

Assonometria e futuro

Il costruire l'immagine di un pensiero del concreto, del dimensionale, nello spazio percepibile e recepibile, non può associarsi al virtuosismo di un abile prestigiatore grafico stupefacente.

L'idea formale, rivelata intimamente e realizzata come comunicazione analizzabile, prima che si svesti dell'individualismo e diventi disponibile secondo le potenzialità dell'universale, si definisce e si consolida.

Il cervello pensante partorisce il pensato, puntualizzando almeno le qualità a confronto, quali, per citarne alcune, il tutto e le parti, le discontinuità, le proporzioni, le simmetrie, le variazioni, le alternanze, le dimensioni, etc.

Quel pensiero diventa immagine, di piani, spigoli, rette, curve, convessità, concavità, diventa accertamento, anche approssimato e provvisorio, di vicino, lontano, fuori, dentro, statico, dinamico.

Ma soprattutto, la conquista del nuovo, del riconoscibile, è segnata dalla consapevolezza del riferimento invariabile sulle possibili posizioni ed esposizioni, sì che il visto e il non esposto si compendiano in contorni apparenti, uno per ciascuno degli infiniti punti di vista immaginabili.

E tutto ciò è geometria dell'essere; prima che si spiani l'irta via della estrinsecazione volta a tradursi in figura accessibile all'esterno, si pensa geometria del disegno; questo nasce e si convenziona alla lettura solo grazie al preventivo e propedeutico possesso della scienza geometrica.



Laura Inzerillo è ricercatore presso l'Università degli Studi di Palermo, Facoltà di Ingegneria, Dipartimento di Architettura. È docente di Disegno e Laboratorio di Cad in Ingegneria Civile ed Ambientale ed ha svolto lezioni frontali all'Ecole d'Architecture de Paris, all'Escola Tecnica Superior d'Arquitectura de Barcelona e alla Columbia University dove ha vinto una fellowship ed ha avuto un incarico di ricerca dal 2001 al 2003. È direttore del Dipartimento di "Comunicazione grafica interattiva. AR/Graphic and interactive communication. AR" dell'Istituto Euro Mediterraneo di Scienze e Tecnologie I.E.ME.S.T. È membro/reviewer dell'Editorial Board dei seguenti International Journal: membro dell'International Program Committee della 14th IASTED International Conference on Computer Graphics and Imaging "CGIM 2013 for the International Association of Science and Technology for Development (IASTED);

Journal Academia of International Journal of Advances in Engineering & Technology (IJAET); Journal of Civil Engineering & Architecture (JCEA). È responsabile di gruppi di ricerca nel settore delle tecnologie innovative di 3Dscanning and survey, 3D modeling e geometria descrittiva. È membro attivo dell'UID, Unione Italiana del Disegno. È stato membro del Collegio di Dottorato in "Rilievo e Rappresentazione dell'Architettura e dell'ambiente" dal 2004 al 2011. È membro del Collegio di Dottorato in "Recupero dei contesti antichi e processi innovativi nell'architettura" dal 2011. È membro della commissione per la qualità della didattica (CPQD) della Facoltà di Ingegneria di Palermo dal 2011.

Ha pubblicato 58 lavori: 13 articoli in rivista, 14 contributi in volume (Capitolo o Saggio), 24 contributi in Atti di convegno, 1 abstract in atti di convegno, 3 monografie, 2 curatele.

ISBN 978-88-548-5124-5



9 788854 849624

euro 10,00

A08 / 000



Inzerillo Assonometria e futuro

LAURA INZERILLO

ARACNE

INGEGNERIA

ASSONOMETRIA & FUTURO



Ao8

446

Laura Inzerillo

Assonometria e futuro



Copyright © MMXII
ARACNE editrice S.r.l.

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133/A-B
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 978-88-548-5124-5

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento anche parziale,
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: novembre 2012

a Gianmaria e Giovanna, gioia profonda dell'anima mia

Indice

<i>Introduzione</i>	9
Capitolo 1	11
Capitolo 2	16
Capitolo 3	22
Capitolo 4	26
Capitolo 5	29
Capitolo 6	32
Capitolo 7 – <i>Quote</i>	35
Capitolo 8 – <i>Appartenenze</i>	38
Capitolo 9 – <i>Parallellismo</i>	40
Capitolo 10 – <i>Intersezione</i>	42
Capitolo 11 – <i>Piani</i>	44
Capitolo 12 – <i>Angoli</i>	48
Capitolo 13 – <i>Assonometria panoramica frazionata</i>	50
Capitolo 14 – <i>Poliedri</i>	53
Capitolo 15 – <i>Coniche</i>	56
Capitolo 16 – <i>Prisma</i>	59
Capitolo 17 – <i>Piramide</i>	62

Capitolo 18 – <i>Cilindro</i>	66
Capitolo 19 – <i>Cono</i>	69
Capitolo 20 – <i>Sfera</i>	74
Capitolo 21 – <i>Toro</i>	80
Capitolo 22 – <i>Elissoide</i>	83
Capitolo 23 – <i>Elicoide</i>	85
Capitolo 24 – <i>Volte</i>	88
Capitolo 25 – <i>Volte a vela</i>	92
Capitolo 26 – <i>Iperboloide</i>	95
Capitolo 27 – <i>Paraboloide</i>	98
Capitolo 28 – <i>Conoide</i>	100
Capitolo 29 – <i>Applicazione I</i>	102
Capitolo 30 – <i>Applicazione II</i>	105
<i>La geometria e le sue applicazioni in architettura</i>	109
<i>Bibliografia</i>	143

Introduzione

Il costruire l'immagine di un pensiero del concreto, del dimensionale, nello spazio percepibile e recepibile, non può associarsi al virtuosismo di un abile prestigiatore grafico stupefacente.

L'idea formale, rivelata intimamente e realizzata come comunicazione analizzabile, prima che si svesti dell'individualismo e diventi disponibile secondo le potenzialità dell'universale, si definisce e si consolida.

Il cervello pensante partorisce il pensato, puntualizzando almeno le qualità a confronto, quali, per citarne alcune, il tutto e le parti, le discontinuità, le proporzioni, le simmetrie, le variazioni, le alternanze, le dimensioni, etc.

Quel pensiero diventa immagine, di piani, spigoli, rette, curve, convessità, concavità, diventa accertamento, anche approssimato e provvisorio, di vicino, lontano, fuori, dentro, statico, dinamico. Ma soprattutto, la conquista del nuovo, del riconoscibile, è segnata dalla consapevolezza del riferimento invariabile sulle possibili posizioni ed esposizioni, sì che il visto e il non esposto si compendiano in contorni apparenti, uno per ciascuno degli infiniti punti di vista immaginabili.

E tutto ciò è geometria dell'essere; prima che si spiani l'irta via della estrinsecazione volta a tradursi in figura accessibile all'esterno, si pensa geometria del disegno; questo nasce e si convenziona alla lettura solo grazie al preventivo e propedeutico possesso della scienza geometrica.

Si tratta del prodursi e del proiettarsi verso il diverso da sé, sia nell'intimo dello stesso pensatore, già nel conscio, sia nel successivo suo relazionarsi alla libera e curiosa attesa dei potenziali fruitori delle nuove o innovative conoscenze.

L'apprendimento si avvia alla comunicazione, con altro intervento di altra geometria, perché il convinto dovrà essere convincente, altrimenti, la finalizzazione dei messaggi resta improduttiva, occasione bruciata.

La geometria deve attingere alle fonti di conoscenza acquisita per un linguaggio, che soddisfi le esigenze dei lettori dell'immagine geometrica.

Occorre assumere il concetto non del "mi hai capito" bensì del "forse non mi sono spiegato bene", ragionando e stimolando il ragionare, perseguendo le vie offerte dalla geometria.

Nella delicata fase del rendere comune la scienza fra chi dà senza perdere e chi riceve senza togliere bisogna sforzarsi di indurre a riflettere, a dubitare, ad esercitare la massima attenzione, a prepararsi al capire, al farsi capire.

La geometria e il disegno diventano dinamici, tessono agganci fra pensiero e stesura e fra stesura e lettura; per leggere occorre conoscere tanta geometria e saperne fare buon uso, giovandosi di esperienze e di intuito.

La lettura del disegno richiede di saper cogliere gli indizi grafici che possano guidare alla scoperta della realtà nascosta dall'apparenza. Analogamente, il proponente, che qualcuno appella come "disegnatore", e non è così, deve premurarsi, compatibilmente e responsabilmente, a dotare l'immagine di adeguati e sufficienti indizi. Chi costruisce il grafico sa di un suo continuo mettersi dalla parte del lettore, ingolfato, perplesso, sull'orlo della demotivazione; un disegno ambiguo non trasmette messaggi e raccoglie apprezzamenti fallimentari.

Dunque, l'immagine costruita vive con progressività e continuità, di geometria, da quando affiora il pensiero-disegno sino al momento di completa percezione razionale dei contenuti propri, affidati e trasmessi attraverso la trasformazione del pensiero in segni e, successivamente, di segni in pensiero consonante all'originale.

Detto questo, si mediti sull'essenzialità sensoriale del come la geometria approdi al bidimensionale figurativo dal pensare tridimensionale, e viceversa, dal bidimensionale figurativo pensi al tridimensionale pensato.

Chi disegna o legge disegni deve essere preparato alle due fondamentali funzioni e deve apprendere a vivere il suo apporto ragionando sulla vacuità di considerarsi “formato”, pronto a confrontarsi per immagini costruite in modo efficiente; niente richieste del “come si fa” ma del “si fa perché”.

Riflettendo, un buon testo è un ausilio per imparare a pensare disegno liberamente, rifuggendo possibilmente dal ritenersi giunto allo stop; se questo è prematuro, ha scelto inopinatamente il rischio del blocco grafico in corso d’opera, sempre dietro l’angolo.

Un buon testo si segnala se è frutto mirato all’apprendista, costringendolo a riflettere ed a ragionare sulla libertà di proporre, di proporsi in altre sue valide esperienze nella costruzione di immagini.

Un buon testo affronta, illustra, risolve problematiche grafiche, con equilibrio fra teoria e applicazione, accogliendo con pru-

denza e relatività la richiesta partecipativa interessata all’utilità di ciò che gli si propone.

Per la mole notevole delle necessità cognitive su ciascuno dei sistemi proiettivi nel bidimensionale, un buon testo può affrontare un sistema alla volta, per esempio, la trattazione solo dell’assonometria ortogonale, volendo garantire l’indispensabile approfondimento di base e applicativo.

Scorrendo questo testo, si evince indubbiamente il rispetto di quanto detto.

L’ordine della trattazione in capitoli, la congruità delle argomentazioni, la fluidità espositiva dei processi grafico-risolutivi, la scelta opportuna degli esempi e delle applicazioni finali, il vantaggioso e semplificativo uso dell’omologia segno originale di peso scientifico, unitamente concorrono alla valutazione più che positiva di questo programma di lavoro formativo specifico mirato e centrato.

Capitolo 1

Sistema di proiezione in assonometria ortogonale: quadro π , terna spaziale $Oxyz$ e sua proiezione ortogonale $O'x'y'z'$ su π . (fig. 1a, 1b, 1c, 1d)

Immaginiamo dati nello spazio un quadro piano π e una terna di assi trirettangola x, y, z , di origine O , comunque disposta obliquamente rispetto a π ; gli assi e i piani xy, yz, zx , da essi definiti, intersecano π nei punti traccia T_x, T_y, T_z , e nelle rette traccia t_{xy}, t_{yz}, t_{zx} .

Proiettiamo in direzione ortogonale a π ; l'origine O e gli assi x, y, z , danno luogo ad O' ed alla terna x', y', z' ; la retta di massima pendenza $pm_{xy} = O-H$ di xy rispetto a π , si proietta accorciata in $pm'_{xy} = O'H$.

Il piano T_z-O-H , contenendo $O-O'$ ortogonale a π , è ortogonale a π , e, contenendo z ortogonale ad xy , è ortogonale ad xy ; tale piano è ortogonale a π ed a xy , per cui è ortogonale alla loro intersezione, la traccia t_{xy} ; consegue che la t_{xy} è ortogonale al piano $z-z'$ ed a tutte le sue rette, anche a z' ; la t_{xy} deve essere ortogonale a z' .

Osservando la figura con tanta attenzione, possiamo fare parecchie osservazioni; i tre angoli in O sono retti, ma non appaiono tali; la somma delle loro proiezioni è pari a 360° e ciascuno è maggiore del retto.

Se la terna spaziale si dispone diversamente, O' si muove all'interno del triangolo $T_x-T_y-T_z$; se O' si sposta e si avvicina ad H, T_z si

allontana; se $O' = H, T_z$ è all'infinito, e xy risulta ortogonale a π . L'angolo $x'-O'-y'$ diventa piatto; la proiezione su π delle figure poste su xy si annullano, risultando indistintamente proiettate sulla traccia t_{xy} ; questa è una posizione inopportuna, inaccettabile.

Supponiamo che, spostando O' , l'angolo $T_x-O'-T_y$ risulti retto; l'angolo retto $T_x-O'-T_y$ si proietta in un angolo retto solo se coincidono o sono paralleli; dunque z risulta ortogonale a π e z' risulta un punto; si annullano le quote dei punti dello spazio. Ancora una volta la scelta di tale posizione è inopportuna e inaccettabile; si può concludere che esistono infinite possibilità di posizionare la terna spaziale rispetto a π , purchè si eviti che ciascuno dei tre angoli in O' sia retto o piatto.

Ci accorgiamo di una posizione particolare: per $O-T_x = O-T_y = O-T_z$, si verifica che T_x, T_y, T_z , sono vertici di un triangolo equilatero, con O' ortocentro e $x'-O'-y', y'-O'-z', z'-O'-x'$, eguali fra loro; l'accorciamento delle proiezioni $pm'_{xy}, pm'_{yz}, pm'_{zx}$, delle rette di massima pendenza $pm_{xy}, pm_{yz}, pm_{zx}$, risulta uguale; è una semplificazione.

Una semplificazione minore si ottiene se solo due dei tre angoli $x'-O'-y', y'-O'-z', z'-O'-x'$ vengono scelti uguali; il triangolo delle tracce risulta isoscele; gli accorciamenti delle relative rette di pendenza sono uguali.

Non si confonda la libertà di scelta o la casualità con un obbligo che non sussiste.

