

# Attualità della *g*eometria descrittiva

a cura di *Laura Carlevaris*  
*Laura De Carlo*  
*Riccardo Migliari*

**Strumenti**  
del Dottorato di Ricerca in Scienze della Rappresentazione e del Rilievo  
SAPIENZA Università di Roma – Dipartimento di Storia, Disegno e Restauro dell'Architettura

GANGEMI  EDITORE

©  
Proprietà letteraria riservata  
Gangemi Editore spa  
Piazza San Pantaleo 4, Roma  
www.gangemieditore.it

Nessuna parte di questa  
pubblicazione può essere  
memorizzata, fotocopiata o  
comunque riprodotta senza  
le dovute autorizzazioni.

*Le nostre edizioni sono disponibili  
in Italia e all'estero anche in  
versione ebook.*

*Our publications, both as books  
and ebooks, are available in Italy  
and abroad.*

ISBN 978-88-492-2305-7

*In copertina:*

Riccardo Migliari, rielaborazione digitale del problema 414,  
da Frère Gabriel Marie, *La Géométrie descriptive*, II vol., Esercizi

## PARTE PRIMA

### *La Geometria descrittiva analogica*

- La prospettiva: una conversazione  
su questioni solo apparentemente banali 99  
*Riccardo Migliari*
- L'origine della prospettiva tra scienza  
e magia 143  
*Maria Teresa Bartoli*
- La prospettiva sperimentale:  
Canaletto e la camera ottica 153  
*Dario Maran*
- Geometria del disegno - prospettiva  
su quadro reale 165  
*Michele Inzerillo*
- La rappresentazione  
in doppia proiezione ortogonale:  
forma di Monge e forma tecnica 189  
*Marco Fasolo*
- La rappresentazione quotata  
tra storia e prospettive 201  
*Laura Carlevaris*
- La prospettiva parallela come metodo:  
una visione storica 229  
*Laura De Carlo*
- Assonometria diretta 249  
*Laura Inzerillo*

## PARTE SECONDA

### *La Geometria descrittiva digitale*

- La logica delle forme 267  
*Roberto Ciarloni*
- La teoria delle ombre e del chiaroscuro  
nella rappresentazione informatica 283  
*Graziano Mario Valenti*
- I poliedri e le tecniche di tassellazione  
delle superfici continue: un nuovo punto  
di incontro 297  
*Leonardo Baglioni*
- Il cono, i suoi assi, le sue sezioni piane,  
da Apollonio alla rappresentazione matematica 315  
*Marta Salvatore*
- L'iperboloide ellittico  
per tre rette sghembe 325  
*Federico Fallavollita*
- Costruzione omologica  
e rappresentazione digitale  
di una sezione conica 335  
*Francesco Di Paola*

# Assonometria diretta

Laura Inzerillo

Presso la cattedra di Fondamenti e Applicazioni di Geometria Descrittiva della Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi di Palermo, grazie ai contributi del gruppo di studiosi guidati dal prof. Michele Inzerillo, si sono consolidate metodologie particolari e che potrebbero essere definite innovative per quanto riguarda le procedure del rappresentare direttamente in assonometria ortogonale.

La proiezione su un quadro piano,  $\pi$ , da un punto improprio ortogonale ad esso, di una terna triortogonale  $x, y, z$ , di origine  $O$ , liberamente disposta nello spazio, purché nessuno degli assi risulti ortogonale a  $\pi$ , è una terna  $x', y', z'$ , di origine  $O'$ . Solo per comodità di lettura, si preferisce disporre  $z'$  in direzione verticale; beninteso, appare verticale  $z'$ , proiezione di  $z$  e traccia su  $\pi$  del piano proiettante  $\beta$  contenente  $z'$  e l'asse  $z$ , che, in effetti, rispetto a  $\pi$  è obliquo: l'angolo compreso tra  $z$  e  $z'$  e appartenente a  $\pi$  assume un valore che sarà noto fra breve.

Distinguiamo gli angoli fra gli assi spaziali, tutti retti, da quelli fra le proiezioni degli assi, i quali, liberamente, possono essere uguali fra loro e di ampiezza pari a  $120^\circ$ , oppure solo due uguali fra loro, o tutti e tre diversi a seconda dell'inclinazione che la terna reale assume rispetto a  $\pi$ . Consideriamo il piano definito dagli assi reali  $xy$ ; se la sua giacitura fosse la stessa di  $\pi$ , l'asse  $z$  risulterebbe ortogonale al quadro, l'angolo retto resterebbe retto e le quote parallele a  $z$ , ridotte, nella proiezione, a punti, non sarebbero percepite, incidendo sulla lettura della proiezione. Se la giacitura  $xy$  fosse ortogonale a  $\pi$ , le dimensioni parallele all'asse  $z$  si proietterebbero in vera grandezza, ma le figure del piano in esame risulterebbero solo dei segmenti, dunque, illeggibili. Si tratta di due giaciture da escludere, non perché l'oggetto tridimensionale, in proiezione su  $\pi$ , perde l'apparente tridimensionalità; questa proiezione resterebbe tridimensionale. La proiezione di Monge è sempre tridimensionale, più o meno percepibile, secondo come l'oggetto è disposto rispetto al piano su cui si proietta; l'apparente volumetria è solamente legata a  $\pi$ , anzi, al punto da cui si proietta su  $\pi$  ed è indipendente dalla terna scelta. A terna ferma, se si muove l'oggetto da rappresentare, se ne ottiene un'immagine diversa, più o meno adeguata a suggerire la realtà della forma apparente delle sole parti esposte all'osservatore improprio. Se il piano  $xy$  è obliquo rispetto a  $\pi$ , nel passare dalla giacitura parallela a quella proiettante, un suo segmento di massima pendenza rispetto a  $\pi$  si accorcia sempre più e l'angolo retto fra gli assi reali,  $x$  e  $y$ , appare come angolo fra le proiezioni,  $x'$  e  $y'$ , sempre più ampio.

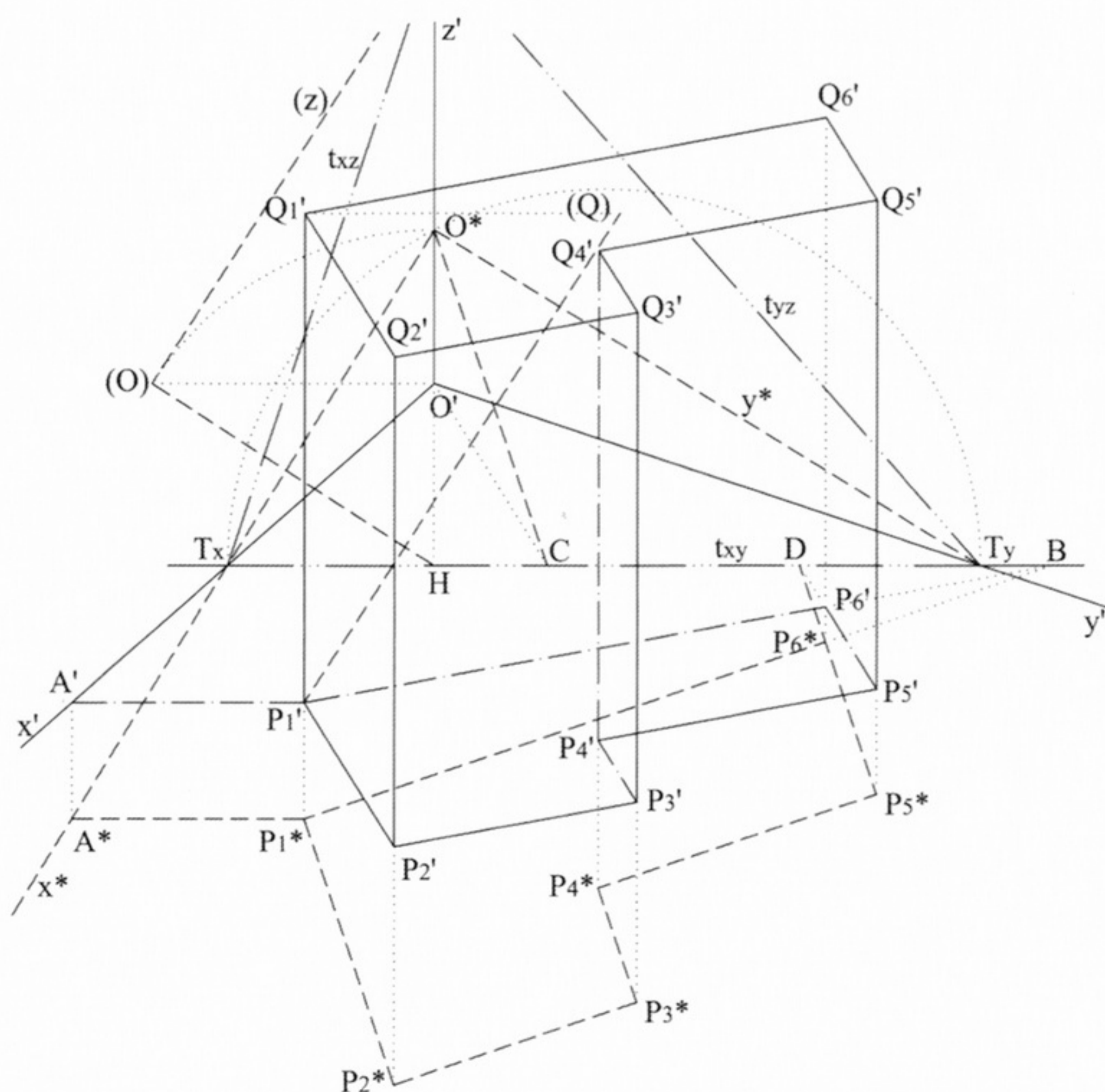
Nel contempo, la proiezione di un segmento parallelo a  $z$  risulta passare da un accorciamento massimo a quello nullo; sta a noi scegliere un angolo rispondente all'esigenza del raffigurare.

1/ Proiezioni degli assi, tracce degli assi e tracce dei piani coordinati sul quadro. Ribaltamento di uno dei tre piani coordinati. Rapporto omologico.

Quello che si è detto sopra richiede una seria riflessione; è indispensabile pensare, capire, ragionare, immaginare, e alla fine rappresentare correttamente e consapevolmente, senza falsi e pregiudizievole imposizioni di valori prefissati e posizioni, dai risultati non previsti, non voluti, non controllabili e non gestibili. E in mancanza?

### Rappresentare un volume poliedrico

Siano dati  $O', x', y'$  e  $z'$  (fig. 1); i tre assi spaziali,  $x, y$  e  $z$ , inclinati rispetto a  $\pi$ , lo intersecano in tre punti che chiamiamo "tracce",  $T_x, T_y, T_z$ , non allineati, non coincidenti. I tre piani coordinati reali definiti dalle coppie di assi  $xy, yz, zx$ , tutti e tre inclinati rispetto a  $\pi$ , intersecano il quadro in tre rette, ciascuna delle quali contiene due delle tracce degli assi; queste rette sono tracce dei piani coordinati e le chiamiamo  $t_{xy}, t_{yz}, t_{zx}$  e non formano fascio, né proprio, né improprio. Se immaginiamo un centro di proiezione proprio, si ha che se la distanza di  $O$  da  $\pi$  diminuisce, il predetto triangolo si riduce fino ad azzerarsi in un punto  $O$  che coincide con  $O'$ , se  $\pi$  contiene  $O$ ; la distanza  $OO'$  si inverte se  $O$  passa di lato, avanti o dietro, rispetto a  $\pi$ . A proposito, è conveniente che  $O$  sia scelto davanti o dietro a  $\pi$ ? Qualcuno, richiamandosi al personale principio del vedere, piuttosto che del pensare,



pone le tre dita assimilate agli assi della terna reale davanti o sopra al piano e non dietro o sotto, perché questo gli consente di vedere per capire e far capire; ma è proprio tanto difficile pensare e far pensare?

