di cento anni l'una dall'altra, la prima di Pieri, la seconda di Arzarello et al., in cui tale nesso è affrontato con stupefacente coincidenza di vedute, seppure con le ovvie differenze dovute alla distanza temporale in cui i due passi sono stati scritti. Gli strumenti, siano essi dei fili, dei sistemi articolati, oppure un software, sono fondamentali per creare la connessione tra le modalità percettive e corporee e quelle teoretiche con cui i concetti geometrici sono concretamente acquisiti.

Da un lato, scrive Pieri:

> Molto giova all'intelligenza dei fatti geometrici l'aver sempre innanzi *un'immagine* o rappresentazione intuitiva del 'punto' e della 'sfera d'un punto intorno ad un altro'; ossia l'abito di contemplare il senso reale e concreto che l'uso annette ai giudizi come "A, B, C sono punti e C dista da A quanto B". Se è vero che "nichil est in intellectu, quod non fuerit in sensu" (Aristotile) e che "ogni uman sapere ha principio dall'intuizione" (Kant) non sarà mai superfluo appellarsi anche ai mezzi più grossolani ed empirici per suscitare e vivificare nei giovani ogni sorta di cognizioni intuitive e sperimentali sui vari oggetti geometrici. Si può avere un'immagine del punto considerando ad esempio un granellino di polvere, il foro prodotto dalla punta di un ago in un foglio di carta, ecc.; la sfera si può concepir come superficie d'un corpo rotondo, quale ad es. una palla, un arancio, un globo artificiale. Se un'asta rigida è fissa da un'estremità – sia per es. A – ma può girare intorno ad A come pernio, le posizioni dell'altro estremo B porgono immagine dei vari punti che 'distan da A quanto B'. Così un filo teso tra due punti A e B, uno dei quali sia fisso, potrà servire a darci un'idea così della sfera B, come del segmento |AB|; ecc. E la più parte dei nostri assiomi si presterebbe assai bene a verifiche sperimentali; da istituir p. es. sopra sistemi articolati di semplicissima struttura; e col sussidio di fili opportunamente saldati dall'un dei capi alla trama d'un telaio rigido; ecc.
> Ma la Geometria, come scienza formale, potrebbe anche reggersi ed essere intesa, pur senza mai fare appello al contenuto intuitivo o fisico de' suoi concetti primitivi (il 'punto' e la 'sfera'): perché una mente educata alle idee generali e sorretta da una discreta facoltà di astrazione, divien capace di percepire, oltre il senso logico astratto, anche il nesso delle varie proposizioni e le loro veci deduttive, la concatenazione delle parti e i loro rapporti col tutto, ecc., sol che intenda alle proprietà cardinali, che i vari assiomi o postulati della Geometria conferiscono a quelle nozioni primitive (…)[46].

Dall'altro lato, scrivono Arzarello et al.:

[46] Pieri 1908 cit., Nota 2ª, p. 447.

> The previous discussion has shown a critical/dialectical relationship between practical and theoretical issues. In the specific domain of classic Euclidean Geometry, the core of such relationship seems to reside in the notion of construction to be related to the specific tools that are assumed available. The practical realization of any graphical element has a counterpart in a theoretical element, therefore, in either an axiom that states how to use a tool, or a theorem that validates the construction procedure according to the stated axioms. In these terms, a geometrical construction can be considered archetypal for a theoretical approach to Geometry. As a consequence, construction problems not only have a critical place in the development of Geometry as a discipline, but also keep a central place in traditional Geometry textbooks that form educational programs. (...) The interest for constructions has been renewed by the appearance of Dynamic Geometry Systems (DGS), where the basic role played by construction has been brought on the scene by the use of graphic tools available in a dynamic system (…). Any DGS-figure is the result of a construction process, since it is obtained after the repeated use of tools, chosen among those available in the "tool bar". However, what makes DGS so interesting is not just the construction facility; but the direct manipulation of its figures, conceived in terms of the embedded logic system (Laborde & Straesser, 1990; Straesser 2001). DGS-figures possess an intrinsic logic, as a result of their construction, placing the elements of a figure in a hierarchy of relationships, which correspond to the procedure of construction according to the chosen tools. This relationship is made evident in the dragging mode, where, by varying the basic points (elements) from which a figure has been built, what cannot be dragged constitutes the results of the construction. The DGS-figure is the complex of these elements, incorporating various relationships which can be differently referred to definitions and theorems of geometry[47].

Concludo l'articolo ricordando il libro per la scuola media scritto nel 1912 da Angelo Pensa[48] e direttamente ispirato dal pensiero di Pieri. Nella *Prefazione* da lui scritta, C. Burali-Forti pone l'accento su due aspetti del pensiero di Pieri presenti nell'opera di Pensa, che abbiamo visto formulati nella citazione precedente:

- l'asserto che lo studio iniziale di ogni scienza, matematica compresa, debba avere base sperimentale;
- il valore sia della giustificazione sperimentale sia di quella teorica agli enunciati geometrici.

Scrive infatti Burali-Forti:

[47] F. Arzarello, M.G. Bartolini Bussi, A. Leung, M.A. Mariotti, I. Stevenson, *An experimental approach to theoretical thinking in the mathematics classroom*, in *ICMI Study 19: Proof and Proving in Mathematics Education*, G. Hanna, M. de Villers (eds.), NISS, Berlin, Springer, in corso di stampa.

[48] A. Pensa, *Elementi di Geometria ad uso delle scuole secondarie inferiori*, Torino, G.B. Petrini, 1912.

Il substrato scientifico [del volume di Pensa] è fornito dalla importante memoria di M. Pieri, *La geometria elementare istituita sulle nozioni di punto e di sfera* (…). Al concetto, sebben semplice, di *sfera* è peraltro sostituito quello, più comune e intuitivo di *distanza*, anzi quello materiale di *filo teso tra due punti*, o quello fornito dal *compasso*. Data l'idea *materiale* di PUNTO (§1) e di FIGURA GEOMETRICA (classe di punti), il *filo teso* fornisce quella di RETTA; dalla retta deriva il PIANO; il compasso, o il filo teso tra due punti, dà la DISTANZA fra essi; la costante eguaglianza dei punti corrispondenti di due figure, conduce alle FIGURE EGUALI (…); la sovrapponibilità, così intuitiva e così utile didatticamente, è pure introdotta e largamente usata in seguito (…)." (corsivi dell'autore)[49].

Le figure 4, 5 (tratte dal volume di Pensa) e 6 (tratta dal CD di un volume[50] che realizza concretamente l'idea di Pieri di fare "verifiche sperimentali (…) sopra sistemi articolati") illustrano il metodo 'sperimentale' con cui ci si può avvicinare alla matematica, come risultato di un'interazione attiva e non solo contemplativa con gli strumenti, siano essi concreti o virtuali:

gli oggetti matematici provengono non dall'astrazione da oggetti reali (…) ma formalizzano l'operare umano (per esempio, tracciare un cerchio sul terreno, usando una corda)[51].

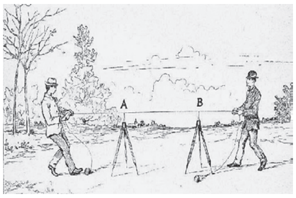


Figura 4

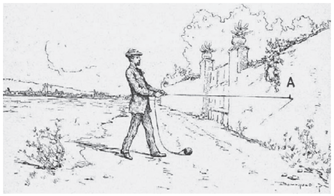


Figura 5

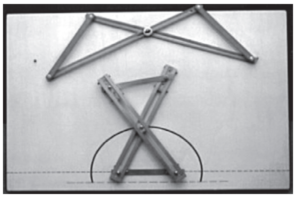


Figura 6

Conclusione

In quest'articolo si è cercato di attuare quanto augurato da Marchisotto e Smith nel loro bellissimo volume sull'eredità di Mario Pieri e cioè un riesame e una rivalutazione dei suoi contributi alla Geometria, purtroppo ancora oggi sconosciuti, alla luce delle ricerche e dei lavori moderni[52]. Si è così messo in evidenza come la sua *Memoria* sul Punto e sul Moto contenga idee molto moderne: esse non solo hanno ispirato in modo essenziale i lavori di Tarski

[49] PENSA 1912 cit., p. IV.

[50] M. BARTOLINI BUSSI, M. MASCHIETTO, *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*, Convergenze, Milano, Springer, 2006.

[51] E. GIUSTI, *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*, Torino, Bollati Boringhieri, 1999.

[52] MARCHISOTTO, SMITH 2007 cit., p. 370.

sull’argomento, come solo tardivamente è stato riconosciuto, ma sono alla base del modo con cui gli attuali progettatori di *software* per la geometria dinamica impostano i loro programmi. L’idea essenziale è di pensare tutti gli oggetti geometrici come configurazioni di punti generati da operazioni su punti: questa impostazione operativa troviamo esattamente nella monografia di Pieri, poi abbandonata, a quanto pare su consiglio dello stesso Peano.

L’articolo illustra questo aspetto dei *software* di Geometria dinamica mettendone in risalto il loro carattere di gruppo di trasformazioni: si dimostra questo tramite un’analisi astratta dello spazio su cui agiscono le operazioni suddette, secondo un’impostazione tipica di Pieri, fautore e frequentatore rigoroso di tali metodi astratti, in conformità allo stile della scuola di Peano. L’analisi è completata da una giustificazione su basi probabilistiche della validità delle congetture che si traggono nei software di geometria dinamica tramite il cosiddetto *test del trascinamento*.

Conclude l’articolo un cenno all’impostazione che Pieri dava all’insegnamento della Geometria a livello di scuola secondaria, considerando sia le note didattiche nei suoi lavori scientifici sia il testo per la scuola media di A. Pensa, direttamente ispirato ai principi pedagogici del nostro.

REGNO D'ITALIA

ESAMI DI LICENZA LICEALE

DEL 1876

dati in conformità del R. Decreto 7 Gennaio e del Regolamento 22 Febbraio 1875

Il Presidente della Commissione Esaminatrice del liceo Cavour in Torino

OSSERVATI I REGISTRI DEGLI ESAMI

dichiara che il Sig. Peano Giuseppe figlio di Bartolomeo nativo di Spinetta ha sostenuto la prova in tutte le materie d'esame, riportando i seguenti punti:

	PROVE D'ESAME	SESSIONE DEL LUGLIO VOTO	SESSIONE DELL'OTTOBRE VOTO	OSSERVAZIONI
SCRITTE	Lettere Italiane	sette		
	Lettere Latine	sei		
	Lingua Greca	sei		
	Matematica	nove		
ORALI	Lettere Italiane	dieci		
	Lettere Latine	dieci		
	Lingua Greca	nove		
	Matematica	dieci		
	Filosofia	dieci		
	Storia	dieci		
	Fisica	dieci		
	Storia naturale	nove		

e perciò gli rilascia il presente Certificato di Licenza

Torino addì 30 Novembre 1876

IL PRESIDENTE DELLA COMMISSIONE ESAMINATRICE

Visto: IL PROVVEDITORE AGLI STUDI

MARCA DA BOLLO

Diploma di licenza liceale di G. Peano

La storia delle matematiche a Torino tra Ottocento e Novecento: il sodalizio fra G. Peano, G. Vailati e G. Vacca[1]

CLARA SILVIA ROERO

Un contesto favorevole

Nel Risorgimento e nei primi decenni dell'unità d'Italia alcuni docenti dell'Ateneo torinese, come Silvestro Gherardi (1802-1879), Gilberto Govi (1826-1889), Giovanni Virginio Schiaparelli (1835-1910), Angelo Genocchi (1817-1899) e Francesco Siacci (1839-1907), si dedicarono a ricerche di storia delle scienze matematiche e fisiche.[2] Fra gli obiettivi, non sempre espliciti nei loro lavori, traspariva la rivendicazione di un'identità scientifica nazionale che poteva vantare una tradizione di prima grandezza sulla scena europea, con figure come Leonardo Fibonacci Pisano, Leonardo da Vinci, Giambattista Benedetti, Galileo Galilei, Giambattista Beccaria, Giuseppe Luigi Lagrange, Alessandro Volta, ecc.

Questo fermento di analisi storiografiche che, soprattutto per Gherardi e Govi, era stato ispirato dall'opera di Guglielmo Libri (1802-1869) *Histoire des*

[1] Ricerca eseguita nell'ambito del progetto PRIN 2009 *Scuole matematiche e identità nazionale nell'età moderna e contemporanea*, unità di Torino. Nell'articolo si adottano le seguenti abbreviazioni: ACS per Archivio Centrale dello Stato; Roma ANL per Roma, Accademia Nazionale dei Lincei; ASUT per Archivio Storico dell'Università di Torino; BDF Milano per Biblioteca del Dipartimento di Filosofia dell'Università di Milano; BSM per Biblioteca Speciale di Matematica; CSSUT per Centro Studi di Storia dell'Università di Torino; Cuneo CDT per Centro di Documentazione Territoriale di Cuneo; DMUT per Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino; DSSP per Deputazione Subalpina di Storia Patria; FGV per Fondo Giovanni Vailati; «RdM» per «Rivista di Matematica», «S&V» per «Schola et Vita»; Scienze MFN per Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali. Gli scritti di Peano sono citati con la sigla presente nel dvd, a cura di C.S. Roero, *L'Opera Omnia e i Marginalia di Giuseppe Peano (with English Version)*, Torino, DMUT, 2008, visibile anche nel sito www.peano2008.unito.it.

[2] Cfr. L. Briatore, *S. Gherardi*, in C.S. Roero (a cura di), *La Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche Naturali di Torino 1848-1998*, vol. 2, *I docenti*, Torino, DSSP, 1999, p. 243-245.

sciences mathématiques en Italie depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du XVII siècle (Paris 1838-40)[3], per Schiaparelli derivò invece dai soggiorni di studio all'estero. Negli anni 1857-1859 egli frequentò, all'Università di Berlino, i corsi di "Storia della filosofia naturale da Galileo ai tempi nostri", tenuto da Johann C. Poggendorff, e di "Logica ed Enciclopedia delle scienze filosofiche", svolto da Karl L. Michelet, come documentano gli appunti del suo *Diario* autografo[4]. Lesse allora le opere di J. Kepler, I. Newton, C. F. Gauss, C. MacLaurin, J. V. Poncelet e l'*Aperçu historique* di M. Chasles, studiò il greco e l'arabo per comprendere l'astronomia antica sulle fonti originali, iniziando quel percorso parallelo di ricerche, in ambito astronomico e storico-scientifico, di altissima levatura.

Per Genocchi e per Siacci gli stimoli ad occuparsi di storia delle matematiche vennero dal principe Baldassarre Boncompagni, raffinato bibliofilo e storico, amico di entrambi. Tuttavia le loro esplorazioni in questo campo si limitarono ad alcuni articoli, apparsi sul *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche* (1868-1887), da lui diretto.

Gli studi e le iniziative di quel periodo, se da un lato mirarono ad esaltare le glorie dell'Italia appena nata, dall'altro erano volti a rintracciare, raccogliere, conservare e far conoscere i patrimoni scientifici locali, attraverso il recupero e la valorizzazione di documenti inediti (manoscritti e lettere), strumenti e reperti archeologici, artistici, naturalistici, ecc. del passato, a imitazione di quanto si stava facendo in vari stati esteri. Inoltre per incrementare l'istruzione e le ricerche d'avanguardia in matematica, fisica, chimica, geologia e scienze naturali, alcuni docenti dell'Università torinese, come Carlo Ignazio Giulio, Quintino Sella, Francesco Faà di Bruno e Camillo Ferrati, donarono alla Facoltà di Scienze MFN e ad altri enti pubblici le loro ricche biblioteche e le collezioni di minerali e strumenti didattici[5].

Parallelamente a queste attività si affinarono i metodi storiografici e filologici, e a cavallo fra Ottocento e Novecento si avviarono a Torino riviste e collane dedicate alla storia delle scienze[6]. Con alcune case editrici professori universitari e insegnanti di vari istituti scolastici iniziarono a diffondere la

[3] Cfr. A. Del Centina, A. Fiocca, *Guglielmo Libri matematico e storico della matematica*, Firenze, Olschki, 2010, p. 291-294.

[4] *Diario di G. V. Schiaparelli studente all'Università di Berlino*, Archivio Storico dell'Osservatorio di Brera, Fondo G.V. Schiaparelli, A 370/001 SCH.

[5] Cfr. *Catalogo della Biblioteca Speciale di Matematica della R. Università di Torino, Maggio 1891*; *2° Fascicolo Maggio 1896*, Torino, Stamperia R. Ditta G.B. Paravia e comp., 1891; 1896 e L. Giacardi, C.S. Roero, *Biblioteca Speciale di Matematica «Giuseppe Peano»*, in C.S. Roero (a cura di), *La Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche Naturali di Torino 1848-1998*, vol. 1, *Ricerca, Insegnamento, Collezioni scientifiche*, Torino, DSSP, 1999, p. 437-458, in particolare p. 437-447.

[6] Biblioteca delle "Storie delle Scienze", Torino, Edizioni S.T.E.N.: O. Zanotti Bianco, *Storia popolare dell'astronomia,* 1913, E. Thorpe, *Storia della chimica*, *Versione dall'inglese con introduzione*, a cura di R. Pitoni, 1911; R. Pitoni, *Storia della fisica*, 1913.

cultura scientifica con l'ausilio della storia, sempre più presente nei libri di testo, nei trattati, nelle enciclopedie, nelle edizioni di scritti e opere complete di personaggi illustri, nei dizionari biografici, nelle esposizioni e nelle celebrazioni, con elogi e conferenze, all'atto dell'inaugurazione di lapidi, statue e monumenti nel periodo post-unitario.

Questo fervore di iniziative portò negli anni 1870 a richiedere al Ministero della Pubblica Istruzione di istituire, in alcune università, cattedre di storia delle scienze, da destinare a cultori che si fossero distinti, in Italia e all'estero, per l'eccellenza delle ricerche. Tale proposta non fu però poi accolta[7]. Tuttavia l'interesse per questo tipo di studi crebbe a Torino nelle ultime decadi dell'Ottocento, grazie ad alcuni assistenti, docenti e insegnanti che ruotavano intorno ai matematici Giuseppe Peano (1858-1932), Gino Loria (1862-1954) e Vito Volterra (1860-1940). Fra essi un ruolo di primo piano ebbero due giovani assistenti universitari: Giovanni Vailati (1863-1909) e Giovanni Vacca (1872-1953), che nella fucina del progetto editoriale del *Formulaire de Mathématiques* di Peano, fra il 1892 e il 1905, collaudarono capacità critiche e attitudini all'indagine storiografica, divenendo rinomati studiosi, riconosciuti a livello internazionale. Lo scopo del presente articolo è di evidenziare alcuni aspetti dei loro rapporti con Peano nel periodo torinese, alla luce di carteggi e di altri documenti inediti relativi alla storia delle matematiche.

La passione di Peano per la storia e le letterature

Fin da studente, al Liceo classico Cavour di Torino, Peano mostrò una particolare inclinazione non solo per le discipline scientifiche, come la matematica e la fisica, ma anche per la storia, la filosofia e le letterature di varie civiltà: latina, greca, italiana, ...[8]. Questa passione lo accompagnò nel corso della vita[9] e si riverberò in molteplici direzioni, principalmente rivolte alla

[7] Cfr. A. Borrelli, E. Schettino, *La prima cattedra di storia della fisica in Italia: un'occasione mancata*, in «Scienza e Politica», 33, 2005, p. 75-110.

[8] La figura a p. 80 wmostra il certificato dell'esame di licenza liceale di Peano, sostenuto nel 1876, che registra il massimo punteggio nelle prove orali di storia, filosofia, letteratura italiana, latina, greca, matematica e fisica. L'attestato è attualmente conservato in ASUT. Ringrazio Paola Novaria per la segnalazione e per l'autorizzazione a pubblicarlo in questa sede.

[9] Lalla Romano, che del matematico era una pronipote, ritornò più volte nei suoi racconti sulla predilezione di Peano per la lingua latina, ricordando ad esempio che quand'era al ginnasio, si scambiavano messaggi in latino, firmati «nepticula Lalla» e «Barba Joseph». Peano aveva scritto per lei il resoconto di un viaggio da Cuneo a Ventimiglia, intitolato *Ad urbem Intemeliorum*. Dalla Calabria, probabilmente da Crotone, sede della Scuola pitagorica (VI-V sec. a. C.), le spedì una cartolina su Archita di Taranto, illustre esponente di quella scuola e maestro di Platone: "Te maris et terrae numeroque carentis harenae mensorem cohibent, Archyta." (L. Romano, *Una giovinezza inventata*, in *Opere*, vol. 2, Milano, Mondadori, 1992, p. 12-14, 95, 103).

diffusione della cultura scientifica. Lo testimoniano la sua ricca biblioteca, i corsi tenuti all'Università, le *Conferenze Matematiche Torinesi*, organizzate per gli insegnanti il sabato pomeriggio dal 1915 al 1925, gli articoli su matematici e logici del XVI e XVII secolo vissuti in Piemonte, le citazioni storiche che costellano molti suoi scritti, le riviste da lui curate, la guida di tesi di laurea e di ricerche di insegnanti[10] e il sodalizio culturale con storici 'professionisti', come Vailati, Vacca, Loria, Antonio Favaro, Roberto Marcolongo, Sebastiano Timpanaro, Alpinolo Natucci, Icilio Guareschi, e molti altri, anche stranieri, come Gustav Eneström, Louis Couturat e Samuel Dickstein[11].

Nella sua libreria, recentemente ricostruita sulla base dei cataloghi redatti dalla moglie e dagli ultimi collaboratori[12], Peano possedeva pregevoli collane di opere classiche, come l'*editio princeps* degli *Elementi* di Euclide, in greco, stampata a Basilea nel 1533 e quella a cura del filologo danese J.H. Heiberg, in cinque volumi (Lipsia 1883), l'*opera omnia* di Archimede, curata dallo stesso Heiberg, in tre volumi (Lipsia 1880), l'*opera omnia* di G.W. Leibniz, nell'edizione classica a cura di L. Dutens, in sei volumi (Ginevra 1768), quelle dei fratelli Jacob e Johann Bernoulli (1744 in 2 vol. e 1742 in 4 vol.), i *Philosophiae naturalis Principia Mathematica* di I. Newton commentati da T. Le Seur e F. Jacquier (Ginevra 1760), i trattati di C. MacLaurin, di J. L. Lagrange, di S. F. Lacroix, di A.-L. Cauchy e le opere complete di B. Riemann, di N. Abel e di altri illustri matematici dell'Ottocento. Alcuni tomi furono donati da Peano a membri della sua *équipe* appassionati di storia, come Mario Gliozzi

[10] Cfr. C.S. Roero, *Peano e l'altra metà del cielo,* in C. S. Roero (a cura di), *Giuseppe Peano matematica, cultura e società*, Cuneo, L'Artistica Savigliano, 2001, p. 60-77; *Giuseppe Peano and the female universe*, in V. Babini, R. Simili (eds.), *More than pupils. Italian women in science at the Turn of the 20th Century*, Firenze Olschki, 2007, p. 27-49; E. Luciano, C.S. Roero, *La Scuola di Peano*, in C. S. Roero (a cura di), *Peano e la sua Scuola fra matematica, logica e interlingua*, Torino, DSSP, 2010, p. xi-xviii, 1-212.

[11] Cfr. C. S. Roero, N. Nervo, T. Armano (a cura di), *L'Archivio Giuseppe Peano*, cd-rom, Torino, DMUT, 2002, Idem *(with English Version)* 2008; E. Luciano, C.S. Roero, *Giuseppe Peano - Louis Couturat Carteggio (1896-1914)*, Firenze, Olschki, 2005; C.S. Roero, *Lingua de mathematica, lingua de amicitia, lingua de animos nobile. Il carteggio fra Sebastiano Timpanaro e Giuseppe Peano*, in P. de Capua, M. Feo, V. Fera (a cura di), *Da Tortorici alla Toscana: percorsi della famiglia Timpanaro*, *Atti del Convegno Tortorici, Centro di Storia Patria 22-23.8.2003*, Messina, Centro Studi Umanistici, Università, 2009, p. 15-44.

[12] Cfr. N. Nervo, C.S. Roero, *L'Archivio Peano della Biblioteca Civica di Cuneo*, in Roero 2001 cit., p. 78-89, E. Luciano, *La Biblioteca ritrovata di Giuseppe Peano*, in «Rendiconti Cuneo 2007», p. 184-188; E. Luciano, C.S. Roero, *Giuseppe Peano Matematico e Maestro*, Torino, DMUT, 2008, p. 86-88; E. Luciano, C.S. Roero, *L'Archivio e la Biblioteca di Peano*, in «Lettera Matematica Pristem», 69, 2008, p. 46 e, desunto dalla tesi di dottorato, E. Luciano, *Il lascito librario e il catalogo della sua 'Biblioteca'*, p. 1-40, visibile nel sito, a cura di C.S. Roero, E. Luciano, www.peano2008.unito.it/catalogo.pdf.

che ebbe l'*Histoire des Mathématiques* (2 vol. 1758) di J. F. Montucla e le opere di P.S. de Laplace, *Théorie analytique de la probabilité* (1814) e *Système du monde* (1824)[13], oppure Ugo Cassina nel cui Fondo librario conservato a Parma, presso il Dipartimento di Matematica, si trovano vari testi con la firma autografa del logico piemontese.

Di queste e di molte altre letture scientifiche, anche tratte da opere e periodici della Biblioteca speciale di Matematica dell'Ateneo torinese, come documentano alcuni appunti conservati fra i suoi manoscritti e nei marginalia dei suoi libri[14], Peano si servì nelle sue lezioni universitarie. Giovanni Vacca così riferisce nel 1932 l'esperienza fatta al suo fianco, come assistente alla cattedra di Calcolo infinitesimale:

> Durante gli anni della mia convivenza con lui, dal 1897 al 1905, ebbi modo specialmente, di intuire il suo modo di lavorare. Mi diceva più di una volta che avrebbe insegnato volentieri il calcolo prendendo come libro di testo, la *Théorie des Fonctions Analytiques* di Lagrange. Sapeva a memoria, e recitava volentieri, lunghe pagine dei *Principia* di Newton e delle famose due lettere del 1676 di Newton a Leibniz. Ammirava (con Abel) il limpido volume di Cauchy, il *Cours d'Analyse* del 1821. Le sue lezioni, variate ogni anno, rappresentavano uno sforzo continuo di raggiungere esposizioni più lucide. Ricordo la prima parte del corso del 1903, iniziato seguendo i metodi della geometria degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri. Ricordo le lezioni sulla teoria dei numeri irrazionali, illustrati col V Libro di Euclide, le lezioni sulla rettificazione delle curve, partendo dalla esposizione di Archimede. Ricordo infine la lettura delle pagine di Galileo e di Torricelli sulla caduta dei gravi, e le lezioni sul calcolo delle variazioni, che interpretavano in forma nuova le classiche memorie di Eulero e di Lagrange[15].

Peano inoltre amava partecipare, con i suoi collaboratori, alle sezioni di storia delle scienze nei congressi internazionali di filosofia, di storia e di lin-

[13] Cfr. E. Luciano, C.S. Roero, *Mario Gliozzi (1899-1977)*, in Roero, *Peano e la sua Scuola* … 2010 cit., p. 185-195.

[14] Negli appunti manoscritti, *Signos de Mathematica Historia*, CDT, Cuneo, Fondo Peano, n. 103063, tratti dalla consultazione dell'opera di F. Cajori, *History of mathematical notations*, London, The Open Court Comp., 1928 e del libro di E. Löffler, *Ziffern und Ziffernsystem der Kulturvölker in alter und neuer Zeit*, Leipzig, Teubner, 1912, Peano registrò a lato le collocazioni di questi volumi nella BSM della Facoltà di Scienze MFN dell'Università di Torino, precisamente M III 90 e C VI 282. Cfr. *Manoscritti di Giuseppe Peano*, in Roero, Nervo, Armano, *L'Archivio …,* 2002-2008 cit.

[15] G. Vacca, *Lo studio dei classici negli scritti matematici di Peano*, in «Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, Roma 1932», 21, 2, 1933, p. 97-99, cit. p. 98-99. Analoghi ricordi affiorano in altri allievi; ad esempio in M. Gliozzi, *Giuseppe Peano*, in «Archeion», 14, 1932, p. 255): "Ut professore Peano es exemplo raro: illo doce mathematica cum methodo historico praeciso, et infunde in discipulo, sine ullo coactione, amore pro scientia et studio."

guistica, anche se non si considerò mai un vero cultore di queste discipline[16]. Le sue sporadiche incursioni nell'ambito storico-matematico furono il frutto di inviti per eventi speciali, come le celebrazioni di Emanuele Filiberto nel 1928[17], o di fortuite letture di testi del passato, in cui era solito imbattersi durante la sua attività di ricerca, di insegnamento, di formazione degli insegnanti, o di divulgazione[18].

Pur essendo un semplice 'amatore', piuttosto che uno storico profondo, dedito a indagini nuove e originali, si può tuttavia cogliere il suo punto di vista sul ruolo culturale della storia delle matematiche, sia nell'organizzazione e conduzione del suo progetto principale, il *Formulario*, sia nella guida di tesi e tesine di laurea e nella direzione di articoli di allieve-insegnanti, sia infine nelle azioni intraprese per favorire lo sviluppo di questo settore di studi. Lo testimoniano, fra l'altro, i manoscritti e i carteggi di Peano e dei suoi allievi e collaboratori, conservati negli archivi di Cuneo, Torino, Milano, Pavia, Parma, Pisa, Roma e Napoli.

[16] Su questo tema cfr. F. Barone, *Un'apertura filosofica della logica simbolica peaniana*, in A. Terracini (a cura di) *In memoria di Giuseppe Peano*, Cuneo, Liceo scientifico, 1955, p. 41-50; L. Geymonat, *I fondamenti dell'aritmetica secondo Peano e le obiezioni «filosofiche» di B. Russell*, Ibidem, p. 51-63; *L'opera di Peano di fronte alla cultura italiana*, in *Celebrazioni in memoria di Giuseppe Peano nel cinquantenario della morte. Atti del Convegno organizzato dal Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino 27-28 ottobre 1982*, Torino, Valetto, 1986, p. 7-15; C. Mangione, *Peano e i fondamenti della matematica, in Peano e i fondamenti della matematica Atti del Convegno Modena 22-24 ottobre 1991*, Modena, Mucchi, 1993, p. 21-34 e E. Pasini, *Peano e la filosofia della matematica*, in *Conferenze e Seminari 2003-2004*, Torino, Assoc. Sub. Mathesis, 2004, p. 203-220.

[17] Una ricostruzione dei contenuti della matematica del Cinquecento in Piemonte fu, ad esempio, oggetto dell'articolo su Giovan Francesco Peverone e su Giambattista Benedetti: G. Peano 1928f, *Gio. Francesco Peverone ed altri matematici piemontesi ai tempi di Emanuele Filiberto*, in *Studi pubblicati dalla Regia Università di Torino nel IV centenario della nascita di Emanuele Filiberto*, Torino, Stab. Tip. Villarboito, 1928, p. 181-189.

[18] Cfr. G. Peano 1894e, *Un precursore della logica matematica*, in «RdM», 1894, p. 120; 1898m, *La numerazione binaria applicata alla stenografia*, in «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», 34, 1898-99, p. 47-55; 1902b *Aritmetica generale e Algebra elementare*. Torino, Paravia, 1902; 1920b *Sulla forma dei segni di algebra*, in «Giornale di Matematica Finanziaria», 1, 1920, p. 44-49; 1926c, *Quadrato magico*, in «S&V», 1926, p. 84-87; 1926d, *Jocos de Arithmetica*, in «S&V», 1926, p. 166-173; 1928e, *Historia de numeros*, in «S&V», 1928, p. 139-142, riedito in «Giornale di Matematica e Fisica della Scuola Media», 1928, p. 97-100 e in «Archivio di Storia della Scienza. Archeion», 1928, p. 364-366. Su questo tema cfr. anche E. Carruccio, *Spunti di storia delle matematiche e della logica nell'opera di G. Peano*, in Terracini 1955 cit., p. 103-114 e E. Luciano, *Aritmetica e Storia nei libri di testo della scuola di Peano*, in L. Giacardi (a cura di) *La matematica nella scuola italiana da metà '800 a fine '900: problemi, metodi, libri di testo e riforme*, Livorno, Agorà, 2006, p. 269-303.

Approcci storiografici e strategie editoriali

È soprattutto nelle tre imprese editoriali del *Formulario matematico* (1895-1908), della *Rivista di Matematica*, ad esso collegata (1891-1908)[19], e del periodico *Schola et Vita* (1926-1939) che possiamo desumere alcune caratteristiche dell'approccio di Peano alla storia delle matematiche, anche in relazione al pubblico dei lettori di quelle testate e alla cerchia dei suoi collaboratori in un certo periodo.

Alle prime due iniziative contribuirono notevolmente Vailati e Vacca, i giovani 'pionieri-storici' del *Formulario*, su cui ci soffermiamo nei prossimi paragrafi al fine soprattutto di valutare se vi furono, e in che misura, influenze reciproche e quali azioni furono intraprese per favorire lo sviluppo degli studi storico-scientifici. A tale scopo cerchiamo di enucleare in breve alcuni aspetti, metodologie e finalità nell'analisi critica dei testi del passato, presenti nelle esposizioni di Peano a carattere storico.

Fra gli approcci storiografici più frequenti, nella sua vasta produzione, troviamo innanzitutto quello peculiare del 'matematico di professione', interessato al *confronto* fra le trattazioni antiche e quelle moderne, che guarda alla storia come fonte di ispirazione e come 'bagaglio culturale' per creare qualcosa di originale, oppure per perfezionare metodi, concetti, teoremi e teorie già esistenti, o ancora per mettere in luce i propri risultati, inserendoli in un contesto storico prestigioso[20].

L'ottica di Peano si allineava, in tal senso, a quella di G.W. Leibniz, ai cui progetti egli si ispirò spesso[21], in particolare quando il filosofo e matematico tedesco sottolineava l'utilità di "conoscere le vere origini delle invenzioni memorabili" non solo per attribuire la paternità dei risultati, ma perché

[19] Cfr. C. S. ROERO, *The "Formulario" between Mathematics and history*, in F. SKOF (ed.) *Giuseppe Peano between Mathematics and Logic, Proceeding of the International Conference in honour of Giuseppe Peano on the 150th anniversary of his birth and the centennial of the Formulario Mathematico, (Torino (Italy) October 2-3, 2008*, Milano, Springer, 2010, p. 83-132, dove si trovano i collegamenti fra le diverse sezioni del *Formulario* e gli articoli apparsi in «RdM» (v. *Tables*, p. 108-132).

[20] Cfr. nel dvd sopra citato (nota 1), G. PEANO 1889a, *Arithmetices principia*; 1889d, *I principi di geometria logicamente esposti*; 1890d *Les propositions du cinquième livre d'Euclide, réduit en formules*; 1891b, *Gli elementi di calcolo geometrico*; 1891c, *Principii di logica matematica*; 1891d *Sommario dei libri VII, VIII, IX di Euclide*; 1891i e 1891o, *Sul concetto di numero*; 1892c, *Sommario del libro X d'Euclide*; 1894c, *Sui fondamenti della geometria*.

[21] Cfr. ROERO 2010 cit., p. 88-92; E. LUCIANO, *Peano and his School between Leibniz and Couturat: the influence in Mathematics and in International Language*, in R. KRÖMER, Y. CHIN-DRIAN (eds.), *New Essays on Leibniz Reception in Science and Philosophy of Science 1800-2000*, Basel, Springer, 2012, p. 41-64.

potevano contribuire "ad alimentare l'*ars inveniendi*, facendola metodicamente conoscere attraverso esempi illustri."[22]

Il percorso storico e lo studio delle fonti del pensiero scientifico costituivano per Peano gli strumenti ideali per evidenziare le caratteristiche interne della matematica, per confrontare i concetti, le definizioni, le dimostrazioni, le tecniche di calcolo, ecc., per valutare la correttezza delle strutture logico-assiomatiche e per giudicare i vantaggi dei metodi e dell'ideografia.

Un'indagine storiografica, quella del confronto di trattazioni antiche e moderne, che nel caso di Peano inglobava il ben noto tema dei fondamenti della matematica, tipico dell'epoca, e l'attenzione al rigore. In altre parole, lo studio privilegiato dal logico piemontese, fin dall'inizio delle sue ricerche, era rivolto principalmente all'assetto 'logico, assiomatico, deduttivo' che le teorie matematiche avevano avuto nel corso dei secoli, e alle relative ricadute tecniche, espositive e formali[23]. Come giustamente ebbe a sottolineare Corrado Mangione:

> per Peano la matematica non è fissata univocamente da teorie, ma è uno studio che si sviluppa progressivamente. [...] È a questo livello che interviene la concezione dello sviluppo progressivo della conoscenza matematica che è testimoniato dall'accuratezza con cui Peano studiava i mutamenti di significato dei concetti primitivi sul piano storico[24].

Questo tipo di approccio portò ad una visione della storia delle matematiche come 'rassegna' o 'catalogo' di eventi, concetti e risultati, utili alla crea-

[22] Cfr. C.S. ROERO, *Sul retaggio della tradizione geometrica nel calcolo infinitesimale leibniziano*, in M. PANZA, C. S. ROERO (a cura di), *Geometria, Flussioni e Differenziali, Tradizione e innovazione nella matematica del Seicento*, Napoli, La città del sole, 1995, p. 353-362; *Sulla controversia fra Leibniz e Newton a proposito dell'invenzione del calcolo. Il punto di vista di Leibniz*, in *Atti del Convegno "Per una storia dell'analisi" Milano, 24-26.3.1993*, «Quaderni PRISTEM Documenti», 3, Milano, 1993, p. 35-61; *Alcune riflessioni sul significato e sul ruolo della storia della matematica*, in *Contributi alla Storia delle Matematiche scritti in onore di Gino Arrighi*, Modena, Mucchi, 1992, p. 85-94.

[23] Sul tema del confronto sono incentrati molti saggi, articoli e segnalazioni bibliografiche di Peano su «RdM» e nei suoi carteggi. Ad esempio nella recensione del testo di F. CASTELLANO, *Lezioni di Meccanica razionale* (Torino 1894) Peano affermava (1895j, p. 15): "Così si vede che due righe del Castellano bastano ad esprimere chiaramente e completamente ciò che Kirchhoff esprime in più pagine". Analogamente scriveva a G. Vitali il 3 aprile 1905 (M.T. BORGATO, L. PEPE, *Lettere a Giuseppe Vitali*, in *Giuseppe Vitali Opere sull'analisi reale e complessa. Carteggio*, Bologna, Cremonese, 1984, p. 453): "Per la Rivista di Matematica ogni recensione deve avere il confronto col Formulario e la riduzione in simboli delle proposizioni dell'Autore non ancora scritte nel Formulario. Dal libro del Lebesgue potrà risultare un rigo, o mezza pagina." Infine si può citare la nota, presentata da Peano all'Accademia dei Lincei, della sua allieva F. AUDISIO, *Calcolo di π colla serie di Leibniz*, in «Atti R. Acc. Naz. Lincei», 11, 1930, p. 1077-1080, come emblematica dello spirito che animava il matematico piemontese nel confrontare tecniche di calcolo (in questo caso sulla stima del resto), in epoche storiche diverse.

[24] MANGIONE 1993 cit., p. 24.

zione di un albero genealogico del sapere matematico. È su queste basi che di fatto si costruì l'impalcatura storica del *Formulaire de Mathématiques* di Peano. Nel descrivere a Louis Couturat la metodologia seguita, Vacca gli scriveva nel 1901:

> Je veux vous faire encore une petite description relative au *F.* [*Formulaire*], pour les indications historiques. Lorsque j'ai commencé à ajouter des notes, je l'ai fait presque au hasard. En avançant dans le travail j'ai vu qu'il y avait là une nouvelle méthode historiques. Qu'est que c'est l'histoire d'une science ? On peut penser que ce soit l'exposé impartial des idées scientifiques de ceux qui nous ont précédées. Mais on ne peut pas les exposer toutes, si l'on veut les exposer toutes avec impartialité il faut les reproduire presque en entier. Ce travail prépare l'histoire, ce n'est pas encore l'histoire. La seule conception qui permettre de choisir dans les travaux des anciens c'est de se mettre à notre point de vue. Faire l'histoire des vérités d'une science, c'est chercher et exposer dans le passé tous les essais qui ont produit successivement les vérités que nous connaissons. Une page d'histoire de ce type est l'histoire du *F* [*Formulaire*]. L'histoire d'une science est alors l'exposition ordonnée des vérités de cette science suivie d'un nome ou d'un date[25].

In seconda battuta, la riflessione storiografica di Peano si soffermò sulle origini del simbolismo e sull'esigenza di coniugare insieme l'esattezza, la chiarezza e la brevità nell'esposizione scritta e orale. Un'economia di linguaggio e di simboli nella stesura di testi matematici, che avrebbe dovuto riflettersi anche sull'insegnamento della disciplina, con intersezioni con l'ambito pedagogico, formativo, psicologico, filologico, ecc. Si inseriscono in questo contesto le digressioni storiche e filologiche sulle notazioni e sulle definizioni, il confronto con le trattazioni di Euclide sui fondamenti dell'aritmetica e della geometria, le osservazioni critiche su libri e manuali in circolazione nelle scuole e all'università e le segnalazioni di saggi e opere interessanti nell'ambito della storia della matematica, pubblicate sulla *Rivista di Matematica* e su *Schola et Vita*.

Come Leibniz e altri autori contemporanei, anche Peano si servì della storia per arricchire e consolidare la 'rivoluzione' da lui operata nella matematica moderna con l'utilizzo della logica matematica e dei suoi simboli, inserendola in una tradizione alta, con antenati illustri, come Aristotele, Leibniz, Lambert, Boole, ecc.. In questo modo egli finì per ripetere, *mutatis mutandis*, le strategie messe in atto dal filosofo e matematico tedesco nella prefazione manoscritta del trattato *Scientia infiniti*, dove poneva il suo nuovo metodo differenziale nel filone che faceva capo ad Archimede, distinguendolo da quello di Descartes, collegato al filone avviato da Apollonio[26].

[25] G. Vacca a L. Couturat, s.l., s.d. [Genova, dicembre 1901], in P. Nastasi, A. Scimone (a cura di), *Lettere a Giovanni Vacca*, «Quaderni Pristem», 5, Palermo, 1995, p. 51-52.

[26] Roero *Sul retaggio della tradizione* …, in Panza, Roero 1995 cit.

Il terzo aspetto dell'approccio di Peano alle fonti storiche si collega ai forti legami da lui intrecciati con il mondo della scuola e con gli insegnanti[27]. In questo caso l'obiettivo era quello di cercare nella letteratura matematica di civiltà remote, ogni spunto curioso, utile o interessante per catturare l'attenzione degli scolari e per semplificare l'apprendimento, senza rinunciare all'esattezza e al rigore. Problemi sotto forma di giochi, esempi di operazioni presso gli Egizi, gli arabi, gli indiani e nei manuali italiani di aritmetica del tardo Medioevo e del Rinascimento, esercizi numerici mnemonici, quadrati magici e tavole misteriose, abachi cinesi e giapponesi, regoli di calcolo elaborati da John Napier, Henri Genaille e Edouard Lucas, sono solo alcuni dei suggerimenti da lui offerti agli insegnanti per l'attività didattica corrente, ad ogni livello di scuola: elementare, media inferiore e superiore, o all'Università.

La strategia di usare in classe la storia delle scienze raggiunse il suo apice, nella produzione e nell'organizzazione culturale di Peano, nei primi decenni del Novecento, con la stesura di libri per gli insegnanti (*Aritmetica generale e Algebra elementare*, Torino, Paravia, 1902 e *Giochi di aritmetica e problemi interessanti*, Torino, Paravia, 1924), con l'istituzione delle *Conferenze Matematiche Torinesi*, con le lezioni di Matematiche complementari dal 1924-25 in poi, con l'attivazione di corsi in preparazione agli esami di abilitazione e concorso (1928-1932) e con la curatela, a fianco di N. Mastropaolo, del periodico milanese *Schola et Vita.*

Accanto al tentativo di stimolare il dialogo fra le culture umanistica e scientifica, si avvertiva in Peano l'esigenza di mostrare il progresso e l'efficacia dei metodi logici-ideografici, rispetto al passato (evidente nel volume *Aritmetica generale e Algebra elementare*), e di accrescere la preparazione degli insegnanti per migliorarne l'attività didattica in classe. Lo attestano la sua assidua partecipazione alle riunioni e ai congressi della *Mathesis*, fin dalla sua fondazione a Torino nel 1895, da parte degli insegnanti Rodolfo Bettazzi, Aurelio Lugli e Francesco Giudice, suoi amici e collaboratori. Nella conferenza *Sui fondamenti dell'Analisi* nel giugno del 1910 alla *Mathesis* così Peano sottolineava il nobile compito dei professori:

> Sorgono ovunque società collo scopo di arricchire i socii del metallo, la cui cupidigia è causa di tanti mali. Sorgono società per difendere gli interessi materiali e morali dei socii. Invece i professori di matematica fondarono società in Francia, Germania, Inghilterra e America, collo scopo di trattare i problemi scientifici, filosofici e didattici, che tangono il loro insegnamento. Ed ecco, pel medesimo puro, nobile e

[27] Cfr. C.S. Roero, *Alcune iniziative nella storia della Facoltà di Scienze MFN di Torino per promuovere la cultura matematica fra gli insegnanti: le Scuole di Magistero, l'operato di Peano, il Centro di Studi Metodologici*, in *Conferenze e Seminari 1998-1999*, Torino, Assoc. Sub. Mathesis, 1999, p. 188-211; *Giuseppe Peano, geniale matematico, amorevole maestro*, in R. Allio (a cura di), *Maestri dell'Ateneo torinese dal Settecento al Novecento*, Torino, CSSUT, Sesto Centenario, 2004, p. 115-144 e Luciano, Roero 2008 cit., p. 69-72, 144-149, 152-188.

> disinteressato scopo, sorgere in Italia la società *Mathesis*, una delle prime per tempo, e purtroppo una delle ultime per i mezzi materiali di cui dispone. Lo studio queste questioni filosofico-didattiche è anzitutto una soddisfazione della mente umana, alla continua ricerca della verità. È interessante il trovare nella trita via percorsa per secoli da tutte le generazioni, nuovi studii, nuove teorie, che esigono tutto l'acume della nostra mente. Ma essenzialmente questo studio è di utilità immediata al nostro prossimo, al pari di una scoperta, che ci permetta di correre più veloci, o che abbassi il prezzo del pane. Perché la conoscenza di quelle questioni, e del modo di risolverle, ha per effetto di perfezionare il nostro insegnamento, di far procedere più veloci gli alunni nello studio, e dare a minore prezzo di fatica le cognizioni necessarie[28].

Un notevole successo ebbero anche le *Conferenze Matematiche Torinesi*, le cosiddette *sabatine*, istituite nel 1915 da Peano, insieme a T. Boggio e M. Bottasso:

> Il 27 febbraio si riunirono, in un'aula della R. Università, una quarantina di professori di matematica per iniziare le conferenze promosse dai professori Peano, Boggio e Bottasso. Il prof. Peano spiegò lo scopo di queste riunioni, che è quello di servire come scambio di idee sulle questioni riguardanti le matematiche elementari. Accennò alla società Mathesis fondata a Torino molti anni addietro, e che ora ha la sua sede a Pavia, e presentò i giornali di matematica elementare: il *Periodico di Matematica* e il *Supplemento* al Periodico del Lazzeri, il *Pitagora* del Fazzari, il *Bollettino di Matematica* del Conti, il *Bollettino* del Tenca di Pavia, i quali tutti contengono interessanti articoli relativi alla matematica elementare. Invitò i presenti a scrivere sopra questi soggetti, della massima utilità, perché ogni perfezionamento della matematica elementare è sommamente utile al gran numero di studiosi[29].

Al collega di Napoli, Roberto Marcolongo, cultore fra l'altro di storia delle matematiche, Peano scriveva in proposito nel 1918:

> Grazie delle Sue preziose informazioni sul Seminario matematico. Per mio conto non accompagno gli studenti alla laurea, e quindi ho nulla da fare. Perciò impiantai le Conferenze matematiche all'Università, lasciando libero accesso ai soli professori o giovani laureati. Sono molto frequentate. Di tanto in tanto qualcuno prende lo spunto per una pubblicazione, e tutti gli intervenuti mi sono vivamente grati, e dichiarano di imparare moltissimo da queste conferenze fra eguali. Io sono convinto che lo studio che si fa per forza, collo scopo di prendere gli esami e la laurea finale non produca alcun frutto. Anzi è un tormento per i giovani studenti, i quali purtroppo, diventati alla loro volta insegnanti, tormentano i poveri alunni. L'unico studio utile è quello che uno fa di per sé, di sua spontanea volontà, corrispondente ai gusti del momento[30].

[28] G. PEANO, *Sui fondamenti dell'Analisi*, in «Bollettino della Mathesis», 1910, p. 31-32.

[29] P. QUARRA, *Conferenze matematiche torinesi*, in «Bollettino della Mathesis», 7, aprile 1915, p. 42.

