

**CONSIDERAZIONI TEORICHE E PRATICHE SUL METODO DEL MASSIMO
RETTANGOLO CIRCOSCRITTO PER LA VALUTAZIONE DELL'AMPIEZZA DELLA
TENSIONE TANGENZIALE NEI CRITERI DI FATICA MULTIASSIALE BASATI
SULL'APPROCCIO DI PIANO CRITICO**

G. Petrucci

^a *Università degli Studi di Palermo - Dipartimento di Ingegneria Chimica, Gestionale, Informatica, Meccanica - Viale delle Scienze, 90128 Palermo, e-mail: giovanni.petrucci@unipa.it*

Sommario

I criteri di fatica multiassiale basati sull'approccio di piano critico richiedono la determinazione dell'ampiezza della tensione tangenziale alternata τ_a agente sui diversi piani passanti per il punto del materiale analizzato. Nel caso di sollecitazioni di tipo non proporzionale il vettore della tensione tangenziale varia sia in modulo che in direzione e la sua punta descrive una curva definita *percorso di carico*. In questi casi τ_a viene valutato mediante apposite procedure delle quali la più recente ed apparentemente più efficace è quella del Massimo Rettangolo Circoscritto (MRC) al percorso di carico stesso. In questo lavoro viene effettuato un confronto tra il metodo MRC e i principali altri metodi in termini di risultati ottenuti e di onere computazionale, vengono proposte due procedure di applicazione del metodo MRC che consentono di ottimizzarne l'esecuzione, infine vengono evidenziati alcuni aspetti critici del metodo stesso al fine di ispirarne opportune future modifiche.

Abstract

The multiaxial fatigue criteria based on the approach of the critical plane require the determination of the amplitude of the alternating shear stress τ_a acting on different planes passing through the point of the material analyzed. In the case of non-proportional stresses the shear stress vector varies both in modulus and direction and its tip describes a curve defined *loading path*. In these cases τ_a is identified and evaluated by means of special procedures the most recent, and apparently more effective, of which is that of the Maximum Circumscribed Rectangle (MCR) to the loading path itself. In particular τ_a is equal to the length of the diagonal of the MCR. In this paper, the MCR method is analyzed comparing it with other existing methods in terms of results obtained and computational effort. Furthermore two procedures that help to optimize the performance of the method are proposed, then some critical aspects of the method itself are highlighted for future development of the technique.

Parole chiave: fatica multiassiale, tensione tangenziale alternata, cerchio, rettangolo, circoscritto.

1. INTRODUZIONE

I criteri di fatica multiassiale ad alto numero di cicli basati sull'approccio di piano critico [1-4] sono espressi da un'equazione del tipo

$$\tau_{a,c} + k N \leq f \quad (1)$$

nella quale $\tau_{a,c}$ è l'ampiezza della tensione tangenziale alternata agente sul piano critico, N è un valore dipendente dalle tensioni normali σ_n agenti nel punto considerato, spesso coincidente con la tensione massima o la tensione alternata agente sul piano critico, f è una costante legata ai limiti di fatica del

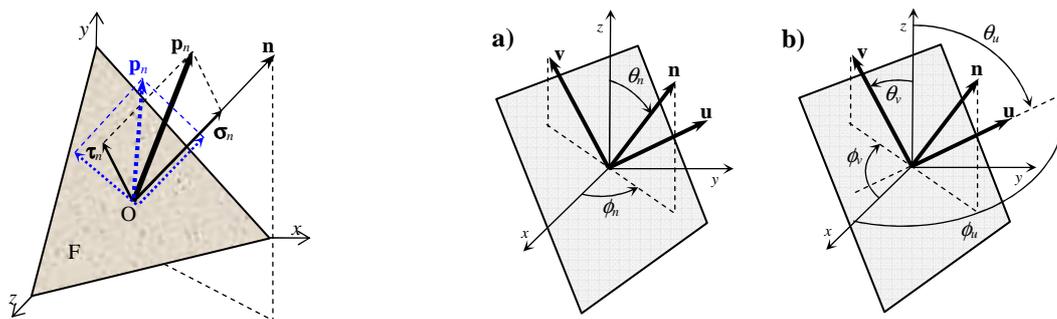


Figura 1: A sinistra il vettore tensione \mathbf{p}_n agente sul piano F di normale \mathbf{n} passante per il punto O del materiale. A destra il sistema di assi nuv e le coordinate sferiche dei versori: a) orientazione versore \mathbf{n} , b) orientazione dei versori \mathbf{u} e \mathbf{v} .

materiale, k è una costante legata alla differente risposta del materiale alle tensioni normali e tangenziali dal punto di vista della propagazione della frattura.

Il piano critico viene determinato come il piano su cui si determina il massimo valore di τ_a , oppure il massimo valore di una combinazione tra τ_a ed N .

È evidente che l'applicazione di questo tipo di criteri richiede la determinazione dell'ampiezza della tensione tangenziale alternata τ_a agente sui diversi piani passanti per il punto del materiale analizzato [1-4].