La determinazione della direzione di una delle tracce, per esempio della  $t_{xy}$ , è accertabile; basta ricordarsi della geometria elementare e dei suoi concetti. Il piano proiettante l'asse  $z$  contiene la retta proiettante  $OO'$  ortogonale a  $\pi$ , e contiene  $z$  ortogonale a  $xy$ ; un piano che contenga una retta ortogonale a un altro piano è ortogonale ad esso; un piano che contiene l'ortogonale a un secondo e a un terzo piano, è ortogonale a entrambi e alla loro intersezione; il piano proiettante  $z$  in  $z'$  è ortogonale a  $xy$ , a  $\pi$  e alla loro intersezione, la  $t_{xy}$ . Inoltre, se una retta è ortogonale a un piano, è ortogonale a tutte le rette di quel piano; dunque la  $t_{xy}$  è ortogonale a tutte le rette del piano che proietta  $z$  in  $z'$ , perciò deve essere ortogonale a  $z'$ . Si può, quindi, considerare una retta  $t_{xy}$  ortogonale a  $z'$  e assumerla come traccia di  $xy$  su  $\pi$ , liberamente, indicando con  $T_x$  e  $T_y$  le sue intersezioni con  $x$  e  $y'$ ; ciò vale anche per la  $t_{yz}$  che contiene la  $T_y$  ed è ortogonale ad  $x$ , e per la  $t_{zx}$  che contiene la  $T_x$  ed è ortogonale ad  $y$ ; le  $t_{zx}$  e  $t_{yz}$  incidono  $z'$  in  $T_z$ . Le rette  $x, y', z'$  sono disegnate, nella figura, con linea continua; le tracce con una linea tratto e tre punti; resta da capire se rispetto alla terna  $x, y, z$ , il piano  $\pi$  può essere definito da una traccia  $t_{xy}$  a piacere, senza che ciò sia arbitrario. Se la  $t_{xy}$  si avvicina ad  $O'$ , il piano  $\pi$  trasla avvicinandosi ad  $O$ ; l'immagine dell'oggetto reale è legata alle parti in vista dal centro di proiezione improprio e su  $\pi$  essa non cambia; tutto è stabilito fra il centro e l'oggetto, e finché non muta la loro posizione relativa, la traslazione di  $\pi$  non influisce sulla proiezione. La  $t_{xy}$  appartiene a  $\pi$  e a  $xy$ ; l'intersezione fra due piani è unica; la traccia è una retta unita, è reale e unitamente proiezione, unica retta unita di  $xy$ ; la dimensione  $T_x T_y$  è reale.

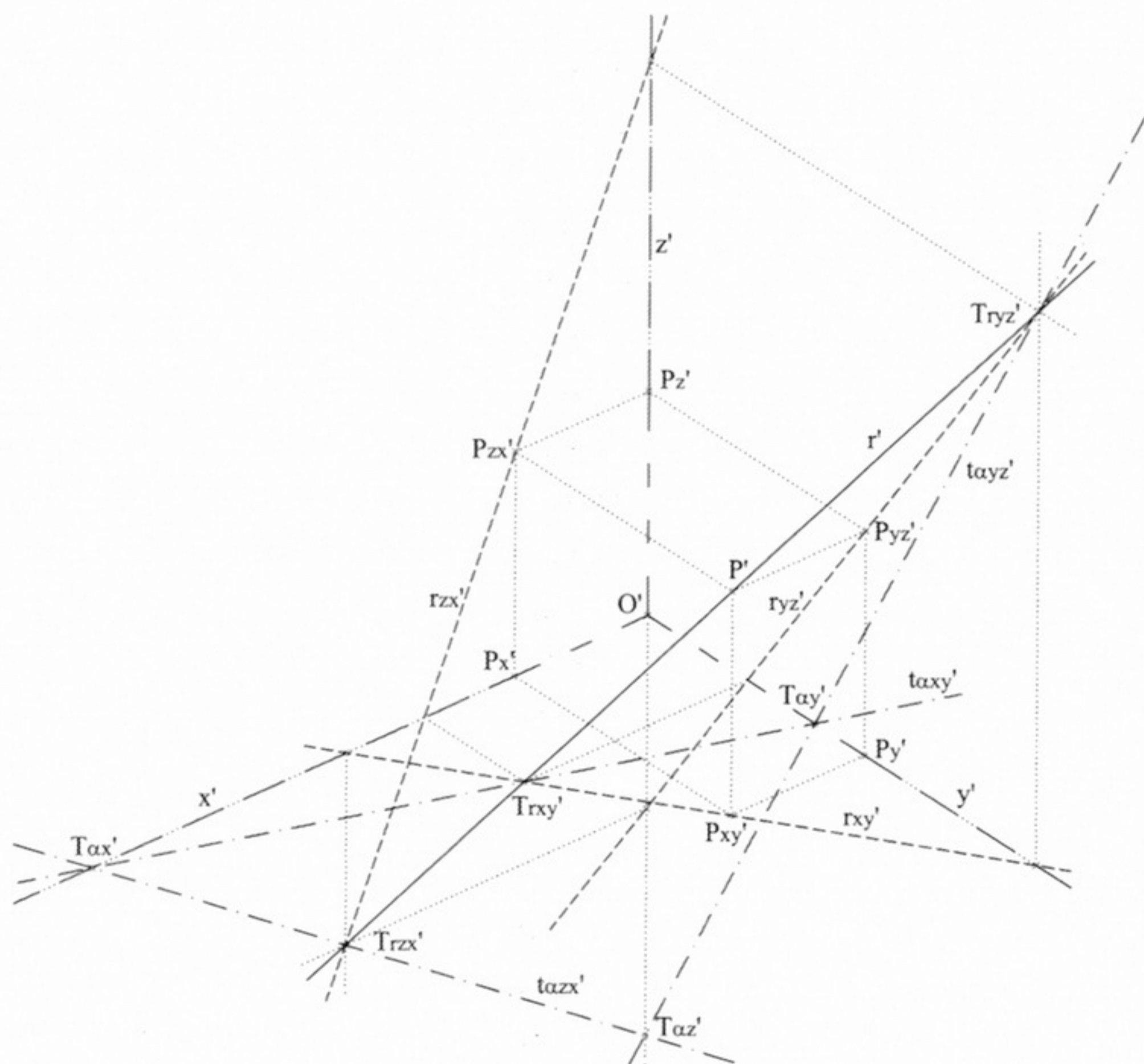
Il triangolo  $T_x O T_y$  è proiezione di un triangolo con vertice retto in  $O$  e ipotenusa  $T_x T_y$ ; un triangolo rettangolo è inscritto in una semicirconferenza avente come diametro l'ipotenusa. Se pensiamo di ruotare il triangolo spaziale intorno all'ipotenusa fino ad adagiarlo su  $\pi$ , cioè se lo si ribalta, l'ipotenusa resta fissa mentre  $O$  ruota sul piano proiettante  $z$  in  $z'$ , restandovi sopra; dunque, si disegna la semicirconferenza punteggiata, che intercetta  $z'$  in  $O^*$ . I punti della traccia sono tutti punti uniti, mentre  $O$  nel ribaltamento descritto si porta in  $O^*$ ; in figura si stabilisce la corrispondenza che a  $O'$  fa corrispondere  $O^*$  e che alla  $x' \equiv T_x O'$  fa corrispondere  $x^* \equiv T_x O^*$ ; questo succede fra qualsiasi retta che contiene  $O'$  e la corrispondente ribaltata che contiene  $O^*$ , le quali devono incontrarsi sulla  $t_{xy}$ . Scelto un punto  $A'$  su  $x'$  si ottiene  $A^*$  su  $x^*$  e viceversa; osserviamo che punti corrispondenti sono sempre allineati secondo la  $O'O^*$ , direzione del centro di proiezione, e che rette corrispondenti contengono punti corrispondenti e si intersecano sulla ret-

ta unita. Tale corrispondenza è una omologia, la  $t_{xy}$  è l'asse di omologia,  $O^*$  è omologo di  $O'$ ,  $x'$  è omologo di  $x^*$ , l'allineamento  $O'O^*$  indica il centro dell'omologia, che è improprio e risulta, in questo caso, ortogonale all'asse; si tratta di una omologia affine ortogonale. Si voglia ricavare la proiezione della  $P_1^*, P_2^*, P_3^*, P_4^*, P_5^*, P_6^*$ ; poiché a un punto all'infinito di  $x^*y^*$  corrisponde un punto all'infinito di  $x'y'$ , a rette fra loro parallele corrispondono rette diversamente dirette ma ancora parallele fra loro; a una retta parallela all'asse dell'omologia corrisponde una retta ancora parallela all'asse, etc. Ciò può spiegare sia l'operazione  $P_1^*A^*A'P_1'$ , sia la  $P_1^*P_6^*BP_6'P_1'$ , sia la  $P_5^*P_6^*DP_6'P_5'$  ricavabile anche dalla parallela  $O^*CO'$ , sia la  $P_1'P_2'$  parallela a  $P_6'P_5'$ . È bene riflettere sui risultati, immaginando di spostare o ruotare la figura data; pensiamo di scambiare i dati e quindi realizzare il raddrizzamento, ovvero la restituzione, se partiamo dalla proiezione per ricavare la vera forma e grandezza. I segmenti paralleli all'asse  $z$  a partire dalle proiezioni su  $x'y'$  dei punti appartenenti a  $xy$  sono le relative quote dei punti dello spazio, ovvero la terza coordinata dei punti riferiti alla terna reale e si accorciano proiettandoli sulla direzione di  $z'$  secondo  $(O)O'$ . Infatti, la distanza di  $O$  da  $\pi$ , che in proiezione ortogonale è ridotta in  $O'$ , può evidenziarsi ribaltando su  $\pi$  il piano proiettante  $z$  in  $z'$ , ruotandolo intorno alla propria traccia  $z'$ ; ci serviamo della vera misura di  $HO$ , distanza di  $O$  dalla  $t_{xy}$ . Questa è stata ricavata in  $HO^*$ , quando si è operato il ribaltamento di  $xy$  su  $\pi$ ; allora, considero l'arco di centro  $H$  e raggio  $HO^*$  fino ad intersecare in  $(O)$  la retta condotta per  $O'$ , ortogonale alla  $z'$ ; la direzione  $H(O)$  rappresenta il ribaltamento di quella della retta di massima pendenza di  $xy$  rispetto a  $\pi$ , corrispondente in proiezione all'ortogonale alla  $t_{xy}$ . L'asse  $z$  è ortogonale a  $xy$  e a tutte le sue rette, anche ad  $HO$ , per cui la  $(z)$  ribaltata di  $z$  risulta ortogonale alla  $H(O)$  in  $(O)$ ; il risultato è che, per accorciare un segmento parallelo a  $z$ , la cui proiezione appare parallela a  $z'$ , basta disporlo parallelo alla  $(z)$  e proiettarlo secondo  $(O)O'$ . Per tale operazione è preferibile appoggiarsi direttamente alla proiezione ortogonale su  $\pi$  della proiezione ortogonale del punto su  $xy$ ; per esempio, per ottenere la proiezione  $Q_1'$  del punto  $Q_1$ , ovvero la lunghezza accorciata  $P_1'Q_1'$  della quota  $P_1Q_1$ , si riporta da  $P_1'$  secondo  $(z)$  la misura reale  $P_1'(Q)$  e la si proietta secondo  $O'(O)$  fino alla verticale condotta per  $P_1'$ . Se il volume prismatico considerato presenta una base superiore parallela a quella appartenente ad  $xy$ , se ne trova la proiezione per traslazione secondo  $z'$  e l'immagine voluta è compiuta.