[30] G. Peano a R. Marcolongo, Torino 24.12.1918, BDM, Università di Roma La Sapienza, *Fondo Marcolongo*.

Le *Conferenze* furono apprezzate anche dal rettore dell'Università di Torino, Giovanni Vidari, che nel 1919 gli scriveva:

> ho letto con interesse il resoconto delle Conferenze matematiche torinesi e ne la ringrazio. Ma ho pensato: perché non si possono tali relazioni e discussioni didattiche ripetere in seno alla Associazione pedagogica, che numera parecchi soci, ma quasi tutti in materie letterarie? Non le pare che potrebbero trarne vantaggio tutti, e letterati e matematici?[31]

Il dialogo fra Peano e Vidari proseguì su questi temi, come attestano i carteggi[32] e le recensioni e gli articoli apparsi sulla rivista *Schola et Vita*[33]. Di particolare rilevo furono anche gli appelli di Peano ad utilizzare in classe direttamente i testi scientifici dei classici del passato, nelle edizioni originali, con traduzione a fronte. Esempi da lui elogiati e utilizzati nelle lezioni universitarie furono il libro di G. Vacca *Euclide, Il primo libro degli Elementi*, pubblicato da Sansoni nel 1916, e le antologie curate da S. Timpanaro per l'editore Mondadori nel 1925 e 1926, intitolate *Galileo* e *Leonardo*, *Pagine di Scienza*[34].

Vailati e Vacca: storia e filologia nella fucina del Formulaire de Mathématiques

Sulla *Rivista di matematica* nel 1898 Peano così scriveva, a proposito del ruolo giocato dalla storia delle matematiche nel progetto enciclopedico del *Formulario*:

> Le indicazioni storiche sia sulle proposizioni, come sulle notazioni, utili sempre, sono utilissime nel Formulario, perché riposano un po' il lettore, e manifestano meglio l'importanza delle proposizioni, e spesso il vantaggio dell'ideografia. Ma anch'esse richiedono molto lavoro per poter avere un qualche valore. Le indicazioni che trovansi nei libri delle generazioni passate, e ancora in qualche libro moderno, secondo cui p. e. l'Algebra è dovuta a Descartes, o a Viète, o ai matematici italiani del secolo XIII, o agli arabi, o agli indiani, o ai greci, non hanno

[31] G. Vidari a G. Peano, Torino 6.2.1919, Cuneo, CDT, Fondo G. Peano, *Corrispondenze con Giuseppe Peano*, Vidari Giovanni, N. 100137, visibile nel cd-rom, Roero, Nervo, Armano, *L'Archivio* …, 2002 cit. e nel sito http://www. comune.cuneo.gov.it/cultura/centro-documentazione-territoriale/fondo-giuseppe-peano.html

[32] Cfr. G. Vidari a G. Peano, Torino 9.6.1923; 7.3.1924; 17.6.1929; 18.7.1929 e G. Peano a G. Vidari 13.6.1923, *Ibidem*.

[33] Cfr. Bibliografia: *G. Vidari, Il pensiero pedagogico italiano nel suo sviluppo storico*, in «S&V», 2, 1927, p. 126; G. Vidari, *Schola de labore et schola de libro*, in «S&V», 4, 1929, p. 196-197.

[34] S. Timpanaro, *Galileo. Pagine di scienza II*, Milano, Mondadori, 1925; *Leonardo. Pagine di scienza I*, Milano, Mondadori, 1926; cfr. Roero, *Lingua de mathematica,* …, 2009 cit., p. 11-12, 16-21. Recensioni elogiative dei volumi di Timpanaro apparvero in «S&V», 1, 1926, p. 235-237.

alcuna precisione. Né l'ha ad es. l'affermazione più precisa che l'uso delle lettere sia dovuto a Viète, trovandosi esse in Aristotele e di uso comune in Euclide, come risulta dalle citazioni contenute in F[ormulario]. (…) Le indicazioni poi che portano con precisione il nome dell'Autore, e la pagina del libro citato, passando per più mani, a causa degli errori materiali accumulati, spesso sono inesatte; e invano si cerca al posto indicato il passo in questione. Altre volte lo si trova, ma ha senso ben diverso da quello che gli attribuiva lo storico. In conseguenza si è dovuto rimontare all'origine dei passi citati; e le citazioni del F[ormulario] portano le indicazioni precise, in modo che chiunque possa facilmente confrontare il passo citato. Ciò finché fu possibile; perché anche nel F[ormulario] alcune citazioni attendono di essere meglio precisate. Si badi poi che le indicazioni storiche contenute nel F[ormulario] non pretendono punto di rimontare alla prima origine della P[roposizione] in questione; ma solo di indicare un A[utore] ove essa si trova. Uno studio ulteriore potrà sempre sostituire ad esse altre citazioni relative ad epoca più antica. Del resto qui si è fatto uso delle ricerche storiche di M. Marie, M. Cantor, di quelle contenute nell'*Intermédiaire des Mathématiciens,* ed in varii altri lavori menzionati[35].

E nella prefazione all'ultima edizione del 1908 ribadiva, in modo più succinto, l'importanza della componente storica:

Formulario contine historia de omni symbolo, formas que illo habe apud differente auctores, et in diverso tempore, et rationes historico et logico pro symbolo adoptato. De omni propositione importante es scripto historia. … Bibliographia, composito per Dr. VACCA, tomo IV de Formulario, et posito in correspondentia cum tomo V per Dr. PAGLIERO, es compendio breve, sed praeciso, de historia de Mathematica[36].

Due assistenti universitari si dedicarono con passione a comporre le note storiche del *Formulaire de Mathématiques*: Giovanni Vailati e Giovanni Vacca, che operarono fianco a fianco con lui, negli anni trascorsi a Torino, dal 1892 al 1899 il primo, e dal 1897 al 1905 il secondo. Nel ricordare quel periodo Vacca affermò, dopo la morte del maestro,

[…] ho presente alla mente specialmente le lunghe discussioni davanti ai testi classici, da Archimede, Euclide, Apollonio, fino ai più moderni, Gauss, Dirichlet, Weierstrass, Dini, Cantor … durante gli anni di compilazione dei cinque volumi del *Formulario*[37].

Ad ogni definizione, proposizione, notazione e metodo, su indicazione di Peano, essi cercarono di accostare l'indicazione precisa del primo testo in cui comparve, del primo autore che l'introdusse, con un semplice enunciato o con

[35] G. Peano 1898e, *Sul § 2 del Formulario, t. II: Aritmetica*, in «RdM», VI, 1898, p. 83.
[36] G. Peano 1908a, *Praefatione*, in *Formulario Mathematico*, Torino, Bocca, 1908, p. XIII.
[37] Vacca 1933 cit., p. 99. I volumi, qui citati, si riferiscono alle cinque edizioni del *Formulario*.

la relativa dimostrazione, e gli sviluppi che seguirono nei secoli successivi. Ciò comportò la consultazione di un'amplissima collezione di fonti originali, con l'obiettivo di indagare l'emergere di concetti, definizioni, metodi e teorie, e di valutare i vantaggi dell'ideografia logico-matematica. Ne scaturì un'erudizione enciclopedica sulla matematica antica e moderna, occidentale e non, da cui presero avvio studi e ricerche su autori e opere trascurati, su passi controversi, sulla genesi di assiomi, principi, metodi, teoremi e teorie, presentati dai due storici in congressi nazionali e internazionali e su riviste specialistiche[38].

Nelle lettere che si scambiarono e nei rispettivi carteggi con Peano emergono non solo la varietà dei temi affrontati, le metodologie seguite e gli autori di riferimento, ma anche le reciproche influenze e gli scambi di informazioni su biblioteche, opere e incontri con personalità illustri.

La scelta da parte di Peano di questi giovani studiosi, appassionati di storia, di politica e di cultura non fu casuale. Egli aveva conosciuto Vailati, quando era ancora studente, nel novembre del 1880, appena iscritto al corso di laurea in Matematica dell'Università di Torino. All'epoca Peano era assistente di E. D'Ovidio sul corso di Algebra e Geometria analitica e l'anno successivo fu supplente di A. Genocchi in quello di Calcolo infinitesimale. Ottenuta il 26 ottobre 1882 la licenza in Fisico-Matematica, Vailati passò alla Scuola d'applicazione per ingegneri, e si laureò in Ingegneria civile il 19 dicembre 1885. Ripresi quindi gli studi di Matematica, fu ammesso nel 1885-86 al quarto anno e conseguì la laurea il 17 gennaio 1888, di fronte ad una Commissione composta dal preside di Facoltà Giuseppe Bruno e dai professori Enrico D'Ovidio, Francesco Faà di Bruno, Giuseppe Basso, Giuseppe Peano, Andrea Naccari, Enrico Novarese e Giuseppe Bartolomeo Erba, riportando la votazione 56/80. Non si conosce l'argomento della tesi da lui discussa, né il nome del docente che rivestì il ruolo di relatore.

Tornato a Crema, sua città natale, Vailati si dedicò fino al 1892 allo studio della musica e delle lingue classiche e moderne: inglese, francese e tedesco, e collaborò anche con le istituzioni comunali, simpatizzando per il liberismo riformista, ma queste attività non si tradussero poi in una vera militanza politica.

Dall'autunno del 1892 al 1894 fu nuovamente a Torino, chiamato da Peano a ricoprire per due anni il posto assistente sulla cattedra di Calcolo infinitesimale, coll'incarico delle Applicazioni geometriche. I motivi della decisione di Peano erano legati al rapporto che si era instaurato fra loro, dopo l'invio, da parte di Vailati, di una lettera e di due articoli sulla logica matematica, pubblicati sulla nuova *Rivista di matematica*, al suo esordio, nel 1891 e 1892.

Seguendo l'impostazione e lo stile adottati da Peano nei saggi sui fondamenti dell'aritmetica e della geometria (*Arithmetices Principia* e *Principi di cal-*

[38] Cfr. l'Elenco delle pubblicazioni di Vailati e di Vacca in LUCIANO, ROERO *La Scuola di G. Peano,* 2010 cit, p. 41-52, 106-112.

colo geometrico), nelle brevi note di logica matematica, con 'cornici' storiche, indicazioni bibliografiche ed elenchi di formule nel simbolismo ideografico peaniano, Vailati mostrò di sapersi destreggiare nell'applicazione dei simboli e nella ricerca all'interno della letteratura contemporanea internazionale, dell'origine di alcune intuizioni e tendenze. Aveva infatti acutamente inserito alcuni passi in tedesco di R. Dedekind e in inglese di D.J. Gregory e G. Boole, oltre a vari riferimenti ad opere di G. Peacock, A. De Morgan, A. Macfarlane e J. Stuart Mill[39]. Forse per queste attitudini fu subito ingaggiato da Peano nella sua squadra, come collaboratore della *Rivista di matematica*, insieme a Filiberto Castellano, Cesare Burali-Forti e Rodolfo Bettazzi, colleghi all'Accademia militare, a Giulio Vivanti e Francesco Giudice, all'epoca insegnanti di scuola secondaria superiore e liberi docenti all'Università di Pavia, e a Gino Fano, laureato da poco e in procinto di partire per un soggiorno di studi a Gottinga. Vailati si assunse il compito di redigere articoli per la *Rivista* relativi alla logica e alla storia, e di scrivere recensioni.

Nel 1894-95, forse spinto dalla notorietà di Galileo Ferraris, che era stato ricevuto con grandi onori da H. Helmholtz a Francoforte e da T. Edison a Chicago, Vailati si iscrisse al Corso superiore di Elettrotecnica presso il R. Museo industriale di Torino. Ne seguì le lezioni, ma non sostenne esami. Nominato poi per un anno, nel 1895-96, assistente di Geometria proiettiva sulla cattedra di Luigi Berzolari nell'Ateneo torinese, su richiesta di Peano sostituì per una settimana Burali Forti, assistente di Calcolo infinitesimale[40].

Nel frattempo Vailati aveva anche conosciuto Volterra che nel 1893 si era trasferito a Torino come professore ordinario di Meccanica razionale e fra loro si instaurò un cordiale rapporto di stima e di amicizia, che proseguì fino alla prematura scomparsa di Vailati nel 1909. Con grande ampiezza di vedute e notevole sensibilità per la storia delle scienze Volterra accondiscese di buon grado alla proposta del giovane studioso di svolgere dal 1896 al 1899, come assistente volontario sulla cattedra di Meccanica razionale, tre corsi liberi di Storia della Meccanica, a imitazione di quelli tenuti a Vienna da Ernst Mach. Di essi restano le prolusioni, edite a Torino e tradotte in varie lingue, che

[39] G. VAILATI, *Un teorema di logica matematica*, in «RdM» 1, 1891, p. 103, *Le proprietà fondamentali delle operazioni della logica deduttiva*, in «RdM» 1, 1891, p. 127-132; *Sui principi fondamentali della geometria della retta* (datata Crema, marzo 1892), in «RdM», 2, 1892, p. 71-75 e *Dipendenza fra le proprietà delle relazioni*, in «RdM» 2, 1892, p. 161-164.

[40] G. Peano a G. Vailati, s.d. [1894-95], BDF Milano, Fondo Vailati: "Caro Vailati, Essendo il dott. Burali indisposto, sarebbe Ella in caso di poterlo supplire per una dozzina di giorni (circa sei lezioni)? Se sì, io ne parlerò al Prof. Berzolari onde attenere il suo assenso; e procurerò di farle dare congrua indennità. Oggi sono in campagna. Domani alle 9,45' esco dall'Accademia (ma non vado all'Università).Venerdì mattina alle 8 mi trovo all'Università. Procureremo di vederci. Suo G. Peano." Cfr. anche ASUT *Disposizioni Rel. Pers. Ins.* 2/3, 1895-96, Lettera di G. Peano (Prot. 1268) del 13.3.1896 con la richiesta di indennizzo per la supplenza di Vailati.

risultano fondamentali per apprezzare le competenze acquisite nella storia e nell'epistemologia delle scienze e per comprendere l'importanza che egli attribuiva alla conoscenza storica sia nell'attività di ricerca scientifica, sia nell'insegnamento[41].

Echi del periodo torinese affiorano nella corrispondenza con l'amico Vacca. Appena trasferitosi a Siracusa, dove aveva intrapreso la carriera di insegnante, nell'autunno del 1899 così gli scriveva:

> ho riconosciuto, anche per i segni logici, l'autore di quelle due righe sulla cartolina collettiva che ricevetti oggi. Quanto deploro di dover digiunare, per tanto tempo, delle nostre discussioni che abbracciavano tutto l'immaginabile, dalla logica alla politica, dalla linguistica alla meccanica, dalla gastronomia al calcolo geometrico! E il prof. Peano, come sta e che cosa va preparando? Spero di ricevere presto il fascicolo della Rivista di matematica e il seguito del *Formulario*[42].

E, ancora, un mese dopo:

> Ho avuto il volume del *Formulario*, dove ho trovato una quantità di cose nuove, e lo sto leggendo appunto ora. Vedo con molto piacere che la parte *storica* viene sempre più in *Vordergrund* e contribuisce ad accrescere non solo l'utilità, ma anche l'*attrattività* dell'opera, che va diventando sempre più classica e unica nel suo genere[43].

Per quanto riguarda invece il percorso compiuto da Vacca, prima di giungere a Torino, ricordiamo che fu la lettura della rivista di G. Eneström, *Bibliotheca Mathematica,* a suggerire a Peano, nel maggio del 1894, di chiedere allo studente genovese, autore della nota *Intorno alla prima dimostrazione di un teorema di Fermat*, la collaborazione al *Formulaire*:

> Leggo con piacere il suo articolo, pubblicato nella *Bibliotheca Mathematica* sul teorema di Fermat[44]. In conseguenza, in un prossimo *Errata Corrige* si dovrà aggiungere la sua indicazione a quella indicata nelle note storiche al *Formulario di Matematica* pubblicato dalla *Rivista* [...]. E poiché Ella si occupa, e con così buoni risultati, di ricerche storiche, farà una cosa molto gradita, non solo a me, ma a tutti

[41] Nel necrologio di R. MARCOLONGO, *In memoria di Giovanni Vailati*, in «Bollettino di Matematica», 7-8, 1908-09, si legge in proposito (p. 207-208): "bastano già queste sole prolusioni, così originali e diverse dalle solite, a testimoniare della profondità e maturità di mente del Vailati, della sua svariata cultura, delle sue conoscenze filologiche, dell'acutezza delle sue vedute. Esse contengono già, in germe, le idee ch'egli svilupperà con altri venti anni di lavoro; rivelano la padronanza di Lui in tutti quei campi che, con sintesi potente e ben rara oggidì, Egli saprà abbracciare e percorrere. Questi scritti, benché dettati come prolusioni ad un corso di storia della meccanica, sono contributi geniali alla storia della cultura e della scienza."

[42] G. Vailati a G. Vacca, 16.12.1899, in G. LANARO (a cura di), *Giovanni Vailati Epistolario 1891-1909*, Torino, Einaudi, 1971, p. 167.

[43] G. Vailati a G. Vacca, 16.12.1899, *Ibidem*, p. 169.

[44] G. VACCA, *Intorno alla prima dimostrazione di un teorema di Fermat*, in «Bibliotheca Mathematica», 8, 1894, p. 46-48; *Note Storiche alla parte III del Formulario*, in «RdM», 1893, II, p. 188.

coloro che si interessano a questo formulario, se vorrà completare le note storiche relative, vale a dire proporre tutte quelle aggiunte e correzioni che crederà del caso. Se Le occorressero copie del formulario, o dei fascicoli della Rivista in cui si trovano queste note storiche, non ha che ad avvisarmi[45].

Repentina e positiva fu la risposta di Vacca che informava di essere già abbonato alla *Rivista* e di possedere i fascicoli del *Formulaire* annessi ad essa[46].

Il primo incontro fra Peano e Vacca avvenne a Zurigo nell'agosto del 1897, al primo Congresso internazionale dei matematici, dove il matematico piemontese presentò la sua logica e il volume del *Formulario*, stampato nel 1895. In questo frangente, venendo a sapere da Vacca che, a causa della sua attività politica nel partito socialista, era stato condannato ad un anno di confino, Peano gli propose di diventare suo assistente a Torino, sulla cattedra di Calcolo infinitesimale. Il giovane accettò con entusiasmo e svolse quest'incarico dal 1898 al 1902 e nell'a.a. 1904-05.

Durante il suo lungo soggiorno torinese Vacca collaborò intensamente al *Formulaire de Mathématiques*, redigendo, insieme a Vailati, le note storiche, biografiche e bibliografiche per il secondo tomo (1897-99) e aggiungendo, nei volumi editi nel 1901 e nel 1902-03, citazioni, integrazioni e commenti puntuali, tratti da testi antichi.

In base al tipo di indagine a loro richiesta, i due storici erano condizionati a privilegiare la paternità dei concetti e dei teoremi, le connessioni fra le teorie e le tappe successive che portarono al loro consolidamento e perfezionamento. Grande attenzione era quindi rivolta alle fonti originali e alle edizioni critiche, rispetto ad altre tendenze che puntavano, per esempio, a storie di carattere biografico e aneddotico.

Peano, Vailati e Vacca concordavano con le posizioni degli studiosi tedeschi Hermann Hankel e Moritz Cantor che la storia della matematica non deve semplicemente enumerare gli scienziati protagonisti e i loro lavori, ma deve esporre lo sviluppo interno delle idee che regnano nella scienza. Nei loro assunti epistemologici finì tuttavia per prevalere la ricerca dei precursori, tipica di fine Ottocento e inizio Novecento, che contraddistinse varie parti del *Formulaire*.

Le letture e le indagini di Vailati e di Vacca, finalizzate a questi obiettivi, portarono i due giovani a frequentare numerose biblioteche e archivi non solo a Torino e in Italia, ma anche all'estero, in Germania, Francia e Inghilterra, alla ricerca di fonti edite e inedite.

Il patrimonio librario torinese fu oggetto di frequenti dialoghi fra di loro e con i contemporanei. Da Siracusa Vailati scrive a Vacca, nel dicembre del 1899:

[45] G. Peano a G. Vacca, 15.5.1894, DMUT, Archivio Peano-Vacca, *Corrispondenze*.

[46] G. Vacca a G. Peano, 31.5.1894, *Ibidem*: "La ringrazio dell'offerta gentile e per quanto sta in me cercherò di coadiuvare come posso il lavoro di cui Ella mi parla."

Vedo con piacere che, tanto la Biblioteca di Magistero come la Nazionale, fanno progressi verso la buona erogazione delle loro rendite. Quei due volumi dell'Heath su Archimede e Apollonio contavo appunto di acquistarli prossimamente, ma ora con molto piacere rinuncerò a tale spesa, nella speranza di poterli, entro non molti mesi, consultare costì, o anche, se mi occorresse, farmeli venire. [...] Anche del Bretschneider mi interesserebbe sapere quanto costa e se esiste ancora in commercio. Mi spiacque di non averlo potuto consultare a Berlino, tanto più che lo cercai inutilmente nelle sei o sette altre biblioteche universitarie che visitai nel mio giro. A Gottinga ho potuto vedere quell'altra opera sulla geometria greca, dell'Allman (*Greek Geometry from Thales to Euclid*), breve, ma pur molto interessante[47].

E Vacca, di rimando, nel 1903:

Hai visto gli interessanti: *Fragmente der Vorsokratiker* di H. Diels, Berlin, Weidmann, 1903? Sono molto interessanti; vi ho trovato notevoli pezzi di Archita, Talete, ecc. Spero di farli inserire nel *Formulario*[48].

Per disporre delle pubblicazioni e dei periodici scientifici e letterari più recenti, sulla scena mondiale, Vailati e Vacca si iscrissero, fin dalla sua fondazione nel 1898, alla *Società della cultura*, situata nella Galleria nazionale di via Roma, a Torino. La Società era frequentata fra gli altri dagli economisti Luigi Einaudi e Salvatore Cognetti de Martiis, dal giurista Gaetano Mosca, dall'astronomo Francesco Porro de' Somenzi, dal fisico Antonio Garbasso e dallo storico e sociologo Guglielmo Ferrero e dal matematico Vito Volterra[49]. Vailati e Vacca vi collaborarono attivamente, con suggerimenti e proposte, che li fecero apprezzare per l'ampiezza di letture e di conoscenze sulla stampa estera. Nel dicembre del 1898 Vacca scrive, ad esempio, al russo Vassiliev:

In quest'anno mi sono occupato soprattutto di leggere le opere classiche degli antichi matematici (Tartaglia, Leibniz, Cartesio, ecc.) che qui a Torino solamente ho potuto leggere perché le biblioteche di Genova dove io ho fatto i miei studi, sono troppo poco provviste di libri scientifici. [...] Come distrazione, nelle vacanze d'autunno ho cominciato lo studio della lingua Chinese. Mi ha spinto a ciò il desiderio di vedere come le cognizioni matematiche si sono sviluppate in questo popolo, quando ancora tutte le nazioni europee erano in uno stato di barbarie. Inoltre ho voluto profittare della occasione favorevole che mi si era presentata qui a Torino: essendo stato qui per alcuni mesi un missionario italiano che conosce molto bene questa lingua. [...] Comincerò tra qualche giorno lo studio della lingua Russa;

47 G.Vailati a G. Vacca, 16.12.1899, in Lanaro 1971 cit., p. 168.

48 G. Vacca a G. Vailati, 6.12.1903, in Lanaro 1971 cit., p. 228.

49 Cfr. G. Bergami, *La «Società di cultura» nella vita civile e intellettuale torinese*, in «Studi Piemontesi», 8, 1979, p. 345-364. Nella lettera di V. Volterra a G. Vailati, Torino 12.1.1900, Roma Accademia Nazionale dei Lincei, *Fondo Volterra*, si legge in un PS, dopo la firma: "Porro sta bene e la Società di cultura va prosperando."

io spero tra breve capire la vostra lingua: certo che la vostra lingua non ha per sé il passato, come la nostra, ma ciò che importa assai più, essa ha oramai conquistato un posto importante nel presente e forse assai più …. è il suo avvenire[50].

E nell'ottobre del 1900 consigliava a G. Balsamo Crivelli un libro sulla Cina:

Se la società [della cultura] ha ancora interesse alle cose cinesi, e fondi disponibili, credo ottimo il libro di Mr. Favier, su *Pechino*. Ne è comparsa, pochi giorni fa, una recensione sul «Secolo»[51].

Con l'ingresso nella Società torinese Vailati e Vacca allargarono i loro orizzonti culturali ad ambiti diversi da quello strettamente matematico e storico, e questo contribuì, in parte, a disperdere le energie fino ad allora convogliate sui progetti di Peano e sul *Formulaire*.

Nel 1899 Vacca si recò ad Hannover per consultare i manoscritti di G.W. Leibniz e pubblicò alcuni articoli di storia della logica sulle pagine della *Rivista di Matematica*, diretta da Peano. Tornato a Genova nel biennio 1902-04, come assistente di G.B. Negri sulla cattedra di Mineralogia, svolse nel 1903 un ciclo di Letture sulla Logica matematica di Peano, di cui restano le dispense litografate. In questo periodo si lasciò di nuovo coinvolgere dalla politica: fu eletto consigliere comunale socialista e membro della direzione nazionale del partito. Al suo rientro a Torino nell'autunno del 1904, ormai distratto da interessi di tipo sociale, e anche culturale, essendosi appassionato alla lingua cinese e alle civiltà orientali, finì per interrompere le ricerche di storia delle matematiche, a fianco di Peano. I carteggi fra il dicembre del 1904 e l'aprile del 1905 registrano questo progressivo distacco di Vacca e i tentativi compiuti da Peano per dissuaderlo. Il 7 dicembre 1904 gli scriveva, in proposito:

Ho ricevuto jeri la Sua lettera contenente una frase di colore oscuro. Desideravo schiarirla. È quella dove parla dell'allontanamento definitivo dagli studii. Perciò Le esposi quanto io feci in questo intervallo di tempo, affinché Ella mi esponesse che cosa fece alla sua volta. Ma fummo occupati in altro, poi Ella partì, e così non ci intendemmo. Le scrivo la presente parlando di più cose; così forse parlerò del suo soggetto. Delle cose interessanti, in questo mondo, sonvene moltissime; la famiglia propria, ogni gruppo di persone, una società privata, un comune, una nazione, l'umanità intera. Man mano che allarghiamo il campo, bisogna restringere il punto che si giudica interessante. La scienza interessa l'umanità intera; ma nessuno può dedicarsi a tutta. Ogni singola parte della scienza è interessante. Per me mi interesso ad una sola, ben circoscritta, una parte della Matematica, che Ella ben conosce. Affinché noi due possiamo aiutarci l'un l'altro, è necessario che i soggetti che ci interessano siano molto prossimi fra loro. Io rispetto tutti gli studii, e tutte le occupazioni; ma leggo solo i lavori che si riferiscono al cerchio mio di studii.

[50] G. Vacca a A. Vassiliev, 28.12.1898-9.1.1899, DMUT, Archivio Peano-Vacca, *Corrispondenze*.
[51] Bergami 1979 cit., p. 356.

Ed è già questo tanto ampio, che sorpassa la mia vita. Ora da qualche tempo pare che le nostre occupazioni non abbiano più alcun tratto di unione, e quindi non ci intendiamo quasi più. Ella aveva intenzione di scrivere la storia della matematica. Splendida opera, in cui ci saremmo intesi, e in cui Ella ha tutti i requisiti per ben condurla a termine. L'Amodeo[52] ottenne la libera docenza in storia della Matematica a Napoli, pei suoi lavori sull'Università di Napoli stessa. Con probabilità Ella avrebbe potuto ottenere la stessa libera docenza a Torino. Invece abbandonò l'idea. Ella mi manifestò ieri l'intenzione di scrivere un libro di [esercizi] di Calcolo[53]. Ottima idea, utile per gli allievi, e in conseguenza di onore per Lei, e che le può aprire le porte di posti o pagati o onorifici, a suo gradimento. Ma quando lo farà ? Io conosco le Sue attitudini, e le sue vaste cognizioni; ma occorre che Ella le faccia conoscere ad altri, con pubblicazioni sue. Io sto preparando la nuova necessaria edizione del Formulario. Il Suo aiuto mi è molto caro. Insomma, affinché Ella possa essere utile a Lei stesso, nel campo scientifico, alla scuola, ed a me, che in questo campo posso essere anche utile a Lei, occorre che Ella dedichi *tutta* la sua attività alla Matematica, ed abbandoni tutte le Sue occupazioni di Genova. Procuri sbrigarsi in questi giorni, in cui c'è ancora vacanza abusiva; perché per quanto sia grande la attività che Ella dedicherà alla matematica, non sarà mai troppa. Se Ella non riesce a rompere, o ad allentare l'anello che lo congiunge alle società di Genova, esse assorbiranno tutta la sua attività. Noi potremo convivere, perché io rispetto tutte le occupazioni; ma non potremo aiutarci a vicenda. Se Ella vuol dunque dedicarsi alla scienza, occorre senz'altro che abbandoni Genova, e si fermi qui a Torino[54].

Se Ella prepara il suo promesso libro, farà cosa utile a Lei, agli allievi, alla scienza. Osservazione banale, ma che pure dirò, è che per fare il libro, occorre dedicarci del tempo[55].

[52] Federico Amodeo (1859-1946).

[53] Appunti manoscritti, autografi di G. Vacca, con luogo e data "Torino 1900", sono conservati nell'Archivio Peano-Vacca in DMUT. In essi si legge: "(Applicazioni del calcolo infinitesimale) Esercitazioni Geometriche di celebri Autori. Testo originale, con traduzione e note di G. Vacca assistente alla sc. di Calcolo Infinitesimale nell'università di Torino. I. Problemi di massimo e minimo. II. Tangenti a curve, curvatura, evolute. III. Aree piane, volumi, lunghezza delle curve. IV. Aree di superfici curve. V. Baricentri. VI. Curve soddisfacenti a date condizioni. Torino 1900. *Prefazione* Queste esercitazioni sono destinate ai giovani che cominciano a studiare il calcolo infinitesimale. Esse sono quindi disposte in ordine tale da poter essere lette di mano in mano si conoscono le varie teorie che si sviluppano successivamente nel corso di calcolo. Ad ogni problema ho premesso alcune brevi notizie sulla nomenclatura usata dall'autore di cui si riporta il passo; al nome di ogni autore seguono brevi cenni biografici. Ho premesso un breve schizzo dello sviluppo della matematica in diversi popoli, per permettere al lettore di coordinare nel tempo i diversi autori di cui si parla. Autori: Italia Grecia Germania Inghilterra / Archimede Siracusa - Euclide Alessandria - Apollonio Alessandria -Leibniz Hannover (Lipsia) - Newton."

[54] G. Peano a G. Vacca, Torino 7.12.1904, DMUT, Archivio Peano-Vacca, *Corrispondenze*.

[55] G. Peano a G. Vacca, Torino 27.12.1904, *Ibidem*.

Vacca non si lasciò dissuadere e il 17 febbraio del 1905 gli scrisse:

I colloqui ultimi che ebbi con Lei mi sono stati penosi al di là di quanto Ella può supporre. Soprattutto mi ha fatto soffrire l'affermazione che Ella non mi *capisce*, né capisce ciò che io voglio o desidero. [...] Ad ogni modo credo mio dovere tentare di dirle qui, come meglio posso, quale sia il mio *metodo* di studiare e di vivere che Ella trova tanto cattivo. Io amo gli studi e la matematica in modo speciale nel modo più *disinteressato* possibile. Ho avuto, e glielo espressi allora, due anni fa per un istante il desiderio di tentare l'esperimento di una libera docenza. Oggi quest'unico desiderio *non l'ho più*: né questo, né altri di tale natura. Io desidero soltanto sapere, e in quanto mi riesce, senza affrettarmi per nessuno scopo *non puramente* scientifico, pubblicare quelle poche cose che possono risultare dai miei studi. Io non desidero in nessun modo prendere il posto di nessun altro, e nemmeno un posto desiderato da altri. ... Durante gli anni passati con Lei io ho avuto l'abitudine di dirle non solamente ciò che io facevo, ma anche soltanto ciò che io pensavo. E senza dubbio io penso assai cose più di quelle che io non faccia o possa fare. Però io *debbo e voglio essere considerato* soltanto per quel poco che io ho fatto e non per ciò che penso. Ella mi ha detto pure altra volta che il mio metodo è quello dei *dilettanti*, non degli scienziati. Io le dirò che non sono un *dilettante* perché dedico la maggior parte della mia attività allo studio: che sono uno studioso che produce *poco*, anche un po' perché amo la scienza, e non aspetto da essa vantaggi materiali di nessuna specie. ... Altro non so dirle, se non che professarle ancor una volta la gratitudine che a Lei mi lega, soprattutto perciò che la maggior parte di quel poco che io so in matematica la devo a Lei[56].

Di rimando la risposta subitanea di Peano:

Io reputo dovere mio, e di quanti sono incaricati di insegnamento, di perfezionarlo, con studii e pubblicazioni relative. Perciò io pubblico il *Formulario*. Ella pure vi fece notevoli ed importanti lavori, che riconosco ed apprezzo, tutte le volte che leggo il *Formulario*, e specialmente ora che lo riordino, e vi veggo le sue aggiunte. Io ho tenuto la tipografia a Torino; poi su in campagna; Ella ha mandato solo quella dim. di Cayley, che è riuscita stampata per un caso favorevole. Invece le questioni importanti, utili per i nostri giovani immediatamente, o utili più tardi, sono nel *Formulario* a mucchi; e basta un po' di attenzione per scoprirne alcune. Quindi nel fatto che Ella non ne vegga, io scorgo che Ella non legge più le bozze del *Formulario*. Se Ella fosse in caso di camminare da sé, io ne sarei ben lieto, e non verrei a dare consigli a chi non ne ha bisogno. Ma il libro di storia svanì[57]. Il libro per gli studenti si protrasse, e svanì[58]; certo per quest'anno non riesce più, perché sarebbe come pubblicare d'estate il calendario dell'inverno scorso. Quindi,

[56] G. Vacca a G. Peano, Genova 17.2.1905, *Ibidem*.

[57] Peano si riferisce qui al libro che Vacca avrebbe dovuto consegnare nel 1903 alla casa editrice Bocca (v. sotto, note 60 e 61).

[58] Cfr. sopra, nota 53.

se vuol conchiudere qualche cosa, non rifiuti per ora la collaborazione mia. Io le ho proposto più lavori; Ella risponde costantemente che è o difficile, o impossibile, o non interessante. E così passarono i mesi, e il tempo preziosissimo fu buttato via. Alle bozze dà un'occhiata; dice che già le conosce; le aggiunte dei collaboratori dice che non Le piacciono; e conchiude nulla. Dunque, per intenderci, e per conchiudere qualche cosa, prenda alle buone le bozze del *Formulario*; le legga con attenzione ovunque sonvi novità. Troverà molti fili che la condurranno ad utilizzare le sue cognizioni ampie, ma caotiche. Altri ne indicherò io stesso, e così potrà continuare a lavorare, e conchiudere, come fece per tomi precedenti, farsi onore, e essenzialmente fare il proprio dovere. Di qui potrà spiccare il volo a fare quei lavori e pubblicazioni, in cui il mio aiuto sarebbe nullo. Mi dimostri dunque la sua buona volontà col presentarmi le bozze corrette almeno dagli errori tipografici. Non mi serviranno più molto, perché già siamo ad edizioni successive di bozze, ma serviranno a Lei. Così nascerà l'addentellato per fare lavori più importanti, e per intenderci fra noi completamente[59].

Nella primavera del 1903 Peano aveva proposto alla casa editrice Bocca di Torino la pubblicazione di un libro del suo assistente, dedicato alla storia della matematica, e tale proposta fu accolta favorevolmente, come attesta il carteggio di F. Bocca con Vacca:

In riguardo alla proposta ch'ella ci ha trasmesso a mezzo dell'illustre prof. Peano, circa un volume sulla storia della matematica, ringraziandola sentitamente della squisita sua cortesia, le dichiariamo subito, che in linea di massima saremmo lietissimi di pubblicare un simile lavoro. Nella nostra biblioteca (e l'appunto ci venne fatto da diverse parti), manca assolutamente la matematica; e per una collezione che si intitola: di scienze moderne, non è certamente piccolo difetto. Ma anche noi abbiamo delle attenuanti, e non disprezzabili, quando si pensi, che le opere di matematica sono quasi sempre scritte in forma assolutamente incomprensibile per il pubblico profano, e che a nulla quindi servirebbe includere nella nostra biblioteca delle opere, che malgrado le eccellenti disposizioni dell'autore, riescissero per il gran pubblico scritte in sanscrito ed in chinese. Ecco la difficoltà massima: stendere la mano al pubblico (che purtroppo in Italia è scarso assai) delle persone colte non specialiste. Risponderebbe il suo libro a questo non ingiusto desiderio? Se sì, gradiremmo assai di esaminare in tutto od in parte il manoscritto, per vedere, noi profani, se il libro raggiungerebbe lo scopo. Ci corre poi l'obbligo di dirle, che fino a gennaio 1904 non potremmo intraprendere la stampa, essendo ora veramente troppo carichi di impegni editoriali grandi e piccoli. Ad ogni modo accolga per intanto, egr. signor professore, i nostri migliori ringraziamenti, ed i nostri più distinti saluti. Dev. F. Bocca[60].

[59] G. Peano a G. Vacca, Torino 19.2.1905, DMUT, Archivio Peano-Vacca, *Corrispondenze*.
[60] F. Bocca a G. Vacca, Torino 30.6.1903, DMUT, Archivio Peano-Vacca, *Corrispondenze*. La minuta di risposta di Vacca a Bocca, s. l. s. d. [Torino giugno-luglio 1903], Ibidem, fu

Nelle carte di Vacca è conservato l'indice schematico di quel libro, mai realizzato:

Elementi di Storia della Matematica

(Credo che si può pubblicare in un volume di 250 a trecento pagine del formato e caratteri di quelli della *Piccola Biblioteca di Scienze moderne*, p. es. le Letture scientifiche popolari del Mach).

Io mi posso impegnare di consegnare il manoscritto completo entro il 30 Settembre.

Indice delle materie.

Prefazione...Utilità della Storia delle scienze.

Parte I (divisione del libro notizie biografiche)

Cap. I. Babilonesi, Egiziani, Cinesi. Ahmes

II. I Greci.

- a) Talete, Pitagora, Aristotele.
- b) Euclide, Archimede, Apollonio.
- c) Tolomeo, Pappo, Diofanto.

III. Gli Indiani. Ariabatha. Brahmagupta.

IV. Gli Arabi. Albattani, Tabit, Abu'l Wefa, Ibn Albanna, Alqachani.

V. Gli Italiani. Leonardo Pisano. (Alcuino)

Parte II

Cap. VI. Il secolo XV. Regiomontano, Paciuolo, Chuquet, Stifel, Maurolico.

Cap. VII. Il secolo XVI.

- a) Recorde, Tartaglia, Bombelli.
- b) Vieta, Stevino, Nepero, Briggs, Harriot.
- c) Kepler.

Cap. VIII. Il secolo XVII.

- a) Girard, Descartes, Cavalieri.
- b) Fermat, Torricelli, Pell. Wallis, Brouncker, Mercator, Pascal, Gregory, Huygens.
- c) Newton, Leibniz, Bernoulli Jac., Bernoulli Joh., Cotes.

Cap. IX. Il secolo XVIII.

- a) Stirling, Maclaurin.
- b) Euler.
- c) Lagrange, Legendre.
- d) Gauss.

Cap. X. Il principio del secolo XIX.

- a) Cauchy.
- b) Möbius, Staudt, Abel, Jacobi, Dirichlet.
- c) Hamilton, Grassmann, Weierstrass.

anch'essa positiva: "Egregio Signore, La ringrazio vivamente della sua lettera del 30.6.1903. La mia intenzione nello scrivere il libro sulla Storia della matematica, è appunto quella di stendere la mano al pubblico delle persone colte non specialiste. Senza questa clausola mancherebbe la sua ragione d'essere. Ma riusciranno questi miei sforzi a raggiungere questa meta? Entro il mese le invierò una parte del lavoro ed Ella potrà così meglio di me giudicarlo."

L'avvenire della matematica.
a) Le matematiche applicate.
c) Le matematiche pure.
b) La logica matematica.[61]

Nel marzo del 1905 Vacca rassegnò le sue dimissioni dal posto di assistente a Torino[62] e Peano così gli espresse il suo rammarico, lasciandogli però aperta la possibilità di ulteriori dialoghi:

Il Rettore, con lettera del 9 corrente, mi comunica che le sue dimissioni furono accettate. È con vero e profondo dolore che io debbo privarmi della Sua opera intelligente e zelante. E mi auguro vivamente che Ella trovi ben presto il modo di manifestare le sue vaste e profonde cognizioni scientifiche. Grato, e sempre memore delle sue gentilezze, mi ricordi, se in qualche cosa Le potrò essere utile[63].

All'amico Vailati Vacca confidava le reali motivazioni della sua decisione:

Nei mesi trascorsi a Torino da novembre a marzo, mi sono trovato ogni giorno di più nella classica situazione: *Nel mezzo del cammin di nostra vita,* ecc., ovvero in quella descritta da Descartes nel suo *Discorso suI Metodo*. Detto altrimenti, ho visto di non poter continuare a lungo nel lavoro che negli ultimi sette anni avevo intrapreso a Torino. Le ragioni sono molteplici e non credo siano personali. È certo che per me Torino senza di te, senza Calderoni, Bersano ... e tutti gli altri amici con i quali mi trovavo a continuo contatto, mi ha ora più che mai l'aria di una città deserta. D'altra parte la mia collaborazione con il prof. Peano non è più così urgente come anni or sono. Ora parecchi già conoscono o almeno cominciano a gustare quelle teorie meravigliose alla nascita delle quali io ho assistito con una gioia che pochi potranno provare[64].

Pochi mesi dopo egli si trasferì a Firenze per apprendere il cinese sotto la guida di Carlo Puini e qui strinse amicizia con Giovanni Papini, collaborando con Vailati alla rivista *Leonardo*, con articoli che miravano a contrastare le opi-

[61] Vacca aggiunse a matita il numero di pagine che intendeva dedicare ad ogni capitolo e paragrafo: 10 p. per la prefazione, 50 p. per la prima parte, 175 p. per la seconda e 10 p. per la parte finale, per un totale di 245 p.

[62] Minuta di G. Vacca a G. Peano, Torino 11.3.1905, DMUT, Archivio Peano-Vacca, *Corrispondenze*: "Sono dolentissmo di doverle comunicare che le mie condizioni di salute non mi permettono di continuare a restare presso di Lei come assistente. È questo oramai il sesto inverno che passo a Torino, ed ho dovuto convincermi che non posso in alcun modo abituarmi al clima ed al metodo di vita di questa bella città."

[63] G. Peano a G. Vacca, Torino 11.4.1905, Ibidem. Nonostante gli studi di sinologia lo avessero allontanato dal Piemonte, Vacca mantenne però con Peano un saldo legame di stima e di amicizia, attestato dalla fitta corrispondenza, protrattasi fino alla morte del logico matematico nel 1932.

[64] G. Vacca a G. Vailati, Torino 6.4.1904, BDF Milano e minuta del 4.4.1905 in DMUT Archivio Peano-Vacca, *Corrispondenze*.

nioni superficiali di B. Croce sul significato culturale della matematica, della logica e dei progetti di lingue internazionali.

Viaggi, Congressi, libere docenze e corsi universitari di Storia delle scienze

I viaggi, i congressi e i soggiorni di studio all'estero permisero a Vailati e a Vacca di entrare in contatto con i più autorevoli storici e filologi contemporanei. Con alcuni di essi intrecciarono corrispondenze e dialoghi, con richieste di informazioni bibliografiche e di pareri scientifici, facendosi subito apprezzare per le competenze acquisite in campo storico scientifico[65]. Importanti furono ad esempio i carteggi di Vailati con J. L. Heiberg nel gennaio-marzo del 1897 e con G. Eneström, dopo aver inviato loro la sua prolusione *Sull'importanza delle ricerche relative alla Storia delle scienze*[66].

Nel corso delle lezioni sulla statica presso i Greci e in particolare sulle *Quaestiones mechanicae* di Aristotele e sui libri *De planis aequiponderantibus* e *De quadratura parabolae* di Archimede, Vailati aveva consultato «la bellissima edizione delle opere di Archimede» di Heiberg, e si rivolse quindi direttamente a lui per opportuni approfondimenti e adeguate interpretazioni su passi o concetti oscuri, desiderando

> ricostruire la via che deve aver seguito Archimede per giungere a stabilire l'esistenza e l'unicità del centro di gravità dei solidi pesanti partendo da considerazioni relative all'equilibrio dei *gravi girevoli intorno ad assi* (orizzontali o no)[67].

Nell'ampia esposizione della problematica che gli stava a cuore Vailati dimostrò di possedere una profonda conoscenza delle principali fonti greche sul tema (Aristotele, Archimede, Erone, Pappo), nelle edizioni critiche più autorevoli, a partire dal Rinascimento fino a quelle più recenti (Commandino, Heiberg, Carra de Vaux). Il danese Heiberg gli rispose con immediatezza e squisita cortesia, definendosi un semplice 'filologo, senza una peculiare cono-

[65] In particolare, relativamente a Vailati, fra il 1897 e il 1907 si hanno carteggi con Gustav Eneström, Moritz Cantor, Paul Tannery, Johann L. Heiberg, Ernst Mach, Pierre Duhem, Emil Wohlwill, Hermann Diels, Samuel Dickstein, Sigmund Günther e Alexander Vassilief. Cfr. M. DE ZAN, *I carteggi europei di Vailati*, in «Annuario del Centro Studi Vailati», 2004, p. 19-52. Per quanto riguarda Vacca, ai nomi di Eneström, Cantor, Heiberg, Tannery e Vassilief si devono aggiungere quelli di Louis Couturat, Florian Cajori, Dirk Struik, Walter Rouse Ball e Heinrich Wieleitner. Cfr. P. NASTASI, A. SCIMONE (a cura di), *Lettere a Giovanni Vacca*, «Quaderni Pristem», 5, 1995 e E. LUCIANO, C.S. ROERO, *Gli Archivi di Giuseppe Peano*, in S. MONTALDO, P. NOVARIA (a cura di), *Gli Archivi della scienza*, Milano, Angeli, 2011, p. 89-104, in particolare p. 100-104.

[66] J.L. Heiberg a G. Vailati, Copenhagen 31.1.1897, in DE ZAN 2004 cit., p. 24-25.

[67] G. Vailati a J.L. Heiberg, Torino 9.2.1897, *Ibidem*, p. 25-27.

scenza della matematica'. Gli fu però prodigo di consigli e gli segnalò testi, articoli e altre fonti greche, in edizioni critiche recenti, dichiarandosi addirittura disponibile a prestargli volumi ed estratti della sua biblioteca personale[68].

Nel dicembre del 1899 Vailati raccontava a Vacca gli incontri avuti all'estero:

> Come avrai saputo dal prof. Peano, nel ritorno, mi trattenni una decina di giorni a Monaco, ove presi parte al Congresso dei *Naturforscher und Ärzte*, nella Sezione di matematica. Vi conobbi i due Cantor [Georg e Moritz], lo Schönflies [Arthur], il Klein [Felix] (che avevo già visitato passando per Gottinga), il Nöther [Max], il Gordan [Paul], Study [Eduard], Sommerfeld [Arnold], Engel [Friedrich], Boltzmann [Ludwig], etc. Tra i Monacesi il Dyck [W.F.], il Pringsheim [Alfred], che ci riunì in casa sua a un ricevimento principesco (egli deve essere più volte milionario a giudicare dal lusso in cui vive). A Giessen fui a cercare inutilmente del Pasch [Moritz] che era in viaggio. Fui invece abbastanza fortunato a Karlsruhe, avendovi trovato lo Schröder [Ernst] appena di ritorno da un *tour* in bicicletta. Di *storici* trovai a Monaco, oltre al Cantor, anche il Curtze [Maximilian] di Thorn, che è un simpaticissimo vecchietto, il Felix Müller e un russo (prof. Mollien) che si occupa di studi sulla *Storia dell'Algebra* e mi disse che quest'anno sarebbe venuto in Italia e anche a Torino[69].

Dal 1900, sino alla sua prematura scomparsa nel 1909, Vailati partecipò, con Peano e Vacca, a vari congressi internazionali[70], in cui tenne comunicazioni e pubblicò resoconti: a Parigi (1900), Roma (1903), Heidelberg (1904, 1908), Ginevra (1904), Roma (1908). La sua autorevolezza fu universalmente riconosciuta, al punto da essere più volte eletto, nelle assise internazionali dei filosofi, come referente per l'Italia, insieme a Peano, M. Calderoni, C. Cantoni, F. Enriques, B. Croce e G. Vidari.

Vailati collaborò anche attivamente all'introduzione dell'insegnamento della storia delle scienze nel percorso di studi superiori e universitari[71] e fin dal 1900 Volterra lo sollecitò a presentare domanda di concorso a una libera docenza di Storia delle Matematiche[72], che però, come quella di Vacca, non ebbe seguito.

[68] J.L. Heiberg a G. Vailati, Copenhagen 13.2.1897, *Ibidem*, p. 28-30.