In fig.1 a sinistra è mostrato il vettore tensione \mathbf{p}_n agente in un punto O del materiale, su un generico piano F, la cui giacitura è identificata mediante il versore della direzione ad esso ortogonale \mathbf{n} , insieme ai suoi componenti normale e parallelo al piano, cioè σ_n e τ_n . Noto il tensore degli sforzi nel punto $\sigma(t)$ ed assegnata la direzione \mathbf{n} , \mathbf{p}_n , σ_n e τ_n possono essere ottenute mediante le seguenti, note, relazioni:

$$\mathbf{p}_n(t) = \sigma(t) \mathbf{n}$$

$$\sigma_n(t) = \tilde{\mathbf{n}} \mathbf{p}_n(t) \mathbf{n} = [\tilde{\mathbf{n}} \sigma(t) \mathbf{n}] \mathbf{n} \tag{2-4}$$

$$\tau_n(t) = \mathbf{p}_n(t) - \sigma_n(t) = \sigma(t) \mathbf{n} - [\tilde{\mathbf{n}} \sigma(t) \mathbf{n}] \mathbf{n}$$

A loro volta i moduli dei vettori σ_n e τ_n possono essere ottenuti come

$$\sigma_n(t) = \tilde{\mathbf{n}} \mathbf{p}_n(t) = \tilde{\mathbf{n}} \sigma(t) \mathbf{n} \tag{5}$$

$$\tau_n(t) = \sqrt{p_n^2(t) - \sigma_n^2(t)} \tag{6}$$

Nel caso di tensioni variabili nel tempo, in generale, τ_n risulta variabile sia in modulo che in direzione (fig.1). La sua posizione nel piano F in istanti differenti può essere identificata mediante le

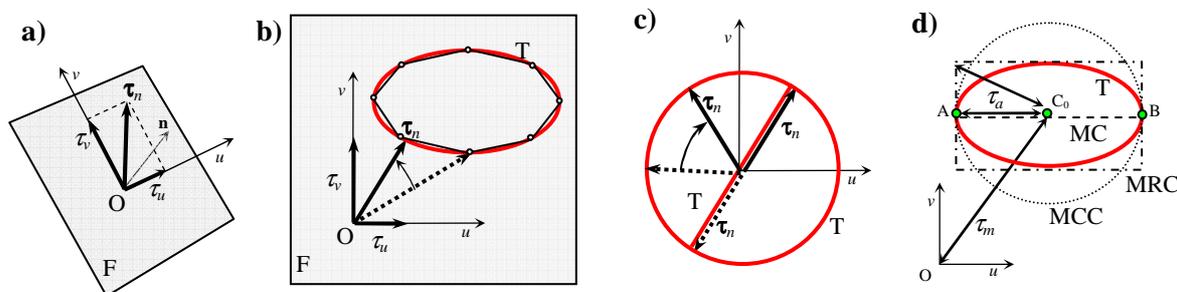


Figura 2: a) Vettore τ_n , b) esempio di curva T, c) confronto tra sollecitazione di tipo proporzionale (curva T coincidente con un segmento di retta), e sollecitazione non proporzionale (curva T coincidente con una circonferenza), d) i metodi MC, MCC ed MRC.

componenti in un sistema di riferimento cartesiano con assi u - v ortogonali, disposti parallelamente ad F , centrati in O , quale, ad esempio, quello mostrato in fig.1 a destra. In tale sistema le coordinate sferiche delle 3 direzioni sono rappresentate dai seguenti vettori:

$$\begin{bmatrix} \phi_n \\ \theta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^{-1}(n_y/n_x) \\ \cos^{-1}(n_z) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \phi_u \\ \theta_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_n + \pi/2 \\ \pi/2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \phi_v \\ \theta_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_n - \pi \\ \pi/2 - \theta_n \end{bmatrix} \quad (7-9)$$

e, in base alle (8,9), i versori delle direzioni u e v possono essere ottenuti come

$$\mathbf{n}_u = \begin{bmatrix} -\sin(\phi_n) \\ \cos(\phi_n) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{n}_v = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_n) \cos(\phi_n) \\ -\cos(\theta_n) \sin(\phi_n) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (10,11)$$

infine, le componenti τ_u e τ_v (vedi fig.2a) possono essere ottenute con le seguenti relazioni

$$\tau_u(t) = \tilde{\mathbf{n}}_u \cdot \mathbf{p}_n(t) \quad \tau_v(t) = \tilde{\mathbf{n}}_v \cdot \mathbf{p}_n(t) \quad (12,13)$$

Nel caso più generale di sollecitazioni di tipo non proporzionale, nelle quali le componenti del tensore $\boldsymbol{\sigma}(t)$ non agiscono in fase o contro-fase, la punta del vettore $\boldsymbol{\tau}_n$ al variare del tempo effettua un percorso costituito da una curva piana T , definita anche *percorso di carico*, come nell'esempio di fig.2b. Nel caso di storie di sollecitazione di tipo periodico, la curva T risulta chiusa. Nei casi particolari di sollecitazioni di tipo proporzionale o con componenti alternate proporzionali, la curva T degenera in una retta. In fig.2c viene mostrato il confronto tra il caso di componenti $\tau_{xy} \equiv \tau_u$ e $\tau_{xz} \equiv \tau_v$ di tipo sinusoidale agenti in fase, che danno luogo ad un vettore $\boldsymbol{\tau}_n$ con direzione costante e modulo variabile, la cui punta descrive una curva T costituita da un segmento rettilineo, e il caso di componenti $\tau_{xy} \equiv \tau_u$ e $\tau_{xz} \equiv \tau_v$ sempre di tipo sinusoidale, ma con differenza di fase pari a $\pi/2$, che danno luogo ad un vettore di modulo costante e rotante nel piano, la cui punta descrive una curva T costituita da una circonferenza. Da notare che, nei due casi descritti, il valore massimo del modulo del vettore $\boldsymbol{\tau}_n$ (costante nel caso della sollecitazione non proporzionale) è uguale.