### *Disegno e interpretazione degli elementi. Simbologia*

Dati  $O', x', y', z'$  e un punto  $P$  dello spazio, la definizione della sua posizione associata alla terna richiede due sue proiezioni (fig. 2); non basta la proiezione  $P'$ , occorre ancora la proiezione assonometrica della

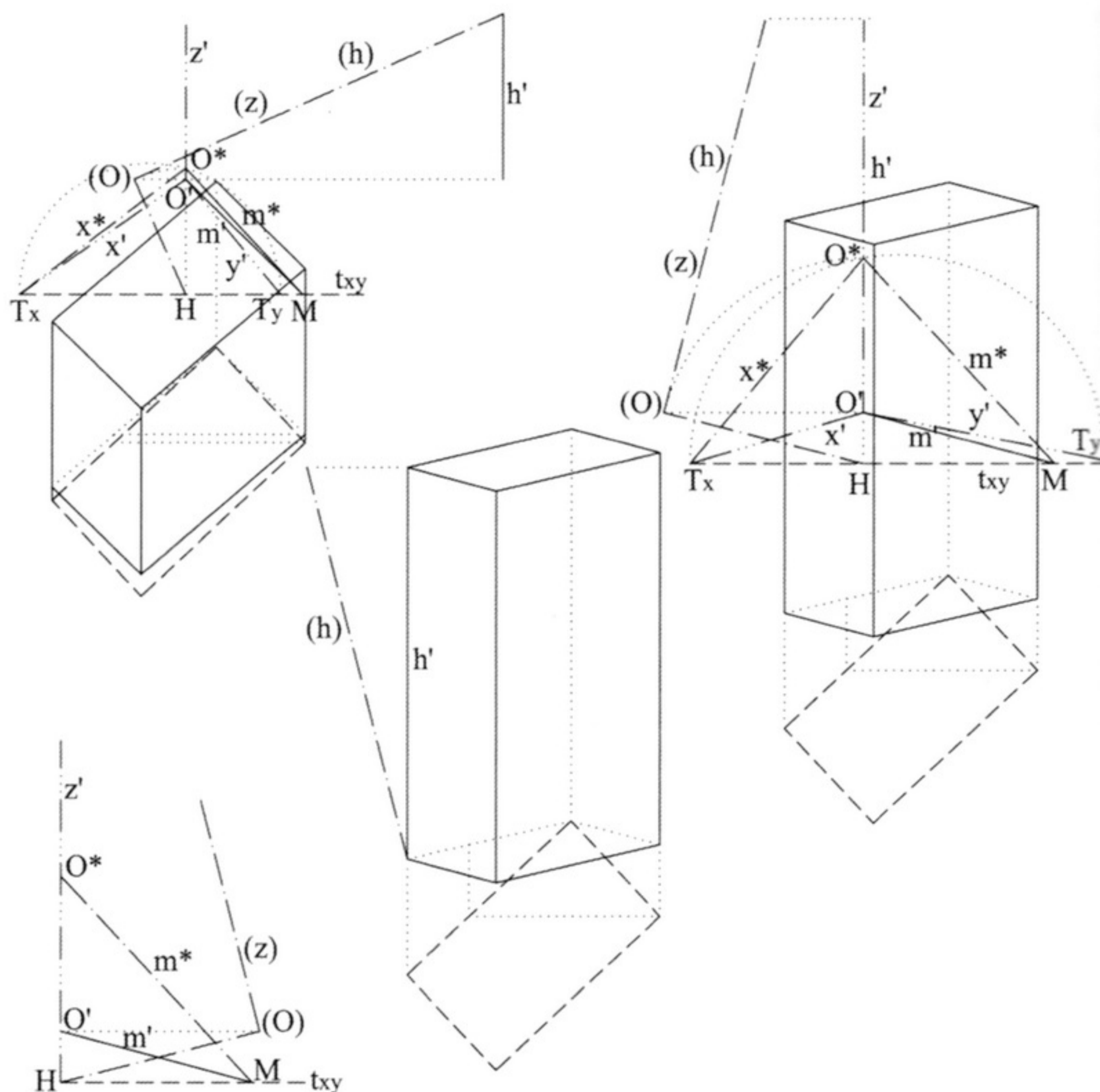
2/ proiezione di un punto  $P$  e di una retta  $r$  che lo contiene sui piani coordinati  $xy, xz, yz$



proiezione ortogonale di  $P$  su uno dei piani coordinati. Anzi, si può dire che di  $P$ , generalmente, si assegnano le tre coordinate  $x_P, y_P, z_P$  delle quali si ricavano i relativi accorciamenti,  $x_P', y_P', z_P'$ . Nella geometria del disegno il punto è definito disegnando, generalmente,  $P'$  e  $P_{xy}'$ , da cui, se serve, si ricavano  $P_{yz}'$  e  $P_{zx}'$ . Certamente disegnare un punto o un punto appartenente a una sfera è molto diverso. In figura 2 vediamo il punto  $P$  e le sue proiezioni sui piani coordinati, nonché le tre coordinate sugli assi; nel loro insieme spaziale, questi punti sono vertici di un parallelepipedo. Notiamo le proiezioni della retta  $r$  che contiene il punto  $P$  e delle sue proiezioni sui tre piani; osserviamo attentamente sull'immagine assonometrica le tracce e le proiezioni, le loro corrispondenze e le appartenenze, le relazioni con gli assi, le loro direzioni, pensando anche l'esposizione ai nostri occhi, nello spazio reale del riferimento triortogonale. Se il punto appartiene alla retta e la retta appartiene al piano, il punto appartiene al piano; del piano sono date anche le tracce, almeno due delle tre, osservando che le tracce sui piani coordinati adiacenti e che, perciò, condividono un asse, si intersecano sempre in un punto di quell'asse. L'appartenenza della retta al piano è espressa dall'appartenenza di ciascuna traccia della retta alla corrispondente traccia del piano; l'appartenenza del punto al piano va verificata tramite una delle infinite rette contenenti il punto, cui sia imposta l'apparte-



3/ Rapporto omologico tra altezze e piante. Vista urbanistica e vista panoramica.



nenza al piano. Qualche nota sulla simbologia: si può volere precisare che il punto  $P$  appartiene alla retta  $r$ ; in tal caso il simbolo diventa  $P_r$ ; si distinguono le proiezioni assonometriche delle proiezioni ortogonali in funzione del piano coordinato cui appartengono; per esempio,  $P_{zx}'$  indica che la proiezione della proiezione su  $zx$  di  $P$  appartiene ad  $\alpha$ ; la  $T_{rxy}'$  è la proiezione, lo dice l'apice, del punto traccia, lo dice il simbolo  $T$ , maiuscolo per il punto, della retta  $r$  sul piano coordinato  $xy$ .

*Il rapporto omologico sostituisce le proiezioni  $x', y'$*

Si ripete il procedimento, già esposto, per costruire l'assonometria ortogonale diretta di un parallelepipedo di cui è assegnata la base rettangolare ribaltata e disegnata con linea tratteggiata scegliendo il valore dell'angolo in  $O'$  fra  $x'$  e  $y'$  una volta poco più ampio di un angolo retto (disegno di sinistra) e una volta poco meno ampio di un angolo piatto (fig. 3, disegno a destra). Gli effetti sono evidenziati nel primo caso da una quasi invertita modifica del rettangolo di base (si osservi la differenza tra il rettangolo tratteggiato, che rappresenta la vera forma, e la base del parallelepipedo).

4/ Assonometria ortogonale diretta di un complesso di edifici. Vista urbanistica e vista panoramica.

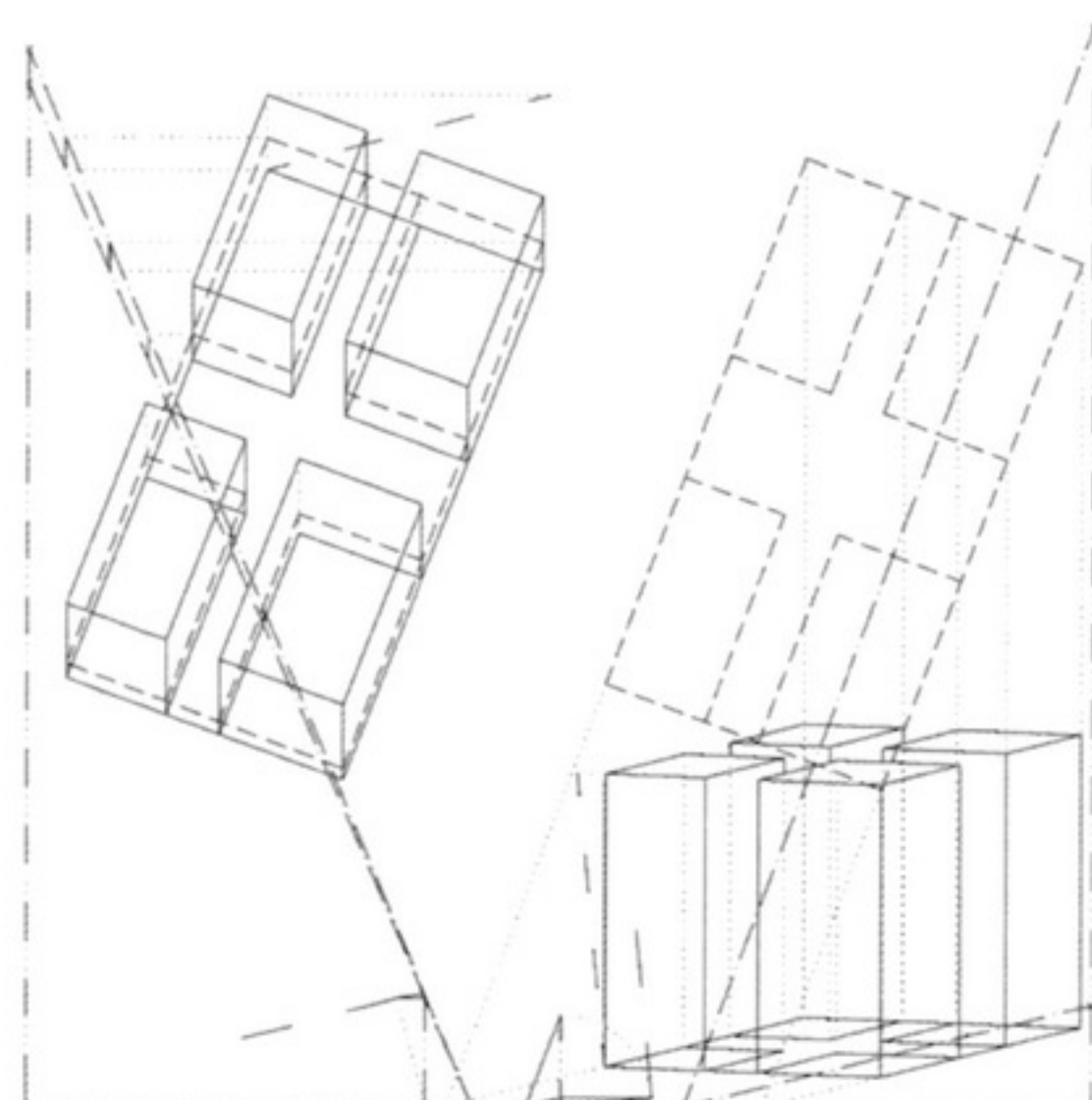
lepipedo in assonometria) e un notevole accorciamento dell'altezza – si veda la differenza tra  $(h)$  e  $h'$  – e nel secondo caso da una notevole compressione del rettangolo di base che, in una vista di rilevante scorcio, diventa un parallelogramma e da un irrilevante accorciamento dell'altezza  $(h)$ . Scelti sulla verticale i punti  $H, O', O^*$  e considerata per  $H$  l'orizzontale  $t_{xy}$ , asse di omologia, con poche linee si ottiene l'assonometria del precedente volume; l'arco di centro  $H$  e raggio  $HO^*$  determina sull'orizzontale condotta per  $O'$  il punto  $(O)$ ; sappiamo che  $O'(O)$  è la distanza di  $O$  da  $\pi$  e che la scelta di tale distanza è inefficace sui risultati.

