
# Geometrie dinamiche nel tracciamento delle curve "celebri" di Apollonio

**Francesco Di Paola**

**Riassunto** La trattazione del luogo geometrico conica assume carattere di grande generalità nell'applicazione dei metodi della Scienza della Rappresentazione. Se ne descrivono l'evoluzione storica, dalle origini alla rappresentazione digitale, e i caratteri peculiari attraverso inedite costruzioni geometriche.

**Abstract** The elaboration of a conic as geometric locus assumes characteristics of significant generality for the application of methods of Science of Representation. We describes its historical evolution, from the origins to the digital representation, and the peculiar characters through new geometric constructions.

**Francesco Di Paola** fdipaola@unipa.it
PhD. Dip. di Rappresentazione, Fac. di Ingegneria, Università di Palermo

## L'evoluzione storica delle coniche, dalle origini alla rappresentazione digitale

Lo studio teorico e pratico delle proprietà delle coniche trova contributi fin dai tempi antichi delineando, nel corso dei secoli, diversi approcci culturali che tracciano momenti salienti dell'evoluzione del pensiero geometrico/matematico. Risulta affascinante osservare che l'interesse profuso in questo campo di indagine ha delineato vari aspetti legati alla concezione e alla generazione delle linee curve deducendone le proprietà intrinseche.

I primi apporti risalgono al periodo ellenistico; i geometri e i matematici greci (Eudosso, Menecmo, Aristeo, Euclide, Archimede) definiscono la curva conica come sezione di un cono (acutangolo, *oxytome*, rettangolo, *orthotomo*, ottusangolo, *ambliytome*) e sono loro ad introdurre il termine di sezioni coniche[1]. Le restrizioni imposte sulla natura del cono (da principio inteso solo circolare) e sulla posizione spaziale del piano secante (esclusivamente perpendicolare ad una generatrice del cono) sono brillantemente generalizzate da Apollonio Pergeo (verso il 200 a.C.), nel suo trattato *Sezioni Coniche* in otto Libri. Quest'ultimo suggerisce i nomi, oggi ampliamente conosciuti, di "ellisse", di "iperbole" e di "parabola" dandone un esaustivo assetto teorico[2]. Egli, pur riuscendo a pensare che

---

[1] Dalle notizie riportateci dagli studiosi della storia della Matematica, le sezioni coniche (inserite nella categoria dei "luoghi solidi", poiché nello spazio geometrico come sezioni di un volume) sono probabilmente introdotte tra il 360-350 a.C. dal platonico Menecmo. Si riconosce al geometra greco il merito di aver scoperto le coniche, spinto dalla soluzione del noto *Problema di Delo* della duplicazione del cubo. Euclide ed il contemporaneo Aristeo introducono scritti sui "luoghi solidi", mentre il siracusano Archimede affronta il tema delle coniche interessandosi al calcolo delle loro aree (*Quadratura della parabola*).

[2] Fu con l'opera in otto libri delle Coniche di Apollonio di Pergeo (verso il 200 a.C.) che la trattazione delle coniche raggiunge il più alto livello di generalità nell'antichità. É Apollonio, probabilmente, a mostrare per la prima volta che il cono circolare sezionato poteva essere qualsiasi (retto od obliquo) e a due falde, a concepire i piani di sezione comunque inclinati rispetto alla direttrice della quadrica. Studia e descrive alcuni dei più importanti elementi quali: i diametri coniugati, gli assi, le tangenti e gli asintoti, i poli e le polari, similitudine tra coniche. I nomi delle coniche non degeneri, da lui coniati, rappresentano adattamenti di termini precedentemente usati, forse dai pitagorici, nella soluzione di equazioni di secondo grado mediante l'applicazione di aree. Il termine *parabola*, che significa "confrontare", è usato quando un rettangolo di area data viene adagiato su un segmento dato in modo che l'area del rettangolo e l'area del quadrato di lato tale segmento siano uguali; il termine *ellipsis*, che significa "difetto", indicava che il rettangolo dato differisce dal quadrato per difetto di un quadrato; infine, *hyperbola*, che significa "eccesso", indica il caso in cui il rettangolo differisse dal quadrato per eccesso di un quadrato. Soltanto i primi quattro libri delle *Coniche* furono editi a stampa a cura di G.B. Memo a Venezia nel 1537. I libri V, VI, VII furono scoperti soltanto nel XVII secolo e pubblicati a cura di Giovanni Alfonso Borelli (Apollonio,

esistesse un collegamento tra i tre tipi di curve (anticipando di circa 1800 anni il "Principio di continuità" del tedesco Johann Keplero), tuttavia fa derivare tutte le sezioni coniche da un cono a direttrice circolare, piuttosto che generalizzare ad un qualsiasi cono quadrico[3]. Tra le sue importanti dimostrazioni e proposizioni è da annoverare la deduzione che qualsiasi curva a punti reali, rappresentata da un'equazione di secondo grado, si può ottenere come sezione di un cono circolare. Nel III Libro disquisisce del noto *locus ad tres aut quatuor lineas,* ampliamente discusso da Euclide fino a Newton (nel trattato *Principia*), apportando elementi risolutivi al problema, allora irrisolto, di descrivere una conica determinata da cinque punti[4].

Quest'ultima questione è ripresa ed ampliata con nuova vitalità soltanto in epoca tardo ellenistica, intorno al 320 d.C., dal matematico Pappo di Alessandria nel trattato *Collezione* (Libro VII)[5], che stenderà le basi per la moderna geometria proiettiva e in particolar modo per il *Teorema di Pascal* (1640) (su un esagono inscritto in una conica) e per il *Teorema di Brianchon* (1806) (su un seilatero circoscritto ad una conica)[6]. Pappo

---

1661). Per un maggiore approfondimento sui termini si veda: C.B. Boyer, *Storia della Matematica*. Oscar Saggi Mondadori, Milano 1980, pp. 170-185 e L. Cresci, *Le curve celebri – Invito alla storia della matematica attraverso le curve piane più affascinanti,* Aries Ed., Padova 1998, pp.69-79. In riferimento ai modi di disegnare la linea curva ellittica con tratto continuo mediante la "regola del filo", sono da attribuire ad Apollonio i primi sviluppi applicativi, poi in seguito nel Cinquecento codificati in regola. Sull'argomento si veda: O. Zerlenga, *La forma ovata in architettura – rappresentazione e geometria,* CUEN Ed., Napoli 1997, pp.11-17.

[3] Una retta, detta *generatrice*, la quale, passando sempre per un punto proprio, detto *vertice*, si appoggi con continuità ad una curva *direttrice conica* non degenere (ellisse, parabola, iperbole, circonferenza), il cui piano non contenga il vertice, dicesi cono *quadrico*, costituito da due *falde* simmetriche indefinite.

[4] "Luogo geometrico rispetto a tre e quattro rette": date tre rette (o quattro rette) giacenti in un piano, trovare il luogo geometrico di un punto che si muove in modo che il quadrato della distanza del punto da una di queste rette sia proporzionale al prodotto delle distanze dalle altre rette (o, nel caso di quattro rette, il prodotto delle distanze dalle altre due), dove le distanze vengono misurate secondo angoli dati rispetto alle rette. Sulla questione, assai dibattuta nella storia della matematica, della determinazione di conica dati cinque punti, Apollonio suggerisce degli elementi che riconducono la questione geometrica delle tre o quattro rette ad un caso particolare (come dimostra il matematico H. G. Zeuthen), nell'ipotesi in cui due di esse siano fra loro parallele. Per un maggiore approfondimento sui termini si veda: G. Loria, *Storia delle Matematiche – Dall'alba della civiltà al tramonto del secolo XIX*, II Ed., Hoepli Editore, Milano1950, pp. 58-66.

[5] Pappo considera il problema del "luogo geometrico rispetto a tre o quattro rette" (oggi noto come il "problema di Pappo") estendendo la questione al caso di sei rette giacenti in un piano, determinando così una curva sezione conica tale che il prodotto delle distanze da tre delle rette abbia un rapporto fisso con il prodotto delle distanze delle altre tre.

[6] Le proprietà grafiche dimostrate dal Pascal e dal Brianchon sono riferite ad un cerchio, ma

formula, probabilmente per la prima volta nel mondo antico, le proprietà di "fuoco", "direttrice" ed "eccentricità" per le tre specie di sezioni coniche, introducendo un nuovo modo di definire il luogo geometrico, divenuto tanto familiare nelle impostazioni seicentesche del matematico tedesco Johannes Keplero.

Un forte interesse geometrico-pratico alla forma ellittica lo ritroviamo nell'architettura civile romana nella realizzazione degli anfiteatri, anche se, ancora oggi, è dibattuta la natura, ellittica o ovale, del profilo perimetrale tracciato dagli agrimensori latini.

Seguono una serie di *commentatori* (come li definisce il Loria[7]) durante il periodo di dominazione romana (Proclo, Eutocio, Antemio), e, più tardi nei secoli IX-XI, di *traduttori* dal greco all'arabo ad opera di matematici arabi e bizantini (al-Khuwarizmi, Thabit ibn-Qurra) e dall'arabo al latino, dal XII fino all'epoca rinascimentale ((in Europa sono da ricordare, in ordine temporale: l'inglese Adelardo di Bath, il tedesco Giovanni Müller, meglio conosciuto come il Regiomontano, gli italiani Gherardo da Cremona, Federico Commandino e Francesco Maurolico). Le loro testimonianze poco aggiunsero di rilevante alla trattazione delle coniche, ma permisero di tramandare parte delle opere inestimabili come gli *Elementi* di Euclide e le *Coniche* di Apollonio, pietre miliari per l'impostazione teorica moderna.

Parallelamente, va evolvendosi e gradatamente affermandosi la *Prospettiva* come fondamento teorico della pittura e si rafforza la considerazione che le coniche sono proiezioni centrali di un circolo[8].

Il rinnovato interesse sulle nostre curve si manifesta con vivacità nel XVI secolo con l'esponente originale tedesco Johannes Werner (1468-1528) che rivisita il "modo" di costruire la parabola sul piano con riga e compasso.

Fin dagli inizi del Rinascimento la conoscenza delle coniche e delle loro

---

possono estendersi alle coniche perché invarianti proiettive. Il Teorema di Pascal è poi generalizzato da August Ferdinand Möbius (1847): posto che un poligono con $4n + 2$ lati sia iscritto in una conica, si prolunghino i lati opposti fino a che si secano in $2n + 1$ punti. Se $2n$ di questi punti si trovano sulla stessa retta, allora anche l'ultimo punto si trova su di essa. Per un approfondimento sui teoremi suindicati si vedano: G. Castelnuovo, *Lezioni di Geometria analitica*, Ed. Dante Alighieri, Roma-Milano 1909, pp. 428-430; R. Migliari, *Geometria descrittiva*, Vol.1 – *Metodi e costruzioni*, CittàStudi Edizioni, Novara 2009, pp. 306-309.

[7] G. Loria, *Storia della Geometria Descrittiva dalle origini sino ai giorni nostri*, Ed. Hoepli, Milano1921, pp. 191-209.

[8] Il primo a scrivere il trattato completo sulla prospettiva con l'impostazione teorica, sia pure in forma embrionale, dell'odierna geometria descrittiva fu L.B. Alberti, intitolato *De perspectiva pingendi* (1470-1480).

specificità fu coacerva di studi legati ai fenomeni ottici (già osservati e studiati da Euclide), geodetici ed astronomici, che nel proseguo maturano in opere di notevole importanza per la scienza matematica e geometrica.

Contribuisce ad aggiungere un tassello di conoscenza il tedesco Johann Keplero (1571-1630) che, nel corso delle sue ricerche sull'ottica, sull'astronomia e sulle proprietà degli specchi parabolici, si dedica con interesse alle sezioni coniche discostandosi dalle impostazioni concettuali di Apollonio.Tra le sue idee significative al presente studio si ricordano: le orbite dei pianeti ellittiche e il termine "fuoco" coniato con l'accezione oggi a noi nota. Il matematico, considerando le coniche come distribuite in cinque specie, tutte appartenenti ad un'unica famiglia o genere, introduce il "Principio di continuità" (dati due punti fuochi il loro movimento lungo una retta collega geometricamente il cerchio e le tre curve celebri)[9].

Se l'ellisse riveste un prestigioso ruolo in astronomia, negli anni trenta del Seicento, la parabola è applicata in fisica per descrivere il moto di proiettile secondo le analisi di Galileo Galilei.

In quegli anni si apprezzano accurati studi sugli specchi parabolici, seguiti da cospicue esposizioni sulle proprietà delle sezioni coniche e dei procedimenti per tracciarle ad opera di adepti italiani di Galileo: Bonaventura Cavaleri (*Lo specchio ustorio*), Evangelista Torricelli (*De lineis novis*), Vincenzo Viviani (*Luoghi solidi*).

Nel secondo trentennio del XVII secolo la cultura scientifica ritrova il genio creativo in eminenti personalità francesi che segnarono passaggi cardine dal pensiero geometrico a quello matematico-analitico.