Nel caso delle sollecitazioni proporzionali, essendo costante la direzione del vettore $\boldsymbol{\tau}_n$, la determinazione delle componenti media (τ_m) ed alternata (τ_a) della tensione tangenziale è immediata, mentre nel caso non proporzionale, a causa della variazione di direzione di $\boldsymbol{\tau}_n$, l'identificazione e la conseguente valutazione di τ_m e τ_a è tutt'altro che banale ed in letteratura ne sono state proposte diverse definizioni [5-13].

La correttezza della definizione di τ_a implica ovviamente che i risultati ottenuti introducendone il valore nelle equazioni di verifica (1) siano concordi con i dati sperimentali. Tuttavia, a causa del fatto che la curva T può assumere infinite forme, con caratteristiche molto differenti e che i dati sperimentali sono noti per un numero limitato di casi, la verifica della correttezza delle definizioni proposte non è semplice. In questo senso, una caratteristica che dovrebbe essere rispettata è che i valori di τ_a ottenuti per sollecitazioni di tipo non proporzionale, dovrebbero risultare più elevati rispetto a quelli ottenuti per sollecitazioni di tipo proporzionale di *ampiezza paragonabile*, come ad esempio i casi di fig.2c.

Inoltre, una caratteristica che dovrebbe essere rispettata da una corretta definizione di τ_a e τ_m è quella dell'unicità della soluzione, cioè il fatto di fornire un unico valore per ciascuna delle due grandezze per assegnata curva T .

Tipicamente la curva T deve essere determinata in forma discreta e viene ottenuta come una sequenza di punti τ_k , con $k=1,2,\dots,N$, le cui coordinate u_k e v_k sono date dalle componenti del vettore $\boldsymbol{\tau}_n$ nel sistema di riferimento u - v . I punti τ_k possono essere considerati i vertici di un poligono inscritto alla curva T , come quello visualizzato in fig.2b, avente un numero di punti $N=8$. La determinazione dei

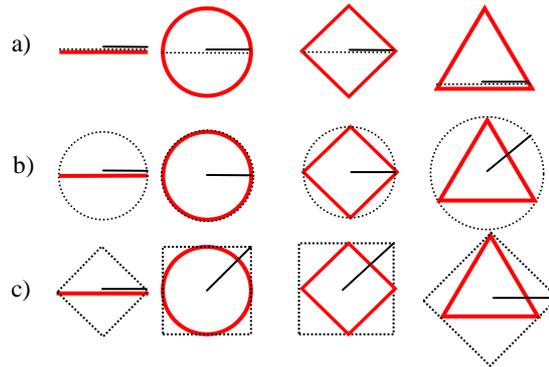


Figura 3: Valori di τ_a (proporzionale al segmento nero in linea continua) ottenuti con i metodi a) MC, b) MCC, c) MRC, nei casi di curve T (in rosso) aventi la stessa lunghezza della corda massima e costituite rispettivamente da un segmento, una circonferenza, un quadrato, un triangolo equilatero.

valori τ_a e τ_m in base alle definizioni proposte in letteratura richiede l'esecuzione di apposite procedure numeriche che elaborano i valori delle coordinate u_k e v_k dei punti della curva T.

L'applicazione dei criteri di fatica multiassiale basati sul piano critico richiede che τ_a venga determinata su un insieme discreto di piani F_i , con $i=1,2,..N_F$, centrati nel punto analizzato ed è opportuno che il numero di giaciture N_F sia elevato al fine di ottenere stima sufficientemente precisa [6]. In conseguenza di ciò, è opportuno che la determinazione di τ_a sia effettuata con algoritmi veloci, al fine di ridurre i tempi di calcolo.

La prima definizione proposta in letteratura per la determinazione delle componenti di sollecitazione τ_a e τ_m è quella della Massima Corda (MC) della curva T, mentre ad oggi la definizione più utilizzata è quella relativa al Minimo Cerchio Circoscritto (MCC) alla curva T [7-12]. La definizione più recente ed apparentemente più efficace è quella relativa al Massimo Rettangolo Circoscritto (MRC) alla curva T [13]. In questo lavoro viene analizzato il metodo MRC, effettuando un confronto con gli altri metodi riguardante i valori di τ_a ottenuti e l'onere computazionale. Inoltre vengono proposte due procedure finalizzate alla minimizzazione dei tempi di calcolo del metodo MRC ed infine vengono evidenziate due criticità del metodo, non evidenziate nel lavoro in cui esso è stato proposto [13], al fine di ispirarne opportune modifiche.

2. CONFRONTO TRA LE DEFINIZIONI DELLE COMPONENTI MEDIA ED ALTERNATA DELLA TENSIONE TANGENZIALE

Nella definizione della Massima Corda (MC) della curva T, τ_a è assunta pari a metà della lunghezza della MC stessa

$$\tau_a = \frac{C}{2} \quad (14)$$

essendo C la lunghezza della MC, e τ_m pari al modulo del vettore che punta la posizione del centro della MC, come mostrato in fig.2d.