[69] G.Vailati a G. Vacca, Siracusa 16.12.1899, in Lanaro 1971 cit., p. 168-169.

[70] Cfr. E. Luciano, C.S. Roero, *From Turin to Göttingen: dialogues and correspondence (1879-1923)*, in «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche», 32, 2012, p. 28-29, 46, 54-60.

[71] Cfr. L. Giacardi, *Matematica e humanitas scientifica Il progetto di rinnovamento della scuola di Giovanni Vailati*, in «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana», sez. A, 1999, p. 317-352.

[72] Cfr. Volterra a Vailati, Roma 7.10.1899, in Roma ANL, *Fondo Volterra*: "Ella ha fatto benissimo ad accettare il Liceo di Siracusa. È una destinazione un po' lontana, ma a Siracusa si sta benissimo; e poi spero che Ella avrà al più presto un trasloco un po' più vicino a noi. Ma per cominciare è bene accettare subito ciò che il Ministero offre. È a noi che deve dispiacere il suo allontanamento! Del resto sono certo che la patria di Archimede le interesserà moltissimo. A Roma io mi tratterrò anche dopo il 15 e quindi conto certamente di vederla al Suo passaggio.

Il tema dei corsi di Storia delle scienze da attivare nelle facoltà scientifiche, già auspicato a Parigi nel 1900 al *Congrès d'histoire comparée*, fu ridiscusso a Roma nel 1903, al Congresso internazionale di Scienze storiche, dove nella sezione *Storia delle Scienze matematiche e sperimentali*, cui erano iscritti, fra gli altri, Vacca, Vailati, Peano, Volterra e Loria[73], fu approvata una mozione che

> considerando essere di eccezionale importanza che alla storia delle scienze venga accordato nell'insegnamento il posto che le spetta di diritto, [...] emette il voto:
> 1. che tale insegnamento venga istituito con la creazione di corsi universitari divisi in quattro serie: 1) scienze matematiche e astronomiche; 2) scienze fisiche e chimiche; 3) scienze naturali; 4) medicina;
> 2. che gli insegnamenti della storia delle matematiche, della medicina, della fisica, della chimica e delle scienze naturali vengano annoverati fra i corsi complementari;
> 3. che l'abilitazione alla libera docenza possa essere concessa anche per la storia delle scienze, secondo la divisione del primo comma.
>
> La sezione stessa fa inoltre voti che dei rudimenti di storia delle scienze vengano introdotti nei programmi dei singoli insegnamenti delle scuole medie[74].

A suggellare il prestigio raggiunto dai due storici della Scuola di Peano, a livello nazionale e internazionale, giunsero nel Novecento prestigiosi incarichi,

Anzi sarebbe bene che Ella trovasse il modo di potersi fermare uno o due giorni qui anche per vedere il Cerruti che sarà di ritorno a Roma fra pochi giorni. Egli mi ha parlato con molto entusiasmo (come Ella si merita) di Lei e mi ha detto che sarebbe felice di trovar modo di farle avere dal Consiglio superiore la libera docenza in Storia delle matematiche. Se il Beltrami venisse nello stesso avviso, allora la cosa sarebbe sicura, giacché Dini e Roiti sarebbero certamente favorevoli. Come sa il Beltrami ha qualche difficoltà soltanto per ragioni di regolamento, non già per mancanza di stima verso i suoi lavori che egli giustamente apprezza. Ora l'andare a Siracusa non impedisce che Ella debba pensare all'avvenire."; Volterra a Vailati, Roma 27.12.1899, *Ibidem*: "Qui ho avuto buone notizie *per una Sua libera docenza da tutte le parti.*"; Volterra a Vailati, Torino 12.1.1900, *Ibidem*: "Quando fui a Roma pel Capo d'Anno il Beltrami entrò direttamente in discorso della sua libera docenza dicendo che sarebbe molto lieto che Ella la ottenesse; ma che la procedura migliore sarebbe quella di ricorrere alla libera docenza per esame, onde evitare qualsiasi difficoltà. La Commissione, egli soggiungeva, dovrebbe darle un tema storico, anzi relativo proprio agli studi *sui punti che Ella pensa di studiare in questo momento*, come del resto si usa quasi costantemente di fare. Io la consiglierei a seguire questo avviso, che più ci penso più mi sembra migliore, perché senza alcuna Sua noia verrebbero sormontate tutte le difficoltà. Ella potrebbe rivolgersi a Catania o a Palermo, onde iniziare le pratiche opportune."; Volterra a Vailati, Roma 30.12.1900, *Ibidem*: "Perché chiede la libera docenza in Storia della filosofia a Palermo e non pensa più a quella in Storia delle matematiche? Credo che adesso un tentativo avrebbe un esito felice. Vedrò di sentire qualche membro del Consiglio Superiore." Ringrazio M. De Zan per avermi fornito le immagini digitali di queste carte.

[73] Cfr. G. Paoloni (a cura di), *Vito Volterra e il suo tempo (1860-1940) Mostra storico documentaria*, Roma, ANL, CNR, ACS, 1990, Fig. IX.1.

[74] *Ibidem*, Fig. IX.2.

come l'edizione nazionale delle opere di E. Torricelli e la redazione di capitoli per importanti collane enciclopediche sulle matematiche elementari, destinate agli insegnanti. Nella raccolta curata da Enriques, di cui apparve nel 1911, per intervento di F. Klein, l'edizione tedesca, fu pubblicato il profondo articolo di Vailati sulla teoria delle proporzioni[75], nel quale seppe coniugare le competenze dello storico con le più recenti teorie di Hilbert e Schur[76]. In questo modo Vailati mostrò alla comunità dei matematici l'eredità e l'influenza ricevuta dalla sua partecipazione al *Formulaire* di Peano e il ruolo interattivo della storia con i contenuti della disciplina e il suo insegnamento.

Non si può dire lo stesso per Vacca che non recepì dall'esperienza torinese il rigore necessario a raggiungere ambiziosi obiettivi, con opere di sintesi, limitandosi a studi frammentari, in cui forte è l'accento sui precursori. La sua miopia verso i recenti sviluppi della logica matematica è stata giustamente messa in evidenza da E. Luciano, come pure il mancato rispetto verso gli impegni presi con l'*Enciclopedia*, coordinata da L. Berzolari, G. Vivanti e D. Gigli, che invano attesero il suo contributo[77]. Ancora una volta lo storico genovese disattese le promesse, pur essendo sollecitato da autorevoli colleghi. Ad esempio Enriques dovrà scrivere a Xavier Léon nel 1923: «Malheuresement on ne peut compter sur lui!»[78]

Se non altro a lui va il merito di aver partecipato alla collezione degli scritti dell'amico Vailati e di aver curato, in modo eccelso, la traduzione del primo libro degli *Elementi* di Euclide, con testo greco a fronte, utilizzata da Peano nelle sue lezioni di Matematiche complementari dal 1924 al 1932. In questo libricino si può cogliere tutta l'eredità dell'apprendistato torinese: il rigore e l'attenzione alle fonti, l'accuratezza nelle trascrizioni, la chiarezza e semplicità nelle definizioni, nelle esposizioni e nella redazione dell'apparato di note storiche, filologiche e bibliografiche. L'antico maestro con orgoglio nel 1915 lo definì "un vero gioiello" e auspicò "che si introduca nelle nostre scuole classiche questo Euclide autentico e vivente"[79].

[75] G. VAILATI, *Lehre von den Proportionen, 1. Die Proportionen nach Euklid, 2. Weitere Entwicklung der Lehre*, in F. ENRIQUES (a cura di), *Fragen der Elementargeometrie*, I Teil *Die Grundlagen der Geometrie* (trad. H. Thieme), Leipzig, Teubner, 1911, p. 203-245.

[76] Cfr. G. Vailati a G. Vacca, dicembre 1903, in LANARO 1971 cit., p. 231.

[77] E. LUCIANO, *The* Enciclopedia delle Matematiche elementari *and the contributions of Bolognese mathematicians*, in S. COEN (a cura di), *Mathematicians in Bologna*, Basel, Springer, 2012, p. 343-372.

[78] Cfr. F. Enriques a X. Léon, 23.8.1923, in L. QUILICI, R. RAGGIANTI, *Il carteggio Xavier Léon: corrispondenti italiani con un'appendice di lettere di George Sorel*, in «Giornale critico della filosofia italiana», (6) 9, LXVIII, 1989, p. 328.

[79] Cfr. G. PEANO, *G. Vacca Euclide, Il primo libro degli Elementi, testo greco, versione italiana, introduzione e note, Firenze, Sansoni 1916*, in «Bollettino della Mathesis», Pavia, 1915 Dicembre, p. 134.

I contributi di G. Vacca alla Storiografia della Logica Matematica[1]

ERIKA LUCIANO

Nell'esiguo gruppo di professionisti che, fra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento, si occupano di storia della logica, spicca il nome di Giovanni Vacca, il quale dedica a questo tema una decina di scritti. Il suo interesse per quest'ambito di ricerca risale al 1894 e si spegne solo negli anni del secondo dopoguerra, costituendo un filo conduttore del suo intero percorso scientifico.

Nonostante la continuità temporale, la produzione di Vacca risulta però saltuaria, oltre che eterogenea, vista la molteplicità di epoche ed autori affrontati, la diversità di collocazione editoriale dei suoi contributi e le variazioni di approccio metodologico. Accanto a semplici scritti d'occasione[2] – da cui egli trae lo spunto per approfondire alcuni elementi della storia della logica matematica assai circoscritti – vi sono infatti articoli specialistici, dedicati a Leibniz e ai suoi precursori[3], e alle prime occorrenze del principio di induzione completa[4]. Un gruppo non marginale di lavori con-

[1] Ricerca eseguita nell'ambito del progetto PRIN 2009 *Scuole matematiche e identità nazionale nell'età moderna e contemporanea*, unità di Torino.

[2] G. Vacca 1899a, *A.N. Whitehead, A Treatise on Universal Algebra, with Applications, vol. I, Cambridge, Univ. Press, 1898*, in «Rivista di Matematica» (in seguito «RdM»), 6, 1899, p. 101-104; 1906b, Sulla logica simbolica, in «Il Leonardo», 4, 1906, p. 366-368. Le sigle si riferiscono all'elenco delle pubblicazioni di Vacca in E. Luciano, C.S. Roero, *La Scuola di Peano*, in C.S. Roero (a cura di), *Peano e la sua Scuola fra matematica, logica e interlingua*, Torino, Dep. Sub. Storia Patria, 2010, p. 106-112.

[3] G. Vacca 1899b, *Sui manoscritti inediti di Leibniz*, in «Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche» (Loria), 2, 1899, p. 113-116; 1899c, *Sui precursori della logica matematica*, in «RdM», 6, 1899, p. 121-125, 183-186; 1903c, *La Logica di Leibniz*, in «RdM», 8, 1903, p. 64-74.

[4] G. Vacca 1910b, *Maurolycus, the first discoverer of the principle of mathematical induction*, in «Bulletin of the American Mathematical Society», (2) 16, 1910, p. 70-73; 1910g, *Sulla storia*

cerne infine il periodo moderno della logica e presenta interessanti spunti autobiografici[5].

Cogliere un'unitarietà d'impostazione soggiacente a questi studi e collocarli nel quadro dell'attività di ricerca matematica di Vacca non è semplice, poiché occorre stabilire quali fattori interni ed esterni lo hanno influenzato nella scelta degli aspetti della storia della logica di cui occuparsi, e della metodologia con cui affrontarne l'esame; ricostruire quando e se è maturata in lui una concezione storiografica e illustrare come essa si è andata evolvendo; valutare quanto è stato condizionato dal sentimento di appartenenza alla Scuola di Peano e dal retaggio degli anni trascorsi a Torino, come collaboratore del *Formulario di Matematica*.

Un apporto essenziale, a questa ricerca, è giunto dallo studio dei materiali dell'Archivio *Peano-Vacca* conservato presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino e comprendente numerosi manoscritti, le dispense di un corso di Logica tenuto da Vacca all'Università di Genova nel 1903[6] e i volumi del *Formulario*, da lui fittamente annotati fino agli ultimi anni di vita[7]. Solo alla luce di questi documenti, ad esempio, è stato possibile ricostruire le indagini condotte da Vacca ad Hannover sui manoscritti leibniziani o desumere le valutazioni che egli diede degli sviluppi della logica matematica nel Novecento.

L'insieme delle considerazioni elaborate da Vacca sulla storia della logica, quale emerge dallo studio di questi inediti, sfruttati solo in parte nelle pubblicazioni, testimonia una tensione fra aspetti impliciti ed espliciti, che è tipica delle dinamiche di costruzione e condivisione del sapere matematico interne alla Scuola di Peano.

La storia della logica per il Formulario

A partire dal 1888, G. Peano accenna alla storia della logica matematica nelle introduzioni di parecchi suoi scritti. Animato dalla volontà di collocare il proprio operato in una precisa tradizione di studi, egli afferma che:

> la logica deduttiva, la quale fa parte delle scienze matematiche, non ha finora molto progredito, benché sia stata oggetto degli studii di Leibniz, Hamilton, Cayley, Boole, H. e R. Grassmann, Schröder

del principio d'induzione completa, in «Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche» (Loria), 12, 1910, p. 33-35; 1911a, *Sur le principe d'induction mathématique*, in «Revue de Métaphysique et de Morale» (in seguito «RMM»), 19, 1911, p. 30-33.

[5] G. Vacca, *Origini della scienza*, Roma, Partenia, 1946.

[6] G. Vacca, *Elementi di logica matematica*, Genova, ed. lit., gennaio 1903, 24 p.

[7] In particolare ho preso in esame i *marginalia* di Vacca ai volumi di G. Peano, *Formulaire de mathématiques*, II § 1, Turin, Bocca, 1897; *Formulaire mathématique*, Turin, Bocca, 1903, p. V-XVI, 1-28, 54-56, 76-82; *Formulario Mathematico*, Torino, Bocca, 1908, p. V-XXXVI, 2-17.

e che

> già Leibniz enunciò alcune analogie fra le operazioni dell'algebra e quelle della logica. Ma solo in questo secolo, per opera di Boole, Schröder, e altri molti, si studiarono queste relazioni[8].

All'atto di ricostruire l'*iter* della logica, Peano si basa su un discreto numero di fonti dirette, di solito dichiarate, fra cui gli scritti di Leibniz e *La logique* di E. De Condillac (1780). A queste accosta una letteratura secondaria, cui ricorre per il primo inquadramento delle proprie ricerche e che include il volume di L. Liard, *Les logiciens anglais contemporaines* (Paris, Baillière, 1878) e gli scritti di A. Nagy *Fondamenti del calcolo logico* (Napoli, Pellerano, 1890) e *Principi di logica esposti secondo le dottrine moderne* (Torino, Loescher, 1891)[9].

I suoi primi affreschi storici, inizialmente scarni, vanno arricchendosi nel corso del tempo. Ad indirizzare le indagini contribuiscono la redazione del *Formulario* da un lato e, dall'altro, la precisazione di cosa è la logica, di quali sono i suoi problemi ed i suoi metodi.

Al primo ordine di attività si collegano, in particolare, alcuni studi sui precursori della logica, che lo portano a riscoprire un sistema pasigrafico caduto in oblio, pubblicato da L. Richeri nei *Melanges* della Privata Società Scientifica di Torino (poi Accademia delle Scienze)[10]. Per quanto riguarda il secondo

[8] G. Peano 1888a, *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di Hermann Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*, Torino, Bocca, p. VII e 1891c, *Principii di logica matematica*, in «RdM», 1, p. 1. Cfr. anche le introduzioni alle edizioni del *Formulario* e G. Peano 1889a, *Arithmetices Principia nova methodo exposita*, Torino, Bocca, 1889, p. IV; 1894g, *Notations de logique mathématique*, Turin, Guadagnini, p. 3; 1894h, *Notions de logique mathématique*, in «Association française pour l'avancement des sciences», (11) 23, 1894, p. 4; 1896j, *Studii di Logica matematica*, in «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», 32, 1896, p. 565; 1900a, *Formules de logique mathématique*, in «RdM», 7, p. 3. Qui e nel seguito gli scritti di Peano sono citati con la sigla del dvd a cura di C.S. Roero, *L'Opera Omnia e i Marginalia di Giuseppe Peano (with English Version)*, Torino, Dipartimento di Matematica, 2008.

[9] In linea generale, è difficile individuare in modo completo la bibliografia secondaria su cui Peano fonda la sua visione della storia della logica, in quanto solo di rado i riferimenti bibliografici sono da lui citati espressamente Per rintracciarli in modo più esaustivo è stato utile l'esame della costituzione della sua biblioteca personale. Cfr. E. Luciano, *La biblioteca "ritrovata" di Giuseppe Peano*, in «Rendiconti Cuneo 2007», p. 184-188 e C.S. Roero, *The "Formulario" between Mathematics and history*, in F. Skof (ed.), *Giuseppe Peano between Mathematics and Logic*, *Proceeding of the International Conference in honour of Giuseppe Peano on the 150th anniversary of his birth and the centennial of the Formulario Mathematico, Torino (Italy) October 2-3, 2008*, Milano, Springer, 2010, p. 83-132.

[10] Peano dedica al saggio di L. Richeri, *Algebrae philosophicae in usum artis inveniendi*, *specimen primum*, in «Mélanges de philosophie et de mathématique de la Société Royale de Turin pour les années 1760-1761», II, 3, p. 46-63, la nota 1894e, *Un precursore della logica matematica*, in «RdM», 4, 1894, p. 120.

aspetto, la situazione è più sfumata, poiché negli anni 1888-1894 il punto di vista di Peano sullo *status* della logica non è stabilmente definito. Questa disciplina è ancora indicata, in modo vago, come “la nouvelle et importante science [...] qui étudie les propriétés formelles des opérations et des relations de logique”[11], ed è perciò chiaro che la sua storia sia compendiata da Peano elencando una lista di nomi ‘a fisarmonica’, che a seconda dei casi include o meno quelli di W. Clifford, A. De Morgan, W. Jevons, A. MacFarlane, H. MacColl, C.S. Peirce, P.S. Poretzky, J. Venn e G. Frege.

È questa la *Veltanshauung*, nel momento in cui Vacca entra in contatto con la Scuola di Peano, ricevendo l’invito a collaborare alla stesura del *Formulaire de mathématiques*[12]. Molteplici fattori concorrono a determinare la trasformazione di ciò che è inizialmente un interesse generico per la storia della logica, in un’attività continuativa e di tipo professionale.

In primo luogo vi è il lavoro di redazione dell’apparato storico del *Formulario*, già imbastito da Peano e da Vailati, seguendo il regolamento dettato nel 1898[13]. A ciò si deve aggiungere, l’influenza esercitata su Vacca dalle notizie storiche fornite da E. Schröder nella sua *Algebra der Logik* (Leipzig, Teubner, 1890-1905) e richiamate nella conferenza *Über Pasigraphie, ihren gegenwärtigen Stand und die pasigraphische Bewegung in Italien* (1897), tenuta al Congresso Internazionale dei Matematici di Zurigo. Un ulteriore elemento che lo orienta verso questi studi è costituito, poi, dall’ampio panorama di letture, soprattutto di autori di area francese ed anglosassone come G. Halsted, W. James, L. Couturat, J.B. Stallo e A. Naville, suggeritegli dall’amico Vailati[14]. Non si può infine tacere l’influsso, per quanto indiretto, dell’interesse per la storia dell’aritmetica binaria, e in particolare per i contributi di Leibniz. È infatti grazie alle indagini sulla diadica che Vacca (e per suo tramite Peano) vengono a conoscenza delle riflessioni del matematico e filosofo tedesco sui pregi dei caratteri ideografici e del suo ‘sogno’ di elaborare una *lingua characteristica* atta ad esprimere un *calculus ratiocinator*[15].

[11] Peano 1894g cit., p. 2.

[12] Cfr. G. Peano a G. Vacca, 15.5.1894, c. 1r.

[13] G. Peano 1898e, *Sul § 2 del Formulario, t. II: Aritmetica*, in «RdM», 6, 1898, p. 83, 88-89. Esso, com’è noto, prescrive ai redattori di perseguire la massima precisione nel compilare le informazioni biografiche e i rimandi bibliografici, e di ricorrere il più possibile alle fonti, eventualmente trascrivendone gli stralci significativi.

[14] Cfr. G. Vailati a G. Vacca 26.1.1900, 5.2.1900, 23.5.1900, 9.6.1900, 27.1.1901, 25.5.1901, 28.12.1901, 31.1.1902, 12.2.1903, 22.1.1904, 10.4.1905, 6.3.1906 in G. Lanaro (a cura di), *Giovanni Vailati. Epistolario 1891-1909*, Torino, Einaudi, 1971, p. 172-173, 174, 177, 178, 179, 187-189, 199, 219, 233, 242-243, 252, G. Vacca a G. Vailati 16.7.1902, c. 1r-2v e G. Vailati a G. Vacca, 20.4.1903, c.p.

[15] Cfr. G. Peano 1898m, *La numerazione binaria applicata alla stenografia*, in «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», 34, 1898, p. 48-49.

I due obiettivi che Vacca si pone all'atto di scrivere la storia della logica per la seconda edizione del *Formulario* (1897-99) consistono nel colmare lo iato, che gli appare innaturale, fra i contributi di Aristotele e quelli di Leibniz[16] e, in secondo luogo, nel precisare la portata dei risultati di quest'ultimo. Il collaboratore di Peano non è certo il solo, all'epoca, a ritenere che il percorso evolutivo della logica delineato nel *Formulario* sia eccessivamente discontinuo, al punto da risultare artificiale. Nello stesso periodo, infatti, anche Gino Loria si occupa degli 'antecedenti' della logica leibniziana, e in particolare si sofferma sull'opera di P. Hérigone, osservando:

> On voit, d'après ces lignes que nous avons empruntées à l'*Introduction au Formulaire de Mathématique* [...] qu'un groupe de mathématiciens s'est proposé de rédiger une sorte de grande encyclopédie, une espèce de *repertoriun* où l'on trouvera énoncés en symboles logiques les définitions et les théorèmes plus importants qui se rapportent aux différentes sciences exactes. Je veux seulement faire remarquer – ce qui semble avoir échappé même à Schröder – que l'entreprise que j'ai signalée a été essayée, il y a deux cent cinquante années (c'est-à-dire avant Leibniz), par le mathématicien français Pierre Hérigone[17].

Loria descrive quindi il progetto di Hérigone di riunire un gran numero di teorie matematiche, apparentemente slegate le une dalle altre, e di scoprire un metodo per esporle più conciso di quello ordinario, intelligibile per chiunque e che:

> à l'instar de la Logique mathématique moderne, permet, à tout moment, de vérifier qu'on emploie que des définitions déjà exposées, des axiomes déjà acceptés, des propositions déjà démontrées. Certainement, Hérigone n'a pas la grandeur des idées, la génialité des aperçus philosophiques de Leibniz; toutefois, il connaît très bien la valeur de ses procédés[18].

Il *Cursus mathematicus* fornisce dunque, per Loria, un esempio di sistema tachigrafico e pasigrafico, benché Hérigone non si ponga il problema – che caratterizza invece le ricerche dei logici moderni – della riduzione al minimo del numero dei caratteri necessari a tradurre le varie branche della matematica.

Grazie agli stimoli che gli giungono da parte di Vailati, Peano e Loria[19], Vacca intraprende quindi lo studio di una congerie di autori, da lui tutti genericamente

[16] Osserviamo per inciso che alcuni mss. di Vacca presentano schemi e diagrammi sulla storia della logica in cui sono cerchiati i termini 'scolastici' e 'Pascal', proprio ad indicare la necessità di appuntare l'attenzione su questo tassello della ricostruzione storica, all'epoca ancora tutto da esplorare.

[17] G. Loria, *La logique mathématique avant Leibniz*, in «Bulletin des sciences mathématiques», (2) 18, 1894, p. 108.

[18] *Ibidem*, p. 110.

[19] È ad esempio plausibile che Vacca sia giunto allo studio di Carnot a partire dall'articolo di Loria, che invitava ad analizzare il saggio *De la corrélation des figures de géométrie*, al fine di ricostruire in maggiori dettagli la storia della logica (cfr. Loria 1894 cit., p. 109).

indicati come *precursori* di Leibniz, comprendente J. Pell, L.N.M. Carnot e J.D. Gergonne, oltre ad Hérigone stesso. Egli approfondisce dapprima gli aspetti legati alla sintassi e alle notazioni della logica[20]. Ciò lo porta a riscoprire, fra l'altro, l'uso di alcuni simboli relazionali in Gergonne, l'impiego di un metodo per rappresentare le dimostrazioni e l'introduzione del segno di illazione, in luogo del vocabolo *ergo*, nell'*Introductio in Algebram* di Pell (1659, 1668). D'altro canto, Vacca non trascura neppure gli aspetti fondazionali che affiorano in queste opere, e rivaluta il tentativo di analisi logica delle idee della geometria condotto da L. Carnot nel saggio *De la corrélation des figures de géométrie* (1801) e le riflessioni sul problema della 'definizione di parole nuove', illustrate da Gergonne nei suoi *Essays*: la *Dialectique rationnelle* (1816-17) e *Sur la théorie des définitions* (1818-19).

Gli studi su Leibniz

La maggiore conoscenza di questi autori alimenta la convinzione di Vacca che la storia della logica sia tutt'altro che lineare, a dispetto delle descrizioni fornite da Peano:

> La logica matematica come si trova attualmente esposta nel *Formulaire de Mathématiques* non deriva direttamente dalla maggior parte degli scrittori che si sono occupati delle idee dello stesso genere. Se si volesse formare una specie di albero genealogico di questa scienza si avrebbe un albero con molte diramazioni e pochi intrecci. Non è tuttavia senza interesse, anche per i cultori di quello che si può ritenere oggi come *ramo vitale*, di seguire lo sviluppo dei *rami collaterali* e rendersi conto, per quanto è possibile, delle ragioni che hanno loro impedito di progredire ulteriormente[21].

D'altra parte, constatando la frammentarietà dei contributi dei precursori di Leibniz, Vacca si persuade della diversità sostanziale, qualitativa oltre che quantitativa, dei risultati cui quest'ultimo era giunto.

Agli albori del 1900, del 'Leibniz logico' si conoscono solo pochi scritti, inseriti nelle edizioni curate da L. Dutens, E. Erdmann, F.A. Trendelenburg e C.I. Gerhardt, al punto che, come Peano ricorda spesso:

> si credeva generalmente che i manoscritti di questo gran pensatore, giacenti nella Biblioteca di Hannover, non contenessero più cosa importante. Ma il dott. Vacca [...] andò a consultare i manoscritti, e inviò copia di quelli relativi alla Logica matematica[22].

[20] La maggior parte della produzione di Vacca dedicata alla storia della logica appare rivolta più agli aspetti sintattici, che a quelli semantici, al punto da potersi configurare come l'opera di uno storico della 'logica in piccolo', per dirla con F. Enriques.

[21] Vacca 1899c cit., p. 183.

[22] G. Peano 1904a, *Il latino quale lingua ausiliaria internazionale*, «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», 39, 1904, p. 277-278.

La migliore documentazione sugli studi svolti da Vacca a questo proposito giunge da una quarantina di fogli di appunti autografi, rintracciati nell'archivio torinese[23].

Vacca arriva ad Hannover nell'Agosto del 1899, dopo aver constatato alcune lacune nei *Philosophische Schriften*, relative a quattro lavori sul calcolo logico che erano stati pubblicati solo in parte. La prima finalità delle sue ricerche è l'integrazione delle note storiche al *Formulario*, motivo per cui egli isola innanzitutto, con l'aiuto dell'archivista E. Bodemann, i faldoni di inediti che possono presentare elementi utili ad individuare le idee di Leibniz su una varietà di argomenti, che va dalla logica alla teoria dei numeri, dal calcolo differenziale a quello dei determinanti. Identificati così i manoscritti *Philosophie*, V (5, 6, 7, 10), VI (9, 12, 14, 15), VII B (II-VI) e *Mathematik* III A (2-3); III B e IV, Vacca ne estrapola decine di stralci, che confluiranno nella seconda, terza e quarta edizione del *Formulario* e nelle raccolte di Couturat *La logique de Leibniz* (Paris, Alcan, 1901) e *Opuscules et fragments inédits de Leibniz* (Paris, Alcan, 1903)[24]. A questi egli affianca lo studio di alcune corrispondenze[25], ad esempio di quelle con i Gesuiti in Cina J. Bouvet, C. Le Gobien, A. Verjus, F. Orban, nelle quali Leibniz alludeva ai progetti di costruzione della *characteristica generalis*, e di quelle con P. Naudé e J.C. Schunlenburg sull'aritmetica binaria.

In seguito all'esame di questi manoscritti, Vacca attribuisce a Leibniz 28 delle 30 proposizioni costituenti il paragrafo di *Logica* del *Formulario*, fra cui le principali proprietà del segno di negazione, attribuito fino ad allora a J. Segner; l'identità del segno di deduzione usato tra classi e proposizioni; alcune analogie che sussistono tra le proposizioni della logica e quelle sulla divisibilità dei numeri

[23] Cfr. E. Luciano, C.S. Roero, *Gli Archivi di Giuseppe Peano*, in S. Montaldo, P. Novaria (a cura di), *Gli Archivi della scienza*, Milano, Angeli, 2011, p. 89-104 e *Archivio Peano-Vacca*, cat. *Manoscritti*, c. 1r: *Gerhardt, Mss, Philos. Vol. VII fasc. B, II*; c. 2r: *Die Leibniz-Handschriften*; c. 3r (num. 1): *vol. VII. fasc. B. II*; c. 4r (num. α_1): *vol. VII. fasc. B. II*; c. 5r (num. 2): *fol. 22 (verso)*; c. 6r (num. 3): *fol. 62 recto*; c. 8r: *Mss. phil. vol. VII. fasc. B. II. fol. 39 recto*; c. 9r: *Continuaz. dello scritto di Leibniz. Gerhardt t. 7 Phil, p. 221 (inedito)*; c. 10r: *Mathematik III B 3 Essay d'une nouvelle science des nombres*; c. 11r: *Mathematik. III A 17 Notae algebricae usitationes*; c. 12r: *Math. III B. II fol 3 recto*; c. 12A r: *Observari quotiecumque numerus* y *est primitivus*; c. 13r: *Un frammento di questi calcoli sul teor. di Fermat*; c. 13v (num. 17): *A est B, ergo non B est non A*; c. 14r: *Ex iam demonstratis si* e *sit non primitivus etiam*.

[24] Vacca trascrive i seguenti passi: mss. *Philosophie* VII B, II, fol. 1, 3, 5, 7, 14, 19, 22, 38, 39, 62, 74; mss. *Mathematik* vol. III A, n. 2-3; III B, fol. 3, 5, 11. Egli segnala inoltre quali inediti sono accolti nel *Formulario* e nei volumi di Couturat, tramite segni di lapis rosso, o riportando la citazione delle pagine dove sono pubblicati.

[25] Vacca aveva riscontrato fin dal 1894 che alcune corrispondenze erano state pubblicate solo in parte o erano state omesse da Gerhardt. Cfr. *Archivio Peano-Vacca*, cat. *Manoscritti*, 4 fogli di appunti, num. 47, 48, 49, 50; *Der Briefwechsel …* , c. 1r (num. 27); c. 1r (num. 28): *1 bis Leibniz 1899*; c. 1r (num. 30): *3 Leibniz 1899 p. 408*; c. 1r (num. 31 bis): *Leibniz 1899 …*; c. 1r (num. 53): *Leibniz Math. Schr. t. 5 p. 380.*

interi, ed infine “la così suggestiva ed elegante rappresentazione delle forme di ragionamento mediante sistemi di circoli, ordinariamente attribuita ad Eulero”[26].

Le trascrizioni degli inediti di Leibniz effettuate da Vacca ad Hannover saranno da lui riutilizzate in più circostanze, per ottemperare alle richieste di informazioni provenienti dai colleghi[27] ma, ancor più, saranno riprese da Peano e dagli altri suoi collaboratori, al punto da divenire una sorta di patrimonio comune di conoscenze, uno stereotipo degli scritti storico-matematici e divulgativi di questa Scuola[28].

Il primo tentativo, da parte di Vacca, di riorganizzare i suoi appunti in modo sistematico risale al soggiorno in Germania e dà luogo alla pubblicazione di un articolo sul *Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche* di Loria. Qui, pur essendo consapevole della rilevanza culturale delle proprie scoperte, lo storico si limita a dare una succinta descrizione di quali manoscritti ha potuto consultare, senza fornire alcun commento o interpretazione né, tanto meno, avanzare delle conclusioni sulla logica leibniziana o su suoi singoli aspetti[29].

Del resto, Vacca ha ben chiara la veste editoriale che intende adottare per la divulgazione delle sue indagini sugli inediti leibniziani e la anticipa, asserendo che “un preciso esame delle scoperte di Leibniz relative alla logica matematica, che uscirebbe dall’indole di questa nota, sarà tra breve pubblicato nel *Formulaire* N° 3”[30]. Un simile commento non può che destare perplessità. Vacca è infatti al corrente della struttura del *Formulario*, essendone uno dei più attivi collaboratori, e sa che il trattato non può ospitare alcun tipo di esame *organico* dei contributi di Leibniz, dal momento che non prevede apparati filologici, ermeneutici, storici o filosofici a sé stanti. L’asserzione deve essere

[26] Vacca 1899b cit., p. 115.

[27] Cfr. G. Vailati a G. Vacca, 10.6.1902 in Lanaro 1971 cit., p. 203-205; L. Couturat a G. Vacca, 16.1.1902, 13.8.1902, G. Vacca a L. Couturat, [autunno 1902], e G. Loria a G. Vacca, 14.1.1903, in P. Nastasi, A. Scimone (a cura di), *Lettere a Giovanni Vacca*, «Quaderni Pristem», 5, 1995, p. 53, 55, 56 e 104.

[28] Cfr. ad esempio Peano 1900a cit., p. 9: “Leibniz prend pour exemples les classes de points, ou figures; elles sont des segments de droite dans *PhilS*. t. 7, p. 229, 236, […] et des cercles dans ses manuscrits conservés à la bibliothèque de Hannover, *Philosophie*, t. 7 fasc. B. 4. fol. 1-3.”

[29] Alcune conclusioni sono invece affidate da Vacca ai suoi manoscritti. Cfr. ad esempio *Archivio Peano-Vacca*, cat. *Manoscritti*, *Le scoperte di Leibniz*, cc. 1-5, nn., cit. a c. 1r: “*Le scoperte di Leibniz* dipendono da questo: esiste un calcolo logico sulle *class*i e sui segni ⊃ = ∩ ∪ ~. Leibniz 1) non distinse ε, ⊃ *perché* aveva sott’occhio le eccessive distinzioni scol[astiche]. 2) non adoperò indici al segno ⊃, o lettere variabili, perché deviò a causa di una cattiva notazione. 3) non conobbe il segno d’inversione. 4) [non conobbe il segno] ∍.”

[30] Vacca 1899b cit., p. 115. Cfr. anche *Archivio Peano-Vacca*, cat. *Manoscritti*, [*Solo non potei che*], c. 1r (numerata 2): “Solo non potei che sfogliare febbrilmente i mss. relativi alla logica matematica. Ne estrassi alcune citazioni per il F1899. […] Altre ne furono estratte dal prof. Peano in tutto 27. Un centinaio di P di Logica: una metà relativa ai segni ⊃ = ∩ ∪ Λ (6 antichi), l’altra ai segni ε ∍ ι ∃ f F ’ (9 segni nuovi *Df Dm*).”

dunque letta alla luce di una concezione storiografica largamente condivisa dall'*entourage* di Peano, ed esplicitata a Couturat in questi termini:

> Faire l'histoire des vérités d'une science, c'est chercher et exposer dans le passé tous les essais qui ont produit successivement les vérités que nous connaissons. [...] L'histoire d'une science est alors l'exposition ordonnée des vérités de cette science suivie d'un nome ou d'un date[31].

Ciò nonostante, la scelta di Vacca di non rendere ragione delle sue ricerche su Leibniz attraverso la consueta forma monografica non si rivela vincente, ed anzi dà adito ad una spiacevole polemica con il linguista R. Biagini. Questi, infatti, contesta a Vacca di essersi mosso in modo *naif* nelle sue ricognizioni dei contributi logici e linguistici di Leibniz, e sminuisce i suoi meriti nell'aver riportato i manoscritti di Hannover al centro del dibattito matematico e filosofico[32].

L'esposizione della logica leibniziana accennata da Vacca sul *Bollettino* di Loria, e poi parcellizzata nel *Formulario*, suscita comunque scalpore e desta l'attenzione di Couturat. Come è noto, i due si incontrano a Parigi nel 1900, in occasione del I Congresso internazionale di Filosofia e il filosofo francese, 'meravigliato' dalle descrizioni di Vacca dei manoscritti 'sepolti' nella biblioteca di Hannover, decide di recarsi a sua volta in Germania per sviscerarne lo studio[33].

[31] G. Vacca a L. Couturat, [1901], in NASTASI, SCIMONE 1995 cit., p. 51-52. Tale concezione è evidentemente ereditata da Peano (1900a cit., p. 2: "L'histoire de la Logique mathématique est contenue dans les formules suivantes; car les propositions sont accompagnées de la citation des Auteurs qui les ont énoncées. On peut la resumer en quelque mots.").

[32] In questa circostanza, Vacca afferma (*A proposito delle edizioni delle opere di Leibniz*, in «Classici e Neolatini», 4, p. 286): "Pubblicai, in più luoghi, il risultato di questi miei studi ed altri ne pubblicherò a tempo opportuno. In seguito a queste mie ricerche, che ebbero dagli studiosi competenti l'accoglienza che si meritavano, apparvero evidenti le insufficienze da me per primo segnalate. [...] Il Sig. R.B. ha mal garbo a dire che io ho pubblicato alcuni manoscritti i quali, o non erano stati veduti, o forse non voluti pubblicare. Erano stati veduti, perché pubblicati in parte dal Gerhardt; e non erano stati pubblicati perché gli editori precedenti non ne avevano capito l'importanza." Anche Peano è coinvolto nella polemica, ma esorta Vacca a non darvi seguito. Cfr. E. LUCIANO, *Peano and His School Between Leibniz and Couturat: The Influence in Mathematics and in International Language*, in R. KRÖMER, Y. CHIN-DRIAN (éds.), *La réception de Leibniz en sciences et philosophie des sciences aux 19e et 20e siècles*, Basel, Birkhäuser, 2011, p. 56-57.

[33] Un resoconto di quell'incontro è fornito ad esempio da Vacca nella conferenza *Logica matematica e logistica. Sui postulati dell'aritmetica e la loro compatibilità*, tenuta all'Istituto di Alta Matematica di Roma il 1 maggio del 1945 e dedicata alla memoria del Maestro Peano (cfr. VACCA 1946 cit., p. 31): "In quei due congressi, ai quali partecipavo, ebbi occasione di conoscere Bertrand Russell, il quale aveva pubblicato allora un volume su Leibniz (tradotto più tardi in francese nel 1908). Io stesso già da più di un decennio avevo studiato gli scritti di Leibniz, e da questo studio era sorta la mia amicizia per Giuseppe Peano. Feci quindi da intermediario tra Peano e Russell, il quale era allora in relazione con Louis Couturat [...] Meravigliai Couturat quando gli descrissi rapidamente la massa dei manoscritti inediti di logica matematica di Leibniz esistenti ad Hannover, che io avevo studiato colà nel 1899."

A partire dall'estate del 1900 nasce così un vivace dialogo fra Vacca, Vailati e Couturat, articolato su più livelli. I due collaboratori di Peano aiutano il collega nella selezione degli inediti da pubblicare, gli suggeriscono quali corrispondenze consultare, esaminano le bozze di stampa dei volumi *La logique de Leibniz* e *Opuscules et fragments inédits de Leibniz* e, infine, li recensiscono in modo elogiativo sulla *Rivista di Matematica* e sul *Bollettino* di Loria, favorendone la diffusione nella comunità matematica italiana[34].

Meno palese, ma altrettanto significativo, è il confronto che si intreccia fra i tre studiosi su alcune problematiche di stretta pertinenza della ricerca storiografica, inerenti i canoni da adottare nelle edizioni critiche.

L'*imput* proviene, in questo caso, dal dibattito sulla pubblicazione degli scritti di Leibniz, sorto a Parigi nell'aprile del 1901 in seno all'Associazione internazionale delle Accademie, e che coinvolge fra gli altri J. Lachelier, M. Brocard, Couturat, Vacca e Loria[35]. Ad essere in discussione è un insieme di questioni, che spazia dalla completezza all'obiettività delle edizioni critiche, dalla classificazione all'ordinamento degli scritti. In questo frangente, Vacca ravvisa senza esitazioni negli *Opuscules et fragments inédits de Leibniz* un modello da seguire. Quello che è infatti presentato dal Couturat come "un recueil de morceaux choisis, qui parfois se reduit presque à un catalogue"[36] è invece ritenuto da Vacca un volume di importanza capitale, superiore "di gran lunga alle cosiddette edizioni complete del Gerhardt e di Erdmann"[37]. Tale apprezzamento è appena offuscato dalla considerazione che la natura peculiare dei manoscritti leibniziani, ricchissimi di rimandi, cancellature e aggiunte, e nei quali la disposizione del testo sui fogli è di per se stessa suggestiva, è quasi è impossibile da restituire mediante le forme classiche di edizione critica, per quanto filologicamente accurate possano essere. Non stupisce perciò che, nel caso degli inediti di Hannover, Vacca propenda per una pubblicazione integrale di tutti i frammenti, realizzata anche attraverso riproduzioni fotografiche, sul modello degli "splendidi esempi nelle collezioni di Leonardo da Vinci, di Cristiano Huygens e di Galilei"[38].

[34] Cfr. LUCIANO 2011 cit., p. 41-64.

[35] Su questo dibattito cfr. COUTURAT 1903 cit., p. VI-XIV e VACCA 1903c cit., p. 72-74.

[36] COUTURAT 1903 cit., p. III.

[37] VACCA 1903c cit., p. 72.

[38] *Ibidem*, p. 72. Cfr. anche VACCA 1899b cit., p. 114-115, 116: "Mi sembra altresì che il Gerhardt sia stato mosso nel classificare gli scritti inediti da pubblicarsi soprattutto dal criterio di far conoscere soltanto i lavori compiuti o pressoché compiuti. Questo procedimento, lodevole per altri scrittori, non soddisfa affatto alla mente così vasta e piena di idee del nostro Autore. Sopprimere i frammenti incompleti equivale a perdere molte cognizioni che oggi possono interessarci, anche non solamente dal punto di vista storico. [...] Però mi sembra che la riproduzione fotografica dei mss. concernenti la logica non presenti notevoli difficoltà; e che si potrebbero pure pubblicare i più interessanti frammenti inediti concernenti le matematiche (ricorrendo anche, per alcuni, alla riproduzione fotografica)."

L'evoluzione del pensiero storiografico di Vacca e l'incontro con G. Itelson

Fra il 1900 e il 1904, una rete di incontri, letture ed eventi determina l'evoluzione del pensiero di Vacca sul ruolo e sui compiti della storia delle scienze esatte, e di quella della logica in particolare. In primo luogo egli fa proprio un paradigma ricorrente in Couturat, secondo cui la prima finalità delle indagini storiografiche su questo settore deve ravvisarsi nel:

> donner une nouvelle impulsion aux travaux de Logique mathématique et attirer sur eux l'attention des philosophes[39].

A questo presupposto, Vacca accosta il "criterio"[40] tratto dall'*Historie abrégée de l'économie politique* di J.B. Say, secondo cui:

> l'histoire d'une science ne ressemble point à une narration d'événements. Elle ne peut être que l'exposé des tentatives plus ou moins heureuses, qu'on fait à diverses reprises et dans plusieurs endroits différents, pour recueillir et solidement établir les vérités dons elle se compose. […] Les erreurs ne sont pas ce qu'il s'agit d'apprendre, mais ce qu'il faudrait oublier[41].

Alla luce di un tale approccio rettilineo, sbilanciato sulla dimensione della contemporaneità e rivolto prevalentemente al pubblico dei matematici, Vacca si sente ad esempio giustificato a limitarsi a "ricercare nei mss. di Leibniz quali siano le parti che oggi più interessano la logica matematica nel suo attuale stato"[42].

Ciò che condiziona però in modo definitivo la sua visione dei processi storici è soprattutto un episodio avvenuto durante il Congresso internazionale di Filosofia di Parigi, e cioè una discussione fra Peano e Couturat sulla scelta dei termini – logistica, pasigrafia o logica matematica? – con cui denotare le linee di studi in cui i linguaggi simbolici hanno assunto un peso rilevante. Vacca è colpito dall'epilogo del dibattito, e soprattutto dal parere di Peano, tanto da raccontarlo più volte nei suoi lavori a stampa e nei suoi autografi:

> Nell'ultimo decennio la logica matematica si è considerevolmente sviluppata in varie direzioni. Per rendersi conto dei vari indirizzi conviene ricordare che nel Congresso Internazionale di Filosofia di Parigi nel 1900, Giuseppe Peano accolse il

[39] L. Couturat a G. Vacca, 6.12.1903, in Nastasi, Scimone 1995 cit., p. 57. Cfr. anche L. Couturat a M. Pieri, febbraio 1901, in G. Arrighi (a cura di), *Lettere a Mario Pieri* (1884-1913), «Quaderni Pristem», 6, 1997, p. 45 e L. Couturat a G. Peano, 6.12.1903, in E. Luciano, C.S. Roero (a cura di), *Giuseppe Peano – Louis Couturat Carteggio (1896-1914)*, Firenze, Olschki, 2005, p. 53-54.

[40] Vacca 1903c cit., p. 64.

[41] J.B. Say, *Cours complet d'économie politique pratique*, Paris, Guillaumin, 1840, Partie II, p. 540.

[42] Vacca 1903c cit., p. 63. Una posizione del tutto analoga è tenuta da Vailati nella recensione per la «RdM» al volume di Couturat *La logique de Leibniz* («RdM», 7, 1901, p. 148-159).

nome di *Logistica* proposto da L. Couturat per denominare quella parte della logica variamente chiamata *Algebra della logica*, ovvero *logica simbolica* da vari autori i quali si proponevano di studiare questa scienza indipendentemente dalle sue applicazioni alla matematica. Egli però affermò che il nome di *logica matematica* avrebbe dovuto essere adoperato per indicare lo studio della logica nelle sue applicazioni alla matematica[43].

Accettata questa distinzione, Vacca non solo riconsidera la posizione di autori, come Leibniz, che aveva già approfondito negli anni precedenti, ma si spinge a ridisegnare in modo radicale l'intero grafo delle derivazioni storiche della logica. Nelle sue sintesi, la 'storia della logistica' nasce ora con Aristotele e gli scolastici, decolla con Leibniz, e approda a Schröder e a Frege; da questi ultimi "procede direttamente" un'ampia discendenza scientifica, che comprende B. Russell, A.N. Whitehead, D. Hilbert, W. Ackermann, G. Gentzen, T. Skolem, K. Gödel, R. Carnap, L. Wittegenstein, F. Waismann, E.T. Bell, L. Brouwer, P. Mosso e A. Pastore, accostati senza distinzioni. Singolarmente depauperata risulta, di rimando, la 'storia della logica matematica' che è fatta risalire all'aritmetica astratta di Diofanto, agli sviluppi di J. Locke e di E.B. Condillac, ed agli autori che ne hanno dato delle applicazioni alla matematica (P. Fermat, B. Pascal, G. Desargues, L. Euler, J.-L. Lagrange, C.F. Gauss, L. Poinsot, J. Dirichlet, R. Dedekind, A. Genocchi, Peano, E. Landau) o alla chimica (A.L. Lavoisier)[44].

A partire dal 1900 – e ancor più dopo il 1904 – la produzione di Vacca si biforca in due direzioni: da un lato egli continua a coltivare la 'storia della logistica', intraprendendo un serio studio di quella scolastica e barocca; dall'altro si dedica a documentare e ad avvalorare la sua nuova prospettiva sulla

[43] *Archivio Peano-Vacca*, cat. *Manoscritti*, *Logica Matematica*, [1939], cc. 1r, 2r, 3r, citazione a c. 1r. Cfr. anche *Archivio Peano-Vacca*, cat. *Manoscritti*, [*Logica Matematica*], [1939a], cc. 1r, 2r, 3r, cit. a c. 1r. Cfr. anche *Archivio Peano-Vacca*, cat. *Manoscritti*, [*La logica matematica negli ultimi cinquant'anni*], [1939b], dattiloscritto, 11 p. e 2 pagine di appunti, datato 19.1.1939, c. 1: " [...] il Peano propose che il nuovo nome fosse accolto per indicare il complesso di tutte le teorie di carattere generale rivolte a precisare o ad estendere uno studio della logica deduttiva in generale, riservando l'uso del nome *logica matematica* a quelle teorie da lui svolte ed aventi uno scopo più semplice e determinato."

