

*Appunti di*  
**Econofisica**  
Con esempi ed esercizi svolti

Dispense tratte da seminari svolti presso  
il Dipartimento di Fisica dell'Università di Cagliari  
su argomenti di carattere economico, finanziario,  
organizzativo-aziendale e sociale

*a cura di*  
**Giancarlo Cappellini**

*Contributi di*

Marco Aita  
Giancarlo Cappellini  
Guido Cappellini  
Alessandro Chessa  
Luigi Minerba  
Stefano Montesanti  
Gianni Mula  
Bernardo Spagnolo



Copyright © MMVIII  
ARACNE editrice S.r.l.

[www.aracneeditrice.it](http://www.aracneeditrice.it)  
[info@aracneeditrice.it](mailto:info@aracneeditrice.it)

via Raffaele Garofalo, 133 a/b  
00173 Roma  
(06) 93781065

ISBN 978-88-548-2204-7

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,  
di riproduzione e di adattamento anche parziale,  
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie  
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: dicembre 2008

# Indice

<b>Prefazione</b>	<b>11</b>
<b>Autori</b>	<b>15</b>
<b>1 Avventure di un fisico in finanza</b>	<b>17</b>
<b>2 La teoria dei giochi in ambito economico e sociale</b>	<b>21</b>
2.1 Introduzione: un gioco facile . . . . .	22
2.2 Un primo esempio di competizione industriale . . .	22
2.3 Il dilemma dei prigionieri come gioco non cooperativo	25
2.4 Il gioco dei duellanti e la guerra fredda . . . . .	26
2.5 La competizione industriale rivisitata: il metodo esaustivo . . . . .	28
2.6 Conclusioni . . . . .	29
Bibliografia . . . . .	29
<b>3 Il messaggio keynesiano e l'analisi macroeconomica</b>	<b>31</b>
3.1 Introduzione storica . . . . .	32
Bibliografia . . . . .	41
<b>4 Macro e microsimulazione di mercati</b>	<b>43</b>
4.1 Introduzione . . . . .	43
4.2 I modelli macroscopici . . . . .	46
4.2.1 Il modello ARCH . . . . .	46
4.3 I modelli microscopici . . . . .	47
4.3.1 Minority games . . . . .	49
Bibliografia . . . . .	52

<b>5</b>	<b>Le organizzazioni sanitarie complesse</b>	<b>55</b>
5.1	Introduzione . . . . .	55
5.2	L'azienda sanitaria pubblica . . . . .	58
5.3	I DRG (Diagnosis Related Groups) . . . . .	59
5.4	Definizione dei prodotti ospedalieri . . . . .	63
5.5	Gli indicatori dell'attività sanitaria . . . . .	65
5.5.1	Durata media della degenza (DM) . . . . .	66
5.5.2	Tasso di occupazione dei posti letto (TU) . . . . .	67
5.5.3	Intervallo di turnover (It) . . . . .	68
5.5.4	L'indice di case flow . . . . .	68
5.6	Applicazione . . . . .	70
	Bibliografia . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Microcredito e microimprese: un ponte tra due realtà</b>	<b>75</b>
6.1	Esercizi . . . . .	82
6.1.1	Esercizio 1 . . . . .	82
6.1.2	Esercizio 2 . . . . .	83
	Bibliografia . . . . .	83
<b>7</b>	<b>Effetti indotti dal rumore in sistemi complessi</b>	<b>85</b>
7.1	Introduzione . . . . .	86
7.2	Rumore e non linearità . . . . .	87
7.3	La risonanza stocastica . . . . .	89
7.4	L'attivazione risonante . . . . .	96
7.5	La stabilità incrementata dal rumore . . . . .	99
7.6	Il modello di moto browniano geometrico . . . . .	103
7.7	Conclusioni . . . . .	107
	Bibliografia . . . . .	108
<b>8</b>	<b>Breve glossario dei termini finanziari</b>	<b>113</b>
	Bibliografia . . . . .	125
	<b>Tavole</b>	<b>127</b>

## Capitolo 7

# Effetti indotti dal rumore in sistemi complessi

Bernardo Spagnolo

*Dipartimento di Fisica e Tecnologie Relative e CNISM  
Group of Interdisciplinary Physics<sup>1</sup>, Università di Palermo*

### Sommario

Tipicamente il rumore è visto come un disturbo che perturba in modo disordinato l'andamento dinamico di un dato sistema fisico. La comprensione del ruolo del rumore nella dinamica dei sistemi non lineari, invece, rappresenta un aspetto chiave nella costruzione di modelli dei cosiddetti "sistemi complessi". In questo articolo ci proponiamo di mostrare che, considerando esempi tratti dalla dinamica stocastica non lineare, la presenza del rumore può influenzare l'evoluzione di un sistema fisico non lineare in modi non intuitivi. In particolare vengono presentati i seguenti fenomeni indotti dal rumore: la risonanza stocastica, l'attivazione risonante e l'aumento di stabilità per effetto del rumore. Inoltre è proposto un esercizio sui mercati finanziari da svolgere utilizzando l'approccio fenomenologico dei modelli stocastici.

---

<sup>1</sup><http://gip.dft.unipa.it>

*Science is built up of facts,  
as a house is built up of stones;  
but an accumulation of facts is no more a science  
than a heap of stones is a house.*

**Henri Poincaré.**

Science and Hypothesis, 1905, Chapter 9

## 7.1 Introduzione

Fare scienza corrisponde alla ricerca delle meravigliose regolarità che la natura nasconde nella sua inesauribile varietà, o in un certo senso corrisponde a “fare ordine”, in accordo con alcune ipotesi teoriche — che mostrano la creatività della mente umana — tra i dati sperimentali. I fenomeni naturali mostrano in generale un comportamento complesso, nel senso che tale comportamento non può essere previsto tramite l'utilizzo di equazioni lineari standard. Proprio in ragione di ciò possiamo considerare tali fenomeni nell'ambito dei sistemi complessi, cioè sistemi fisici aperti le cui interazioni tra le molteplici componenti sono non lineari e la cui interazione con l'ambiente è “rumorosa”. Tale intrinseca non linearità può originare comportamenti imprevedibili, come il caos deterministico e fenomeni dovuti alle fluttuazioni termiche o al rumore, sempre presenti in natura. In questo scritto ci soffermiamo solamente sulla imprevedibilità causata da rumore.

Semplici sistemi deterministici non lineari che si incontrano in una grande varietà di discipline — meccanica classica, fisica della materia condensata, dinamica dei fluidi, chimica, ottica, fisica atomica e molecolare, astrofisica e fisica delle alte energie, scienze ambientali, scienze ingegneristiche e biologia — a causa di un ambiente “rumoroso”, possono mostrare comportamenti complessi associati con l'apparire di strutture spaziali o eventi evolutivi non aspettati. La ricerca sui fenomeni fisici non lineari in presenza di rumore dimostra una sottile combinazione tra aspetti casuali e deterministici.

In questo lavoro presentiamo tre esempi del ruolo attivo che gioca il rumore in sistemi fisici non lineari, inducendo un comportamento non intuitivo: la risonanza stocastica, l'attivazione risonante e l'aumento di stabilità per effetto del rumore.

## 7.2 Rumore e non linearità

Le fluttuazioni casuali sono sempre presenti nei sistemi naturali e non possono essere inglobate in una descrizione deterministica. Queste fluttuazioni, dette in generale “rumore”, sono deviazioni casuali (stocastiche) di osservabili fisiche da valori medi, che possono essere costanti o variabili col tempo. Le fluttuazioni sono una manifestazione dei moti termici della materia e della sua struttura discreta.