Assegnato il rettangolo di base, si conduce per  $O^*$  la parallela al lato corto incidendo l'asse di omologia  $t_{xy}$  in  $M$ ; la proiezione del lato corto è parallela alla  $MO'$ ; si può assumere un vertice come punto unito del nuovo asse di omologia. Traslando questa coppia e incidendo il lato lungo, di tale punto si ha subito l'omologo; avendo due punti si traccia la proiezione del lato fino a intersecare la verticale del terzo vertice; le parallele al primo e al secondo lato della proiezione completano il parallelogramma di base. Per un vertice di questo si considera la parallela alla  $(z)$ , vi si riporta l'altezza  $(h)$  e si proietta orizzontalmente individuando l'altezza  $h'$ ; per traslazione della base si ottiene il parallelepipedo.

#### *Assonometria ortogonale diretta a effetti percettivi urbanistici o panoramici*

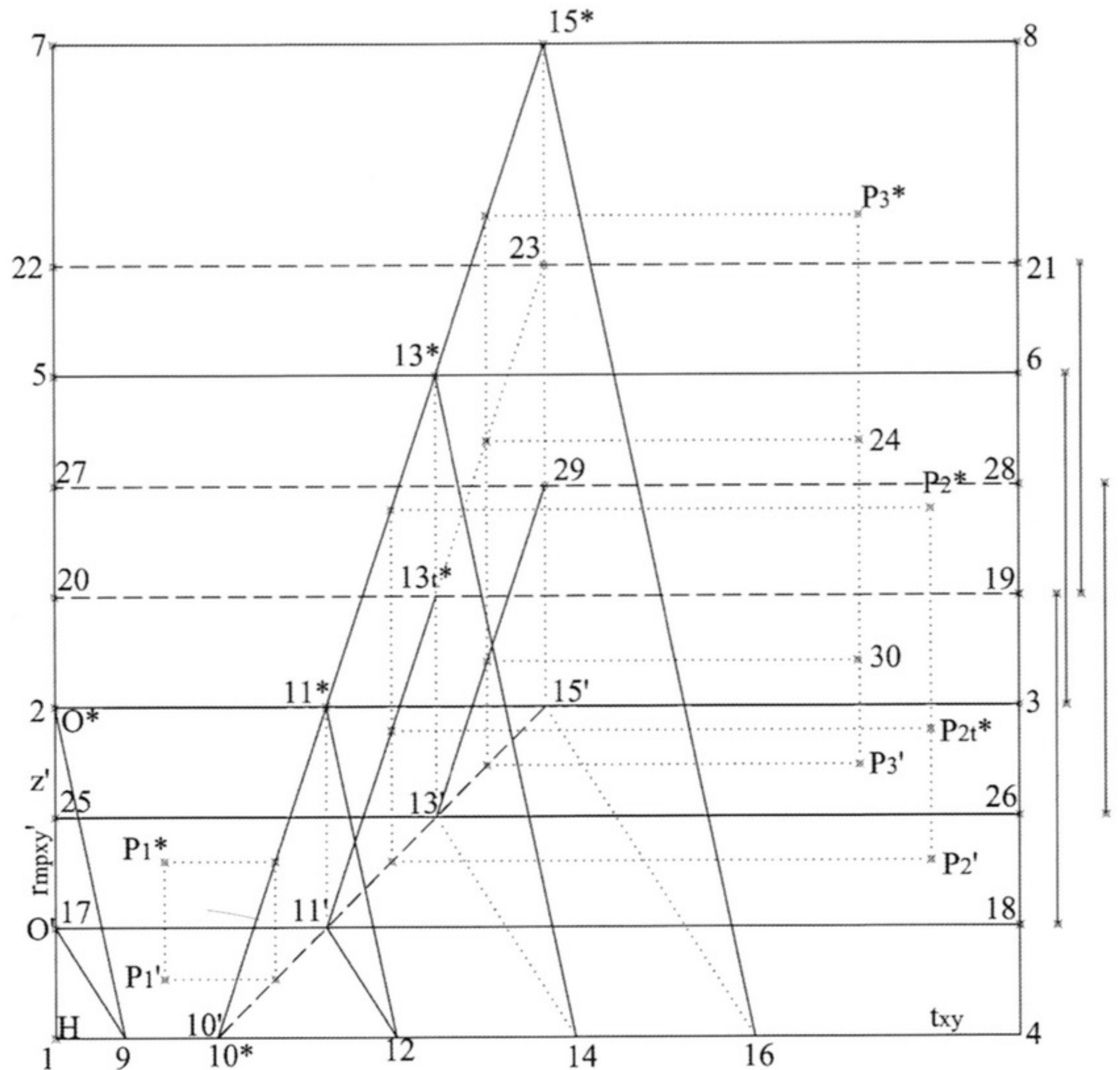
Nella prassi semplificata è opportuno effettuare un confronto degli effetti sui risultati, usando come riferimento non più le proiezioni degli assi, bensì solo il rapporto omologico  $HO'/HO^*$ , illustrando due casi che presentano situazioni proiettive differenti; nel primo caso si stabilisce un rapporto grafico tra le due lunghezze pressappoco pari a uno e nel secondo di valore prossimo allo zero (fig. 4). La prima scelta, a sinistra, ci assicura una maggiore chiarezza in una visione più controllabile, dall'alto, quasi in verticale che, tuttavia sacrifica le quote. L'impostazione scelta è quindi da considerarsi come assonometria ortogonale "urbanistica".

La seconda scelta, a destra, ci consente di avere un profilo spiccatamente panoramico, con scarsa, se non impossibile, lettura delle tipologie planimetriche; viceversa, possiamo prendere atto di valori accettabilmente orientati ai veri rapporti per le altezze e per le loro differenze. L'offerta di immagini della cortina del nucleo abitativo di primo piano, in taluni casi, è certamente significativa; discende soprattutto dal piccolo rapporto omologico assunto se, con la stessa metodologia, vediamo accentuati determinati valori panoramici, per cui non sembra ingiustificato chiamare tale rappresentazione assonometria ortogonale "panoramica".



**Assonometria ortogonale frazionata**

Si dispone di un campo grafico pari a 1-2-3-4 (fig. 5); la 1-4 sia la  $t_{xy}$ ; per rappresentare elementi geometrici appartenenti a  $xy$  dobbiamo stabilire un rapporto omologico  $HO'O^*$  che consenta di ricavare la proiezione su  $\pi$  degli elementi di  $xy$ , assunti in forma ribaltata. Il campo di  $xy$  ribaltato 1-7-8-4 che si vuole rappresentare ha la stessa larghezza, 1-4, di quello disponibile, mentre, per l'altra dimensione, cioè per la profondità, notiamo che 1-7 è 3 volte 1-2: ciò implica che  $HO'$  deve essere un terzo di  $HO^*$ . Conseguentemente, nel senso della profondità, ovvero della retta  $r_{mpxy}$  di massima pendenza di  $xy$  rispetto a  $\pi$ , il primo terzo del campo avrà la proiezione contenuta nel campo grafico al primo terzo, in basso. Consideriamo le rette omologhe  $9-O^*$  e  $9-O'$  e una retta  $10^*-11^*-13^*-15^*$  che attraversa tutto il campo ribaltato 1-7-8-4; la retta omologa, grazie alle  $9-O^*$  e  $9-O'$  applicate in  $11^*-12-11'$ , e successivamente in  $13^*-14-13'$  e  $15^*-16-15'$ , la proiezione della  $10^*-15^*$  si ritrova nel campo grafico in  $10'-11'-13'-15'$ . Notiamo che sulla  $t_{xy}$  la suddivisione in parti di profondità uguali comporta l'uguaglianza dei tratti  $10'-12$ ,  $12-14$ ,  $14-16$ ; ai punti  $P_1^*, P_2^*, P_3^*$ , appartenenti alle strisce, corrispondono, grazie all'appoggio sulla  $10^*-15^*$ , i punti in proiezione



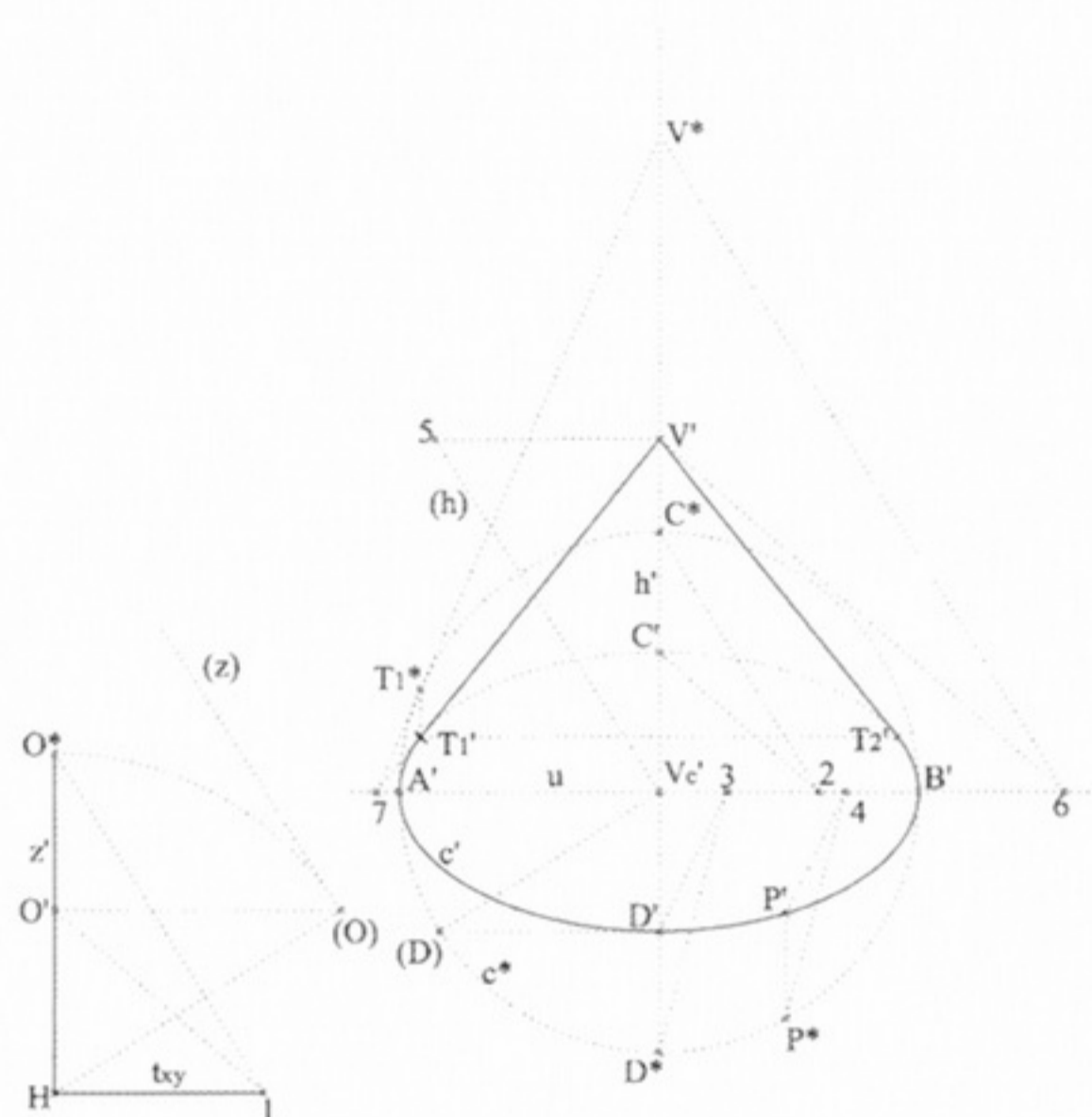
$P_1', P_2', P_3'$ , sulla  $10'-15'$ , nelle corrispondenti strisce. Se si lavora su carta trasparente, è possibile traslare uno dei due campi in modo che la  $2-3$  si porti sulla  $17-18$ ; conseguono gli spostamenti della  $5-13^*-6$  in  $20-13_i^* 19$ , della  $13^*-11^*$  in  $13_i^*-11'$ , del  $P_2^*$  in  $P_{2t}^*$ ; la coppia di appoggio è diventata  $13_i^*-11'$  e sempre la  $11'-15'$ ; da  $P_{2t}^*$  si perviene sempre a  $P_2'$ .