Uomini di spicco che ragionano sulle coniche, tra i fautori del cosiddetto *Rinascimento matematico*, sono il filosofo matematico René Descartes (Cartesio, 1596-1650), l'avvocato Pierre de Fermat (1601-1665), l'ingegnere-architetto militare Girard Desargues (1593-1661) e i suoi allievi Blaise Pascal (1623-1662) e Philippe de la Hire (1640-1718).

Il primo introduce la rivoluzionaria filosofia e scienza cartesiana che

---

[9] «*Dalla sezione conica formata semplicemente da due rette intersecantisi, nella quale i due fuochi coincidono con il punto di intersezione, si passa gradualmente attraverso un numero infinito di iperbole via via che un fuoco si allontana sempre più dall'altro. Quando un fuoco è infinitamente lontano, non si ha più l'iperbole a due rami, ma la parabola. Quando il fuoco, continuando a muoversi, passa al di là dell'infinito e torna ad avvicinarsi dall'altra parte, si passa attraverso un numero infinito di ellissi fino a che, quando i fuochi tornano a coincidere, si raggiunge il cerchio*». C.B. Boyer, *Storia della Matematica*. Oscar Saggi Mondadori, Milano 1980, p. 373. L'idea che la parabola abbia due fuochi, uno dei quali all'infinito, è dovuta a Keplero. Gli elementi all'infinito verranno generalizzati, circa venti anni dopo, nella geometria di Desargues.

elabora i fondamenti e i principi della geometria analitica partendo dal patrimonio umanistico ereditato e sulla scorta dei progressi dei suoi predecessori, quale ad esempio il suo connazionale Viète.

Di nostro interesse, in quest'ambito, risulta una delle tre appendici del suo trattato *Discours de la méthode*: *Géométrie* e, in particolare il II Libro. Il matematico ragiona sulla predetta problematica del *locus ad tres aut quatuor lineas* riformulando il problema con otto o più rette.

Da notare che Descartes non studia questi casi ponendo l'accento sulla forma geometrica delle tre curve celebri, ma bensì si concentra sulla determinazione dei mezzi necessari per descrivere le stesse secondo i principi cartesiani (ordinate corrispondenti ad ascisse note).

Dalle sue rigorose osservazioni, discostandosi dalle tre classiche categorie di luoghi ("piani", "solidi" e "lineari"), scaturisce un'elaborazione precisa di una classificazione di problemi geometrici risolti con l'ausilio di curve caratterizzate da equazioni di qualsiasi grado. Egli distingue le curve algebriche in "geometriche", le quali possono essere tracciate "esattamente", cioè quelle che portavano ad equazioni di secondo grado (rette, circonferenze, cissoide e concoide) e quelle che portavano ad equazioni di terzo e quarto grado (coniche), e in "meccaniche", cioè quelle che portavano ad equazioni di quinto o sesto grado (quadratrice, spirale, etc.). In quest'ultima categoria inserisce le curve "trascendenti" ovvero quelle che, usando il suo termine, vengono tracciate "inesattamente"[10].

Ad avvalorare gli studi di Descartes si interessa Fermat con il trattato *Introduzione ai luoghi* (il manoscritto dell'opera fu antecedente alla pubblicazione *Géométrie* del collega). Nel capitolo sulla "Soluzione di problemi solidi per mezzo di luoghi" scoprì lo stesso metodo, sottolineando che equazioni determinate di terzo e di quarto grado potevano risolversi per mezzo di coniche, curve del secondo ordine. Sui luoghi geometrici esprime anche un metodo chiamato *Metodo per trovare i massimi e i minimi* definendo le coniche con un'equazione dalla forma $y = x^n$ (se n è positivo si descrivono "parabole di Fermat", se n è negativo "iperboli di Fermat").

In quegli anni i metodi analitici e la teoria dei numeri affascinarono le menti di studiosi e cultori della materia, tanto che i progressi si registrano in matematica offuscando le innovazioni nella geometria pura grafica.

---

[10] «*[…] non possiamo ammettervi linee che sono simili a corde, cioè che diventano ora dritte e ora curve, per il fatto che, non essendo noto il rapporto esistente tra le rette e le curve (ed anzi, come ritengo, non potendo essere conosciuto dagli uomini), nessuna conclusione basata su tale rapporto potrebbe essere esatta e certa*», C.B. Boyer, *Storia della Matematica*. Oscar Saggi Mondadori, p. 393.

Non trascorre molto tempo quando un ingegnere-architetto militare decide di dedicarsi con totale impegno alla teoria delle coniche. Mosso da esigenze di tipo pratico, legate alla professione che svolge, il lionese Girard Desargues (1639) basa i suoi presupposti teorici sull'impianto prospettico rinascimentale e sul, già citato, principio di continuità espresso agli inizi del secolo da Keplero.

Fu il primo che, partendo dalla definizione di conica come proiezione del cerchio, ne deduce una teoria proiettiva unitaria ed elegante dal titolo *Brouillon projet d'une atteinte aux événemens des rencontre d'un cône avec un plan*, che segna una direzione inedita e originale rispetto alla geometria metrica di Apollonio, di Descartes e di Fermat[11].

Come spesso accade per le scoperte rivoluzionarie, il contesto storico-culturale che descrive l'evoluzione del concetto di conica è rappresentato da isolate brillanti esperienze di uomini studiosi che, nonostante elaborassero originali e vantaggiose vie risolutive, sostenevano con fatica le proprie idee. È, appunto, il caso di Desargues che deve imbattersi in una radicata mentalità analitico-algebrica che con diffidenza accoglie e accetta i suoi metodi proiettivi, ritardando di mezzo secolo la piena conoscenza della sua geometria proiettiva[12]. Si cita un suo celebre teorema duale per costruire una conica determinata da cinque condizioni: «Una trasversale sega una conica, e le coppie di lati opposti di un quadrangolo iscritto, in coppie di una stessa involuzione» (Castelnuovo G., *Lezioni di Geometria analitica*, 1909, p. 432), che sintetizza concetti di: "polo" e "polare", "divisione armonica", "involuzione" e punti "coniugati", tangenti alla conica da un

[11] La traduzione del titolo: *"Prima stesura del tentativo di studiare gli effetti dell'incontro di un cono con un piano"*. Desargues introdusse in maniera rigorosa gli elementi all'infinito, studiando analogamente un fascio di piani passanti per un punto, finito o infinito. Estese la definizione di cilindro ad un cono con il vertice all'infinito e di fascio di rette parallele ad una famiglia di rette tutte passanti per un punto all'infinito. Coniò dei termini originali, alcuni andati in disuso: la sezione conica la definisce *coup de rotuleau* ("colpo di matterello"), *involuzione* per indicare le coppie di punti di una retta le cui distanze da un punto fisso hanno un prodotto costante.

[12] Sono gli allievi: il francese Philippe de la Hire, il danese Frans van Schooten, il francese Amedée Francois Frézier e l'olandese Johan De Witt a diffondere la sua dottrina geometrica Il francese Philippe de la Hire fu il primo ad investigare le tre curve utilizzando la *trasformazione piana omologica*, (con centro, asse e retta limite) che muta una circonferenza nella curva del secondo ordine. Si veda: G. Loria, *Storia delle Matematiche – Dall'alba della civiltà al tramonto del secolo XIX*, II Ed. Hoepli, Milano1950, p.538. Mentre all'olandese Johan De Witt si deve il termine di *direttrice* in rapporto al fuoco, già precedentemente conosciuto. Nel suo *Elementa curvarum* tratta di varie definizioni cinematiche e planimetriche delle sezioni coniche. Si veda: C.B. Boyer, *Storia della Matematica*. Oscar Saggi Mondadori, Milano 1980, p. 428.

punto finito o infinito, punti di contatto, “quadrangolo completo”[13].

Sulla scia proiettiva appena tracciata, nel 1640, il giovanissimo Blaise Pascal pubblica un *Essay pour les comiques* (poi più estesamente formulato in *Opera completa sulle coniche*) che conteneva una proposizione definita dall’autore *mysterium hexagrammaticum*, oggi noto come il *Teorema di Pascal*, nel quale affermava: «*Se un esagono semplice è iscritto in una conica, le intersezioni delle tre coppie di lati opposti stanno sopra una stessa retta (detta “di Pascal”); e viceversa, se in un esagono semplice si verifica l’ultima proprietà i vertici di esso appartengono ad una stessa conica, che può anche degenerare in due rette*» (Castelnuovo G., *Lezioni di Geometria analitica*, 1909, p. 429)[14].

Nella seconda metà del XVII secolo, per circa un secolo, il progresso dell’analisi matematica portò ad una “aritmetizzazione” delle sezioni coniche, sia pure definite sulle impostazioni proiettive di Descartes, ma abbandonando i concetti geometrici. La teoria delle curve si esplicava secondo i principi cartesiani e si tendeva a considerare le sezioni coniche “assolutamente”, cioè avulse dal cono, come luogo dei punti in un sistema cartesiano le cui coordinate soddisfano un’equazione di secondo grado in due variabili (*Tractatus de sectionibus conicis*, John Wallis, 1617-1703).

Nel 1687 nel I Libro dei *Principia*, l’inglese Newton dedica la IV e la V Sezione alla teoria delle nostre curve e, descrivendo la conica determinata da cinque tangenti, dimostra la generazione della curva come inviluppo delle rette che congiungono i punti corrispondenti di due punteggiate proiettive. Originali e desueti sono gli studi condotti dal francese Amedée Francois Frézier (Fig. 1) che, sotto l’impulso della teoria di Desargues e di Clairaut, affronta la trattazione delle curve a doppia curvatura intendendole definite dalla proiezione parallela o centrale di coniche su di una superficie quadrica[15].

---

13 Si indica con “quadrangolo completo” la figura composta di quattro punti vertici, di cui mai tre siano allineati, e delle sei rette, lati, che li congiungono a due a due.

14 Il *Teorema di Pascal* riferito ad un esagono inscritto in un cerchio si trasporta, in virtù delle proprietà grafiche dell’esagono invarianti proiettive, alle coniche. Correlativo a questo teorema è il *Teorema di Brianchon* (1806) che coinvolge un seilatero semplice circoscritto al cerchio e più generalmente ad una conica. Per le interessanti osservazioni e corollari che seguono si veda: G. Castelnuovo, *Lezioni di Geometria analitica*, Ed. Dante Alighieri, Roma-Milano 1909, pp.428-432. Il problema è stato affrontato in modellazione matematica per descrivere una conica con accuratezza tramite tre punti e due tangenti da Riccardo Migliari, si veda R Migliari, *Geometria descrittiva*, Vol.1 – *Metodi e costruzioni*, CittàStudi Edizioni, Novara 2009, pp. 308-309.

15 Per un approfondimento maggiore si rimanda a: M. Salvatore, *Il ruolo di Amedée Francois Frézier nella nascita della Geometria Descrittiva*, in Ikhnos, 2010, pp. 27-46.

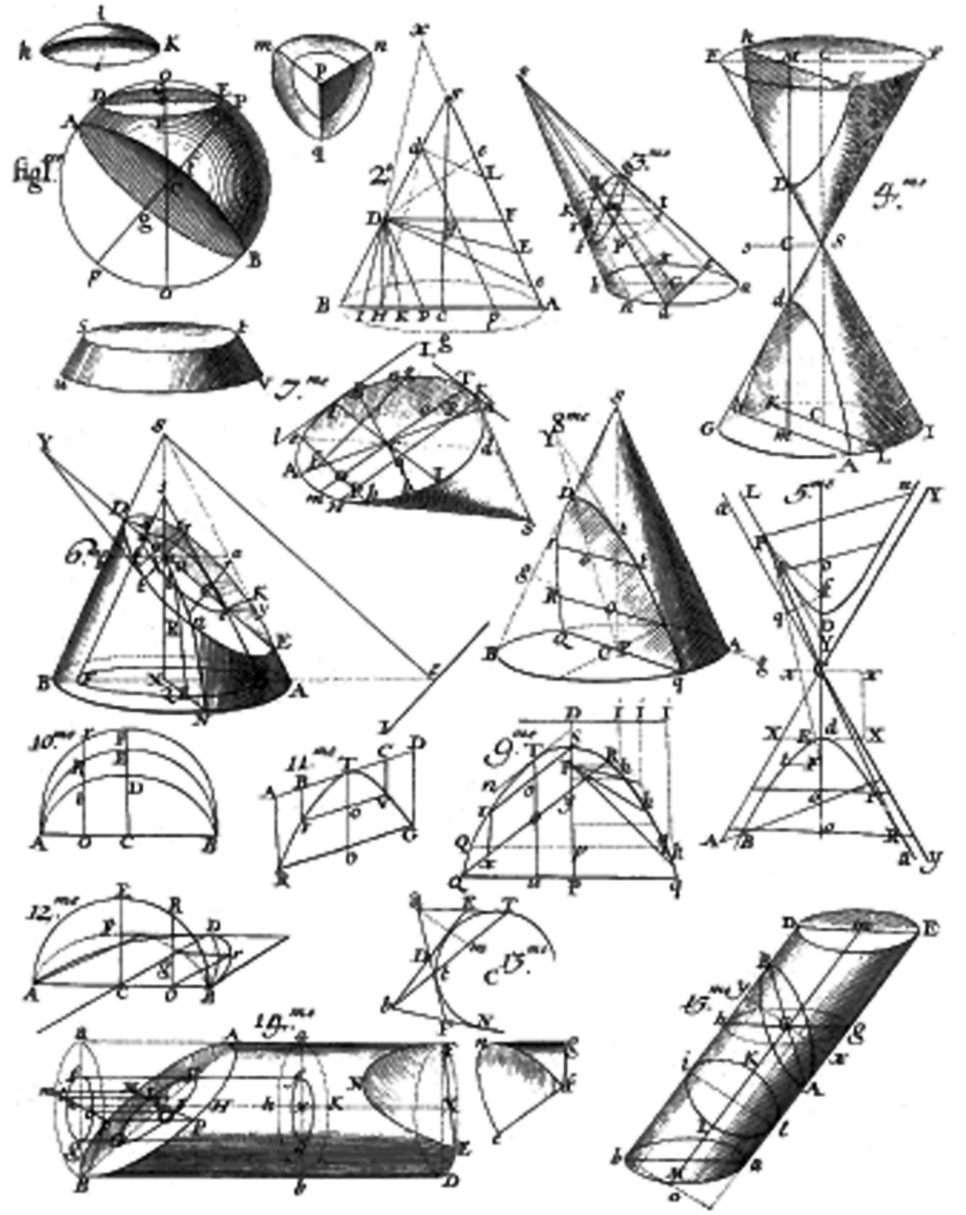

Fig. 1 - Esempi relativi alle coniche intese come sezioni piane di superfici quadriche. Traité de stéréotomie di Frézier (1737). *Sezioni coniche*, Tav. 1, Libro I, p. 23.