Nel caso della procedura del Minimo Cerchio Circoscritto (MCC) alla curva T [4,5], τ_a è assunta pari alla lunghezza del raggio del MCC

$$\tau_a = R \quad (15)$$

essendo R il raggio del MCC, e τ_m pari al modulo del vettore che punta la posizione del centro del MCC, come mostrato in fig.2d.

Nel caso della procedura del Massimo Rettangolo Circoscritto (MRC) alla curva T [], τ_a è assunta pari a metà della lunghezza della diagonale D del MRC

$$\tau_a = \frac{D}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{L_1^2 + L_2^2} \quad (16)$$

essendo L_1 ed L_2 le lunghezze dei lati del MRC, e τ_m pari al modulo del vettore che punta la posizione del centro del MRC, come mostrato in fig.2d.

In fig.3 sono mostrati i diversi risultati ottenuti con i 3 metodi nel caso di 4 differenti curve T, tutte aventi la corda massima di semi-lunghezza unitaria, cioè con $C=2$. Le curve sono costituite rispettivamente da un segmento (di lunghezza pari a 2), che rappresenta il classico caso di sollecitazione proporzionale, una circonferenza (con raggio di lunghezza unitaria) rappresentativa del caso di vettore τ_m di modulo costante e direzione variabile con continuità, un quadrato (le cui corde massime coincidono con le diagonali) e un triangolo equilatero (le cui corde massime coincidono con i lati). I risultati numerici sono riassunti nelle prime 4 colonne della tabella 1. Nella quinta colonna sono riportati i valori massimi di τ ottenibili dai tre metodi nel caso di curva generica avente corda massima di semilunghezza unitaria.

Per prima cosa deve essere sottolineato il fatto che il metodo MC ha il difetto di non fornire un risultato univoco per la tensione τ_m nei casi in cui la curva T presenta più corde con la stessa lunghezza massima, che non presentano un punto in comune, come accade nel caso della curva T triangolare [5]. A parte questo, i valori mostrati in tabella consentono di apprezzare le differenze massime tra i valori di τ_a ottenuti con i tre metodi applicati alla stessa curva T. In particolare è possibile dimostrare che il raggio del MCC può risultare al più 1.1547 volte la semilunghezza della MC [14], cioè si ha

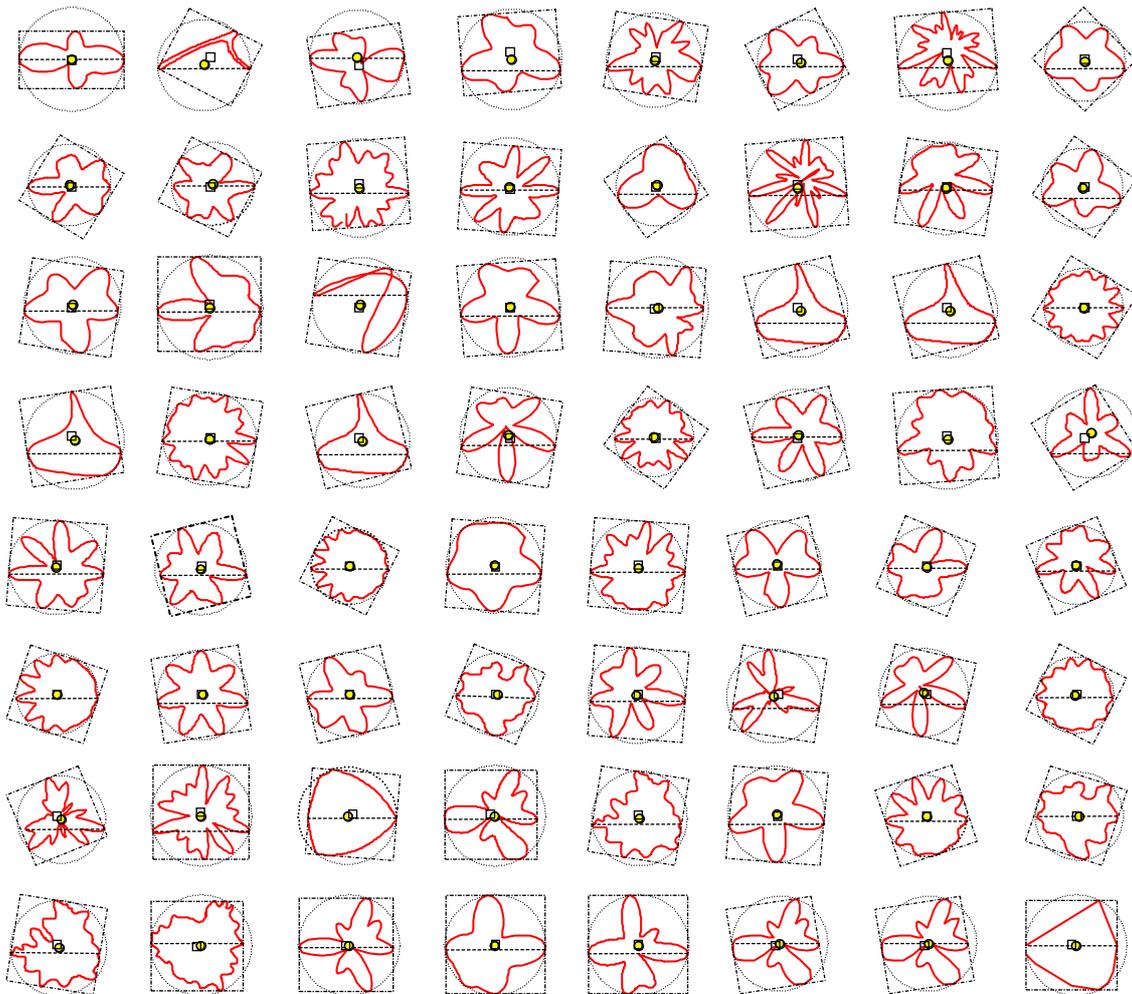


Figura 4: Le 64 curve T utilizzate nel confronto tra le tecniche per la valutazione delle componenti della tensione tangenziale. Le curve hanno uguale lunghezza della MC e sono disposte per semilunghezza della diagonale del MRC crescente.