[44] Cfr. Vacca 1946 cit., p. 32-36. Cfr. anche G. Vacca a G. Vailati, 8.11.1902, in Lanaro 1971 cit., p. 214-215: "Conto di fare nella prima [lezione di Logica matematica] un qualcosa che rassomigli al tuo *metodo deduttivo*, intendendo di fare una specie di storia dell'applicazione della logica alle scienze deduttive, soprattutto però dal punto di vista matematico. Metterò quindi *in luce* Pascal (*esprit géométrique*) e Desargues, il di cui *Brouillon project* acquista una notevole importanza nella storia dei tentativi di fabbricare un nuovo sistema di postulati per la geometria, e nel quale ho un alleato *non sperato* nella mia tesi della *inutilità* delle scienze puramente teoriche" e *Archivio Peano-Vacca*, cat. *Manoscritti*, *Nel congresso intern. di filos. a Parigi 1900*, [post 1939], c. 1r.

'storia della logica matematica' e, nei panni di apostolo della specificità e della superiorità dell'indirizzo peaniano, non manca di giungere talvolta ad esiti paradossali.

Per quanto concerne il primo ambito, è di notevole importanza l'incontro di Vacca con G. Itelson (1852-1926) a Roma, nell'aprile del 1903. Questo studioso, di origine russa ma naturalizzato tedesco, prende parte al Congresso Internazionale di Scienze Storiche e, in quell'occasione, presenta una comunicazione incentrata sui contributi di J. Weigel, C. Sturm, J.C. Lange e P. du Moulin, che suscita l'interesse di Vacca e di parecchi altri studiosi italiani, come Vailati e Pieri[45].

Affascinato dalle notizie fornitegli da Itelson, Vacca riprende le ricerche sui precursori di Leibniz[46], e si addentra nell'esame delle opere di P. Ispano, G. Buridano, R. Lullo, G. di Ockham, P. Veneto e J. Ploucquet. In particolare, egli rintraccia nel *Tractatus logicae* di G. di Ockham (1488) e nelle *Summulae logicales* di P. Ispano (1572), la proprietà distributiva della negazione rispetto alla somma e al prodotto logico, generalmente attribuita a A. De Morgan, e ritrova nelle opere di P. Veneto (1587) e di G. Buridano l'enunciazione di numerose regole relative al *vel* e all'*et*, illustrate tramite esempi[47]. Ciò lo porta a rivedere il giudizio negativo che, un po' frettolosamente, aveva dato fino a quel momento dei precursori di Leibniz[48], concludendo:

[45] Cfr. G. Vailati a G. Vacca, 13.8.1903, c.p. e M. PIERI, *Uno sguardo al nuovo indirizzo logico-matematico delle scienze deduttive*, in «Annuario R. Università di Catania», 1906-07, p. 9-10.

[46] Vari fogli di appunti sui tentativi logici per trasformare i ragionamenti in calcoli dovuti ad Aristotele, Crisippo, J. Suisset, J. Scot, R. Lullo, N. Tartaglia, G. Cardano, F. Patritius, J. Weigel, P. Ramo, G. Mercator e B. Pascal si trovano nell'*Archivio Peano-Vacca*, cat. *Manoscritti*. In particolare, c. 1r: *An essay towards a real character*, c. 2r (num. Wilkins 2, e 5): *a pag. 192-193 propone per base del sistema*, c. 3r (num. Wilkins 3, e 5): *Wilkins, an Essay towards a real character*; c. 1r (num. 10): *Joh. Heinrich Lamberts etc. logische und philosophische Abhandlungen*; c. 1r: *Joh. H. Lambert Berlin M. 1770*, c. 2r: *Primus ille de calculo situs*; c. 1r (num. 16): *Petri Hispani Summulae logicales.*

[47] Gli studi di Vacca su questi autori non danno luogo ad alcuna pubblicazione. Ciò nonostante, numerosi colleghi ne vengono a conoscenza tramite contatti personali ed epistolari con Vacca, e li apprezzano vivamente. Cfr. per esempio F. ENRIQUES, *Per la storia della logica*, Bologna, Zanichelli, 1922, p. 46-50.

[48] VACCA 1903c cit., p. 63: "L'erudizione di Leibniz era prodigiosa. È quindi difficile scoprire a quali fonti egli abbia attinto. È certo però che, se si possono trovare nei suoi predecessori molti tentativi di costituire un'arte di ragionare completamente in simboli, questi rimasero vani sogni. Ciò non esclude che i tentativi di molti ricercatori tra Aristotele e Leibniz siano privi di interesse". Vacca aveva fatto proprio il parere espresso da Peano più volte (e successivamente rivisto grazie alle scoperte di Vacca) secondo cui "Peut-etre que dans les oeuvres des scolastiques on trouvera d'autres formes; mais la logique mathématique doit ses principaux théorèmes à Leibniz" (cfr. 1900a cit., p. 5).

> le regole più importanti della logica sono poche diecine. E sono tanto chiare ed intuitive che, nella maggior parte, esse erano già note agli scolastici, e furono per alcuni secoli insegnate nelle università, e poi dimenticate, finché Leibniz diede loro nuova vita additandole alle generazioni successive[49]

e, ancora più nettamente:

> l'opera degli scolastici segna realmente un progresso. […] Pure nelle distinzioni delle operazioni logiche di somma logica, prodotto logico, proposizioni negative, esistenziali, l'analisi degli scolastici è prolissa ma acuta. […] Ma queste ricerche si arenarono perché mentre Aristotele aveva tratto la sua logica deduttiva specialmente dallo studio della matematica del suo tempo, gli scolastici la conoscevano poco e non sapevano applicare il calcolo logico ad altre proposizioni che a quelle adoperate nelle più banali espressioni della vita comune[50].

Per delineare con precisione le posizioni di questi autori, Vacca visiterà un'ampia serie di biblioteche ed archivi in Italia e all'estero. In queste indagini, a metà strada fra la ricerca storica propriamente detta e quella bibliofila e antiquaria, sarà sostenuto da Peano e da Vailati.

La valutazione della logica contemporanea

La seconda linea di azione di Vacca – quella cioè inerente la 'storia della logica matematica', nel senso attribuito al vocabolo dalle conversazioni di Parigi – si dipana ancora in relazione ad un Congresso Internazionale di Filosofia: quello svoltosi a Ginevra nel settembre del 1904. Nella sezione dedicata alla *Logica e Storia delle scienze*, infatti, si assiste ad un secondo confronto, animato dagli interventi di H. Fehr, A. Naville, A. Lalande, G. Itelson e Couturat[51]. L'esito della discussione è un quadro più preciso, rispetto a quello del 1900, delle caratteristiche della logica moderna, dei suoi rapporti con quella aristotelica e del posto di Peano in quest'ambito di ricerche:

> M. Itelson ajoute encore deux remarques: Boole, Schröder, etc. on fait l'*Algèbre de la Logique*, tandis que M. Peano et son école ont fait la *Logique de l'Algèbre*. La logique symbolique n'est pas une autre Logique que la Logique traditionnelle; elle est simplement la forme moderne de la Logique formelle, et elle englobe la Logique aristotélicienne et scolastique, tout en la dépassant énormément. Si l'on veut la dénommer d'après son objet, il faudra l'appeler la *pantique* ou la *pantologique*; si

[49] Vacca 1906b cit., p. 366.

[50] Vacca 1946 cit., p. 33.

[51] Il dibattito segue le due comunicazioni di Itelson dedicate a *La Réforme de la Logique* e a *La Logique et la Mathématique* nelle quali, tra l'altro, egli riportava all'attenzione degli storici alcune autentiche rarità librarie quali *La Logique* di Port Royal e quella di A. Geulincx (1662).

l'on veut la dénommer d'après sa méthode, on l'appellera la *Logistique*, du mot grec qui signifie à la fois raisonnement et calcul [...]. La Logistique est plus générale que la syllogistique. M. Couturat (Paris) constate alors ce fait remarquable, que trois auteurs de langues différentes, MM. Itelson, Lalande et lui, sans aucune entente ni communication préalable, se sont rencontrés pour donner à la Logique nouvelle le nom de Logistique; cette triple coïncidence semble justifier l'introduction de cet mot nouveau, plus court et plus exact que les locutions usuelles: Logique symbolique, mathématique, algorithmique, Algèbre de la Logique[52].

La vicenda e, più ancora, i bilanci sul valore di questi indirizzi scientifici che, a livello internazionale, scaturiranno dal Congresso di Ginevra, incidono sulla successiva produzione di Vacca. Tuttavia, proprio quando sarebbero state utili ai professionisti attivi nella ricerca logica delle panoramiche complete sull'origine e gli sviluppi della loro disciplina, Vacca dirada i suoi studi. Dal 1906 in avanti, essi assumono anzi la connotazione di approfondimenti occasionali, legati a specifiche problematiche affrontate da uno o da più esponenti della Scuola di Peano. L'unica eccezione è costituita dalle ricerche sul principio di induzione completa. Inserendosi nel novero dei matematici che si erano 'scoperti interessati' alle prime occorrenze di questo principio, dopo che H. Poincaré lo aveva elevato al grado di "forma di ragionamento matematico per eccellenza"[53], Vacca si impegna a rintracciarne le tracce in Euclide, Nicomaco di Gerasa, B. Pascal e F. Maurolico. A questo tema dedica tre lavori[54], che presentano gli stessi canoni dei precedenti: estrema concisione, ricerca condotta sulle fonti, scarso inserimento del proprio contributo in rapporto alla letteratura secondaria, accento posto sull'interesse che queste indagini possono presentare per il matematico moderno. Apprezzati dalla comunità degli storici, e richiamati ad esempio da O. Zariski nella sua traduzione italiana del saggio

[52] L. Couturat, *Logique et Philosophie des Sciences*, in «RMM», XII, 1904, p. 1042.

[53] H. Poincaré, *Les mathématiques et la logique*, in «RMM», XIII, 1905, p. 817-818.

[54] Cfr. *supra*, nota 4. Le ricerche di Vacca sulla storia di questo principio iniziano nel 1903, in relazione alla compilazione della nota sui postulati di Peano dell'aritmetica per il *Formulaire mathématique* (1903f cit., p. 35). Egli le riprende nel giugno del 1909 e, poco dopo, annota nei suoi *marginalia* (*Formulario* 1908a cit., p. 28-29): "Il principio di induzione è dovuto a Maurolico. Io ho trovato tentativi precedenti in Euclide lib. VIII p. 9, ed in Leonardo Pisano. Formulazioni migliori che in Maurolico successivam. in Pascal (pressoché identico a Maurolico). Meglio in Bernoulli; la parola Induct. è forse di *Euler*. Il principio a base dell'aritm. è *moderno*. Forse di Peirce Am. Journ. 1881 ovvero di Dedekind, anzi di Grassmann. Principi analoghi, di *Fermat* – della discesa. Infine il calcolo infinitesimale *poggia su principi dello stesso genere* non ancora formulati in tutta la loro generalità sebbene adoperati. Il prof. Peano, nella teoria delle eq. diff (contin. equabile) ha *intuito* che c'è un principio dello stesso genere. Ce ne sono invece diversi, ed importanti. Quando saranno formulati e da chi? Sett. 1909." Parte di queste notizie confluiscono nei successivi articoli di Vacca, apparsi nel dicembre del 1909 sul «Bollettino» di Loria e nel 1911 sulla «RMM».

di R. Dedekind *Was sind und was sollen die Zahlen*[55], questi scritti di Vacca danno però luogo a due dibattiti sulla *Revue de Metaphysique et de Morale*, nei confronti di E. Wickersheimer e di A. Padoa, incentrati sull'equivalenza fra il principio di induzione completa ed altre forme di ragionamento quali il principio della discesa infinita di Fermat, e sul loro utilizzo da parte di A.M. Legendre, nella dimostrazione della proprietà commutativa del prodotto[56].

Nonostante la pubblicazione di questi articoli, è innegabile che l'impegno di Vacca, nelle prime decadi del Novecento, sia rivolto soprattutto a ricostruire e a valutare la fase moderna e contemporanea della storia della 'logica matematica' e della 'logistica'. Per lui, che ne era stato testimone e protagonista, si tratta di un tema particolarmente spinoso. A così poca distanza dagli eventi descritti, il rischio di scadere nella cronaca, nel ricordo autobiografico o, peggio ancora, auto-celebrativo è infatti notevole, tanto più se – come Vacca – si sente fortemente il sentimento di appartenenza ad una celebre Scuola. Non stupisce dunque che egli vada assumendo toni apologetici e ricorra spesso a categorie quali quelle di 'maestro', 'precursore', 'genio', 'plagio', ecc.[57].

Studioso "di concezione platonica, non disgiunta da una viva consapevolezza dei rapporti tra matematica e tecnica", Vacca resta "ostile nei riguardi dei più recenti sviluppi della filosofia della matematica (successivi alla sistemazione logica di Peano, che rimase per Lui insuperata)" [58] al punto da respingere persino la visione della matematica come sistema ipotetico-deduttivo.

Di pari passo, la sua produzione storiografica va perdendo obiettività e profondità, e finisce per essere sempre più vincolata all'esperienza di logico professionista che egli aveva vissuto a Torino fra il 1897 e il 1905, a stretto

[55] R. DEDEKIND, *Essenza e significato dei numeri. Continuità e numeri irrazionali. Traduzione dal tedesco e note storico-critiche di Oscar Zariski*, Roma, Stock, 1926, p. 170-171.

[56] Cfr. A. PADOA, *Sur le principe d'induction mathématique*, E. WICKERSHEIMER, *Sur le principe d'induction mathématique*, G. VACCA, *Sur la logique de la théorie des nombres*, in «RMM», XIX, 1911, p. 246-257.

[57] La storia del teorema di Cantor-Bernstein, cui Vacca si interessa in questo periodo, è un chiaro esempio di questa tipologia di indagini storiche. La nota autografa di G. Vacca a p. 9 di E. NOETHER, J. CAVAILLÈS, *Briefwechsel Cantor-Dedekind*, in «Actual. sci. industr.», n. 518, Paris, 1937 si conclude così: "Bernstein ha copiato Schröder. Zermelo ha copiato Peano". Un altro indizio della deriva degli studi di Vacca verso la 'celebrazione' della Scuola di Peano si era avuto nel 1906, in occasione della recensione al volume di A.T. Shearman, *The development of symbolic logic*. In quel caso, pur apprezzando la tesi del volume, che consisteva nel "dimostrare che il sistema di Peano, o della scuola italiana, ha superato gli altri, e può considerarsi come una conquista in un certo senso definitiva", Vacca si spingeva ad affermare che nei contributi di Russell e Whitehead non si poteva ravvisare un progresso rispetto agli studi peaniani.Cfr. VACCA 1906b cit., p. 2. Peano stesso era rimasto stupito per la durezza di toni usata dal suo collaboratore, e gli aveva consigliato di mitigarli.

[58] E. CARRUCCIO, *Giovanni Vacca, storico e filosofo della scienza*, in «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana», (3) 8, 1953, p. 451.

contatto con Peano e la sua Scuola[59]. Ciò appare evidente soprattutto negli anni Trenta quando, con le prime Celebrazioni in occasione di anniversari quali il cinquantenario della pubblicazione degli *Arithmetices principia nova methodo exposita*, Vacca si presenta non più come uno storico, quanto come un epigono della tradizione peaniana, rimasto a contrastare il dilagare delle nuove tendenze[60]. In questo frangente si accentua in lui una tendenza finitista e pessimista nei confronti del futuro delle ricerche logiche, che egli aveva peraltro manifestato a Vailati fin dal 1903. Essa si abbina, ora, a una lettura discreta e discontinua delle dinamiche della storia, che lo induce a ribadire:

> quanto poco vera sia l'idea del progresso indefinito e continuo delle scienze, che oggi par quasi un assioma. Mentre la storia della matematica sta tutta a dimostrare che, nel lungo scorrer del tempo, vi sono a lunghi intervalli di tempo e di spazio, alcuni piccoli gruppi di uomini, appena tanti quanti occorrono per poter parlar l'un coll'altro, ai quali soli è dato creare belle e nobili invenzioni. Ed ora io mentre da un lato son lieto di aver vissuto vicino, durante alcuni anni, ad uno di tali gruppi, non posso far a meno di riflettere che il numero dei componenti di questa nuova scuola italiana, non solo è piccolo, ma altresì limitato. Di guisa che mi sembra prevedibile che le ricerche significative ed aventi un valore intrinseco che si son fatte in questi ultimi decenni sui principii della matematica siano per esser prossime alla fine. Non già che questa fine sia da intendersi colla cessazione dello scrivere. Dietro ad ogni Archimede, seguono innumerevoli Eutocii. Ed anche per questi nuovi studii la quantità delle pubblicazioni par che vada crescendo[61].

[59] Vacca stesso, peraltro, non nasconde la sua convinzione che il *modus operandi* di uno storico della matematica debba prevedere una stretta interazione con l'attività di ricerca. Cfr. G. Vacca, *Lo studio dei classici negli scritti matematici di Giuseppe Peano*, in «Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze» (Roma 1932), 21, 2, 1933, p. 98.

[60] Cfr. Vacca [1939b] cit., p. 1: "Io sono stato testimonio quasi fin dall'inizio di queste ricerche di G. Peano e vi ho anche in qualche misura collaborato. Credo pertanto di precisarne il senso e lo scopo, per evitare che ad esse si colleghino teorie nebulose e fantastiche che, in questi ultimi anni, si sono venute moltiplicando e quasi dilagando in modo da oscurare il valore e il significato di questi studi."

[61] G. Vacca a M. Pieri, 12.9.1912, c. 1r-3r. In Vacca 1946 cit., p. 5, 8-9 si legge: "Ma lo sviluppo della scienza procede ininterrotto di generazione in generazione, si trasmette da un popolo all'altro, con una semplicità che soltanto gli storici moderni della scienza riescono a porre in luce. Questo sviluppo non è però uniforme. Durante periodi più o meno lunghi, conservativi, in cui si trasmettono le nozioni apprese, l'opera degli studiosi è in gran parte stazionaria e consiste nell'esporre e chiarificare. Questi periodi si alternano con periodi più brevi nei quali gruppi assai ristretti di pochi individui (talvolta uno solo il quale raduna intorno a sé pochi discepoli) creano nuove dottrine, aprono vie nuove e accrescono il sapere e la potenza dell'uomo civile." Le sue stesse conclusioni sulla periodicità e discontinuità delle scoperte scientifiche sono ritrovate da Vacca in autori coevi come G. Sarton (1937), G. Armellini e A.C. Blanc (1945), e verranno da lui contrapposte alle teorie della scuola sociologica francese, specialmente a quelle di L. Levy-Bruhl (1935).

Così, benché convinto che "per Aristotele e la logica matematica, e così credo ancora per buona parte della matematica [sia] chiusa o prossima a chiudersi l'*era delle scoperte* per un lungo intervallo di tempo, finché almeno si studia *a questo modo*"[62], Vacca non reputa efficace nessuno dei nuovi approcci che, in Italia e soprattutto all'estero, si vanno diffondendo. La conseguenza è un fiorire di giudizi caustici, con cui liquida come "illusorio" il tentativo di Hilbert di dimostrare la compatibilità dei postulati dell'aritmetica, bolla come "perfettamente inutile" la proposta di Padoa di aggiungere agli assiomi di Peano il postulato secondo cui NεCls e condanna l'intero lavoro di Hilbert e Ackermann come "inutilmente complicato nel tentativo di raggiungere l'irraggiungibile"[63]. Parimenti negativa, naturalmente, è la valutazione di autori classici come Dedekind[64] o Frege[65]. A proposito di quest'ultimo, anzi, il parere è particolarmente severo:

> Recentemente è stata ripetuta l'affermazione che l'analisi del sistema di simboli chiamato *Begriffschrift* dal suo autore Gottlob Frege sia più profondo di quello del Peano. Quest'ultimo osservò (Riv. di Mat. 1895, p. 128) che «era desiderabile che il Frege applicasse la sua ideografia a molte parti della matematica. [...]». Ora il Frege ed i suoi difensori sono stati incapaci a far questo, mentre G. Peano e la sua scuola hanno scritto e raccolto migliaia di proposizioni e di dimostrazioni in varî campi della matematica. E quest'opera è stata continuata dopo la quinta ed. del Formulario di G. Peano (1908) ed estesa specialmente nel campo della teoria dei numeri, la parte più rigorosa e sottile, nella quale la complicazione e la precisione dei ragionamenti è massima. La classica opera di Edmondo Landau può considerarsi come una raccolta di proposizioni e di dimostrazioni strettamente collegate tra loro, dello stesso tipo di quelle del Formulario di Peano. I simboli di Peano entrano sempre più nell'uso per la loro comodità e flessibilità."[66]

Sarà questo atteggiamento di chiusura che porterà Vacca ad estraniarsi da una serie di iniziative, come l'edizione del volume di Enriques *Per la Storia*

[62] G. Vacca a G. Vailati, 7.11.1903, in Lanaro 1971 cit., p. 226-227.

[63] Cfr. Vacca [1939b] cit., p. 9-10.

[64] *Ibidem*, p. 9.

[65] Già nel 1903 Vacca aveva discusso con Vailati del valore dell'opera di Frege, in rapporto a quella di Peano (cfr. G. Vacca a G. Vailati, 7.11.1903 e 6.12.1903, in Lanaro 1971 cit., p. 226-227, 228-229). Egli affermava allora: "Rileggendo il lavoro di Russell vedo che Frege sale nella scala della importanza per la logica matematica. Resterà però sempre assai al di sotto del prof. Peano. È vero che il Frege fa un'analisi che il Russell chiama *più profonda* del *Formulario*, ma ciò che essi non sanno è che il prof. Peano era andato anche molto più innanzi nelle meditazioni e che poi ha pubblicato nei vari studi del *Formulario* non tutto ciò che ha trovato, ma il sistema che è a lui parso più bello". Poco dopo, però, sembrava manifestare una certa apertura nei confronti della logica fregeana, ammettendo: "comincio a sentire interesse per il Frege, il quale deve aver scritto qualche cosa di serio in un altro senso ed in un campo diverso dal *Formulario*".

[66] Cfr. Vacca [1939a] cit., c. 1r-2r.

della Logica (Bologna, Zanichelli, 1922), che faranno decollare in Italia questa tradizione di studi, influenzando il successivo contesto intellettuale europeo e, in particolare, i primi autori di trattati di storia della logica come H. Scholz e J. Jørgensen[67].

[67] Cfr. H. Scholz, *Geschichte der Logik*, Berlin, Junker und Dünnhaupt, 1931; J. Jørgensen, *A Treatise of Formal Logic*, Copenhagen, Levin and Munksgaard, 1931.

Giovanni Vailati (1863-1909)

Giuseppe Peano (1858-1932)

Giovanni Vacca (1872-1953)

Giovanni Vailati e l'idea della "scuola come laboratorio". Un confronto con le proposte internazionali[1]

LIVIA GIACARDI

Introduzione

Nel variegato panorama scientifico e culturale degli inizi del Novecento Giovanni Vailati (1863-1909), matematico, filosofo e divulgatore, autorevole membro della Scuola di Peano, è sicuramente una delle figure più appassionanti per la varietà degli interessi che permeano il suo complesso itinerario intellettuale che si snoda in vari rami del sapere seguendo direzioni molteplici e talora inesplorate. Fra queste, il rinnovamento della scuola e dei metodi di insegnamento della matematica è sicuramente una di quelle che meglio mostrano la sua originalità e ampiezza di vedute. In particolare la proposta di un insegnamento laboratoriale della matematica ha caratteri singolarmente innovativi e ha ripreso vigore in tempi recenti dando luogo a interessanti dibattiti fra gli insegnanti e i ricercatori in didattica. Nel mio saggio, dopo aver accennato brevemente al punto di vista sulla "scuola attiva" di alcuni pedagogisti che si interessarono anche di matematica o interagirono con gli ambienti scientifici, mi soffermerò sul contributo dei matematici, John Perry (1850-1920), Eliakim Hastings Moore (1862-1932), Emile Borel (1871-1956) e Felix Klein (1849-1925), per concentrarmi poi sulla "scuola come laboratorio" di Vailati cercando di rintracciarne nell'eterogeneo zibaldone degli scritti i caratteri distintivi. Dal confronto dei diversi modelli di laboratorio di matematica proposti a livello internazionale tra fine Ottocento e inizi Novecento cercherò di far emergere gli aspetti innovativi delle sue proposte.

[1] Ricerca eseguita nell'ambito del progetto PRIN 2009 *Scuole matematiche e identità nazionale nell'età moderna e contemporanea*, unità di Torino.

Cenni al contributo di alcuni pedagogisti

L'idea di offrire agli allievi spazi dove poter esplicare un'attività spontanea e costruttiva, coltivare la propria individualità e socializzare, appare frequente negli studi di pedagogisti, psicologi ed educatori di fine Ottocento, inizi Novecento e ha le sue radici soprattutto nell'opera di Pestalozzi e Froebel. Basti citare gli studiosi più influenti: l'americano John Dewey (1859-1952), il cui sistema educativo si ricollega al pragmatismo di Charles S. Peirce e William James, il tedesco Georg Kerschensteiner (1854-1932), promotore della "scuola del lavoro" il belga Ovide Decroly (1871–1932), gli svizzeri Edouard Claparède (1873-1940) e Adolphe Ferrière (1879-1960), uno dei principali divulgatori dei principi della "scuola attiva", il francese Alfred Binet (1857-1911), e l'italiana Maria Montessori (1870–1952) medico e pedagogista[2].

È stato in passato sottolineato come l'idea della "scuola come laboratorio" proposta da Vailati abbia analogie con le esperienze avviate da questi pedagogisti[3], ma sulla base delle rare evidenze nell'opera pubblicata e nella corrispondenza[4] è difficile affermare che esse siano state un riferimento certo[5]. Dewey era noto al Nostro che lo menziona di sfuggita nei suoi scritti[6], come pure gli era nota l'opera di Peirce e di James dei quali recensisce anche lavori espressamente dedicati a questioni educative[7]. Vailati era in contatto con Claparède, per lo meno in quanto segretario del Congresso internazionale di filosofia che si tenne a Ginevra nel 1904[8], e possedeva fra i suoi libri il volume di Binet *La psychologie du raisonnement* (Paris, Alcan 1886). Nella corrispondenza e negli scritti non ci sono invece

[2] Per una descrizione sintetica della loro opera si vedano per esempio A. AGAZZI, *Panorama della pedagogia d'oggi*, Brescia, La Scuola, 1953 e il più recente G. CHIOSSO, *Novecento pedagogico*, Brescia, La Scuola, 1997.

[3] F. ARZARELLO, *La scuola di Peano e il dibattito sulla didattica della matematica*, in A. GUERRAGGIO (a cura di), *La matematica tra le due guerre mondiali,* Bologna, Pitagora, 1987, p. 40-41, a p. 35.

[4] G. LANARO (a cura di), *Giovanni Vailati, Epistolario 1891-1909*, Torino, Einaudi, 1971 (d'ora in poi EV).

[5] Solo un esame minuzioso e completo dell'ingente materiale manoscritto conservato nel *Fondo Vailati* (Biblioteca di Filosofia, Università di Milano) in particolare dei *Notes*, da me solo in parte esplorati, potrebbe dare una risposta definitiva. Cfr. l'inventario in L. RONCHETTI (a cura di), *L'Archivio Giovanni Vailati*, Bologna, Cisalpino, 1998.

[6] Cfr. G. VAILATI, *Scritti*, a cura di M. QUARANTA, 3 voll., Sala Bolognese (Bo), Forni, 1987 (d'ora in poi S) I, p. 202, 210.

[7] Per esempio si veda G. VAILATI 1905, *Sull'arte d'interrogare*, S III, p. 279-283, in cui dimostra di conoscere W. JAMES, *Talks to teachers on psychology and to students on some of life's ideals* (1899), trad. it. G.C. Ferrari *Gli ideali della vita. Discorsi ai giovani ed ai maestri*, Torino, Bocca, 1906.

[8] Cfr. EV, p. 231, e G. BUSINO, *Note sulla cultura italiana nel primo Novecento*, in «Rivista storica italiana», 84.1, 1972, p. 164-176, dove sono trascritte le lettere di Vailati a Claparède.

riferimenti a Decroly e neppure alla Montessori la cui attività educativa incominciò dopo la partecipazione al Congresso pedagogico nazionale italiano tenutosi a Torino nel 1898[9]. Per quanto all'epoca dimorasse ancora in questa città, Vailati non risulta fra gli iscritti al congresso, mentre invece vi compaiono altri membri della Scuola di Peano, Rodolfo Bettazzi, Alessandro Padoa e Giovanni Vacca.

Fra i pedagogisti vi era chi nutriva interesse per l'insegnamento scientifico, per cui vale la pena accennare al modo di intendere i metodi attivi di insegnamento di alcuni di essi per comprendere quali idee circolassero in Europa fra Ottocento e Novecento, e meglio interpretare le proposte dei matematici.

Ispiratore di gran parte degli educatori della prima metà del Novecento, John Dewey può a buon diritto essere considerato il padre della scuola attiva. Ritenendo che i metodi di insegnamento del suo tempo fossero anacronistici, passivi, antipsicologici e antisociali, proponeva invece una scuola attiva che ponesse al centro non più maestri o libri, ma l'attività del fanciullo organizzata in una forma di lavoro di tipo sociale. Il sapere non deve dunque essere fornito bell'e pronto, ma deve essere presentato sotto forma di problemi e deve scaturire dalla ricerca personale dell'allievo. Essendo la classe tradizionale inadeguata per un tale tipo di insegnamento, egli riteneva che occorresse trasferire il processo educativo nei laboratori, nelle biblioteche, nei campi da gioco, nelle officine e nelle cucine, dove il lavoro diventa strumento di vita culturale e nello stesso tempo trasforma la scuola in una comunità in embrione[10]. Nel 1896 Dewey fondò a Chicago una *scuola sperimentale* basata su questi ideali educativi e cercò di interagire anche con i matematici, in particolare con Eliakim Hastings Moore e con George B. Halsted. In un articolo del 1903 sull'insegnamento della geometria[11], reagendo a uno scritto di Halsted, fermo sostenitore del rigore, egli affermava che nella pratica dell'insegnamento si deve tener conto anche dell'aspetto psicologico e che dunque occorre partire dalla realtà concreta, dall'esperienza ordinaria, e presentare le applicazioni pratiche della matematica in modo da arrivare gradualmente al rigore logico.

Dewey ebbe un'influenza notevole anche sui pedagogisti europei, fra i quali Georg Kerschensteiner, direttore dell'insegnamento primario e professionale di Monaco, merita di essere ricordato in quanto promotore della scuola del

[9] G.C. Molineri, G. C. Alesio (a cura di), *Atti del Primo Congresso Pedagogico Nazionale Italiano. Torino 8-15 Settembre 1898*, Torino, Tip. Camandona, 1899. L'intervento della Montessori sull'educazione dei "fanciulli degenerati" è alle p. 122-124. Si veda anche M. Montessori, *Il Metodo della pedagogia scientifica applicato all'educazione infantile nelle Case dei Bambini* (1909), dove compare l'idea di una scuola attiva e dell'uso di materiali appositamente preparati; particolarmente interessanti per l'insegnamento della matematica sono le opere successive *Psico-Aritmética* (Barcelona, 1934, trad. it. 1971) e *Psico-Geometría* (Barcelona, 1934).

[10] Si veda per esempio Agazzi 1953 cit., p. 79-81, Chiosso 1997 cit., p. 63-67.

[11] J. Dewey, *The psychological and the logical in teaching Geometry*, in «Educational Review», 25, 1903, p. 387-399.

lavoro, l'*Arbeitsschule*[12]. Egli riteneva che per riformare l'insegnamento non occorresse tanto accrescere i programmi o aumentare gli orari, ma fosse necessario trasformare la scuola in un laboratorio di esercitazioni, dove l'allievo potesse imparare ad usare il sapere e acquisire il senso del dovere sociale. L'importanza da lui attribuita al lavoro manuale e all'attività pratica andava aldilà dell'acquisizione di abilità e competenze, era collegata piuttosto alla capacità di effettuare un'attività responsabile e autonoma: un lavoro manuale disgiunto dallo sforzo intellettuale risulta meccanico, e dunque la sua caratteristica essenziale dal punto di vista pedagogico è la sua pianificazione e realizzazione autonoma, congiunta alla possibilità di autoanalisi. Avendo compiuto studi di matematica all'università fu particolarmente sensibile alle problematiche connesse con l'insegnamento scientifico cui dedicò un volumetto nel 1914[13].

Fu probabilmente la lettura di Herbert George Wells (1866-1946) a stimolare in Vailati la riflessione sulla scuola laboratorio[14]. Scrittore di fantascienza con formazione scientifica, Wells si interessò anche di problemi educativi e nel libro *Mankind in the making* (London, Chapman, 1903), esaminato da Vailati, critica la scuola inglese ed espone il suo punto di vista sui metodi di insegnamento. In particolare egli riteneva che i programmi fossero ridondanti, ma privi di tutto ciò che permette all'allievo di comprendere la società in cui vive (p. 205) e i manuali scolastici inadeguati a un insegnamento attivo (p. 226). Secondo Wells era auspicabile che le scuole fossero collegate alle biblioteche pubbliche (p. 213) e le lezioni vere e proprie fossero alternate a sedute dedicate ad attività individuali quali la lettura, la pittura e anche il gioco apprezzato in quanto "attività spontanea che incentiva l'immaginazione" (p. 235). Nel suo libro Wells cita anche l'insegnamento laboratoriale della matematica, evidenziando però le difficoltà che si incontrano a metterlo in pratica perché un insegnamento di questo tipo richiede da parte del docente preparazione, pianificazione, grande applicazione e impegno, cosa impossibile senza manuali scolastici adeguati (p. 225).

Inoltre Vailati conosceva l'opera dell'educatrice torinese Maria Begey (1879-1957) di cui recensisce il libro *Del lavoro manuale educativo* (Torino, Paravia, 1900)[15]. Dopo una panoramica storica sull'uso del lavoro manuale nell'insegnamento a partire dal XVI secolo, l'autrice si sofferma a descrivere le esperienze nei vari paesi europei nell'Ottocento per concentrarsi poi sull'Italia, guardando soprat-

[12] G. Kerschensteiner, *Der Begriff der Arbeitsschule*, 1912, trad. it. *Il concetto della scuola di lavoro*, Firenze, Bemporad, 1935.

[13] Cfr. G. Kerschensteiner, *Wesen und Wert des naturwissenschaftlichen Unterrichts,* 1914. Si veda in merito anche G. Wolff, *The Development of the Teaching of Geometry in Germany*, in «The Mathematical Gazette», 21. 243, 1937, p. 82-98, a p. 97 e D. Simons, Georg Kerschensteiner, *His Thought and Its Relevance Today*, London, Methuen, 1966, p. 79-81.

[14] G. Vailati, 1906, *Idee pedagogiche di H.G. Wells*, in S III, p. 291-295.

[15] G. Vailati 1901, Recensione di *Maria Begey. Del lavoro manuale educativo*, S III, p. 264-266.

tutto alla scuola elementare. In particolare dalla sua analisi critica emerge come i risultati ottenuti siano inferiori quando la preoccupazione principale sia quella di far acquisire abilità per svolgere un certo mestiere, mentre l'utilità del lavoro manuale emerge soprattutto se si mira ad esercitare le facoltà di attenzione, di osservazione, e di giudizio, armonicamente con la destrezza e l'abilità della mano, preparando così gli allievi sia all'esercizio del pensiero, sia alla vita pratica (p. 102).

La maggior parte dei pedagogisti era però interessata soprattutto alla formazione del fanciullo nei suoi primi anni di vita e il riferimento alla matematica non era sempre presente, ma l'idea di una scuola laboratorio si diffuse anche fra i matematici che la estesero alla scuola secondaria.

Il laboratorio di matematica nel panorama internazionale

L'idea di laboratorio di matematica nacque con John Perry, professore di Meccanica e Matematica del Royal College of Science di Londra. Egli riteneva infatti che la matematica dovesse essere insegnata "as any other physical science is taught, … with experiment and common-sense reasoning"[16] e elaborò un metodo didattico che chiamò *Practical Mathematics*. "The most essential idea – egli scrive – in the method of study called Practical Mathematics is that the student should become familiar with things before he is asked to reason about them"[17]. Prima di affrontare teoremi e dimostrazioni l'allievo dovrebbe pertanto acquisire familiarità con i concetti attraverso esperimenti e misure con l'uso della carta quadrettata, la raccolta di dati, il disegno, i metodi grafici e i collegamenti con la fisica e le altre scienze.

Nell'elaborazione del suo metodo Perry si ispirò alle pratiche didattiche usate nei giardini d'infanzia dove, sotto l'influenza di Pestalozzi e Froebel, si adottava un approccio educativo basato sull'attività degli allievi e sull'esercizio dell' "occhio e della mano"[18], e fu stimolato dalla constatazione del fallimento dell'insegnamento tradizionale nei confronti dello studente medio:

> Academic methods of teaching Mathematics succeed with about five per cent of all students, the small minority who are fond of abstract reasoning: they fail altogether with the average student[19].

[16] Cfr. *The correlation of the teaching of mathematics and science. Report of a conference held by the Mathematical Association in conjunction with the federated Associations of London non-primary-teachers*, in «The Mathematical Gazette», 5.77, 1909, p. 5. In questo *Report* la relazione di Perry occupa le pagine 4-15.

[17] J. Perry, *Elementary Practical Mathematics*, London, Macmillan and Co., 1913, p. 21.

[18] M.H. Price, *The Perry movement in school mathematics*, in M. H. Price, (ed.) *The Development of Secondary Curriculum*. London, Croom Helm, 1986, p. 103-155, alle p. 109-114.

[19] Perry 1913 cit., p. VII.

Causa di questo fallimento era secondo Perry il sistema inglese degli esami separati che induceva i docenti a insegnare le varie materie per "water-tight compartments" e a dare troppa importanza agli aspetti astratti della matematica e alle "labour-saving rules", trascurando i principi fondamentali[20]. Scopo dell'insegnamento secondo Perry è quello di formare persone in grado di imparare e la *Practical Mathematics* consente di raggiungere questo obiettivo perché insegna allo studente il modo di affrontare i problemi, usando il buon senso e offrendo prove sperimentali della correttezza dei risultati. Essa inoltre può essere applicata a tutti i livelli di insegnamento a patto che la trattazione rimanga legata a fenomeni reali e a problemi concreti.

Perry stesso cominciò ad usare questo nuovo tipo di approccio didattico in una *Public School* inglese e poi riuscì a introdurlo nel curricolo di un *Technical College* e negli anni '80 indusse il *Board of Education* a sperimentarlo per l'insegnamento delle scienze. Comunicò i suoi risultati in convegni della British Association for the Advancement of Science, suscitando vivaci dibattiti[21], e li raccolse poi nel volumetto del 1902, *Discussion on the teaching of Mathematics*[22]. Partendo da quelli che considerava gli scopi e l'utilità della matematica, Perry ribadiva le critiche ai metodi inglesi di insegnamento:

> So we now teach all boys what is called mathematical philosophy, that we may catch in our net the one demigod, the one pure mathematician, and we do our best to ruin all the others[23].

Successivamente illustrava il programma del corso di matematica "pratica" elementare e di quello avanzato (p. 25-32). Fra i numerosi interventi che seguirono il discorso di Perry vi fu anche quello di David E. Smith che poneva l'accento sui problemi che occorreva affrontare per mettere in pratica la riforma proposta: nuovi libri di testo, formazione degli insegnanti e modifiche degli esami (p. 90-91)[24].

Nel 1913 Perry pubblicò il suo libro più noto *Elementary Practical Mathematics* che si presenta come una guida per gli insegnanti con molti esercizi accuratamente scelti da proporre agli studenti. Egli parte da argomenti di aritmetica per affrontare poi temi e problemi di algebra, di geometria, di analisi infinitesimale e di fisica. La presentazione rispecchia una didattica laboratoriale: generalmente si parte da un problema pratico, si raccolgono dati numerici e si

[20] PERRY 1913 cit., p. X.

[21] Cfr. G. HOWSON, *A history of mathematics education in England*, Cambridge, Cambridge University Press, 1982, p. 148-149. In appendice, alle pagine 222-224 sono riportate le proposte di Perry per un syllabus di matematica (1900).

[22] J. PERRY, *Discussion on the teaching of Mathematics*, London, Macmillan and Co., 1902

[23] PERRY 1902 cit., p. 6.

[24] Si veda anche D.E. SMITH, *Problems in the teaching of secondary mathematics* , Boston, Ginn and Company, 1913 in cui sottolinea come la scuola americana si rivolga alle masse (p. 3).

interpretano, si usa la carta quadrettata per tabulare osservazioni, risolvere graficamente equazioni, per rappresentare funzioni, trovare la pendenza della tangente ad una curva, si insegna a costruire un regolo calcolatore, e se ne mostra l'uso, ecc. Soprattutto si cerca di dare una visione unitaria della matematica, collegando algebra, geometria, trigonometria e si fa vedere come strumenti matematici siano utili per affrontare problemi della fisica e dell'ingegneria.

In particolare, per quanto riguarda la geometria, Perry critica l'impostazione euclidea e suggerisce che sperimentazioni e misurazioni pratiche con l'uso della carta quadrettata vengano anteposte alla geometria dimostrativa; qualche ragionamento deduttivo affianchi la geometria sperimentale; si dia più importanza alla geometria solida; si utilizzino le funzioni trigonometriche nello studio della geometria, e si presti più attenzione alle applicazioni[25].

Di tanto in tanto Perry fornisce anche indicazioni metodologiche o consigli agli insegnanti[26]. segnala le difficoltà, gli errori più frequenti degli allievi e le cause che li producono[27].

Molti dei problemi affrontati nel suo libro sono simili a quelli proposti oggi nelle sperimentazioni didattiche con la calcolatrice scientifica, con un forte uso di dati numerici, ma è diverso l'obiettivo finale. Il metodo che egli propone è basato sul *problem solving*, e su un approccio trasversale alla matematica molto concentrato sulle procedure. Il suo manuale presenta una matematica da "praticare" e non da sistematizzare in una teoria: è questa la sua originalità, e nello stesso tempo il suo limite.

Indipendentemente dalla sua influenza sull'educazione tecnica in Inghilterra, il movimento di Perry favorì la diffusione dell'idea di un insegnamento laboratoriale della matematica per tutti i tipi di studenti e più in generale l'affermazione di alcuni principi fondamentali: maggiore democrazia dell'educazione, maggiore considerazione di ciò che serve nella vita reale, maggiore attenzione agli aspetti pedagogici. L'influenza delle sue idee si percepì soprattutto nell'insegnamento della geometria: fu dato più spazio al lavoro sperimentale, furono attivati laboratori in molte scuole e apparvero vari libri di testo in questo indirizzo[28].

Il movimento di Perry ebbe ampia risonanza non solo in Europa, ma anche in America. Nel 1902 Eliakim Hastings Moore, presidente della American Mathematical Society pronunciava il celebre discorso *On the foundation of mathematics*, in cui invitava le associazioni di insegnanti di matematica a occuparsi dell'istru-

[25] Cfr. per esempio PERRY 1902 cit., p. 102.

[26] Cfr. per esempio PERRY 1913 cit., p. 21, 25, 32, 51-52,

[27] Cfr. per esempio PERRY 1913 cit., p. 1-2

[28] Cfr. PRICE 1986 cit., p. 124-130; cfr. anche F. CAJORI, *Attempts made during the eighteenth and nineteenth centuries to reform the teaching of geometry*, in «The Mathematical Gazette», 17 (October, 1910), p. 181-201, a p. 197-199.

zione secondaria, auspicando un insegnamento integrato di matematica pura e applicata, e citando come esempio l'insegnamento sperimentale di Perry, il solo, a suo avviso, che consenta ai giovani di comprendere che "mathematics is indeed itself a fundamental reality of the domain of thought, and not merely a matter of symbols and arbitrary rules and conventions"[29]. Un'intera sezione del suo discorso era dedicata al *laboratory method* in matematica (p. 533-535) che egli accostava al laboratorio di fisica, evidenziandone i vantaggi didattici:

> This program of reform – egli scrive – calls for the development of a thoroughgoing laboratory system of instruction in mathematics and physics, a principal purpose being as far as possible to develop on the part of every student the true spirit of research, and an appreciation, practical as well as theoretic, of the fundamental methods of science[30].

L'insegnamento laboratoriale, che deve essere caratterizzato da un approccio pratico, cioè "computational, or graphical or experimental", presenta i seguenti vantaggi: permette agli allievi di rendersi conto dell'importanza, per esempio, di un teorema e di far nascere in loro il desiderio di una dimostrazione formale; incentiva la ricerca personale; inoltre è estremamente flessibile perché consente sia il lavoro individuale, sia quello di gruppo, dove l'insegnante è nello stesso tempo membro del gruppo e leader. Fra i consigli che Moore fornisce perché il metodo possa funzionare vi è quello di presentare solo esperimenti interessanti: per esempio nel laboratorio di fisica non è interessante insegnare l'uso degli strumenti, è meglio proporre problemi da risolvere che coinvolgono l'uso di quegli strumenti, in modo che l'allievo impari "the use of the instruments as a matter of course, and not as a matter of difficulty" (p. 533). A conclusione egli afferma che a suo avviso il metodo laboratoriale per l'insegnamento secondario della matematica e della fisica è il migliore non solo per coloro che intendono specializzarsi in matematica o fisica pura, oppure in ingegneria, ma per tutti gli studenti in generale.

Il programma di Moore fu ripreso da alcuni pedagogisti fra cui Jacob William Albert Young (1865-1948), professore di pedagogia matematica presso l'Università di Chicago, senza però ottenere risultati apprezzabili[31]. Egli dedicò un intero capitolo della sua opera *The teaching of mathematics in the elementary and the secondary school* (1906)[32] al movimento di Perry riservando ampio spazio al laboratorio di matematica. Young afferma che ogni aula può essere sede del labo-

[29] E.H. Moore, *On the foundations of mathematics*, in «The School Review», 11. 6 (Jun., 1903), p. 521-538, a p. 528-529.

[30] Moore 1903 cit., p. 533.

[31] Cfr. Roberts 2001 cit., p. 692-694.

[32] Il testo fu tradotto in italiano da D. Gambioli: J. W. A. Young, *L'insegnamento delle matematiche*, Milano, Sandron, 1924.

ratorio, ma perché il metodo dia i suoi frutti occorre che sia fornita di opportune attrezzature quali lavagne di vario tipo, modelli matematici, regoli, strumenti da agrimensore, bilance, pendoli, livelle, barometri e termometri. Una biblioteca ben fornita, inoltre, potrebbe costituire un utile sussidio all'insegnamento. La sua dotazione dovrebbe comprendere una buona raccolta di libri di testo, di eserciziari, di tavole dei vari tipi, ma anche testi di storia delle matematiche, di matematica ricreativa, e riviste sull'insegnamento. Il lavoro in laboratorio, sotto la direzione dell'insegnante o di un assistente, deve andare di pari passo con quello in classe ed è visto "come un sostituto dello studio privato, con una guida, con le più grandi facilitazioni e con un ambiente più adatto"[33]. L'attività laboratoriale appare quindi distinta da quella in classe, sebbene sia ad essa collegata, assumendo così un significato più restrittivo rispetto a quello di Perry.

Nel 1902 in Francia la riforma dell'insegnamento secondario (*lycées*) detta delle *humanités scientifiques* introduceva l'analisi infinitesimale nelle scuole secondarie e sottolineava anche l'importanza di un metodo di insegnamento concreto che tenesse conto dei collegamenti con la realtà[34]. A presiedere la commissione preposta alla revisione dei programmi era il matematico Gaston Darboux, ma molti altri illustri studiosi diedero il loro contributo. In particolare Borel invitava gli insegnanti a "introduire plus de vie et de sens du réel dans notre enseignement mathématique" e auspicava la realizzazione di *laboratoires de mathématiques*, dove gli allievi potessero costruire con le loro mani modelli, effettuare misurazioni, ecc. allo scopo di "amener, non seulement les élèves, mais aussi les professeurs, mais surtout l'esprit public à une notion plus exacte de ce que sont les Mathématiques et du rôle qu'elles jouent réellement dans la vie moderne"[35]. Che cosa Borel intendesse si può capire per esempio dal suo manuale di geometria del 1905[36] dove gli aspetti pratici e intuitivi sono ampiamente evidenziati. Egli si propone di "écrire une Géométrie plus concrète, où les considérations de symétrie, de déplacements, sont invoquées le plus souvent possible. [...] Substituer de plus en plus l'étude dynamique des phénomènes à leur étude statique" (p. V e VII). Il volume si apre con un'in-

[33] Young 1924 cit., p. 146.

[34] Cfr. H. Gispert, *Two mathematics reforms in context in twentieth century France. Similarities and differences*, in «International Journal for the History of Mathematical Education», 4, 2009, p. 43-50; si veda anche H. Gispert, *La réforme de 1902 et la réforme des mathématiques modernes (1967-1973), deux réformes dans leur contexte mathématiques, sociaux et épistémologiques*, in F. Ferrara, L. Giacardi, M. Mosca (a cura di), *Conferenze e Seminari* Assoc. Sub. Mathesis, Torino, KWB, 2010, p. 97-102.

[35] E. Borel, *Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire*, in «Revue générale des sciences pures et appliquées», 15, 1904, p. 431-440, anche in *Emile Borel philosophe et homme d'action. Pages choisies et présentées par Maurice Fréchet*, Paris, Gauthier-Villars, 1967, p. 1-21, a p. 14.