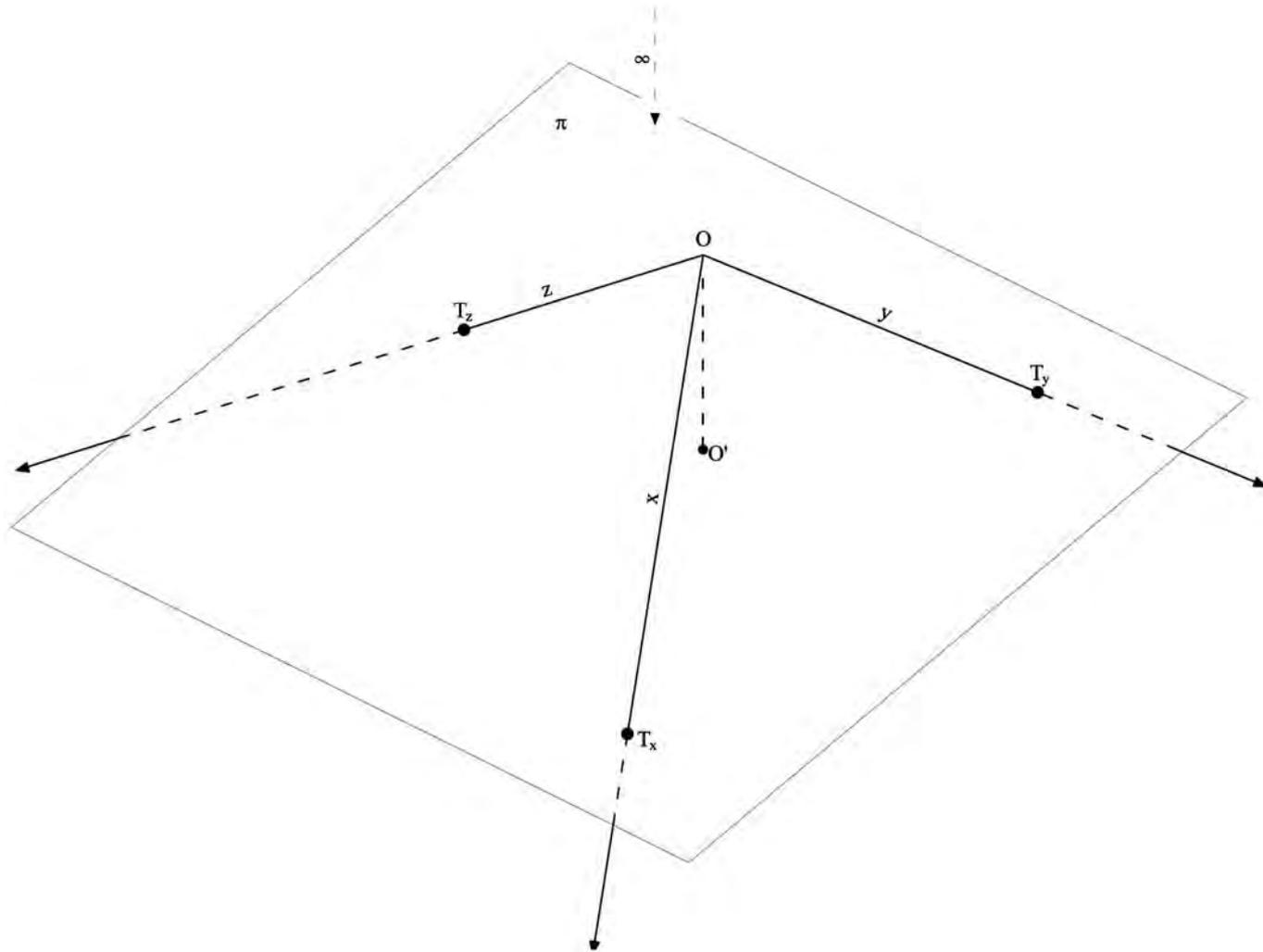


Figura 1a

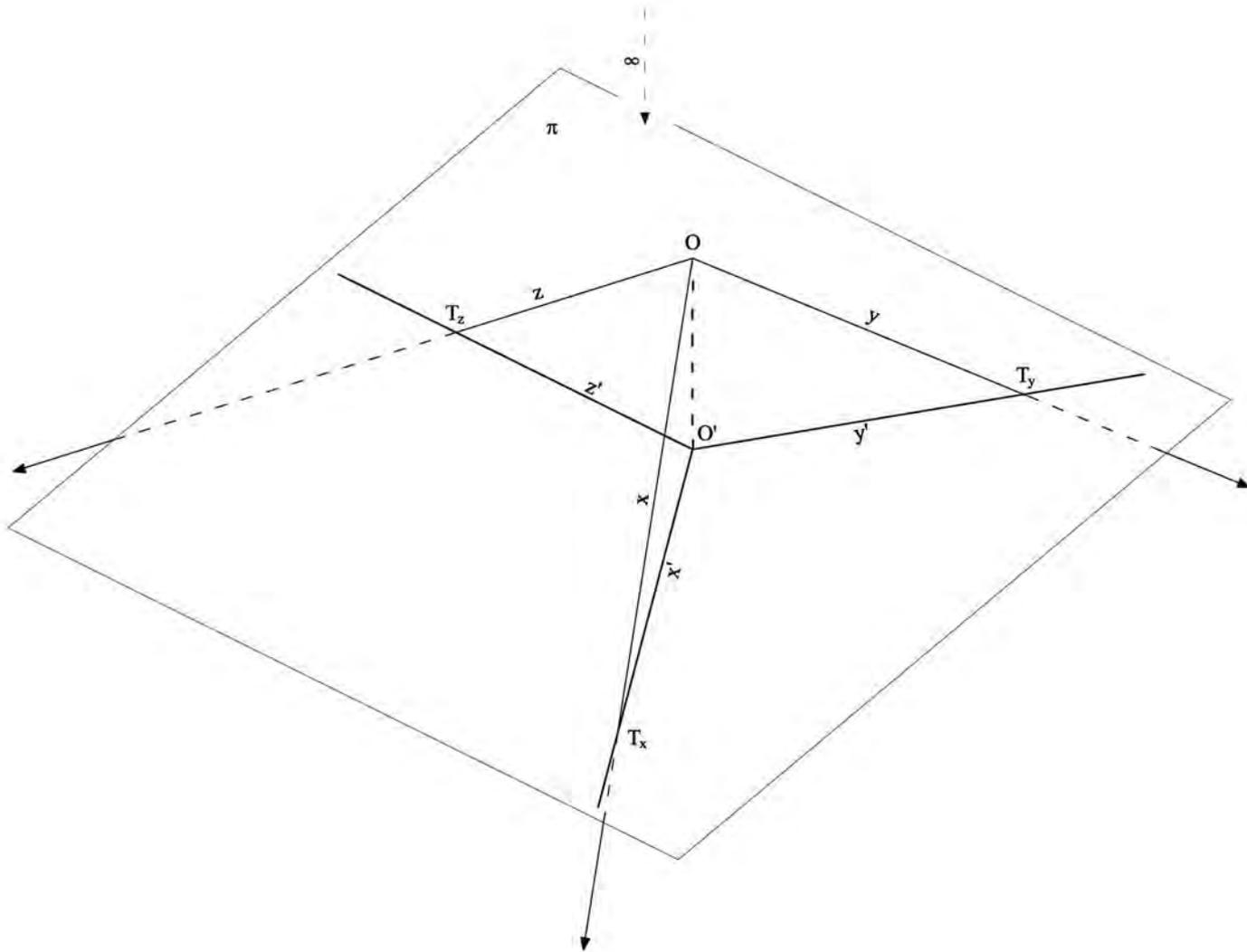


Figura 1b

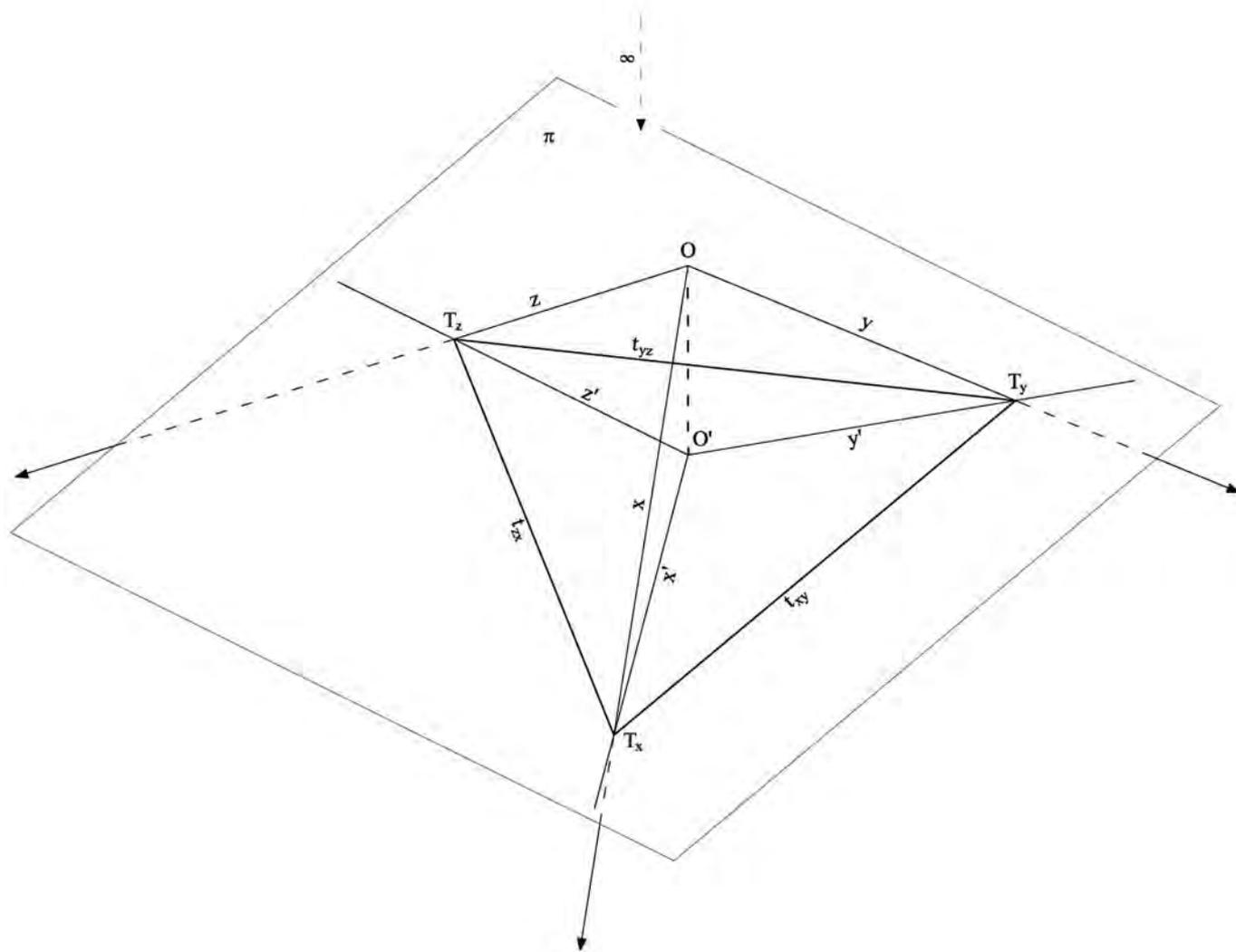


Figura 1c

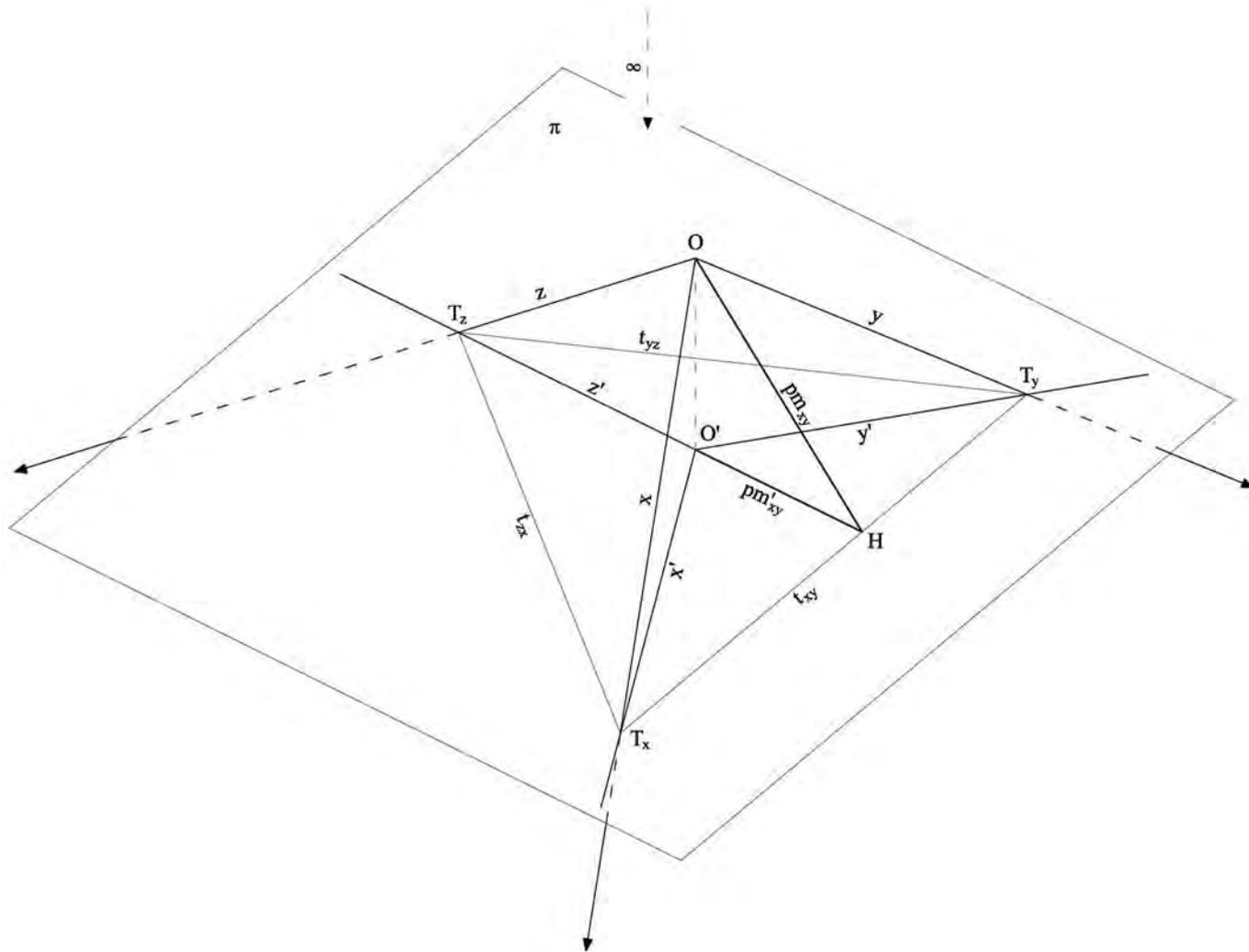


Figura 1d

Capitolo 2

Costruzione in assonometria ortogonale dell'immagine del sistema di proiezione assonometrica sul quadro π , della terna x, y, z , di origine O . (fig. 2a, 2b, 2c, 2d)

Insegnare il sistema proiettivo attraverso l'immagine penso che sia un aiuto a capire, forse più espressivo e persuasivo delle parole, vocali o scritte, e dei gesti, normali mezzi della comunicazione, tesa a stimolare il pensare, il riflettere, il motivare, il condividere.

Potenziare l'apprendimento, coinvolgendo anche la visione, implica, però, che l'immagine sia corretta, costruita secondo le regole note a chi illustra nuove conoscenze.

Chi eroga sapere, pensa e disegna; il fruitore apprendista, invece, vede, si appiglia ad impressioni indiziarie, via via suggerite dall'osservazione in difficoltà.

Egli legge e pensa, ricostruisce la comunicazione visiva e riflessiva, andando oltre, impadronendosi del nuovo, per incrementare le sue disponibilità teorico-esecutive, supporti per disegnare in libertà e consapevolezza.

Se riflettiamo, possiamo concludere che il docente trasmette senza perderlo un bene inestimabile in suo possesso e il discente acquisisce, senza toglierlo, l'apporto, che, alla fine, risulta moltiplicato, rinnovato, rimesso nel circolo infinito del dare e dell'avere.

Premettiamo che la prima tavola, dedicata all'immagine del sistema, ha il riferimento tv_1 , mentre la presente, sulla costruzione di quell'immagine, è detta tv_2 .