$$\frac{C}{2} \leq R \leq 1.1547 \frac{C}{2} \tag{17}$$

condizione che si verifica, ad esempio, nel caso della curva T triangolare (fig.3 e Tabella 1).
 A sua volta, la semilunghezza della diagonale del MRC può risultare lunga al più 1.4142 volte la lunghezza del raggio del MCC e la semilunghezza della MC, cioè si ha

$$R \leq \frac{D}{2} \leq 1.4142 R \quad \frac{C}{2} \leq \frac{D}{2} \leq 1.4142 \frac{C}{2} \tag{18,19}$$

condizione che si verifica, ad esempio, nei casi della curva T circolare e quadrata (fig.3).
 È importante notare che in questi due casi il metodo MC ed MCC forniscono lo stesso risultato del caso di sollecitazione proporzionale, in contrasto con le evidenze sperimentali che mostrano che l'ampiezza di τ_a che verifica le equazioni (1) deve essere maggiore [13]. Da questo punto di vista la definizione di τ_a relativa al metodo del MRC appare più efficace di quella dei metodi MC ed MCC [13].
 L'osservazione del risultato del MRC nel caso della curva T di forma quadrata spiega il motivo per il quale viene preso in considerazione il *massimo* rettangolo circoscritto e non il *minimo* [13]. In questo secondo caso il rettangolo circoscritto coinciderebbe con la curva T rettangolare e darebbe luogo ad una sottostima di τ_a analoga a quella del metodo MCC.

Tabella 1: Valori di τ_a ottenuti con le tre procedure analizzate per diversi tipi di percorsi di carico.

	τ_a segmento	τ_a cerchio	τ_a quadrato	τ_a triangolo	τ_a limite
$C/2$ (MC)	1	1	1	1	1
R (MCC)	1	1	1	1.1547	1.1547
$D/2$ (MRC)	1	1.4142	1.4142	1.3661	1.4142

Il confronto tra i metodi descritti in termini di differenze tra i valori di τ_a ottenuti e di tempi di calcolo necessari per l'elaborazione, è stato effettuato utilizzando 64 curve T con caratteristiche opportune. Le curve sono mostrate in fig.4 e sono ordinate per valore della semilunghezza della diagonale del MRC crescente. Tutte le curve sono caratterizzate dal fatto di avere uguale corda massima di semilunghezza unitaria; alcune hanno uguale forma, ma sono costituite da un numero N di punti differente, al fine di valutare l'effetto di questa caratteristica sui tempi di elaborazione (vedi [11, 14]). I cerchietti e quadratini mostrati nelle figure rappresentano i centri dei MCC e dei MRC rispettivamente.

In fig.5 a sinistra sono mostrati i valori di τ_a ottenuti con i tre metodi disposti nello stesso ordine delle curve raffigurate in fig.4. I risultati del metodo MRC sono rappresentati dalla linea nera continua crescente in modo monotono, mentre quelli del metodo MC sono rappresentati, ovviamente, da una linea parallela all'asse delle ascisse e di ordinata unitaria. Come atteso si verifica sempre la condizione

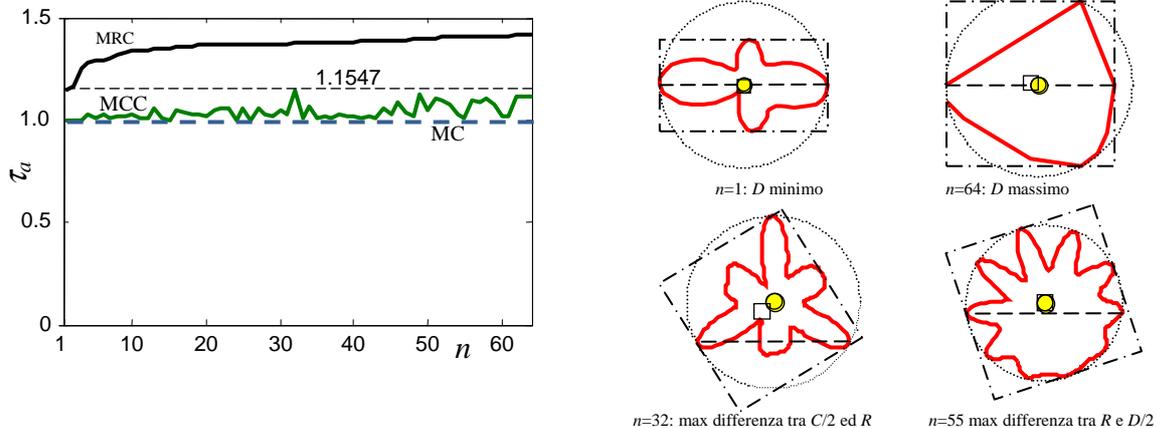


Figura 5: A sinistra valori di τ_a ottenuti con i 3 metodi nel caso delle 64 curve T di fig.4.
 A destra quattro casi di interesse delle curve T di fig.4.

$$\frac{C}{2} \leq R \leq \frac{D}{2} \quad (20)$$

ed è possibile osservare come nei 64 casi sia confermata la condizione espressa dalla (17).
 In fig.5 a destra sono mostrate, in particolare, le curve T $n=1, 64, 32$ e 55 , relative rispettivamente ai casi di minimo valore di D , di massimo valore di D , di massima differenza tra $C/2$ ed R , di massima differenza tra R e $D/2$.