[36] E. Borel, *Géométrie. Premier et second cycles*, Paris, Colin, 1905.

troduzione all'uso della riga e del compasso, le applicazioni sono abilmente coordinate alla teoria e fra gli esercizi proposti ve ne sono a carattere pratico che coinvolgono simmetrie, uso di strumenti, ecc. Non c'è una rigida divisione fra geometria piana e solida, vengono introdotti argomenti come, per esempio, la tassellazione del piano (p. 111-113), le approssimazioni (p. 280-281) e, nei complementi (p. 353-375), anche nozioni sulle coniche e altre curve e sul calcolo approssimato di aree e sull'agrimensura. L'idea che egli aveva di laboratorio di matematica era però piuttosto ristretta:

> On a déjà deviné quel pourrait être, à mon sens, l'idéal du laboratoire de Mathématiques : ce serait, par exemple, un atelier de menuiserie ; le *préparateur* serait un ouvrier menuisier qui, dans les petits établissements, viendrait seulement quelques heures par semaine, tandis que, dans les grands lycées, il serait présent presque constamment. Sous la haute direction du professeur de Mathématiques, et suivant ses instructions, les élèves, aidés et conseillés par l'ouvrier préparateur, travailleraient par petits groupes à la confection de modèles et d'appareils simples[37].

Di questo tipo è il *Laboratoire d'enseignement mathématique* creato da Borel insieme a Jules Tannery (1848-1910) presso l'Ecole Normale Supérieure di Parigi e mirato alla formazione degli insegnanti. Qui venivano ideati e realizzati modelli per lo studio della geometria e della meccanica sia in legno, sia in cartone o in fil di ferro e sughero e si apprendeva l'uso didattico di altri strumenti quali meccanismi articolati, pantografi, inversori, macchine per calcolare e strumenti di geodesia e di agrimensura. Il laboratorio, inoltre, doveva essere dotato di una biblioteca dove i futuri insegnanti potessero trovare le principali pubblicazioni francesi sulla didattica della matematica, le riviste pedagogiche più importanti e i manuali scolastici delle varie nazioni[38].

In Germania, a partire dagli anni '90 Klein aveva cominciato ad elaborare il celebre programma di riforma dell'insegnamento della matematica che ridefiniva i rapporti fra scuole secondarie e Università. In particolare, egli proponeva di trasferire nell'insegnamento medio, anche in quello delle scuole classiche, la geometria analitica e, soprattutto, il calcolo differenziale e integrale in modo da offrire allo studente una base matematica sicura per gli studi superiori: il concetto di funzione avrebbe dovuto pervadere tutto il curriculum di matematica. Il pensiero funzionale divenne lo slogan di questo movimento riformista[39]. I capisaldi del programma di Klein trovarono la prima espressione

[37] BOREL 1967 cit., p. 15-16.

[38] Cfr. A. CHÂTELET, *Le laboratoire d'enseignement mathématique de l'Ecole Normale Supérieure de Paris*, in «L'Enseignement mathématique», 11, 1909, p. 206-210.

[39] Cfr. G. SCHUBRING, *Pure and Applied Mathematics in Divergent Institutional Settings in Germany: The Role and Impact of Felix Klein*, in D. ROWE, J. MCCLEARY (Eds.), *The History of Modern Mathematics*, London, Academic Press, 1989, II, p. 170-220.

ufficiale nel *Meraner Lehrplan,* elaborato nel 1905 dalla Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte[40]. Il piano di riforma non riguardava solo l'insegnamento della matematica, ma anche quello della fisica e delle altre scienze naturali: la novità principale era l'introduzione del "pensiero funzionale" nell'insegnamento secondario, ma si sottolineavano anche altri aspetti quali l'importanza delle applicazioni, l'uso dei modelli geometrici per l'insegnamento della geometria, il collegamento con problemi reali, le connessioni con l'insegnamento della fisica, il valore degli esperimenti (p. 550-553). Per l'insegnamento della fisica si evidenziava inoltre la necessità di attrezzare opportuni spazi di lavoro (*Arbeitsräume*) dove gli insegnanti, adeguatamente preparati e con l'aiuto di un assistente, potessero lavorare e sperimentare con gli allievi[41]. Per quanto riguarda l'insegnamento della geometria in particolare si insisteva sui punti seguenti: potenziare l'intuizione spaziale (p. 543); usare la riga e il compasso, disegnare, misurare (p. 547); considerare le configurazioni geometriche come oggetti dinamici (p. 548); potenziare l'uso delle rappresentazioni grafiche; dare spazio alle applicazioni (p. 549); fare uso di modelli; coordinare planimetria e stereometria; accennare al punto di vista storico e filosofico (p. 550).

L'importanza di utilizzare strumenti e modelli nell'insegnamento della matematica emerge anche dai volumi sulle matematiche elementari da un punto di vista superiore[42] che Klein dedicò espressamente alla formazione degli insegnanti. Nel volume sulla geometria vengono introdotti vari strumenti, quali l'inversore di Peaucellier, un meccanismo per realizzare trasformazioni affini, e altro ancora[43] e Klein osserva in proposito:

> Instead of mentioning further details, I should like here to sound a general warning against neglecting the *actual practical demonstration* when such instruments are considered in illustration of a theory. The pure mathematician is often too prone to

[40] Cfr. *Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten*, in «Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht», 36, 1905, p. 543-553. Anche in F. Klein, *Vorträge über den mathematischen Unterricht*, Teil 1, Leipzig, Teubner, 1907, p. 208-219. Si veda la traduzione inglese del curricolo relativo ai ginnasi in «The Mathematical Gazette», 6. 95, 1911, p. 179-181.

[41] Cfr. *Bericht über den Unterricht in der Physik an den neunklassigen höheren Lehranstalten*, 1905 cit., p. 563.

[42] F. Klein, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, I *Arithmetik, Algebra, Analysis*, II *Geometrie*, III *Präzisions-und Approximationsmathematik*, Berlin, Springer, 1925-1933. La prima edizione dell'opera risale al 1908-1909. Si veda in merito G. Schubring, *Historical comments on the use of technology and devices in ICMEs and ICMI*, in «ZDM-The International Journal on Mathematics Education», 42.1, 1910, p. 5-9 e M. Bartolini Bussi, D. Taimina, M. Isoda, *Concrete models and dynamic instruments as early technology tools in classrooms at the dawn of ICMI: from Felix Klein to present applications in mathematics classrooms in different parts of the world*, *Ibidem*, p. 19-31.

[43] Cfr. F. Klein, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, *Geometry*, New York, Dover, 2004, vol. II Geometry, p. 14, 75, 100.

> do so. Such neglect is just as unjustifiably one-sided as is the opposite extreme of the mechanician who, without taking an interest in the theory, loses himself in details of construction. Applied mathematics should supply here a bond of union.[44]

Klein si impegnò anche a riorganizzare e modernizzare la *Modellkammer* in Göttingen a scopi educativi, per favorire, in particolare, la *Raumanschauung* (intuizione spaziale)[45] e, insieme a P. Treutlein, nel convegno della *Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique* (poi ICMI) tenutosi a Bruxelles nel 1910 presentò l'uso dei modelli nell'insegnamento secondario e superiore come mezzo per sviluppare l'intuizione geometrica[46].

Una sintesi del punto di vista internazionale si può trovare nel rapporto preparato da Smith relativo all'inchiesta promossa nel 1911 dall'ICMI su *Intuition and experiment in mathematical teaching in the secondary schools* concernente i ragazzi dai 10 ai 19 anni. Dopo aver fatto alcune precisazioni sui tipi di scuole prese in considerazione (allievi fra i 10 e i 19 anni provenienti da scuole secondarie escluse le professionali), Smith fornisce una presentazione generale della situazione nei vari paesi dalla quale emerge come, nell'insegnamento della matematica, il ricorso all'intuizione e agli esperimenti pratici nella scuola secondaria sia più frequente in Austria, Germania e Svizzera, piuttosto che in Inghilterra, Francia e Stati Uniti e come i temi più dibattuti siano soprattutto l'insegnamento della geometria e l'introduzione o meno del concetto di funzione. Successivamente illustra aspetti particolari di un insegnamento attivo della matematica nei vari paesi e precisamente: "Misurazioni e stime" (misure geodetiche, astronomiche, triangolazioni, ...), "Disegno geometrico e rappresentazioni grafiche" (insegnamento della geometria descrittiva), "Metodi grafici" (rappresentazione di funzioni su carta millimetrata, statica grafica, valutazione di superfici con l'aiuto della carta millimetrata, ...), "Calcoli numerici" (uso di tavole, di regolo calcolatore, metodi di calcolo approssimato, ...)[47].

Il laboratorio di matematica secondo Vailati

In Italia è Giovanni Vailati a proporre l'idea di laboratorio. Matematico dai molteplici interessi culturali e, come si è detto, membro della Scuola di Giuseppe Peano, Vailati dopo aver insegnato per qualche anno all'Università

[44] Klein 2004 cit., p. 15.

[45] Cfr. Schubring 2010 cit., p. 6-7.

[46] Cfr. «L'Enseignement mathématique», 12, 1910, p. 388 e 391-392, e Giacardi, *Timeline 1910*, in F. Furinghetti, L. Giacardi (eds.) 2008, www.icmihistory.unito.it.

[47] Cfr. D.E. Smith, *Intuition and experiment in mathematical teaching in the secondary schools*, in «L'Enseignement mathématique», 14, 1912, p. 507-534, e Giacardi, *Timeline 1912*, in Furinghetti, Giacardi 2008 cit.

di Torino come assistente e come docente di corsi liberi, nel 1899 lasciò quella città e cominciò l'insegnamento nelle scuole secondarie (Pinerolo, Siracusa, Bari, Como e Firenze). Il suo interesse per i problemi della scuola risaliva agli anni torinesi e si esplicò in varie direzioni: nell'ambito della Associazione Mathesis degli insegnanti di matematica, della Federazione Nazionale Insegnanti delle Scuole Medie (FNISM), nell'organizzazione del Congresso Internazionale dei Matematici del 1908, e soprattutto nel lavoro svolto all'interno della Commissione Reale per la riforma delle scuole secondarie che lo impegnò dal 1905 fino alla morte nel 1909[48].

Stupisce quindi in prima analisi che le sue riflessioni nel campo della pedagogia e della didattica si debbano rintracciare, nella quasi totalità, in osservazioni marginali e rapsodiche sparse nel vasto zibaldone degli *Scritti*, per lo più racchiuse nelle innumerevoli recensioni. In realtà, se si analizzano queste recensioni, ci si accorge come non siano affatto casuali: si tratta sempre di commenti a opere a lui congeniali, che gli consentono di esporre al tempo stesso le idee dell'autore recensito e le riflessioni personali. La scelta pare in buona sostanza indirizzata a far conoscere e a diffondere certi libri e certe idee da lui condivise, e fa emergere un vero e proprio programma di riforma degli insegnamenti secondari i cui cardini sono: l'abolizione della retorica umanistica, l'armonica interazione fra cultura estetico-letteraria e scientifica, l'introduzione di elementi di diritto e di economia politica, uno studio delle lingue non più grammaticale e nozionistico, uno studio delle scienze completato da osservazioni dirette ed esperienze di laboratorio e vivificato da un'impostazione storica. Se si osserva, poi, come queste stesse idee furono le linee guida del suo operato nell'ambito della Commissione Reale, non si può che apprezzare la coerenza e l'organicità di un impegno non soltanto teorico, ma mirato a un rinnovamento concreto della scuola secondaria.

L'espressione "scuola come laboratorio" e una sua breve illustrazione compare esplicitamente nella recensione dello scritto di Maria Begey *Del lavoro manuale educativo*[49], e nella breve nota *Idee pedagogiche di H.G. Wells*[50], e emerge anche dai programmi di matematica da lui elaborati per la Commis-

[48] Sulla vita e sulla formazione di Vailati si veda M. De Zan, *La formazione di Giovanni Vailati,* Lecce, Congedo, 2009 e, sulla dimensione europea, i saggi in F. Minazzi (a cura di), *G. Vailati intellettuale europeo*, Milano, Thélema, 2006. Per un esame delle proposte di riforma di Vailati, dei dibattiti suscitati e dei risultati ottenuti si veda L. Giacardi, *The School as "Laboratory". Giovanni Vailati and the Project to Reform Mathematics Teaching in Italy*, in «International Journal for the History of Mathematics Education», 4, 2009, p. 5-28 e L. Giacardi, Humanitas *scientifica e democratizzazione del sapere. Giovanni Vailati e il progetto di riforma dell'insegnamento della matematica*, in C. S. Roero (a cura di), *Peano e la sua scuola fra matematica, logica e interlingua.* Atti del Congresso internazionale di studi (Torino, 6-7 ottobre 2008), Torino, Dep. Sub. Storia Patria, 2010, p. 405-436.

[49] Vailati 1901 cit..

[50] Vailati 1906 cit..

sione Reale e dalle relative indicazioni metodologiche, ma invano si cercherebbe un'esposizione sistematica e completa.

Per comprendere l'originalità delle riflessioni di Vailati in merito, è importante inquadrarle nella sua particolare visione della funzione della matematica e del suo insegnamento, visione in cui confluiscono, come si è mostrato altrove[51], motivi e istanze diverse: da Peano e dalla sua scuola gli derivava la salda padronanza della logica matematica, il bisogno del rigore, la riflessione sul linguaggio, oltre che l'interesse per la didattica e per la storia delle matematiche e l'esigenza di democratizzare il sapere. Del pragmatismo egli faceva propria la lotta contro i problemi privi di senso e contro la metafisica e accoglieva il criterio operativo e funzionale per attribuire significato agli enunciati. A questi motivi si intrecciano armonicamente assunti positivistici: l'importanza di una *humanitas* scientifica, una didattica fondata su una conoscenza positiva dell'uomo (biologia, psicologia), un insegnamento che proceda dai fatti alle astrazioni e il valore applicativo del sapere.

Il fatto poi che Vailati si sia interessato di psicologia induce a pensare che questa abbia influenzato la sua visione dell'insegnamento della matematica. Egli partecipò ai tre congressi internazionali di psicologia di Monaco 1896, Parigi 1900 e Roma 1905 e dai suoi scritti relativi emerge come egli fosse soprattutto interessato alle questioni di metodo in questo settore e alle applicazioni nello studio dell'arte, della letteratura e dell'antropologia. Nella relazione tenuta al congresso di Roma egli si riferisce anche alla "psicologia delle operazioni intellettuali" (oggi diremmo psicologia cognitiva), tema già presente in *The* w*ill to believe* di James che riabilitava le attività costruttive e anticipatrici della mente umana a fronte di quelle puramente recettive e classificatorie[52]. Tuttavia non vi è una riflessione esplicita sulle ricadute degli studi psicologici sull'educazione, per quanto si possa rintracciare l'influenza della psicologia moderna nel fatto di considerare i concetti generali (anche quelli della scienza) come semplici strumenti, che ci permettono di ordinare, classificare, utilizzare il materiale grezzo delle esperienze, e nella conseguente idea che il non saper applicare un concetto equivalga a non possederlo affatto[53].

Per affrontare i problemi connessi con l'insegnamento della matematica Vailati si era innanzitutto documentato sui programmi e l'organizzazione scolastica degli altri paesi europei[54], ne aveva discusso con gli amici[55], e aveva

[51] Si rimanda a GIACARDI 2010 cit.

[52] Cfr. G. VAILATI, *La distinzione fra conoscere e volere,* S I, p. 55-58; si veda in merito G. SAVA, *Giovanni Vailati e i primi congressi internazionali di psicologia,* in MINAZZI 2006 cit., p.114-129.

[53] Cfr. G. VAILATI 1905, *Sull'arte d'interrogare*, S III, p. 279-283, a p. 280.

[54] Cfr. Cartella 41, fasc. 346, Cartella 31, fasc. 272, in *Fondo Vailati*.

[55] Per esempio Vailati discusse con Roberto Bonola sull'organizzazione delle scuole normali (*Fondo Vailati*, Cartella 1, fasc. 18), con Cesare Burali-Forti sulla teoria delle proporzioni e

tenuto conto del parere degli insegnanti[56]. Egli conosceva anche i principali movimenti di riforma contemporanei; nel suo articolo del 1910 sull'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie, fa esplicito riferimento a Perry, a Borel e anche a Klein[57], che aveva avuto modo di incontrare più volte: in occasione del suo viaggio in Germania nel 1899[58], nel 1900 e nel 1904 durante i Congressi internazionali dei matematici di Parigi e Heidelberg e, molto probabilmente, anche nel 1906 quando fu nuovamente a Gottinga[59]. Fu inoltre coinvolto nell'organizzazione del IV Congresso Internazionale dei Matematici che si tenne a Roma nel 1908 e che portò alla creazione dell'ICMI sotto la presidenza dello stesso Klein. La sessione dedicata alla didattica fu organizzata proprio da Vailati[60] e costituì un'importante occasione di confronto internazionale delle esperienze educative dei vari paesi nel campo della matematica. Da alcune delle numerose relazioni appare implicita o esplicita l'idea del laboratorio: l'importanza nella pratica didattica delle misurazioni, delle rappresentazioni grafiche, dell'uso degli strumenti è sottolineata oltre che da Vailati, anche da F. S. Archenhold, da D. E. Smith, e la denominazione *laboratory work in mathematics* compare nell'intervento sulle scuole inglesi di C. Godfrey[61].

L'esperienza di docente in varie scuole secondarie italiane tanto del Nord, quanto del Sud, aveva inoltre consentito a Vailati di toccare con mano le carenze e i difetti della scuola italiana ed è proprio il desiderio di porvi rimedio a guidarlo nelle sue proposte di riforma.

sull'uso dei vettori in geometria (*Ibidem,* Cartella 2, fasc. 26). Cfr. anche le risposte di Burali-Forti al questionario inviato da Vailati ai professori di matematica in E. LUCIANO, C.S. ROERO, *Giuseppe Peano matematico e maestro*, Torino, Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino, 2008, p. 181-182.

[56] Cfr. *Risposte al questionario diffuso con circolare 27 marzo 1906*, in *Commissione Reale per l'ordinamento degli studi secondari in Italia*, 2 voll., Roma, Tip. Cecchini, 1909, vol. II.

[57] G. VAILATI 1910, *L'insegnamento della Matematica nel nuovo ginnasio riformato e nei tre tipi di licei*, in «Il Bollettino di Matematica», IX, p. 36-59, a p. 50. Sui movimenti di riforma in Europa cfr. B. BELHOSTE, H. GISPERT, N. HULIN (a cura di), *Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*, Paris, Vuibert-INRP, 1996.

[58] Cfr. per esempio G. Vailati a G. Vacca, Siracusa, 16.12.1899, EV, p. 168-169.

[59] Cfr. R. Bonola a G. Vailati, 12.6.1907, *Fondo Vailati*, Cart. 1, fasc. 18.

[60] Cfr. G. Castelnuovo a G. Vailati, s. l., 16.2.1907, D. E. Smith a Vailati, New York, 27.5. 1907 e A. Gutzmer a G. Vailati, Halle, 17.7.1907, in *Fondo Vailati*, Biblioteca di Filosofia dell'Università di Milano, rispettivamente in Cartella 2, fasc. 36, Cartella 11, fasc. 182, e Cartella 3, fasc. 87.

[61] Cfr. *Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici -Roma, 6-11 aprile 1908*, a cura di G. CASTELNUOVO, 3 voll. Roma, Accademia R. dei Lincei, 1909, I, 45, 51, III *Questioni filosofiche, storiche e didattiche*, 476-477, a p. 453; e L. GIACARDI, *Timeline*, in FURINGHETTI, GIACARDI 2008 cit.

Il miglioramento dell'organizzazione del lavoro scolastico avrebbe potuto realizzarsi se l'insegnamento di alcune materie scientifiche, e non solo, fosse stato organizzato in forma di *laboratorio*, eliminando così la *frontalità* e il *verbalismo* della lezione tradizionale. Per Vailati la "scuola come laboratorio" non deve però intendersi nel senso riduttivo di laboratorio per esperienze scientifiche, ma "come luogo dove all'allievo è dato il mezzo di addestrarsi, sotto la guida e il consiglio dell'insegnante, a sperimentare e a risolvere questioni, a [...] mettersi alla prova di fronte ad ostacoli e difficoltà atte a provocare la sua sagacia e coltivare la sua iniziativa"[62]. La lezione maieutica, il ricorso al disegno, al lavoro manuale, al gioco e l'introduzione di opportuni sussidi didattici, il metodo sperimentale operativo, la visione unitaria delle matematiche, un giusto equilibrio fra rigore e intuizione, l'uso della storia delle matematiche, sono gli aspetti salienti della visione vailatiana dell'insegnamento della matematica e realizzano quella che egli chiama "scuola come laboratorio".

Lezione maieutica, lavoro manuale e gioco

Fra le cause principali cause del cattivo funzionamento delle scuole secondarie, secondo Vailati, vi era la tendenza a concepire l'insegnamento come una conferenza, dove l'allievo non deve far altro che ascoltare, per essere poi interrogato "a scopo di diagnosi"[63], cioè per verificare se ha inteso e memorizzato ciò che ha udito. La frontalità della lezione tradizionale deve pertanto cedere il posto a una lezione basata sull'osservazione diretta e sul dialogo, la quale soltanto può dare alle parole autentico significato. Assunti positivistici e echi herbartiani si congiungono qui alla teoria pragmatistica del significato, per cui i concetti generali sono strumenti per ordinare il mondo dell'esperienza e operare su di esso, sicché il loro significato coincide con il loro valore operativo. Di qui l'importanza che Vailati annette da un lato all'*azione* nell'insegnamento e dall'altro alla lezione *maieutica* in cui l'alunno è guidato attraverso il dialogo a trovare soluzioni e risposte da solo.

Anzi, osserva Vailati, bisognerebbe che la scuola interessasse gli scolari in modo da spingerli a interrogare il loro maestro, invece di essere interrogati da lui, e per raggiungere questo scopo "non si dovrebbe temere di sminuire la dignità della scienza matematica col presentarla nella scuola sotto forme meno aride che sia possibile, ricorrendo anche, se occorre, a problemi divertenti e atti a stimolare la curiosità, non che a giuochi, come del resto consigliava già

[62] G. Vailati 1906, *Idee pedagogiche di H.G. Wells*, S III, p. 291-295, a p. 292.

[63] G. Vailati 1905, Recensione di *G. Fraccaroli. La questione della scuola*, S III, p. 284-287, a p. 287.

Platone (nelle Leggi) una ventina di secoli prima di Froebel"[64]. Gli insegnanti non dovrebbero mai dimenticare il valore del *momento ludico* nel processo dell'apprendimento, come consiglierà lo stesso Peano[65].

Il lavoro manuale, non finalizzato all'apprendimento di un mestiere può servire ad "esercitare, con tutti i mezzi a ciò più adatti, le varie facoltà di osservazione, di discriminazione, di attenzione, di giudizio"[66], e costituisce un ottimo antidoto contro l'illusione diffusa di conoscere le cose per il solo fatto di aver appreso certe parole. In quest'ottica occorre valorizzare maggiormente il disegno, il più naturale anello di congiunzione tra la teoria e la pratica. Vailati rimanda esplicitamente alle riflessioni sul tema di Rodolfo Bettazzi (1861-1941), illustre esponente anch'egli della Scuola di Peano e fondatore dell'Associazione Mathesis degli insegnanti di matematica[67].

È chiaro che in una lezione di questo tipo deve cambiare anche il modo di interrogare. Non è chiedendo allo scolaro le definizioni verbali dei concetti che l'insegnante può rendersi conto del suo livello di apprendimento, ma verificando se sia in grado di applicarli:

> Il peggior modo di assicurarsi del grado di conoscenza che un individuo, e specialmente un bambino, ha di qualche cosa, è quello di domandargli che cosa essa è. [...] Su nessun altro punto si presenta, infatti, così stridente il contrasto tra i procedimenti didattici ordinariamente seguiti e la tendenza fondamentale della psicologia moderna a riguardare i concetti generali come dei semplici strumenti (*Denkmittel*), non aventi altro compito che quello di renderci possibile ordinare, classificare, foggiare a determinati scopi, il materiale bruto delle esperienze particolari. In conformità a tale veduta, il non saper *applicare* un concetto [...] equivale a non possedere affatto il concetto stesso e a non averlo ancora acquistato, qualunque sia d'altronde l'abilità che si abbia a ripetere delle parole che pretendano definirlo o spiegarlo[68].

Il metodo sperimentale operativo

Uno dei cardini su cui si basano le proposte di Vailati è la convinzione che un metodo di insegnamento dovrebbe sempre tenere conto del fatto che il processo dell'apprendimento va dal concreto all'astratto. Gli allievi dunque non dovrebbero essere costretti ad "*imparare* delle teorie prima di *conoscere* i

[64] Cfr. G. Vailati 1899, Recensione di *C. Laisant. La Mathématique: philosophie, enseignement,* S III, p. 260-261, a p. 261.

[65] Cfr. G. Peano, *Giochi di aritmetica e problemi interessanti*, Torino, Paravia, 1924.

[66] Vailati 1901 cit., p. 265.

[67] R. Bettazzi, *La pratica nell'insegnamento della matematica*, in «Atti R. Accademia Lucchese di Sci. Lett. e Arti», 30, 1900, p. 503-528.

[68] Vailati 1905 cit., p. 280.

fatti a cui esse si riferiscono, né sentir ripetere delle *parole* prima di essere in possesso degli elementi sensibili e concreti da cui per astrazione si può ottenere il loro significato"[69]. Un insegnamento della matematica che tenga conto di queste premesse dovrebbe, secondo Vailati, avere un'impostazione sperimentale e operativa. Per esempio, nell'insegnamento della geometria, il disegno, la costruzione delle figure, il ricorso alla carta millimetrica, alla bilancia, ecc. devono costituire il punto di partenza del percorso didattico:

> Guidare e spingere l'alunno a procurarsi, per via di esperimento e, in particolare, col ricorso agli istrumenti di disegno, il più gran numero possibile di cognizioni di fatto sul modo di costruire le figure e sulle loro proprietà, soprattutto non «intuitive», è d'altra parte il miglior mezzo di far nascere in lui il desiderio e il bisogno di rendersi ragione del «come» e del «perché» tali proprietà sussistano, e di predisporlo a riguardare come interessante l'apprendimento, o la ricerca, di connessioni deduttive tra esse, e di ragionamenti che conducano a riconoscerle come conseguenze le une delle altre [70].

Di qui si comprende come nella "scuola come laboratorio" secondo Vailati, il momento "operativo" debba essere seguito, in una seconda fase dell'apprendimento, dalla ricerca delle "connessioni deduttive" e dalla sistemazione in una teoria delle conoscenza apprese. Il passaggio tra i due tipi di insegnamento, operativo sperimentale e razionale, deve essere graduale, "applicando anzitutto il ragionamento deduttivo non già a dimostrare proposizioni che agli alunni appaiano già abbastanza evidenti, o della cui verità essi si siano già convinti per via di diretta constatazione, ma piuttosto a ricavare, appunto da queste ultime, altre proposizioni che essi ancora non conoscano e che essi possano poi facilmente verificare ricorrendo agli stessi mezzi"[71]. In questo modo il procedimento deduttivo apparirà anche come strumento di scoperta.

Per quanto riguarda invece l'aritmetica, nel commento ai nuovi programmi da lui proposti, Vailati osserva, per esempio, che propinare subito agli allievi le regole del massimo comun divisore e del minimo comune multiplo significherebbe prescindere dalla comprensione delle ragioni operative da cui tali regole traggono origine e ragion d'essere. In un primo stadio è più importante concentrare quanto più è possibile l'attenzione dell'alunno sul processo di riduzione delle frazioni al comun denominatore, che a suo avviso dovrebbe essere presentato come un'applicazione immediata delle proprietà delle frazioni di

[69] VAILATI 1899 cit., p. 261.

[70] G. VAILATI 1907, *L'insegnamento della Matematica nel Primo Triennio della Scuola Secondaria*, S III, p. 302-306, a p. 305.

[71] G. VAILATI, *Sugli attuali programmi per l'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie italiane*, in *Atti del IV Congresso Internazionale dei matematici, 6-11 aprile 1908*, Roma, Tip. Accademia dei Lincei, 1909, p. 482-487, a p. 485.

non mutare valore quando se ne moltiplichi il numeratore e il denominatore per uno stesso numero, lasciando, invece, a uno stadio successivo le regole per la ricerca massimo comun divisore e del minimo comune multiplo di due o più numeri. Solo così l'allievo giungerà alla piena intelligenza dei procedimenti che costituiscono la ragion d'essere delle regole apprese, e in più sarà in grado di effettuare rapidamente con un calcolo mentale la somma e la differenza di due frazioni aventi per denominatori numeri di una sola cifra[72].

Per ogni settore della matematica Vailati invita, poi, gli insegnanti a stimolare la creatività degli allievi proponendo più dimostrazioni delle proposizioni più significative, allo scopo di mostrare loro come si possa pervenire a una stessa conclusione per vie diverse e anche con strumenti matematici differenti. Nel quadernetto di appunti relativi alle lezioni tenute nel 1901-1904 presso l'Istituto Tecnico di Como, per esempio, Vailati affronta il problema di trovare la somma dei primi n numeri naturali dispari, dei quadrati dei primi n numeri naturali e poi dei cubi, proponendo dimostrazioni di vario tipo, dirette, con l'aiuto di visualizzazioni grafiche e per induzione[73].

Un altro aspetto sottolineato da Vailati è anche l'utilità di presentare, per quanto possibile gli enunciati dei teoremi come problemi:

> gioverà anzi – egli scrive – dare alle enunciazioni stesse dei teoremi, quanto più è possibile, la forma di problemi. Così, per esempio, il teorema di Pitagora potrebbe vantaggiosamente esser presentato come una risposta al problema di trovare un quadrato la cui area equivalga alla somma delle aree di due quadrati dati, o come una risposta alla domanda di costruire, sul terreno, un angolo retto avendo a disposizione soltanto una corda che si possa dividere per esempio in dodici tratti uguali[74].

La visione unitaria delle matematiche e l'uso della storia delle matematiche per preservare l'unità del sapere

L'unità delle matematiche, secondo Vailati, non solo non deve essere mai perduta di vista, ma va inculcata o, meglio, fatta percepire subito agli allievi stabilendo, fin dalla scuola secondaria, una stretta connessione fra aritmetica, algebra e geometria.

La connessione fra aritmetica e geometria risulta del tutto naturale qualora si consideri la geometria "come campo e materia di esercitazioni aritmetiche": la soluzione dei problemi aritmetici sarà tanto più interessante per gli alunni quanto più "si presta a immediate verifiche per mezzo di misure e di confronti

[72] VAILATI 1907 cit., p. 302.

[73] G. VAILATI, *Appunti per Lezioni, Istituto Tecnico*, Como 1901-1904, *Fondo Vailati,* Cartella 38, fasc. 340.

[74] VAILATI 1910 cit., p. 38.

diretti tra le figure a cui si riferiscono"[75]. Allo stesso modo, nello studio delle frazioni e delle proporzioni, si potrà ricorrere alla "considerazione parallela delle corrispondenti operazioni grafiche relative alla divisione dei segmenti in parti eguali, o proporzionali a numeri interi"[76].

Nella conferenza tenuta nel 1908 a Roma durante il Congresso internazionale dei matematici Vailati, ribadendo l'importanza di offrire agli allievi una visione unitaria della matematica, fornisce il seguente esempio:

> Si pensi per esempio quanto più facilmente l'alunno riconoscerebbe il senso e la portata di una proposizione come questa: che "la media geometrica di due numeri non può mai superare la loro media aritmetica", quando gli si facesse osservare che, in un circolo avente per diametro la somma di due segmenti, la prima (sic) è rappresentata dal raggio, e l'altra invece dalla metà di una corda[77].

Particolarmente utile dal punto di vista didattico è anche la connessione che si può stabilire fra aritmetica e algebra, in quanto l'insegnamento della prima si presta, fin dall'inizio, a preparare a quello della seconda. Lo scopo è di condurre l'allievo a concepire l'algebra semplicemente come una nuova forma di linguaggio di gran lunga più preciso del linguaggio ordinario e in grado di "ridurre domande o problemi originariamente complicati, a forma tanto semplice da non esigere quasi più alcuno sforzo mentale per la loro risoluzione"[78].

Così pure "si deve – secondo Vailati – parlare il più presto possibile non solo di applicazioni dell'algebra alla geometria, ma anche, viceversa di applicazioni della geometria all'algebra". "Abituare fin dal principio gli alunni a riconoscere le condizioni necessarie e sufficienti perché una data espressione algebrica, una data equazione, una data identità, possano interpretarsi come esprimenti, rispettivamente, una costruzione, un problema, un teorema di geometria" è, secondo Vailati, uno dei mezzi più efficaci per prepararli a comprendere il significato e l'utilità delle formule"[79].

Questi accorgimenti didattici consentirebbero ai giovani non solo di acquisire consapevolezza dell'unità profonda delle matematiche, ma anche di imparare ad affrontare uno stesso problema con vari metodi, scegliendo di volta in volta, quello più conveniente, e verrebbero così ad essere un vero e proprio avviamento alla creatività e alla ricerca. Nella conferenza tenuta in occasione del II Congresso dell'Associazione Mathesis a Livorno nel 1901, Vailati stesso offre un esempio di come si possano utilmente collegare due parti apparentemente distanti della matematica, la teoria della proporzioni fra segmenti e

[75] *Ibidem*. p. 38.
[76] *Ibidem*.
[77] Vailati 1909 cit., p. 487.
[78] Vailati 1910 cit., p. 40; si veda anche G. Vailati a G. Vacca, Crema 20.7.1902, EV, p. 207.
[79] Vailati 1910 cit., p. 57.

quella dell'equivalenza di figure piane, evitando in tal modo le difficoltà inerenti la considerazione di segmenti incommensurabili[80].

Vailati non solo ritiene che si debba offrire agli allievi una visione unitaria della matematica, ma crede fondamentale che la scuola faccia loro comprendere la profonda unità fra cultura umanistica e scientifica. La visione storica dei problemi e delle dottrine può, insieme alla filosofia, costituire una delle vie per raggiungere il dialogo fra le due culture, esigenza questa che egli sente profondamente[81]. Il metodo storico, applicato tanto alle scienze quanto allo studio del latino e del greco, assume in Vailati anche una funzione didattica perché particolarmente adatto a "spedantizzare la loro forma di esposizione, con gran vantaggio del profitto diretto e dell'educazione intellettuale degli alunni"[82]:

> A nessuno – egli scrive – che abbia avuto occasione di trattare in iscuola, davanti a dei giovani, qualunque soggetto che si riferisca alle parti astratte e teoriche della matematica, può essere sfuggito il rapido cambiamento di tono che subisce l'attenzione e l'interessamento degli studenti ogni qualvolta l'esposizione … lascia luogo a delle considerazioni d'indole storica… Di questo appetito sano e caratteristico delle menti giovani … è certamente desiderabile trarre il maggior partito possibile. Utilizzarlo intelligentemente vuol dire rendere l'insegnamento più proficuo e nello stesso tempo più gradevole, più efficace e insieme più attraente.[83]

Lo studio della storia della scienza, in particolare, può svolgere, secondo Vailati, un ruolo più ampio nell'insegnamento: educativo e formativo. Egli riprende il concetto vichiano secondo il quale conoscere un problema significa conoscerne la storia e, influenzato dall'epistemologia di Mach, attribuisce alla conoscenza storica dell'origine e dello sviluppo dei concetti e delle teorie della scienza il valore di antidoto contro ogni forma di dogmatismo. Infatti essa ci mostra come "quelli che noi chiamiamo preconcetti non sono che le dottrine e le teorie scientifiche corrispondenti ad uno stadio anteriore di sviluppo delle conoscenze umane" e ci preserva dal credere che, poiché "un'ipotesi o una teoria è stata utile e feconda in passato deve per ciò solo continuare a rimaner

[80] Cfr. G. Vailati 1902a, *Di un modo di riattaccare la teoria delle Proporzioni fra Segmenti a quella dell'Equivalenza*, S II, p. 360-363; si veda anche G. Vailati a G. Vacca, Crema 26.7.1901, EV, p. 191.

[81] Questa sua esigenza si traduce nel tentativo di unificare gli sforzi, compiuti in Italia in campo scientifico, tesi a superare le barriere fra un settore d'indagine e l'altro: cfr. G. Vailati 1902b, *Scienza e filosofia*, S I, p. 3-6. Cfr. anche L. Geymonat, *Presentazione*, S I, p. VI, M. Quaranta, *Le letture di Giovanni Vailati nella cultura italiana (1911-1986)*, S I, p. VIII-X, A. Guerraggio, *Il pensiero matematico di Giovanni Vailati*, S II, p. XVII-XVIII.

[82] Vailati a Vacca, 25.5.1901, EV, p. 187.

[83] G. Vailati 1897, *Sull'importanza delle ricerche relative alla Storia delle Scienze*, S II, p. 3-17, a p. 10.

tale anche per l'avvenire"[84].

L'insegnante può accostare i giovani alla storia delle scienze attraverso letture commentate di passi dei classici: Vailati stesso leggeva e spiegava ai suoi studenti pagine tratte dagli *Elementi* di Euclide[85]. Per rendere possibile un tale tipo di insegnamento egli auspicava anche che le scuole fossero dotate di biblioteche ben organizzate, comprendenti non solo libri di testo, ma anche opere divulgative chiare e concise, libri di orientamento allo studio, edizioni delle opere dei grandi autori, enciclopedie, ecc.[86].

Giusto equilibrio fra rigore e intuizione

Nei suoi scritti Vailati sembra voler evitare ogni netta contrapposizione tra "intuizione" e "rigore" e, in particolare, nell'articolo *L'insegnamento della Matematica nel primo triennio della Scuola Secondaria*[87], dove illustra i nuovi programmi di matematica, egli, richiamando i recenti progressi nel campo dei fondamenti della geometria, cerca di spiegare come il rigore non consista nel "numero" o nella "qualità" dei presupposti delle dimostrazioni, i quali potranno essere anche piuttosto numerosi, ma nel riconoscimento esplicito del loro carattere di postulati o ipotesi e nel modo in cui sono impiegati. L'unica condizione assolutamente imprescindibile per il rigore delle dimostrazioni è che i postulati siano tra loro compatibili. Solo quando gli allievi avranno acquisito un maggiore grado di maturità, si mostrerà loro se e quanto il loro numero possa essere ridotto, conseguendo una maggiore *essenzialità* nelle costruzioni ipotetico-deduttive[88].

Ben lontano dallo scoraggiare l'intuizione geometrica, Vailati intende in tal modo "disciplinarla ed educarla" al fine di evitare gli errori cui può dare origine "la fiducia inconsiderata e istintiva in essa"[89]. Nella recensione al manuale di geometria razionale di G.B. Halsted, basato sull'opera di Hilbert sui fondamenti della geometria, Vailati mostra invece gli inconvenienti didattici a cui può condurre "la preoccupazione di garantire l'assoluto rigore e la perfetta coerenza logica delle dimostrazioni depurandole da ogni suggestione intuitiva"[90]. Nella prassi didattica occorre dunque trovare un giusto equilibrio

[84] G. Vailati 1896, Recensione di *E. Mach. Populär-Wissenschaftliche Vorlesungen*, S I, p. 141-143 e p. 144-147, a p. 147.

[85] Cfr. G. Vailati, *Lib. V*, in *Fondo Vailati,* Cartella 38, fasc. 340.

[86] Vailati 1906 cit., p. 291-295, alle p. 293-294.

[87] Cfr. Vailati 1907 cit..

[88] *Ibidem*, p. 305-306.

[89] G. Vailati 1904, Recensione di *F. Enriques U. Amaldi. Elementi di Geometria ad uso delle scuole secondarie superiori,* S III, p. 267-273, a p. 268.

[90] G. Vailati 1905, Recensione di *G.B. Halsted. Rational Geometry. A textbook for the sci-*

fra intuizione e rigore.

La deduzione, inoltre, deve avere per Vailati un ruolo più ampio di quello che generalmente le viene attribuito. Le metafore che rappresentano la deduzione come un processo diretto a "estrarre" dalle premesse ciò che vi è già contenuto tendono a sminuirne l'importanza rispetto agli altri processi di ragionamento e di ricerca.

> La storia delle scienze – egli scrive – ci mostra chiaramente che, tra le cause che hanno condotto gradualmente alla sostituzione dei moderni metodi sperimentali al posto degli antichi metodi di semplice osservazione passiva, va annoverata, come una delle più importanti, l'applicazione della deduzione anche a quei casi nei quali le proposizioni prese come punto di partenza erano considerate come più bisognevoli di prova che non quelle a cui si arrivava, e nei quali quindi erano queste ultime che dovevano comunicare, alle congetture fatte, la certezza che attingevano direttamente dal confronto coi fatti e dalle verifiche sperimentali[91].

Ecco dunque in cosa consistono il valore e l'efficacia euristica della deduzione secondo Vailati: partire da premesse solo ipotetiche può servire a costruzioni ideali con cui confrontare la realtà e in cui premesse e conseguenze possono confermarsi le une con le altre, in un "reciproco controllo" e "vicendevole appoggio"[92], "allo stesso modo come la corda colla quale si legano tra loro degli alpinisti in una ascensione pericolosa serve tanto a garantire la sicurezza dell'ultimo come del primo di essi, o di qualunque altro di quelli che ne sono avvinti"[93].

Le riflessioni di Vailati insieme con gli appunti delle lezioni da lui tenute nelle scuole secondarie illustrano un laboratorio di matematica con un significato più ampio rispetto alle varie accezioni cui abbiamo accennato precedentemente: è un laboratorio che coinvolge persone – gli allievi e l'insegnante – strutture (aule, attrezzature, strumenti, …), metodi di lavoro, sperimentazioni, letture ragionate, ma anche ricerca di nuove deduzioni o dimostrazioni, di modi diversi di interpretare uno stesso risultato. In esso si opera con le mani e con la mente a partire da problemi e si abitua l'allievo a usare oggetti concreti e strumenti, a misurare, ma anche "misurarsi", a comunicare le proprie ipotesi, a proporre nuove soluzioni, nuove dimostrazioni, in uno stretto connubio fra l'aspetto sperimentale e quello teorico, senza dimenticare la formazione del carattere.

ence of Space, based on Hilbert's foundations, S III, p. 288-290, a p. 289.

[91] G. Vailati 1898, *Il metodo Deduttivo come Strumento di Ricerca*, S II, p. 18-48, a p. 25.

[92] *Ibidem*, p. 42. Cfr. anche G. Vailati a F. Brentano, Como 16.4.1904, EV, p. 305.

[93] G. Vailati 1905, *I tropi della Logica*, S I, p. 21-28, a p. 25.

Conclusioni

Nel 1909 veniva pubblicato il Progetto di riforma della Commissione Reale e, nel maggio di quello stesso anno, Vailati moriva. Pochi mesi dopo, durante il congresso della Mathesis, tenutosi a Padova dal 20 al 23 settembre 1909, Guido Castelnuovo (1865-1952), membro insigne della scuola italiana di geometria algebrica, nella sua relazione sui lavori dell'ICMI, aveva parole di elogio per le proposte di riforma elaborate dalla "mente vasta e spregiudicata" di Vailati e proponeva agli insegnanti di attuarne da subito nelle loro classi le linee generali. Anche all'estero tali proposte erano considerate innovative e sulla scia del movimento riformatore di Klein[94].

Tuttavia la riforma elaborata dalla Commissione Reale non fu varata. Parte delle proposte di Vailati furono attuate nel 1911 con la creazione del Liceo moderno che divergeva dal classico a partire dalla seconda liceo e dove il greco era sostituito da una lingua moderna e le discipline scientifiche erano maggiormente valorizzate; non è un caso che a redigere i programmi e le relative istruzioni metodologiche sia stato proprio Castelnuovo[95]. Quella del liceo moderno fu però un'esperienza effimera. Con la Riforma Gentile del 1923 la riorganizzazione della scuola secondaria fu introdotta in termini completamente differenti sulla base delle nuove correnti politiche e del trionfante Neoidealismo.

Vari fattori impedirono che la "scuola come laboratorio" proposta da Vailati diventasse una pratica diffusa e si concretizzasse in libri di testo: innanzitutto, diversamente da Perry Vailati non ne fece una esposizione sistematica e, inoltre, la sua morte prematura interruppe i possibili sviluppi. Il fatto poi che la riforma proposta dalla Commissione Reale non sia stata approvata e che la successiva Riforma Gentile abbia posto al centro della formazione le discipline umanistiche, non favorì certo la sperimentazione di nuovi metodi di insegnamento nelle scuole secondarie.

La caratterizzazione che Vailati dà della "scuola come laboratorio" rimane però quanto mai attuale ed è stata ripresa di recente nei curricoli di matematica proposti dalla Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica (CIIM) dove si legge:

[94] Cfr. F. Cajori, *Attempts made during the eighteenth and nineteenth centuries to reform the teaching of geometry*, in «The American Mathematical Monthly», XVII, 1910, p. 192. Si veda anche W. Lietzmann, *Die Grundlagen der Geometrie im Unterricht (mit besonderer Berücksichtigung der Schulen Italiens)*, «Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht», XXXIX, 1908, p. 181.

[95] Si veda L. Giacardi (a cura di) 2006, *Da Casati a Gentile. Momenti di storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia*, La Spezia, Agorà e *Documenti per la storia dell'insegnamento della matematica in Italia (1859-1923)*, www.subalpinamathesis.unito.it/storiains/it/documenti.php.

> Il *laboratorio* di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di *significati* degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni)[96].

È una metodologia basata su *problem solving*, congetture e argomentazioni, ma il cui fine ultimo è quello di pervenire alla costruzione di significati e a una sistemazione teorica della matematica, come Vailati auspicava.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare Ferdinando Arzarello, Mariolina Bartolini Bussi e Ornella Robutti per le proficue discussioni sul tema del laboratorio di matematica, Mauro De Zan, Hélène Gispert, Geoffrey Howson, Fabio Minazzi, Michael Price, Mario Quaranta e Gert Schubring per gli utili suggerimenti o per i materiali inviatimi, e infine Laura Garbolino per il costante aiuto nella ricerca bibliografica.

[96] *Matematica 2003. La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica. Ciclo secondario*, Lucca, Liceo Scientifico Statale "A. Vallisneri, 2003, p. 28.

G. Peano con un gruppo di insegnanti delle *Conferenze Matematiche Torinesi*.

Archivi

Mario Pieri, studente di Enrico Betti, 1882-1884. I quaderni di Lezioni conservati a Lucca

luca dell'aglio, clara silvia roero

Introduzione

Nella Biblioteca statale di Lucca, presso la sezione Manoscritti, sono conservati alcuni quaderni di Lezioni, autografi del matematico lucchese Mario Pieri (1860-1913), che sono stati donati alla biblioteca dalla figlia dello storico Gino Arrighi (1906-2001) dopo la morte del padre, per ottemperare alle sue volontà.

Mario Pieri fu uno dei principali membri delle Scuole torinesi di Corrado Segre (1863-1924) e di Giuseppe Peano (1858-1932). Nel capoluogo piemontese soggiornò, con la madre e la sorella, dal 1886 al 1900, come professore di Geometria proiettiva all'Accademia militare e all'Università[1]. A Torino pubblicò nel 1889, presso l'editore Bocca, la traduzione italiana della *Geometrie der Lage* di Karl von Staudt e una serie di memorie e di articoli sulla geometria enumerativa, sui fondamenti della geometria proiettiva e della geometria elementare e collaborò al *Formulaire de Mathématique* di G. Peano e alla *Rivista di Matematica*, da lui diretta.

Lo storico lucchese Arrighi ricevette in dono da Gaetano Campetti, nipote di Pieri, per via materna (il matematico era fratello di sua madre Gemma), vari documenti che erano rimasti nella villa di Sant'Andrea di Compito (Lu), dove Mario Pieri morì il 1 marzo 1913. Fra questi documenti vi erano i taccuini delle lezioni universitarie di E. Betti relative ai corsi che Pieri frequentò a Pisa negli anni 1882-83 e 1883-84. Purtroppo non tutto il lascito descritto da Arrighi nel

[1] Una biografia di Mario Pieri (1860-1913), corredata dell'elenco delle pubblicazioni, è edita da Erika Luciano e C. Silvia Roero, nel volume *Peano e la sua Scuola fra Matematica, Logica e Interlingua. Atti del Congresso Internazionale di Studi (Torino 6-7 ottobre 2008)*, a cura di C. S. Roero, Torino, CSSUT, Studi e Fonti XVII, DSSP, 2010, p. 6-16 e, in versione italiana e inglese, nel sito www.peano2008.unito.it, sezione *La Scuola di Peano*. Alla figura e all'opera di M. Pieri sono stati dedicati recentemente molti studi, richiamati nella Bibliografia del profilo qui citato.