Nella tv_2 si deve chiarire e confermare che gli angoli della tv_1 , apparentemente non retti, di seguito elencati, in realtà rappresentano angoli retti: -a) gli angoli del parallelogramma π ; -b) l'angolo fra $O-O'$ e π , cioè fra z' ed $O'-O$; -c) l'angolo fra T_x-O ed $O-H$; -d) l'angolo fra $t_{xy} = T_x-H-T_y$ e z' , ed $O-H=pm_{xy}$, ed $O'-H=pm_{xy}'$; -e) l'angolo T_x-O-T_y .

La tavola è dedicata esclusivamente a chi ha la piena conoscenza dell'assonometria ortogonale.

Il foglio della tv_2 , su cui si espongono le costruzioni e le verifiche precedenti, è il quadro π , quello che nella tv_1 è il parallelogramma π ; qui, l'occhio, prima del cervello, evidenzia, aiutato dall'immaginazione, la costituzione del sistema e l'attività che relazione la struttura dello spazio e le operazioni di proiezione di punti, rette, linee, piani, superfici, tutto lo spazio, in direzione ortogonale al parallelogramma π .

Nel foglio π della tv_2 prevale il ragionamento geometrico, senza il quale, affidandoci alla vista, si ha il senso di smarrimento; una nuvola minacciosa di punti, rette, linee, archi, essenziali e profondamente significativi, per chi, sapendo, può acchiappare la realtà rappresentata, superando l'insufficienza e le insidie dell'apparenza.

Esaminiamo la tv_2 ; su π sono date le proiezioni x', y', z' , di una terna di assi spaziali x, y, z , che non si vedono, si sanno; su x' è scelto a piacere un punto T_x ; consegue che la terna è agganciata a π ; la traccia di xy su π è la t_{xy} ortogonale a z' ; y' e la t_{xy} hanno in comune T_y ; i punti che stanno su π non hanno apice.

Si ribalta xy su π , ruotandolo intorno alla t_{xy} ; il punto O dello spazio si ribalta in (O) e HO , retta di massima pendenza di xy rispetto a π , appare in $H-(O)$ in vera grandezza e risulta sovrapposta a z' e alla sua proiezione $H-O'$.

Questo ribaltamento permette di ottenere i ribaltamenti di $O-x$, di proiezione $O'-x'$, in $(O)-T_x$, non segnata in figura; nel ribaltamento si stabilisce fra i punti di xy ribaltato e le corrispondenti proiezioni un'omologia affine ortogonale definita dall'asse t_{xy} , retta di punti uniti, e dalla coppia di punti omologhi $(O), O'$, ovvero $T_x-(O), T_x-O'$.

Scegliamo le direzioni ortogonali (a), (b) uscenti da (O) ; esse incidono la t_{xy} in A, B ; la loro proiezione su π è data dalle dire-

zioni omologhe $A-O'$, $B-O'$; l'angolo retto $A-(O)-B$ diventa $A-O'-B$, non più retto; queste, nella tv_1 , sono le direzioni dei lati del parallelogramma π , di dimensioni a piacere, che accoglie il sistema proiettivo.

A questo punto nella tv_1 scegliamo la posizione di O' ; la proiezione z' di z sia parallela a b' ; a piacere è scelta l'inclinazione dell'immagine di $z=O-T_z$ rispetto alla sua proiezione $z'=O'-T_z'$, parallela alla b' del parallelogramma,

L'immagine $O-O'$ della quota di O rispetto al parallelogramma appare accorciata; si tratta di una direzione ortogonale al piano del parallelogramma; nella tv_2 è il segmento $h_o'=1-2$, parallela a z' .

Ricordiamo che l'accorciamento dei segmenti paralleli a z si ottiene considerando il ribaltamento intorno ad $H-O'$ del piano proiettante z in z' ; si ricavano O^* , $H-O^*$ che è il ribaltamento della retta di massima pendenza $H-O$, e, ortogonale alla $H-O^*$ ricaviamo la z^* .

Ogni misura di segmento parallelo a z , riportata su z^* è proiettata su z' secondo la O^*-O' , ottenendone l'accorciamento; viceversa, nella tv_2 , la $2-3$ parallela alla O^*-O' definisce in $1-3$ la vera quota del punto O della tv_1 .

Il triangolo $(O)-4-5-(O)$ della tv_2 nella tv_1 è $T_z'-O'-O-T_z'$; la $5-6$ completa il triangolo $(O)-4-6-5-(O)$, retto in 5 e corrispondente

nella tv_1 al triangolo $T_z-O'-H-O-T_z$; in proiezione, nella tv_2 , è $O'-1-7-2-O'$.

L'arco di centro 6 e raggio $6-5$ individua sulla $(O)-6$ il punto 8 ; l'ortogonale alla (b) condotta per il 6 interseca nel punto 9 un raggio condotto a piacere per il punto 8 e nel punto 10 il raggio condotto per il punto 8 ortogonalmente ad $8-9$.

Gli omologhi 12 e 13 di 9 e 10 uniti al 2 costituiscono il triangolo $12-7-13-2-12$ che nella tv_1 rappresenta la faccia $T_x-H-T_y-O-T_x$; operando per riporto parallelo, la b' con i suoi punti $O'-1-7$ definisce la $T_z-O'-H$, altrimenti indicata come $z'-pm_{xy}$; la $O'-2-7$ si riconosce in T_z-O-H , indicata anche come z e pm_{xy} ; il triangolo $O'-13-12-O'$ si ritrova in $T_z-T_y-T_x-T_z$.

Possiamo intravedere la piramide della terna capovolta che si proietta in 1 , unito con 12 , 13 , O' , corrispondente nella tv_1 alla terna x', y', z' , di origine O' .

In conclusione, la imprescindibile ragione etica di offrire all'occhio, anche inesperto, una guida figurativa veramente e seriamente corretta, sconsiglierebbe l'uso, purtroppo molto frequente, di immagini "spaziali" eccessivamente impegnate alla osservanza delle regole sottintese, senza una effettiva incidenza sulla completezza dell'esposizione di problematiche del tipo discusso.