L'introduzione del concetto delle fluttuazioni e lo sviluppo della fisica delle fluttuazioni è uno dei maggiori risultati della fisica del ventesimo secolo, dovuti principalmente alla teoria del moto Browniano sviluppata da A. Einstein, da M. von Smoluchowski e da P. Langevin nella prima decade del novecento [1, 2, 3]. Val la pena di notare che la spiegazione di Einstein e di M. von Smoluchowski della natura del moto Browniano, deve essere considerata come l'inizio della costruzione di modelli fisici stocastici dei fenomeni naturali, con una formulazione totalmente probabilistica della meccanica statistica. La formulazione di Langevin, in termini di un'equazione dinamica stocastica del moto della particella Browniana (generalizzazione dell'equazione del moto di Newton), ne costituisce una descrizione complementare. Gli aspetti principali del moto Browniano sono due: (i) il moto della particella è senza sosta, e (ii) le traiettorie delle singole particelle sono così irregolari che la velocità di una particella Browniana non è definita.

A causa del moto termico delle molecole di fluido, la particella Browniana sperimenta in un breve intervallo di tempo un enorme numero di collisioni — tipicamente  $10^{21}$  ogni secondo — ed ogni collisione è indipendente dalle altre. Un modello matematico che prende in considerazione questi aspetti del moto browniano è il processo stocastico di Wiener, che risulta essere fondamentale per lo studio dei processi diffusivi. Tre possibili realizzazioni del processo di Wiener, che descrive il moto di una particella browniana in una dimensione, sono riportate nella Figura 7.1 (tutte le figure del presente contributo sono apparse su diverse pubblicazioni dell'autore).

Il rumore in generale è pensato come un fenomeno che perturba le osservazioni e crea disordine. L'idea si fonda principalmente sulla nostra esperienza quotidiana, e nell'ambito delle teorie fisiche,

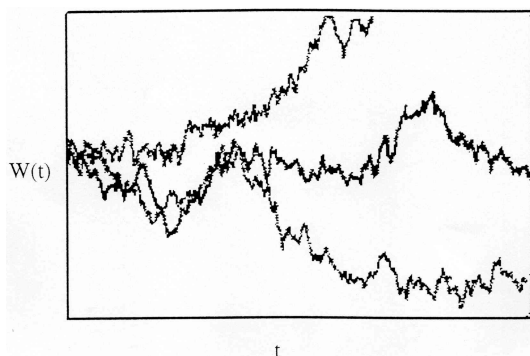


Figura 7.1: Tre differenti realizzazioni del processo di Wiener, che rappresenta le traiettorie estremamente irregolari delle particelle Browniane.

sullo studio di sistemi all'equilibrio. L'effetto del rumore può essere molto diverso in sistemi non lineari lontani dall'equilibrio. Diverse situazioni sono state riportate recentemente nella letteratura scientifica, in cui il rumore partecipa attivamente nella creazione di stati ordinati o risulta essere responsabile di fenomeni sorprendenti attraverso l'interazione con la non linearità del sistema. Se aggiungiamo una "certa" quantità di rumore a un sistema non lineare, la risposta del sistema risulta essere amplificata dalla presenza del rumore — questo è proprio il fenomeno della risonanza stocastica — oppure, se il sistema è metastabile, possiamo ottenere che il sistema diventi più stabile: questo è il fenomeno dell'aumento di stabilità per effetto del rumore.

Una differenza evidente tra leggi lineari e non lineari è se si realizza o meno il principio di sovrapposizione. In un sistema lineare l'effetto ultimo dell'azione combinata di due cause differenti è semplicemente la sovrapposizione delle due cause prese separatamente. D'altra parte in un sistema non lineare l'azione combinata di due cause elementari può indurre nuovi effetti di notevole entità, riflettendo il realizzarsi di una azione sinergica tra gli elementi costitutivi. Ciò può dar luogo a strutture spazio-temporali ed eventi inattesi, le cui proprietà possono essere molto diverse da quelle deducibili dalle leggi elementari alla base dei fenomeni considerati,



quali ad esempio brusche transizioni, molteplicità di stati, formazione di configurazioni e/o strutture spaziali “ordinate” o evoluzioni marcatamente non predicibili, note come caos deterministico. I sistemi non lineari sono quelli in cui uno stimolo estremamente debole provoca una risposta sproporzionatamente grande [4, 5]. Due generalizzazioni nascono dall’osservazione dei sistemi naturali: essi sono intrinsecamente non lineari ed operano in ambienti “rumorosi”. Gli esempi abbondano e vanno dai sistemi meteorologici ai sistemi biologici, alle reazioni chimiche oscillanti, ai dispositivi elettronici, ai lasers e ai sistemi fisici a molti corpi della materia condensata, alla fisica dei sistemi mesoscopici e alle reazioni d’urto in fisica delle alte energie [6–12].

### 7.3 La risonanza stocastica

Il lavoro originale di Benzi, Parisi, Vulpiani e Sutera [13], nel quale è stato coniato il termine di risonanza stocastica (*Stochastic Resonance* – SR), è nato nel contesto delle oscillazioni del clima della nostra Terra tra le ere glaciali e periodi interglaciali relativamente caldi, con periodo di circa 100.000 anni. L’eccentricità dell’orbita della terra cambia con tale periodo, ma secondo le teorie attuali la variazione non è sufficientemente intensa da determinare un cambiamento di clima così drammatico. Introducendo un potenziale “climatico” bistabile, gli autori di cui sopra hanno suggerito che un fenomeno di tipo cooperativo tra la piccola variazione periodica nell’eccentricità (il “segnale”) e le fluttuazioni casuali sempre presenti in natura, potesse spiegare la forte periodicità osservata.

Il fenomeno della SR non è strettamente una risonanza, nel senso di una risposta amplificata, quando la frequenza di perturbazione è accordata a una “frequenza propria” del sistema in esame. Per esempio è possibile sentire la radio perché i circuiti di cui è composto il suo ricevitore sono “in risonanza” con le onde elettromagnetiche emesse da una qualche stazione trasmittente. C’è però una utile analogia con la risonanza dato che il rapporto segnale-rumore, cioè il rapporto tra la potenza trasportata dal segnale di uscita e quella del rumore di uscita del sistema, è massimizzato quando un particolare parametro — in questo caso il rumore di ingresso — è accordato vicino a un certo valore. Il fenomeno della SR può essere

utilizzato quindi per il rivelamento di segnali deboli. Infatti la risonanza stocastica è un fenomeno controintuitivo ben stabilito, nel quale l'aggiunta di rumore alcune volte facilita la risposta di sistemi non lineari a segnali precedentemente non rivelabili.

Il meccanismo della risonanza stocastica può essere capito considerando un semplice sistema: una particella di massa  $m$  che si muove in un "ambiente" rappresentato dal profilo di potenziale riportato in figura 7.2 a fronte.

La particella rappresenta il nostro sistema fisico, e seguire la sua traiettoria casuale significa seguire il suo comportamento casuale [14]. La dinamica del sistema è quindi caratterizzata dal moto della particella in quella data buca di potenziale. Questo modello ad esempio è un archetipo per le ricerche nel campo delle teorie fisiche dei sistemi bistabili, che presentano cioè almeno due stati stabili. Supponiamo, adesso, che il sistema abbia due soli stati stabili con un potenziale a due buche simmetrico, e che il sistema possa saltare tra i due stati. Il sistema può essere visualizzato come una pallina di vetro contenuta in un contenitore di cartone per due uova. Una leggera oscillazione della confezione causa solamente il rotolamento avanti-indietro in una delle due buche; solo a causa di una perturbazione più intensa la pallina oltrepassa la piccola parete divisoria ed entra nell'altra buca. In assenza di una forza di disturbo, l'attrito causa l'arresto della pallina di vetro in una delle posizioni stabili 1 o 2 del caso (a) della figura 7.2 nella pagina successiva.

Nel caso sia applicata una sollecitazione esterna — composta da un "segnale" deterministico e peridiodico nel tempo e da "rumore" (tipicamente assunto gaussiano) — osserviamo un comportamento più complesso. La sollecitazione esterna può essere interpretata come una oscillazione periodica del potenziale, che viene simultaneamente fatto saltellare casualmente dal rumore. Aggiungere rumore nell'esempio della pallina di vetro significa far saltellare casualmente la scatola di cartone delle uova che la contiene, e al primo colpo d'occhio sembra che l'unico risultato sia che il rumore mascheri di più il moto periodico della pallina. In maniera controintuitiva otteniamo un effetto opposto: la debole forza periodica, insieme al rumore, può fornire alla pallina sufficiente energia per oltrepassare la barriera tra le due buche.