1981, nel saggio *L'Archivio di Mario Pieri*, edito dall'Accademia Lucchese di Scienze, Lettere e Arti, Studi e Testi XV, è attualmente reperibile presso la Biblioteca statale di Lucca. Nel magma disordinato di documenti, fotografie di manoscritti medioevali, antichissimi atti notarili, corrispondenze di Arrighi, ritagli di giornali e carte varie in possesso dello storico della matematica, ora conservate in quella Biblioteca, nel lascito di G. Arrighi, non abbiamo trovato né gli originali dei carteggi di Mario Pieri, pubblicati nel 1997 nel fascicolo *Lettere a Mario Pieri*, a cura di G. Arrighi (Milano, Quaderno Pristem n. 6), né gli autografi n.1-6, 10-11, e neppure gli attestati, i premi i diplomi e le pagelle, indicate nell'elenco dell'Archivio di M. Pieri, «ordinato e inventariato dalla sig.na Carla Simonetti, bibliotecaria»[2].

In questa sede ci limiteremo dunque a descrivere brevemente i quadernetti ritrovati di appunti nei quali Mario Pieri registrò le lezioni del professor Enrico Betti, all'Università di Pisa, negli a.a. 1882-83 e 1883-84.

Prima di accingerci a questo compito desideriamo ringraziare il prof. Francesco Barbieri, segretario dell'Accademia nazionale di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, per averci messo in contatto con la signora Leonetta Arrighi Cervo, figlia dello storico. Un sentito e doveroso ringraziamento rivolgiamo inoltre al direttore dr. Marco Paoli della Biblioteca statale di Lucca e all'archivista dr.ssa Danila Andreoni per averci consentito di consultare il lascito di Gino Arrighi[3], pur essendo i materiali ancora da riordinare e catalogare, e per i controlli effettuati sulle nostre trascrizioni.

[2] G. ARRIGHI, *L'Archivio di Mario Pieri*, in «Accademia Lucchese di Scienze, Lettere e Arti», Studi e Testi XV, 1981, p. 5-18, in particolare p. 5, 17-18.

[3] Per gli studiosi di storia delle matematiche il lascito di G. Arrighi è di particolare interesse perchè getta luce sugli insegnamenti matematici all'Università di Pisa nel XIX secolo, sui codici medioevali e rinascimentali, oggetto delle ricerche di Arrighi, e infine sulla rete di corrispondenti italiani ed esteri dello storico lucchese. Nato a Lucca nel 1906, Gino Arrighi si laureò in Matematica a Pisa nel 1928 e in Ingegneria Navale e Meccanica a Napoli nel 1931. Assistente volontario di Meccanica razionale a Napoli e poi di Astronomia a Pisa, svolse per un certo periodo attività di ricerca e conseguì nel 1934 la libera docenza in Meccanica razionale. Testimoni di quest'attività degli anni '30 del XX secolo sono alcuni articoli apparsi su riviste specialistiche e in Atti di Accademie, come pure gli scambi epistolari con G. Peano, Guido Ascoli, T. Levi-Civita, R. Marcolongo, T. Boggio, E. Daniele ed altri, conservati nel suo lascito presso la Biblioteca di Lucca. Insegnante nelle scuole secondarie, Arrighi fu un appassionato cultore di storia locale, dedito in particolare alle fonti della matematica medioevale. Come riferì egli stesso in una delle ultime interviste iniziò ad occuparsi di questi temi negli anni '50, sollecitato dal bibliotecario dell'Arcivescovado di Lucca che gli mostrò un codice del XII secolo (cfr. *Intervista a Gino Arrighi*, a cura di PAOLO PAGLI, LAURA TOTI RIGATELLI, in «Lettera matematica Pristem» 26, 1997, p. 22-26). Negli anni '90 ad Arrighi furono dedicati una giornata di studi all'Accademia nazionale di Scienze, Lettere e Arti di Modena e il volume *Itinera Mathematica Studi in onore di Gino Arrighi per il suo 90° compleanno*, a cura di Raffaella Franci, Paolo Pagli e Laura Toti Rigatelli (Siena, Centro Studi sulla Matematica Medioevale, Università 1996). Una raccolta di suoi articoli è apparsa nel 2004 col titolo *Gino Arrighi La matematica dell'età di mezzo Scritti scelti*, a cura di Francesco Barbieri, Raffaella Franci e Laura Toti Rigatelli, Pisa, ETS.

Mario Pieri alla Scuola di E. Betti

Enrico Betti (1823-1892) rappresenta, come è noto, una delle principali figure della scienza e, in particolare, della matematica italiana del secondo Ottocento. Ciò è dovuto sia alla sua attività di ricerca propriamente detta che al ruolo svolto sul piano didattico e organizzativo a Pisa, soprattutto come direttore della Scuola Normale Superiore, dove continuò ed estese quanto fatto dal suo maestro, Ottaviano F. Mossotti (1791-1863)[4].

Sul piano strettamente scientifico, le ricerche di Betti si sviluppano secondo alcune fasi distinte. Una prima fase, risalente alla prima parte degli anni '50, riguarda prevalentemente questioni di carattere algebrico; ambito in cui si situano in particolare i suoi studi sulla teoria di Galois[5]. In una seconda fase, a cavallo tra gli anni '50 e '60, Betti si occupò di questioni di carattere analitico, e soprattutto della teoria delle funzioni ellittiche. In seguito, sotto l'influenza di Bernhard Riemann (1826-1866) – che soggiornò più volte in Italia nella prima parte degli anni '60, esercitando un enorme influsso sulla matematica italiana post-unitaria –, le ricerche di Betti presentano un generale spostamento verso argomenti di carattere fisico-matematico e meccanico, su cui continuò a lavorare nei decenni seguenti. Sempre risentendo dell'influenza di Riemann, appartiene a questo periodo anche un suo rilevante contributo alla allora nascente topologia algebrica.

L'attività didattica di Betti segue, in modo connesso, lo sviluppo delle sue ricerche scientifiche, riflettendone spesso i contenuti e presentando dunque un carattere fortemente innovativo. In effetti, dopo un periodo iniziale di insegnamento presso i Licei di Pistoia e di Firenze, i primi corsi di Betti a Pisa hanno luogo in ambito algebrico e analitico: a partire dal 1857 insegnando Algebra Superiore e poi, dal 1859, tenendo il corso di Analisi e Geometria Superiore. Dall'inizio degli anni '60 i corsi di Betti si spostano su argomenti di carattere fisico-matematico, tenendo a partire dal 1863-1864 la cattedra di Fisica Matematica, che era stata di Mossotti, e poi per incarico, in diversi periodi, gli insegnamenti di Meccanica Razionale e di Meccanica Celeste.

I corsi di Betti di Fisica Matematica, a seconda degli anni accademici, spaziavano su un ampio spettro di tematiche, tra cui la teoria del potenziale,

[4] Indicazioni biografiche su Betti si trovano in: U. Bottazzini, *Enrico Betti e la formazione della Scuola Matematica Pisana*, in *Atti del Convegno "La Storia delle Matematiche in Italia" (Cagliari, 1982)*, Bologna, Tip. Monograf., p. 229-276; E. Padova, *Commemorazione di Enrico Betti*, in «Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti» s. 7, t. IV, 1892-1893, p. 609-621; N. Virgopia, *Betti, Enrico*, in *Dizionario Biografico degli Italiani*, vol. 9, Roma, Istituto dell'Enciclopedia Italiana, 1967, p. 714-716.

[5] I. Nagliati, *Le prime ricerche di Enrico Betti nel carteggio con Mossotti*, in «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche» XX, 2000, p. 3-85.

la teoria del calore, la teoria dell'elasticità, l'idrodinamica, l'elettrostatica, il magnetismo e l'elettrodinamica. In particolare, alla teoria del potenziale è dedicata una delle opere più rilevanti di Betti e dell'intero ambiente matematico italiano della seconda metà dell'Ottocento, il volume *Teorica delle forze newtoniane e sue applicazioni all'elettrostatica e al magnetismo* che, dopo essere stato pubblicato in una versione embrionale tra il 1863 e il 1864 su «Il Nuovo Cimento»[6], uscì nel 1879 presso le edizioni Nistri di Pisa, ricevendo anche una traduzione tedesca nel 1885[7].

All'inizio degli anni '80, quando Pieri era studente a Pisa, l'attività didattica di Betti era dunque tutta incentrata su questioni di carattere fisico-matematico. Più in dettaglio, nel 1881, dopo un anno trascorso all'Università di Bologna, Pieri aveva vinto il concorso di ammissione alla Scuola Normale e nei tre anni successivi, fino al 1884, egli seguì vari corsi sia presso tale Scuola che presso l'Università di Pisa. Tra questi Pieri frequentò, in particolare, alcuni corsi tenuti da Betti: il corso di Meccanica Razionale durante l'anno accademico 1882-1883 e i corsi di Fisica Matematica e di Meccanica Celeste durante quello successivo[8]. Sono questi i corsi cui si riferiscono i quaderni di appunti di Pieri e il loro notevole interesse sta proprio nel fatto di trasmettere il contenuto di numerose lezioni tenute da Betti all'inizio degli anni '80. Si tratta di una circostanza piuttosto preziosa da un punto di vista storico-archivistico, soprattutto qualora tali materiali vengano messi a confronto con le carte presenti nell'Archivio Betti presso la Biblioteca della Scuola Normale Superiore, che riguardano in gran parte la sua attività didattica e che sfortunatamente sono conservate in uno stato di riordino molto parziale[9].

I Quaderni di Lezioni

Mario Pieri, *Lezioni di Meccanica Razionale del Prof. E. Betti*, *Libretto I, 1882.*

Quaderno di appunti autografi, con copertina azzurra, composto di 50 carte. Un'etichetta bianca, con contorno rosso, è posta sul frontespizio e reca il titolo autografo, sopra trascritto in corsivo. Le altre scritte sono poste sulla copertina in alto. Le cinque pagine iniziali del quaderno risultano tagliate; le restanti recano talvolta

[6] E. Betti, *Teorica delle forze che agiscono secondo la legge di Newton e sua applicazione alla elettricità statica*, in «Il Nuovo Cimento» s. 1, t. XVIII, 1863, p. 385-402; t. XIX, 1864, p. 59-75, 77-95, 149-175, 357-377; t. XX, 1864, p. 19-39, 121-141.

[7] Stuttgart, Verlag von Wilhelm Kohlhammer, 1885.

[8] Cfr. E.A. Marchisotto, J.T. Smith, *The Legacy of Mario Pieri in Geometry and Arithmetic*, Boston, Birkhäuser, 2007, p. 12.

[9] U. Bottazzini, *The Mathematical Papers of Enrico Betti in the Scuola Normale Superiore of Pisa*, in «Historia Mathematica» 4, 1977, p. 207-209.

la numerazione, posta in alto solo sulla carta o pagina di destra[10]. Gli argomenti indicati nei titoli sono:

Formole di Geometria analitica, p. 6r-8v;
Lezioni di Meccanica
Lez.^{e} 1^a Moto di un punto sopra la linea retta, p. 9r-14r.
Lez.^{e} 2^a Composizione e decomposizione delle velocità e delle accelerazioni, p. 14r-16v.
Lez.^{e} 3^a Moto di un punto sopra una linea, p. 17r-22r.
Lez.^{e} 4^a Moto di un punto sopra una superficie, p. 22v-24v.
Segue la Lez.^{e} 3^a, p. 25r-26v.
Lez.^{e} 5^a Moto di una figura piana nel suo piano, p. 26v-30v.
Lez.^{e} 6^a Moto di un solido qualunque, p. 31r-36v.
Lez.^{e} 7^a Abbiamo trovato ..., p. 36v-43v.
Lez.^{e} 8^a Dati sufficienti alla determinazione del moto di un solido qualunque, p. 44r-50v. L'ultima carta 50r-v contiene il testo della *Nota* (**) richiamata da Pieri a p. 49r.

Mario Pieri, *Lezioni di Meccanica razionale del Prof. Enrico Betti*, Libretto II, R. Università di Pisa 1882-83.

Quaderno di appunti autografi, con copertina azzurra, composto di 40 carte. Un'etichetta bianca, con contorno rosso, è posta sul frontespizio e reca il titolo autografo. Le altre scritte sono poste sulla copertina in alto e in basso. Pieri prosegue il testo della *Lez.^{e} 8^a* del precedente Libretto, a p. 49v. Non ci sono carte numerate e il prosieguo della lezione 8 è alle p. 1r-4r, la p. 4v è bianca.

Lez.^{e} 9^a Forze di gravità e forze Newtoniane, p. 5r-13r.
Lez.^{e} 10^a Moto di un sistema di elementi materiali che ha una libertà illimitata, p. 13r-18r.
Lez.^{e} 11^a Moto di un sistema di elementi materiali con un grado limitato di libertà, p. 18v-23v.
Lez.^{e} 12^a «Studiamo ora il caso più generale di legami qualunque...», p. 24r -27r.
Lez.^{e} 13^a Conservazione dell'energia. Teorema di Hamilton. Forma canonica delle equazioni della dinamica, p. 27v-33v, fra le quali si trova un foglio sciolto, con un appunto autografo sull'equazione di Lagrange-Hamilton.
Lez.^{e} 14^a Del pendolo semplice, p. 34r-39v, fra le quali si trova un foglio sciolto, con un appunto autografo sull'integrazione.
Lez.^{e} 15^a Della Brachistocrona, p. 40r-40v.

[10] Si tratta delle carte 6-10, per cui indicheremo con 6r e 6v le due facce della carta, e così di seguito per tutte le altre.

Mario Pieri, *Lezioni di Meccanica razionale del Prof. Enrico Betti*, Libretto III, R. Università di Pisa 1882-83.

Quaderno di appunti autografi, con copertina azzurra, composto di 42 carte. Il titolo e le altre indicazioni sono vergate direttamente sulla copertina.
Nell'interno Pieri prosegue il testo della *Lez.^e^ 15^a^* del precedente Libretto, p. 1r-2v.

Lez.^e^ 16^a^ Dei moti relativi, p. 3r-5r
*Lez.^e^ 17^a^* (Segue lezione), p. 5v-10r; sono bianche le p. 11 e 12r.
Lez.^e^ 18^a^ Moto del pendolo semplice, tenendo conto della rotazione terrestre, p. 12v-17r, la p. 17v è bianca.
Lez.^e^ 19^a^ Dinamica di un corpo rigido, p. 18r-23r.
*Lez.^e^ 20^a^* (Segue l'argomento), p. 23r-26r.
Lez.^e^ 21^a^ Pendolo composto, p. 26r-32v.
*Lez.^e^ 22^a^* Segue l'argomento, p. 32v-36v.
*Lez.^e^ 23^a^* Segue l'argomento, p. 37v-42v.

Mario Pieri, *Lezioni di Meccanica razionale del Prof. Enrico Betti*, Libretto IV, R. Università di Pisa 1882-83.

Quaderno di appunti autografi, con copertina azzurra, composto di 25 carte. Il titolo e le altre indicazioni sono vergate direttamente sulla copertina.
Nell'interno Pieri prosegue il testo della *Lez.^e^ 23^a^* del precedente Libretto, p. 1r-2v.

Lez.^e^ 24^a^ Forze d'Impulso, p. 3r-4r. Qui l'argomento prosegue con diversa grafia in fogli sciolti, cc. 1-6: testo su 1r-:3r. [Le cc. 3v-6v sono bianche]; riprende la numerazione del libretto rilegato con la carta n. 5, che ha solo una riga di testo, le cc. 5v-11r sono bianche.
Lez.^e^ 26^a^ Urto dei corpi, p. 11v-15r.
*Lez.^e^ 27^a^* Segue l'argomento, p. 15v-18v. [c. 19r-19v bianca]
Lez.^e^ 28^a^ Equilibrio di un filo flessibile e inestendibile, p. 20r-24v.
c. 25r sciolta contiene una serie di calcoli.

Mario Pieri, *Lezioni di Meccanica razionale del Prof. Enrico Betti*, Libretto V, R. Università di Pisa 1882-83.

Quaderno di appunti autografi, con copertina azzurra, composto di 24 carte. Il titolo e le altre indicazioni sono vergate direttamente sulla copertina. Nell'interno Pieri prosegue il testo del precedente Libretto, con le seguenti:

Lez.^e^ 29^a^ Equilibrio di una superficie flessibile e inestendibile, p. 1r-7v.
Lez.^e^ 30^a^ Equilibrio dei fluidi incompressibili, p. 8v-11v.
Lez.^e^ 31^a^ Moto dei fluidi incompressibili, p. 12r-15v.
*Lez.^e^ 32^a^* Segue l'argomento precedente, p. 16r-22v. [La c. 20 è un frammento]

Lez.^e 33^a Propagazione delle onde alla superficie di un liquido pesante indefinito, p. 23r-24v.

MARIO PIERI, *Lezioni di Meccanica Razionale del Prof. Enrico Betti*, Libretto VI, R. Università di Pisa 1882-83.

Quaderno di appunti autografi, con copertina azzurra, composto di 27 carte. Il titolo e le altre indicazioni sono vergate direttamente sulla copertina.
Nell'interno Pieri prosegue il testo della Lezione 33ª del precedente Libretto, p. 1r-4v, e continua con

Lez.^e 34^a Equilibrio di un fluido elastico, p. 5r –10r.
Lez.^e 35^a Moto di un fluido elastico, p. 10v-14v. Le pagine restanti sono bianche.
Al termine del quaderno è inserito un fascicolo sciolto, di 18 carte, autografo, con i titoli:
Lezione 26 Maggio, p. 1r-3v;
Lezione 28 Maggio, p. 3v-6r;
Lezione 30 Maggio, p. 6r-7r;
Lezione 2 Giugno, p. 7r-9v;
Lezione 6 Giugno, p. 9v-12r;
Lezione 7 Giugno, p. 12r-14v;
Lezione 9 Giugno, p. 15r-17r;
Lezione 10 Giugno, p. 17r-18v.

MARIO PIERI, *Lezioni di Fisica Matematica del Prof. Enrico Betti*, Libretto I, R. Università di Pisa 1883-84.

Quaderno di appunti autografi, con copertina blu, composto di 25 carte. Il titolo e le altre indicazioni sono vergate direttamente sulla copertina. Indice del contenuto:

Lezione 1^a - 13 Novembre 1883 – Termodinamica, p. 1r-4r.
Lezione 2^a - 15 Novembre 1883, p. 4r-6r.
Lezione 3^a - 17 Novembre 1883, p. 6r-9r.
Lezione 4^a - 22 Novembre 1883, p. 9v-12r [La c.10 è un sottile frammento]
Lezione 5^a - 24 Novembre 1883, p. 12r-15r.
Lezione 6^a - 27 Novembre, p. 15r-17r.
Lezione 7^a, p. 17r-19r, incipit «La termodinamica è fondata sui due principi: quello dell'energia e quello di Clausius». È incollata la p. 17v-18r.
Lezione 8^a [senza titolo né data] p. 19r-21r.
Lezione 9^a - 4 Dicembre, p. 21v-23v.
Lezione 10^a - 5 Dicembre, p. 23v-25r.
Lezione 11^a - 17 Dicembre, p. 25r-25v.

MARIO PIERI, *Lezioni di Fisica Matematica del Prof. Enrico Betti*, Libretto 2°, R. Università di Pisa 1883-84.

Quaderno di appunti autografi, con copertina verde, composto di 18 carte. Il titolo e le altre indicazioni sono vergate direttamente sulla copertina. Pieri prosegue, senza alcuna indicazione, i suoi appunti della lezione precedente, p. 1r-3r. Indice del successivo contenuto:

Lezione 15 Gennaio - Fisica Matematica - p. 3r-5r.
Lezione 17 Gennaio - Fisica Matematica - p. 5r-6r.
Lezione 19 Gennaio - Fisica Matematica - p. 6r-8r.
Lezione 25 Gennaio - Fisica Matematica - p. 8v-9v.
Lezione 27 Gennaio - Fisica Matematica - p. 9v-12v.
Lezione 29 Gennaio - Fisica Matematica - p. 12v-13r.
Lezione 31 Gennaio - Fisica Matematica - p. 13r-15r.
Lezione 2 Febbraio - Fisica Matematica - p. 15r-17r.
Lezione 5 Febbraio - Fisica Matematica - p. 17r-18v.

MARIO PIERI, *Lezioni di Fisica Matematica del Prof. Enrico Betti*, Libretto 3°, R. Università di Pisa 1883-84.

Quaderno di appunti autografi, con copertina verde, composto di 15 carte. Il titolo e le altre indicazioni sono vergate direttamente sulla copertina. Indice del contenuto:

Lezione 6 Febbraio - Fisica Matematica - p. 1r-2r.
Delle funzioni potenziali, p. 2r-3v.
Trasformazione del $\Delta^2 V$ *in coordinate ortogonali qualunque*, p. 3v-5v.
Lezione 14 Febbraio, p. 5v-7r.
Lezione 16 Febbraio - Fisica Matematica, p. 7v-9r.
Lezione 19 Febbraio, *Potenziale*, p. 9v-11r.
Lezione 29 Febbraio, *Potenziale*, p. 11r-12v.
Lezione 5 Marzo, p. 12v-14r.
Lezione 8 Marzo, *Teoria di Green*, p. 14v-15v.

MARIO PIERI, *Lezioni di Fisica Matematica (Teoria degli strumenti ottici) del Prof. Enrico Betti*, Libretto 1°, *Strumenti ottici*, R. Università di Pisa 1883-84.

Quaderno di appunti autografi, con copertina rosa, composto di 12 carte. Il titolo e le altre indicazioni sono vergate direttamente sulla copertina. Indice del contenuto:

Lezione 27 Febbraio, p. 1r-4v.
Lezione 6 Marzo, p. 4v-6r.
Lezione 11 Marzo, p. 6r-9r.
Lezione 18 Marzo, p. 9v-10v.

Lezione 20 Marzo, p. 10v-12r; su p. 10 v è disegnato da Pieri il ritratto del professor Betti.
Lezione 25 Marzo, p. 12r-12v.

MARIO PIERI, *Lezioni di Fisica Matematica (Teoria degli strumenti ottici) del Prof. Enrico Betti*, Libretto 2°, *Strumenti ottici*, R. Università di Pisa 1883-84.

Quaderno di appunti autografi, con copertina verde, composto di 16 carte.

Lezione 1° Aprile, p. 3r-5r.
Lezione 3 Aprile, p. 5r-6v.
Lezione 17 Aprile, p. 6v-10r.
Lezione 6 Maggio, p. 10v-12r.
Lezione 8 Maggio, p. 12v-14r.
Lezione 13 Maggio, p. 14v-16v.

MARIO PIERI, *Lezioni di Fisica Matematica*, *Strumenti ottici*, Libretto 3°, R. Università di Pisa 1883-84.

Quaderno di appunti autografi, con copertina viola, composto di 18 carte, di cui solo 7 manoscritte e le restanti bianche. Indice del contenuto:

Lezione 20 Maggio, p. 1r-4v.
Lezione 3 Giugno, p. 5r; in alto ritratto di professore (non identificato).
Lezione 10 Giugno, p. 5r-7r.

MARIO PIERI, *Lezioni di Meccanica Celeste del Prof. Enrico Betti*, Libretto 1°, R. Università di Pisa 1883-84.

Quaderno di appunti autografi, con copertina blu, composto di 20 carte. Il titolo e le altre indicazioni sono vergate direttamente sulla copertina. Indice del contenuto:

Lez. 1ª - Meccanica Celeste - 12 Novembre 1883, p. 1r-4r.
Lez. 2ª - 14 Novembre 1883, p. 4v-6r.
Lez. 3ª - 16 Novembre 1883, p. 6r-8r.
Lez. 4ª - 19 Novembre 1883, p. 8r-11r.
Lez. 5ª - 21 Novembre 1883, p. 11r-13r.
Lez. 6ª - 23 Novembre 1883, p. 13r-15r.
Lez. 7ª - 26 Novembre 1883, p. 15r-18v.
Lez. 8ª - 28 Novembre 1883, p. 18v-20v.

MARIO PIERI, *Lezioni di Meccanica Celeste del Prof. Enrico Betti*, Libretto 2°, R. Università di Pisa 1883-84.

Quaderno di appunti autografi, con copertina blu, composto di 18 carte e di 4 carte sciolte. Il titolo e le altre indicazioni sono vergate direttamente sulla copertina. Indice del contenuto:

Lezione 9ª, 30 Novembre 1883, p. 1r-2v.
Lezione 10ª, 3 Dicembre 1883, p. 2v-4v.
Lezione 12ª, 7 Dicembre 1883, p. 7r-9r.
Lezione 13ª, 10 Dicembre 1883, p. 9v-11r.
Lezione 14ª, 12 Dicembre 1883, p. 11v-13v.
Lezione 15ª, 14 Dicembre 1883, p. 13v-15r.
Lezione 18 Gennaio, Meccanica Celeste, p. 15r-16v.
Lezione 24 Gennaio, Meccanica Celeste, p. 16v-18v.
Pieri prosegue su fogli sciolti la *Lezione* precedente:
Lezione 14 Gennaio, c.1r-2r.
Lezione, 16 Gennaio, c. 2v-4v.

Mario Pieri, *Lezioni di Meccanica Celeste del Prof. E. Betti*, Libretto 3°, R. Università di Pisa 1883-84.

Quaderno di appunti autografi, con copertina blu, composto di 18 carte e di 2 fascicoli sciolti, di cc.6 e di cc.2 Il titolo e le altre indicazioni sono vergate direttamente sulla copertina. Indice del contenuto:

Lezione 26 Gennaio, p. 1r-2r.
Lezione 30 Gennaio, Meccanica Celeste, p. 2r-4r.
Lezione 1 Febbraio, Meccanica Celeste, p. 4v-6v.
Lezione 4 Febbraio, Meccanica Celeste, p. 6v-8r.
Lezione 6 Febbraio, Meccanica Celeste, p. 8v-9v.
Lezione 8 Febbraio, Meccanica Celeste, p. 9v-11r.
Lezione 11 Febbraio, Meccanica Celeste, p. 11r-12r.
Lezione 13 Febbraio, Meccanica Celeste, p. 12r-14v.
Lezione 15 Febbraio, Meccanica Celeste, p. 14v-16r.
Lezione 28 Febbraio, Meccanica Celeste, p. 16r-17r.
Lezione 3 Marzo, Meccanica Celeste, p. 17r-18v.
Segue fascicolo di carte 6 sciolte. A carta 1r-1v continua la lezione precedente
Lezione 10 Marzo, p 2r-6r [La c. 6v è bianca].
Seguono altre carte sciolte dal titolo: *Ultima lezione*, cc. 1r-2v.

Mario Pieri, *Lezioni di Meccanica Celeste (Prof. Enrico Betti)*, Libretto IV, Università di Pisa 1883-84.

Quaderno di appunti autografi, con copertina blu, composto di 20 carte. Il titolo e le altre indicazioni sono vergate direttamente sulla copertina. Indice del contenuto:

Lezione 2 Marzo, Teoria delle perturbazioni, p. 1r-3r.
Lezione 28 Marzo, p. 3r-6v.
Lezione 4 Aprile, p. 7r-13r.
Lezione 9 Maggio, p. 13r-14r
Lezione 12 Maggio, p. 14v-20r [bianca la c. 20v].

Un manoscritto di G. Peano per G. Vailati «Sulla storia della Logica matematica e suo stato presente»[1]

CLARA SILVIA ROERO

Introduzione

Il manoscritto autografo *Sulla storia della Logica matematica e suo stato presente*[2] fu redatto da G. Peano per G. Vailati nell'inverno del 1897-98 e servì come base per la stesura dell'articolo *La logique mathématique et sa nouvelle phase de développement dans les écrits de M. J. Peano*, inviato da Vailati a Xavier Léon il 5 ottobre 1898[3] per la pubblicazione sulla «Revue de Métaphysique et de Morale» (in seguito abbreviato «RMM»)[4].

Ne presentiamo l'edizione critica poiché riteniamo che questo documento, insieme ad altri dello stesso genere, possa gettare luce sui rapporti interni alla Scuola di Peano fra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento e, in particolare, sulle dinamiche fra il maestro e gli allievi e collaboratori, e possa contribuire a mostrare le strategie messe in atto da Peano, a livello internazionale, per diffondere le idee, i progetti e i risultati ottenuti con l'uso della logica

[1] Ricerca eseguita nell'ambito del progetto PRIN 2009 *Scuole matematiche e identità nazionale nell'età moderna e contemporanea*, unità di Torino.

[2] L'autografo di Peano, composto di sei carte, numerate da altra mano, ci è stato fornito in fotocopia da Mario Quaranta nel novembre del 2010 a Padova. Desidero esprimere la mia riconoscenza all'amico Quaranta per tale dono, dal momento che l'originale sembra essere perduto. Una trascrizione del manoscritto è pubblicata in M. Quaranta, *Inedita et rara*, in «Rivista di psicologia», LXXIV, 3, 1989, pp. 71-83, in particolare alle pp. 73-77 e presenta alcune varianti di lettura e di interpretazione, rispetto all'attuale edizione.

[3] G. Vailati a X. Léon, Crema 5.10.1898, in L. Quilici, R. Raggianti, *Il carteggio Xavier Léon: corrispondenti italiani con un'appendice di lettere di George Sorel*, in «Giornale critico della filosofia italiana», (6) 9, LXVIII, 1989, pp. 295-368, in particolare p. 337.

[4] G. Vailati, *La logique mathématique et sa nouvelle phase de développement dans les écrits de M. J. Peano*, in «RMM», 7, 1899, pp. 86-102.

matematica, al fine di coinvolgere matematici, filosofi e docenti a partecipare all'impresa del *Formulaire de Mathématiques*.

I primi contatti di Vailati con i filosofi francesi

Dalle lettere e dai dialoghi incrociati fra Léon ed Elie Halévy, Louis Couturat e Léon, Vailati e Léon, Vailati e Halévy[5], e Couturat e Peano[6], è possibile ricostruire l'inizio dei contatti del giovane filosofo della scienza italiano con i colleghi francesi e lo sviluppo delle loro relazioni.

Com'è noto nell'a.a. 1897-98 Vailati era assistente volontario di V. Volterra, sulla cattedra di Meccanica razionale nell'Ateneo torinese, e teneva un corso libero di Storia della Meccanica. Nel gennaio del 1898 era apparsa a stampa da Roux-Frassati la sua prolusione di quel corso, intitolata *Il metodo deduttivo come strumento di ricerca*[7] e Vailati l'aveva subito spedita in Francia perché fosse pubblicata, come effettivamente accadde[8].

È dalla descrizione che Léon, fondatore della «RMM», fece all'amico Halévy che conosciamo le motivazioni dell'invio di Vailati:

> je t'offre aujourd'hui deux articles l'un proposé par le professeur Vailati à l'Université de Turin (cours d'Histoire de la Mécanique) et une leçon d'ouverture sur le rôle du raisonnement déductif dans les recherches scientifiques. Ce Monsieur prétend que cette leçon tant par la thèse qu'il soutien que par le point de vue auquel il se place convient à la Revue; il ajoute qu'il serait heureux d'une publication qui ferait connaître sa leçon du public philosophico-savant français; il se recommande de Poincaré, de Tannery, de Milhaud. Je viens d'adresser l'article à Couturat avec prière de fournir un jugement motivé[9].

[5] Cfr. Quilici, Raggianti 1989 cit., p. 334-341, 363-366 e R. Raggianti, *Spigolature Crociane: il centenario della «Revue de Métaphysique»*, in «Giornale critico della filosofia italiana», (6) 15, LXXIV, 1995. I manoscritti e i carteggi sono conservati a Parigi nei fondi archivistici di X. Léon, Bibliothèque Victor Cousin, alla Sorbona.

[6] E. Luciano, C.S. Roero (a cura di), *Giuseppe Peano - Louis Couturat Carteggio (1896-1914)*, Firenze, Olschki, 2005.

[7] G. Vailati, *Il metodo deduttivo come strumento di ricerca. Lettura d'introduzione al corso di Lezioni sulla Storia della Meccanica, tenuto all'Università di Torino l'anno 1897-98*, Torino, Roux-Frassati, 1898 – *Scritti di G. Vailati (1863-1909)*, Leipzig-Firenze, Barth-Seeber, 1911, pp. 117-148. Questa raccolta del 1911 è in seguito abbreviata *Scritti*, 1911.

[8] G. Vailati, *La méthode déductive comme instrument de recherche*, in «RMM», 6, 1898, pp. 667-703. Sui carteggi di Vailati con gli italiani G. Uzielli e G. Papini inerenti questo tema cfr. M. de Zan, *La «presenza» di Peano nei carteggi di Vailati*, in C.S. Roero (a cura di), *Peano e la sua Scuola fra matematica, logica e interlingua*, Torino, Dep. Sub. Storia Patria, 2010, pp. 437-459.

[9] X. Léon a E. Halévy, 8.2.1898, in Quilici, Raggianti 1989 cit., p. 363.

Accettato dal comitato editoriale della «Revue», l'articolo fu fatto tradurre da E. Bloch[10] e nei mesi successivi Vailati operò attivamente con la redazione per migliorarlo, suggerendo tagli in parti troppo prolisse e inserendo aggiunte di note storiche erudite e profonde, scaturite dalla lettura di un articolo del matematico Joseph Bertrand su C. Huygens, apparso sul «Journal des Savants»[11]. Non si può escludere che queste iniziative fossero state consigliate da Peano, essendo il giovane a Torino in quel periodo.

D'altra parte la strategia di diffusione di questo testo fu ripetuta in altri paesi con studiosi che avevano contatti con Peano. Una versione in polacco del saggio di Vailati, curata dal matematico Samuel Dickstein, apparve nel 1898 sul periodico «Wiadomosci Matematyczne»[12].

Inoltre poco dopo, il 25 giugno 1898, il filosofo italiano chiese a Léon l'indirizzo di Emile Boirac, di cui aveva appena letto sulla «Revue scientifique» un intervento sul metodo sperimentale, per poter scambiare con lui idee e opinioni e propose al fondatore della «RMM» un secondo articolo, il cui contenuto è strettamente connesso al manoscritto di Peano, che qui presentiamo:

> Si vous le désirez je pourrais vous envoyer pour la Revue un petit article bibliographique relatif au récents travaux publiés en Italie sur la «logique mathématique», et, en particulier, sur ceux du Professeur Peano (de l'Université de Turin) dont les recherches représentent, a mon avis, un nouveau développement de cette science dans la même direction qui a été suivie par les logiciens anglais (Boole, De Morgan)[13].

Vailati si spinse anche oltre, non esitando a offrire la sua attiva collaborazione alla «Revue» come recensore di libri italiani di storia e di filosofia delle scienze fisiche e matematiche:

> Je me chargerais aussi volontiers de vous envoyer de recensions d'ouvrages italiens, surtout sur de sujets se rapportant à l'histoire et à la philosophie des Sciences physiques et mathématiques[14].

All'inizio di luglio Vailati informò Léon sui tempi di consegna e sulla lunghezza del nuovo testo, la cui proposta era stata accettata, e accennò alle caratteristiche che avrebbe avuto. Chiese inoltre indicazioni di articoli apparsi sulla rivista e inerenti al suo tema, e non mancò di riferire gli elogi di Peano

[10] Cfr. *Scritti*, 1911 cit. p. 201.
[11] G. Vailati a X. Léon, Torino 17.3.1898, in Quilici, Raggianti, 1989 cit., p. 335.
[12] Cfr. *Scritti*, 1911 cit. p. 148.
[13] G. Vailati a X. Léon, Crema 25.6.1898, in Quilici, Raggianti, 1989 cit., p. 336.
[14] *Ibidem*, p. 336.

sulle pubblicazioni di Couturat[15] e i suoi personali apprezzamenti sui lavori di Gaston Milhaud[16] e Emmanuel Carvallo[17]:

> Je lui donnerai le caractère d'une étude critique en m'arrêtant surtout à faire ressortir ce qui a été ajouté par les logiciens italiens aux résultats déjà obtenus par leurs prédécesseurs anglais. … J'ai beaucoup de plaisir de ce que vous me dites du jugement favorable porté par Mr. Couturat sur les ouvrages de logique du Professeur Peano. Le dernier m'a parlé, a son tour, avec beaucoup d'éloges, il y a quelque temps a Turin, des publications scientifiques de Mr. Couturat dont je regrette de n'avoir pas eu occasion jusqu'ici de lire les écrits. Je connais au contraire, et j'apprécie beaucoup les récents travaux de Mr. Gaston Milhaud de Montpellier et du prof. E. Carvallo (examinateur à l'Ecole polytechnique)[18].

Redatto direttamente in francese, l'articolo fu spedito da Crema il 5 ottobre 1898, con preghiera di rivedere la lingua:

> J'ai l'honneur de vous envoyer pour la Revue de métaph. et de mor. mon article sur la logique mathématique et son récent développement en Italie. Dans le but d'épargner le temps et la peine de la traduction je l'ai rédigé moi-même en français[19].

Nei successivi scambi epistolari Vailati, oltre a ringraziare per le numerose copie di estratti dei suoi lavori editi sulla rivista, continuò a richiedere a Léon indirizzi di autori che vi avevano pubblicato scritti interessanti e sollecitava l'invio di estratti di specifici articoli e volumi, finendo per abbonarsi alla testata dal gennaio del 1900, dopo essersi trasferito a Siracusa[20]. Egli non poteva infatti più fruire dell'ampia collezione di periodici internazionali presenti a Torino nella Società di cultura, situata nella Galleria Nazionale di via Roma, e nella Biblioteca Speciale della Facoltà di Scienze matematiche fisiche e naturali.

Con la salda determinazione, tipica della Scuola di Peano, Vailati proseguì a proporre altri suoi saggi alla «RMM». Da Pinerolo, dove insegnava mate-

[15] Il carteggio fra L. Couturat e Peano era iniziato nel 1896 e fra i due vi erano stati scambi di libri e articoli. Cfr. Luciano, Roero, 2005 cit.

[16] Vailati si riferiva probabilmente ai corposi saggi di G. Milhaud sulla logica, conservati fra i suoi estratti nella Biblioteca del Dipartimento di Filosofia di Milano (abbreviato in seguito BDF Milano, *Archivio Vailati*): *Essai sur les conditions et les limites de la certitude logique*, Paris, Alcan 1898; *Le rationnel, Études complémentaires à l'Essai sur la certitude logique*, Paris, Alcan 1898.

[17] Vailati era forse venuto a conoscenza degli articoli di E. Carvallo tramite Peano, quand'era suo assistente di Calcolo infinitesimale. Il matematico francese aveva citato nei suoi lavori i contributi di Peano, ad esempio nell'articolo *La méthode de Grassmann*, in «Nouvelles annales de mathématiques», (3) 11, 1892, pp. 8-37.

[18] G. Vailati a X. Léon, Crema 9.7.1898, in Quilici, Raggianti, 1989 cit., pp. 336-337.

[19] G. Vailati a X. Léon, Crema 5.10.1898, in Quilici, Raggianti, 1989 cit., p. 337.

[20] G. Vailati a X. Léon, Pinerolo 30.11.1898, Pinerolo 24.1.1899, Siracusa 31.12.1899, in Quilici, Raggianti, 1989 cit., pp. 338-340.

matica al Liceo nell'anno scolastico 1898-99, pur continuando a mantenere il posto di assistente volontario a Torino, suggerì nuovamente a Léon la stampa della prolusione del suo corso libero all'Università:

> Le mois prochain je vais publier, en italien, une autre leçon d'ouverture à mon cours universitaire, dans laquelle je parle des «questions de mots dans l'histoire des sciences physiques». Vous serez toujours libre d'en publier la traduction française si vous la jugeriez intéressante pour votre public[21].
> Vous avez reçu il y a quelque jours une copie de ma Leçon d'ouverture de cette année au Cours d'Histoire de la Mécanique à l'Université de Turin, ayant pour titre: Sulle questioni di parole nella Storia della Scienza e della cultura. Je serais heureux qu'on en publiât aussi la traduction française, si cela vous convient pour votre Revue; veuillez bien m'en informer afin que je m'abstienne d'en proposer la publication à d'autres revues étrangères[22].

Anche da Siracusa reiterò la sua richiesta, con motivazioni esplicite sul pubblico internazionale cui voleva comunicare le sue riflessioni:

> De mon autre Essai (que je vous ai envoyé l'année passée): Sulle questioni di parole nella Storia della Scienza e della cultura (Sur les querelles de mots dans l'histoire de la Science) je vous avais aussi proposé de publier une traduction française dans votre Revue. N'ayant pas reçu de réponse je suppose que vous ne l'ayez pas jugé conforme à l'esprit général ou au caractère philosophique représenté par votre Revue. Si pour cette raison, ou pour une autre quelconque, vous n'êtes pas en condition d'accepter ma proposition veuillez bien m'en informer définitivement, afin que je puisse disposer autrement de mon écrit que je tiens à faire paraitre en français, ou dans quelque autre langue, moins ignorée que l'italien par le public philosophique[23].

Con l'invito a far parte del Comité de patronage del Congresso internazionale di filosofia che si sarebbe tenuto a Parigi nel 1900, invito rivoltogli proprio da Léon nell'estate del 1899[24], Vailati era entrato a buon diritto nella comunità mondiale dei filosofi, secondando così i desideri e le aspettative di Peano.

Ottimo allievo sul versante filosofico e storico, Vailati aveva assorbito lo stile e le strategie del maestro, come si evince sia dall'opera di diffusione di estratti e circolari, e di mutua informazione sugli autori e sui risultati prodotti nei due paesi[25], sia soprattutto dalle azioni di promozione degli studi, volte a coinvolgere filosofi italiani a presentarsi sulla scena europea:

[21] G. Vailati a X. Léon, Pinerolo 30.11.1898, in Quilici, Raggianti, 1989 cit., p. 338.

[22] G. Vailati a X. Léon, Pinerolo 24.1.1899, in Quilici, Raggianti, 1989 cit., p. 339.

[23] G. Vailati a X. Léon, Siracusa 31.12.1899, in Quilici, Raggianti, 1989 cit., p. 340.

[24] Cfr. G. Vailati a X. Léon, Pinerolo 24.6.1899, in Quilici, Raggianti, 1989 cit., p. 339 e L. Couturat a G. Peano, Caen 29.6.1899, in Luciano, Roero, 2005 cit., p. 26.

[25] Cfr. G. Vailati a X. Léon, Siracusa 3.4.1900 e 26.4.1900, in Quilici, Raggianti, 1989 cit., pp. 340-341.

> mon ami M. Calderoni vient d'achever un très solide travail sur les différentes acceptions des mots «positivisme» e «métaphysique» et sur le rôle qu'ils jouent dans les disputes philosophiques contemporaines. Il a eu la bonté de me le faire lire, et j'ai insisté beaucoup pour le persuader a en faire l'objet d'une Communication au Congrès de philosophie. Je suis bien heureux d'y être réussi[26].

Peano e Vailati, un rapporto di reciproca stima e amicizia

> Aveva cultura vastissima: conosceva le principali lingue antiche e moderne. Viaggiò molto e scrisse numerosi articoli e recensioni, pubblicate in varie lingue nelle principali riviste d'Italia e dell'estero. Una serie dei suoi scritti tratta di matematica dal punto di vista filosofico, la teoria delle definizioni e dimostrazioni secondo Aristotele, Euclide ed i filosofi e matematici moderni; i principi e la storia della meccanica. Qualche scritto tratta di economia politica. La sua vita fu un esempio alla gioventù, di studio e di lavoro[27].

Con queste parole nel 1909, alla scomparsa di Vailati, Peano ne delineava, su un quotidiano torinese, la figura dello studioso profondo e del ricercatore 'esemplare'.

Quasi coetanei, fra di loro si instaurò fin dai primi anni un rapporto di stima e di amicizia, oltre che di collaborazione scientifica. Non stupisce dunque che alla sua morte Peano fosse fra i sottoscrittori che versarono un cospicuo contributo[28] per la stampa del volume dei suoi Scritti e che si prodigasse a cercare un editore serio e disponibile a farsi carico dell'edizione in tempi brevi e con costi contenuti[29], giungendo inoltre a collaborare persino alla correzione

[26] G. Vailati a X. Léon, Siracusa 11.6.1900, in QUILICI, RAGGIANTI, 1989 cit., p. 341.

[27] G. Peano 1909h, *Giovanni Vailati*, in «Gazzetta del popolo di Torino », Nr. 136, 17.5.1909. Qui e nel seguito gli scritti di Peano sono citati con la sigla del dvd, a cura di C.S. ROERO, *L'Opera Omnia e i Marginalia di Giuseppe Peano (with English Version)*, Torino, Dipartimento di Matematica, 2008.

[28] *Scritti*, 1911 cit., p. xv.

[29] Nelle lettere a G. Vacca, il 24.5.1909 Peano scrisse (*Archivio Peano-Vacca*, Torino): «Couturat mi chiede una biografia di Vailati per la Revue de métaphysique. Se ne potrebbe incaricare Lei? ovvero si potrebbe fare da noi due? Io sono molto occupato in varie cose, ed ho poca voglia di mettermi a scrivere un articolo. Ma Le potrei dare una serie di indicazioni utili. Le ho mandato un mio articolo, nella Gazzetta del Popolo di Torino. Ho letto necrologie in vari giornali. La dipartita così rapida del Vailati prova la brevità della nostra vita, e la pochezza delle nostre forze» e pochi giorni dopo, il 29.5.1909: «L'avv. Bocca, cui mi sono recato subito, desiderò vedere gli scritti del Vailati. Gli recapitai la mia collezione. Stamane mi fece osservare che non è opportuno il pubblicare tutto – e invero nella mia collezione ci sono recensioni, relazioni di congressi, ecc. tutte cose opportune quando si stampano, ma poi inutili a ristamparsi. Mi fece pure osservare che la mia collezione non era completa, mancandovi il Leonardo. Quindi [suggerì] che qualcuno ordini queste memorie, ne faccia una prefazione con biografia del Vailati,

delle bozze di quel volume, curato da Mario Calderoni, Umberto Ricci e Giovanni Vacca[30].

Il manoscritto autografo, probabilmente consegnato a Vailati nel 1897 o all'inizio del 1898, si inserisce nella vasta serie di appunti e brouillons che Peano offriva ai suoi discepoli e collaboratori, come 'traccia' o 'canovaccio' da cui partire nella stesura di un articolo finalizzato ad un particolare pubblico. Nel caso presente, il pubblico era quello dei filosofi francesi, vista la destinazione che poi ebbe il saggio di Vailati, apparso sulla «RMM» nel gennaio del 1899.

L'obiettivo di diffondere i risultati ottenuti nella Scuola di Torino diventò esplicito fin dal titolo che Vailati mutò, come pure cambiò lo stile espositivo. Meno stringato di quello di Peano e molto più ricco di dettagli storici e filosofici, nell'articolo edito da Vailati si ritrova quel tratto tipico delle Notes ai paragrafi Logique mathématique, presente nelle due prime edizioni del Formulaire del 1895 e 1897. Inoltre il filosofo italiano è attento ad aggiungere informazioni e giudizi sulla bibliografia più recente e citazioni erudite che ebbero un grande impatto sui 'savants' francesi[31].

Senza entrare in questa sede in troppi dettagli, ci limitiamo, nell'edizione critica che segue, a confrontare le parti accolte da Vailati e quelle modificate o ampliate, rinviando ad altra occasione un'analisi più approfondita degli aspetti matematici e storici, delle motivazioni alla base delle scelte del logico piemontese e del suo allievo filosofo, delle influenze giunte dall'esterno e dall'interno della Scuola torinese, degli echi degli stessi temi nel Formulaire de Mathématique e altrove, e dei successivi sviluppi in ambito locale e internazionale.

A conclusione di questa introduzione desideriamo soffermare l'attenzione solo su tre temi, che stavano a cuore sia a Peano, sia a Vailati. In primo luogo le imperfezioni e l'insufficienza del linguaggio comune, cui si può ovviare con la logica matematica, un topos ricorrente nella Scuola di Peano, che è messo in luce da Vailati nell'articolo del 1899, riallacciandosi ai meriti di Leibniz in questo campo:

> Dans les nombreux essais qu'il [Leibniz] consacra à ces recherches, et dont quelques uns remontent à la première période de son activité philosophique, il exprime souvent l'espoir que, par l'introduction et les perfectionnements successifs de cette nouvelle logique, les hommes pourront être mis en état d'aborder avec une plus grande chance de succès les problèmes philosophiques qui n'ont jamais cessé d'être l'objet de controverses et de disputes, lesquelles, à son avis, ont leur seule origine et raison d'être dans les imperfections et l'insuffisance du langage vulgaire[32].

ecc. e spedisca a lui il libro come dovrebbe essere stampato, ed allora egli proporrà condizioni. Sarà conveniente che il volume sia d'un 300 pagine. Sarà più interessante, e meno caro, …».

[30] *Scritti*, 1911 cit., p. xii.

[31] Nel carteggio con Peano talvolta Couturat, riferendosi al filosofo italiano, lo chiama «notre ami Vailati, si erudit!» (Luciano, Roero, 2005 cit., p. 150).

[32] Vailati, 1899 cit., p. 87 - *Scritti*, 1911 cit., p. 230.

In seconda istanza l'opportunità del 'confronto' con fonti antiche, moderne e contemporanee sugli stessi argomenti e dunque l'utilizzo della storia della matematica e della letteratura recente come 'strumento d'indagine' e 'veicolo di promozione' delle proprie idee.