Gli anni della Rivoluzione Francese sono propedeutici alla nuova rigogliosa fioritura della geometria del XIX secolo, che, a ragione, lo studioso Carl B. Boyer definisce l'"età eroica" della geometria. Nell'ambito di nostro interesse, un uomo si contraddistingue in Francia come il fondatore della moderna geometria pura: Gaspard Monge. Egli con l'opera *Géometrie Descriptive* 1795 codifica in metodo scientifico il patrimonio geometrico tramandato, per citarne alcuni, da Vitruvio, da Dürer, da del Monte, da Clairaut, da Frézier[16].

Negli ultimi decenni del XVIII secolo gli inglesi più di altri (James Stirling, 1692-1770; Colin MacLaurin, 1698-1746, con la sua *Geometria organica* sulle coniche; Thomas Simson, 1710-1761) recuperano un sopito entusiasmo per la matematica antica e progrediscono flebilmente nell'esprimere per via sintetica i problemi della geometria pura.

Seguono in Francia nuovi contributi alla teoria delle coniche dal punto di vista proiettivo in seguito ai fermenti culturali all'École Polytechnique, in principal modo si distinguono in geometria pura due allievi del Monge: Charles Julien Brianchon e Jean Victor Poncelet. Il primo riformula, nel 1806, in forma moderna e "duale"[17] il teorema di Pascal (cfr. nota 14), mentre il secondo fu fautore di importanti metodi, concetti e proprietà della geometria proiettiva, introducendo nuova linfa anche alla teoria delle coniche. Soffermandoci sugli studi del Poncelet, con la pubblicazione del *Traité des propriétés projectives des figures* egli introduce per la prima volta il termine di "omologia" (corrispondenza da lui chiamata *Perspective rélief*) per descrivere la relazione che intercede fra due figure piane di cui una sia proiezione dell'altra, di "principio di dualità" (insieme a Joseph Diez Gergonne e più tardi Plücker), di "birapporto", impiega con sistematicità il punto all'infinito e immaginario e generalizza il "principio di continuità" del Pascal. Nel trattato *Théorie Générale des Polaires Réciproques* estende alle coniche e alle quadriche la nota correlazione

[16] Il concetto che sta alla base della nuova geometria: le curve, come tutti gli enti geometrici, vengono descritte, nel sistema di riferimento cartesiano, a tre dimensioni da una doppia proiezione ortogonale associata su piani coordinati costituenti un triedro solido. Fu in realtà Aléxis Clairaut ad introdurre per primo il modo di rappresentare luoghi geometrici sopra due piani fra loro perpendicolari nell'opera *Recherches sur les Courbes à double courbure*.

[17] Il generale "principio di dualità" può essere enunciato osservando che da ogni proposizione di Geometria proiettiva piana può esserne ricavata un'altra, caratterizzata dalla stessa struttura logica della prima, mediante lo scambio di alcuni termini, detti *duali*.

polare (Desargues, De La Hire, J. Poivre, Möbius) che lega posizioni del punto e della retta, formulando, per la prima volta, il "metodo delle polari reciproche"[18].

In Germania grazie all'istituzione del *Journal di Crelle*, molti studi e teorie scientifiche sulla geometria proiettiva applicata alle coniche, che scindono le proprietà grafiche da quelle metriche, trovano ampi consensi e geometri quali lo svizzero Jakob Steiner, il tedesco von Staudt (*Geometrie der Large*, *Geometria di Posizione*, 1847) e l'italiano Luigi Cremona conseguono la notorietà agognata.

Nella prima metà dell'800, sulla base teorica iniziata da Poncelet, il geometra francese Michel Chasles e il contemporaneo Jakob Steiner fanno propria la nozione di corrispondenza proiettiva estendendola alla conica, proiezione di un cerchio. Le curve di secondo ordine possono riguardarsi come luogo delle intersezioni di rette corrispondenti in due fasci proiettivi, deducendone, per via sintetica, tutte le proprietà.

Durante il XIX secolo si annoverano interessanti ed eleganti illustrazioni ad opera di studiosi e geometri del Politecnico di Vienna, che aggiungono pagine importanti alla teoria delle sezioni coniche; se ne citano alcuni per importanza: Karl Pelz, Emil Kountny, Rudolf Staudigl, Rudolf Niemtschick, G.A. von Peschka[19] (Fig. 2). Questi affrontano il problema della rappresentazione delle curve del secondo ordine studiandole come figure piane, proponendo costruzioni con riga e compasso, e come contorni apparenti di quadriche, determinandole con approcci stereotomici (riguardo alle applicazioni spaziali, un contributo di riferimento per molti studi in materia è il noto *Teorema di Dandelin*[20]).

---

18 Si citano due importanti proposizioni legate a due proprietà grafiche proiettive (valgono anche le considerazioni duali): «*Se di due rette la seconda passa per il polo della prima, la prima passerà per il polo della seconda; le due rette diconsi coniugate, o reciproche, rispetto alla conica* e *Le tangenti ad una conica uscenti da un punto toccano la conica nelle intersezioni di questa colla polare del punto*», Castelnuovo G., *Lezioni di Geometria analitica*, 1909, pp. 405, 407.

19 Per un maggior approfondimento si rimanda G. Loria, *Storia della Geometria Descrittiva dalle origini sino ai giorni nostri*, Ed. Hoepli, Milano1921, pp. 345- 356- 503.

20 Una sezione conica non degenere, figura considerata come ottenuta dalla intersezione di un piano con un cono, possiede una o due "sfere di Dandelin" caratterizzate dalla proprietà che una "sfera di Dandelin" è tangente sia del piano che del cono e il punto nel quale una sfera tocca il piano è un fuoco della sezione conica.

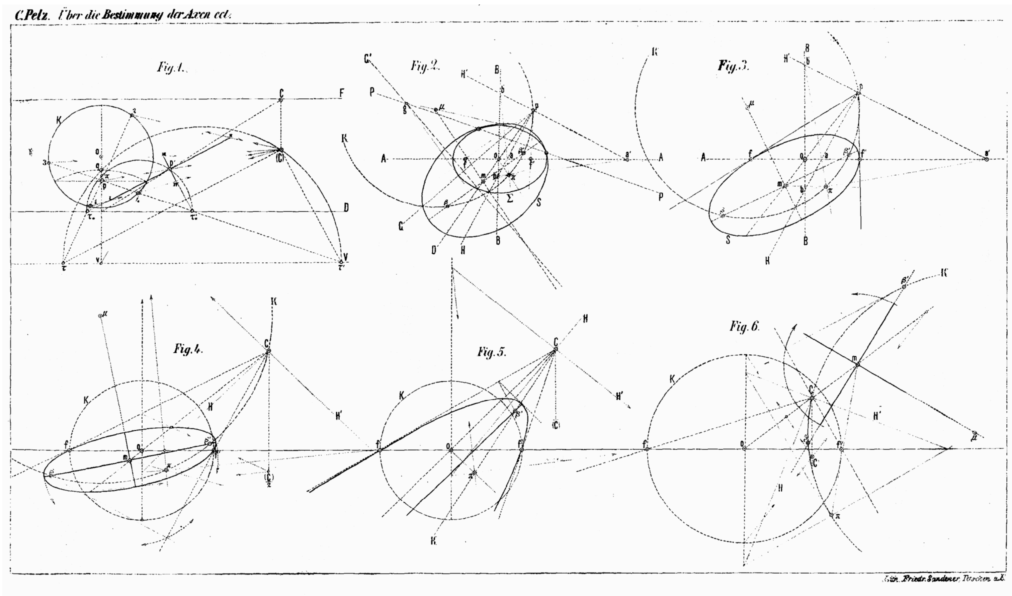


Fig. 2 - Tavola sinottica di costruzioni di coniche intese come figure piane prodotte dalla proiezione centrale di una circonferenza. Pelz K., 1872, Über die Bestimmung der Axen von Zentralprokekzionen des Kreises, in: *Věstník královské české společnosti nauk v Prahe*, Praha.

Sulla scia di Desargues, De La Hire, Poncelet, Staudigl, von Peschka, dagli ultimi trent'anni dello scorso secolo, presso le cattedre di Disegno della Facoltà di Ingegneria Università di Palermo (dove svolgo attività di ricerca), si è intrapreso un filone di indagine nel campo specifico delle applicazioni di geometria descrittiva, atto ad individuare metodologie sintetiche tramite considerazioni omologiche. La risoluzione di problemi complessi di rappresentazione che, con i metodi tradizionali richiedono lunghe ed, a volte, imprecise costruzioni affidate a curve di appoggio o di inviluppo, trova nel "metodo omologico" una pratica quasi sempre più snella e dinamica.

Gli intensi studi condotti da Michele Inzerillo e dal suo team hanno efficacemente dimostrato che sul versante grafico, il processo teorico dell'omologia introduce semplificazioni determinanti, talvolta imprevedibili; la via omologa possiede una potenzialità ancora da sviscerare ed una elevata versatilità di supporto[21]. Il poter rispondere a molteplici quesiti pratici della Geometria del Disegno costituisce certamente un motivo stimolante per conoscere ed applicare l'omologia con vantaggio e con eleganza, secondo articolazioni altrimenti meno abbordabili.

Dall'ultimo quarto del secolo scorso ad oggi, la rivoluzione informatica apportata dagli strumenti tecnologici digitali ha ampliato le potenzialità grafiche nella soluzione e nella investigazione dei problemi classici della geometria descrittiva. Si è registrato un'interessante evoluzione ed una trasformazione nel *modus operandi* tanto che gli studiosi avvertono l'esigenza di rinnovare l'insegnamento della disciplina per un approccio ad una geometria descrittiva attuale che trovi nuova forza generatrice nell'era informatica. Nuovi interessanti contributi in questa direzione sono stati prodotti, in particolare, da Riccardo Migliari e dal suo team dell'Università degli Studi di Roma "La Sapienza"[22].

In ambito informatico, l'avvento di software dedicati alla rappresentazione computerizzata ha ampliato le possibilità di investigazione delle forme di oggetti spaziali, analizzandone proprietà e relazioni reciproche ed ha semplificato notevolmente l'elaborazione grafica, la rapidità di esecuzione, l'iterazione di processi, la precisione e la sicurezza dei risultati.

In aggiunta alla panoramica di comandi atti a disegnare, controllare e modificare un qualsiasi ente geometrico, altra potenzialità, nuova rispetto alle tecniche strumentali tradizionali, risiede nella possibilità di "creare" comandi sperimentali (con linguaggi di programmazione, *scripting*) che permettano di ampliare i campi di indagine geometrici sulla base del patrimonio tramandatoci.

[21] Michele Inzerillo, Professore ordinario di Fondamenti e Applicazioni di Geometria descrittiva all'Università di Palermo Per un maggiore approfondimento si vedano: M. Inzerillo, *Fondamenti e Applicazioni di Scienza della Rappresentazione – Geometria del Disegno – Prospettiva*, Palermo 2008; R. Filosto, M. Inzerillo, *Contributo dell'omologia nella rappresentazione grafica*, Collana di studi dell'Istituto di Disegno della Facoltà di Ingegneria di Palermo, Palermo 1974; G.M. Catalano, *Inediti sulle coniche*, Palermo 1988.

[22] Professore ordinario di Fondamenti e Applicazioni di Geometria descrittiva alla "Sapienza" Università di Roma. Si veda: R. Migliari, *Geometria descrittiva*, Voll.1-2, CittàStudi Edizioni, Novara 2009.