Gli ingredienti essenziali della SR sono quindi: un sistema bista-

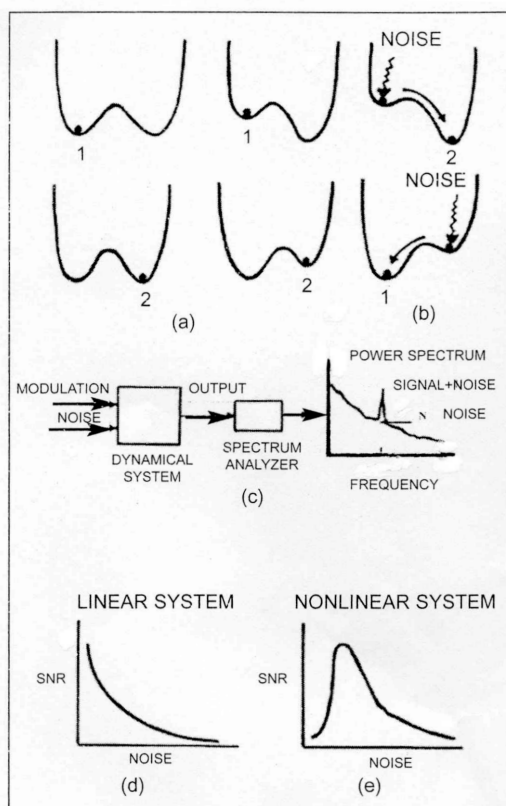


Figura 7.2: (a) Modulazione di un potenziale a due buche — dovuta a un segnale periodico — che non è sufficiente a causare transizioni della particella da una buca all'altra in assenza di rumore. (b) Nel caso sia introdotto rumore, diventa possibile per la particella effettuare transizioni periodiche indotte dal rumore dallo stato 1 allo stato 2. (c) Queste transizioni sono rivelabili nello spettro di potenza nel segnale di uscita come incremento del rapporto segnale-rumore (SNR). (d) SNR in funzione del rumore di ingresso in un sistema lineare. (e) SNR in funzione del rumore di ingresso per un sistema bistabile non lineare.

bile, una forzante periodica e un segnale di rumore. La frequenza di scavalco della barriera dipende criticamente dall'intensità del rumore. In assenza di rumore, se l'ampiezza del segnale periodico è insufficiente a causare la transizione da una buca all'altra del potenziale bistabile, il sistema compie piccole oscillazioni intorno allo stato iniziale e il potenziale a due buche viene inclinato in maniera asimmetrica su e giù, determinando un innalzamento e un abbassamento della barriera di potenziale. Quando il rumore additivo è introdotto, il sistema effettua transizioni casuali tra le posizioni 1 e 2. Con l'aumento dell'intensità del rumore, con buona probabilità quando il segnale periodico ha un valore opportuno, il sistema effettua transizioni indotte dal rumore tra le due buche. Il sistema cambia la propria configurazione tra gli stati 1 e 2, in media, con la stessa frequenza della forza esterna periodica (vedi il caso (b) della figura 7.2 nella pagina precedente). Queste transizioni possono essere rilevate nello spettro di potenza del segnale di uscita come un incremento del rapporto segnale-rumore (SNR), proprio alla frequenza del segnale periodico deterministico (vedi il caso (c) della figura 7.2 nella pagina precedente). Quando l'intensità del rumore è grande rispetto all'altezza della barriera, le transizioni possono avvenire non solo in sincronia con il segnale periodico, ma anche a tempi differenti. In tale regime, il carattere quasiperiodico del segnale di uscita viene distrutto e l'SNR è notevolmente ridotto. L'entità del vantaggio di cui il segnale beneficia dipende molto dal fatto che venga aggiunta la corretta quantità di rumore. Il miglioramento può essere misurato in termini di aumento del rapporto segnale-rumore (SNR). Se si aggiunge troppo poco rumore, il segnale non viene amplificato; se invece se ne aggiunge troppo il segnale ne viene sommerso. Esiste dunque un livello ottimale di rumore che favorisce il passaggio dell'informazione massima tra ingresso e uscita del sistema non lineare considerato (fisico, chimico o biologico).

Il fenomeno della SR è un effetto cooperativo non lineare tra un segnale periodico e delle fluttuazioni casuali. Il fattore comune a tutti i sistemi che manifestano SR è la loro non linearità. Il rapporto tra segnale e rumore (SNR), ottenuto come rapporto tra il picco della potenza del segnale di uscita e la potenza del rumore di fondo alla frequenza della forzante periodica (nel grafico che dà lo spettro di potenza del segnale di uscita del sistema), esibisce

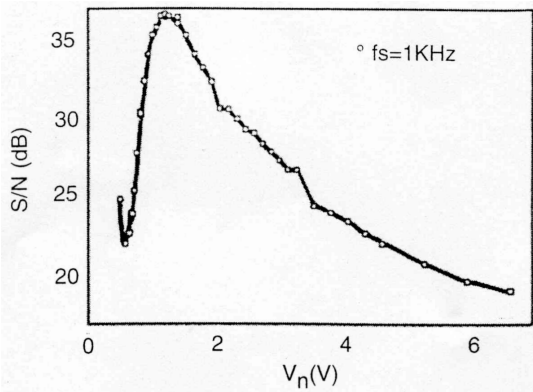


Figura 7.3: Rapporto segnale rumore (SNR) in funzione dell'intensità del rumore alla frequenza della forzante periodica pari a 1KHz, osservato in un diodo tunnel [15].

un massimo in funzione dell'intensità del rumore (vedi il caso (e) della figura 7.2 nella pagina precedente) [15, 16, 19].

D'altra parte, per un sistema lineare l'SNR all'uscita è proporzionale all'SNR in ingresso. Un incremento del livello di rumore di ingresso, a segnale fissato, determina un decremento nell'SNR di uscita (vedi Fig. 7.2 nella pagina 91), quindi la non linearità del sistema risulta essere una condizione necessaria per l'osservazione del fenomeno.

In generale la particella è soggetta a forze fluttuanti che sono, per esempio, indotte dall'accoppiamento con un bagno termico esterno. Le forze fluttuanti causano transizioni tra le buche adiacenti del potenziale con una frequenza data dall'espressione di Kramers:

$$r_k = A \exp(-U/D) \quad (7.1)$$

dove la costante  $A$  contiene i dettagli della forma del potenziale,  $U$  è l'altezza della barriera di separazione dei due minimi e  $D$  è l'intensità del rumore legata alla temperatura. Anche se la forzante periodica è troppo debole perché la particella scorra periodicamente da un minimo all'altro del potenziale, il salto indotto dal rumore tra le buche di potenziale può diventare sincronizzato con la debole

forzante periodica per un certo valore dell'ampiezza del rumore. La sincronizzazione statistica ha luogo quando il tempo medio di attesa  $T_k = 1/r_k$  tra due transizioni indotte dal rumore tra le due buche diventa comparabile con la metà del periodo  $T$  della forzante periodica. Ciò comporta la seguente condizione, nella scala dei tempi caratteristici del sistema, perchè avvenga la risonanza stocastica [16, 19]:

$$2T_k(D) = T. \quad (7.2)$$

Per riassumere, la risonanza stocastica, in una curva di potenza simmetrica a due minimi, si manifesta come una sincronizzazione degli eventi di salto attivati da rumore, tra i due minimi, con la debole forzante periodica. Per un certo valore del periodo  $T$  della forzante, la condizione *time-scale matching condition* espressa dall'eq. (7.2) può essere ottenuta cercando l'appropriato livello di rumore  $D$  tale che il tempo di Kramers  $T_k$ , calcolato dall'eq. (7.1), soddisfi la condizione (7.2).

Il fenomeno della SR è stato osservato in molti sistemi fisici e biologici. Ricerche sperimentali mirate sono state portate avanti su differenti sistemi non lineari: lasers, circuiti di materiale superconduttore con giunzioni Josephson, singole cellule meccanorecetttrici di un particolare tipo di gambero, dispositivi elettronici come trigger di Schmitt, diodi tunnel, sistemi magnetici, ecc. [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22].