3. ALGORITMI PER LA DETERMINAZIONE DEL MRC E TEMPI DI CALCOLO

La procedura proposta in [13] per la determinazione delle lunghezze dei lati del MRC consiste nel ruotare la curva T di N_ϕ angoli ϕ_j uniformemente spaziate nel campo $0 \leq \phi_j < \pi/2$

$$\phi_j = j \frac{\pi}{2N} \quad j=0,1,\dots, N_\phi-1 \quad (21)$$

e considerare ogni volta il rettangolo circoscritto alla curva avente i lati paralleli agli assi u e v . Le dimensioni dei lati del rettangolo, definite L_u ed L_v rispettivamente, possono essere valutate determinando di volta in volta le distanze tra punti aventi massima e minima ascissa e le distanze dei punti aventi massima e minima ordinata:

$$L_{u_j} = \max_k \{u_{j,k}\} - \min_k \{u_{j,k}\} \quad L_{v_j} = \max_k \{v_{j,k}\} - \min_k \{v_{j,k}\} \quad (22a,b)$$

Tra gli N_ϕ rettangoli considerati, il MRC è quello avente la massima dimensione della diagonale. In base a tale definizione, il valore di τ_a può essere determinato mediante le (22) come:

$$\tau_a = \frac{1}{2} \sqrt{\max_j \{L_{u_j}^2 + L_{v_j}^2\}} \quad (23)$$

Il principale onere computazionale di questa procedura è dovuto alla rotazione delle coordinate della curva T che aumenta all'aumentare del numero N_ϕ di rotazioni.

In alternativa, in questo lavoro viene proposta una semplice procedura basata sulle formule elementari per la determinazione delle distanze tra punti e rette, che, minimizzando il numero di funzioni trigonometriche calcolate, consente di velocizzare l'elaborazione.

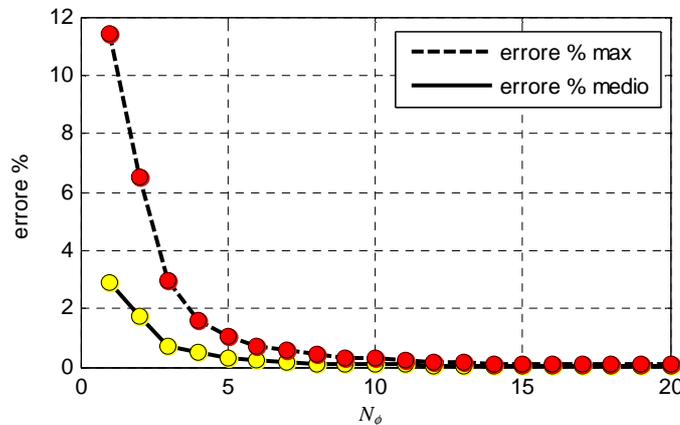


Figura 6: errore percentuale massimo e medio nella determinazione dei valori di τ_a per le 64 curve di fig.4 con il metodo del MRC al variare del numero N_ϕ di angoli di rotazione ϕ_j .

In questa procedura si considerano i rettangoli circoscritti alla curva aventi lati paralleli ed ortogonali ad N_ϕ rette passanti per l'origine degli assi, inclinate degli angoli descritti dalla (21). In tal caso i coefficienti angolari della j -esima retta e della retta ad essa ortogonale sono dati da

$$m_j = \tan \phi_j \quad n_j = -\frac{1}{m_j} \quad (24a,b)$$

e le distanze dei punti della curva dalle suddette rette sono ottenibili rispettivamente come

$$D_{j,k} = \frac{v_k - m_j u_k}{\sqrt{1+m_j^2}} \quad d_{j,k} = \frac{v_k - n_j u_k}{\sqrt{1+n_j^2}} \quad (25a,b)$$

A loro volta, le lunghezze dei lati del rettangolo circoscritto, L_1 ed L_2 , sono ottenibili dalle massime e minime distanze dei punti della curva T dalle suddette rette come

$$L_{1j} = \max_k \{D_{j,k}\} - \min_k \{D_{j,k}\} \quad L_{2j} = \max_k \{d_{j,k}\} - \min_k \{d_{j,k}\} \quad (26a,b)$$

Infine il valore di τ_a può essere ottenuto mediante un'espressione simile alla (23)

$$\tau_a = \frac{1}{2} \sqrt{\max_j \{L_{1j}^2 + L_{2j}^2\}} \quad (27)$$

Per effettuare il confronto con la procedura proposta, la procedura basata sulla rotazione è stata effettuata mediante i seguenti passaggi:

- trasformazione iniziale delle coordinate u, v della curva T in coordinate polari $R-\phi$;
- effettuazione delle N_ϕ rotazioni successive sommando ai valori ϕ gli angoli di rotazione ϕ_j ottenendo gli angoli $\phi_{r,j} = \phi + \phi_j$;
- trasformazione delle coordinate polari $R, \phi_{r,j}$ in coordinate cartesiane u_j-v_j dopo ciascuna rotazione;
- applicazione delle formule (22-23) per la determinazione del MRC.