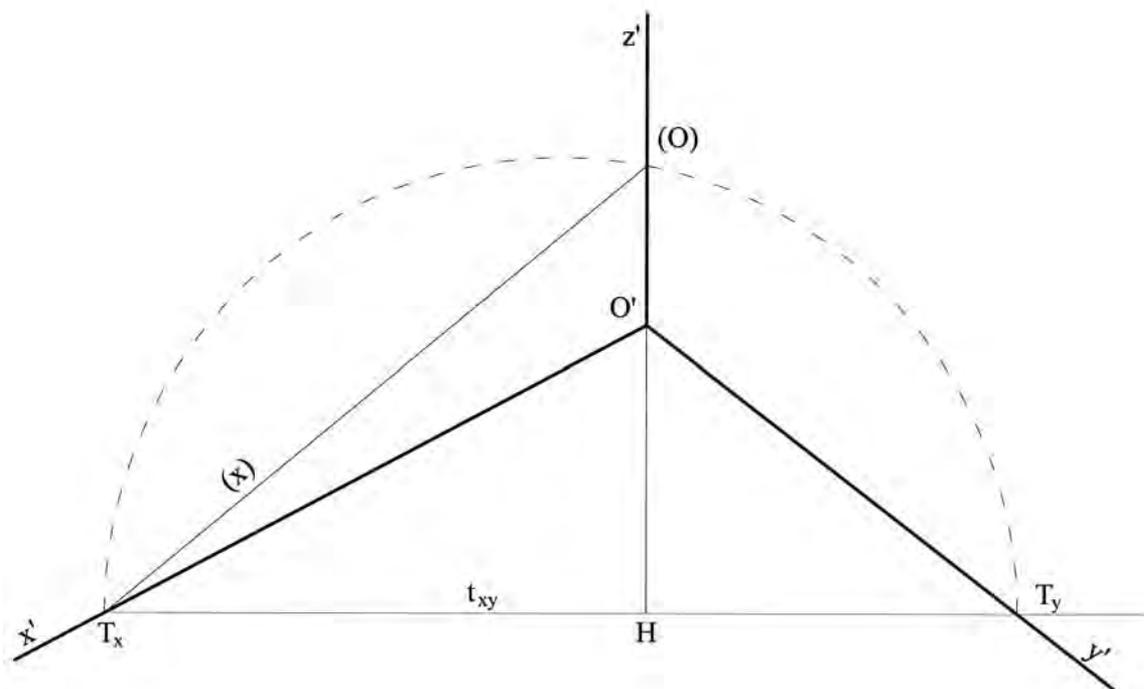


Figura 2a

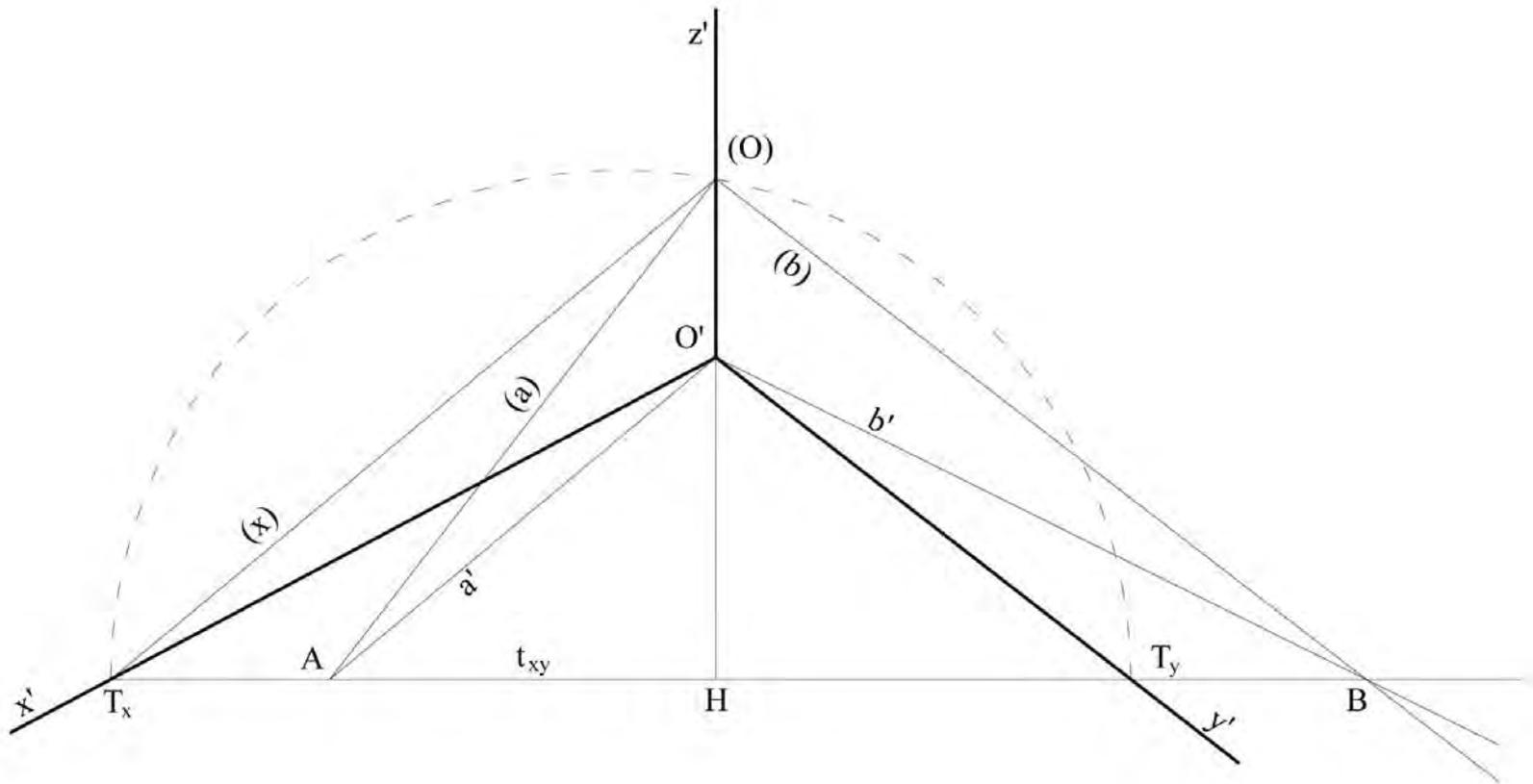


Figura 2b

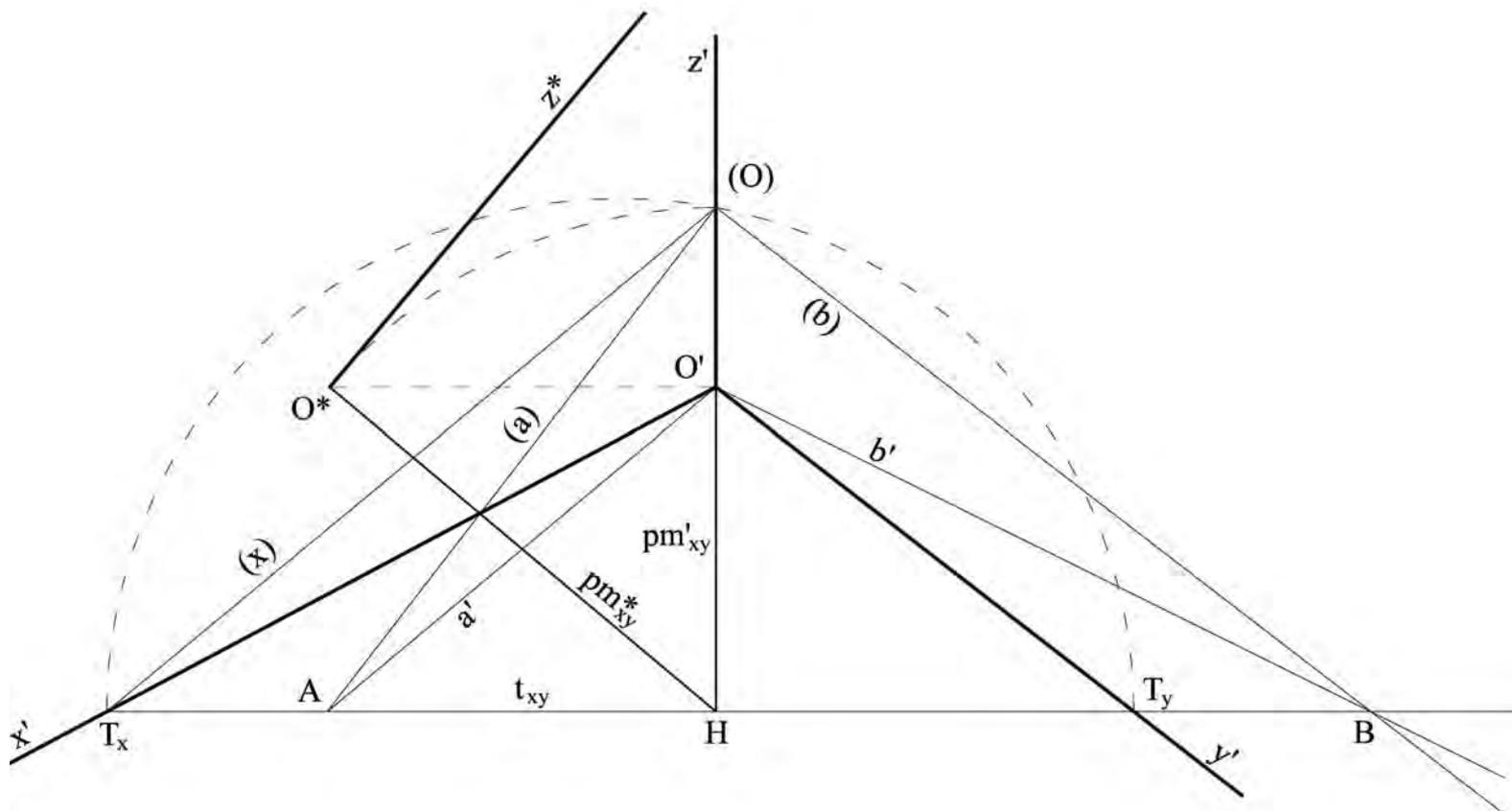


Figura 2c

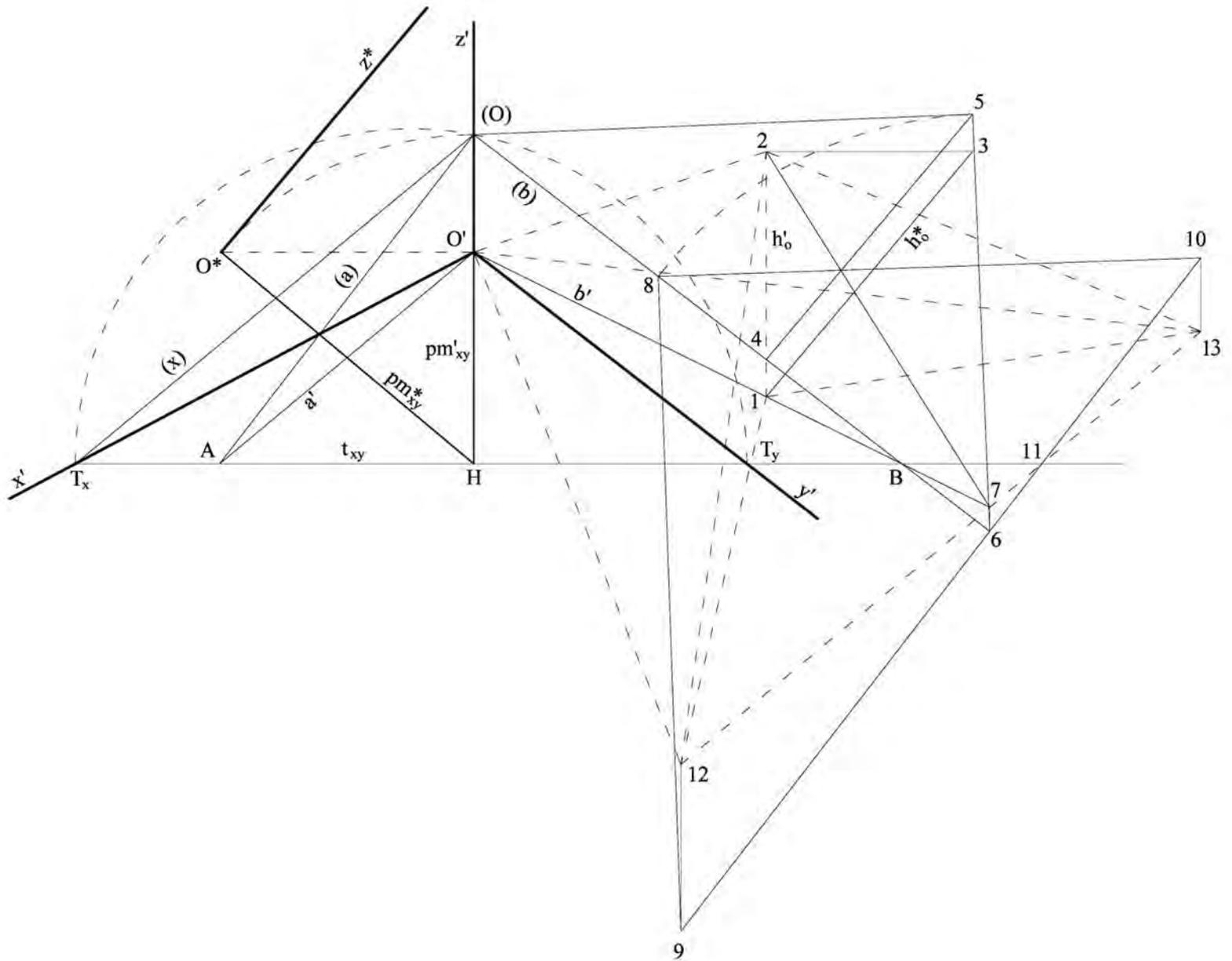


Figura 2d

Capitolo 3

Proiezione assonometrica ortogonale su π di una figura di xy . (fig. 3a, 3b)

Riportiamo sul foglio-quadro π la proiezione già effettuata di una terna trirettangola spaziale x, y, z , di origine O (fig. 3a); della terna reale, liberamente scelta come riferimento dei punti dello spazio, non si vede niente; disponiamo solo di O', x', y', z' . Possiamo solo immaginare un punto O appartenente alla retta ortogonale al foglio π , condotta per O' , e posto a una certa distanza $O-O'$ da π ; per questo punto O pensiamo di considerare tre rette-assi x, y, z , fra loro a 90° , liberamente, purchè nessuna di esse parallela od ortogonale a π , il che equivale all'altra condizione vincolante, che nessuno dei tre piani risulti parallelo od ortogonale a π .

La libertà condizionata dipende dal tentativo, non sempre possibile, di evitare che la vista di una figura piana annulli la sua forma presentandosi come un indistinto segmento, o che un segmento annulli la sua dimensione appearing come un punto. Gli assi x, y, z , sono rette e in quanto tali sono di lunghezza infinita, per cui dire che O sia l'origine è un eufemismo, accettabile solo se teniamo conto dei punti della retta prima o dopo il punto O .

Peraltro di ogni retta può disegnarsi solo un segmento, per quello che permette il campo grafico visibile di π , la dimensione del foglio; ricordiamo, inoltre, che qualsiasi retta interseca un qualsiasi piano in un punto reale e qualsiasi piano interseca un altro piano secondo una retta reale.

Dunque, l'ortogonale per O determina su π la proiezione O' , ciascuno dei tre assi, obliquo rispetto a π , vi determina, al finito, un punto di intersezione, detto traccia, T_x, T_y, T_z , e ciascuno dei tre piani, obliquo rispetto a π , vi determina, al finito, una retta di intersezione, detta traccia, t_{xy}, t_{yz}, t_{zx} .

Osserviamo che la traccia di ciascuno dei tre piani coordinati deve contenere le due tracce degli assi appartenenti al piano, cioè risultano $t_{xy} = T_x - T_y, t_{yz} = T_y - T_z, t_{zx} = T_z - T_x$.

Il triangolo apparente di vertici T_x, T_y, T_z , è detto triangolo delle tracce; notiamo che se $O-O'$ aumenta, cioè se allontaniamo O da π , il detto triangolo ingrandisce e viceversa se $O-O'$ diminuisce, si annulla, passa dietro a π , invertendo il suo segno, il detto triangolo diminuisce, si annulla, si inverte.

La proiezione di qualsiasi elemento, puntiforme, piano, volumetrico, non cambia se varia la distanza di impostazione $O-O'$; non cambia la proiezione se non cambia la esposizione degli elementi rispetto alla giacitura del quadro π .

Su π poniamo come dati $O'-x', O'-y', O'-z'$; i loro angoli possono variare liberamente fra 90° e 180° , esclusi i detti valori estremi; si preferisce disporre z' in direzione verticale.

Secondo le inclinazioni dei tre assi con il quadro π , può risultare che i tre angoli fra le proiezioni degli assi siano uguali, oppure che siano solo due uguali oppure che siano tutti diversi; nel primo caso l'assonometria ortogonale è isometrica o monometrica, nel secondo dimetrica, nel terzo trimetrica; cambia qualche semplificazione non fondamentale; la trimetrica è il caso più generico; quella trimetrica corrisponde al massimo grado di libertà di scelta, per prevedere e ottenere determinati effetti visualizzanti.

Consideriamo due casi: per la costruzione di un oggetto in assonometria si può disporre: 1) solo delle coordinate dei punti singolari dell'oggetto, cioè si tratta di una vista ottenuta per traduzione assonometrica di dati numerici; 2) di lunghezze, angoli, figure, relazioni geometriche di simmetrie, di distanza, di esposizione, cioè si tratta di una vista ottenuta per dati qualitativi, oltre che quantitativi; la metodologia assonometrica fondata sulla conoscenza della geometria che struttura

l'immagine da ottenere è attiva, speculativa, poco meccanica e poco ripetitiva.

Riprendiamo l'osservazione della terna e motiviamo l'ortogonalità di t_{xy} a z' , di t_{yz} a x' , di t_{zx} a y' ; il piano ortogonale a π e proiettante z in z' contiene $O-O'$ e z , per cui è ortogonale contemporaneamente a π ed a xy , e alla loro retta comune, t_{xy} , la quale è ortogonale a tutte le rette del piano considerato, anche alla z' ; analogo discorso vale per t_{yz} e per t_{zx} ; la traccia di un piano coordinato è ortogonale all'asse di cui non contiene la traccia; O' è ortocentro del triangolo $T_x-T_y-T_z$.

Immaginiamo O dietro il foglio π a distanza $O-O'$, che più avanti sarà determinata; da O seguiamo gli assi x ed y in avvicinamento a π , fino a intersecarlo in T_x e T_y .

Il triangolo T_x-O-T_y , retto in O , fa parte di xy , è inclinato rispetto a π , e lo interseca secondo la $T_x-T_y=t_{xy}$; esso si proietta su π secondo $T_x-O'-T_y$, ma può ribaltarsi su π ruotando intorno alla t_{xy} , apparendovi nella sua vera forma di triangolo rettangolo di cui la T_x-T_y è ipotenusa.

Il vertice O , in proiezione O' , ruota intorno all'ipotenusa percorrendo un arco di centro H e raggio $H-O$, appartenente al piano proiettante di traccia z' , ortogonale all'asse di rotazione; O raggiunge π in (O) , comune a z' e alla semicirconferenza circoscritta al triangolo rettangolo.

Dunque, data la terna x', y', z' , e definito il quadro π segnando una t_{xy} ortogonale a z' e incidente x' e y' in T_x e T_y , si costruisce la semicirconferenza sul diametro T_x-T_y , e si ottiene (O) su z' .

Importante notare che ad $O'-T_x=x'$ corrisponde $(O)-T_x=(x)$ e viceversa, che ad A_x' di x' corrisponde (A_x) di (x) , essendo $A_x'-(A_x)$ parallelo ad $O'-(O)$; la corrispondenza fra gli elementi ribaltati e le relative proiezioni è una omologia affine ortogonale. Essa è definita dall'asse di omologia t_{xy} , dalla coppia di punti omologhi (O) , O' , e dal centro di omologia improprio $O'-(O)$ ortogonale alla t_{xy} ; nell'omologia le rette omologhe si incontrano sempre sull'asse e punti omologhi sono allineati con il centro.

In questo caso il centro è all'infinito e ogni coppia di punti omologhi è unita da una retta parallela ad $O'-(O)$; due rette per due punti omologhi sono omologhe se si incontrano su t_{xy} ; scambiando di posto (A_x) con A_x' , i due punti non sono omologhi.

Consideriamo la coppia di punti omologhi (1) su (x) , e $1'$ su x' con $(1)-1'$ parallelo ad $(O)-O'$ se una retta (r) condotta per (1) è parallela all'asse t_{xy} , la retta omologa r' deve contenere $1'$ e incontrarsi con la (r) su t_{xy} , all'infinito, cioè la r' è parallela alla t_{xy} .

I punti di xy possono essere ovunque, interni o esterni al campo grafico; un punto in campo, come (B_{xy}) di (r) ha per omologo B_{xy}' su r' ; assegnato (C_{xy}) , l'omologo C_{xy}' si ottiene considerando per (C_{xy}) la (s) parallela a t_{xy} , dal (2) su (y) si passa al $2'$ su y' , la s' omologa alla (s) è parallela a t_{xy} e individua l'omologo C_{xy}' ; posso appoggiare la ricerca di C_{xy}' anche a qualsiasi altra coppia di punti omologhi; per esempio l'omologa della $(C_{xy})-(O)$, incidente la t_{xy} in 3 , è la $O'-3-C_{xy}'$; la $(C_{xy})-(A_x)-(C_{xy})$ e l'omologa $A_x'-C_{xy}'$ devono incontrarsi su t_{xy} .

Data su xy la poligonale chiusa (fig. 3b) $(3)-(4)-(5)-(6)-(7)-(8)-(9)-(10)-(11)-(12)$, il lato $(3)-(4)$ può appoggiarsi alla (x) considerando la $(3)-(4)-13-(14)$ e l'omologa $14'-13-4'-3'$; si prosegue con la $(5)-(4)-15$ e l'omologa $15-4'-5'$; le omologhe di rette parallele fra loro hanno direzione diversa ma ancora parallele fra loro; ciò riguarda i lati $(5)-(6)$, $(11)-(12)$, $(9)-(10)$, paralleli al $(3)-(4)$, e i lati $(6)-(7)$, $(11)-(10)$, $(12)-(3)$, paralleli al $(4)-(5)$; dal $(7)-7'$ si ricava $(8)-8'$; il lato $(9)-(8)$ ha la direzione di massima pendenza $H-O'$; anche la $(3)-(4)-13-(16)$ ricava la $16'-13-4'-3'$, appoggiandosi alla $18-(O)$ e all'omologa $18-O'$; la $19-(O)$ ortogonale alla $18-(O)$ ha per omologa la $19-O'$; l'angolo $18-O'-19$ in realtà è retto; le due rette $18-O'$ e $19-O'$ sono dette coniugate.

Osserviamo che, rispetto alla t_{xy} , la figura proiettata risulta sempre più vicina di quella ribaltata, e che le due figure conservano la rigida corrispondenza verticale.