Considerando l'applicazione alla biologia, dato che i neuroni sensoriali sono rumorosi e operano come sistemi a soglia, il fenomeno della SR può rendere conto della particolare sensibilità di alcuni animali a deboli segnali coerenti contenuti in un ambiente "rumoroso", come può essere quello marino [20, 21]. Proprio per questo, F. Moss e i suoi collaboratori [22] hanno progettato un esperimento per studiare la risposta neuronale di cellule recetttrici di stimoli meccanici a una perturbazione sinusoidale di una specie di gambero (*protocambarus clarkii*). Queste cellule, che si trovano nelle pinne del ventaglio caudale del crostaceo anzidetto, terminano in finissime cilia lunghe da 25 a 100 micrometri, e sono specializzate nel rilevamento di deboli e probabilmente periodici movimenti dell'acqua, prodotti per esempio dalla coda di un predatore che si aggiri nei paraggi o che si stia avvicinando alla preda. La funzione più plausibile delle cilia è quella di una sorte di sistema di preallar-

me, di evidente efficacia, visto che analoghi rudimentali rivelatori dei movimenti dell'acqua sono ampiamente diffusi nei crostacei. Le cilia, quando agitate, generano un impulso nervoso che ha l'aspetto di uno stretto picco di circa 100 millivolt di ampiezza e della durata di circa 200 microsecondi. Questo impulso si propaga lungo un neurone fino a un ganglio, ossia un aggregato di cellule nervose, situato presso la sommità della coda. Questo ganglio terminale è l'ultimo di una serie che si estende verso il cervello dell'animale e comprende circa 200 neuroni e collegamenti interneuronici che partecipano all'elaborazione dell'informazione. Il ganglio terminale tratta tutte le informazioni che provengono dalle cellule ciliate e prende decisioni fondamentali, tra cui l'attivazione dei riflessi di fuga dell'animale. I neuroni sensoriali funzionano più o meno come rivelatori a soglia non lineari: se i movimenti delle cilia non superano un certo livello, non vengono generati impulsi nervosi. L'esperimento fornisce l'evidenza che il meccanismo di scarica dei neuroni stimolati periodicamente esibisce risonanza stocastica.

Il rumore nelle cellule neuronali ha anche potenziali applicazioni in Medicina: l'uso del rumore può migliorare il senso di equilibrio nella locomozione delle persone anziane o avere effetti benefici nella "comunicazione" neuronale del cervello. Gli anziani hanno spesso difficoltà a camminare e a mantenere l'equilibrio per l'aumento delle soglie di scarica dei propriocettori, i neuroni che rivelano l'angolo, la velocità e lo spostamento degli arti in movimento. Aggiungendo un segnale di "rumore" ai segnali nervosi situati al di sotto di queste soglie si potrebbe aumentare la frequenza di scarica dei propriocettori, migliorando così la locomozione e il senso di equilibrio dei pazienti.

Citiamo infine una recente applicazione della risonanza stocastica in dinamica di popolazioni interagenti. L'interazione tra rumore e modulazioni periodiche di alcune variabili ambientali, quali la temperatura, la pressione, ecc., può cambiare drasticamente ed in modo inaspettato la dinamica di popolazioni marine. Il rumore può dar luogo a oscillazioni quasi periodiche, nelle serie temporali delle concentrazioni di alcune specie di pesci appartenenti allo zooplankton (foraminiferi), e a configurazioni spaziali *patterns* fortemente correlate nelle distribuzioni spaziali di alcuni piccoli pelagici (sardine ed acciughe). Tali andamenti spazio-temporali risultano caratteristici del fenomeno della SR [21].

## 7.4 L'attivazione risonante

Nel 1992 C.R. Doering e J.C. Gaudin [23] hanno scoperto un fenomeno interessante di tipo risonante per il comportamento del tempo medio di fuga di una particella browniana sovrasmorzata, sollecitata da un rumore termico (rumore bianco Gaussiano) in un potenziale a doppia buca con pendenze che possono fluttuare in accordo a un processo dicotomico (detto anche segnale casuale telegrafico). Questo rumore casuale telegrafico controlla l'altezza della barriera di potenziale del sistema metastabile, mentre il rumore bianco riproduce la presenza di una certa temperatura.

Doering e Gaudin hanno trovato che il tempo medio di fuga della particella browniana dalla buca di potenziale in funzione del tempo di correlazione del rumore dicotomico presenta un minimo. Questi ricercatori hanno chiamato questo fenomeno di tipo risonante, "attivazione risonante". Proprio questo esempio dimostra come possa essere contraria alla intuizione la dinamica di una particella in un sistema non lineare in presenza di rumore.

Noi analizziamo il fenomeno dell'attivazione risonante in un sistema modello, il cui profilo di potenziale è rappresentato nella figura 7.4 a fronte.

Il potenziale viene innalzato su e giù in maniera casuale tra le due posizioni a e b rappresentate nella figura 7.4 nella pagina successiva. Le fluttuazioni del potenziale sono correlate e il tempo caratteristico di correlazione di tale rumore — il rumore casuale telegrafico — risulta essere un parametro di controllo del nostro sistema modello. L'attivazione risonante, in sostanza l'osservazione di un minimo nel tempo medio di stazionamento della particella nello stato metastabile, viene osservata per valori intermedi del tempo di correlazione.

Sono osservabili quindi tre diversi regimi dinamici (vedi Fig. 7.5):

1. Per frequenze di oscillazione della barriera di potenziale molto basse — cioè per tempi di correlazione delle fluttuazioni della barriera di potenziale lunghi — il tempo medio di passaggio risulta essere dato dalla media aritmetica dei tempi di passaggio attraverso la barriera superiore e di quello attraverso quella inferiore. In un certo senso possiamo dire che la particella browniana "vede" solo la barriera più alta,



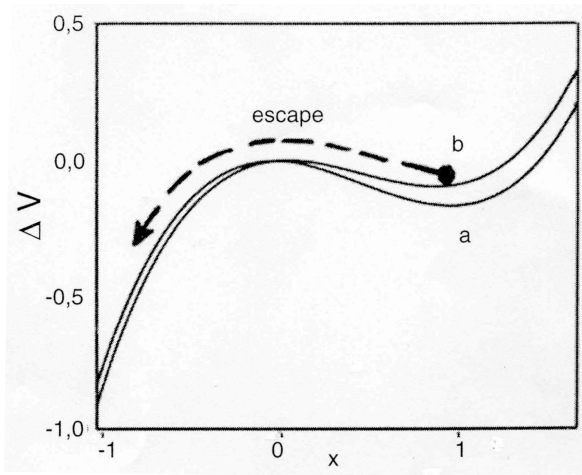


Figura 7.4: Profili del potenziale modello per i due stati del rumore casuale telegrafico. I due profili sono caratterizzati da una differente altezza della barriera di potenziale rispetto allo stato metastabile.

perchè il tempo di passaggio attraverso la barriera più bassa è trascurabile.

2. Per frequenze di oscillazione della barriera di potenziale molto alte — quindi per tempi di correlazione delle fluttuazioni della barriera corti — il tempo di passaggio coincide con quello necessario per l'attraversamento della barriera di altezza media. Possiamo dire che, in presenza di rapide fluttuazioni del potenziale tra le due configurazioni estreme (superiore e inferiore), la particella browniana “vede”, per dir così, nel suo moto la barriera media del potenziale.
3. Per frequenze intermedie, l'attraversamento della barriera di potenziale è fortemente correlato alle fluttuazioni del potenziale, e il tempo di fuga esibisce un minimo alla frequenza della fluttuazione risonante. La particella browniana “vede” la barriera di potenziale più bassa.