Il campo  $2-3-6-5$  nella nuova posizione  $17-18-19-20$  va oltre il bordo del campo grafico per la zona  $2-3-19-20$ ; la striscia  $5-6-8-7$  si porta in  $20-19-21-22$ ; il  $15^*$  trasla in  $23$  e  $P_3^*$  in  $24$ . I punti, ancora da proiettare, della  $2-3$  del campo  $2-3-6-5$ , nella traslazione in  $17-18-19-20$ , vanno a coincidere con quelli, già proiezioni, della  $17-18$  del campo  $1-4-18-17$ . Nella traslazione operata il campo  $5-6-8-7$  è trascinato in  $20-19-21-22$ , il  $15^*$  va in  $23$ ,  $P_3^*$  in  $24$ ; la  $15^*-13^*$  va in  $23-13_i^*$  in linea con la  $13_i^*-11'$ ; la  $11'-23$  è parallela alla  $15^*-10'$ ; per ogni spostamento la relativa omologa resta sempre la  $10'-15'$ ; il punto  $11'$  diventa unito e l'asse di omologia non è più  $t_{xy}$ , bensì  $17-18$ ; per la traslazione della terza striscia, l'asse di omologia si sposta in  $25-26$ . Proiettata in  $17-18-26-25$  la seconda striscia  $2-3-6-5$ , dopo averla traslata in  $17-18-19-20$ , trasliamo la  $5-6-8-7$  che si trova in  $20-19-21-22$  portandola in  $25-26-28-27$ . Il  $15^*$  va in  $29$ , il  $13^*-15^*$  in  $29-13'$ , sempre parallela alla  $10'-15^*$ ; il punto  $P_3^*$  che era in  $24$  lo ritroviamo in  $30$ ; appoggiandosi alla  $29-13'$ , dal  $30$  si ricava sempre la proiezione  $P_3'$ . Il campo traslato sopravanza quello disponibile della quantità  $2-27$  pari a due terzi della profondità di una striscia; è possibile evitare tale inconveniente frazionando le strisce non in parti uguali ma in modo che per esempio la seconda sia ampia in profondità non di  $17-20$  ma di  $17-2$ ; le successive crescono di numero, fino ad un valore di sopravanzo compatibile. A proposito, ottenuta la proiezione dei punti del campo  $1-4-8-7$ , resta da riportare, accorciate secondo ( $z$ ) le quote dei punti; prevedibilmente esse richiedono al di sopra della  $2-3$  uno spazio di rappresentazione riservato ai rilievi rispetto ad  $xy$ . Ciò può essere gestito con calcoli preventivi degli spazi franchi rispetto ai quali arretrare la  $2-3$  di occupazione planimetrica e in funzione di questa riduzione il rapporto di omologia sarà commisurato a rappresentare l'intera e invariata profondità di campo  $1-7$ .

### **Assonometria della circonferenza e del cono**

È data su  $z'$ , proiezione della verticale  $z$ , la terna di punti, nell'ordine  $H$ ,  $O'$ ,  $O^*$ , con  $O'$  immancabilmente interno a  $HO^*$  (fig. 6); essa indica graficamente il rapporto omologico relativo alla traccia  $t_{xy}$  del piano orizzontale  $xy$ . L'arco di centro  $H$  e di raggio  $HO^*$  e l'orizzontale condotta per  $O'$  ricavano ( $O$ ); la è la distanza di  $O$  dalla  $t_{xy}$ ; nel ribaltamento su  $\pi$

6/ *Proiezione assonometrica di un cono retto circolare con base su  $xy$  ed altezza lungo  $z$ .*



del piano proiettante  $z$  in  $z'$ , il tratto  $HO$  della retta di massima pendenza di  $xy$  rispetto a  $\pi$ , condotta per il punto, si ritrova in  $H(O)$ . Quel tratto  $HO = HO^* = H(O)$  in proiezione è  $HO'$ ;  $HO$  in proiezione si accorcia e diventa  $HO'$ ; qualsiasi segmento parallelo ad  $HO$ , cioè di massima pendenza, in proiezione risulterà sempre ortogonale alla  $t_{xy}$ , sia nella realtà che in proiezione; disponendolo parallelo ad  $H(O)$  se ne ottiene la proiezione sulla verticale come avviene per  $H(O)$  in  $HO'$ , secondo  $O'(O)$ . Ortogonale ad  $H(O)$  si ritrova l'asse  $z$  in  $(z)$ , che in funzione analoga presiede al raccorciamento delle quote relative ai punti dello spazio rispetto alla giacitura orizzontale  $xy$ . Nell'omologia di asse  $t_{xy}$  e coppia di punti omologhi  $O', O^*$ , essendone  $O'-O^*$  la direzione del centro, le rette  $O^*-I$  e  $O'I$  sono rette omologhe.

Non essendo legati ai predetti dati, se non come elementi di riferimento, scegliamo liberamente il piano di imposta di un cono circolare retto, individuandolo con la retta  $u$  avente la stessa funzione della  $t_{xy}$ . La circonferenza  $c$  di base ha un solo diametro che si proietta in vera grandezza,  $A'V_cB'$  parallelo alla  $t_{xy}$ ; sia  $A'B'$  appartenente alla  $u$ ; tutti gli altri diametri si accorciano e la proiezione  $c'$  della circonferenza  $c$ , risulta una ellisse, il cui asse maggiore è  $A'B'$ ; il diametro che in proiezione diventa asse minore è quello di massima pendenza. Ribaltiamo su  $\pi$  la  $c$  in  $c^*$ ; considero  $C^*$ , la  $C^*-2$  parallela alla  $O^*-I$ , la corrispondente contiene il punto unito  $2$  e risulta parallela alla  $O'-I$ ; essa interseca la parallela alla  $O^*O'$  in  $C'$ ; l'asse minore è dato dalla  $C'V_cD'$ . L'estremo dell'asse minore può essere individuato anche con la  $V_c(D)$  parallela alla  $H(O)$  e la  $(D)D'$  parallela alla  $(O)O'$ , utilizzando la proprietà delle rette di massima pendenza esposta.

L'ellisse si ricava per punti; il computer la esprime immediatamente, essendone noti  $A', B', C'$ , estremi di assi; esistono tante vie risolutive della geometria elementare e fra queste l'omologia, definita dall'asse  $A'B'$ , dalla coppia  $C^*, C'$ , e dal centro improprio  $C^*C'$ , già usata.

Volendo ricavare  $P'$  da  $P^*$  si considera liberamente una coppia  $D^*-3$  e  $3-D'$ ; alla  $P^*-4$  parallela alla  $D^*-3$  corrisponde la parallela per il  $4$  alla  $3-D'$ , che sulla verticale per  $P^*$  intercetta  $P'$ . Stabilita la quota  $h$  del vertice  $V$  del cono rispetto al piano di base, cioè  $V_cV$ , si riporta in  $(h)=V_c'-5$  parallela alla  $(z)$  e si accorcia in  $V_c'V'$ ; da  $V'$  si tracciano le generatrici di contorno apparente tangenti l'ellisse di base nei punti  $T_1'$  e  $T_2'$ . Le tangenti  $V'T_1', V'T_2'$  possono essere ricavate per omologia; la  $V'-6$  è parallela alla  $O'-I$  e l'omologa  $6-V^*$  è parallela alla  $I-O^*$ ; da  $V^*$  si conducono le tangenti alla circonferenza,  $V^*T_1^*$  e  $V^*T_2^*$ ; gli omologhi dei punti  $T_1^*$  e  $T_2^*$  di tangenza sulla  $c^*$  sono i punti di tangenza  $T_1'$  e  $T_2'$  sulla ellisse  $c'$ ; si utilizza la simmetria ortogonale di asse  $V_c'V'$ . L'applicazione della polarità da  $V'$  all'ellisse determina la polare  $T_1'T_2'$ .