## Rapporto tra la proiettiva e il metodo omologico

La storia della Geometria non evidenzia una ricerca intesa a individuare un rapporto fra la proiettiva e il metodo omologico. Gli sviluppi delle risorse del metodo omologico forniscono un cospicuo numero di considerazioni di supporto alla trattazione generale di tutte le problematiche grafiche della Geometria Descrittiva.

Tralasciandone la genesi spaziale, si intende per *«omologia piana una collineazione ("omografia"), non identica, fra i due piani stessi sovrapposti, in cui sono uniti tutti i punti di una retta e tutte le rette di un fascio; la retta, luogo di punti uniti, dicesi asse di omologia, ed il punto, centro del fascio di rette unite, dicesi centro di omologia»* (Castelnuovo G., *Lezioni di Geometria analitica*, 1909, p. 341). Valgono le proprietà fondamentali che punti corrispondenti in una omologia sono allineati con il centro e rette distinte corrispondenti si segano sull'asse.

L'omologia, che non è alternativa alla proiettiva, generalmente, offre vie risolutive più semplici, prevedibili e controllabili. Comparativamente, la facile operatività omologica è sperimentabile, tutta e sempre, all'interno del campo grafico. L'omologia traccia nuovi percorsi preferenziali, di cui non si può non tenere conto, specialmente quando si è impegnati a costruire immagini dotate di alto valore documentario.

Questo studio propone un'inedita via risolutiva per la costruzione di una sezione conica di cui siano noti cinque punti[23].

Dal noto *Teorema fondamentale* di Steiner e Chasles, la generazione di una conica determinata da un numero sufficiente di condizioni (quando si conoscono cinque dei suoi punti, di cui tre mai allineati o cinque tangenti oppure tre tangenti e i suoi punti di contatto sopra due di esse) mediante forme proiettive è eseguibile per punti, tramite due fasci proiettivi, o per tangenti, tramite due punteggiate proiettive. Nel caso in cui si conoscono cinque dei punti della conica, il teorema recita così: «una curva di secondo ordine (reale) può sempre riguardarsi come luogo delle intersezioni di rette corrispondenti in due fasci proiettivi, i cui centri siano due punti generici

[23] Ringrazio sentitamente i professori Michele Inzerillo e Pietro Pizzurro, Docenti di Disegno presso il Dipartimento di Rappresentazione della Facoltà di Ingegneria di Palermo, per i preziosi suggerimenti e per il costante supporto allo svolgimento della ricerca.

della curva». (Castelnuovo G., *Lezioni di Geometria analitica*, 1909, p. 427).

La predetta metodologia per fasci proiettivi non permette di definire gli enti geometrici della conica (centri, diametri, corde, tangenti, elementi coniugati, fuochi, vertici, asintoti, assi, etc.), inoltre, rispetto al campo grafico, bisogna evidenziare che la via proiettiva di Steiner offre sovente difficoltà di elementi disponibili nel campo.

Per superare queste limitazioni operative, dati cinque punti della curva da costruire risulta necessario determinare soltanto pochi suoi punti opportunamente scelti, sufficienti per individuare elementi caratteristici (una corda o un diametro e le tangenti agli estremi, due coppie di corde parallele, etc.) che permettano di procedere omologicamente. Si può procedere impostando un'omologia con centro e asse propri o un'omologia affine ortogonale o ancora un'omologia affine obliqua, facendo individuare una corrispondenza biunivoca fra tutti i punti del piano che contiene la conica (ellisse, parabola, iperbole) con quelli di un altro piano al predetto sovrapposto ma non coincidente sul quale giace una circonferenza.

Costruzione di una conica ellisse:

*Applicazione del Teorema di Steiner e Chasles*

Dal Teorema di Steiner, siano dati i cinque punti di una conica (dalla disposizione dei punti assegnati si evince che si tratta di una ellisse): **A**, **A'**, **B**, **C**, **D**, e siano tracciate le rette dei due fasci proiettivi di centri **A** e **A'**: **b = A-B**, **c = A-C**, **d = A-D**, **b' = A'-B**, **c' = A'-C**, **d' = A'-D** (Fig. 3).
I punti a due a due corrispondenti comuni alle rette **c'-d** e **c-d'** e alle rette **b-d'** e **b'-d** appartenenti ai fasci di centri **A** e **A**' generano due *punteggiate proiettive* non sovrapposte che individuano il centro **U** del fascio prospettivo ai primi due[24].

[24] Il fascio di centro **U** è prospettivo al fascio di centro A e al fascio di centro A' perché si può passare da elementi dell'uno ad elementi dell'altro con una sola operazione di proiezione e sezione, mentre i fasci di centro **A** e **A'** sono tra loro proiettivi poiché per passare da una forma a un'altra è necessario un numero finito di operazioni di proiezione e sezione. Come è noto una proiettività si ottiene operando almeno due prospettività.

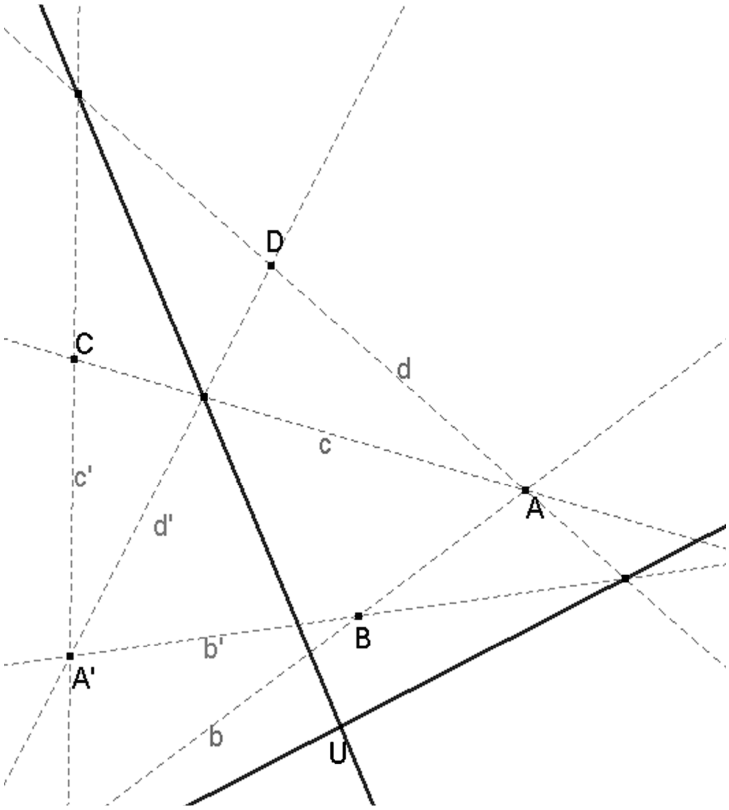


Fig. 3 - Costruzione della conica-ellisse dati cinque punti generici. Applicazione del *Teorema di Steiner e Chasles*, determinazione del centro **U** del fascio prospettivo ai due fasci di centri **A** e **A'**.

*Determinazione di due corde della conica. Verifica della natura della conica*

Si determinano due punti **E** e **F** opportuni sfruttando le proprietà proiettive. Per il centro **A'** si consideri il raggio proiettante **e'** parallelo a uno dei raggi del fascio di centro **A**, per esempio al raggio **b**. (Fig. 4). La retta che unisce il punto **[e'-d]** comune ai raggi **e'-d** con **U** interseca **d'** nel punto **[d'-e]** comune con il raggio **e**. Tale punto, unito con **A**, incontra il raggio **e'** in **E**, nuovo punto della conica; **A-E** è il raggio **e**, corrispondente di **e'**. Infatti, la retta che unisce i punti comuni ai raggi **e'-d** ed **e-d'** contiene il centro di proiettività **U**. Ancora per **A'** si consideri il raggio **f'** parallelo a uno dei raggi del fascio di centro **A**, per esempio al raggio **d**. La retta che unisce il punto **[f'-b]** comune ai raggi **f'-b** con **U** interseca **b'** nel punto **[f-b']** comune con il raggio **f**. Tale punto, unito con **A**, incontra il raggio **f'** in **F**, nuovo punto della conica; **A-F** è il raggio **f**, corrispondente di **f'**. Infatti, la retta che unisce i punti comuni ai raggi **f'-b** ed **f-b'** contiene il centro di proiettività **U**. La retta che unisce i punti medi $\mathbf{M_1}$ e $\mathbf{M_2}$ delle corde parallele **B-A** e **A'-E** della conica, ne contiene il centro, così come la retta che unisce i punti medi $\mathbf{M_3}$ e $\mathbf{M_4}$ delle corde parallele **A-D** e **A'-F** della conica, ne contiene il centro; dunque la $\mathbf{M_1}$-$\mathbf{M_2}$ interseca la $\mathbf{M_3}$- $\mathbf{M_4}$ nel centro **O** della conica. L'applicazione del metodo delle corde parallele verifica, in questo caso, che la conica da determinare è un'ellisse (Fig. 5).

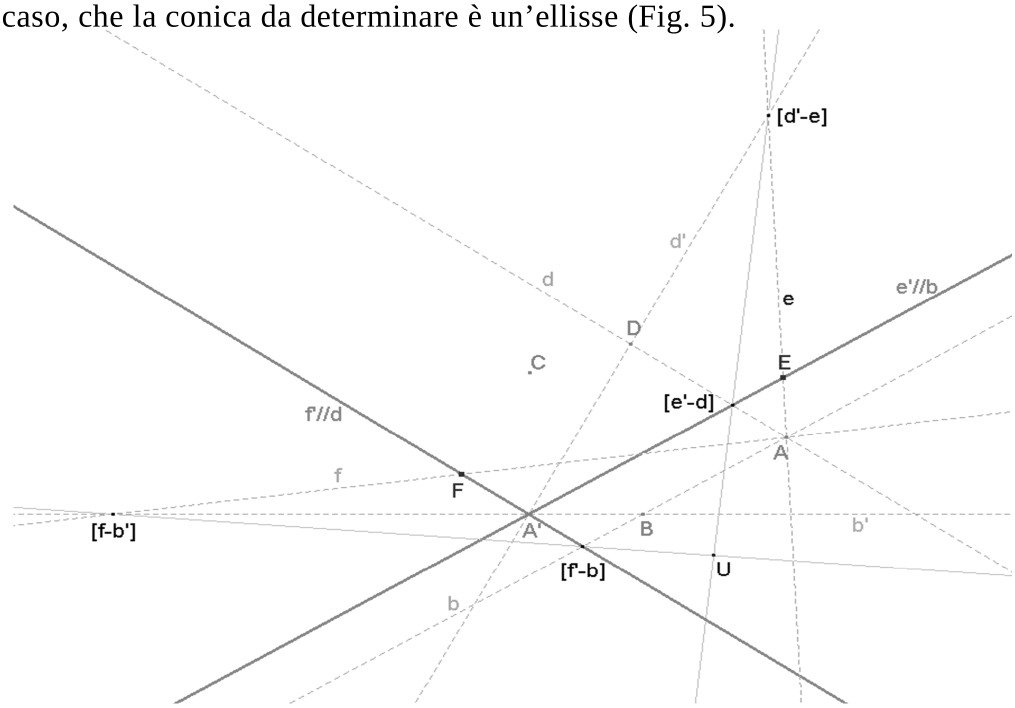


Fig. 4 - Costruzione della conica-ellisse dati cinque punti generici. Applicazione del *Teorema di Steiner e Chasles*. Determinazione per via proiettiva dei punti **E** e **F** appartenenti alla curva da determinare.

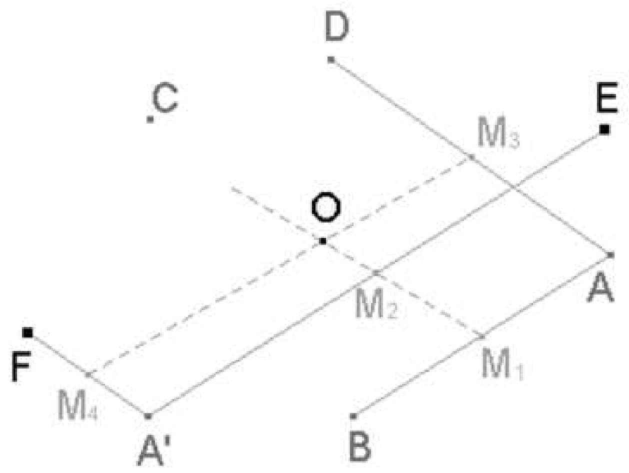


Fig. 5 - Costruzione della conica-ellisse dati cinque punti generici. Applicazione del *Metodo delle corde parallele* e verifica della natura ellittica della curva piana.

*Costruzione della conica con il metodo dell'omologia affine obliqua*

Per ogni punto della conica disponiamo del relativo diametro, per simmetria rispetto al centro O; per il punto A il diametro è **A-O-G**. «*Se una conica è generata mediante fasci proiettivi, alla congiungente i centri dei due fasci, considerata in uno di essi, corrisponde, nell'altro fascio, la tangente alla conica nel centro di questo*» *(*Castelnuovo G., *Lezioni di Geometria analitica*, 1909, p. 425).