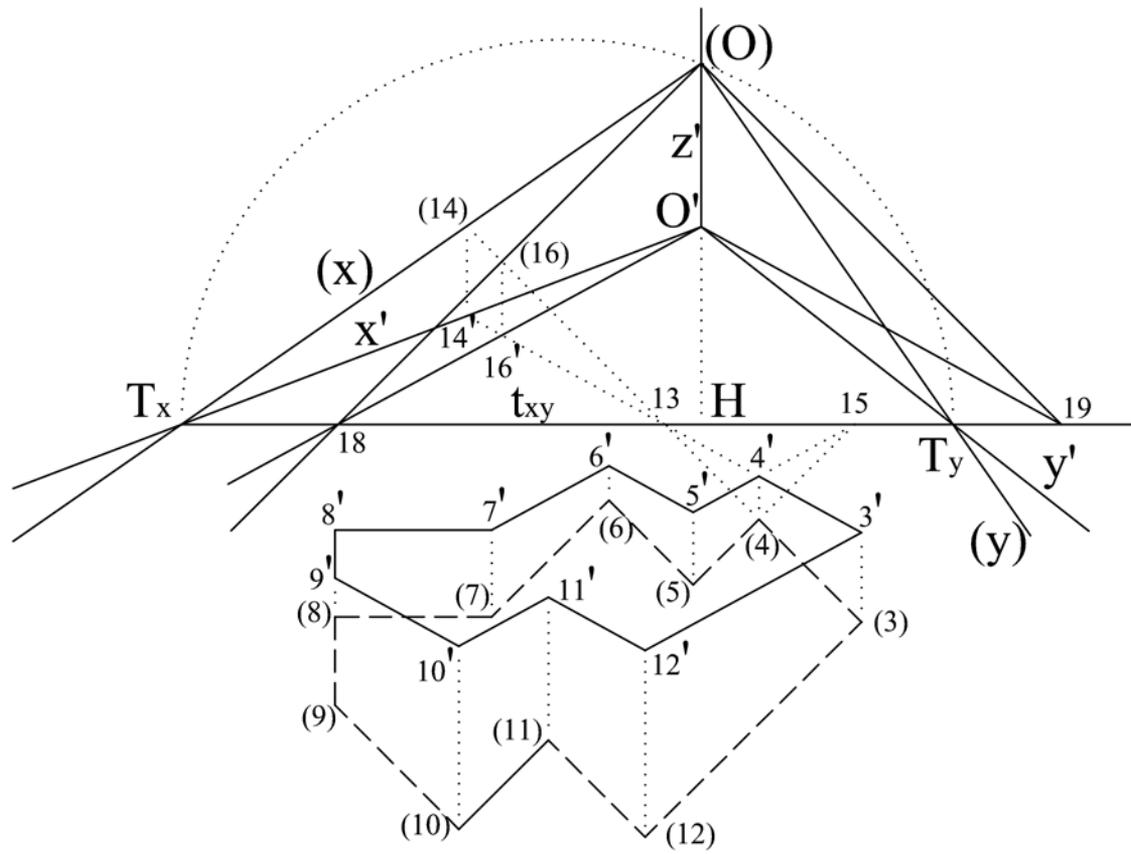


Figura 3b

Capitolo 4

Punti e distanza fra punti. (fig. 4a, 4b, 4c)

Di un punto P (fig. 4a) siano date le tre coordinate in vera grandezza; le riportiamo da (O) in (O)-(P_x) su (x), in (O)-(P_y) su (y), in (O)-(P_z) su (z) parallela alla z*, le ricaviamo in proiezione, O'-P'_x su x', O'-P'_y su y', O'-P'_z su z', e da esse otteniamo le proiezioni delle proiezioni di P sui piani coordinati, P'_{xy}, P'_{yz}, P'_{zx}; da queste si ha P'.

Se di P sono dati P' e P'-P'_{xy}, si possono ricavare le coordinate sui piani, le coordinate sugli assi e intercettare (O)-(P_x) su (x), (O)-(P_y) su (y), (O)-(P_z) su (z) parallela alla z*, lavorando direttamente sul foglio π.

Il punto dato è collocato in uno degli otto triedri; P appartiene al triedro +x, +y, +z; può appartenere al triedro -x, +y, +z; al triedro -x, -y, +z; al triedro +x, -y, +z; al triedro -x, +y, -z; al triedro -x, -y, -z; al triedro +x, -y, -z; al triedro +x, +y, -z; se una delle coordinate si annulla, il punto appartiene ad una delle quattro regioni di xy, o di yz, o di zx; se due delle coordinate si annullano, il punto appartiene all'asse relativo alla coordinata nonnulla nelle sua parte positiva o negativa; per coordinate tutte nulle il punto P' è in O'; è intuibile cosa cambia o permane, se P si muove ortogonalmente a un piano, ovvero parallelamente ad un asse.

Nella fig. 4b, sono dati i punti P (P', P'_{xy}) e Q (Q', Q'_{xy}); vogliamo determinare la loro distanza P-Q, cioè la distanza apparente P'-Q', in vera grandezza; condotta O'-1 parallela a P'_{xy}-Q'_{xy}, si ricava l'omologa 1-(O) e se ne considera la parallela P'_{xy}-2, vera lunghezza di P'_{xy}-Q'_{xy}; la riportiamo in 5-6.

Della differenza di quota Q'-3 otteniamo la vera lunghezza Q'-4; la riportiamo in 5-7 ortogonale alla 5-6; l'ipotenusa 6-7 è la distanza P-Q richiesta.

Determiniamo la distanza di P da O; alla P'_{xy}-8-O' è omologa la (O)-8-9, vera lunghezza di P'_{xy}-8-O', che si riporta in 11-12; la vera lunghezza della quota, P'_{xy}-P', è la P'-10, che si riporta in 11-13, ortogonale alla 11-12; la 12-13 è P-O.

Una lettura comparativa sulla lunghezza proiettata o in vera grandezza è molto utile; ciò che appare non è la realtà e se non si impara a leggere col cervello e non con gli occhi, ci esponiamo a pesanti buggerature.

Nella fig. 4c, sia r' la retta r che unisce un punto P di zx con un punto Q di yz; rispetto al piano orizzontale xy, la r' appare parallela a t_{xy}; si tratta, forse, di una retta orizzontale? No! E la s' rappresenta una retta orizzontale: bisogna provarlo ed è sì!

P'_{zx} ha la quota su x' minore di quella che Q'_{yz} ha su y'; quindi è inclinata; per diventare orizzontale P'_{zx} si deve spostare in K'_{zx}; non leggiamo se non riflettiamo.

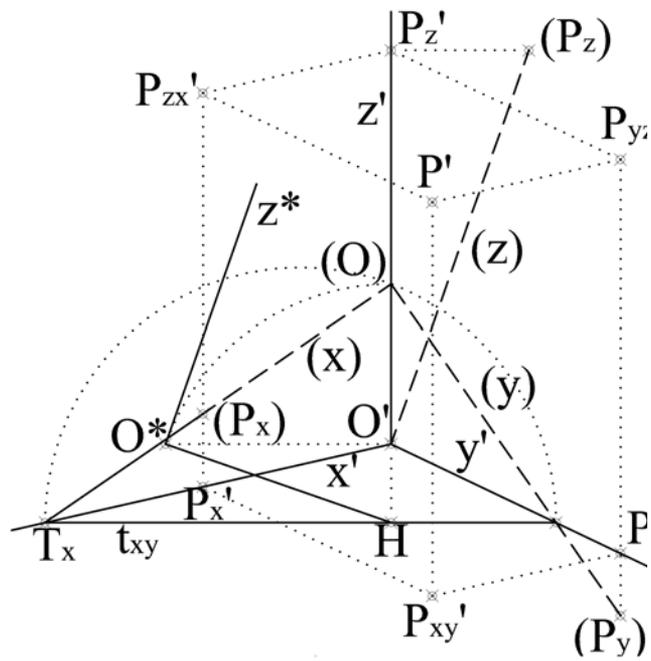


Figura 4a

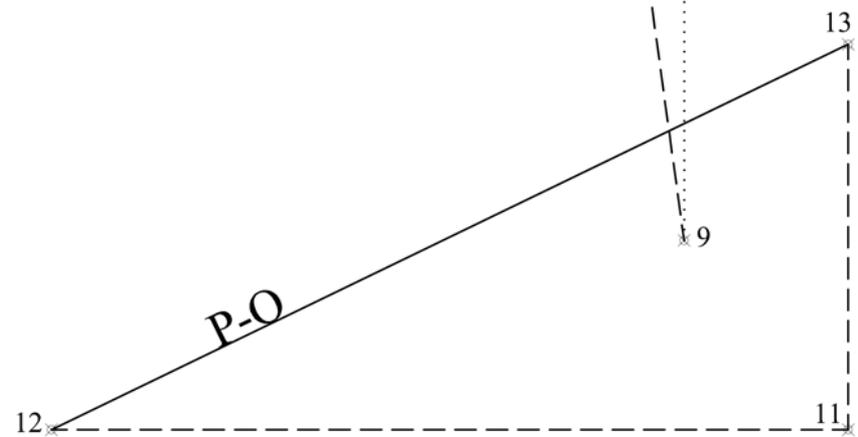
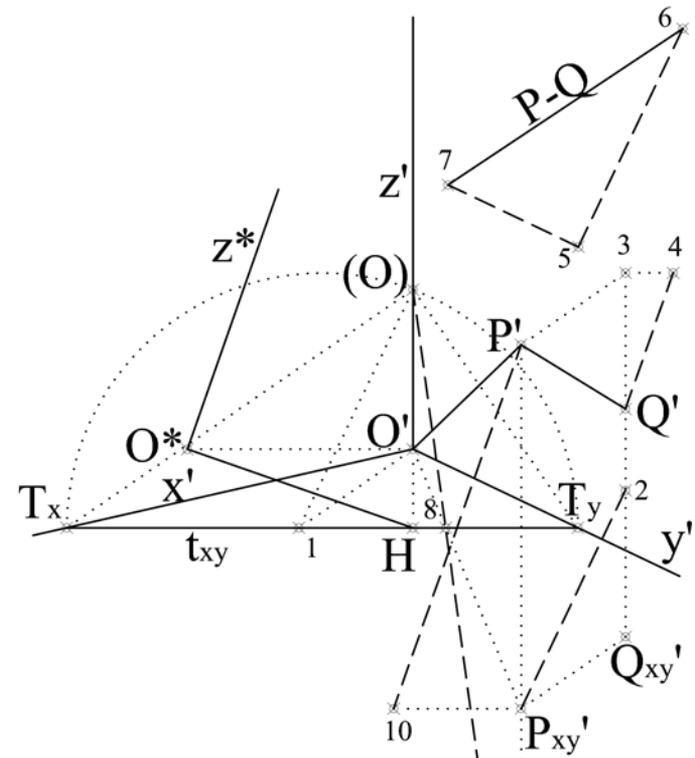


Figura 4b

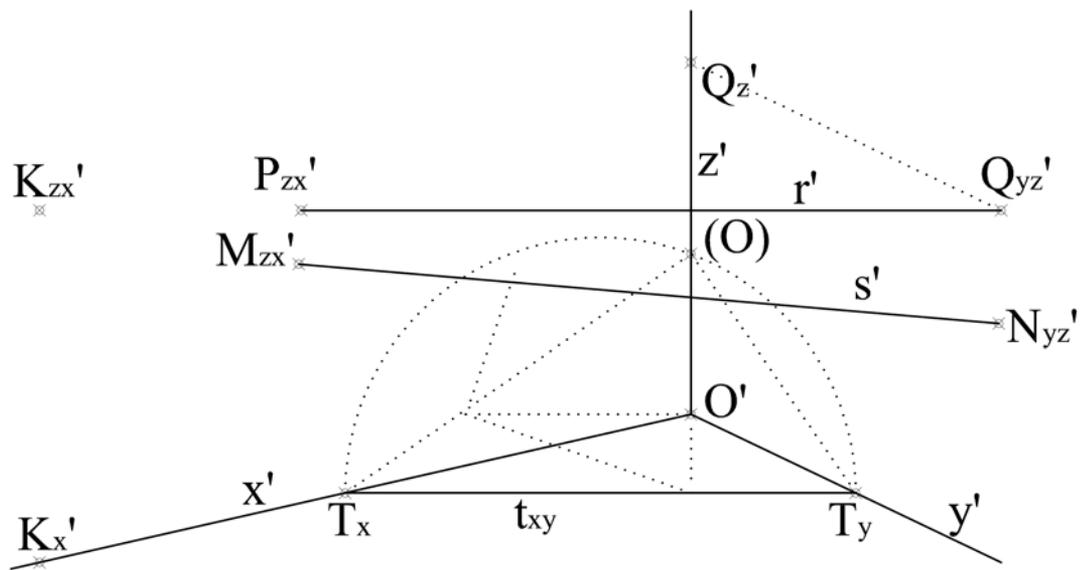


Figura 4c

Capitolo 5

Rette generiche e particolari. (fig. 5a, 5b)

Vogliamo disegnare in assonometria ortogonale una retta r generica, cioè, che non sia parallela od ortogonale ai piani o agli assi coordinati; teniamo conto che una retta, non un segmento, interseca sempre e non per prolungamento, in un punto reale, detta traccia, con proiezione in campo o fuori campo, un piano, non una sua porzione limitata.

Una sola proiezione della retta r , per esempio la r' , non basta a definirla nel sistema di riferimento O', x', y', z' , proiezione della terna spaziale O, x, y, z , sul quadro π definito dalla t_{xy} .

Di r possiamo assegnare la r' e la proiezione r_{xy}' della sua proiezione r_{xy} su xy ; possiamo assegnare solo le proiezioni di due tracce della r , mai tutte e tre, per esempio le $T_{r_{zx}}'$ e $T_{r_{xy}}'$, proiezioni della traccia $T_{r_{zx}}$ della r con il piano zx e della traccia $T_{r_{xy}}$ di r con xy . (fig 5a) Tali tracce possono essere definite dalle proprie coordinate; per esempio la $T_{r_{xy}}'$ ha le coordinate $O'-T_{r_{xy}}'$ su x' e $O-T_{r_{xy}}$ su y' , previo accorciamento di quelle reali riportate da (O) su (x) e su (y) e trasformate per omologia di ribaltamento, affine ortogonale, di asse t_{xy} e coppia di punti omologhi $(O), O'$.

Avendo i dati essenziali per definire la proiezione della retta, possiamo ricavare, se serve, gli elementi mancanti, le proiezioni delle tracce, le proiezioni delle proiezioni sui piani coordinati, le proiezioni delle coordinate delle tracce.

Un punto P_r della retta r ha la proiezione P_r' su r' ; le proiezioni $P_{r_{xy}}', P_{r_{yz}}', P_{r_{zx}}'$, delle proiezioni di P sui piani xy, yz, zx , devono trovarsi rispettivamente su $r_{xy}', r_{yz}', r_{zx}'$.

La retta può essere definita assegnandone due suoi punti P_r ($P_r', P_{r_{xy}}'$), Q_r ($Q_r', Q_{r_{xy}}'$), da cui si ottiene r' per P' e Q' ed r_{xy}' per $P_{r_{xy}}' - Q_{r_{xy}}'$; attenzione alle appartenenze, che devono essere sempre omonime.

A proposito del saper leggere, osserviamo la z' inferiore ad O' a cui appartiene $T_{r_{yz}}'$, da $O'-H$ appartenente ad xy ; quando la retta è data da due tracce, queste possiamo sceglierle comunque al finito, dando luogo a innumerevoli casi di rette particolari o di interpretazione difficoltosa, richiedente una certa riflessione.

Per esempio, per una retta s ortogonale a xy , la traccia al finito è unica, poiché le altre due sono all'infinito; la s_{xy}' si riduce a un punto sovrapposto alla $T_{s_{xy}}'$ ed s', s_{zx}', s_{yz}' , sono parallele a z' ; la retta s è anche una parallela a z .

Nella fig. 5b consideriamo alcune rette particolari; una retta a ($a', a_{xy}', a_{yz}', a_{zx}'$), parallela al piano orizzontale xy ; una retta t ($t', t_{xy}', t_{yz}', t_{zx}'$) appartenente a xy ; una retta b ($b', b_{xy}', b_{yz}', b_{zx}'$). La retta parallela ad xy mostra tutti i suoi punti a distanza costante da xy , la a' è parallela ad a_{xy}' ; le tracce al finito sono due, $T_{a_{yz}}', T_{a_{zx}}'$, mentre la $T_{a_{xy}}'$ è all'infinito; la a_{zx}' e la a_{yz}' sono parallele rispettivamente ad x' e ad y' ; identiche considerazioni e conclusioni adattate valgono per una retta frontale, parallela a zx e per una retta laterale di profilo parallela a yz .

Se proviamo a tener ferma la $T_{a_{zx}}'$ ed a ruotare la a sempre parallelamente a xy si hanno casi analoghi, che presentano particolarità diverse; a un certo punto la a si dispone in modo da presentare la a' con direzione parallela a z' , ma non si tratta di retta verticale, ma sempre orizzontale, con la a_{yz}' parallela ad y' ; la predetta rotazione può portare la a ad appartenere a zx , per cui la a' è sovrapposta alla a_{zx}' , la a_{xy}' sovrapposta a x' e la a_{yz}' ridotta a un punto su z' , nell'intersezione di a con z .