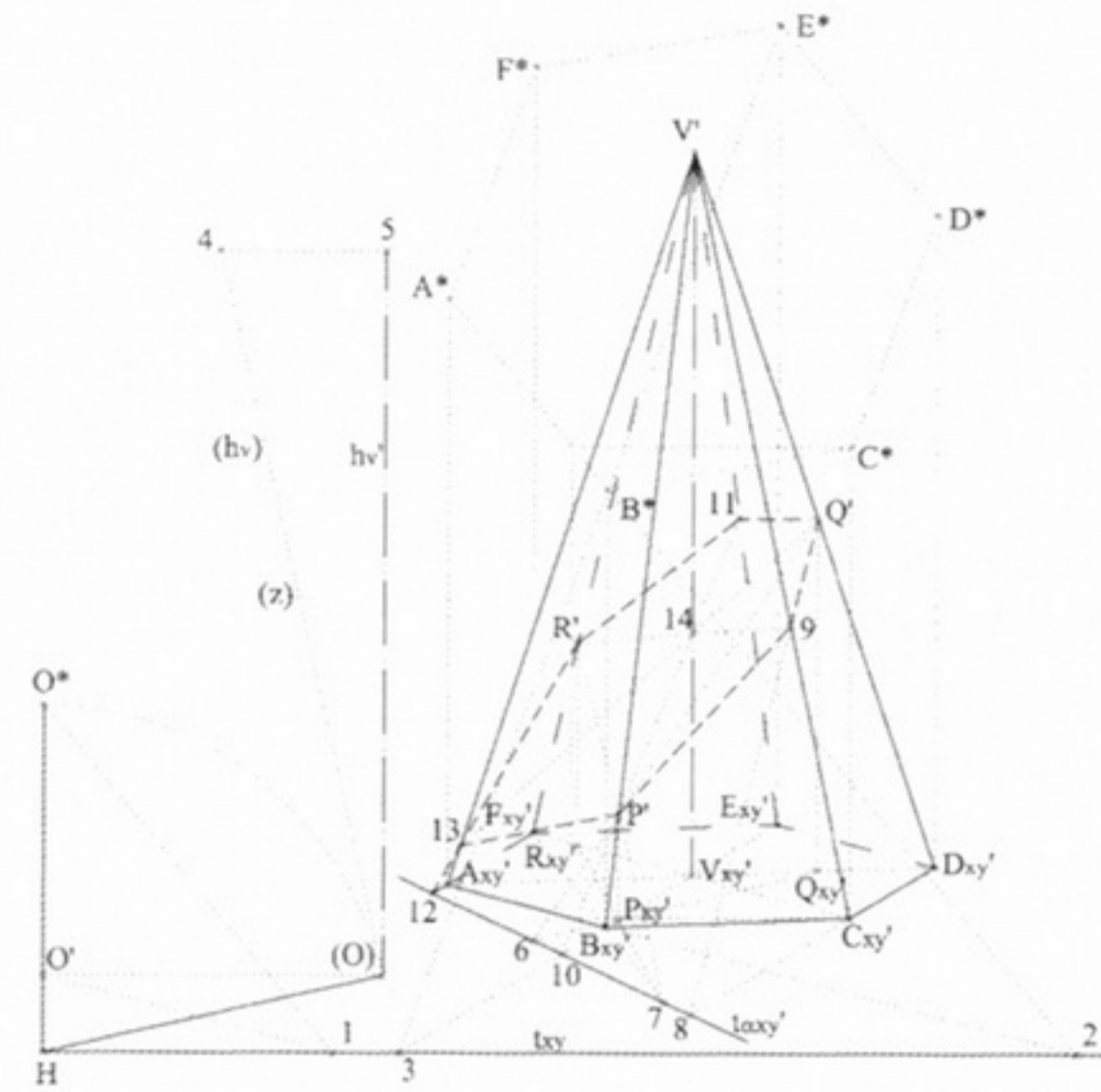
7/ Sezione tra una piramide retta a base esagonale su  $xy$  e un piano di cui sono dati tre punti.

Con l'omologia i punti di tangenza si ricavano con estrema precisione, prima di disegnare l'ellisse per punti;  $V^*$  è preciso, la tangenza sulla  $c^*$  è precisa,  $T_1'$  si ricava da  $T_1^*$  come  $P'$  da  $P^*$ , indipendentemente dal tracciamento della  $c'$ , con vie alternative, di controllo.

**Sezione piana di una piramide**

Assegnate la  $t_{xy}$  e la terna  $H, O', O^*$ , consideriamo  $xy$  come piano d'imposta di una piramide retta (fig. 7); dall'esagono regolare  $A^*B^*C^*D^*E^*F^*$  dato in vera forma e grandezza sul ribaltato di  $xy$ , in posizione generica, ricaviamo per omologia la proiezione  $A_{xyy'} B_{xyy'} C_{xyy'} D_{xyy'} E_{xyy'} F_{xyy'}$ . Consideriamo la  $O^*-1$  parallela alla  $A^*B^*-2$ ; si ottiene la  $2-B_{xyy'} A_{xyy'}$ , parallela alla  $1-O'$ ; alla  $E^*B^*-3$  corrisponde la  $3-B_{xyy'} E_{xyy'}$ ; determinati  $H(O)$ ,  $(z)$  ortogonale in  $(O)$  alla  $H(O)$ , vi si riporta  $(h_V)$  quota reale di  $V$  pari ad  $(O)-4$  e se ne ricava la proiezione in  $h_V' = (O)-5$ . Si ricava  $V'$ , essendo  $V_{xyy'}$  la proiezione del centro dell'esagono di base e punto medio della  $B_{xyy'} E_{xyy'}$  e  $V_{xyy'} V' = h_V'$ ;  $D_{xyy'}$  è simmetrico di  $A_{xyy'}$ ; la  $C_{xyy'} D_{xyy'}$  è parallela alla  $B_{xyy'} E_{xyy'}$ ;  $F_{xyy'}$  è simmetrico di  $C_{xyy'}$ ; la base è completata.

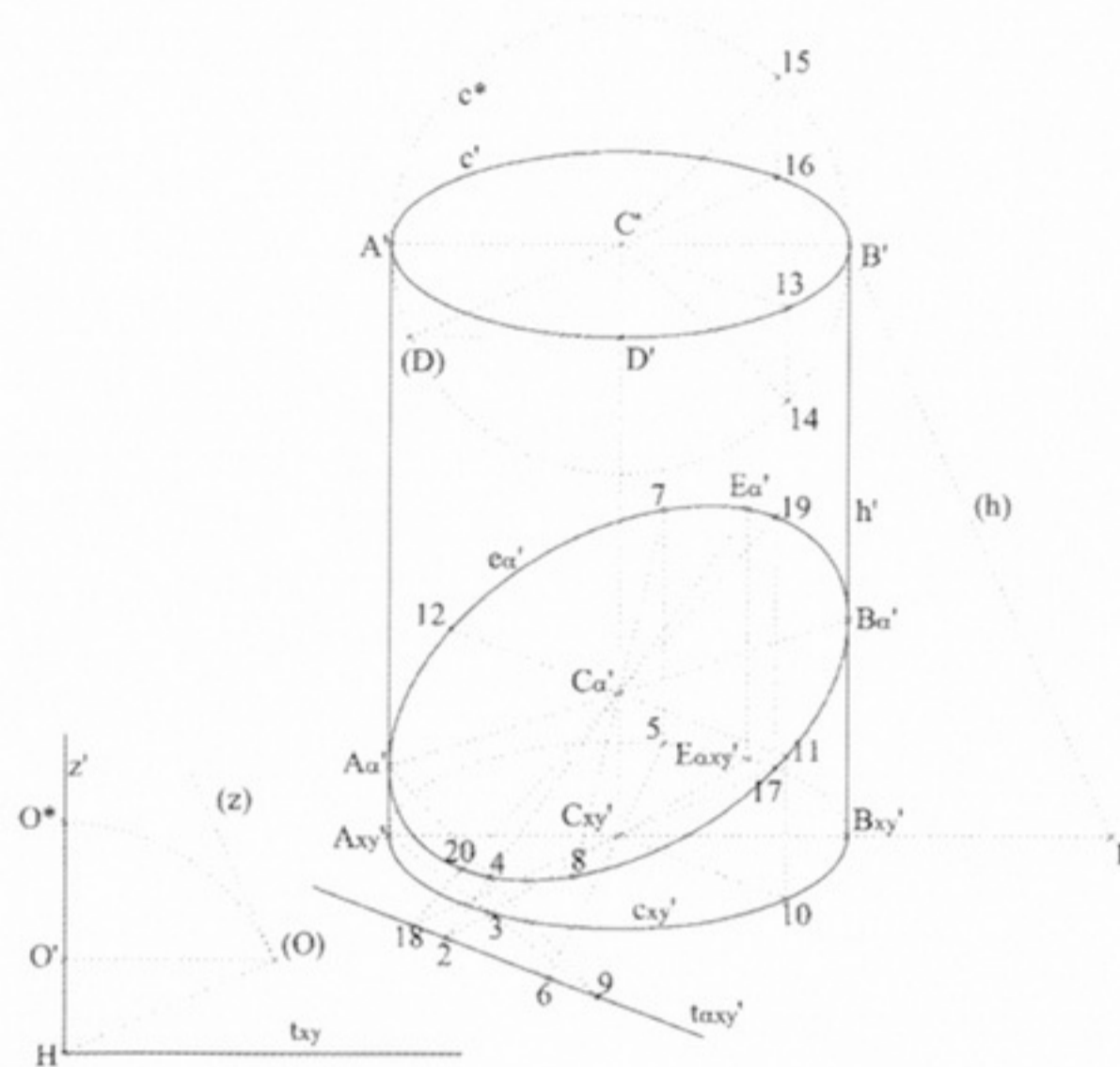
Uniti i suoi vertici con  $V'$ , e punteggiate le parti non in vista, l'immagine assonometrica della piramide è completata. Si vuole la sezione piana della piramide con un piano  $\alpha$ , definito da tre punti assegnati liberamente, per esempio, su tre spigoli; di  $P$  posto su  $VB_{xy}$  si conoscono  $P'$  su  $V'B_{xyy'}$  e  $P_{xyy'}$  su  $V_{xyy'} B_{xyy'}$ ; di  $Q$  posto su  $VD_{xy}$  si conoscono  $Q'$  su  $V'D_{xyy'}$  e  $Q_{xyy'}$  su  $V_{xyy'} D_{xyy'}$ ; di  $R$  posto su  $VF_{xy}$  si conoscono  $R'$  su  $V'F_{xyy'}$  e  $R_{xyy'}$  su  $V_{xyy'} F_{xyy'}$ . La  $Q'P'$  incontra la  $Q_{xyy'} P_{xyy'}$  sulla traccia 6 e la  $R'P'$  incontra la  $R_{xyy'} P_{xyy'}$  sulla traccia 7; la 6-7 è la traccia  $t_{xyy'}$  di  $\alpha$  su  $xy$ ; si procede utilizzando l'omologia definita dall'asse  $t_{xyy'}$ , dalla coppia  $Q', D_{xyy'}$  e dal centro  $V'$ . La  $Q'-8$  è omologa alla  $D_{xyy'} C_{xyy'}$  8 e determina il 9 e il primo segmento della sezione poligonale piana; la  $10P'$  è omologa alla  $10B_{xyy'} E_{xyy'}$  e determina il punto 11; si ha il secondo segmento; la  $R'-12$  è omologa alla  $12-A_{xyy'} F_{xyy'}$  e determina il 13; sono disponibili i sei vertici della sezione, disegnata a trattini. Il prolungamento di qualsiasi lato della sezione incontra il corrispondente lato di base, prolungato, in un punto, unito, della  $t_{xyy'}$ ; la  $V'V_{xyy'}$  individua sulla  $10-P'-11$  il 14, omologo di  $V_{xyy'}$ ; se i vertici di base sono in simmetria centrale rispetto a  $V_{xyy'}$ , allora la congiungente un vertice della sezione con il 14 contiene il vertice opposto, ma non c'è simmetria. Solamente nel caso di piano sezionante parallelo alla base, risultando un poligono omotetico, la simmetria si conserva.



**Sezione piana di un cilindro**

Sia data l'immagine assonometrica di un cilindro circolare retto poggiato su  $xy$  (fig. 8); possiamo ricostruire il rapporto omologico utilizzato

8/ Sezione tra un cilindro circolare retto su  $xy$  ed un piano cui si hanno un suo punto  $E'$  appartenente alla generatrice  $E'E_{xy}$  del cilindro e la proiezione  $t_{xy}$ .



per ricavarla, nonché le vere dimensioni del raggio di base e dell'altezza alla scala usata su  $\pi$ . In proiezione su  $\pi$ , la base superiore è l'ellisse  $c'$  che ha il centro in  $C'$ , l'asse maggiore in  $A'B'$ , orizzontale, l'asse minore pari al doppio di  $C'D'$ , di massima pendenza rispetto a  $\pi$ . La corrispondente della  $c'$  è la circonferenza  $c^*$ , concentrica e di diametro  $A'B'$ ; l'estremo  $D'$  dell'asse minore deriva dalla proiezione ortogonale del punto  $(D)$  della  $c^*$  sulla verticale condotta per  $C'$ . Procedendo a ritroso da  $D'$  si ricava  $(D)$ ; fissata l'orizzontale  $t_{xy}$ , dal punto  $H$  si conduce a scelta la  $H(O)$  parallela alla  $(D)C'$ ; l'arco, di centro  $H$  e raggio  $H(O)$ , individua sulla verticale per  $H O^*$ , mentre l'orizzontale per  $(O)$  ricava  $O'$ .