Nella proiettività dei due fasci di centro **A** ed **A'** le **U-A** e **U-A'** sono tangenti la conica in **A** e **A'** (Fig. 6).

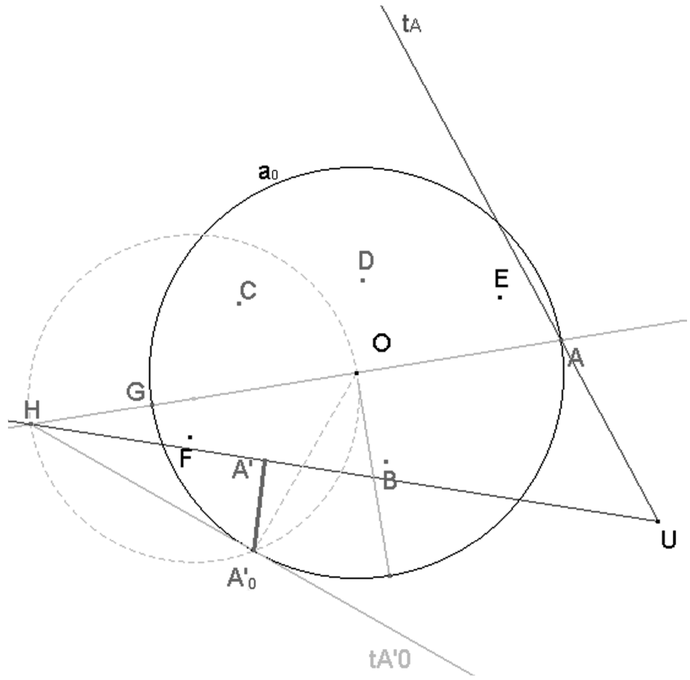


Fig. 6 – Costruzione della conica-ellisse dati cinque punti generici. Impostazione dell'omologia affine obliqua avente: la retta del diametro **A-O-G** come asse, la circonferenza $\mathbf{a_0}$ di centro **O** e diametro **A-O-G**, omologa alla conica da costruire. direzione del centro di omologia, definito dalla $\mathbf{A'\text{-}A'_0}$.

Nell'omologia affine obliqua avente per asse la retta del diametro **A-O-G**, la circonferenza $a_0$ di centro **O** e diametro **A-O-G** è omologa alla conica da costruire, della quale sono già disponibili i punti **A**, **A'**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, e i simmetrici rispetto ad **O**. L'omologa alla tangente $\mathbf{t_{A'}}$**= U-A'-H** alla ellisse in **A'** è, condotta per **H**, la $\mathbf{t_{A'0}}$**= H-**$\mathbf{A'_0}$, tangente in $\mathbf{A'_0}$ alla circonferenza $\mathbf{a_0}$. La coppia di punti omologhi **A'** e $\mathbf{A'_0}$ definisce l'omologia (direzione del centro di omologia, definito dalla $\mathbf{A'\text{-}A'_0}$) e della ellisse si può costruire qualsivoglia punto non più per proiettiva ma per omologia, potendo avvalersi di questo potente strumento esecutivo nelle sue molteplici versatilità e potenzialità per determinare tutti gli elementi notevoli della conica (assi, diametri e corde coniugate, porzioni della conica comprese fra due secanti o interna al campo grafico, la tangente in un punto, la tangente da un punto proprio o improprio, le intersezioni fra retta e conica senza costruirla, verifica della posizione di un punto rispetto alla conica, punti e rette limiti, ecc.).

Volendo determinare gli assi dell'ellisse (Fig. 7), si ricava il diametro coniugato di **A-O-G** e mediante costruzione omologica (di asse la retta del diametro **A-O-G**, direzione del centro definito dalla **A'-A'$_0$**) si individuano gli assi. Si determina con triangoli omotetici l'estremo S del diametro della conica (coniugato al diametro della conica **A-O-G**) corrispondente al diametro **R$_0$-O-S$_0$** della circonferenza. Si traccia la retta ortogonale al segmento **S$_0$-S** per il punto medio **M$_5$**; si costruisce la circonferenza di centro il punto di intersezione **Z** con l'asse di omologia e di raggio il segmento **Z-M$_5$**. Per triangoli omotetici, la retta parallela al segmento **Z-S$_0$** per il centro della conica **O** individua il punto **X$_0$** sulla circonferenza **a$_0$** corrispondente dell'estremo **X** dell'asse minore della conica (per simmetria centrale si conosce **L**). Per la determinazione della direzione dell'asse maggiore, si costruisce la retta ortogonale al raggio **O-X$_0$** della circonferenza **a$_0$**, si determina il punto **J$_0$** corrispondente (secondo la direzione del centro definito dalla **A'-A'$_0$**) dell'estremo **J** dell'asse maggiore della conica cercato.

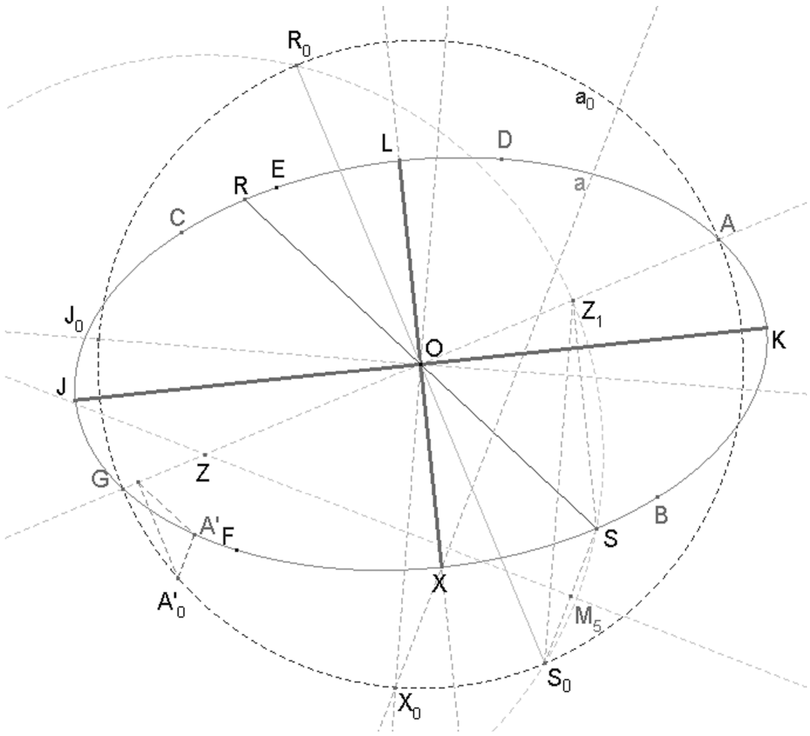


Fig. 7 – Costruzione della conica-ellisse dati cinque punti generici. Determinazione del profilo ellittico e degli assi **J-K** e **L-X** della conica.

Costruzione di una conica parabola:

*Teorema di Steiner e Chasles*

Si voglia riconsiderare la precedente trattazione, variando i dati; per esempio, si assuma fra essi un punto improprio. Siano dati i cinque punti di una conica (dalla disposizione dei punti assegnati si esclude che si possa trattare di
un'ellisse, probabilmente si tratta di una conica parabola o iperbole): **A**, **A'**, **B**, **C**, e il punto **D** improprio. Siano tracciati i raggi dei due fasci proiettivi di centro **A** e **A':** **b =A-B**, **c =A-C**, **b' =A'-B**, **c' =A'-C**, mentre **d = A-D** e **d'=A'-D** sono parallele, hanno la direzione del punto **D** improprio. Come nel caso precedente, la retta che unisce i punti comuni ai raggi **c'-d** e **c-d'** individua sulla retta che unisce i punti comuni ai raggi **b-d'** e **b'-d** il centro di proiettività **U** (se si verificasse la necessità di unire punti interni al campo con punti corrispondenti e fuori campo, si può ricorrere ai triangoli omotetici) (Fig. 8).

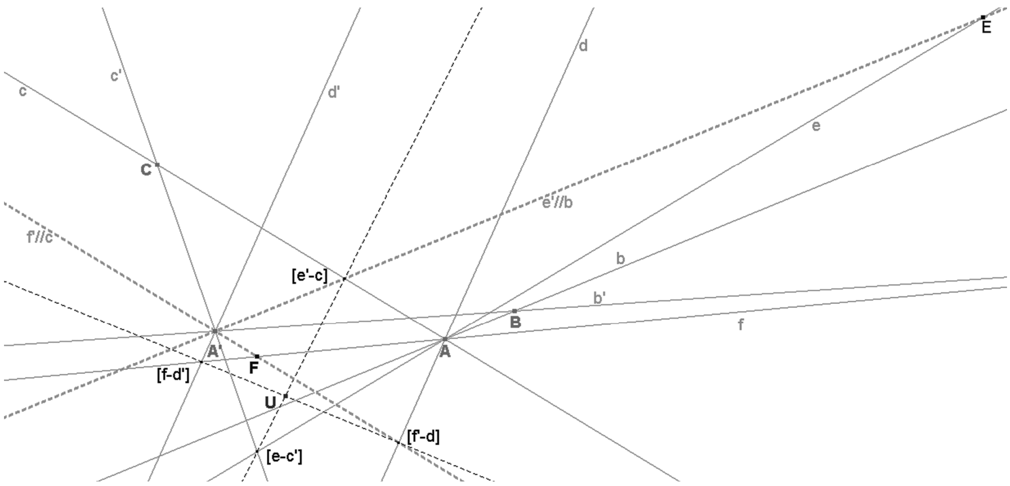


Fig. 8 – Costruzione della conica-parabola dati cinque punti generici. Applicazione del *Teorema di Steiner e Chasles*. Determinazione del centro **U** del fascio prospettivo ai due fasci di centri **A** e **A'** e determinazione per via proiettiva dei punti **E** e **F** appartenenti alla curva da determinare.

*Determinazione di due corde della conica. Verifica della natura della conica*

Si determinano due punti **E** e **F** opportuni sfruttando le proprietà proiettive. Per **A’** si consideri il raggio **e’** parallelo a uno dei raggi proiettanti del fascio di centro **A**, per esempio al raggio **b**. La retta che unisce il punto **[e’-c]** comune ai raggi **e’-c** con **U** interseca **c’** nel punto **[e-c’]** comune con il raggio **e**. Tale punto, unito con **A**, incontra il raggio **e’** in **E**, nuovo punto della conica; il segmento **A-E** appartiene al raggio **e**, corrispondente di **e’**. Infatti, la retta che unisce i punti corrispondenti comuni ai raggi **e’-c** ed **e-c’** contiene il centro di proiettività **U**. Ancora per **A’** si consideri il raggio **f’** parallelo ad uno dei raggi del fascio di centro **A**, per esempio al raggio **c**. La retta che unisce il punto **[f’-d]** comune ai raggi **f’-d** con **U** interseca **d’** nel punto **[d’-f]** comune con il raggio **f**. Tale punto, unito con **A**, incontra il raggio **f’** in **F**, nuovo punto della conica; il segmento **A-F** appartiene al raggio **f**, corrispondente di **f’**. Infatti, la retta che unisce i punti comuni ai raggi **f’-d** ed **f-d’** contiene il centro di proiettività **U**. La retta che unisce i punti medi $\mathbf{M_1}$ e $\mathbf{M_2}$ delle corde parallele **C-A** e **A’-F** della conica, ne contiene il centro, così come la retta che unisce i punti medi $\mathbf{M_3}$ e $\mathbf{M_4}$ delle corde parallele **A-B** e **A’-E** della conica, ne contiene il centro. Dunque la retta che passa per il segmento $\mathbf{M_1}$-$\mathbf{M_2}$ interseca la retta del segmento $\mathbf{M_3}$-$\mathbf{M_4}$ nel centro **O** della conica, e, poiché le direzioni diametrali **r** e $\mathbf{r_1}$ date dai segmenti $\mathbf{M_1}$-$\mathbf{M_2}$ e $\mathbf{M_3}$-$\mathbf{M_4}$ risultano parallele, il centro **O** è improprio e la conica è una parabola (Fig. 9).