L'andamento del tempo medio di fuga dallo stato metastabile

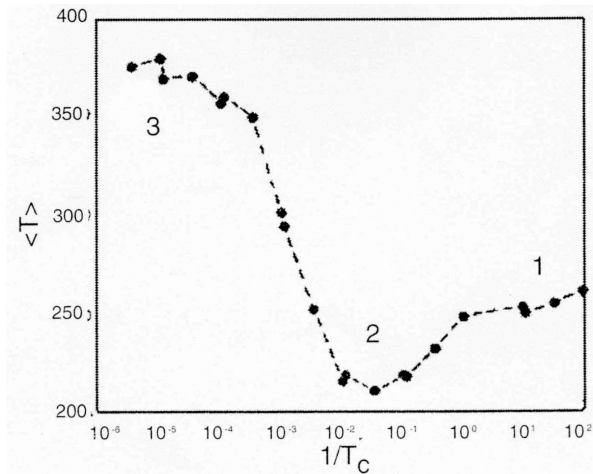


Figura 7.5: Tempo medio di fuga in funzione del tempo di correlazione delle fluttuazioni dell'altezza della barriera. Regione 1: tempi di correlazione bassi, regione 2: attivazione risonante, regione 3: tempi di correlazione lunghi.

in funzione della frequenza media delle fluttuazioni del potenziale è riportato nella figura 7.5 [24]. In essa sono visibili i tre regimi temporali su descritti.

Il tempo medio di primo passaggio ha un minimo locale per un valore della frequenza di oscillazione della barriera dell'ordine dell'inverso del tempo richiesto per l'attraversamento della barriera nella configurazione più bassa: cioè l'evento di attraversamento è indipendente dalla configurazione della barriera in entrambe i due casi limite (a) e (b), mentre è fortemente correlato alle fluttuazioni del potenziale a tempi intermedi, allorchè il passaggio avviene preferibilmente con la barriera nella configurazione più bassa. La funzione distribuzione di probabilità (PDF) del tempo di primo passaggio attraverso la barriera fornisce dei risultati interessanti [24]. Nella regione di attivazione risonante e per tempi di correlazione corti del rumore dicotomico — cioè le regioni 1 e 2 della figura 7.5 — la PDF risulta essere puramente esponenziale. Questo risultato è consistente con la rappresentazione della

particella browniana che, nella regione di attivazione risonante, attraversa con elevata probabilità la buca di potenziale con la barriera nella configurazione bassa, mentre, nella regione dei tempi di correlazione corti, la particella sperimenta una barriera di potenziale di altezza media. Nella regione di tempi di correlazione lunghi, cioè la regione 3 della figura 7.5 nella pagina precedente, la PDF lentamente converge ad una PDF composta dalla somma di due funzioni esponenziali, che sono collegate al tempo di fuga di Kramers (vedi l'eq. (7.1)) delle due buche tra le quali il sistema salta. Prima che si arrivi alla convergenza — cioè nella regione intermedia tra la 3 e la 2 — la PDF è ben approssimata da una funzione esponenziale “stirata” (*stretched exponential function*).

Le deviazioni osservate nella funzione PDF, rispetto agli andamenti esponenziali, rappresentano uno scostamento significativo dalla rappresentazione di Kramers relativamente a queste problematiche. La deviazione dalla descrizione standard di Kramers del tempo di fuga da sistemi fisici metastabili si verifica quando fonti aggiuntive di rumore, oltre alla temperatura, sono presenti in sistemi fisici non lineari e rappresenta un comportamento controintuitivo della particella browniana che modella il sistema dinamico.

Val la pena di notare che la motivazione fisica per lo studio di fenomeni di attivazione risonante, relativi all'attraversamento di barriere di potenziali fluttuanti come quello descritto sopra, è dovuta al crescente interesse sui modelli di rilassamento in sistemi complessi a molti corpi della materia condensata. In particolare, analizzare in dettaglio la cinetica di “fuga” da uno stato metastabile fluttuante risulta importante per la comprensione della dinamica di dissociazione molecolare, per il problema del *protein folding* e per la dinamica di sistemi bistabili o metastabili di natura quantistica, di interesse per i computer quantistici.

## 7.5 La stabilità incrementata dal rumore

Di recente è stato proposto che la stabilità di un sistema altrimenti instabile, dal punto di vista deterministico, possa esse-

re incrementata dalla presenza di una quantità finita di rumore [25, 26, 27, 30, 31, 32]. Questo fenomeno è chiamato aumento di stabilità per effetto del rumore, *Noise Enhanced Stability* (NES) [26]. La NES è stata per la prima volta predetta per un sistema modello con potenziale cubico — lo stesso potenziale riportato in Figura 7.2 — e osservata sperimentalmente in un sistema fisico caratterizzato dalla presenza di un diodo tunnel.

Il fenomeno della NES viene osservato quando si analizzano i tempi di fuga da un sistema fisico metastabile modulato nel tempo. Il profilo di potenziale sperimentato dalla particella browniana, il cui moto rappresenta la dinamica del sistema fisico sotto osservazione, è lo stesso della Fig. 7.4. Questo potenziale modello può essere utile per descrivere la cinetica di un sistema che sperimenta una transizione di fase del primo ordine — per esempio un sistema che consiste di un campione di acqua superraffreddata che solidifica dispersa in olio — e trova molte applicazioni in biologia, chimica, fisica, scienza sociali e anche nelle dinamiche dei mercati finanziari. Una applicazione in biologia è il modello stocastico di Malthus–Verhulst per la crescita di popolazione limitata in densità [28], un'altra applicazione, nelle ricerche sui mercati finanziari, è il modello non lineare di Langevin, introdotto da Bouchaud e Cont [29]. In questo modello la barriera di potenziale della Fig. 7.4 separa un regime normale di tipo *random-walk* — che rappresenta l'andamento dei prezzi per effetto delle fluttuazioni nel mercato azionario — da un regime di crollo, allorchè la derivata del prezzo dell'azione diventa molto grande.

Il fenomeno della fuga da uno stato metastabile si ritrova in molte aree scientifiche. Tra queste c'è la teoria della diffusione nei solidi, la cinetica chimica, il trasporto elettrico nei semiconduttori, il trasporto in sistemi complessi come i vetri e i sistemi biologici.

Noi consideriamo qui un sistema fisico metastabile la cui barriera di potenziale viene modulata periodicamente da un segnale esterno (vedi Fig. 7.6). La modulazione può essere così intensa che la barriera di separazione nella curva di potenziale può essere trascurabile o completamente assente per un piccolo intervallo di tempo. Selezionando alcuni parametri di controllo — l'intensità del segnale di modulazione nel nostro caso — possiamo avere: 1) una barriera finita a ogni tempo, che significa che il sistema è, in assenza di rumore, totalmente stabile; 2) nessuna barriera per

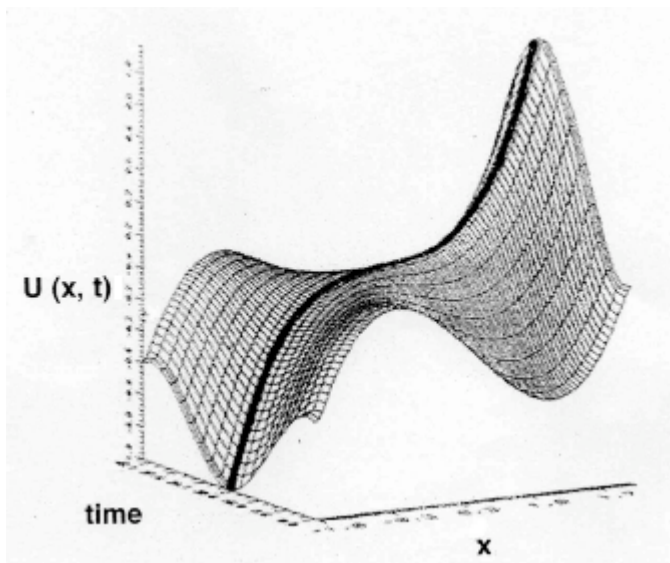


Figura 7.6: Rappresentazione tridimensionale del potenziale dipendente dal tempo per un sistema totalmente instabile. Il potenziale viene modulato da un segnale periodico.

un breve intervallo di tempo, che significa che il sistema è adesso deterministicamente totalmente instabile.