Se teniamo ferma la $T_{a_{yz}}'$ e ruotiamo la a parallelamente a xy , si manifesta a un certo punto che la a' è parallela a x' , ad a_{xy}' e ad a_{zx}' , mentre la a_{yz}' si sovrappone a $T_{a_{yz}}'$.

Occorre conquistarci l'immaginazione geometrico-spaziale, che attraverso la visione razionale e riflessiva, ci consente di

muovere le entità rappresentate seguendone con logica gli effetti modificativi dei movimenti pensati.

La retta t appartiene ad xy ; allora la t_{xy}' è sovrapposta alla t' , la T_{tzx}' è su x' , la t_{zx}' si sovrappone a x' , la T_{tyz}' è su y' e la t_{yz}' si sovrappone a y' ; possiamo dedurre conclusioni adattate per i casi in cui la t appartenga ai piani coordinati yz e zx .

Consideriamo un punto P (P' , P_{xy}' , P_{yz}' , P_{zx}') e un punto di y ; la retta b che li unisce, ha su questo punto T_{by} sia la traccia T_{bxy} su xy che la T_{byz} su yz ; in proiezione si ha un triplice punto $T_{by}' = T_{bxy}' = T_{byz}'$ appartenente a y' e alla retta b' , a cui appartie-

ne P' ; la terza proiezione di T_{by}' è O' ; la b_{xy}' è data dalla $T_{bxy}' - P_{xy}'$ su $x'y'$; la b_{yz}' è data dalla $T_{byz}' - P_{yz}'$ su $y'z'$; la b_{zx}' è data da $P_{zx}' - O' - T_{bzx}'$ su $z'x'$; la T_{bzx}' è comune a b' e b_{zx}' .

Anche qui possiamo proporre spostamenti di P' , fermo restando T_{by}' ; è un'indagine interessante per il dominio dell'argomento; si può pensare che alla $c=O-P$, non segnata in figura; si devono considerare $c' = O'-P'$, $c_{xy}' = O'-P_{xy}'$, $c_{yz}' = O'-P_{yz}'$, $c_{zx}' = O'-P_{zx}'$; le tracce coincidono in O' ; spostando P si possono individuare posizioni e direzioni strane, particolari, forse problematiche; sono casi degni di essere trattati.

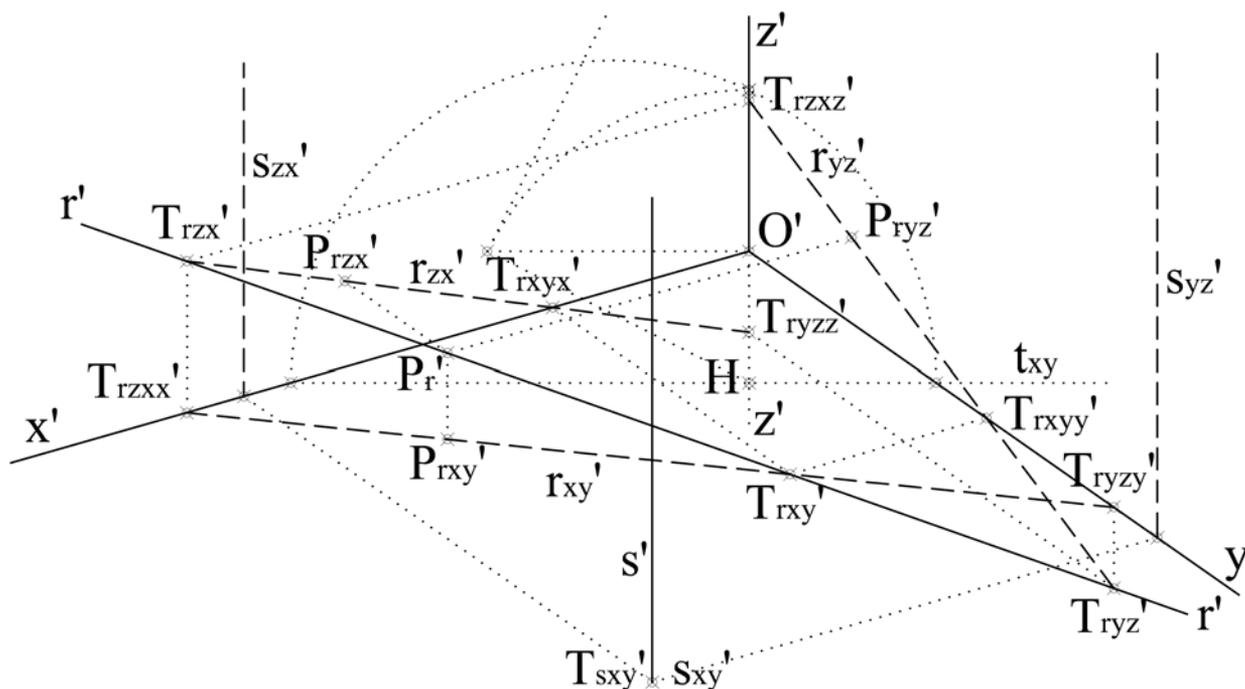


Figura 5a

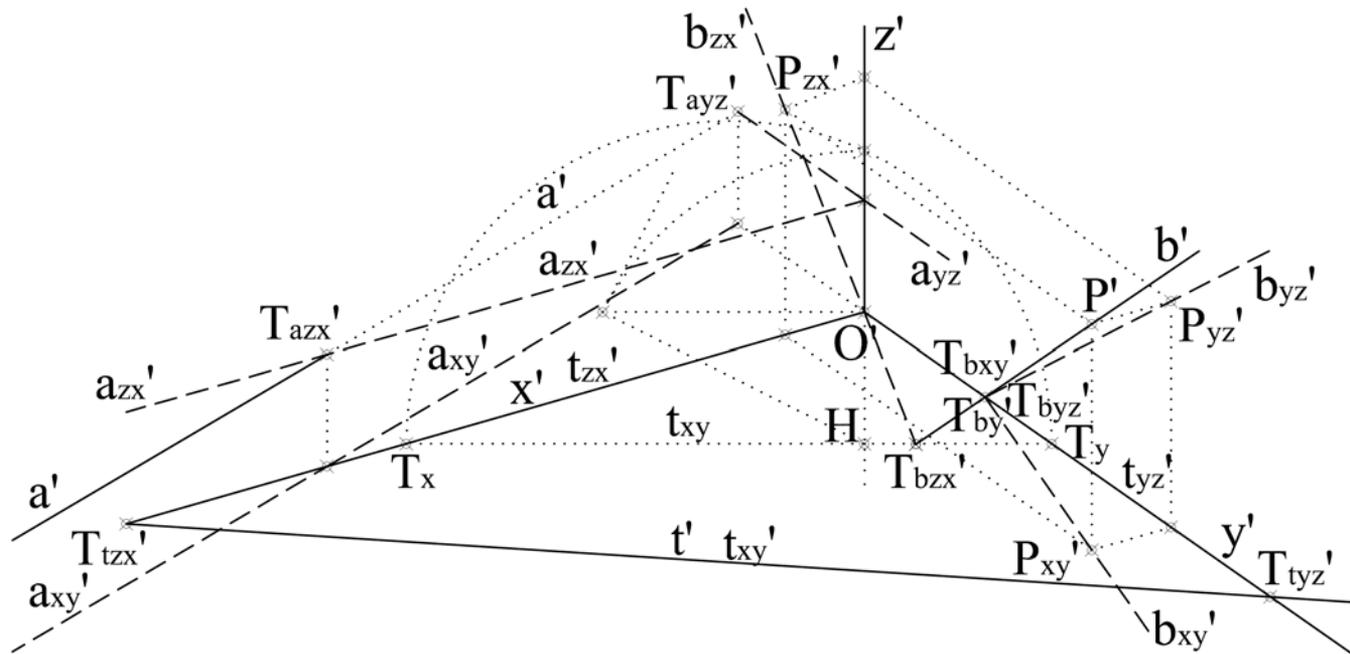


Figura 5b

Capitolo 6

Rette di un piano. (fig. 6a, 6b, 6c)

In fig. 6a leggiamo un piano α ($t_{\alpha xy}$, $t_{\alpha zx}$); se è necessario, la $t_{\alpha yz}$ per $T_{\alpha z}$ deve incontrare la $t_{\alpha xy}$ su y' in $T_{\alpha y}$ fuori campo; possiamo seguire diverse vie; si possono usare i triangoli omotetici considerando il triangolo $T_{\alpha x}-O'-T_{\alpha z}$ e scelto sulla $t_{\alpha xy}$ un punto 1, per esso conduciamo le parallele 1-2 a $T_{\alpha x}-O'$ e intersecando la y' , seconda retta della triade convergente su $T_{\alpha y}$, in 2, per il 2 la parallela alla $O'-T_{\alpha z}$ e ancora per 1 la parallela alla $T_{\alpha x}-T_{\alpha z}$ individuando per intersezione il punto 3; la $T_{\alpha z}-3$ è la $t_{\alpha yz}$, che incontrerà fuori campo la $t_{\alpha xy}$ proprio su y' .

Se su x' è scelto un punto vicino ad O' e per esso conduciamo le parallele alla $t_{\alpha xy}$ e alla $t_{\alpha zx}$ la congiungente i punti di intersezioni delle predette parallele con y' e z' , è la direzione della $t_{\alpha yz}$, che può tracciarsi per $T_{\alpha z}$; il problema è stato risolto usando il triangolo omotetico alle proiezioni dei punti traccia di α con gli assi.

Una retta appartiene al piano α se le sue tracce stanno sulle tracce omonime di α ; la g di proiezione g' è una retta generica di α ; $T_{\alpha xy}$ appartiene alla $t_{\alpha xy}$, $T_{\alpha yz}$ appartiene alla $t_{\alpha yz}$; $g_{xy}' = T_{\alpha xy}-4$, $g_{yz}' = T_{\alpha yz}-5$, $g_{zx}' = 6-7-T_{\alpha zx}$, fuori campo sulla $t_{\alpha zx}$, sono le proiezioni delle proiezioni di g sui piani coordinati.

Non possiamo affidarci all'apparente direzione della retta; la sua vera direzione può ottenersi per restituzione dei segmenti che componendosi ricostruiscono lo spazio.

La f di proiezione f' è una retta frontale di α , cioè parallela a xz ; f' è parallela alla $t_{\alpha zx}$, $f_{xy}' = T_{\alpha xy}-4$ è parallela a x' , $f_{yz}' = 4-T_{\alpha yz}$ è parallela a z' , $f_{zx}' = 8-7$ è parallela a $t_{\alpha zx}$; $T_{\alpha xy}$ appartiene alla $t_{\alpha xy}$, $T_{\alpha yz}$ appartiene alla $t_{\alpha yz}$; $T_{\alpha zx}$ è all'infinito.

La o , di proiezione o' , è una retta orizzontale di α , parallela a xy ; o' è parallela a $t_{\alpha xy}$ e così pure la o_{xy}' ; $T_{\alpha ozx}-9$ è la quota di o su xy , accorciata secondo z^* ; la $o_{zx}' = T_{\alpha ozx}-10$ è parallela a x' , la

o_{yz}' è parallela a y' per il 10 e incontra la o' e la $t_{\alpha yz}$ in $T_{\alpha yz}$ sulla verticale dell'intersezione di o_{xy}' con y' .

Leggiamo con osservazione e riflessione le proprietà di ciascuna delle rette esaminate, imparando a riconoscerle dalle caratteristiche e a disegnarle rispettandone le caratteristiche che le individuano e le fanno riconoscere in proiezione.

Sul piano α (fig. 6b) esiste una direzione di retta molto importante, quella avente la direzione di massima pendenza di α rispetto a xy ; prima di ricavarla dobbiamo premettere alcune osservazioni.

Nello spazio la $t_{\alpha xy}$ è la retta comune ad α e ad xy ; il piano ortogonale ad essa interseca i due piani secondo due rette il cui angolo è il valore massimo rispetto ad altre giaciture sezionanti e non ortogonali; chiamiamo c la retta sezionata su α e c_{xy} la corrispondente su xy .

Quando un piano è ortogonale ad una retta, questa è ortogonale al piano e a tutte le rette del piano, alla c e alla c_{xy} ; la $t_{\alpha xy}$ è su xy , orizzontale, e il piano sezionante ortogonale ad essa è verticale, proiettante la c su xy in c_{xy} .

Allora ricaviamo prima la c_{xy} , proiezione su π della c_{xy} ; la sua direzione b' è coniugata alla direzione a' della $t_{\alpha xy}$ e si ottiene portando da O' la $a' = O'-1$ parallela alla $t_{\alpha xy}$, considerandone la omologa $a^* = (O)-1$; la $b^* = (O)-2$ ortogonale alla a^* ha per omologa la $b' = 2-O'$.

Vogliamo disegnare una retta c di α , di massima pendenza rispetto a xy ; si conduce per un punto traccia $T_{\alpha xy}$ della $t_{\alpha xy}$ la c_{xy} parallela a b' e incidente x' in 3; la verticale per il 3 ricava sulla $t_{\alpha zx}$ la traccia $T_{\alpha czx}$; la $c' = T_{\alpha cxy} - T_{\alpha czx}$ è la richiesta retta di massima pendenza di α su xy .

Proponiamoci di individuare il punto P_{α}' , proiezione su π di un punto P_{α} di α , datane la proiezione $P_{\alpha xy}$; consideriamo la retta orizzontale

o di α e imponiamo che la proiezione o'_{xy} della proiezione o'_{xy} della o di α contenga $P'_{\alpha xy}$; condotta per $P'_{\alpha xy}$ la o'_{xy} parallela alla $t_{\alpha xy}$ fino al 4 su x' , la verticale per il 4 ricava sulla $t_{\alpha zx}$ la $T'_{\alpha ozx}$; per la $T'_{\alpha ozx}$ si traccia la o' , parallela ancora alla $t_{\alpha zx}$ intersecando in P'_{α} la verticale per $P'_{\alpha xy}$. La costruzione ora descritta vale anche nel caso in cui, note le proiezioni P'_{α} e $P'_{\alpha xy}$, si voglia verificare l'appartenenza di P'_{α} ad α , ricordando che un punto appartiene ad un piano se le sue proiezioni appartengono alle omonime proiezioni della retta; se dopo la sequenza $P'_{\alpha xy}$ -4- $T'_{\alpha ozx}$, la o' , condotta per $T'_{\alpha ozx}$ parallela alla $t_{\alpha zx}$, contiene P'_{α} allora P'_{α} appartiene ad α .

Le due vie sono valide anche usando una qualsiasi delle infinite rette che possono appartenere ad α e contenerne il punto P'_{α} ; per esempio, la retta c può servire a ricavare P'_{α} , dato $P'_{\alpha xy}$, o a verificare che P' , P'_{xy} , siano proiezioni di P'_{α} di α .

In Fig. 6c vediamo due piani $\alpha (t_{\alpha xy}, t_{\alpha yz}, t_{\alpha zx})$, $\beta (t_{\beta xy}, t_{\beta yz})$; la loro intersezione è la retta $r_{\alpha\beta}$ di proiezione $r_{\alpha\beta}$, avente come traccia su xy il punto comune a $t_{\alpha xy}$ e $t_{\beta xy}$, e su yz il punto comune a $t_{\alpha yz}$ e $t_{\beta yz}$; di essa sono definite le proiezioni sulle proiezioni su xy , yz , zx ; la retta s_{α} , parallela a $r_{\alpha\beta}$ è parallela a β .