Fra le strategie più sottili, in questo senso, troviamo nei due testi di Peano e di Vailati il ricorso a scritti e opere di matematici, di fisici, di filosofi e di logici della Francia, della Germania, dell'Inghilterra e dell'Italia.

Con un'abile mossa Vailati accosta i risultati di Peano a quelli ottenuti da E. Beltrami, A. Cayley e F. Klein sui postulati delle geometrie, di grande attualità all'epoca e ampiamente discusse sulle pagine della «RMM»:

> M. Peano fonde ses démonstrations sur un certain nombre de propriétés très simples et évidentes de cette relation, qui jouent le rôle de postulats et sont exprimables entièrement par les notations logiques. (…) Sa méthode lui permet non seulement de déduire et, pour ainsi dire, d'extraire de ces propriétés primordiales, avec autant de facilité et de clarté que possible, toutes les conséquences qu'elles impliquent, mais aussi de s'assurer qu'aucune de ces propriétés primordiales n'est susceptible d'être déduite des autres, en d'autres termes qu'elle sont non seulement suffisantes, mais aussi nécessaires pour démontrer toutes les conséquences auxquelles on veut parvenir. (…) il suffira de trouver … une interprétation pour laquelle se vérifient tous les axiomes, excepté un seul, pour pouvoir en conclure que ce dernier ne peut pas être déduit des autres, et pour justifier sa collocation entre les propositions indémontrables. On voit facilement comment on peut parvenir par ce moyen à résoudre avec la plus grande facilité les questions relatives à la possibilité ou l'impossibilité de démontrer une propriété donnée (c'est-à-dire de la déduire d'autres propriétés données). Ce procédé présente beaucoup d'analogie avec ceux qui ont été suivis par Beltrami, Cayley, et Klein pour prouver l'indémontrabilité de l'axiome XI d'Euclide par les autres axiomes de la géométrie euclidienne[33].

Infine, per coinvolgere anche il pubblico dei fisici, dei fisiologi e dei naturalisti, Vailati prosegue con una citazione dal *Novum Organum* di F. Bacon[34] e al termine dell'articolo conclude il suo 'elogio' della logica matematica come 'strumento' d'indagine, facendo un paragone con la rivoluzione operata dal microscopio nelle ricerche di fisiologia e riprendendo l'iniziale collegamento a Leibniz:

> On n'est peut-être pas loin, à cet égard, de réaliser la prévision optimiste de Leibnitz, selon laquelle la logique mathématique est destinée à provoquer dans ce

[33] *Ibidem*, p. 99-100 - *Scritti*, p. 240.

[34] *Ibidem*, nota 1, p. 100 - *Scritti*, nota 2, p. 240: «Il rappelle aussi le procédé, très frequemment suivi dans les sciences physiques, que Bacon appelle conclusio ab instantia solitaria (quae exhibet naturam de qua fit inquisitio in talibus subjectis quae sunt similia cum aliis subjectis paeter quam in illa ipsa natura) (*Novum Organum*, II, 22)».

genre d'études des progrès analogues à ceux qu'a produits dans les recherches physiologiques l'introduction du microscope[35].

Peano comprese le attitudini straordinarie di Vailati ad entrare in relazione con studiosi di ambiti differenti e forse per questi motivi fin dal 1898 lasciò a lui il compito di dialogare con i filosofi[36].

GIUSEPPE PEANO, *Sulla storia della Logica matematica e suo stato presente*[37]

La[38] logica matematica si può far rimontare ad Aristotele, il quale[39] studiò le regole del sillogismo, forma importantissima di ragionamento[40]. I lavori successivi della Logica scolastica[41], portarono[42] poco frutto, quantunque non siano totalmente a sprezzarsi[43].

Leibniz e le tre operazioni logiche. L'addizione e la moltiplicazione logica[44]

Il primo che vide chiaramente questa nuova scienza, e ne pose le basi è Leibniz. Egli ne pubblicò alcuni lavori; ne scrisse diffusamente nella sua corrispondenza; però i suoi lavori più importanti relativi a questo soggetto furono pubblicati solo nell'a. 1840 dall'Erdmann[45].

[35] *Ibidem*, p. 102 - *Scritti*, p. 242. Il paragone sarà poi ripreso da M. Pieri e da altri membri della Scuola di Peano (cfr. ROERO, 2010 cit., pp. 87-88).

[36] Su Peano e la filosofia cfr. F. BARONE, *Un'apertura filosofica della logica simbolica peaniana*, in A. TERRACINI (a cura di) *In memoria di Giuseppe Peano*, Cuneo, Liceo scientifico statale, 1955, pp. 41-50, L. GEYMONAT, *I fondamenti dell'aritmetica secondo Peano e le obiezioni 'filosofiche' di B. Russell*, *Ibidem*, pp. 51-63; *L'opera di Peano di fronte alla cultura italiana, in Celebrazioni in memoria di Giuseppe Peano nel cinquantenario della morte. Atti del Convegno organizzato dal Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino 27-28 ottobre 1982*, Torino, Varetto, 1986, pp. 7-15 e E. PASINI, *Peano e la filosofia della matematica*, in *Conferenze e Seminari 2003-2004*, Torino, Ass. Sub. Mathesis, 2004, pp. 203-220.

[37] Vailati eliminò nel titolo la parola "storia" e restrinse l'ambito alla sola produzione di Peano e dei suoi stretti collaboratori (1899 cit., p. 86 - *Scritti*, 1911 cit., p. 229): *La logique mathématique et sa nouvelle phase de développement dans les écrits de M. J. Peano*.

[38] Peano cancella «L'origine della».

[39] Peano cancella «sul sillogismo ricavò».

[40] Vailati cita fra gli autori classici anche Platone, oltre ad Aristotele (1899 cit., p. 86).

[41] Peano cancella «quantunque siano».

[42] Peano cancella «grande».

[43] Vailati nel § I (1899 cit., p. 86-87 - *Scritti*, 1911 cit., p. 229-230) esordisce con un discorso più ampio e articolato sui legami della logica deduttiva con le scienze matematiche, individuando una duplice connessione fra il ragionamento deduttivo e le procedure matematiche, risalendo agli scritti di Platone e di Aristotele e sottolineando l'importante trasformazione operata da Leibniz in quest'ambito.

[44] Questa parte è sviluppata nel § II di VAILATI, 1899 cit., p. 87-88 - *Scritti*, 1911 cit., p. 230.

[45] J. E. ERDMANN, *Leibniz Opera Philosophica*, Berlin, Eichler, 1840. Sulle edizioni delle opere di Leibniz consultate nella Scuola di Peano cfr. E. LUCIANO, *Peano and his School between Leibniz and Couturat: the Influence in Mathematics and in International Language*, in R. KRÖMER, Y. CHIN-DRIAN (eds.), *New Essays on Leibniz Reception*, Basel, Springer, 2012, pp. 41-64.

Leibniz considerò l'uguaglianza fra due classi a e b, indicata ora con a = b. (presso Leibniz il segno generale d'eguaglianza aveva forma alquanto diversa). E considerò pure le tre operazioni logiche fondamentali, cioè[46]:

1° ab, ovvero a ∩ b, ¾ che rappresenta la classe comune alle classi a e b; essa ¾ suolsi ora chiamare il prodotto logico di a e b.
2° a∪b, che rappresenta la minima classe contenente le classi a e b. Essa dicesi somma logica delle classi date.
3° -a, la classe dei non a.

La somma logica fu indicata dal Leibniz collo stesso segno + dell'addizione aritmetica. Noi qui adotteremo la forma ∪, usata nel Formulario di Matematica[47], ed in molti altri lavori, di cui parleremo in seguito.

Leibniz enunciò, parte coi simboli, parte a parole, le proprietà fondamentali di queste operazioni, quali la commutatività:

ab = ba   a∪b = b∪a

e la cosìdetta Legge di semplificazione

aa = a   a∪a = a.

Spetta al Lambert ¾ a. 1781 l'enunciato simbolico della proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione logica (a∪b)c = ac∪bc analoga alla (a + b)c = ac + bc, con cui coincide formalmente usando la notazione di Leibniz e di Lambert e quasi un secolo è passato prima che Peirce a. 1867 ne enunciasse la duale ab∪c = (a∪c)(b∪c). //

L'inclusione[48]

L'inclusione della classe a nella b, che suolsi esprimere colla frase "ogni a è b", fu considerata da Aristotele e da tutti i logici scolastici. Questi la chiamano[49] "proposizione universale affermativa" e l'indicarono colla[50] lettera A.

In Leibniz essa è ancora indicata colle parole a est b. Il Segner a. 1740 la rappresentò con a<b, a causa dell'analogia che ne risulta, ove nelle idee a e b si consideri la comprensione.

[46] Peano cancella «che oggi soglionsi chiamare la moltiplicazione logica, l'addizione logica, e la negazione».

[47] G. PEANO 1895aa, *Formulaire de Mathématiques*, Torino, Bocca, 1895. Tavole comparative delle varianti nelle cinque edizioni dell'opera nella matematica e nelle citazioni storiche si possono consultare in C.S. ROERO, *The "Formulario" between Mathematics and history*, in F. SKOF (ed.) *Giuseppe Peano between Mathematics and Logic*, Milano, Springer, 2010, pp. 108-132.

[48] Cfr. § III di VAILATI, 1899 cit., pp. 88-89 - *Scritti*, 1911 cit., pp. 231-232.

[49] Peano cancella «questa proposizione col».

[50] Peano cancella «vocabolo».

Per ovviare a questa ambiguità, ed ai pericoli di confusione che nascerebbero[51] nell'uso in una stessa formula dei segni aritmetici e dei segni logici, noi la[52] indicheremo con a⊃b, che si legge "a è contenuto in b", seguendo il Formulario.

Le relazioni fra il segno ⊃ e le operazioni logiche furono già enunciate da Leibniz:

a⊃a   ab⊃a   a⊃a∪b
da a⊃b e da c⊃d si ha ac⊃bd e a∪c⊃b∪d
l'equivalenza di a⊃b coll'eguaglianza ab⊃a, e colla a∪b⊃b. //

La negazione[53]

La negazione di una classe a, indicata con -a da Segner a. 1740, come pure, meno chiaramente da Leibniz, fu studiata dalla più remota antichità, ed è ¾ nota l'equivalenza di a⊃b con[54] ~a⊃~b come pure di a~b⊃c con a~c⊃~b.

Spetta al De Morgan a. 1858 l'enunciato, in simboli, delle relazioni:

~(ab) = (~a)∪(~b)   ~(a∪b) = (~a)(~b)

cioè la negazione d'un prodotto è la somma delle negazioni dei fattori, e la negazione della somma è il prodotto delle negazioni dei termini.

Il[55] nulla ed il tutto[56]

Il Boole in alcuni lavori dapprima, e poi in un trattato pubblicato nel 1854 "The laws of thought" ricostruì le teorie precedenti, ritrovando le formule già citate, e occupandosi diffusamente della risoluzione delle equazioni logiche[57].

A lui spetta l'aver indicato con dei simboli 0 ed 1 la classe nulla, e la classe tutto, facendo vedere che essi sono i moduli dell'addizione e moltiplicazione logica, verificanti cioè alle relazioni:

a + 0 = a   a1 = a   a0 = 0.

[51] Peano cancella «in formule d'».
[52] Peano cancella «leggeremo sotto».
[53] Vailati sviluppa questi temi nei paragrafi III, IV e V (Vailati, 1899 cit., pp. 88-92 - *Scritti*, 1911 cit., pp. 231-234).
[54] Lapsus nel testo dove si trova: «-a⊃~b».
[55] Peano cancella «Il calcolo sulle proposizioni».
[56] Vailati sviluppa questi temi nei paragrafi III, IV e V (Vailati, 1899 cit., pp. 88-94 - *Scritti*, 1911 cit., pp. 231-235), ma di G. Boole cita solo l'opera del 1847 *Mathematical analysis of Logic* e menziona gli scritti di G. Peacock e di D. Gregory. Si sofferma pure sui diagrammi e chiarimenti forniti da J. Venn, utili dal punto di vista filosofico e psicologico, e accenna alla diffusione sul continente dei risultati dei logici inglesi, compiuta da E. Schröder e L. Liard. Vailati cita inoltre, in una nota a piè di pagina, la comunicazione di Schröder al primo congresso internazionale dei matematici a Zurigo nel 1897, in cui si mostravano i miglioramenti apportati da Peano e da Peirce al simbolismo di Boole. La pubblicazione di Schröder apparve sul «Monist» nel fascicolo di ottobre del 1898, per questo probabilmente fu aggiunta in fase di bozze.
[57] Peano cancella «delle operazioni ricavate dalle operazioni logiche con».

Però questi simboli hanno finito per avere minore importanza sicché nell'ultimo § del Formulario sono scomparsi[58]. L'addizione di Boole, non è l'addizione di Leibniz, ma è un'idea più complicata.

Lo studio delle operazioni logiche inverse non ebbe alcuna applicazione pratica. Ad ogni modo il Boole, col suo[59] trattato, ebbe il grande merito di richiamare l'attenzione degli studiosi su questo soggetto, prima troppo trascurato, dando così origine ad una scuola, cui appartengono i lavori di Macfarlane, Peirce, Schröder, Jevons, ecc.

Il calcolo sulle proposizioni[60]

Molti degli A.[utori] menzionati videro che il calcolo sviluppato per le classi si applicava senz'altro ove a, b, c indicassero proposizioni[61]. Il segno $\supset$ allora corrisponde al termine "si deduce".

Fra essi Lambert enunciò, parte a parole e parte in simboli, l'equivalenza di $a\supset(b\supset c)$ con $ab\supset c$, cioè "da a si deduce che da b si deduce c" colla "da ab si deduce c".

Ad altri A.[utori] si è presentato direttamente il calcolo su proposizioni, senza passare per le classi. Fra questi merita attenzione speciale Mc Coll a. 1878. A lui spettano le formule come le seguenti

$(a\supset b)(c\supset d)\supset(ac\supset bd)$
$(a\supset bc) = (a\supset b)(a\supset c)$
$(a\supset b)\cup(a\supset c)\supset(a\supset b\cup c)$ ecc. //

Peano, nel calcolo geometrico ¾ a. 1888 fece vedere ¾ la dipendenza fra il calcolo sulle classi e quello sulle proposizioni, ¾ nel modo seguente.

Sia p una proposizione contenente una lettera variabile x, cioè una condizione (equazione) in x. Risulta determinata la classe degli x che soddisfano a quella condizione (le radici di quell'equazione), e che l'A.[utore] indica con x: p. I due punti sono una specie di segno d'inversione. Allora essendo q un'altra proposizione contenente la stessa lettera variabile x, la relazione

$(x : p)\supset(x : q)$ significa "ogni x che soddisfa alla condizione p soddisfa pure alla q".

Invece[62] di mettere il segno x: davanti a p e q si può convenire di scriverlo come indice al segno $\supset$ ed allora la stessa proposizione si presenterà sotto la

[58] G. Peano 1897b, *Formulaire de Mathématiques*, t. II § 1, *Logique mathématique*, s. l., s. e., 11.8.1897; cfr. anche *Table* 2 in Roero, 2010 cit. p. 110.

[59] Peano cancella «grande».

[60] Vailati sviluppa ampiamente questo tema nel paragrafo VI (cfr. Vailati, 1899 cit., pp. 94-96 - *Scritti*, 1911 cit., pp. 235-238).

[61] Peano cancella «Fra i pr».

[62] Peano cancella a inizio riga «Il s».

forma p⊃x q, che si legge "da p si deduce, rispetto ad x, la q". Sottintendendo quest'indice, quando non siavi pericolo di equivoco, essa si scriverà p⊃q, che si legge "da p si deduce q".

Il Boole indicava la proposizione particolare "qualche a è b" colla scrittura a = ub, nella quale la lettera u variava da una prop.[osizione] particolare ad un'altra.

Il P.[eano] ¾ tenendo conto dell'asserzione che ogni prop.[osizione] particolare è la negazione d'una ¾ universale, la indicò con -(ab = 0), senza bisogno di simboli nuovi. Con ciò l'A.[utore] fu in grado di esprimere in simboli parecchie proposizioni d'Algebra relative alla teoria delle equazioni,[63] anche assai complicate.

Del[64] segno e

Ma coi segni precedenti non si poteva ancor scrivere ogni proposizione, in guisa da poter scrivere in simboli un'intera teoria.

Il P.[eano] a. 1889 ¾ vide che mancava ancora il segno per esprimere le proposizioni individuali. Gli diede la forma e, iniziale di ἐστὶ, sicché xea significa "x è un a".

Il segno e è distinto dal segno d'inclusione ⊃ in ciò che x⊃a significa "ogni x è un a", ovvero "a è una proprietà di ogni x"; mentre xea significa "x è un a" "a è una proprietà di x". Il segno ⊃ ha il[65] sensus divisi, mentre e ha il sensus compositi dei logici.

Essendo p una proposizione contenente la lettera variabile x, la classe che nel lavoro del 1888 ¾ si era indicata con x:p si poté indicare premettendo a p l'inversa dell'operazione xe. Sicché essa fu indicata successivamente con [xe] p, p, e infine con x'p, avendo il segno di inversione variato successivamente la sua forma tipografica. //

L'A.[utore] di quest'opuscolo scrive completamente in simboli[66] le principali proposizioni d'Aritmetica, colle rispettive dimostrazioni; e queste dimostrazioni non sono più fatte colla logica naturale, ma bensì col calculus ratiocinator intuito dal Leibniz, poiché si passa da una proposizione ad un'altra con leggi precise, ed esplicitamente enunciate[67]. La dimostrazione d'un teorema si fa come in algebra si procede alla risoluzione d'un sistema di equazioni[68].

Così costrutta l'ideografia, che serve sia ad esprimere le proposizioni che ad analizzare le idee e le dimostrazioni, il P.[eano] nello stesso anno 1889 l'ap-

[63] Peano cancella «propo».

[64] Vailati sviluppa questo tema nel paragrafo VII (cfr. VAILATI, 1899 cit., pp. 97-98 - *Scritti*, 1911 cit., pp. 238-239).

[65] Peano cancella «senso».

[66] Peano cancella «tante».

[67] Questa parte è sviluppata da Vailati nel paragrafo VIII (cfr. VAILATI, 1899 cit., pp. 98-100 - *Scritti*, 1911 cit., pp. 239-240).

[68] Vailati si serve della stessa analogia (cfr. Vailati, 1899 cit., pp. 98-99 - *Scritti*, 1911 cit., p. 239).

plicò all'analisi dei principii di Geometria[69], facendo vedere che le proprietà di posizione delle figure geometriche si possono esprimere mediante un certo gruppo di idee: punto, segmento, retta, semiretta, piano, triangolo, tetraedro, angolo, …,[70] delle quali tutte se ne dà la definizione simbolica, eccettuate le due prime, che debbono considerarsi quali idee primitive[71]. E le proprietà o teoremi relativi si possono tutte dimostrare, eccettuate alcune, che si debbono assumere quali proposiz.[ioni] primitive (assiomi o postulati); e l'analisi accurata di queste idee primitive e di queste prop.[osizioni] primitive non si sarebbe potuta condurre a termine senza lo strumento dell'ideografia.

Lo stesso A.[utore] per far vedere l'attitudine di questa ideografia a scrivere[72] le prop.[osizioni] di varie teorie, tradusse in simboli le prop.[osizioni] dei libri V, VII, VIII, IX e X d'Euclide[73].

Lo stesso strumento fu poi adoperato da altri per lo stesso scopo[74]. Il prof. Burali-Forti[75] analizzò la teoria delle grandezze, chiarendo le proprietà fondamentali che si debbono attribuire alle grandezze d'una categoria affinché se ne possano dedurre le tali e tali conseguenze[76].

Il prof. Pieri in una serie di lavori analizzò la Geometria di posizione, facendo vedere che in essa sonvi due sole idee primitive, ed enunciandone i postulati[77].

[69] G. PEANO 1889d, *I principii di geometria logicamente esposti*, Torino, Bocca, 1889.

[70] Peano cancella «le qu».

[71] Vailati usa la stessa frase (VAILATI, 1899 cit., p. 99 - *Scritti*, 1911 cit., p. 239) e subito dopo aggiunge il riferimento all'opera di M. PASCH, *Vorlesungen über Geometrie* (1882) che avviò questo genere di studi, e fu poi perfezionata con il simbolismo di Peano.

[72] Peano cancella «varie».

[73] Peano allude ai suoi scritti 1890d, *Les propositions du cinquième livre d'Euclide, réduites en formules*, in «Mathesis» Gand, 10, 1890, pp. 73-74; 1891d, *Sommario dei libri VII, VIII, IX di Euclide*, in «Rivista di Matematica» (poi abbreviata «RdM»), 1, 1891, pp. 10-12; 1892c, *Sommario del libro X d'Euclide*, «RdM», 2, 1892, pp. 7-11. Vailati cita questi lavori nel paragrafo IX (VAILATI, 1899 cit., p. 101 - *Scritti*, 1911 cit., p. 242).

[74] Anche Vailati dedica l'ultima parte del suo saggio ad illustrare, nel paragrafo IX, i contributi dei collaboratori di Peano, citando estesamente non solo i risultati di Cesare Burali-Forti e di Mario Pieri, ma anche quelli suoi, di Alessandro Padoa e di Enrico de Amicis, apparsi sulla «RdM» di Peano (VAILATI, 1899 cit., pp. 100-102 – *Scritti*, 1911 cit., pp. 240-242). Quest'ultimo autore, nell'articolo *Dipendenza fra alcune proprietà notevoli delle relazioni fra enti di un medesimo sistema*, in «RdM», 2, 1892, pp. 113-127, dichiarò di essersi ispirato al lavoro di G. VAILATI, *Le proprietà fondamentali delle operazioni della Logica deduttiva studiate dal punto di vista di una teoria generale delle operazioni*, in «RdM», 1, 1891, pp. 127-134.

[75] Peano cancella «esaminò».

[76] Peano si riferisce all'articolo di C. BURALI FORTI, *Sulla teoria delle grandezze*, in «RdM», 3, 1893, pp. 76-101.

[77] Il riferimento è ai saggi di M. PIERI, *Sui principii che reggono la geometria di posizione*, in «Atti R. Accademia delle Scienze di Torino», 30, 1894-95, pp. 607-641 e 31, 1895-96, pp. 381-399; 457-470 e *Un sistema di postulati per la geometria projettiva astratta degli iperspazi*, in

Nel 1892 si è cominciata la stampa del Formulaire de mathématiques[78]; quest'opera dovrebbe essere un'enciclopedia matematica[79], scritta coll'ideografia. Ma la stampa procede lentamente, causa le molte difficoltà che vi si incontrano. La difficoltà principale è questa che finora si sono costrutti i simboli atti a rappresentare le idee di logica, e poi alcune idee d'Aritmetica. Ma siamo lungi dall'avere una pasigrafia completa, atta ad esprimere tutte le idee delle varie scienze, e nemmeno quelle della Matematica. //

Il lavoro finora fatto è già importante per sé, e già ricevette numerose applicazioni. Il Formulario di Matematica è già una discreta raccolta di proposizioni, definizioni e dimostrazioni[80], utili a consultarsi da chiunque voglia scrivere un libro d'Aritmetica o d'Algebra, essendo esso finora limitato a questo campo. Quanto si è fatto è un'utile preparazione per la costruzione della pasigrafia, o ideografia generale, e alla stampa dell'enciclopedia matematica. Ma la pasigrafia sarà edificata quando siano ridotte in simboli tutte le parti della Matematica, e dell'umano sapere.[81] Se uno vuol ridurre in simboli ad es. il calcolo infinitesimale deve esaminare tutti i termini che vi figurano, funzioni, variabili, derivate, differenziali parziali e totali, integrali, variazioni;

Cenno sull'ideografia, cioè far vedere come effettivamente i simboli $\cap \cup \sim \supset = \exists \varepsilon$ permettono, uniti a simboli d'Aritmetica di scrivere proposizioni importanti.

Dimostrazione che l'ideografia permette l'analisi delle idee. Si prendano i simboli d'Aritmetica, e si definiscano in ordine inverso a quello del

«RdM», 6, 1896, pp. 9-16. Nel suo articolo Vailati aggiunge un ampio elogio ai lavori di Pieri scrivendo: «Parmi les essais les plus heureux pour étendre l'application de la logique mathématique aux recherches de géomètrie, nous citerons la série de Mémoires présentées à l'Académie des Sciences de Turin par le professeur Mario Pieri» e ricorda pure la traduzione italiana da lui curata della *Geometrie der Lage* di C.G. von Staudt, mediante la quale «M. Pieri a poussé l'analyse des données et des postulats, sur lesquels elle se fonde, beaucoup plus loin qu'on ne l'avait fait auparavant, ce qui a permis de donner à ses démonstrations une rigueur et une clarté bien supérieures à celles que l'on rencontre dans la manière ordinaire de traiter ces questions.» (Vailati, 1899 cit., pp. 100-101 – *Scritti*, 1911 cit., p. 241).

[78] Peano cancella «la quale».

[79] Peano cancella «fatta».

[80] Nel suo articolo sulla «RMM» Vailati si limita con pochi cenni a richiamare il collegamento fra la «RdM» e il *Formulario*, ma non tralascia di segnalare al pubblico francese la presenza, in essi, della teoria degli insiemi di G. Cantor e del calcolo vettoriale di H. Grassmann: «La *Rivista di Matematica*, qui actuellement se publie en français sous le titre de *Revue de Mathématique* (Turin, Bocca frères), commença en 1893 [1891] la publication d'un *Formulario di Matematica*, qui est un répertoire des propositions les plus importantes des différentes branches des sciences mathématiques, avec leurs démonstrations exprimées entièrement en symboles logiques. Les sections qu'on en a déjà publiées traitent de l'arithmétique, de la théorie des nombres, des opérations de l'algèbre, de la théorie des limites, et d'une partie du calcul des vecteurs de Grassmann.» (Vailati, 1899 cit., p. 102 – *Scritti*, 1911 cit., p. 242).

[81] Peano cancella «resta ancora a costr edificare».

F[ormulario], onde passare dalle def. più semplici Np, D, max, min, … alle più complicate, potenza, prodotto, e infine somma, riducendosi così alle idee primitive.

Dimostrazione che l'ideografia è un calculus ratiocinator, col fare qualche ragionamento in simboli. Se ne possono trovare in Aritmetica. Ma il più bell'esempio ch'io ne abbia dato è quello "Sur la définition de la limite" nell'American Journal[82]. Però non è facile a riprodursi.

[82] G. PEANO 1895c, *Sur la définition de la limite d'une fonction. Exercice de logique mathématique*, in «American Journal of Mathematics», 17, 1895, pp. 37-68.

Memoria

Margherita Flane

Margherita Plassa
(1934-2010)

ANITA CALCATELLI

Margherita Plassa ci ha lasciato il 14 giugno 2010, dopo una grave malattia, all'età di 75 anni. Nata a Torino il 5 dicembre 1934, si era laureata in Chimica all'Università di Torino nel 1958 con 110/110 e menzione onorevole[1]. Iniziò a lavorare in laboratori industriali, ma nel 1963 si trasferì al Consiglio Nazionale delle Ricerche, Istituto Dinamometrico Italiano di Torino, per svolgere attività di ricerca sulla produzione e l'applicazione di film sottili per le misure di forza e di deformazione. Nel 1970 Margherita divenne responsabile del nuovo Reparto "Massa e volume" dell'Istituto di Metrologia G. Colonnetti-IMGC inaugurato nel 1968 (ora parte dell'Istituto Nazionale di Ricerca Metrologica-INRIM). In questo ruolo, oltre ad altre attività, creò il laboratorio scientifico italiano per le misure primarie di massa, promosse lo sviluppo delle aree collaterali e svolse ricerche volte alla comprensione delle cause di instabilità a lungo termine dei campioni di massa di platino-iridio e quindi delle interazioni di tali campioni con l'ambiente circostante.

Plassa ha rappresentato l'Italia in vari organismi internazionali, tra cui l'importante Comitato Consultivo per la Massa (e le grandezze derivate) istituito nel 1981 e afferente al Comitato Internazionale Pesi e Misure; in questo comitato ha presieduto il gruppo di lavoro sulla massa. È stata molto attiva in EUROMET (ora EURAMET) nello stesso campo metrologico.

Dal 1993, data del suo avvio, Margherita Plassa ha operato con professionalità nel Comitato Consultivo per la Quantità di Sostanza (CCQM), dedicando la sua grande esperienza e competenza alle nuove sfide metrologiche nell'area

[1] Il titolo della tesi e le notizie sulla sua discussione sono edite nelle Fonti archivistiche del profilo-intervista *Margherita Plassa*, in *Numeri, Atomi e Alambicchi, Donne e Scienza in Piemonte dal 1840 al 1960*, a cura di Erika Luciano e Clara Silvia Roero, Torino, Centro Studi e Documentazione Pensiero Femminile, 2008, p. 417-424.

della misure chimiche e biologiche. A questo scopo avviò un laboratorio italiano di riferimento per l'analisi dei gas e sostenne l'integrazione in INRIM di attività di caratterizzazione di materiali, curando anche l'inserimento di giovani ricercatori nelle attività metrologiche in Chimica a livello nazionale e internazionale. La partecipazione ad attività internazionali le offrì la possibilità di costituire una rete tra l'INRIM e gli altri laboratori italiani interessati alla qualità delle misure analitiche nel campo della tutela della salute, della sicurezza alimentare e dell'ambiente, secondo i mandati di direttive comunitarie, come l'Istituto Superiore di Sanità e l'Istituto Superiore per la Protezione e la Ricerca Ambientale. Margherita Plassa promosse attivamente il trasferimento dell'impostazione metrologica a vari settori delle attività umane, con molteplici iniziative come la formazione, la traduzione di guide e vari documenti utili nella pratica laboratoriale italiana, tra cui la Guida EURACHEM su incertezza di misura. In Italia e all'estero partecipò inoltre alle verifiche di laboratori di taratura.

Fin dal mio ingresso all'Istituto Dinamometrico Italiano ho frequentato Margherita sia nell'ambito dell'attività di ricerca, sia al di fuori condividendo molti entusiasmi, ma anche parecchie delusioni. Insieme abbiamo svolto ricerche sui film sottili entusiasmandoci per la fisica dello stato solido, al punto che nell'intervallo di mezzogiorno anziché andare a pranzo studiavamo i vari libri scientifici sull'argomento discutendo e cercando di trasferire nella pratica di laboratorio quanto si veniva apprendendo, perché i libri erano i nostri veri maestri. Ogni tanto Margherita, alzando gli occhi dal libro e guardandomi in faccia, poneva delle domande non solo sull'argomento scientifico, ma anche sollecitando il confronto su molti aspetti della vita di ogni giorno, sulle situazioni politiche e soprattutto sulla condizione delle donne in Italia confrontando i nostri pensieri con quanto veniva nascendo e si sviluppava in altri Paesi.

Nei miei stage in laboratori stranieri, ricevevo frequentemente lettere da Margherita che mi informava non solo su ciò che si faceva nell'istituto di Torino, ma anche su quanto stava avvenendo in Italia. Ne ricordo una in particolare, che mi scrisse nel 1971, in risposta ad una mia lettera nella quale le riferivo i miei contatti con le donne femministe di Boston. Margherita mi sollecitava così: " … dai, torna presto, perché anche da noi sta sorgendo qualcosa". Per noi era urgente che le donne si organizzassero per incontrarsi e analizzare la loro condizione sia nella vita personale, sia nel lavoro. Al mio rientro cominciai a frequentare con lei un gruppo femminista che si era nel frattempo costituito qui a Torino e da allora il rapporto con Margherita divenne non più solo di amicizia, ma di vera "sorellanza". Insieme abbiamo fatto tante cose: per esempio ci siamo occupate del rapporto "donne e scienza", sia nel piccolo gruppo nato su iniziativa di nostre amiche all'Università di Torino, sia a livello nazionale, partecipando al Coordinamento e poi all'Associazione Donne e Scienza.

Margherita Plassa era molto sensibile alla problematica della situazione della donna, in particolare nell'ambito scientifico e tecnologico. Insieme abbiamo svolto indagini sul rapporto "donna e tecnologia" e insieme abbiamo redatto vari documenti su questa problematica, ad esempio nell'articolo *Donne e tecnologia, una relazione possibile e lavoro anche divertente*, presentata al congresso dell'Associazione Donne e Scienza che si tenne a Lecce nel 2007 (da cui sono tratte le citazioni che seguono).

Margherita amava le attività di tipo tecnologico e sovente parlava del piacere che proviene da un tale lavoro perché si

fa un lavoro che ha applicazioni pratiche, che non si propone solo di investigare sul mondo, ma di fabbricare delle cose. Non si vuole solamente sapere, ma fare. Ci sono persone che trovano questo fare altrettanto eccitante del soddisfare la curiosità di sapere le cause di un fenomeno.» Con Margherita si osservava «che se le donne sono poche in campo tecnologico anche se considerevolmente aumentate negli ultimi anni, è lecito avere almeno il sospetto che il piccolo numero di donne che operano in campo tecnologico non nasca da libere scelte ma vada collegato ad alcuni condizionamenti connessi con i modelli di vita che sono forniti alle ragazze ed ai ragazzi dalle loro famiglie, dalla scuola e dalla società così come dalla mancanza di volontà politica di cambiare.

Proprio sul problema della libertà di scelta Margherita amava citare questo passo di Primo Levi nel libro *La chiave a stella*:

il termine 'libertà' ha notoriamente molti sensi, ma forse il tipo di libertà più accessibile, più goduto soggettivamente, e più utile al consorzio umano, coincide con l'essere competenti nel proprio lavoro, e quindi nel provare piacere a svolgerlo.

E questo ci dice molto sia sull'amore di Margherita per la sua attività, sia sul suo desiderio di una maggior libertà per tutte le donne.

Mi manca, la sorella, l'amica, la collega, per il confronto continuo di idee e per l'incoraggiamento che mi sapeva infondere.

L'attività scientifica di Margherita Plassa è ben descritta nelle sue numerose pubblicazioni e nell'intervista che diede nel 2007 a C. Silvia Roero, apparsa con l'elenco delle sue pubblicazioni nel volume *Numeri, Atomi e Alambicchi, Donne e Scienza in Piemonte dal 1840 al 1960.*

Carla Roetti
(1943 - 2010)

BARTOLOMEO CIVALLERI

Nata a Biella nel 1943, Carla Roetti si è laureata in Chimica all'Università di Torino nel 1967. La sua carriera scientifica e accademica si è svolta quasi interamente nel medesimo Ateneo, inizialmente come tecnico laureato presso l'Istituto di Chimica Teorica diretto dal Prof. F. Ricca e poi come professore associato di Chimica Fisica (1980).

Negli anni 1973-1974 ha svolto la sua attività scientifica presso i laboratori della IBM di San Josè (CA, USA) con il Prof. Enrico Clementi. Il frutto del lavoro di questo periodo sono le tavole delle funzioni d'onda atomiche Roothan-Hartree-Fock[1], che hanno rappresentato per diversi anni un testo di riferimento per i chimici teorici, com'è testimoniato dall'elevatissimo numero di citazioni ricevute (oltre 4000) e da un'indagine del 1986 nella quale risultava essere compresa tra le 100 pubblicazioni scientifiche più citate nel periodo 1961-1982. Nel 1979, Carla Roetti è tornata come visiting scientist all'IBM di San Josè (CA, USA) per collaborare con il Dr. I. Batra. Nel 1989 è stata visiting scientist presso la sede dell'IBM Italia a Roma, dove ha sperimentato le tecniche di calcolo parallelo sui primi supercalcolatori disponibili in Italia.

La maggior parte della carriera scientifica (1967-2010) di Carla Roetti si è svolta nel gruppo di Chimica Teorica dell'Università di Torino, del quale è stata membro molto autorevole. Per quasi quarant'anni si è dedicata con i suoi colleghi allo studio quanto-meccanico delle proprietà dei solidi cristallini e nello sviluppo delle relative metodologie teoriche in programmi di calcolo, in particolare nel programma CRYSTAL. Insieme a Cesare Pisani e Roberto Dovesi, a metà degli anni settanta ha dato inizio al progetto CRYSTAL, molto ambizioso per l'epoca, che ha ricevuto un impulso particolare all'inizio degli

[1] E. CLEMENTI, C. ROETTI, *Roothan-Hartree-Fock Atomic Wavefunctions*, *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, 14, 1974, 177478.

anni ottanta con la collaborazione di Victor Ronald Saunders. Sin dalla prima versione di CRYSTAL, messa a disposizione della comunità accademica a partire dal 1988, e per le versioni successive (CRYSTAL92, CRYSTAL95, CRYSTAL98, CRYSTAL03, CRYSTAL06, CRYSTAL09), Carla Roetti è stata responsabile della standardizzazione, mantenimento, portabilità, documentazione e test del codice, oltre che del servizio di supporto agli utenti. In quest'ambito, il suo contributo allo sviluppo ed alla diffusione del programma a migliaia di utenti in tutto il mondo è stato inestimabile. Fondamentale e insostituibile è stato anche il suo apporto all'organizzazione delle numerose edizioni delle scuole estive denominate "Ab-initio Modelling in Solid State Chemistry", che si sono succedute negli anni, a partire dal 1995. Il suo rigore nell'uso dei linguaggi e della logica della programmazione, oltre alle sue indiscutibili capacità organizzative ed alla sua grande abnegazione fino agli ultimi giorni di vita, minata dalla malattia, sono stati di impareggiabile esempio ed hanno costituito un prezioso insegnamento per un numero elevato di allievi cresciuti alla sua scuola.

Principali pubblicazioni di Carla Roetti

R. Dovesi, C. Pisani, F. Ricca, C. Roetti, *Multipole Expansion of molecular charge distributions*, Transaction Faraday Society, 70, 1974, p. 1381.

E. Clementi, C. Roetti, *Roothan-Hartree-Fock Atomic Wavefunctions, Atomic Data and Nuclear Data Tables*, 14, 1974, 177478.

R. Dovesi, C. Pisani, F. Ricca, C. Roetti, *LCAO-SCF crystalline orbital method for periodic systems*, Chemical Physics Letters, 39, 1976, p. 103.

R. Dovesi, C. Pisani, F. Ricca, C. Roetti, *Regular chemisorption of hydrogen on graphite in the crystalline orbital-NDO approximation*, Journal of Chemical Physics, 65, 1976, p. 3075.

R. Dovesi, C. Pisani, C. Roetti, *Exact exchange Hartree-Fock calculations for periodic systems. II. Results for graphite and hexagonal boron nitride*, International Journal of Quantum Chemistry, 17, 1980, p. 517-529.

R. Dovesi, C. Pisani, F. Ricca, C. Roetti, *Exact exchange Hartree-Fock calculations for periodic systems. III. Ground state properties of diamond*, Physical Review, B 22, 1980, p. 5936-5944.

R. Dovesi, C. Pisani, C. Roetti, V. R. Saunders,*Treatment of Coulomb Interactions in Hartree-Fock Calculations of Periodic Systems*, Physical Review, B 28, 1983, p. 5781.

R. Dovesi, E. Ermondi, E. Ferrero, C. Pisani, C. Roetti, *Hartree-Fock study of lithium hydride with the use of a polarizable basis set*, Physical Review, B 29, 1984, p. 3591-3600.

G. Angonoa, R. Dovesi, C. Pisani, C. Roetti, *A new technique for the evaluation of densities of states in ab initio calculations of periodic systems*, Physica Status Solidi B 122, 1984, p. 211-219.

C. Pisani, M. Causà, R. Dovesi, C. Roetti, *Hartree-Fock ab initio characterization of ionic crystal surfaces with a slab model. The (0001) face of -Al_2O_3'*, Progress in Surface Science, 25, 1987, p. 119-137

C. Pisani, R. Dovesi, C. Roetti, *Hartree-Fock ab initio Treatment of Crystalline Systems*, Lecture Notes in Chemistry, Vol. 48, Heidelberg, Springer Verlag, 1988.

R. Orlando, R. Dovesi, C. Roetti, V.R. Saunders, *Ab initio Hartree-Fock calculations of periodic compounds: application to semiconductors*, Journal of Physics: Condensed Matter, 2, 1990, p. 7769-7789.

R. Dovesi, M. Causà, R. Orlando, C. Roetti, V.R. Saunders, *Ab initio approach to molecular crystals: a periodic Hartree-Fock study of crystalline urea*, Journal of Chemical Physics 92, 1990, p. 7402-7411.

C. Gatti, V.R. Saunders, C. Roetti, *Crystal field effects on the topological properties of the electron density in molecular crystals. The case of urea*, Journal of Chemical Physics, 101, 1994, p. 10686-10696.

C. Roetti, *The CRYSTAL Code*, in *Quantum-Mechanical ab initio Calculation of the Properties of Crystalline Materials* (C. Pisani, ed.), Lecture Notes in Chemistry, Vol. 67, Berlin, Springer, 1996, p. 125.

R. Dovesi, R. Orlando, C. Roetti, C. Pisani, *The periodic Hartree-Fock method and its implementation in the CRYSTAL code*, Physica Status Solidi B 217, 2000, p. 63-88.

R. Dovesi, B. Civalleri, R. Orlando, C. Roetti, V. R. Saunders, *Ab initio Quantum Simulation in Solid State Chemistry*, Review in Computational Chemistry, 21, 1, 2005, New York, John Wiley & Sons.

R. Dovesi, R. Orlando, B. Civalleri, C. Roetti, V. R. Saunders, C.M. Zicovich-Wilson, *CRYSTAL: a Computational Tool for the ab initio Study of the Electronic Properties of Crystals*, Zeitschrift für Kristallographie, 220, 2005, p. 571-573.

B. Civalleri, F. Napoli, Y. Noel, C. Roetti, R. Dovesi, *Ab-initio prediction of materials properties with CRYSTAL: MOF-5 as a case study*, CrystEngComm, 8, 2006, p. 364-371.

S. Casassa, M. Halo, L. Maschio, C. Roetti, C. Pisani, *Beyond a Hartree-Fock description of crystalline solids: The case of lithium hydride*, Theoretical Chemistry Accounts, 117, 2007, p.781-791.

Claudio Sensi
(1951-2011)

MARIAROSA MASOERO, GIUSEPPE ZACCARIA

> La sintonia con l'occhio dell'altro dà sostanza a quanto coglie il mio, la complicità nelle cose umane mi aiuta ad amare lo spettacolo del mondo[1].
>
> Claudio Sensi

L'attività scientifica di Claudio Sensi[2] si è svolta tenendo fermi alcuni principi non solo metodologici, ma si può dire di "coscienza"[3]. In primo luogo lo scrupolo filologico che, inserito in un'ampia prospettiva storica, ha dato luogo a fondamentali lavori tra cui l'edizione critica delle traduzioni alfieriane del teatro greco, le note filologiche per alcuni romanzi di Pavese (la trilogia *La bella estate* e *La luna e i falò*), l'edizione commentata di un inedito *Viaggio in Terrasanta* che vale anche come strumento di una lettura interpretativa estesa a tutti gli aspetti del genere, dalle fonti ai riferimenti storico-geografici. Per non parlare dell'avvio del poderoso lavoro già condotto per l'edizione critica della *Gerusalemme conquistata*, di cui ha anticipato un primo bilancio filologico al convegno del 1999 sul *Tasso a Roma*.

Questa precisione e attenzione ai più riposti aspetti storico-culturali del testo ha guidato anche i suoi studi critici che sono spaziati da Dante fino ai

[1] La citazione è tratta dalla *Presentazione* al volume *Viaggi e pellegrinaggi fra Tre e Ottocento. Bilanci e prospettive*, a cura di C. Sensi e P. Pellizzari, Alessandria, Edizioni dell'Orso, 2008, p. XI. Essa è stata inserita in tutti i materiali della comunicazione del congresso nazionale annuale dell'Associazione Degli Italianisti tenutosi a Torino, nei locali dell'Università (Rettorato, Palazzo Gorresio, Palazzo Nuovo), dal 14 al 17 settembre 2011 e a lui dedicato.

[2] Nato a Torino il 16 aprile 1951, Claudio Sensi è morto nella sua casa di Rivoli (Torino) il 23 aprile 2011. Figlio unigenito di Evelina Birolo e di Luigi Sensi, era sposato con Benedetta Fassio e padre di Cecilia.

[3] Lo stesso dicasi per il suo "mestiere" di insegnante, portato avanti con sensibile attenzione e grande disponibilità all'ascolto nei confronti degli studenti. Se ne ricordano qui le principali tappe attraverso le sue stesse parole: «Dal 1975 al 1987 professore di materie letterarie, latino e greco nei licei; dal 1987 al 1994 lettore di italiano a Montpellier e a Lyon II; dal 1994 professore straordinario di Letteratura Italiana a Cagliari; dal 1997 ordinario; dal 1998 titolare presso la Facoltà di Lingue e Letterature Straniere dell'Università di Torino, corso di laurea in Scienze del Turismo; dal 1° novembre 2008 docente nella Facoltà di Lettere e Filosofia».

poeti del Novecento con la scelta di argomenti mai neutrali, ma tutti guidati da una profonda immedesimazione nelle problematiche sollecitate dagli autori e dai testi, come se si trattasse di un confronto vivo e direttamente partecipato. In fondo Claudio Sensi ha sempre posto delle domande decisive alle pagine che interrogava. Lo si vede bene nei saggi su Dante, autore con il quale si confrontava alla ricerca di risposte sui grandi temi della vita e al quale da tempo dedicava larga parte della sua attività didattica e scientifica.

A maggior ragione hanno sollecitato una sua partecipazione, anche molto sofferta, le testimonianze dei reduci dagli orrori dei campi di concentramento. A legare fra loro questi lavori sono le parole che nascono da quello stravolgimento della dignità umana che ancora in tempi recenti ha rivelato la crudeltà dell'uomo, facendolo precipitare in quegli inferni rispetto ai quali si leva solo la forza della testimonianza a rivendicare i diritti conculcati della giustizia e dell'umanità per non far morire la speranza.

Questa partecipazione è giustificata dalla profonda sensibilità religiosa con cui Claudio Sensi si è accostato ai testi scegliendo di preferenza quelli le cui problematiche indagavano il mistero della vita e della morte nelle sue stesse contraddizioni storico-esistenziali. Un esempio significativo è quello offerto dalla civiltà barocca in cui i linguaggi dell'arte e della letteratura coprono anche un vuoto profondo che si apre nella crisi delle coscienze, consentendo di stabilire un confronto non solo superficiale con molti aspetti della sensibilità novecentesca. In questa prospettiva, a partire da Giacomo Lubrano, Claudio Sensi ha allargato l'indagine a vari temi della cultura barocca, «dalla lirica all'oratoria all'interpretazione dei classici».

Diventa agevole a questo punto il passaggio a uno degli autori più complessi e problematici del Novecento, quel Cesare Pavese a cui non solo ha dedicato l'attenzione filologica ma che ha "rivissuto" nel lungo viaggio attraverso le opere, quasi a cercare le ragioni che tenevano insieme l'etica del lavoro, il bisogno di amare e un tragico destino di infelicità (*Gli orizzonti sognati*).

Quello del viaggio è stato un altro dei motivi conduttori dell'esperienza critica di Claudio Sensi, il viaggio inteso anche come metafora di quella condizione umana che la letteratura ha saputo esprimere, il viaggio intrapreso «per seguir virtute e conoscenza» sul piano umano e su quello religioso. Oltre ai *Ritocchi per Sassetti* e all'edizione del compendio italiano inedito del *Bouquet sacré composé des plus belles fleurs de la Terre Saincte* di Jean Boucher, francescano del Seicento, Claudio Sensi ha organizzato la più ampia prospettiva offerta dal convegno *Viaggi e pellegrinaggi fra Tre e Ottocento. Bilanci e prospettive*, curandone gli atti nella collana «Oltramare».

Sul piano di una sofferta spiritualità si collocano anche alcuni tra i più significativi esponenti della lirica novecentesca, come Clemente Rebora, Vittorio Sereni e David Maria Turoldo, a cui Claudio Sensi ha pure rivolto la sua attenzione.

In tutti i suoi lavori va ricordata la straordinaria capacità di cogliere non solo i significati profondi, ma anche le vaste connessioni con tutti i possibili riferimenti storico-culturali, come dimostrano le fittissime note che corredano le sue ricerche. Al tempo stesso non va dimenticata l'ampiezza delle prospettive che gli hanno consentito di affrontare non facili questioni di comparatistica, soprattutto per quanto riguarda i rapporti fra la letteratura italiana e le letterature francese e tedesca, aiutato in questo da una conoscenza non comune delle lingue antiche e moderne, dall'ebraico alle lingue slave (alla tesi di laurea in Letteratura Italiana, intitolata *Giacomo Lubrano: cultura ed espressione*, discussa con Marziano Guglielminetti il 3 luglio 1974, aveva fatto seguito nel 1984 quella in Letteratura Tedesca, dal titolo *Sonne und Mond in Albert Paris Gütersloh*, con Claudio Magris). La sua esperienza internazionale è maturata anche nei tanti viaggi e pellegrinaggi compiuti come accompagnatore turistico, mentre l'immersione nella cultura francese è avvenuta grazie all'insegnamento di Italiano, dal 1987 al 1994, nelle Università di Montpellier e di Lyon II. Dei suoi saggi, oltre ai continui riferimenti alle letterature straniere, si segnalano quelli su Albert Paris Gütersloh (*«Meine geliebten Engländer»: Gütersloh e il romanzo umoristico* e *Il mondo in un libro: «Sonne und Mond» di Albert Paris Gütersloh*), su Imre Kertész e Helga Schneider (*Vite segnate e drammi rivissuti: Imre Kertész e Helga Schneider*), su Pavel Florenskij (*Un genio in Lager: la testimonianza di Pavel Florenskij*) e, per quanto riguarda l'ambito francese, quelli su Prosper Mérimée (introduzione al breve romanzo di argomento corso *Colomba*) e su René Char (*Su «Lettera amorosa» di René Char*).