Nel segmento  $HO'O^*$  si riconosce il rapporto omologico originario che dalla circonferenza  $c^*$  e dal diametro orizzontale  $A'B'$  riporta proprio all'ellisse  $c'$ . L'angolo della giacitura  $xy$  con  $\pi$  è dato da  $(O)HO'$ ;  $O'(O)$  è la distanza di  $O$  da  $\pi$ ,  $HO'$  è la distanza di  $O$  dalla traccia  $t_{xy}$  di  $xy$  su  $\pi$  in proiezione ed  $HO^*$  è la stessa distanza ribaltata su  $\pi$  per rotazione di  $xy$  intorno alla  $t_{xy}$ ; la  $HO'O^*$  è  $z'$  nonché la direzione delle rette di massima pendenza di  $xy$  su  $\pi$ ,  $HO'$  è l'accorciamento di  $HO$ , di  $H(O)$ , di  $HO^*$ ; l'omologia di ribaltamento che porta  $O'$  in  $O^*$  e viceversa ha per asse  $t_{xy}$  e il centro improprio  $O'O^*$ . L'ortogonale  $(z)$  è ricavata per ribaltamento del piano proiettante  $z$  in  $z'$  e, sapendo che  $z$  è ortogonale a tutte le rette di  $xy$  e quindi anche alla  $OH$ , in questo ribaltamento  $z$  si porta in  $(z)$ , conservandosi ortogonale ad  $H(O)$ . La parallela per  $B_{xyy'}$  alla  $O'(O)$  individua il punto  $1$  sulla parallela alla  $(z)$  condotta per  $B'$ ; la  $B'-1$  è la vera dimensione dell'altezza del cilindro, da leggere alla scala grafica adottata su  $\pi$ .

Vogliamo sezionare il cilindro con un piano generico di cui siano dati un suo punto  $E'$  appartenente alla generatrice  $E'E_{xyy'}$  del cilindro e la proiezione  $t_{xyy'}$  della sua traccia su  $xy$ . La  $E_{xyy'}C_{xyy'}$  interseca la  $c_{xyy'}$  nel punto  $3$  e la  $t_{xyy'}$  in  $2$ ; la corrispondente sul piano è la  $2-E'$ , la quale interseca la  $C_{xyy'}C'$  in  $C'$ , omologo di  $C_{xyy'}$  nell'omologia di asse  $t_{xyy'}$  e centro improprio  $C_{xyy'}C'$ . Al  $3$  corrisponde il  $4$ ; notiamo che  $C_{xyy'}$  è centro di simmetria per i punti dell'ellisse di base su  $xy$ , e  $C'$  lo è per gli omologhi dell'ellisse sezione su  $\alpha$ ; procediamo con la  $C_{xyy'}-5-6-C'$  e si ottiene il  $7$  e il simmetrico  $8$ . Sono punti notevoli quelli della sezione appartenenti alle generatrici di contorno apparente; la  $A_{xyy'}-3-9-4$  ricava  $A'\alpha$ ; questo e il simmetrico  $B'\alpha$  sono punti di tangenza. Il diametro della sezione  $11-C'-12$  parallelo ad  $xy$  si richiama a  $C_{xyy'}-10$  parallelo a  $t_{xyy'}$ ; il diametro di  $\alpha$  ortogonale al predetto è di massima pendenza e la sua proiezione su  $xy$  è ortogonale alla  $t_{xy}$ ; in proiezione si deve considerare la direzione coniugata alla  $C_{xyy'}-10$ .

Per ottenere ciò consideriamo la  $C'-13$  parallela alla  $C_{xyy'}-10$ , la  $13-14-C'$ , la  $C'-15$  ortogonale alla  $C'-14$ , la  $15-16$  e la direzione  $16-C'$  coniugata alla  $C'-13$ . Si considera la  $17-C_{xyy'}-18$  parallela alla  $16-C'$ ; seguono la  $18-C'-19$

9/ Proiezione di una sfera ed individuazione di meridiani e paralleli.

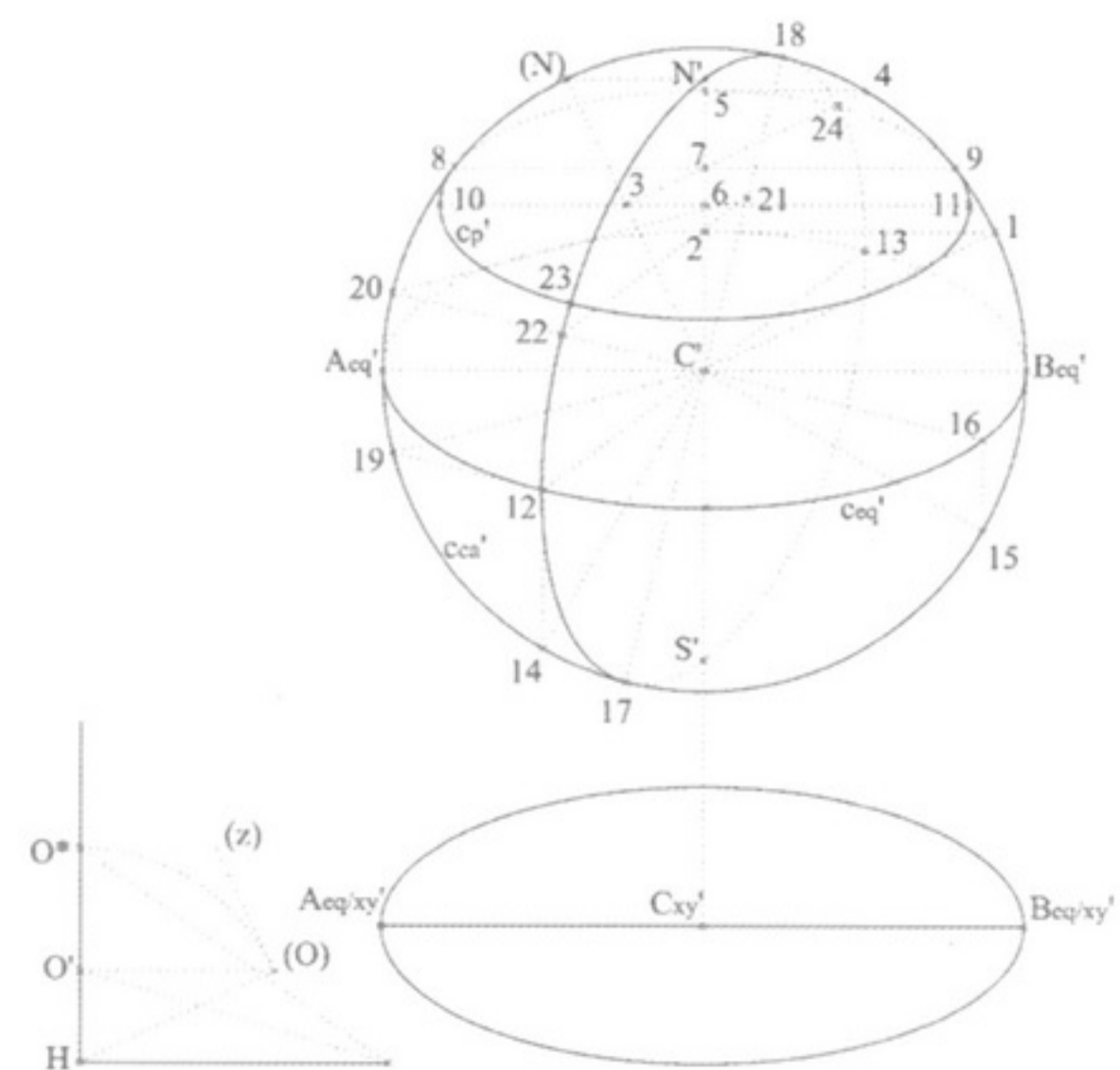
e il 20, simmetrico del 19; il 19- C'-20 è il diametro di massima pendenza dell'ellisse sezione  $e\alpha'$ ; il 20 è il suo punto più basso, più vicino alla  $t_{xyy'}$  e il 19 è il più alto, il più lontano dalla  $t_{axy'}$ ; le tangenti in 20 e in 19 risultano nella realtà parallele alla  $t_{axy'}$  e in proiezione parallele alla  $t_{xy}$ ; sono punti notevoli. Possiamo raccordare i numerosissimi punti ricavabili seguendo le vie illustrate, ma dobbiamo temere la fatica, l'imprecisione, la confusione; il computer non ci aiuta, poiché dobbiamo fornire gli assi della  $ea'$ ; è possibile ricavarla, anche per diverse vie, che qui non si presentano: una di esse è descritta dal prof. Michele Inzerillo in diverse sue pubblicazioni.

**La sfera e le sue sezioni notevoli**

Un cilindro tange una sfera secondo una sua circonferenza massima di giacitura ortogonale alla direzione dell'asse del cilindro, che contiene il centro della sfera (fig. 9); se tale asse è ortogonale a  $\pi$ , la sua intersezione con  $\pi$  è una sezione parallela a quella di contorno apparente e quindi una circonferenza, il cui diametro è quello della sfera.

Qualunque sia la posizione della sfera, relativa ad  $xy$  ed a  $\pi$ , la proiezione  $c_{ca'}$  della circonferenza di tangenza non cambia; la precisa ricostruzione spaziale, se è necessaria, non può prescindere dalla quota del centro  $C$  della sfera. Posizioniamo la proiezione della quota  $C'C_{xyy'}$  e ricordiamo che tale quota è ortogonale a  $xy$ , è parallela all'asse  $z$ , non è parallela a  $\pi$  e vi si proietta accorciata. La circonferenza di contorno apparente  $c_{ca'}$  ha il centro in  $C'$  ed il diametro orizzontale in vera grandezza  $A_{eq}'C'B_{eq}'$  parallelo alla  $t_{xy}$ ; anche la proiezione  $A_{eq/xy}'C_{xy}'B_{eq/xy}'$  della sua proiezione su  $xy$  risulta parallela alla  $t_{xy}$ . Il piano che contiene  $A_{eq}'C'B_{eq}'$  e  $A_{eq/xy}'C_{xy}'B_{eq/xy}'$  è ortogonale ad  $xy$ , parallelo a  $z$  e seziona la sfera secondo una circonferenza che non è quella di contorno apparente. Il suo diametro, che abitualmente è sede dei poli, essendo parallelo a  $z$ , si accorcia e la proiezione dei poli non sta sulla circonferenza di contorno apparente. Inoltre, la sezione massima orizzontale, ovvero la circonferenza equatoriale, la  $c_{eq}$ , è parallela a  $xy$  e su  $\pi$  si proietta secondo una ellisse, il cui asse maggiore è  $A_{eq}'C'B_{eq}'$  e l'asse minore dipende dal rapporto omologico, graficamente dato da  $HO'O^*$ , ossia, dall'inclinazione della  $H(O)$ , dall'angolo  $(O)HO^*$ . La  $C'-1$  è parallela alla  $H(O)$ ; la  $1-2$  definisce l'estremo dell'asse minore, ossia del diametro di massima pendenza dell'equatore; l'ellisse è costruibile; la  $C'(N)$  è parallela alla  $(z)$ ; la  $(N)N'$  ricava la proiezione del polo superiore; il simmetrico rispetto a  $C'$  individua il polo inferiore; il polo  $N$  risulta in vista, e l'altro è nascosto.