La sensazione iniziale intuitiva su questo sistema è che un incremento dell'intensità del rumore dovrebbe diminuire il tempo medio di fuga, perchè il rumore forza la particella a ispezionare di più lo spazio a disposizione rispetto al caso di assenza di rumore. La particella browniana dunque attraverserebbe la barriera in un tempo più corto. Un'analisi più dettagliata mostra che questo non avviene necessariamente, ma per una scelta appropriata dell'ampiezza del segnale di modulazione si ottiene un aumento del tempo di fuga, o tempo di vita medio dello stato metastabile, in funzione dell'intensità del rumore, cioè il sistema diventa più stabile.

In presenza di rumore il regime globalmente stabile diventa metastabile, con la stabilità del sistema più alta per valo-

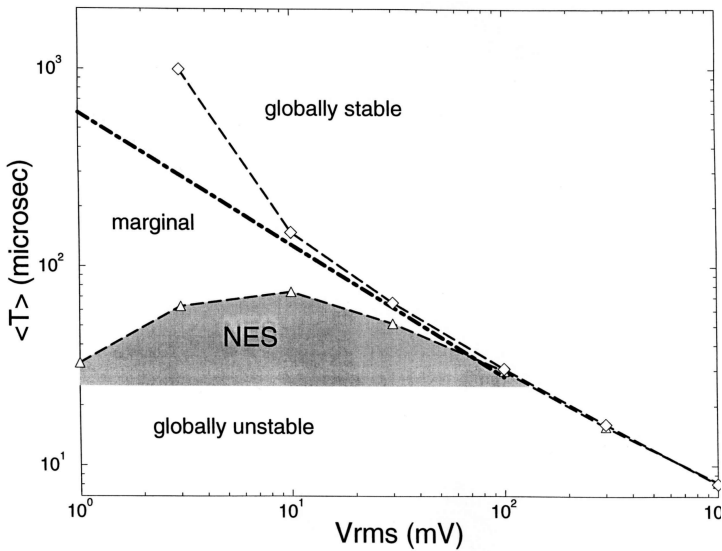


Figura 7.7: Tempo medio di fuga (o tempo medio di vita dello stato metastabile) in funzione dell'intensità del rumore, per un sistema metastabile fluttuante realizzato con un diodo tunnel. La regione tratteggiata rappresenta quella in cui si osserva la NES [26].

ri bassi del rumore. D'altra parte, nel regime totalmente instabile, il tempo di fuga dallo stato metastabile in funzione dell'intensità del rumore presenta un massimo (vedi area tratteggiata nella figura 7.7). In particolare esiste una regione dei parametri in cui una quantità finita di rumore fa aumentare la stabilità del sistema, altrimenti totalmente instabile in assenza di rumore. Nella figura 7.7 nella pagina precedente è mostrato il tempo medio di vita dello stato metastabile (o tempo di fuga dallo stato metastabile) in funzione dell'intensità del rumore, per due insiemi di parametri che caratterizzano la dinamica del sistema fisico, che nel nostro caso è il diodo tunnel [26].

La NES è un fenomeno generale che può essere osservato in sistemi metastabili fortemente modulati in presenza di rumore, tuttavia i dettagli del fenomeno possono essere specifici del sistema fisico studiato. In un campo completamente differente, cioè lo studio del comportamento intermittente caotico di una mappa in prossimità di una biforcazione a tangente, è stato dimostrato (vedi [30]) che la lunghezza media delle regioni di tipo laminaire può essere ampliata dalla presenza di una certa quantità di rumore. Questo implica che una piccola quantità di rumore in realtà aumenta il tempo medio di vita del moto laminare, contrariamente a quanto si potrebbe aspettare. Un fenomeno che è riconducibile alla NES. Desideriamo osservare infine che gli ultimi due fenomeni, cioè l'attivazione risonante e la NES, coesistono in sistemi metastabili e in sistemi bistabili asimmetrici. Recentemente tale coesistenza è stata prevista teoricamente e analizzata in modelli di Fisica Interdisciplinare. Tali modelli risultano utili per l'analisi della dinamica transiente, in presenza di rumore, di una giunzione Josephson sovrasmorzata, del modello neuronale di FitzHugh-Nagumo e di un modello di crescita cancerogena in presenza del sistema immunitario [31, 32].

## 7.6 Un semplice modello stocastico per i mercati finanziari: il modello di moto browniano geometrico

La costruzione di un modello utile per la descrizione della dinamica dei mercati finanziari si basa sulla cosiddetta *ipotesi di mercato efficiente*. Un mercato è efficiente se:

- tutti gli operatori finanziari rapidamente e in modo completo ottengono tutte le informazioni rilevanti per le transazioni economiche;
- esso è liquido; ciò significa che colui che investe, il cosiddetto *investor*, può facilmente comperare o vendere un prodotto finanziario in qualunque momento. Più liquido è un mercato, più sicuro è investire in esso. Colui che investe sa che “egli può sempre incassare i suoi beni finanziari *assets* (trasformare in denaro liquido le sue azioni). Questo facile scambio tra moneta e prodotti finanziari fa aumentare l’attrattiva del mercato. In un mercato liquido “maturo”, le miriadi di transazioni equilibrano in modo efficiente la decisione di un singolo investitore (o di un piccolo gruppo di investitori), così che compravendite individuali sono possibili in ogni momento senza effetti destabilizzanti sui prezzi delle azioni (*assets*).
- c’è cosiddetta bassa “frizione di mercato”. La *friction market* è un’espressione collettiva per tutte le specie di costi di transazione (*trading costs*). Questi includono costi di approvvigionamento (*trader provisions*), costi di transazione, tasse, *bid-ask spreads*, cioè differenze nei prezzi che un investitore ottiene (*bid-price*) quando vende o che deve pagare (*ask-price*) quando compera, ecc. La somma di questi costi è trascurabile paragonata con il volume di transazioni se la frizione del mercato è bassa.

L’ipotesi di mercato efficiente afferma che un mercato con queste “proprietà” assimila la nuova informazione così efficientemente che tutta l’informazione corrente relativa allo sviluppo del mercato è in ogni momento completamente contenuta nei prezzi attuali.



Nessun vantaggio si ha prendendo in considerazione tutta o parte della evoluzione temporale del prezzo. Ciò porta naturalmente all'assunzione di Markov per i processi aleatori: l'andamento dei prezzi nei mercati finanziari è descrivibile tramite un processo stocastico a memoria nulla. Ciò che succede al tempo  $t$  è completamente indipendente da quanto successo al tempo  $t - \Delta t$ , essendo  $\Delta t$  l'intervallo tra due transazioni. La ragionevolezza di una tale ipotesi si basa sulla seguente argomentazione: supponiamo che una serie temporale esibisca una struttura da cui si possa evincere un aumento del prezzo di un'azione in un futuro immediato. Certamente gli investitori comprerebbero le azioni e le venderebbero subito dopo, per incassare la differenza. Tuttavia, un mercato efficiente risponde immediatamente all'aumento della domanda aumentando il prezzo dell'azione stessa. La profittevole opportunità svanisce a causa della competizione tra i numerosi "traders" (operatori finanziari) attivi. Questa argomentazione limita qualunque correlazione in un intervallo di tempi molto breve ed evoca la natura casuale o "random" delle serie temporali dei prezzi delle azioni in un mercato finanziario. Un semplice modello che descrive l'evoluzione del prezzo di un'azione  $P(t)$  si basa sulle seguenti considerazioni: supponiamo che al tempo  $t = 0$  depositiamo una somma  $P(0)$  in una banca. La banca conferisce un tasso di interesse libero da rischio  $r$  per il deposito. Se l'interesse è pagato una volta dopo un periodo temporale  $t$ , la somma iniziale è incrementata di:

$$P(t) = P(0) + rtP(0) = P(0)(1 + rt) \quad (7.3)$$

D'altronde se la somma è pagata due volte, avremo:

$$P(t) = \left( P(0) + \frac{rt}{2}P(0) \right) + \left( P(0) + \frac{rt}{2}P(0) \right) \frac{rt}{2}, \quad (7.4)$$

quindi:

$$P(t) = P(0) \left( 1 + \frac{rt}{2} \right)^2. \quad (7.5)$$

Iterando questo ragionamento per  $n$  pagamenti nel periodo di tempo  $t$ , otteniamo finalmente:

$$P(t) = P(0) \left( 1 + \frac{rt}{2} \right)^n, \quad (7.6)$$

che nel limite di interesse composto continuo fornisce la seguente espressione per  $P(t)$ :

$$P(t) = P(0) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{rt}{2}\right)^n = P(0) e^{rt} \quad (7.7)$$