*Costruzione della conica con l’applicazione dell’omologia affine obliqua*

Per ogni punto della conica disponiamo del relativo diametro, che ha la direzione di **O**, ovvero del punto improprio **D**; per A il diametro è **d = A-D** e per **A’** è **d’ = A’-D**. Valgono le considerazioni proiettive del caso precedente e quindi, nella proiettività dei due fasci di centro **A** ed **A’**, i raggi **U-A** e **U-A’** sono tangenti alla conica in **A** ed **A’** e coniugate ai relativi diametri **d** e **d’**; la corda **C-M-N**, parallela alla tangente in **A’**, è coniugata alla direzione **d’**, asse di simmetria obliqua (Fig. 10). Nell’omologia affine obliqua avente per asse la retta della corda **C-M-N**, la circonferenza $\mathbf{a_0}$ di centro **M** e diametro **C-M-N** è omologa alla conica da costruire, della quale sono già disponibili i punti **A**, **A’**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, e i simmetrici rispetto a **d’**

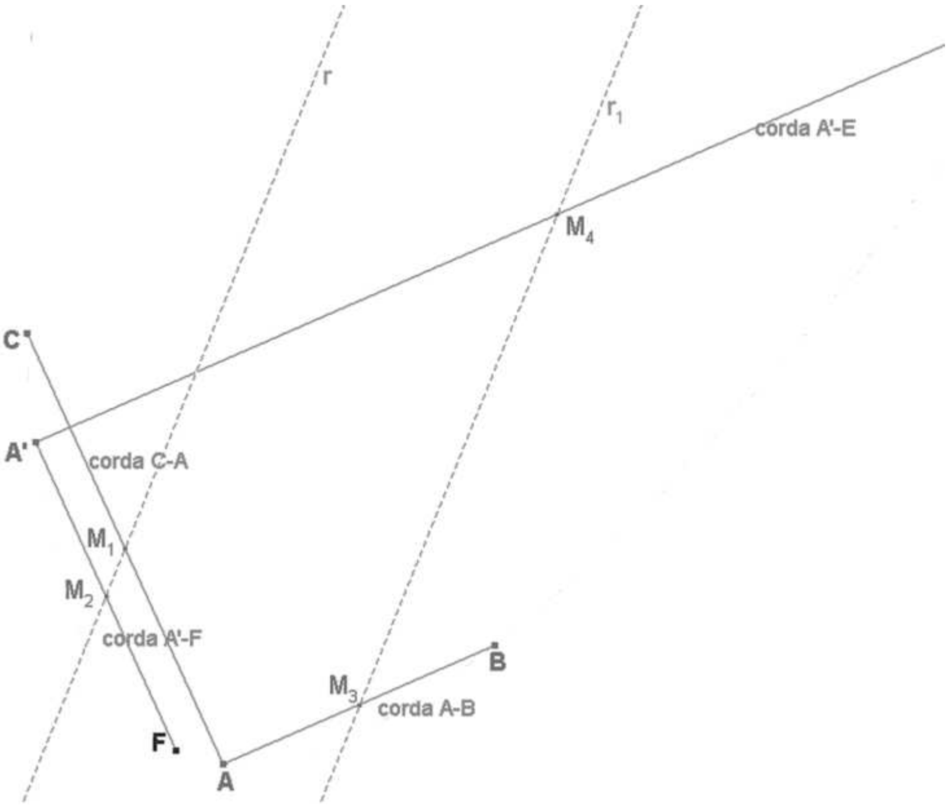


Fig. 9 – Costruzione della conica-parabola dati cinque punti generici. Applicazione del *Metodo delle corde parallele* e verifica della natura della curva piana.

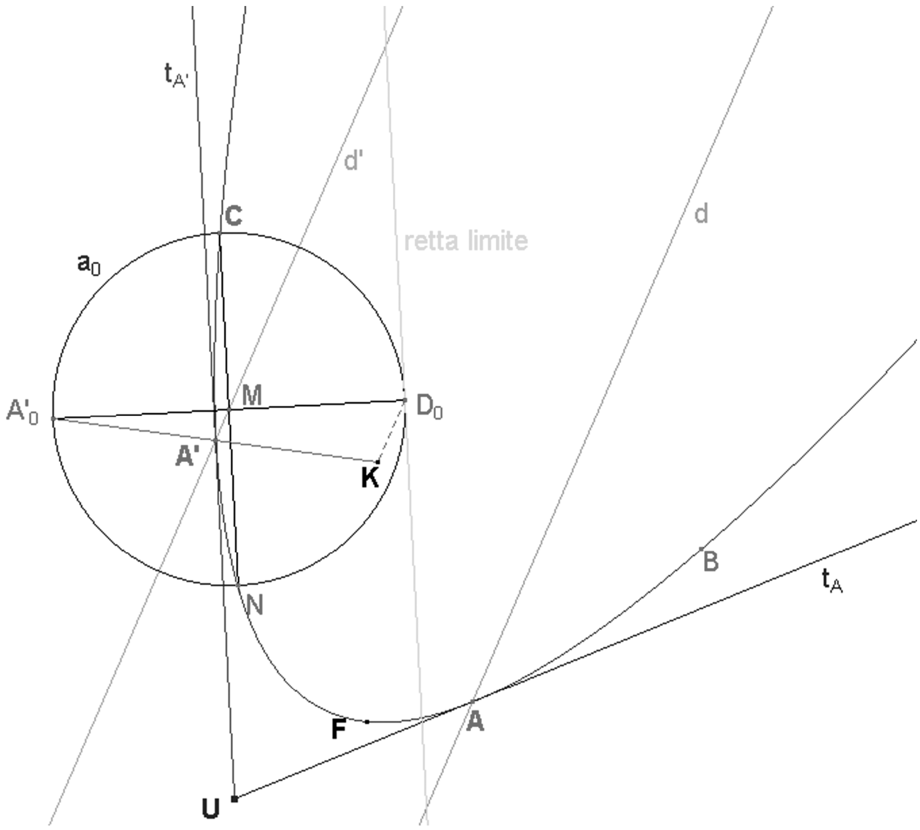


Fig. 10 – Costruzione della conica-parabola dati cinque punti generici. Impostazione dell’omologia affine obliqua avente: la retta del diametro **A-O-G** come asse, la circonferenza $\mathbf{a_0}$ di centro **O** e diametro **A-O-G**, omologa alla conica da costruire. direzione del centro di omologia, definito dalla $\mathbf{A'\text{-}A'_0}$.

con l'obliquità **C-M-N**. Si dispone ancora dei punti simmetrici dei predetti, rispetto al diametro **d** con obliquità parallela alla **U-A**; si può procedere indefinitamente secondo le simmetrie oblique. Nell'omologia relativa alla $\mathbf{a_0}$, ad **A'** corrisponde $\mathbf{A_0}$**'** e a **D**, improprio, corrisponde $\mathbf{D_0}$**;** in **K** si ricava il centro dell'omologia. Volendo può utilizzarsi la retta limite tangente alla circonferenza in $\mathbf{D_0}$ con la direzione dell'asse di omologia **C-M-N**, essendo $\mathbf{D_0}$ un punto limite in quanto che il suo omologo è il punto **D** improprio[25]. Mediante l'omologia può ricavarsi l'asse della parabola, la tangente in un punto, la tangente da un punto, l'intersezione della parabola con una data retta del suo piano, ecc.

Costruzione di una conica iperbole:

*Teorema di Steiner e Chasles*

Dal Teorema di Steiner, siano dati i cinque punti di una conica (si vogliano riconsiderare le precedenti trattazioni, variando i dati; per esempio, si scelgano quattro punti ed uno interno ad essi. Dalla disposizione dei punti assegnati si evince che si tratta di una iperbole): **A**, **A'**, **B**, **C**, **D**, e siano tracciate le rette dei due fasci proiettivi di centri **A** e **A'**: **b = A-B**, **c = A-C**, **d = A-D**, **b' = A'-B**, **c' = A'-C**, **d' = A'-D**. I punti a due a due corrispondenti comuni alle rette **c'-d** e **c-d'** e alle rette **b-d'** e **b'-d** appartenenti ai fasci di centri **A** e **A'** generano due *punteggiate proiettive* non sovrapposte che individuano il centro U del fascio prospettivo ai primi due (Fig.11).

*Determinazione di due corde della conica. Verifica della natura della conica*

Con le stesse osservazioni e i procedimenti dei primi due casi considerati, si determinano due punti opportuni sfruttando le proprietà proiettive e il centro della conica, applicando il metodo delle corde parallele e verificando che la conica da determinare è un'iperbole (Fig. 12).

---

25 Video corso on-line *Nettuno* di Disegno tenute dal Prof. Michele Inzerillo, Professore Ordinario di Fondamenti e applicazioni di Geometria Descrittiva all'Università di Palermo, Lezione 24.

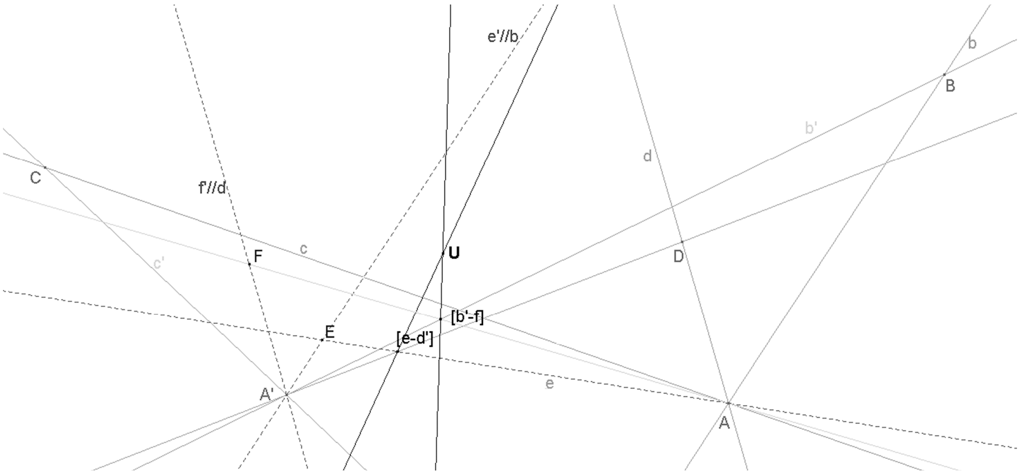


Fig. 11 – Costruzione della conica-iperbole dati cinque punti generici. Applicazione del *Teorema di Steiner e Chasles*. Determinazione del centro **U** del fascio prospettivo ai due fasci di centri **A** e **A’** e determinazione per via proiettiva dei punti **E** e **F** appartenenti alla curva da determinare.

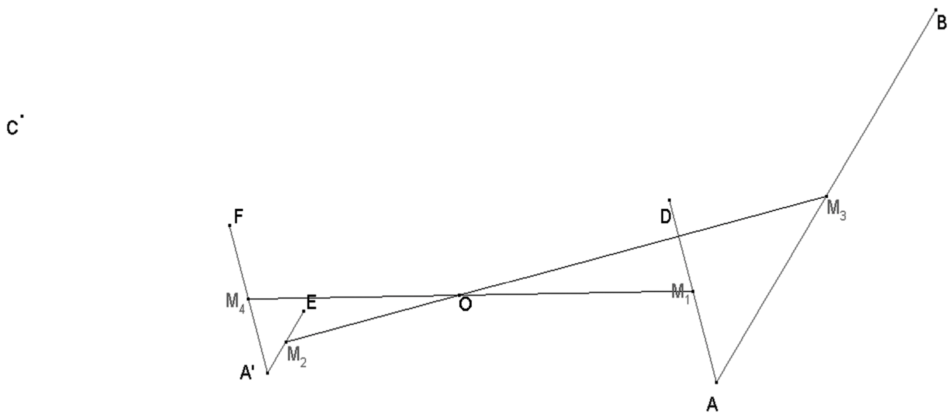


Fig. 12 – Costruzione della conica-iperbole dati cinque punti generici. Applicazione del *Metodo delle corde parallele* e verifica della natura della curva piana.