Si vuole disegnare un parallelo di giacitura  $xy$ ; guardiamo l'asse polare ribaltato  $C'(N)$ ; il centro ribaltato del parallelo sia il punto 3; la sua distanza dal centro è  $C'-3$ ; a tale distanza il raggio non è  $C'-1$ , bensì  $3-4$ ; il 4 ap-





pare in 5. Il semiasse minore in proiezione va da 5 a 6 e attraversa il piano del contorno apparente in 7; l'orizzontale condotta per il 7 contiene i punti di tangenza 8, 9, fra la  $c_{ca}'$  e la  $c_{\pi}'$ . L'asse maggiore della proiezione  $c_p'$  del parallelo considerato è sull'orizzontale per il 3; il semiasse 6-10 è pari a 3-4; avendo ricavati tre estremi degli assi, 10, 11, 5, la  $c_{\pi}'$  è costruibile. Vogliamo ottenere la proiezione di un meridiano, cioè della circonferenza sezione di un piano ortogonale a quello equatoriale, e contenente l'asse dei poli. In proiezione, sia comune all'equatore e al meridiano il diametro 12-C'-13; nel piano meridiano, il diametro N'-C'-S' è coniugato al 12-C'-13; ciò basta per costruire l'ellisse  $c_m'$ , utilizzando l'omologia affine obliqua, ma non tramite il computer, perché servono gli assi. Si possono ricavare, ma per il meridiano che attraversa il contorno apparente può determinarsi un asse, che contiene i punti di contatto; si ricava sul piano equatoriale la 16-C' coniugata alla 12-C', tramite la 12-14, la 14-C', la C'-15, e la 15-16. Si riconosce una terna di assi 16-C', 12-C', N'-C'; la traccia comune al piano del meridiano ed a quello del contorno apparente è ortogonale alla C'-16, contiene C' ed è il diametro 17-C'-18. L'omologia affine ortogonale di asse 17-18 lega la  $c_{ca}'$  alla  $c_m'$ ; omologo del 12 è il 19; sul raggio C'-20 ortogonale all'asse maggiore 17-18 si ricava il semiasse minore; si conducono la 20-21 parallela alla 19-C' e la 21-22 parallela alla C'-12; C'-22 è il semiasse minore; l'ellisse meridiana si può ottenere al computer. Osserviamo ancora che fra il meridiano e il parallelo si ha la corda comune 23-24; le linee intere si riferiscono solo a quelle o a quelle parti che risultano in vista; il resto è a linea punteggiata. Riflettiamo sulla ipotesi di non assegnare la proiezione  $C_{xy}'$ ; si può lavorare su una sfera senza collegamenti al sistema di riferimento, risolvendone parecchi problemi; che succede ipotizziamo a posteriori la ubicazione della  $C_{xy}'$  sulla verticale per C'? E se tale punto, per una indecisione estemporanea, lo muoviamo in su o in giù? L'immagine realizzata si conserva inalterata e valida, resta ferma, non occorre modificare nulla. Ma, allora, ferma restando l'immagine, cosa succede? Se  $C_{xy}'$  cresce, la sfera si è innalzata ma contemporaneamente si è avvicinata, è avanzata, e, non essendo prospettiva, la sua immagine non si sposta, trasla ortogonalmente a  $\pi$ . Volendo discutere sulla sfera e non proprio su quella sfera, possiamo fare a meno di  $C_{xy}'$ ; ma se la rappresentazione presenta all'analisi percettiva la proiezione di altri corpi, è assolutamente errato esimerci dal definire  $C_{xy}'$ , fondamentale elemento per capire chi è più vicino o più in alto, per controllare le interrelazioni fra le presenze nell'ambito spaziale esposto. Infine, la proiezione della sfera e dell'equatore su  $xy$  è la stessa ellisse equatoriale, che viene traslata sulla giacitura definita dalla proiezione della proiezione del centro C della sfera.

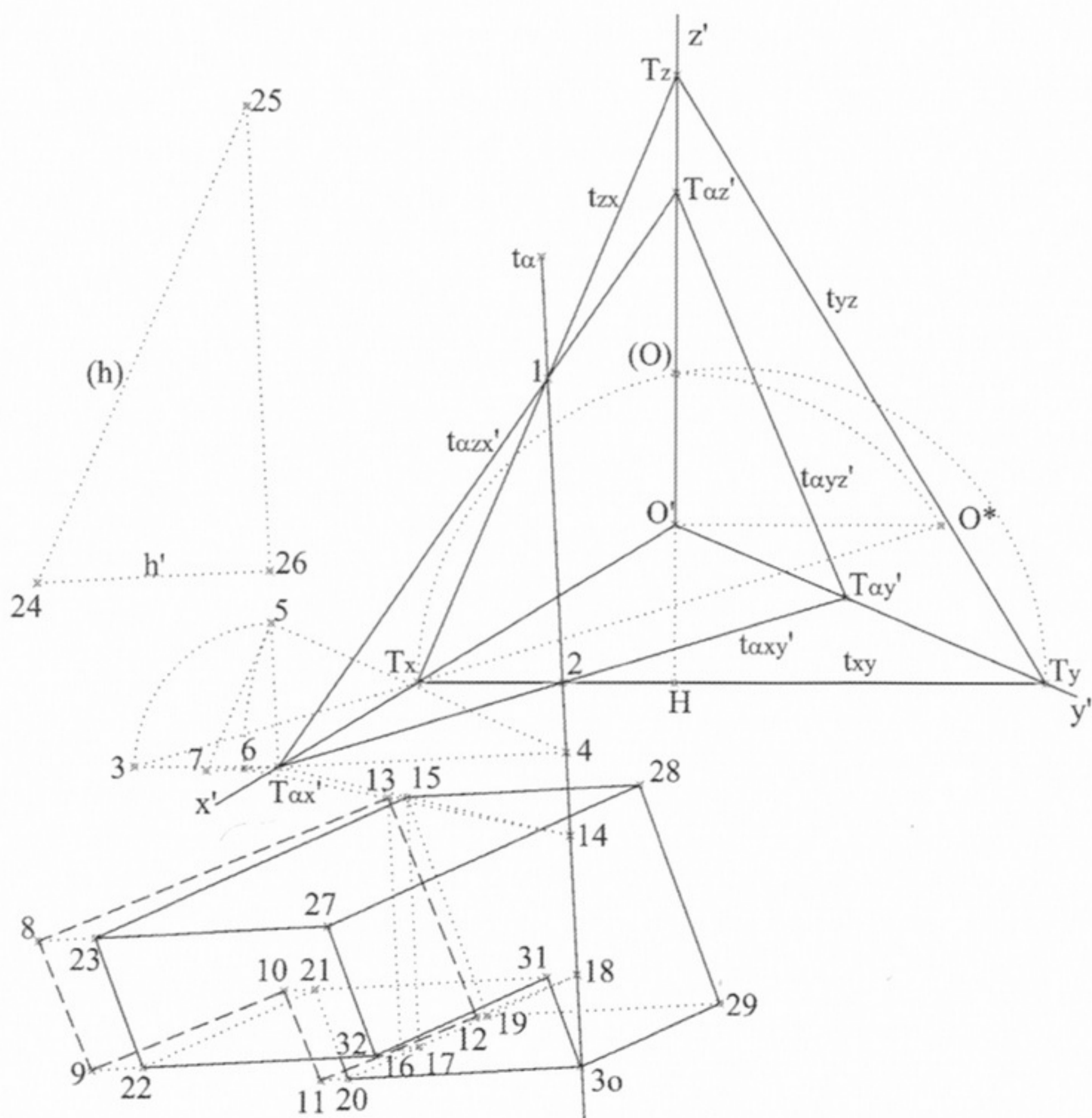
10/ Proiezioni su un piano generico.

**Ribaltamento di un piano generico**

Proponiamoci di rappresentare un volume prismatico retto poggiato sul piano generico  $\alpha$ ; il riferimento è dato da  $O'$  e dalla terna  $xx', yy', z'$  (fig. 10); il quadro  $\pi$  è definito dalle tracce  $T_x, T_y, T_z$  degli assi e dalle tracce  $t_{xy}, t_{yz}, t_{zx}$  dei piani coordinati; si ricavano  $H, (O), O^*$ .

Del piano  $\alpha$  sono date le proiezioni delle tracce sui piani coordinati, le  $t_{xy}'$ ,  $t_{yz}'$ ,  $t_{zx}'$ , quelle delle tracce con gli assi,  $T_x', T_y', T_z'$  e la traccia su  $\pi$ , la  $t$  che contiene i punti 1 e 2 di intersezione delle tracce del piano con le tracce dei piani coordinati. Per disegnare la proiezione di una data figura di  $\alpha$ , occorre ribaltare  $\alpha$  su  $\pi$ , ruotando  $\alpha$  intorno alla  $t$ , disegnare la figura ribaltata, in vera forma e grandezza, e, per omologia, ricavare la proiezione.

Consideriamo il punto  $T_x'$ ; appartiene ad  $\alpha$  e a  $x'$ ; se, punto di  $x'$ , ha da  $\pi$  la distanza pari ad  $O'O^*$ , collocato dietro  $\pi$ , e  $T_x$  ha distanza nulla,  $T_x'$  ha distanza pari a  $T_x'-3$ , definita sulla  $O^*T_x$ , per intersezione con la parallela alla  $O'O^*$  condotta per  $T_x'$ . Ruotando intorno alla  $t_x$  i punti descrivono archi con giacitura ortogonale all'asse; i punti ribaltati si ritrovano sulle ortogonali all'asse a distanza pari al raggio di rotazione; tale raggio per il punto  $T_x'$  si costruisce in 4-5, ipotenusa del cateto  $T_x'-4$  or-



togonale alla  $t$  e del cateto  $T_{\alpha x'}-5 = T_{\alpha x'}-3$ . L'arco risulta evidenziato in 5-6, per avere ribaltato il suo piano, ortogonale alla  $t$  intorno alla sua traccia 4- $T_{\alpha x'}$ -4-6-7; la  $T_{\alpha x'}-3$  ha una direzione diversa; il 6 è il ribaltato di quel punto che si proietta in  $T_x'$ ; il 6 è omologo di  $T_x'$  nell'omologia affine ortogonale di ribaltamento avente l'asse in  $t$ . Disegnata a trattini la figura 8-9-10-11-12-13 di \*, per omologia si ricava in proiezione la corrispondente figura 15-19-20-21-22-23 utilizzando diverse vie omologiche; in origine ci appoggiamo alle rette omologhe 6-13-14-15; poi si utilizza la direzione parallela all'asse, ricavando 13-16 e 15-17; segue la 11-16-12-18 e sulla 18-17 si ottengono il 19 e il 20. Il 20-21 è parallelo al 15-19 e il 21-22 è parallelo al 19-20, così come il 15-23. Adesso si riporta, a parte, parallela alla 5-7, che è ortogonale alla 4-5, l'altezza ( $h$ ) = 24-25, in vera misura; la proiezione della 5-7 è la 7- $T_{\alpha x'}$  e per analogia la  $h'$  si ottiene in 24-26 ortogonale all'asse di omologia, per proiezione ortogonale sulla 24-26, come dire parallela alla  $t\alpha$ . Il segmento 24-26 si riporta sui vertici della base inferiore appartenente ad  $\alpha$ ; si ottiene la base superiore, parallela ad  $\alpha$ , definita dai vertici 27-28-29-30-31-32.

Gli elementi, interamente o parzialmente non in vista, sono rappresentati con linea punteggiata.