Adesso immaginiamo che il prezzo dell'azione o del bene economico considerato “*asset*” sia simile a un deposito bancario, ma sia perturbato da fluttuazioni stocastiche. La variazione del prezzo  $dP$  nel piccolo intervallo temporale  $dt$  consiste di due contributi: uno deterministico e uno casuale o “stocastico”. In accordo con l'ultima equazione scritta, una ragionevole posizione “*ansatz*” per la parte deterministica è:

$$dP = \mu P(t) dt \quad (7.8)$$

dove  $\mu$  è detto termine di *drift* o spinta e misura il tasso di crescita medio del prezzo  $P(t)$ . Ci si aspetta evidentemente che  $\mu$  sia più grande di  $r$ . Nessun saggio investitore assumerebbe il rischio di perdita sul mercato finanziario se un conto bancario fornisse lo stesso od anche un miglior profitto. Il secondo contributo modella la natura stocastica dell'evoluzione del prezzo. Tale contributo sarà di tipo Markoviano, cioè a memoria nulla, in accordo all'ipotesi di mercato efficiente. Una possibile scelta risulta quindi, in accordo con quella deterministica:

$$dP = \sigma P(t) dW(t). \quad (7.9)$$

Quest'ultima equazione introduce un secondo parametro fenomenologico, la *volatilità*  $\sigma$ . La volatilità misura l'intensità delle fluttuazioni statistiche del prezzo. Combinando insieme i due contributi, otteniamo il seguente risultato:

$$dP = \mu P(t) dt + \sigma P(t) dW(t), \quad (P(0) > 0). \quad (7.10)$$

Questa equazione differenziale stocastica rappresenta una variante del moto browniano, che è detta moto browniano geometrico. Esso suggerisce che la variabile rilevante non è la variazione assoluta del prezzo, ma il rendimento o *return*  $dP/P(t)$  nell'intervallo temporale  $dt$ . Da un punto di vista finanziario questa quantità è rilevante. Una variazione assoluta di  $dP = 10$  euro nel tempo  $dt$  è molto più significativa con un capitale iniziale di  $P(t) = 100$  euro che per un

capitale iniziale di  $P(t) = 10.000$  euro. Il rendimento o *return*  $dP/P$  chiaramente esprime questa differenza. L'interpretazione di  $dP/P$  come la variabile rilevante suggerisce la possibilità di riscrivere l'ultima equazione in termini del  $\ln P(t)$ . Usando la formula del calcolo stocastico di Ito [33] si trova:

$$d \ln P = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW(t). \quad (7.11)$$

È dunque il logaritmo del prezzo dell'azione e non il prezzo stesso, come Bachelier assumeva [34], che compie un processo diffusivo di Wiener con una spinta (*drift*) costante. Una tipica traiettoria del processo di Wiener è indicata nella figura 7.1. Il moto browniano geometrico introduce dunque due parametri:  $\mu$  e  $\sigma$ . Il primo descrive il guadagno atteso, il secondo quantifica le fluttuazioni attorno all'andamento medio. Se le fluttuazioni sono elevate, il portafoglio (*asset*) è molto "volatile", e un investimento è considerato rischioso. Un investitore prudente desidera evitare questo rischio e proteggersi contro possibili perdite. Un metodo per la riduzione del rischio è ad esempio la diversificazione del portafoglio.

Intendiamo comunque sottolineare che tale modello è considerato un modello base per la creazione di modelli dinamici più realistici dei mercati finanziari e rappresenta una delle assunzioni fondamentali su cui si basa l'equazione di Black e Scholes sulle opzioni finanziarie [35]. Grazie anche alla disponibilità di dati finanziari di alta frequenza, diversi altri modelli [29, 36, 37, 38, 39] sono stati introdotti nella nuova disciplina detta Econofisica, uno dei settori emergenti di investigazione scientifica dei sistemi complessi [39].

## 7.7 Conclusioni

I fenomeni studiati sono soltanto alcuni esempi che dimostrano che la scienza moderna non lineare fornisce una via pragmatica per affrontare la sfida della comprensione dei sistemi complessi, nei confronti dei quali gli schemi di risoluzione classici falliscono. L'idea della riproducibilità e della illimitata predicibilità, legata anche al "riduzionismo", ha dominato per lungo tempo il nostro modo di pensare e ha portato gradualmente all'immagine di un mondo

lineare: un mondo in cui gli eventi osservati sono collegati alle cause sottostanti da un insieme di leggi che possono essere ridotte, per tutti i fini pratici, alla semplice legge di proporzionalità.

Il mondo reale è invece non lineare e “rumoroso”. Ciò significa che la maggior parte dei sistemi naturali di tale mondo “reale” sono in contatto con un ambiente complesso con il quale scambiano materia, quantità di moto ed energia in modi, in pratica, imprevedibili. Per i sistemi naturali, quindi, non solo cade il determinismo ma anche quello che ci aspettiamo accada relativamente a un dato fenomeno fisico, qualora il nostro modo di pensare sia “lineare”. Abbiamo visto infatti come fallisca la nostra intuizione relativamente a sistemi non lineari correlati, mostrando alcuni effetti controintuitivi, che sono riscontrabili in diversi fenomeni naturali. Possiamo dire dunque che la ricerca di ipotesi creative, che possano spiegare l’“ordine” nei fenomeni naturali, passa attraverso la nostra comprensione del ruolo attivo delle fluttuazioni (o del “rumore”) nella “creazione” — nel senso figurato del termine — di strutture fisiche ordinate.

Per rendere manifeste ulteriormente le potenzialità dell’approccio fenomenologico su esposto, basato sulla dinamica stocastica di Langevin, è stato anche fornito un esercizio svolto su un semplice modello stocastico di dinamica dei mercati finanziari.

## Bibliografia

- [1] A. Einstein, *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen*, Ann. Phys. **17**, 549–560 (1905).
- [2] M. von Smoluchowski, *Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen*, Ann. Phys. **21**, 756–780 (1906).
- [3] P. Langevin, *Sur la théorie du mouvement brownien*, C. R. Acad. Sci. **146**, 530–533 (1908).
- [4] H. Haken, *Cooperative Phenomena in Systems far from Thermal Equilibrium and in Nonphysical Systems*, Rev. Mod. Phys. **47**, 67–121 (1975).

- 
- [5] H. Lefever, W. Horsthemke, R. Lefever, *Noise-Induced Transitions*, Springer, Berlin 1984.
- [6] J.A. Freund, Th. Pöschel (eds.), *Stochastic Processes in Physics, Chemistry, and Biology*, Springer, Berlin 2000.
- [7] R.M. Mazo, *Brownian Motion: Fluctuations, Dynamics and Application*, Oxford University Press, Oxford 2004.
- [8] A.O. Caldeira, A.J. Leggett, *Path Integral Approach to Quantum Brownian Motion*, Physica A: Statistical and Theoretical Physics **121**, 587–616 (1983).
- [9] G. Parisi, *The Order Parameter for Spin Glasses: A Function on the Interval 0–1*, J. of Physics A: Mathematical and General **13**, 1101–1112 (1980); *Order Parameter for Spin-Glasses*, Phys. Rev. Lett. **50**, 1946 (1983); *Statistical Field Theory*, Addison-Wesley, Redwood City 1988; *Complex Systems: A Physicists Viewpoint*, Physica A **263**, 557–564 (1999); M. Kardar, G. Parisi, Z. Yi-Cheng, *Dynamic Scaling of Growing Interfaces*, Phys. Rev. Lett. **56**, 889–892 (1986).
- [10] E.S. Fraga, *The Role of Noise and Dissipation in the Hadronization of the Quark-Gluon Plasma*, Acta Phys. Hung. A: Heavy Ion Physics (2006) in press (see archiv: hep-ph/0510344); E.S. Fraga, G. Krein, *Can Dissipation Prevent Explosive Decomposition in High-Energy Heavy Ion Collisions?*, Phys. Lett. B **614**, 181–186 (2005).
- [11] U. Weiss, *Quantum Dissipative Systems*, World Scientific, Singapore 1999.
- [12] H.P. Breuer, F. Petruccione, *Open Quantum Systems*, Oxford University Press, Oxford 2002.
- [13] R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera, A. Vulpiani, *Stochastic Resonance in Climatic Change*, Tellus **34**, 10–16 (1982); R. Benzi, A. Sutera, A. Vulpiani, *The Mechanism of Stochastic Resonance*, J. Phys. A **14**, L453–L457 (1981).
- [14] P. Jung, *Periodically Driven Stochastic Systems*, Phys. Rep. **234**, 175–295 (1993).