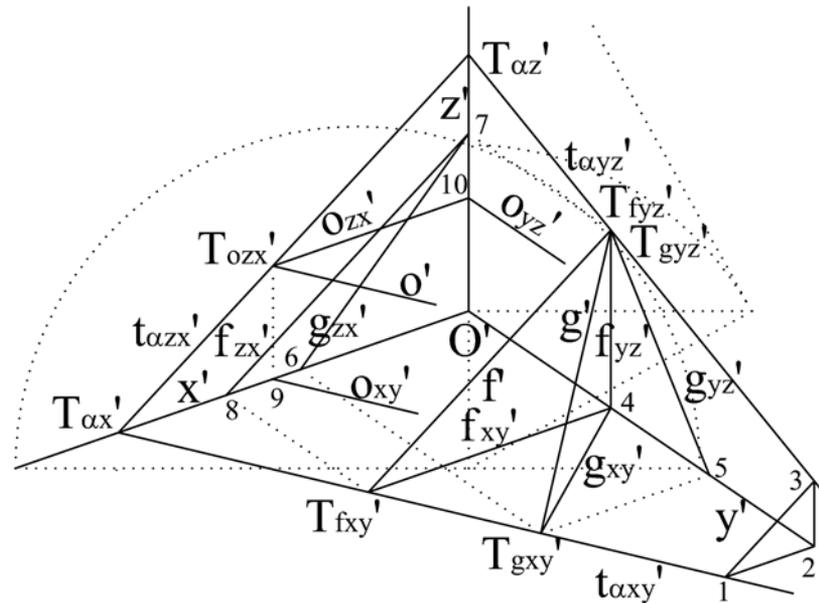


Figura 6a

Capitolo 7 – Quote

Riporto delle quote dei punti dello spazio relative al piano orizzontale xy . (fig. 7)

Scegliamo, liberamente come già esposto, per O' una terna x', y', z' , proiezione degli assi del riferimento spaziale x, y, z , di origine O ; il quadro π è definito appena è scelta la t_{xy} ortogonale a z' e incidente x' e y' in T_x, T_y .

Ribaltiamo xy su π , considerando la semicirconferenza di diametro T_x-T_y che incide z' in (O) ; $T_x-(O)-T_y$ retto in (O) è il ribaltato di T_x-O-T_y retto in O nello spazio, la cui proiezione su π è $T_x-O'-T_y$; la coppia $(O), O'$, definisce l'omologia di ribaltamento, affine ortogonale, di asse t_{xy} e centro $O'-(O)$, che lega ogni punto, linea, o figura di (xy) , ribaltamento di xy in vera grandezza, con la relativa proiezione assonometrica.

I punti della t_{xy} sono uniti; la $H-O$ è su xy , è ortogonale alla t_{xy} comune a xy ed a π , per cui è nello spazio la direzione della retta di massima pendenza di xy rispetto a π ; la sua proiezione è $H-O'$ e il suo ribaltamento è $H-(O)$ in vera grandezza.

La $O-O'$ è in proiezione il punto O' ed è ortogonale a π ; nel ribaltamento intorno a z' $O-O'$ si sposta ortogonalmente a z' ed O si sposta su tale ortogonale in O^* , la cui distanza da H deve restare pari ad $H-(O)$; l'arco di centro H e raggio $H-(O)$ interseca la predetta ortogonale a z' condotta per O' proprio in O^* . Osserviamo che $O'-O^*$ è la distanza di O da π ; la sua dimensione dipende dalla scelta della posizione della t_{xy} ; la pm_{xy}^* nel proiettarsi su π si accorcia in pm_{xy}' ; ogni segmento di xy , o di qualsiasi piano della stessa giacitura, avente la direzione spaziale di massima pendenza suddetta, riportato parallelo alla pm_{xy}^* si accorcia sulla direzione della pm_{xy}' , secondo la O^*-O' .

Lo stesso piano di traccia z' nel ribaltarsi trascina anche l'asse z ortogonale alla pm_{xy} in O ; l'ortogonalità si conserva; z^* risulta ortogonale in O^* alla pm_{xy}^* ; una quota, h_p^* , parallela a z si può

riportare direttamente in h_p^* in vera dimensione su P_{xy}' parallelamente a z^* e si accorcia sulla parallela a z' condotta per P_{xy}' secondo la direzione O^*-O' , ottenendo h_p' .

Nell'accorciamento delle quote influisce essenzialmente l'angolo fra z^* e z' , che dipende dall'angolo $x'O'y'$; più grande è, ferma restando la t_{xy} ed O' , più grande risulta $H-(O)$, più grande risulta $O'-O^*$, più grande è l'angolo fra pm_{xy}^* e pm_{xy}' , più piccolo è l'angolo fra z^* e z' e più piccolo è l'accorciamento della stessa quota. In conclusione quanto maggiore è l'angolo $x'O'y'$, tanto minore è l'accorciamento delle quote; osserviamo che pm_{xy}^* cresce, a parità di pm_{xy}' , cioè, i segmenti di direzione spaziale pm_{xy} , riportati in pm_{xy}^* in proiezione pm_{xy}' si accorciano di più.

In figura si può osservare che y' interseca la semicirconferenza in un punto che corrisponde al punto H nel ribaltamento su π del piano zx ; la semicirconferenza avrebbe il diametro T_x-T_z , ricavando su y' il corrispondente di (O) e si troverebbe anche il relativo O^* e anche la y^* per accorciare le distanze dei punti rispetto a zx .

Altra osservazione: z^* contiene O^* e T_z , ma non coincide con T_{zx} ; se i tre angoli fra x', y', z' , sono eguali fra loro, i rapporti di accorciamento delle tre pm risultano eguali; ciò vale anche per gli accorciamenti dei segmenti ortogonali ai tre piani.

Nell'immagine, xy è visto dall'alto; il piano xy è illimitato, anche se è indicato da x' e y' ed inclinato in avanti verso di noi osservatori e in basso; lo segnala l'angolo fra pm_{xy}^* e pm_{xy}' , pensato incidente il foglio π in H e disposto dietro $H-O'$ in $H-O$.

Per immaginare di quanto P_{xy} sia avanti a π , cioè alla t_{xy} , si può considerare la distanza da t_{xy} di (P_{xy}) disposta dalla sua intersezione con t_{xy} parallela alla reale inclinazione della pm_{xy} ; lì è posto P_{xy} e l'ortogonale da esso a π determina P_{xy}' .

Pensiamo da P_{xy} il segmento quota reale pari ad h_p^* ; P si colloca nello spazio sull'ortogonale ad xy , avvicinandosi a noi osservatori

e spostandosi verso l'alto, in posizione tale che l'ortogonale da esso a π ritrova P' ; rileviamo che usando un linguaggio a gesti possiamo sentirci più convinti e più convincenti, rapidamente.

Vogliamo rappresentare un volume prismatico, la cui base su xy , ribaltato su π , sia la l_b^* e la cui altezza sia pari ad h^* ; per evitare che la proiezione superi i limiti del campo decidiamo di riferirci non alla t_{xy} ma alla t_{xy1} a quella parallela.

Riconosciamo che il vertice 3 è unito, che $3-(5)$ è parallelo ad (y) per cui $3-5'$ è parallelo a y' , segue un lato ortogonale al $3-(5)$, la cui proiezione è parallela ad x' ; le verticali dai vertici della l_b^* individuano successivamente i vertici omologhi e molto rapidamente si realizza la proiezione della linea della base inferiore l_1' .

Osserviamo che le proiezioni $5'$, $6'$, dei vertici (5) , (6) , che stanno da banda opposta rispetto alla t_{xy1} si avvicinano alla t_{xy1} ; da uno dei vertici, per esempio, dal $7'$, il più lontano da noi osservatori, si riporta $h^*=7'-8^*$ e si accorcia in $7'-8'$; il punto $8'$ è il più vicino al limite superiore del campo grafico, ed assicura che l'immagine non ha trasbordato fuori campo; la base superiore è ottenuta per traslazione in su della l_1' .

La linea tratteggiata della l_b^* si distingue da quella intera degli spigoli in vista e da quella punteggiata degli spigoli nascosti all'osservatore; alcuni spigoli sono parzialmente in vista, vedi m , n , p ; la cavità al vertice più vicino crea una illusione ottica: la base $q-r$ sembra vista dal basso; si deve saper leggere e disegnare.

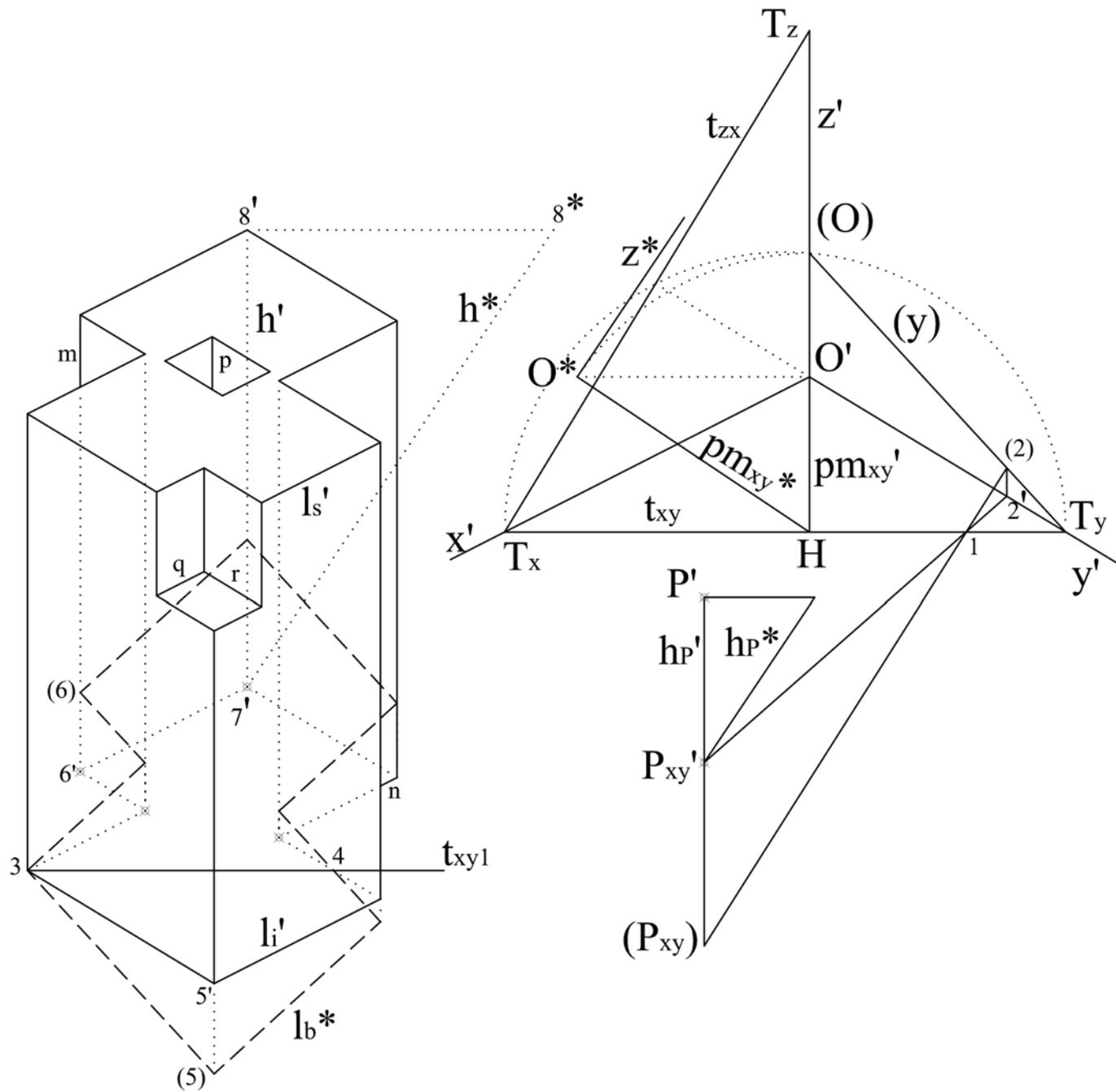


Figura 7

Capitolo 8 – Appartenenze

Punti di piani particolari. (fig. 8a)

In figura 8a, data la terna O', x', y', z' , e definito π con la t_{xy} , consideriamo tre piani; il più semplice è α , proiettante su xy ; la proiezione della proiezione su xy di una figura di α si annulla in un segmento di $t_{\alpha xy}$; le altre proiezioni sono nonnulle; se β contiene x è proiettante su yz e la proiezione della proiezione su yz di una figura di β si annulla in un segmento di $t_{\beta yz}$; $C'-D'$ interseca $C_{xy}'-D_{xy}'$ e $C_{zx}'-D_{zx}'$ su x' .

Il piano γ è proiettante su π ; la proiezione di una figura di γ si annulla in un segmento delle tracce sovrapposte, così come la proiezione della proiezione su xy ; la proiezione della proiezione della figura data su yz e zx non si annulla ed è ottenuta per normale proiezione dei suoi vertici.

Piano per un punto e una retta. (fig. 8b)

Per il punto $P(P', P_{xy}')$ conduciamo la retta $p(p', p_{xy}')$ parallela alla r ; la $t_{\alpha xy}$ unisce le tracce T_{rxy}' , T_{pxy}' ; la $T_{\alpha x}'-T_{rzz}'$ è la $t_{\alpha zx}$; se la parallela è scomoda, possiamo scegliere per P una retta incidente la r in un suo punto Q ; si ricava T_{qxy}' ; seguono $t_{\alpha xy}'$, $t_{\alpha zx}'$. Il piano per i tre punti $P(P', P_{xy}')$, $K(K', K_{xy}')$, $Q(Q', Q_{xy}')$, si risolve considerando la retta $P-K$ e il punto Q ; il piano per tre

punti esiste sempre; le rette q ed r incidenti formano sempre un piano, il loro piano e vi sono complanari; il loro punto di incidenza può essere in campo o fuori.

In tal caso, per provarne la complanarità, possono considerarsi due rette incidenti entrambe e incidenti fra loro in un punto I in campo, un punto le cui proiezioni I' ed I_{xy}' devono essere sulla stessa verticale.

Piano per quattro punti. (fig. 8c)

Nessuna delle terne è di punti allineati; se nella proiezione dei quattro punti e in quella delle relativa proiezione su xy , essi risultano vertici di parallelogramma, essi sono complanari; le terne dei punti dati, sempre complanari, formano sempre lo stesso piano; la verifica più semplice è: $L'-J'$ incida $M'-N'$ in R' ; $L_{xy}'-J_{xy}'$ incida $M_{xy}'-N_{xy}'$ in R_{xy}' ; se $R'-R_{xy}'$ è verticale, i quattro punti sono complanari; perciò, si osservi che L, S, M, N , non sono complanari.

Piano β per P parallelo ad α . (fig. 8d)

Dati $\alpha(T_{\alpha x}', t_{\alpha xy}', t_{\alpha zx}')$ e $P(P', P_{xy}')$, conduciamo per P', P_{xy}' , o_{xy}' parallele a $t_{\alpha xy}'$; ricaviamo $T_{\alpha zx}'$, $t_{\beta zx}'$ parallela a $t_{\alpha zx}'$ per $T_{\alpha zx}'$, e $t_{\beta xy}'$ per $T_{\beta x}'$ parallela a $t_{\alpha xy}'$.