Il nostro ricordo di Claudio Sensi

LAURA NAY, CLARA ALLASIA, DAVIDE DALMAS

Risale al 1° novembre 2008 l'arrivo di Claudio Sensi alla Facoltà di Lettere e Filosofia, sulla cattedra di Letteratura Italiana che era stata di Marziano Guglielminetti, il nostro comune e compianto maestro. In realtà si tratta dell'ultimo atto di un rapporto mai interrotto: in questa Facoltà Claudio, lo hanno ricordato gli amici Mariarosa Masoero e Beppe Zaccaria, si era laureato e da questa Facoltà aveva mosso i primi passi della sua carriera accademica. Per noi l'immagine di lui è indissolubilmente legata a quello di Guglielminetti ed è ancora vivo il ricordo dei seminari che lo stesso Guglielminetti affidava al giovane studioso, in procinto di partire per la Francia. Claudio era un oratore di grande forza e di raro garbo, capace di guidare l'ascoltatore attraverso le pieghe del suo pensiero e, contemporaneamente, indurlo a spingere lo sguardo oltre, lasciandogli intravedere nuovi spazi, terre inesplorate. Capita così che rileggendo quanto lui aveva scritto alla scomparsa di Guglielminetti ci si accorga, improvvisamente, che in quelle righe affettuose rivolte al maestro, aveva detto molto anche di sé. Innanzitutto del suo modo si intendere il magistero, che implicava l'educazione «all'autonomia nel lavoro, al coraggio dell'attraversamento senza sgomento terreni non cartografati, nell'osare interpretazioni inedite» perché, chiosava, «un po' di coraggio e di rischio fa parte dell'essenza dell'esercizio critico».

E non è certo un caso che Claudio avesse scelto di inaugurare la sua docenza a Lettere toccando due argomenti che a tutti noi, allievi di Guglielminetti, sono particolarmente cari: l'autobiografia e il *Momus* di Leon Battista Alberti (i due corsi si intitolavano *Scrivere di sé: itinerari nell'autobiografia* e *Il "Momus" di Leon Battista Alberti: un elogio dello scherno nel segno di Luciano*). Per l'anno accademico seguente aveva ideato due percorsi dedicati alla letteratura di viaggio, un interesse, lo aveva scritto sulla sua pagina web, «recente, che sto coltivando con attenzione e sensibilità»: dal viaggio di Ulisse in Dante, a quelli alle isole nei poemi di Ariosto e di Tasso. Nella specialistica la sua attenzione si sarebbe spostata sul viaggio di Niccolò de' Conti raccolto da Poggio Bracciolini nel

De varietate fortunae. Lo stesso Claudio ha lasciato scritto, in *Marziano Guglielminetti "viaggiatore"*, un altro testo con molti spunti autobiografici, quale fosse l'idea di viaggio che lo affascinava e non si tratta certo solo di quello che possiamo ripercorrere su una cartina geografica: «il conquistare orizzonti nuovi – son parole sue – e il dilatare, tramite autopsia, i territori del noto conduce alla fine lo scrittore a *redire in se ipsum*, alla ricerca della verità del proprio vissuto».

La malattia non gli ha concesso il tempo per completare il ciclo di lezioni, ma, fino all'ultimo, è stato presente in aula, anche quando non poteva più esservi di persona: aveva preparato, come era sua abitudine, una silloge di preziosi appunti di cui gli studenti hanno potuto avvalersi e che sono attualmente in corso di stampa per le cure di Simona Re Fiorentin. Non solo: quando ormai era costretto a letto e Davide Dalmas si era offerto di fare lezione al posto suo, Claudio aveva continuato a seguire con la stessa intatta disponibilità le vicende dei suoi corsi, informandosi quasi con ansia dell'andamento delle lezioni e degli esami. La sua attenzione nei confronti degli studenti era ben nota: celebri i suoi ricevimenti, quando la coda davanti alla porta si allungava, perché certo non era un professore al quale limitarsi a chiedere come stendere una bibliografia: con lui nascevano continue e feconde occasioni di confronto.

Dell'attività di Claudio Sensi nel breve tempo trascorso alla Facoltà di Lettere ci piace innanzitutto ricordare la giornata di studi, da lui fortemente voluta, tenutasi a Torino il 15 ottobre 2010 e dedicata ancora una volta al nostro comune maestro: *Dalla parte dell'io: Marziano Guglielminetti e gli studi sull'autobiografia*; gli interventi, raccolti in questi mesi, sono ora in corso di pubblicazione. Claudio vi era apparso già visibilmente provato, sorprendendo molti dei relatori che nulla sapevano del suo stato di salute.

Altro momento importante, nell'ottobre 2008, la *lectura* all'Istituto Orientale di Napoli sul canto XXVII dell'*Inferno*, cui va accostato il bel volume postumo *Parole di fuoco, parole di gelo* che raccoglie tre incisivi saggi danteschi, a testimonianza di un interesse mai venuto meno e capace di esprimere pagine «impegnative» e altre, definite dal loro autore con ironico *understatement*, «avventurose» e «talora azzardate».

E ancora, accanto ai progetti in essere, le pubblicazioni già uscite: l'introduzione all'antologia francese di Giacomo Lubrano, le belle pagine dedicate al "viaggiatore" Guglielminetti, cui abbiamo fatto cenno, il saggio sulla "lettera amorosa" di René Char. Ma soprattutto, sempre all'insegna della continuità, l'edizione del *Viaggio in Terrasanta*, un compendio italiano inedito del *Bouquet sacré* di Jean Boucher, testo che Claudio Sensi riesce a svelare al lettore nella sua rara bellezza attraverso un prezioso commento e una dotta e imprescindibile introduzione. «Curiosità» e «umiltà» sono le doti che nella *Presentazione* a questo volume egli stesso indica come fondamentali in un ricercatore e crediamo che questa possa essere la cifra che sigla un profilo intellettuale in cui la ricchezza interiore sapeva esprimersi con naturale discrezione.

Grande malinconia suscitano le molte tracce di progetti di ricerca che testimoniano la ricchezza e la varietà dei suoi interessi: dallo studio «in lavorazione» su *Alfieri e Omero*, alla ricerca ermeneutica sui *Dialoghi con Leucò*, dal progettato volume *Mastri di penna e del parlar sottile*, che «stava elaborando a spizzichi» (sono ancora parole sue) e avrebbe dovuto raccogliere alcuni studi fra Rinascimento e Barocco, all'idea, che «non gli sarebbe dispiaciuta», di ripubblicare il commento di Gilles Ménage all'*Aminta.*

«Dolore cocente misto a meraviglia» e poi «rimpianto struggente» e la consapevolezza «che l'eclisse è definitiva e la viva voce perduta»: queste sono le parole che Claudio aveva scritto nel ricordo di Guglielminetti e con queste parole vorremmo chiudere, lasciando a lui il compito di esprimere il vuoto che gli amici, i colleghi, gli allievi avvertono, un vuoto colmabile solo, come lui ci ha insegnato, dall'eco della sua voce che ancora possiamo «ospitare in noi».

Bibliografia degli Scritti di Claudio Sensi

In questa prima bibliografia, di taglio prettamente scientifico, si è scelto di non registrare i numerosi e importanti articoli comparsi su quotidiani e di non dar conto, per non rischiare di forzare il pensiero del loro autore, dei rapporti che talvolta legano in silenziosa consequenzialità saggi dedicati allo stesso argomento.

Per introdurre i lettori agli scritti di Claudio Sensi non ci sono parole migliori di quelle che lui stesso aveva dedicato a tracciare i propri percorsi di ricerca. Le riproduciamo qui, nella speranza di poter rendere almeno in parte la ricchezza della "sua officina".

a. FILOLOGIA

Il lavoro più impegnativo è rappresentato dall'edizione critica delle traduzioni alfieriane dal greco: dopo Eschilo, Sofocle, Aristofane (pubblicati ad Asti nel 1985) ed Anacreonte (pubblicato a Montpellier nel 1990), sta lavorando all'edizione critica dei frammenti di traduzione.

Altri lavori, più circoscritti, sono stati raccolti in *Quattro studi filologici* (Montpellier, Université Paul Valéry, 1990). Ha curato, con Mariarosa Masoero, le note filologiche per la nuova edizione dei romanzi di Pavese, uscita nella Pléiade di Einaudi nel 2000.

Nel 2002 ha curato una scelta antologica delle poesie di Maria Luisa Belleli. Ha curato l'edizione commentata di un *Viaggio in Terrasanta* inedito, che compendia un testo francese del Seicento.

b. CRITICA LETTERARIA

Dante

Lo ha affrontato nel 1995, con un impegnativo saggio sul linguaggio dei traditori, seguito, nel '96, da un intervento su Nicola Zingarelli interprete della *Commedia.* Ha scritto alcune pagine, avventurose, su Caronte e altre (talora azzardate) su Ulisse e Guido da Montefeltro. Nell'ottobre del 2008 ha tenuto una *lectura* all'Istituto Orientale di Napoli sul XXVII dell'*Inferno*.

Tasso

Ha pubblicato nel 1992 un saggio in francese sulla *Gerusalemme Conquistata*; un altro saggio tassiano è uscito negli atti del convegno *L'Africa, Gerusalemme e l'aldilà: carte di viaggio e viaggi di carte* (Vercelli 2000); un bilancio filologico sulla *Conquistata* figura negli atti del Convegno tassiano di Roma 1999 (pubblicati nel 2004).

Letteratura barocca

Ha approfondito argomenti secenteschi già toccati nella tesi di laurea su Giacomo Lubrano, allargando l'indagine a vari temi della cultura barocca, dalla lirica all'oratoria all'interpretazione dei classici (1976-1982). Sulla lirica secentesca è tornato nel 1997 con un lungo bilancio critico per la rivista «XVII^{e} siècle». Nel 2009 ha introdotto un'antologia francese di Lubrano.

Alfieri

Accanto ai lavori filologici, ha scritto saggi critici su Alfieri traduttore. Ha scritto un saggio su *Alfieri aristofanico* e uno sulla traduzione delle *Rane* di Aristofane. Ha in lavorazione uno studio su *Alfieri e Omero*.

Pavese

Dopo un saggio in francese su *Lavorare stanca* (1990) ed il lavoro filologico attorno alla trilogia *La bella estate* e *La luna e i falò* (2000), ha dedicato a Pavese un lungo e appassionato saggio tematico (*Gli orizzonti sognati*). Ha in corso una ricerca ermeneutica sui *Dialoghi con Leucò*.

Poesia del Novecento

Si è anche occupato di poesia del Novecento italiana (Pavese, Sereni, Turoldo) e straniera (René Char).

Letteratura di viaggio e pellegrinaggio

È un interesse recente, che sta coltivando con attenzione e assiduità. Con Patrizia Pellizzari ha organizzato a Torino nel 2007 un convegno su *Viaggi e pellegrinaggi fra Tre e Ottocento. Bilanci e prospettive*, i cui Atti sono usciti l'anno seguente presso le Edizioni dell'Orso di Alessandria, nella collana "Oltramare". Nella medesima collana ha pubblicato, col titolo *Viaggio in Terrasanta*, l'edizione commentata di un compendio italiano inedito del *Bouquet sacré* di Jean Boucher (1614).

Inoltre ha scritto un saggio sul *Socrate immaginario* di Galiani-Lorenzi-Paisiello, con inclinazione verso il diletto melodramma. Sta elaborando, a spizzichi, un volume di studi fra Rinascimento e Barocco (titolo: *Mastri di penna e del parlar sottile*), che dovrebbe uscire presso le Edizioni dell'Orso di Alessandria.

Non gli dispiacerebbe ripubblicare il commento di Gilles Ménage all'*Aminta*.

c. TEORIA E VICENDE DEL ROMANZO CONTEMPORANEO

Gli studi sul romanzo austriaco, iniziati con la tesi di laurea in Germanistica, gli hanno permesso di approfondire le metodologie di analisi del racconto. Ha studiato in particolare alcuni fenomeni di *monstra* narrativi, interrogandosi vivamente sulla specificità di questo genere letterario.

d. POETICA E COMPARATISTICA

Nell'ambito del seminario montepessulano diretto da Franc Ducros, ha approfondito il rapporto tra poesia e filosofia, alla luce di interpretazioni canoniche (Heidegger) e suggestioni più sottili (Maldiney). Ha partecipato assiduamente ai lavori del seminario, collaborando a «Previe», rivista del "Groupe de Recherche sur le Poétique".

Presso il Dipartimento di Filologie e Letterature Moderne dell'Università di Cagliari si è occupato di seminari di letteratura comparata, disciplina che ha anche insegnato nell'a.a. 1998/99 e che continua ad interessarlo da vicino.

Elenco delle principali pubblicazioni[4]

1975

1. Recensione a Francesco Pona, *La lucerna*, a cura di Giorgio Fulco, in «Lettere italiane», 27 (1975), 1, p. 114-116.

1976

2. *Inediti tassoniani*, in «Lettere italiane», 26 (1976), 1, p. 66-76.
3. *Giacomo Lubrano: contributi per una biografia*, in «Italianistica», 5 (1976), 2, p. 238-259.

1977

4. Recensione a Michele Rak, *La maschera della fortuna. Lettura del Basile toscano*, in «Lettere italiane», 29 (1977), 2, p. 246-249.

1978

5. *Cultura barocca tra consenso e polemica: gli epigrammi latini di Giacomo Lubrano*, in «Esperienze letterarie», 1978, 2, p. 31-54.
6. *Per una biografia di Luigi Giuglaris*, in «Studi piemontesi», 7 (1978), 2, p. 367-376 (con P. Elia)
7. Recensione a Ludovico San Martino d'Aglié, *Alvida - La caccia*, a cura di Mariarosa Masoero, in «Studi Piemontesi», 7 (1978), 1, p. 197-199.
8. *Il II Congresso internazionale di studi sulla S. Sindone - I «Nouve» di Saboly*, in «Studi Piemontesi», 7 (1978), 1, p. 224-225.
9. Recensione a *Mario Chiesa-Giovanni Tesio, Il dialetto da lingua della realtà a lingua della poesia*, in «Studi Piemontesi», 7 (1978), 2, p. 475-476.

1982

10. *Gli emblemi dell'inconsistenza e l'"arcimondo" della fantasia*, in «Lettere italiane», 34 (1982), 2, p. 176-214.

1983

11. *L'"arcimondo" della parola. Saggi su Giacomo Lubrano,* Padova, Liviana, 1983.
12. *La retorica dell'apoteosi. Arte e artificio nei panegirici del Lubrano,* in «Studi secenteschi», 24 (1983), p. 69-152.

[4] L'elenco è stato curato da Laura Nay e Clara Allasia.

13. Recensione a Giacomo Lubrano, *Scintille poetiche*, a cura di Marzio Pieri, in «Lettere italiane», 35 (1983), 3, p. 394-402.
14. Edizione critica della traduzione alfieriana dell'*Eneide*, Asti, Centro Nazionale di Studi Alfieriani, 1983 (libri I-VI a cura di Mariarosa Masoero, libri VII-XII a cura di Claudio Sensi).

1984

15. *La tralucenza dell'antico*, Parma, Zara, 1984.
16. *Vittorio Alfieri interprete del teatro classico,* in *L'arte dell'interpretare. Studi critici offerti a Giovanni Getto,* Cuneo, L'Arciere, 1984 (parte latina a cura di Mariarosa Masoero, parte greca a cura di Claudio Sensi), p. 435-458.

1985

17. Edizione critica del *Teatro greco* tradotto da Vittorio Alfieri, Asti, Centro Nazionale di Studi Alfieriani, 1985.
18. *«Meine geliebten Engländer»: Gütersloh e il romanzo umoristico,* in «Studi tedeschi», 28, (1985), 1-3, p. 327-362.
19. *Alfieri traduttore dei classici,* in *Vittorio Alfieri e la cultura piemontese fra Illuminismo e Rivoluzione*, atti del Convegno internazionale di studi in memoria di Carlo Palmisano (San Salvatore Monferrato, 22-24 settembre 1983), a cura di Giovanna Ioli, San Salvatore Monferrato, Cassa di risparmio di Alessandria; Città di San Salvatore Monferrato; Regione Piemonte, 1985, p. 479-485 (parte latina a cura di Mariarosa Masoero, parte greca a cura di Claudio Sensi).

1986

20. *Il mondo in un libro: "Sonne und Mond" di Albert Paris Gütersloh*, in «Lingua e Letteratura», 6 (1986), p. 17-43.

1988

21. Recensione a Carlo Botta, *«Per questi dilettosi monti»*, a cura di Luca Badini Confalonieri, premessa di Andrea Battistini, in «Giornale storico della letteratura italiana», 165 (1988), 529, p. 129-131.

1989

22. *Ritocchi per Sassetti*, in «Filologia e critica», 14 (1989), 2, p. 233-253.
23. *Introduzione a* Prosper Mérimée, *Colomba*, Cinisello Balsamo, Edizioni Paoline, 1989.

1990

24. *Quattro studi filologici,* Montpellier, Université Paul Valéry, 1990.
25. *L'homme seul et la "mer inutile": deux poèmes de Cesare Pavese*, in «Prevue», 40 (1990), 10, p. 1-12.
26. Recensione a Valeria Bertolucci, *Morfologie del testo medievale*, in «Revue des langues romanes», 94 (1990), 1, p. 170-177.

1992

27. *Dans la forêt de la "Jérusalem Conquise"*, in «Prevue», N.S., 2 (1992), 12, p. 53-100.
28. *Cantieri pavesiani*, in «Filologia e critica», 17 (1992), 3, p. 359-393.

1995

29. *Pavese in Francia 1990-1994,* in «Quaderni del Centro studi Cesare Pavese» 1 (1995), p. 99-114.

1996

30. *Zingarelli: un'idea della "Commedia"*, in *Nicola Zingarelli: umanità e scrittura*, Atti del Convegno (Cerignola, 29-30 marzo 1996), a cura di Carmen Di Donna Prencipe, Bari, Mario Adda Editore, 1996, p. 259-272.

1997

31. *La poésie lyrique: état des lieux I. Marino, le prince astucieux*, in «XVII^{e} siècle», 49 (1997), 4, p. 677-713.
32. *La poésie lyrique: état des lieux II. Constellations*, in «XVII^{e} siècle», 49 (1997), n. 4, p. 727-752.

33. Recensione a Angelo Colombo, *«Ora l'armi scacciano le Muse». Ricerche su Giovan Battista Marino (1613-1615)*, in «Studi Piemontesi», 26 (1997), 2, p. 462-463.
34. *Le langage des traîtres dans l'"Enfer" de Dante*, in *Félonie, trahison, reniements au Moyen Âge*, Actes du troisième colloque international (Montpellier, Université Paul Valéry, 24-26 novembre 1995), «Le cahiers du C.R.I.S.I.M.A. n° 3», Montpellier, Université Paul Valéry, 1997, p. 233-257, poi in *Parole di fuoco, parole di gelo* [49].

1999

35. Recensione a Guido Gozzano, *San Francesco d'Assisi*, edizione critica a cura di Mariarosa Masoero, in «Studi Piemontesi», 28 (1999), 1, p. 258-259.

2000

36. Nota filologica a *La bella estate, Il diavolo sulle colline, Tra donne sole, La luna e i falò* in Cesare Pavese, *Tutti i romanzi*, a cura di Marziano Guglielminetti, Torino, Einaudi, 2000, p. 1011-1028; 1032-1047; 1054-1073; 1081-1104.

2001

37. *Gli orizzonti sognati*, in *Sotto il gelo dell'acqua c'è l'erba. Omaggio a Pavese* (I libri di «Levia gravia», 1), Alessandria, Edizioni dell'Orso, 2001, p. 171-215.

2002

38. *Il "Libro delle ascensioni" di Torquato Tasso*, in *Carte di viaggi e viaggi di carta: l'Africa, Gerusalemme e l'Aldilà*, Atti del Convegno (Vercelli, 18 novembre 2000), a cura di Giusi Baldissone e Marco Piccat, Novara, Interlinea, 2002, p. 73-95.
39. Cura e note filologiche a Maria Luisa Belleli, *Il ritmo del silenzio. Itinerari poetici*, Torino, Tirrenia Stampatori, 2002.

2004

40. *Per un'edizione critica della "Gerusalemme Conquistata"*, in *Tasso a Roma.* Atti della giornata di studi (Roma, Biblioteca Casanatense, 24 novembre 1999), a cura di Guido Baldassarri, Istituto di Studi Rinascimentali di Ferrara, Modena, Franco Panini Editore, 2004, p. 85-99.

2005

41. *Vite segnate e drammi rivissuti: Imre Kertész e Helga Schneider*, in *Il valore letterario e culturale della memorialistica della deportazione*, IV ciclo, a cura di Fabio Uliana, Torino, Fondazione Istituto Piemontese Antonio Gramsci, 2005, p. 243-263.
42. *Socrate/Sòreta o la macchina del comico*, in *Sentir e meditar. Omaggio a Elena Sala Di Felice*, a cura di Laura Sannia Nowé, Francesco Cotticelli, Roberto Puggioni, Roma, Aracne, 2005, p. 189-206.

2006

43. *L'Antico di Giorni e Caron dimonio*, in *«E 'n guisa d'eco i detti e le parole». Studi in onore di Giorgio Bárberi Squarotti*, Alessandria, Edizioni dell'Orso, 2006, vol. III, p. 1741-1748; poi in *Parole di fuoco, parole di gelo* [49].
44. *Domande a Dio dal fondo del lager*, in *Il valore letterario e culturale della memorialistica della deportazione*, V ciclo, a cura di Fabio Uliana, Torino, Fondazione Istituto Piemontese Antonio Gramsci, 2006, p. 24-44 (prospettiva ebraica a cura di Alberto Mosheh Somekh, prospettiva cristiana a cura di Claudio Sensi).

2007

45. *Vittorio Sereni: prigionia e memoria*, in *Dal buio del sottosuolo. Poesia e lager*, a cura di Alberto Cavaglion, Milano, Franco Angeli, 2007, p. 97-115.
46. *Marziano Guglielminetti e Primo Levi*, in *Il valore letterario e culturale della memorialistica della deportazione*, VI ciclo, a cura di Fabio Uliana, Torino, Fondazione Istituto Piemontese Antonio Gramsci, 2007, p. 17-20.
47. *Dante, Ulisse, l'uomo, la libertà*, in *Tra saggi e racconti. Omaggio a Giovanna Cerina e Giovanni Pirodda*, a cura di Cristina Lavinio e Francesco Tronci, Nuoro, Poliedro, 2007, p. 69-99; poi in *Parole di fuoco, parole di gelo* [49].

48. *Alfieri aristofanico*, in «Levia gravia», IX (2007), p. 103-121; poi in *Présence de Vittorio Alfieri à Montpellier / Presenza di Vittorio Alfieri a Montpellier*, Actes du colloque (Montpellier, Université Paul Valéry, 12-13 décembre 2003), sous la direction de Myriam Carminati et Sylvie Favalier, Hamburg, DOBU Verlag, 2009, p. 93-112.

2008

49. *Un genio in Lager: la testimonianza di Pavel Florenskij*, in *Il valore letterario e culturale della memorialistica della deportazione. Scrivere la memoria del lager: un confronto internazionale*, a cura di Fabio Uliana, Torino, Fondazione Istituto Piemontese Antonio Gramsci, 2008, p. 50-70.
50. *Una lingua per Aristofane*, in *"La Commedia in Palazzo". Approfondimenti sulle Commedie di Vittorio Alfieri*, Atti del convegno internazionale (Napoli, 13 maggio 2005), a cura di Vincenzo Placella con la collaborazione di Anthi Nicas, Napoli, Istituto Universitario Orientale, 2008, p. 111-143.
51. *Un compendio italiano inedito del "Bouquet sacré composé des plus belles fleurs de la Terre Saincte" di Jean Boucher, francescano del Seicento*, in *Viaggi e pellegrinaggi fra Tre e Ottocento. Bilanci e* prospettive, Atti del convegno (Torino, 26 marzo 2007), a cura di Claudio Sensi e Patrizia Pellizzari, Alessandria, Edizioni dell'Orso, 2008, p. 197-241.
52. *Maître et passeur. Per Marziano Guglielminetti dagli amici di Francia*, a cura di Claudio Sensi, presentazione di Lionello Sozzi, Alessandria, Edizioni dell'Orso, 2008.
53. Cura editoriale degli Atti del Convegno *Viaggi e pellegrinaggi fra Tre e Ottocento: bilanci e prospettive*, Alessandria, Edizioni dell'Orso, 2008 (con Patrizia Pellizzari).

2009

54. *Préface* a Giacomo Lubrano, *La voix dans le vide. Sonnets*, choisis, traduits et annotés par Ettore Labbate, Paris, Institut Culturel Italien, 2009, p. 11-16.
55. *Marziano Guglielminetti "viaggiatore"*, in *Marziano Guglielminetti. Un viaggio nella letteratura*, a cura di Clara Allasia e Laura Nay, Alessandria, Edizioni dell'Orso, 2009, p. 183-186.
56. Jean Boucher, *Viaggio in Terrasanta*, compendio italiano inedito del *Bouquet sacré composé des plus belles fleurs de la Terre Saincte*, edizione e commento a cura di Claudio Sensi, Alessandria, Edizioni dell'Orso, 2009.
57. *Una bisaccia e due penne*, in Jean Boucher, *Viaggio in Terrasanta*, a cura di Claudio Sensi, Alessandria, Edizioni dell'Orso, 2009, p. VII-LXXX.

2010

58. Su "Lettera amorosa" di René Char, in *Elaborazioni poetiche e percorsi di genere: miti personaggi e storie letterarie*. Studi in onore di Dario Cecchetti, a cura di Michele Mastroianni, Alessandria, Edizioni dell'Orso, 2010, p. 837-850.
59. *Antichi libri di viaggio e di pellegrinaggio nelle biblioteche del Piemonte,* IN *La bisaccia del pellegrino: fra evocazione e memoria. Il pellegrinaggio sostitutivo ai luoghi santi nel mondo antico e nelle grandi religioni viventi*, Atti del convegno Internazionale (Torino, Moncalvo, Casale Monferrato, 2-6 ottobre 2007), a cura di Amilcare Barbero e Stefano Piano, coordinamento editoriale e redazionale Paolo Pellizzari, Ponzano Monferrato, Centro di Documentazione dei Sacri Monti Calvari e Complessi devozionali europei, 2010, p. 189-193.

2011

60. *Parole di fuoco, parole di gelo*, Torino, Trauben, 2011 contiene gli scritti n. 43, 47, 34.

2012

61. *Isole e viaggi: l'Ulisse di Dante*, a cura di Simona Re Fiorentin, Peter Lang.
62. *Scrivere di sé. Itinerari sull'autobiografia*, in «Levia Gravia», 12 (2010), Alessandria, Edizioni dell'Orso, in corso di stampa.

Il mio ricordo di Claudio Sensi

MARA FAUSONE

Ho incontrato per la prima volta il prof. Claudio Sensi quando ho sostenuto il colloquio del concorso interno del nostro Ateneo per il posto vacante da direttore dell'Astut.

I suoi occhi di un azzurro chiarissimo e il suo sguardo diretto mi avevano dapprima intimorito, ma mentre rispondevo alle sue domande mi accorgevo che quello sguardo trasmetteva una grande attenzione nei confronti di chi gli stava di fronte.

Dopo la mia nomina a direttrice dell'Astut ho avuto modo di conoscerlo meglio: quella che era stata una prima impressione si rivelò una grande dote; era sempre molto attento e disponibile quando si parlava di progetti e iniziative a cui l'Astut partecipava, anche quando aveva già dei seri problemi di salute.

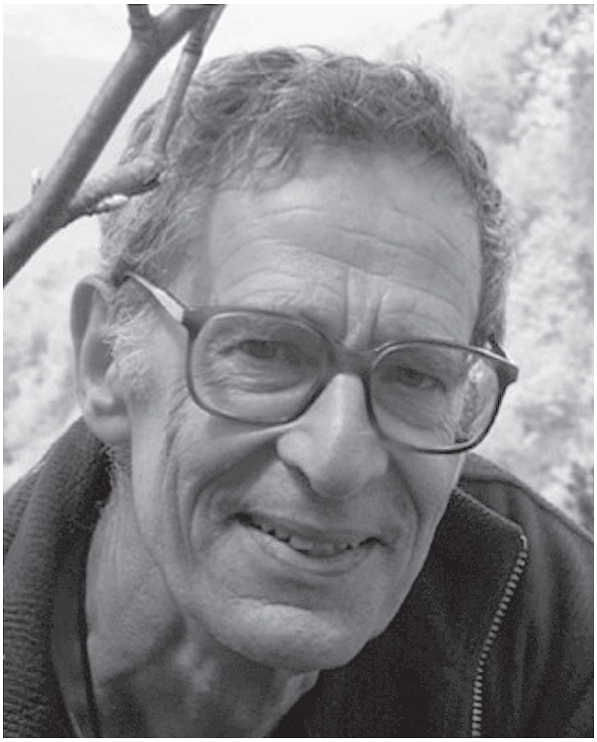
L'Astut, Archivio Scientifico e Tecnologico dell'Università di Torino, è nato nel 1992. In seguito alla mostra "Strumenti ritrovati", svoltasi presso le sale dell'Archivio di Stato di Torino nella primavera del 1991, un gruppo di ricercatori del nostro Ateneo fondò questo centro nel tentativo di salvaguardare un ampio patrimonio di strumenti scientifici non più utilizzati che giorno dopo giorno rischiavano di andare perduti. Questa realtà, piuttosto originale nel panorama degli Atenei non solo italiani, ha proprio il compito di recuperare, conservare, studiare, catalogare e valorizzare questa ricca eredità di materiale.

Il progetto riguarda non solo gli strumenti del passato ma anche quelli appena dismessi, nel tentativo di contribuire alla "musealizzazione del presente a futura memoria", per poter avere tra qualche anno tutti i tasselli, anche i più recenti, dello sviluppo scientifico e tecnologico.

L'impegno nell'Astut del prof. Sensi aveva radici lontane: fin dal 1999 fu rappresentante dell'Area disciplinare delle Scienze dell'Antichità, Filologico-Letterarie e Storico-Artistiche nel Comitato Tecnico Scientifico dell'Astut.

Dal 2003 fu uno dei sei componenti del Consiglio di Presidenza e dal marzo 2008 ne assunse la Presidenza. La sua morte è avvenuta poco dopo il termine del suo mandato.

Rimane un profondo rammarico nel pensare alla scomparsa prematura del prof. Sensi: dalla sua nomina a presidente si era più volte parlato di coinvolgere maggiormente le discipline umanistiche, di cui il professore era un autorevole rappresentante, in qualche evento organizzato dall'Astut. L'idea di avvicinare di più le discipline umanistiche e quelle scientifiche poteva essere una bella sfida: purtroppo il destino non ci ha dato questa opportunità, il progetto è rimasto nel cassetto. Se in futuro questa idea riuscirà a prendere corpo, sicuramente la dedicheremo a lui.



Cesare Pisani
(1938-2011)

SILVIA CASASSA

Nato Roma nel 1938, Cesare Pisani ha ottenuto la Laurea in Fisica presso l'Università di Milano nel 1963 con una tesi di tipo teorico sullo *scattering* di particelle elementari ad alta energia.

Ha trascorso alcuni anni (dal 1965 al 1970) studiando sia sperimentalmente, che dal punto di vista teorico, l'interazione gas-superficie in condizioni di alto vuoto (UHV) dapprima nell'industria (SAES Getters) e successivamente all'Università di Torino sotto la direzione del Prof. Franco Ricca. Dal 1970 i suoi interessi si sono rivolti alla simulazione teorica con metodi semi-empirici e *ab initio* delle proprietà di bulk e di superficie dei solidi cristallini.

La sua carriera universitaria si è svolta interamente presso l'Università di Torino, dove è diventato professore ordinario in Chimica Quantistica nel 1981.

È stato Direttore dell'Istituto di Chimica Teorica dal 1981 al 1988, data in cui l'Istituto è entrato a far parte del nuovo Dipartimento di Chimica Inorganica, Fisica e dei Materiali (IFM). Nel 2009, riconosciuti i suoi alti meriti scientifici, è stato insignito del titolo di Professore Emerito dell'Università di Torino.

Tra le sue più importanti esperienze all'estero si ricorda un soggiorno di sei mesi a Liverpool, sotto la direzione del Prof. Tom Grimley (1973), due workshop presso il Centre Européen de Calcul Atomique e Moléculaire (CECAM) nel 1977 e nel 1980, e alcuni mesi come Invited Professor presso l'Università di Pau (Francia, nel 1990 e nel 1998), di Kostanz (Germania, nel 2000) e presso l'Università di Parigi VI (nel 2001).

All'inizio della sua attività scientifica, Pisani ha dato contributi originali per quel che riguarda la raccolta, l'analisi e l'interpretazione di studi sperimentali sull'interazione tra gas e superficie in condizioni di vuoto estremo (vedi nn.1, 2 nell'elenco delle pubblicazioni). Negli anni Settanta, la tecnologia da lui utilizzata era nuova e innovativa, ed il suo lavoro di avanguardia rappresentava una sfida e una fonte di preziose informazioni. Da quel momento, le proprietà chimico-fisiche delle superfici rimasero un suo interesse primario. Lo dimostra il fatto che per poter approfondire lo studio di tali temi, avvalendosi di un formalismo corretto e rigoroso, Egli ha promosso l'estensione delle potenti tecniche della chimica quantistica, all'epoca utilizzate solo nello studio delle proprietà delle molecole, all'indagine della struttura elettronica dei solidi.

Verso la metà degli anni Settanta, sotto la direzione di Pisani, il Gruppo di Chimica Teorica dell'Università di Torino (Roberto Dovesi, Carla Roetti, Roberto Orlando) ha iniziato il pioneristico e ambizioso progetto CRYSTAL (vedi n. 5), nel quale ha coinvolto lo scienziato Vic R. Saunders, del laboratorio di Daresbury in Gran Bretagna (vedi n. 6), prezioso collaboratore e amico, con il quale la collaborazione è proseguita fino al termine della sua attività scientifica.

Lo sviluppo di un *software* efficiente e generale per lo studio *ab initio* attraverso il metodo di Hartree-Fock dei cristalli ha richiesto la risoluzione originale di un gran numero di problemi specifici, tra cui il calcolo analitico di somme infinite e/o l'elaborazione di criteri efficaci per il loro troncamento, il completo sfruttamento della simmetria puntuale e spaziale, l'integrazione nello spazio reciproco ecc. (vedi nn. 9, 11).

Il *software* CRYSTAL, distribuito per la prima volta in versione pubblica nel 1988 è stato per molti anni l'unico codice *ab initio* a disposizione della comunità scientifica mondiale in grado di studiare le proprietà dei solidi cristallini. Ancora oggi, grazie ai continui aggiornamenti, resta un programma *leader* nel settore della Chimica Computazionale, tra i più popolari ed utilizzati nel campo della fisica dello stato solido.

Pisani e i suoi collaboratori, oltre che lavorare al perfezionamento continuo del programma, lo hanno utilizzato per studiare un enorme numero di problemi legati, in particolare, alla scienza delle superfici, come dimostrano le oltre cento pubblicazioni su riviste internazionali (n. 7).

La disponibilità di un *software* affidabile, in grado di risolvere l'equazione di Schroedinger per sistemi periodici è stato strumentale, nella strategia scientifica di Pisani, per affrontare in modo nuovo il problema dei difetti locali nei cristalli: non è un caso se le specie chimiche isolate assorbite sulla superficie di un solido costituiscono un esempio importante, sia dal punto di vista scientifico che tecnologico, di difetto locale. Basti pensare ai più moderni ed interessanti sviluppi nel campo della catalisi eterogenea.

In seguito alla sua collaborazione con Tom Grimley (n. 3), Pisani elaborò una tecnica originale per studiare difetti localizzati che combina il potente formalismo delle funzioni di Green con il rigoroso approccio standard quantomeccanico e consente quindi di sfruttare la conoscenza della funzione d'onda dell'intorno cristallino per ottenere informazioni sul difetto e sulla perturbazione da questo indotta nel solido ospite (n. 4).

Questa idea, che può essere estesa allo studio di sistemi regolarmente disordinati, come le leghe, è stata sviluppata da Pisani e collaboratori (Furio Corà, Silvia Casassa, Uwe Birkenheuer) nel *software* EMBED (n. 8), anch'esso messo a disposizione della comunità scientifica. Il codice EMBED utilizza la soluzione calcolata con CRYSTAL per il cristallo ospite perfetto, ed è in grado di risolvere il problema di difetti locali nei solidi o sulle superfici (nn. 10, 12-14).

Benché il *software* EMBED non è risultato di applicabilità generale come il codice CRYSTAL, esso rimane ancora oggi, se si eccettuano gli approcci molecolari o di supercella, l'unico programma pubblico in grado di risolvere, a livello quanto-meccanico, *ab initio* il problema dei difetti nei solidi.

Negli ultimi anni, Pisani ha promosso, in collaborazione con il gruppo del Prof. Martin Schuetz dell'Università di Regensburg, il progetto CRYSCOR, con lo scopo di sviluppare in CRYSTAL un trattamento post-HF per il calcolo della correlazione elettronica nei solidi non conduttori (nn. 15, 16). A tal fine Pisani ha abilmente generalizzato un metodo utilizzato nella Chimica Quantistica molecolare al caso ben più complesso dei sistemi periodici, valorizzando al massimo le possibilità offerte dall'approccio locale e sfruttando al meglio la simmetria spaziale.

Questo sforzo, che ha già prodotto risultati significativi (n. 17), rappresenta in un certo senso il coronamento della carriera di Pisani, poiché intende fornire alla comunità scientifica uno strumento di calcolo in grado di affrontare, in modo rigoroso ed efficace, problemi di fisica dello stato solido.

Cesare Pisani è mancato all'improvviso in un tragico incidente il 17 Luglio del 2011, su quelle montagne che tanto amava.

Elenco delle principali pubblicazioni

1. C. Pisani, *Problems of gas kinetics in systems with adsorbing walls,* Vacuum, 18, 1968, p. 327-334.
2. C. Pisani, G. Rabino, F. Ricca, *Statistical analysis and model discrimination for thermal desorption spectra: nitrogen on tungsten*, Surface Sci. 41, 1974, p. 277-292.
3. T.B. Grimley, C. Pisani, *Chemisorption theory in the Hartree-Fock approximation*, J. Phys. C: Solid State Phys. 7, 1974, p. 2831-2848.
4. C. Pisani, *Approach to the embedding problem in chemisorption in a self-consistent-field molecular orbital formulation*, Phys. Rev. B 17, 1978, p. 3143-3153.
5. C. Pisani, R. Dovesi, *Exact exchange Hartree-Fock calculations for periodic systems. I. Illustration of the method*, Int. J. Quantum Chem. 17, 1980, p. 501-516.
6. C.Pisani, R. Dovesi, C. Roetti, V.R. Saunders, *Treatment of Coulomb interactions in Hartree-Fock calculations of periodic systems*, Phys. Rev. B 28, 1983, p. 5781-5792.
7. R. Dovesi, E. Ferrero, C. Pisani, C. Roetti, *Ab-initio study of the electron momentum distribution in metallic lithium*, Z. Physik B 28, 1983, p. 195-203.
8. C. Pisani, *Local electronic structures in disordered systems*, Phys. Rev. B 30, 1984, p. 6841-6848.

9. C. Pisani, M. Causà, R. Dovesi, C. Roetti, *Hartree-Fock ab initio characterization of ionic crystal surfaces with a slab model. The (0001) face of Al2O3*, Progr. in Surf. Sci., 25, 1987, p. 119-137.
10. C. Pisani, R. Dovesi, C. Roetti, *Hartree-Fock Ab-initio Treatment of Crystalline Systems Lecture Notes in Chemistry*, Vol. 48, 1988, Berlin, Springer.
11. C. Pisani, F. Corà, R. Nada, R. Orlando, *Hartree-Fock perturbed-cluster treatment of local defects in crystals I. The EMBED program: general features*, Comp. Phys. Comm. 82, 1994, p. 139-156.
12. C. Pisani (Editor), *Quantum-Mechanical Ab-initio Calculation of the Properties of Crystalline Materials*, Lecture Notes in Chemistry, Vol. 67, 1996, Berlin, Springer.
13. U. Birkenheuer, F. Corà, C. Pisani, I. Scorza, G. Perego, *Embedded-cluster study of core-level binding energies of Mg and alkali impurities at the surface of MgO*, Surf. Sci., 373, 1997, p. 393-408.
14. L. Ojamae, C. Pisani, *Theoretical characterization of divacancies at the surface and in MgO bulk*, J. Chem. Phys., 109, 1998, p. 10984-10995.
15. A. D'Ercole, A.M. Ferrari, C. Pisani, *On the role of electrostatics in the heterolytic splitting of covalent bonds at defective oxide surfaces*, J. Chem. Phys, 115, 2001, p. 509-518.
16. C. Pisani, *Local techniques for the ab-initio quantum-mechanical description of the chemical properties of crystalline materials*. J. Molec. Struc. (Theochem), 621, 2003, p. 141-147.
17. L. Maschio, D. Usvyat, C. Pisani, F. Manby, S. Casassa, M. Schütz, *Fast-local-MP2 method with density-fitting for crystals. I. Theory and algorithms*. Phys. Rev. B 76, 2007, 075101(9).
18. S. Casassa, M. Halo, L. Maschio, C. Roetti, C. Pisani, *Beyond a Hartree-Fock description of crystalline solids: the case of lithium hydride*, Theor. Chem. Acc., 117, 2007, p. 781-792.
19. C. Pisani, L. Maschio, S. Casassa, M. Halo, A. Erba, *A local-MP2 approach to the ab initio study of electron correlation in crystals and to the simulation of the vibrational spectra: the case of Ice XI*, Theor. Chim. Acta, 123, 2009, p. 327.
20. A. Erba, M. Itou, Y. Sakurai, R. Yamaki, M. Ito, S. Casassa, L. Maschio, A. Terentjevs, C. Pisani, *Beyond a single-determinantal description of the density matrix of periodic systems: Experimental versus theoretical Compton profiles of crystalline silicon*, Phys. Rev. B 83, 2011, p. 125208.

Indice dei nomi

Gli autori

CLARA ALLASIA è ricercatrice di Letteratura italiana presso il Dipartimento di Studi umanistici all'Università di Torino. È autrice di saggi, libri e carteggi sulla storia della letteratura italiana. (mail: clara.allasia@unito.it).

FERDINANDO ARZARELLO è professore ordinario di Matematiche complementari all'Università di Torino. Le sue ricerche riguardano la didattica e i fondamenti della matematica; è autore di oltre un centinaio di pubblicazioni, fra cui articoli su riviste internazionali e capitoli di monografie internazionali. È presidente dell'European Society for Research in Mathematics Education, dell'International Commission for Mathematical Instruction e socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Torino. (mail: ferdinando.arzarello@unito.it).

ALDO BRIGAGLIA è professore ordinario di Matematiche complementari all'Università di Palermo. Le sue ricerche vertono principalmente sulla storia delle matematiche e spaziano dal Rinascimento al Novecento, in particolare sul Circolo Matematico di Palermo e sulla Scuola italiana di geometria algebrica. È autore di numerosi saggi, libri e articoli su riviste e monografie nazionali e internazionali. (mail: brig@math.unipa.it).

ANITA CALCATELLI, laureata in Fisica presso l'Università di Torino, dopo un breve periodo di attività nel campo delle applicazioni pacifiche dell'energia nucleare, è entrata alle dipendenze del Consiglio Nazionale delle Ricerche, prima presso l'Istituto Dinamometrico Italiano e poi presso l'Istituto di Metrologia G. Colonnetti dove è rimasta fino al pensionamento. Attualmente collabora, su basi volontarie, con l'Istituto Nazionale di Ricerca Metrologica. (mail: a.calcatelli@inrim.it).

SILVIA CASASSA è ricercatrice presso l'Università di Torino, nel Gruppo di Chimica Teorica fondato dal Prof. Cesare Pisani, con cui ha collaborato per venti anni, condividendo successi professionali e sfide scientifiche. (mail: silvia.casassa@unito.it).

BARTOLOMEO CIVALLERI è ricercatore presso il Dipartimento di Chimica Inorganica Chimica Fisica Chimica dei Materiali dell'Università di Torino. Allievo di Carla Roetti, con cui iniziò a collaborare dopo la laurea, svolge la sua attività di ricerca all'interno del Gruppo di Chimica Teorica. (mail: bartolomeo.civalleri@unito.it).

DAVIDE DALMAS è ricercatore di Letteratura italiana presso il Dipartimento di Studi umanistici all'Università di Torino. È autore di saggi e articoli sulla storia della letteratura italiana. (mail: davide.dalmas@unito.it).

Luca Dell'Aglio, laureato in Matematica all'Università La Sapienza di Roma, è professore associato di Matematiche complementari presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università della Calabria. Le sue ricerche riguardano la storia della matematica moderna. È autore di saggi e articoli sull'opera scientifica di T. Levi-Civita, sulla teoria dei sistemi dinamici, sul calcolo differenziale assoluto, sulla moderna geometria differenziale, sulla teoria dei giochi e sul pensiero probabilistico e statistico. (mail: dellaglio@unical.it).

Mara Fausone è direttore dell'Archivio Scientifico e Tecnologico dell'Università di Torino. (mail: mara.fausone@unito.it).

Livia Giacardi è professore ordinario di Matematiche complementari all'Università di Torino. Le sue ricerche riguardano la storia delle matematiche dall'antichità al Novecento e la storia dell'insegnamento della matematica. È autrice di numerosi saggi, libri e articoli e ha curato volumi, cd-rom e siti web, in particolare sull'opera matematica di F. Faà di Bruno, di C. Segre e sull'ICMI. (mail: livia.giacardi@unito.it).

Erika Luciano è ricercatrice presso il Dipartimento di Matematica G. Peano dell'Università di Torino. Si occupa di ricerche nel campo della storia delle matematiche, in particolare sulla storia dell'analisi all'università di Torino, su G. Peano e sulla sua Scuola, sulla logica, sui fondamenti della matematica e sulla storia dell'insegnamento. (mail erika.luciano@unito.it).

Elena Anne Corie Marchisotto è professore di Matematica presso il Department of Mathematics della California State University e le sue ricerche si inseriscono nei settori della storia e della pedagogia delle matematiche. È coautrice, con Anthony Peressini, Dick Stanley e Zalman Usiskin, del libro *Mathematics for High School Teachers, An Advanced Perspective*, e con Philip J. Davis e Reuben Hersh, del volume *The Mathematical Experience, Study Edition*. Da alcuni anni conduce studi, insieme a James Smith, sulla biografia scientifica e sulle opere del matematico italiano Mario Pieri. (mail: emarchisotto@csun.edu).

Mariarosa Masoero è professore ordinario di Letteratura Italiana presso l'Università di Torino. Si è occupata di favole pastorali, di letteratura di viaggio, di scrittura femminile e di autori del Novecento (in particolare di Gozzano e Pavese). Si è anche interessata della memorialistica della deportazione e ha curato due volumi dell'edizione nazionale delle opere di Vittorio Alfieri. È direttore del Centro interuniversitario per gli studi di Letteratura italiana in Piemonte "Guido Gozzano - Cesare Pavese". (mail: mariarosa.masoero@unito.it).

Laura Nay è professore associato di Letteratura italiana presso il Dipartimento di Studi umanistici all'Università di Torino. È autrice di saggi e articoli sulla storia della letteratura italiana, in particolare su Diodata Saluzzo, De Amicis, Nievo, Fogazzaro e Pavese. (mail: laura.nay@unito.it).

Clara Silvia Roero è professore ordinario di Storia delle Matematiche all'Università di Torino e socio corrispondente dell'Académie internazionale d'Histoire des Sciences. Le sue ricerche spaziano dalla matematica delle civiltà arcaiche all'epoca rinascimentale, al periodo barocco (Leibniz, i Bernoulli, Hermann, i Riccati), alla storia delle scienze matematiche e fisiche in Piemonte e, negli ultimi anni, a G. Peano e alla sua Scuola. (mail: clarasilvia.roero@unito.it).

Giuseppe Zaccaria è professore ordinario di Letteratura Italiana presso l'Università del Piemonte Orientale Si è occupato in particolare della letteratura piemontese, con monografie sulla narrativa postunitaria, su Gozzano, Pavese e Calvino. È anche autore di rassegne critiche e di studi relativi al romanzo, all'editoria e alla didattica della letteratura. (mail: giuseppe.zaccaria@unito.it).