L'analisi dei risultati ha mostrato che la tecnica proposta riduce i tempi di calcolo di circa il 30% rispetto a quella basata sulla rotazione delle coordinate.

Come è ovvio la precisione e l'onere computazionale della procedura di calcolo del MRC sono legati al numero di direzioni N_ϕ considerate, sia nel caso della modalità di calcolo proposta in [13], che in quella presentata in questo lavoro. L'effetto di tale numero di direzioni è stato analizzato applicando il metodo alle 64 curve di riferimento già descritte, variando opportunamente N_ϕ . I tempi di calcolo sono risultati direttamente proporzionali al numero N_ϕ di rotazioni/direzioni considerate.

Per quanto concerne la precisione, il metodo MRC è stato applicato considerando valori di N nel campo $1 \leq N_\phi \leq 90$ e determinando gli errori medi e massimi sul valore di τ_a ottenuto rispetto al caso di $N_\phi = 900$. Al fine di eliminare l'effetto dell'orientamento delle curve, inizialmente disposte con la massima corda orientata parallelamente all'asse u , esse sono state ruotate di angoli variabili tra 0 e $\pi/4$ prima di effettuare l'elaborazione. Gli errori massimi per $N_\phi = 1$ si verificano, ovviamente, per quest'ultimo valore di rotazione, per cui i risultati vengono mostrati relativamente a questo caso.

In particolare in fig.6 sono mostrati l'errore massimo e l'errore medio nella valutazione di τ_a delle 64 curve ottenuti per $1 \leq N_\phi \leq 20$. È facile osservare come tali errori risultino inferiori al 2% e allo 0.5% rispettivamente, già per $N_\phi = 4$. Per $N_\phi = 20$ gli errori massimo e medio si riducono rispettivamente allo 0.075% e allo 0.02%.

Questa osservazione suggerisce di analizzare preventivamente tutte le giaciture nel punto analizzato utilizzando un valore di N basso, praticamente $N_\phi = 4$, considerare il valore massimo ottenuto di τ_a , definito τ_{\max} , ed effettuare un'analisi più accurata solo nelle giaciture nelle quali si verifica

$$\tau_a \geq 0.95 \tau_{\max} \quad (28)$$

In questo lavoro, inoltre, è stata effettuata un'analisi comparativa degli oneri computazionali delle tre procedure di calcolo delle componenti τ_m e τ_a considerate. Per quanto concerne i metodi MC ed MCC sono state utilizzate le procedure descritte in [11] che sono tra le più efficienti disponibili in bibliografia. In tabella 2 sono mostrati i tempi di esecuzione ottenuti nell'analisi delle 64 curve di fig.4, normalizzati rispetto al tempo massimo di esecuzione. Per quanto concerne il metodo MRC, l'analisi è stata effettuata per numeri di rotazioni/direzioni pari a $N_\phi=4$ ed $N_\phi=26$. È facile notare che per $N_\phi=4$ i tempi di calcolo della procedura MRC sono circa un terzo di quelli della procedura MCC, mentre risultano uguali per $N_\phi=26$, valore che garantisce un risultato pressoché perfetto. In definitiva, tutto considerato, la procedura MRC risulta la più vantaggiosa dal punto di vista computazionale.

Tabella 2: Confronto tra i tempi di calcolo delle tre procedure.

	MC	MCC	MRC $N_\phi=6$	MRC $N_\phi=26$
t/t_{\max}	0.55	1.00	0.35	1.00

4. CONCLUSIONI E CONSIDERAZIONI CRITICHE

In base a quanto osservato il metodo MRC appare superiore al metodo MCC, sia per la migliore capacità di quantificare l'ampiezza della sollecitazione di taglio nel caso delle sollecitazioni di tipo non proporzionale, sia per la maggiore velocità degli algoritmi con cui può essere implementato.

Tuttavia un'analisi più approfondita mostra che il metodo presenta dei problemi inerenti l'unicità della soluzione in presenza di curve T caratterizzate da un singolo asse di simmetria come quella mostrata in fig.7a. In questo caso (ed in altri analoghi, non riportati per brevità) esistono 2 MRC, con centri in posizioni differenti. Inoltre i rettangoli non risultano simmetrici rispetto all'asse di simmetria della curva e il loro centro non giace sull'asse di simmetria stesso.