*Costruzione della conica con l'applicazione dell'omologia ad asse e centro proprio*

Per ogni punto della conica disponiamo del relativo diametro, per simmetria rispetto al centro O; per il punto A il diametro è **A'-O-G'**. Nella proiettività dei due fasci di centro **A** ed **A'** le $\mathbf{t_A}$ **= U-A** e $\mathbf{t_{A'}}$ **= U-A'** sono tangenti la conica in **A** e **A'**. Si costruisce un'omologia avente per asse la retta passante per il segmento **A'-C**, corda della conica e della circonferenza $a_0$ omologa di centro $\mathbf{O}_a$ e raggio $\mathbf{O_a}$**-C**; della curva sono già disponibili i punti **A**, **B**, **D**, del primo ramo e **A'**, **C**, **E**, **F** del secondo ramo e ancora i simmetrici rispetto ad **O**. La retta $\mathbf{t_{A'}}$**= U-A'** essendo tangente alle due curve omologhe (ad un ramo dell'iperbole e alla circonferenza $\mathbf{a_0}$) è unita, ovvero ha l'omologa coincidente con se stessa; quindi si deduce che essa deve contenere il centro dell'omologia (Fig. 13). Per determinare il centro, si considera la retta tangente $\mathbf{t_{G'}}$ al ramo di iperbole nel punto **G'** (parallela alla retta data $\mathbf{t_{A'}}$) che interseca l'asse nel punto **H**. Da quest'ultimo punto si manda la corrispondente retta tangente alla circonferenza $a_0$ nel punto G. L'intersezione della retta che congiunge i punti **G** e **G'** e della $\mathbf{t_{A'}}$ determina il centro di omologia; dell' iperbole si può così costruire qualsivoglia punto non più per proiettiva ma per omologia e determinare tutti gli elementi notevoli della conica (gli asintoti, i fuochi, i vertici, l'asse, diametri e corde coniugate, porzioni della conica, la tangente in un punto, la tangente da un punto, etc.). Volendo determinare gli asintoti dell'iperbole, che sono diametri tangenti la curva nei punti impropri si può utilizzare la retta limite **Y-X** secante rispetto al cerchio e direzione dell'asse di omologia **C-A'**, essendo **Y** e **X** punti limite in quanto che i loro omologhi sono impropri[26] (Fig. 14). Per tracciare gli asintoti si individua, per via omologica, il punto **O'** corrispondente di **O**, come intersezione della congiungente il centro dell'iperbole **O** e il centro dell'omologia con la retta ortogonale all'asse di omologia per $\mathbf{O_a}$ centro della circonferenza $\mathbf{a_0}$. Tracciando le tangenti alla circonferenza dal punto **O'** determinato si individuano sull'asse di omologia due punti che uniti con il centro della conica fissano gli asintoti. L'asse trasverso secante dell'iperbole si disegna immediatamente in quanto bisettrice degli angoli degli asintoti; per segnare i vertici reali dei due rami ci si avvale sempre della costruzione omologica strutturata: si ricava il

---

26 «*Le rette limiti di un'omologia sono parallele all'asse, e la mediana della striscia di piano compresa tra esse dista pure egualmente (in sensi opposti) dal centro e dall'asse*» G. Fano, *Lezioni di Geometria descrittiva*, Torino 1910, p. 20.

punto **O₂**, punto intersezione dell’asse della conica con l’asse di omologia, si invia dal punto **O’** esterno alla circonferenza $\mathbf{a_0}$ il raggio $\mathbf{O'}$-$\mathbf{O_2}$ che sega la circonferenza in $\mathbf{V_2'}$ e $\mathbf{V_1'}$, congiungendo questi due ultimi punti con il centro di omologia si fissano sull’asse del’iperbole i vertici $\mathbf{V_1}$ $\mathbf{V_2}$ cercati. Noti i vertici dei due rami e gli asintoti si possono ricavare geometricamente i fuochi $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ tracciando il cerchio di centro **O** e raggio **O-N** che mette in relazione detti elementi (V. Capitano, *Applicazioni di geometria proiettiva e descrittiva al Disegno delle forme geometriche elementari*, 1972, p. 28).

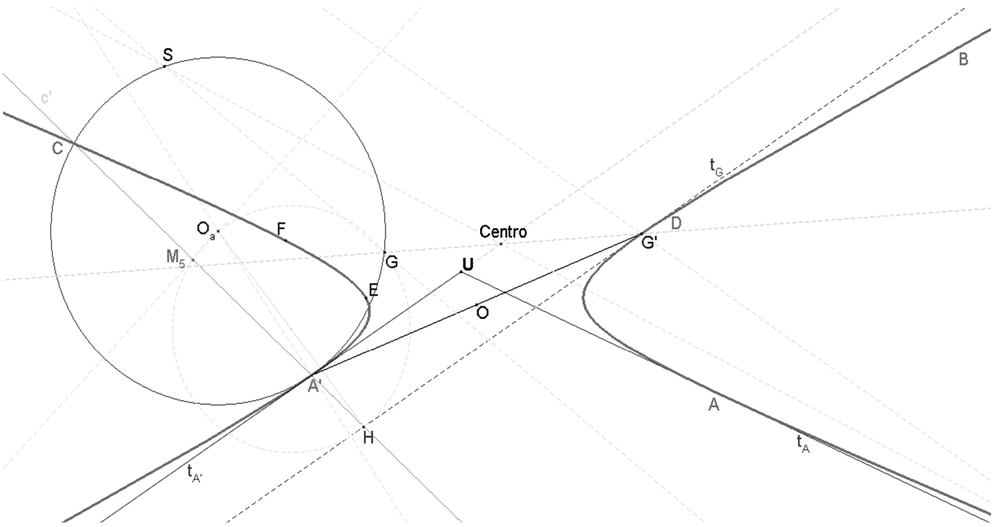


Fig. 13 – Costruzione della conica-iperbole dati cinque punti generici. Impostazione dell’omologia ad asse proprio **c’**, la corda **A’-C**, centro proprio e circonferenza $\mathbf{a_0}$ di centro **O** e raggio $\mathbf{A'}$-$\mathbf{O_a}$ omologa alla conica da costruire.

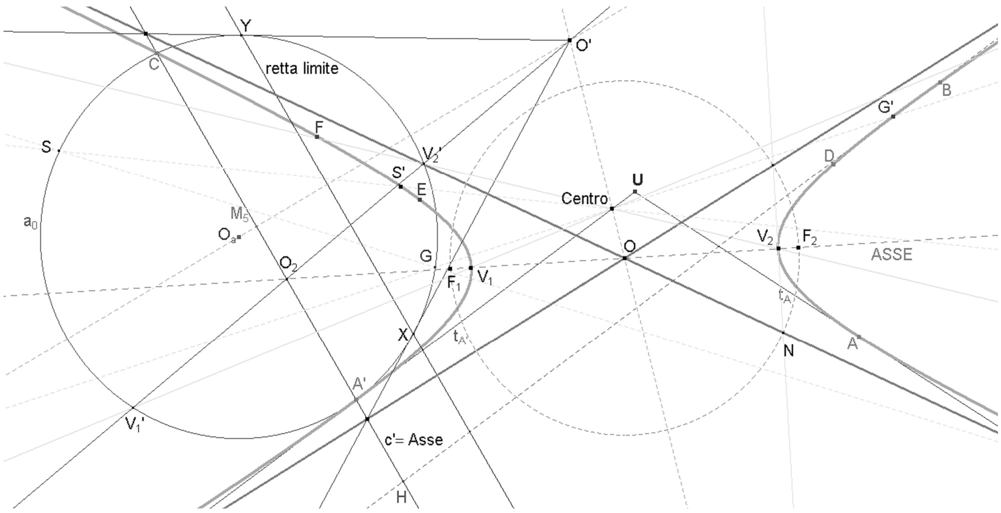


Fig. 14 – Costruzione della conica-iperbole dati cinque punti generici. Determinazione per vie omologiche degli elementi notevoli della conica: asintoti; asse trasverso; $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, fuochi; $\mathbf{V_1}$, $\mathbf{V_2}$, vertici dei due rami.

## Strutturazione del listato LISP per la costruzione di una conica

Il percorso di ricerca intrapreso mira a determinare in ambiente *CAD* degli strumenti efficienti che potenzino la ricerca di vie semplificate grafiche e offrano occasioni di riflessione per acuire le conoscenze culturali e formative della geometria descrittiva e proiettiva.
Concentrando l'attenzione all'oggetto di studio di costruzione di curve sezioni coniche, esistono alcuni software per la rappresentazione matematica che, nonostante limitino la generalità dell'approccio operativo, offrono strumenti validi per il tracciamento della conica; alcuni modellatori consentono di determinare una conica tramite tre punti e due tangenti (*Thinkdesign*) o dati cinque punti (*Cabri Géomètrie*) o impostando alcuni valori notevoli di proprietà analitiche quali il rapporto di eccentricità o la

posizione della direttrice (*Rhinoceros*). Le più recenti versioni del software *AutoCAD* permettono di disegnare soltanto la conica ellisse, solo nel caso particolare di conoscere gli estremi degli assi o i fuochi, presentando un contenuto interesse nei confronti delle coniche in generale, limitandone l'impiego in svariati campi scientifici progettuali e strutturali[27].

Muovendo dalle limitazioni operative dei software di modellazione matematica, riscontrate durante le esercitazioni svolte nei laboratori didattici e nella pratica professionale, si sono metodologicamente strutturati nuovi listati di programmazione *AutoLISP*[28] per l'esecuzione di algoritmi di geometria proiettiva e descrittiva, selezionati tra quelli di più rapida esecuzione. I comandi creati, generati da procedimenti proiettivi-omologici, disegnano coniche (ellissi, parabole, iperboli) di cui si conoscano due diametri coniugati, o un diametro e una corda coniugata, o due corde coniugate, o cinque elementi tra punti e tangenti; condizioni queste molto frequenti nelle applicazioni dei diversi metodi di rappresentazione (Fig. 15). In questa sede si riporta lo *scripting* relativo alla costruzione di una conica iperbole dati cinque punti (se tre o quattro dei cinque punti dati sono allineati, o se due punti sono coincidenti, la conica non è definita) (Fig.16)[29].

---

27 Si possono tracciare due tipi di ellissi, in relazione al valore della variabile di sistema PELLISSE; se PELLISSE è uguale a 0 (default) si crea un'ellisse esatta, che ha un centro e quattro punti, estremi degli assi, ellisse conosciuta come "ellisse *NURBS*" (Non Uniform Rational Bezier Spline); se PELLISSE è uguale ad 1, si crea un'ellisse costituita da polilinee.

28 Il linguaggio *AutoLISP*, implementazione del linguaggio di programmazione *LISP* (LISt Processor), è incorporato nel pacchetto *AutoCAD* e utilizzato da altri software *CAD* quali *IntelliCAD* e *ProgeCAD*, ha la capacità di trattare liste dinamiche di dati. Questa capacità consente il trattamento di un disegno tecnico come una grossa lista composta dagli oggetti inseriti (linee, cerchi, archi ecc...), rendendo possibile la loro modifica e creazione. Attualmente esistono diversi *editor script* per la scrittura di programmi *LISP*, ma uno degli strumenti più efficace è il *Visual LISP*. La console interattiva all'interno del software *AutoCAD*, facilita il controllo nell'*editor* di testo della corrispondenza delle parentesi e della corretta digitalizzazione delle funzioni e delle variabili e presenta una serie di potenzialità di *debug* che agevolano l'individuazione di errori nel listato.

29 Il file *AutoLISP* contenente la funzione "Ip5", creato in ambiente *AutoCAD*, all'interno dell'*editor VisualLISP*, ha un'estensione (".lsp"*)*. Per eseguire il programma in una finestra di disegno del software *AutoCAD*, è necessario caricare il file. L'applicazione si carica tramite la finestra di dialogo Carica/scarica applicazioni nella "barra dei menù – Strumenti", all'interno della sessione di lavoro di *AutoCAD*. Per richiamare la funzione, le vie possibili da percorrere sono due: digitare il nome della funzione, nel nostro caso, "Ip5", sulla riga di comando di *AutoCAD*, oppure creare un nuovo pulsante che, in automatico, attiva la funzione. Assegnate le coordinate di cinque punti (dalla disposizione dei punti assegnati si evince la natura della conica da costruire), in automatico il programma svolge i calcoli contenuti nelle stringhe del listato e traccia la conica evidenziandone gli elementi notevoli.

Nei listati le espressioni seguenti hanno rispettivamente questo significato: *(setq ang**e** (angle pt**O** pt**E**))*, è il formato della funzione utilizzata per assegnare un valore alla variabile angolo *ang***e**;
*(setq pt**S** (polar pt**O** ang**e2** **d5**))*, è il formato della funzione utilizzata per assegnare un punto (*pt***S**) in corrispondenza di un determinato angolo (*ang***e2**) a una determinata distanza (**d5**) dal punto dato (*pt***O**) (vedi figura 16). Gli angoli sono espressi in radianti e i loro valori riferiti all'asse **X** sono positivi se misurati in senso antiorario (*default*).