- [15] R.N. Mantegna, B. Spagnolo, *Stochastic Resonance in a Tunnel Diode*, Phys. Rev. E **49**, R1792–R1795 (1994); *Stochastic Resonance in a Tunnel Diode in the Presence of White or Coloured Noise*, Il Nuovo Cimento D **17**, 873–882 (1995); E. Lanzara, R.N. Mantegna, B. Spagnolo, R. Zangara *Experimental Study of a Nonlinear System in the Presence of Noise: The Stochastic Resonance*, Am. J. Phys. **65**, 341–349 (1997).
- [16] R.N. Mantegna, B. Spagnolo, M. Trapanese, *Linear and Nonlinear Experimental Regimes of Stochastic Resonance*, Phys. Rev. E **63**, 11–101 (2001).
- [17] R.N. Mantegna, B. Spagnolo, L. Testa, M. Trapanese, *Stochastic Resonance in Magnetic Systems Described by Preisach Hysteresis Model*, J. Appl. Phys. **97**, 10E519 (2005).
- [18] A. Bulsara, L. Gammaitoni, *Tuning to Noise*, Phys. Today **49**, 23, 330–331 (1996).
- [19] L. Gammaitoni, P. Hanggi, P. Jung, F. Marchesoni, *Stochastic Resonance*, Rev. Mod. Phys. **70**, 223–287 (1998); V.S. Anishchenko, A.B. Neiman, F. Moss, L. Schimansky–Geier, *Stochastic Resonance: Noise Enhanced Order*, Phys. Usp. **42**, 7 (1999); T. Wellens, V. Shatokhin, and A. Buchleitner, *Stochastic Resonance*, Rep. Prog. Phys. **67**, 45 (2004).
- [20] J. Raloff, *Is Noise a Neural Necessity?*, Science News **150**, 23, 330–331 (1996).
- [21] D. Valenti, A. Fiasconaro, B. Spagnolo, *Stochastic Resonance and Noise Delayed Extinction in a Model of Two Competing Species*, Physica A **331**, 477–486 (2004); B. Spagnolo, D. Valenti, A. Fiasconaro, *Noise in Ecosystems: A Short Review*, Math. Biosciences and Engineering **1**, 185–211 (2004); A. Caruso, M.E. Gargano, D. Valenti, A. Fiasconaro, B. Spagnolo, *Cyclic Fluctuations, Climatic Changes and Role of Noise in Planktonic Foraminifera in the Mediterranean Sea*, Fluctuation and Noise Letters **5** (2), L349–L355 (2005).
- [22] K. Wiesenfeld, F. Moss, *Stochastic Resonance and the Benefits of Noise: From Ice Ages to Crayfish and SQUIDS*, Nature **373**,

- 33–36 (1995); *L'utilità del rumore di fondo*, *Le Scienze* **326**, 86–90 (1995).
- [23] C.R. Doering J.C. Gadoua, *Resonant Activation over a Fluctuating Barrier*, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2318–2321 (1992).
- [24] R.N. Mantegna, B. Spagnolo, *Experimental Investigation of Resonant Activation*, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3025–3028 (2000); *Numerical Simulation of Resonant Activation in a Fluctuating Metastable Model System*, *J. Phys. IV* **8**, Pr6/247–Pr6/251 (1998).
- [25] L. Dayan, M. Gitterman, G.H. Weiss, *Stochastic Resonance in Transient Dynamics*, *Phys. Rev. A* **46**, 757–761 (1992).
- [26] R.N. Mantegna, B. Spagnolo, *Noise Enhanced Stability in an Unstable System*, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 563–566 (1996); *Probability Distribution of the Residence Times in Periodically Fluctuating Metastable Systems*, *Int. J. Bifurcation and Chaos* **8** (4), 783–790 (1998).
- [27] N. Agudov, B. Spagnolo, *Noise Enhanced Stability of Periodically Driven Metastable States*, *Phys. Rev. Rap. Comm. E* **64**, 035102(R) (2001); A. Fiasconaro, B. Spagnolo, S. Boccaletti, *Signatures of Noise-Enhanced Stability in Metastable States*, *Phys. Rev. E* **72**, 061110(5) (2005).
- [28] S. Ciuchi, F. de Pasquale, B. Spagnolo, *Self Regulation Mechanism of an Ecosystem in a Non Gaussian Fluctuation Regime*, *Phys. Rev E* **53**, 706–716 (1996).
- [29] J.-P. Bouchaud, R. Cont, *A Langevin Approach to Stock Market Fluctuations and Crashes*, *Eur. Phys. J. B* **6**, 543–550 (1998); J.-P. Bouchaud, *Power Laws in Economics and Finance: Some Ideas from Physics*, *Quantitative Finance* **1**, 105–112 (2001); *Introduction to Statistical Finance*, *Physica A* **313**, 238 (2002).
- [30] J.E. Hirsch, B.A. Hubermann, D.J. Scalapino, *Theory of Intermittence*, *Phys. Rev. A* **25**, 519–532 (1982).

- [31] A.A. Dubkov, N.V. Agudov, B. Spagnolo, *Noise Enhanced Stability in Fluctuating Metastable States*, Phys. Rev. E **69**, 061103 (7) (2004).
- [32] A.L. Pankratov, B. Spagnolo, *Suppression of Time Errors in Short Overdamped Josephson Junctions*, Phys. Rev. Lett. **93**, 177001 (2004); E.V. Pankratova, A.V. Polovinkin, B. Spagnolo, *Suppression of Noise in FitzHugh–Nagumo Model Driven by a Strong Periodic Signal*, Physics Letters A, **344** (1), 43–50 (2005); A. Ochab–Marcinek, E. Gudowska–Nowak, A. Fiasconaro, B. Spagnolo, *Coexistence of Resonant Activation and Noise Enhanced Stability in a Model of Tumor–Host Interaction: Statistics of Extinction Times*, Acta Physica Polonica B **37** (5), 1651–1666 (2006).
- [33] C.W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods*, Springer, Berlin 1985.
- [34] L. Bachelier, *Théorie de la spéculation*, Ph.D. Thesis, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure **III-17**, 21–86 (1900).
- [35] F. Black, M. Scholes, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, J. Political Economy **81**, 637 (1973).
- [36] S.L. Heston, *A Closed–Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options*, Rev. Financial Studies **6**, 327–343 (1993); T. Bollerslev, *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, J. Econometrics **31**, 307–327 (1986).
- [37] J.–P. Bouchaud, M. Potters, *Theory of Financial Risks*, Cambridge University Press, Cambridge 2000.
- [38] G. Bonanno, B. Spagnolo, *Escape Times in Stock Markets*, Fluctuation and Noise Letters **5** (2), L325–L330 (2005); *Stochastic Models and Escape Times of Financial Markets*, Mod. Probl. Stat. Phys. **4**, 122 (2005).
- [39] R.N. Mantegna, H.E. Stanley, *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*, Cambridge University Press, Cambridge 2000.