Un'ulteriore criticità del metodo MRC, che però può essere estesa agli altri 2 metodi descritti in questo lavoro, può essere evidenziata considerando, ad esempio, la fig.7b. In questo caso il percorso di carico è costituito da una circonferenza esterna praticamente completa, se si eccettua un piccolissimo arco sulla sinistra, e da una circonferenza interna, anch'essa praticamente completa, di raggio leggermente più piccolo. Da un punto di vista meccanico è evidente che un simile percorso di carico equivale a due percorsi di carico circolari aventi praticamente la stessa ampiezza, mentre i 3 metodi descritti in questo

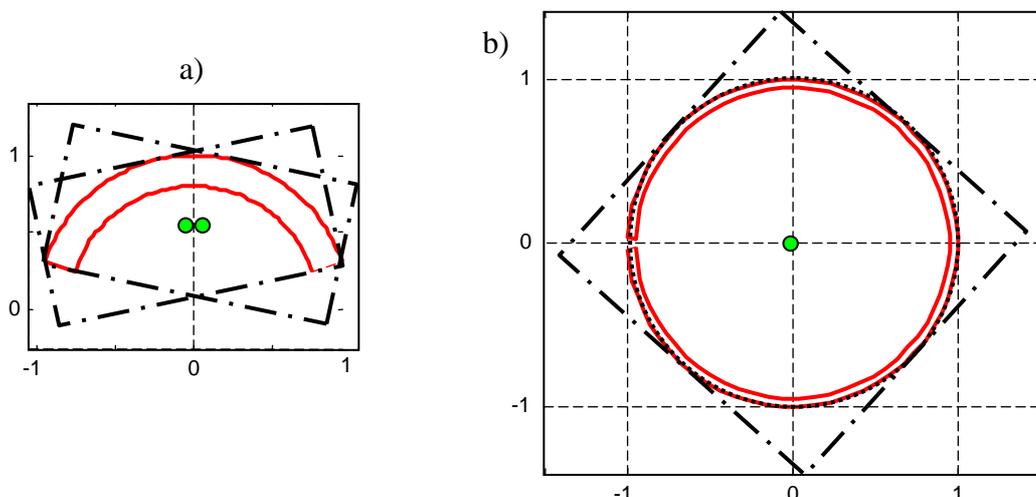


Figura 7: a) ambiguità nella determinazione del MRC per curve con asse di simmetria, b) curva T costituita da due curve concentriche di raggio poco differente: i metodi basati MCC ed MRC la considerano equivalente ad un solo ciclo.

lavoro identificano comunque un solo ciclo di sollecitazione. In realtà è facile trovare numerose altre forme di curve T che danno luogo a simili ambiguità, che non vengono riportati per brevità.

Quanto mostrato induce a ritenere che i metodi ad oggi proposti in letteratura per la determinazione delle componenti media e alternata della tensione tangenziale, utile nell'applicazione dei criteri di fatica multiassiale basati sul piano critico, non forniscano risultati corretti nei casi più generali e che tale problematica richieda ulteriori approfondimenti. In tal senso, il metodo MRC può essere considerato come un passaggio verso una definizione soddisfacente e non una soluzione definitiva.

BIBLIOGRAFIA

- [1] W.N. Findley, A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending, *J. Eng. Ind.-Trans. ASME*, 81, 301-306 (1959).
- [2] D.L. McDiarmid, A general criterion for high cycle multiaxial fatigue failure, *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 14, 429-453 (1991).
- [3] K. Dang Van, B. Griveau, O. Message, On a new multiaxial fatigue limit criterion: theory and applications, in: M.W. Brown, K.J. Miller (Eds.), *Biaxial and Multiaxial Fatigue*, EGF 3, Mechanical Engineering Publications, London, 479-496 (1989).
- [4] B.R.You, S.B. Lee, A critical review on multiaxial fatigue assessments of metals, *Int. J. Fatigue* 18 (4), 235-244 (1996).
- [5] A. Bernasconi, I.V. Papadopoulos, Efficiency of algorithms for shear stress amplitude calculation in critical plane class fatigue criteria, *Computational Materials Science*, Vol. 34, N.4 (2005).
- [6] Susmel L. A simple and efficient numerical algorithm to determine the orientation of the critical plane in multiaxial fatigue problems. *Int J Fatigue*, 32, 1875–83 (2010).
- [7] I.V. Papadopoulos, Critical plane approaches in high-cycle fatigue: on the definition of the amplitude and mean value of the shear stress acting on the critical plane, *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 21, 269-285 (1998).
- [8] K. Dang Van, A. Le Douaron, H.P. Lieurade, Multiaxial fatigue limit: a new approach, *Advances in Fracture Research, Sixth International Conference on Fracture*, New Dehli, 1879-1885 (1984).
- [9] Papadopoulos IV. A new criterion of fatigue strength for out-of phase bending and torsion of hard metals. *Int J Fatigue*, 16, 377–84 (1994).
- [10] B. Weber, B. Keunmeugne, J.C. Clement, J.L. Robert, Improvements of multiaxial fatigue criteria computation for a strong reduction of calculation duration, *Comp. Mater. Sci.*, 15, 381-399 (1999).
- [11] G. Petrucci, Un nuovo algoritmo per la determinazione dell'ampiezza della tensione tangenziale nei criteri di fatica basati sul piano critico, *Atti del XXXIX Convegno Nazionale*, 7-10 Settembre, Maratea (2010).
- [12] D. Elzinga, D.W. Hearn, Geometrical solutions for some minimax location problems, *Transport. Sci.*, 6, 96-104 (1972).
- [13] J.A. Araújo, A.P. Dantas, F.C. Castro, E.N. Mamiya, J.L.A. Ferreira, On the characterization of the critical plane with a simple and fast alternative measure of the shear stress amplitude in multiaxial fatigue, *International Journal of Fatigue*, 33, 1092–1100 (2011)
- [14] G. Petrucci, Improvements in the algorithms for the determination of the shear stress components in critical plane class fatigue criteria, *ICMFF9*, Parma (2010).