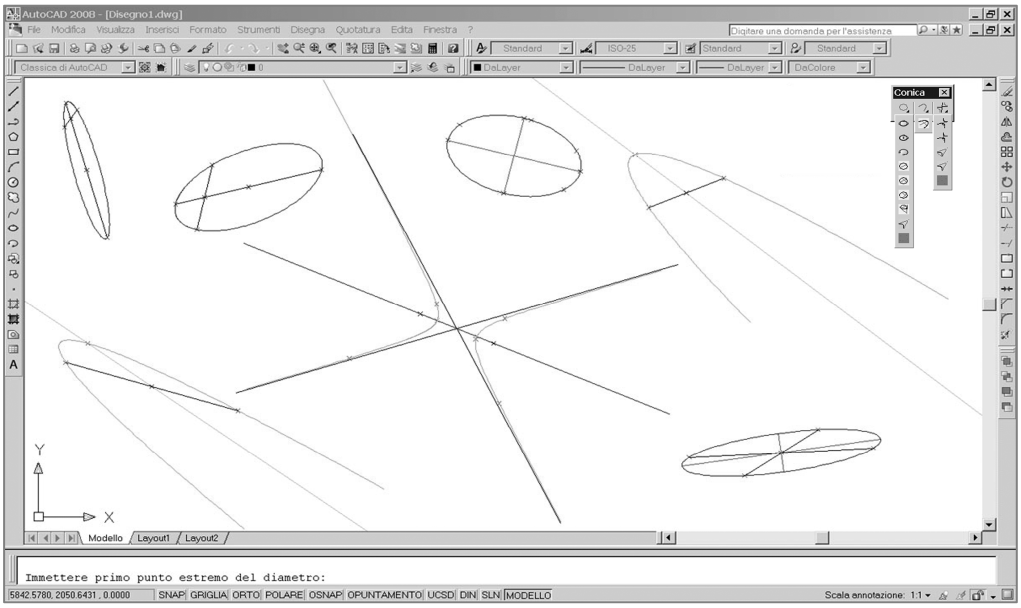


Fig. 15 – Schermata del software *AutoCAD*. Tracciamento rigoroso del profilo di coniche con evidenziazione degli elementi notevoli. Nella barra degli strumenti Disegna, si è creato una *palette* di pulsanti nuovi che, in automatico, richiama le funzioni strutturate per la generazione di coniche (ellissi, parabole, iperboli) di cui si conoscano due diametri coniugati, o un diametro e una corda coniugata, o due corde coniugate, o cinque elementi tra punti e tangenti.

```
;; Costruzione per la determinazione di una iperbole dati cinque suoi punti.
(defun C:Ip5 ()
  (prompt "Il comando IPERBOLE5 disegna i due rami di una iperbole dati cinque suoi punti")
  (terpri)
;;immissione coordinate cinque punti (non allineati, non coicidenti, in senso orario i primi quattro punti esterni e poi il quinto
interno).
  (setq ptA (getpoint"\n Immettere primo punto esterno del primo ramo:"))
  (command "punto" ptA)
  (command "_chprop" "_last" "" "_c" 1 "")
  (princ ptA)
  (setq ptA1 (getpoint "\n Immettere secondo punto esterno del ramo opposto:"))
  (command "_.point" ptA1)
  (command "_chprop" "_last" "" "_c" 1 "")
  (princ ptA1)
  (setq ptC (getpoint "\n Immettere terzo punto esterno:"))
  (command "_.point" ptC)
  (command "_chprop" "_last" "" "_c" 1 "")
  (princ ptC)
  (terpri)
  (setq ptB (getpoint "\n Immettere quarto punto esterno:"))
  (command "_.point" ptB)
  (command "_chprop" "_last" "" "_c" 1 "")
  (princ ptB)
  (setq ptD (getpoint "\n Immettere quinto punto interno ai primi quattro:"))
  (command "_.point" ptD)
  (command "_chprop" "_last" "" "_c" 1 "")
  (princ ptD)
;;Si applica il Teorema di J. Steiner per la determinazione di altri due punti della conica E e F. Scelti il punto A e il punto A1 come
centri dei due fasci proiettivi si inviano i raggi proiettivi agli altri punti noti (B,C,D).
                                        ;(command "_.xline" ptA ptC "")
                                        ;(command "_.xline" ptA ptD "")
                                        ;(command "_.xline" ptA ptB "")
                                        ;(command "_.xline" ptA1 ptC "")
                                        ;(command "_.xline" ptA1 ptD "")
                                        ;(command "_.xline" ptA1 ptB "")
……..

;; luogo geometrico dell'iperbole per via omologica (Oa, centro della circ omologa a; r, raggio di a). "sp" sta per serie polare.
  (setvar "cmdecho" 0)
  (setq punti (getint "\n Digitare il Numero di punti della conica e disattivare lo Snap: "))
  (setq angsp (/ (* 2 pi) punti))
  (setq angl11 (+ angl1 0.5))
  (setq ang 0)
  (while (< ang (* 2 pi))
    (setq ptS1 (polar ptOa angl11 r))
                                        ;(command "_.point" ptS1)
   (setq ptL2 (inters ptS1 ptG ptA1 ptC nil))
                                        ;(command "_.point" ptL2)
                                        ;(command "_.xline" ptS1 ptG "")
                                        ;(command "_.xline" ptL2 ptG1 "")
                                        ;(command "_.xline" ptP ptS1 "")
   (setq angas (angle ptG1 ptL2))
   (setq angas1 (angle ptP ptS1))
   (setq ptSc1 (inters ptS1 ptP ptL2 ptG1 nil))
                                        ;(command "_.point" ptSc1)
   (setq ptS2 (polar ptOa (+ angl11 angsp) r))
                                        ;(command "_.point" ptS2)
                                        ;(command "_.xline" ptS2 ptG "")
   (setq ptL3 (inters ptS2 ptG ptA1 ptC nil))
                                        ;(command "_.point" ptL3)
                                        ;(command "_.xline" ptL3 ptG1 "")
   (setq ptSc2 (inters ptS2 ptP ptL3 ptG1 nil))
                                        ;(command "_.point" ptSc2)
   (setq angl11 (+ angl11 angsp))
   (setq ang (+ ang angsp))
                                      (command "_.line" ptSc1 ptSc2 "")
   (command "_chprop" "_last" "" "_c" 30 ""))
  (setvar "cmdecho" 1)
  (princ))
```

Fig. 16 – Stralcio dello *scripting* per la generazione automatica di conica iperbole dati cinque punti. L’algoritmo “Ip5” è stato elaborato nel programma *Visual LISP* in ambiente *AutoCAD*.

## Costruzione geometrica dinamica con *Cabri Géomètre* della conica, quando ne siano noti il centro (proprio o improprio), due punti e la retta tangente in uno di essi

Dati il centro $\mathbf{C_0}$, i punti **A’** e **D’** (imponendo che non siano estremi dello stesso diametro) della conica da costruire e la retta $\mathbf{t_{D'}}$ tangente in **D’**, si tracci il punto **E’**, in simmetria centrale con **D’**, determinando il diametro **D’E’** della curva (se $\mathbf{C_0}$ è improprio il punto **E’** ha la stessa direzione del centro, ovvero è anch’esso improprio; in questo caso, dalla disposizione dei dati iniziali, si evince che si tratta di una conica parabola, il diametro è la semiretta avente estremo in **D’** e direzione $\mathbf{C_0}\infty$). Nella direzione della retta $\mathbf{t_{D'}}$ si costruisce la retta **c** passante per **A’** determinando il punto **B’**, simmetrico del punto **A’** rispetto al diametro coniugato alla tangente $\mathbf{t_{D'}}$[30]. Si definiscono, così, le due corde coniugate **A’B’** e **D’E’** rispetto alla conica e si instaura una relazione omologica fra la conica e la circonferenza **a** avente per diametro la corda suddetta **A’B’**. Per costruzione si hanno tutti gli elementi per costruire la conica mediante l’omologia. Dell’omologia si conoscono l’asse, la retta **c** contenente la corda **A’B’** e il centro **O** (proprio o improprio se il punto **E’** è all’infinito), individuato come punto di intersezione delle rette congiungenti le coppie omologhe **DD’** e **EE’**[31]. Scelto un punto generico **S** sull’oggetto circonferenza **a**, si determina con rette corrispondenti l’omologo punto **S’** sulla conica, per definizione i due punti risulteranno allineati con il cento $\mathbf{C_0}$ (ci si appoggia, ad esempio, ai punti corrispondenti **D** e **D’**)[32]. Richiamando il comando “luogo geometrico”, si seleziona l’oggetto punto **S** e poi il punto **S**’ che genera il “luogo” conica (Fig. 17). La costruzione dinamica[33], realizzata in *Cabri Géomètre*, presenta un “punto di controllo” **K** vincolato a muoversi sul perimetro della circonferenza.

---

30 In una conica a centro dati due diametri coniugati, le tangenti negli estremi di un diametro (punti di incontro con la curva) sono parallele al diametro coniugato.

31 In una conica se due diametri coniugati sono tra loro anche perpendicolari, essi diventano assi per la conica. Soltanto per la conica “cerchio” ogni diametro è asse e dunque perpendicolare al diametro coniugato.

32 G.M. Catalano, Inediti sulle coniche, Co.Gra.s, Palermo 1988, p. 24.

33 In questi anni, grazie anche allo sviluppo delle tecnologie che rendono disponibili strumenti con adeguate velocità di calcolo, si è registrato un vasto fiorire di programmi che vanno sotto la categoria indicata con il termine “geometria dinamica”. Il programma più noto è *Cabrì*, sviluppato dall’IMAG – Università J. Fourier di Grenoble; va poi ricordato *SketchPad*, della Key Curriculum Press e *Cinderella*, software scritto in linguaggio *JAVA* e quindi disponibile su sistemi diversi (*WINDOWS*, *LINUX*, *MAC*).

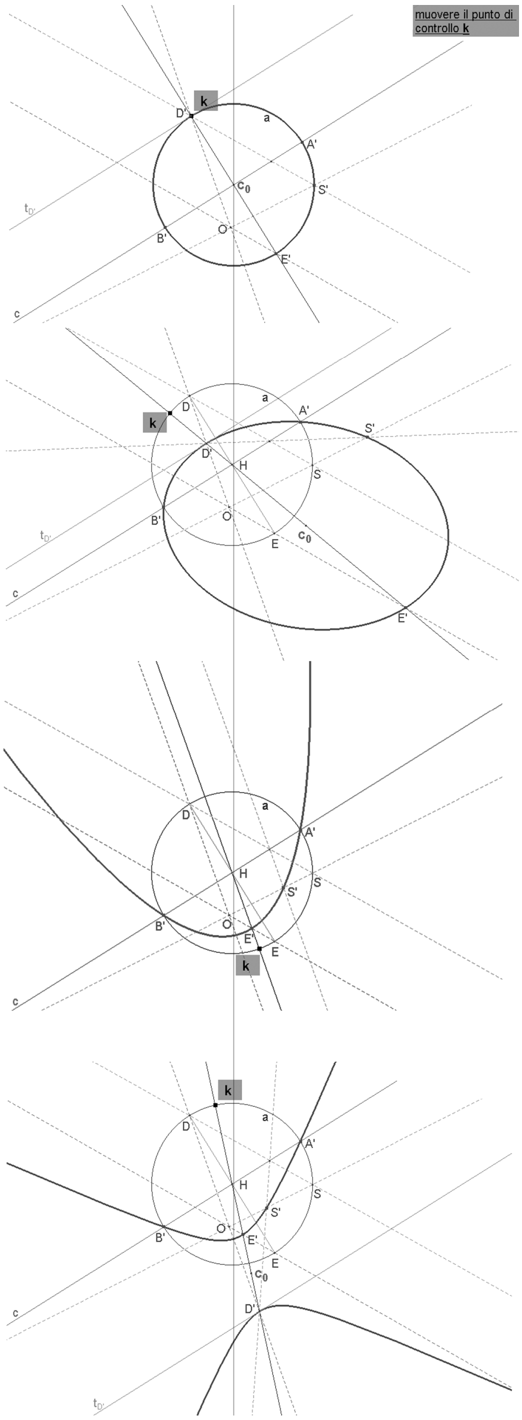


Fig. 17 – Costruzione geometrica della conica per via omologica, dinamica in *Cabri Géomètre*. Noti il centro (proprio o improprio), due punti e la retta tangente in uno di essi, il movimento del punto **K** sulla circonferenza **a** mette in relazione geometrica le coniche risultanti. In figura sono rappresentati i casi di conica non degenere.

In relazione all'impostazione omologica strutturata, il movimento del punto genera le infinite coniche, mettendo in relazione geometrica coniche degeneri (se quattro punti sono allineati, o se due punti sono coincidenti, la conica degenera in due rette coincidenti; se solamente tre punti sono allineati, la conica viene definita e degenera nell'unione di due rette distinte) e non degeneri: circonferenza, ellisse, parabola, iperbole.

## Bibliografia

Boyer C.B.,1980, *Storia della Matematica*, Oscar Saggi Mondadori, Milano.

Castelnuovo G., 1909, *Lezioni di Geometria analitica*, Ed. Dante Alighieri, Roma-Milano.

Cresci L., 1998, *Le curve celebri-Invito alla storia della matematica attraverso le curve piane più affascinanti*, Aries, Padova.

Di Paola F., 2010, *Le curve di Apollonio. Tradizione ed innovazione nei processi risolutivi*, Aracne Editore, Roma.

Inzerillo M., 2008, *Fondamenti e Applicazioni di Scienza della Rappresentazione-Geometria del Disegno-Prospettiva*, (Progetto grafico e impaginazione, Francesco Di Paola), Michele Inzerillo Editore, Palermo.

Loria G., 1950, *Storia delle Matematiche – Dall'alba della civiltà al tramonto del secolo XIX*, II Ed. Hoepli, Milano.

Loria G., 1921, *Storia della Geometria Descrittiva dalle origini sino ai giorni nostri*, Ed. Hoepli, Milano.

Migliari R., 2009, *Geometria descrittiva-Metodi e costruzioni*, V. 1, CittàStudi Edizioni, Novara.

Pelz K., 1876, Construction der Axen einer Ellipse aus zwei conjugirten Diametern, in *Výročná správa c. k. reálky v Těšíne*, Praha.

Pelz K., 1872, Über die Bestimmung der Axen von Zentralprokekzionen des Kreises, in: *Věstník královské české společnosti nauk v Prahe*, Praha.

Sklenáriková Z., 2008, One hundred years since death of Karl Pelz. In ***G*** *– Slovak Journal for Geometry and Graphics*, Bratislava: Slovak Society for Geometry and Graphics, V. 5, No. 9, pp. 31-44 (in Slovak).

Zerlenga O., 1997, *La forma ovata in architettura-rappresentazione e geometria*, Cuen Ed., Napoli.

**Francesco Di Paola**


Fernand Clément & Cie
PAL
USINE
& BUREAUX:
130, r. du bois
Levallois-Perret