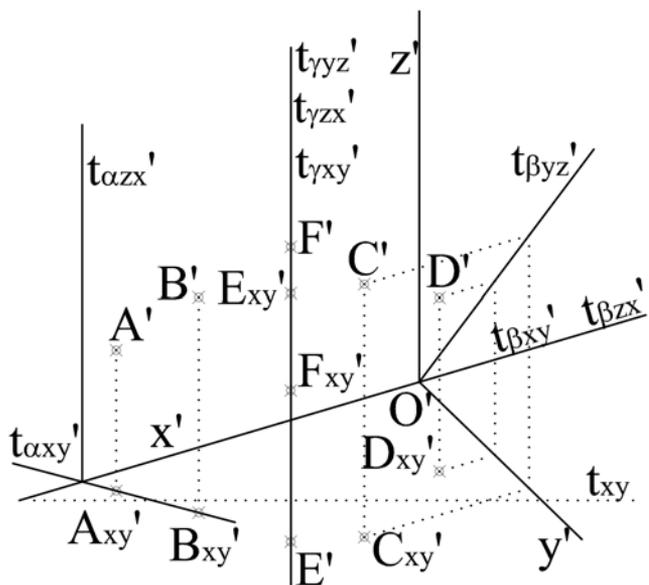


Figura 8a

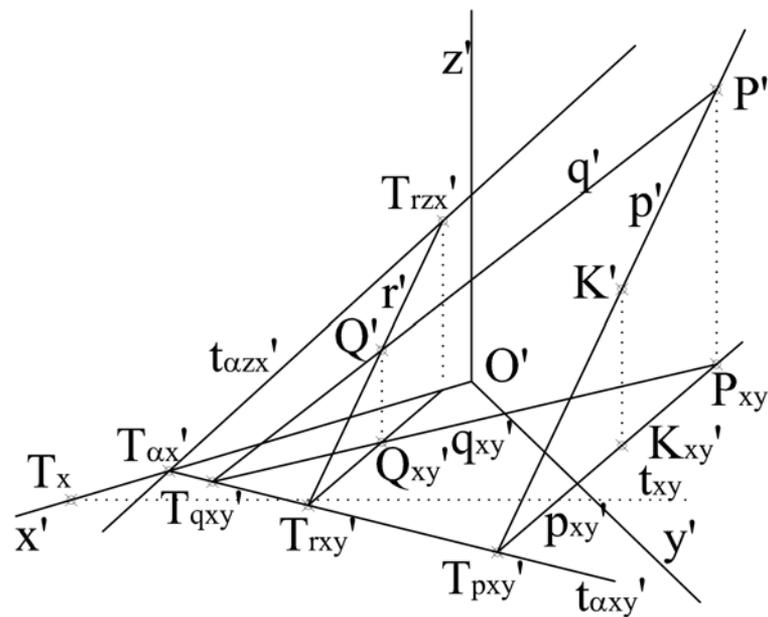


Figura 8b

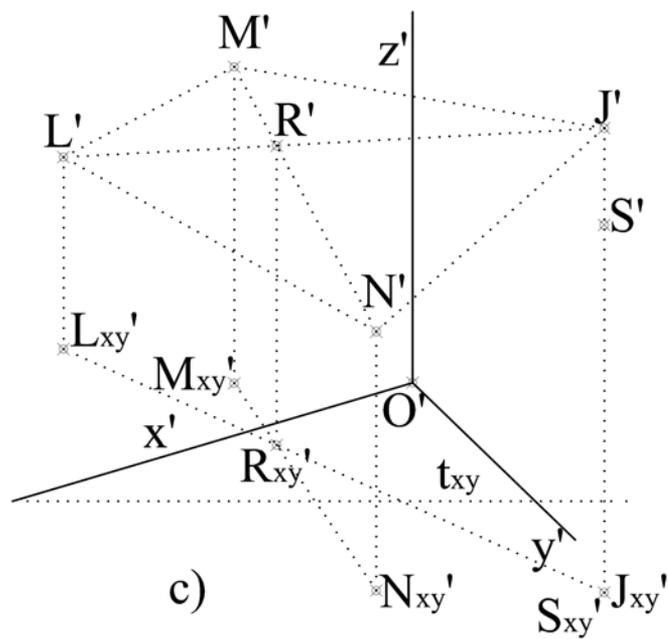


Figura 8c

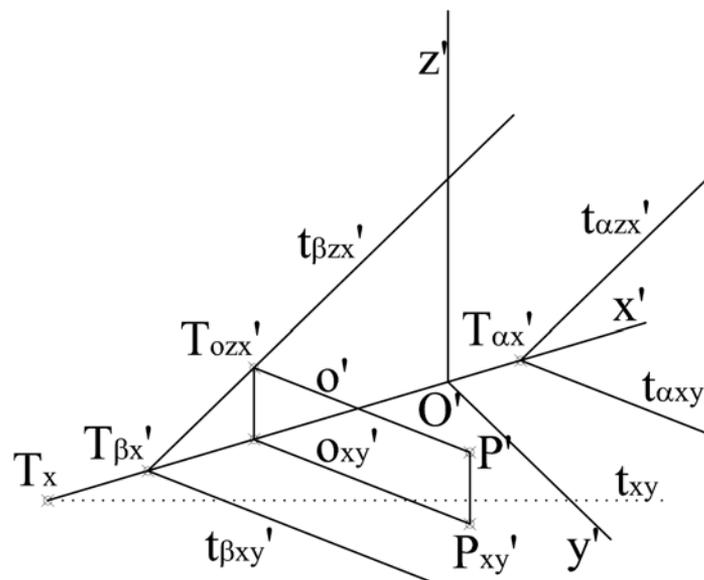


Figura 8d

Capitolo 9 – Parallellismo

Problemi di parallelismo. (fig. 9a, 9b, 9c, 9d)

Nel trattare la rappresentazione degli elementi abbiamo trascurato alcuni casi che possono creare difficoltà di lettura; essa può derivare dal fatto che preferiamo fare l'esempio più facile da capire; però, capire è diverso che essere libero di pensare.

Vediamo in A' , A'_{xy} , e in B' , B'_{xy} due punti che con O non hanno nulla in comune; A non c'entra con H appartenente a t_{xy} ; il punto C non è D e non è capovolto, sono su due verticali distinte; i punti E ed F non esistono; del gruppo E, F, G esiste solo G . (fig. 9a)

Un punto L_π di π si riconosce perché l'orizzontale $L_{\pi-1}$ che lo contiene, parallela a xy e a t_{xy} , ha la 2- L_{xy} come proiezione della sua proiezione su xy ; nel piano proiettante z in z' , ribaltato su p per rotazione sulla traccia z' , il punto L_π si trova in 4 e la L_{xy} è il 3; la proiezione L_{zx} si trova come vertice del parallelogramma L_{xy} -5- L_{zx} - L_π .

Laddove è possibile, è opportuno provarsi a ricavare la distanza fra i punti citati, e ricavare per ogni punto il simmetrico rispetto a ciascuno dei piani coordinati.

Per due punti distinti passa una sola retta; la retta può essere definita dandone due punti; tali punti possono essere scelti comunque, dovunque; scelti su due piani coordinati ne rappresentano le tracce; un po' di fantasia e troveremo posizioni strane, non immaginabili, che dobbiamo saper capire.

In fig. 9b definiamo la retta a mediante le tracce T'_{axy} , T'_{azx} ; la T'_{axy} si proietta su x' in 1; la 1- T'_{azx} è la a'_{zx} ; la T'_{axy} si proietta su y' in 2; la T'_{azx} si proietta su z' in 4; la 2-4 contiene la T'_{ayz} (non segnata) ed è la a'_{yz} ; la T'_{azx} si proietta su x' in 3 e la 3- T'_{axy} è la

t'_{axy} ; la T'_{ayz} è l'intersezione fra la a' e la 2-4; la lettura richiede molta attenzione.

Ancora più tortuosa risulta la lettura della retta b , definita dal punto b' sovrapposto alle tre tracce, T'_{bxy} , T'_{byz} , T'_{bzx} ; la retta b è proiettante su π ; la T'_{bxy} si proietta su x' in 8 e su y' in 5; la 5- T'_{byz} è la b'_{yz} ; la 8- T'_{bzx} è la b'_{zx} ; la T'_{byz} si proietta su y' in 6; la 6- T'_{bxy} è la b'_{xy} ; la proiezione su un piano è parallela all'asse non compreso; la lettura richiede tanta riflessione e pazienza.

Per una retta passano infiniti piani; in fig. 9c consideriamo la retta c definita delle tracce T'_{cxy} , T'_{cyz} ; le coppie di rette che contengono $T'_{\alpha x}$, uno degli infiniti punti di x' e che lo uniscono con le predette tracce sono $t'_{\alpha xy}$ e $t'_{\alpha zx}$, tracce di uno degli infiniti piani condotti per la retta c .

Spostando su x' , su y' , su z' , la traccia dell'asse sul piano, ci rendiamo conto delle infinite giaciture possibili; tre giaciture sono importanti, perché più comode; sono le giaciture di β , proiettante c su xy in c'_{xy} , di γ , proiettante c su yz in c'_{yz} , di δ , proiettante c su zx in c'_{zx} .

In fig. 9d è data la retta r (r' , r'_{xy}) e un punto P (P' , P'_{xy}); vogliamo condurre per P la retta s parallela alla r ; per P' e per P'_{xy} conduciamo la s' parallela alla r' e la s'_{xy} parallela alla r'_{xy} ; se vogliamo, possiamo completare; è un esercizio molto utile.

Per due rette parallele possiamo condurre un solo piano α ; la $t'_{\alpha xy}$ unisce T'_{rxy} , T'_{sxy} , e la $t'_{\alpha zx}$ unisce T'_{rzx} , T'_{srx} ; β è parallelo ad α , se $t'_{\beta xy}$ è parallela a $t'_{\alpha xy}$ e $t'_{\beta zx}$ a $t'_{\alpha zx}$; se per un punto P vogliamo condurre α parallelo a β , si considera su β una retta, se ne ricava la s parallela per P e per le tracce della s si conducono le omonime tracce di α ; una retta è parallela a β , se sta su α parallelo a β , o se β accoglie una retta parallela.

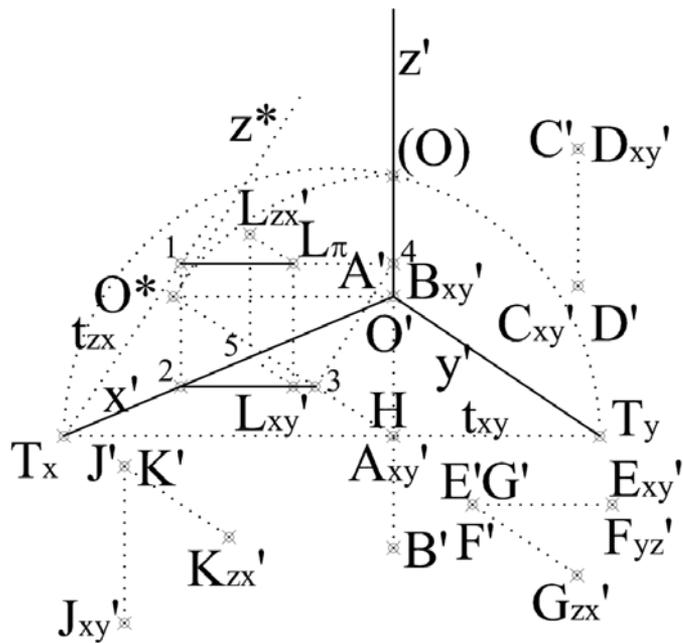


Figura 9a

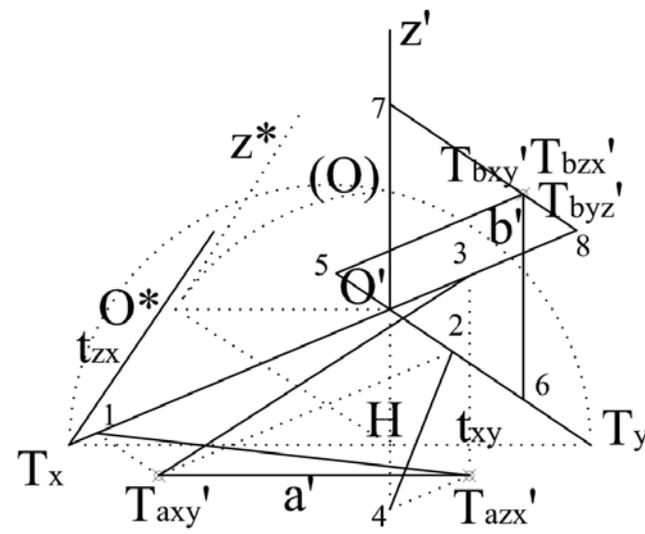


Figura 9b

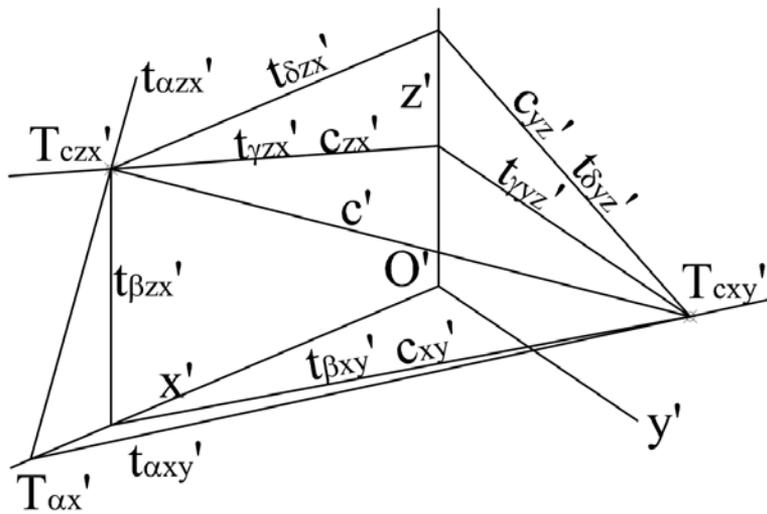


Figura 9c

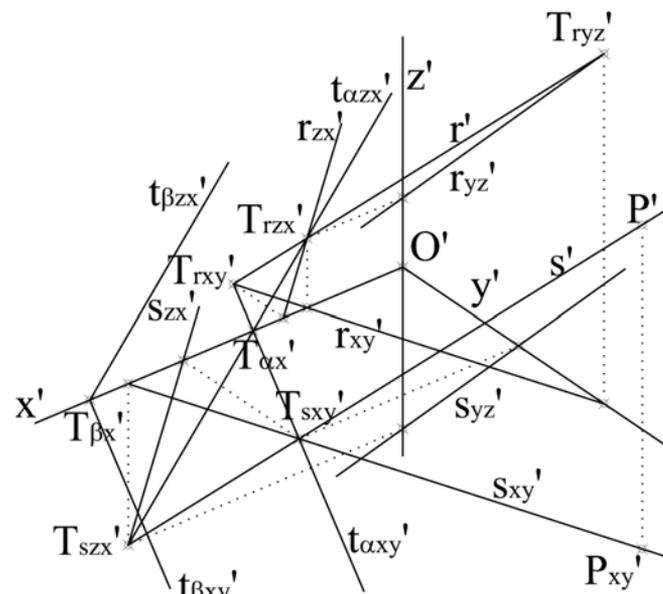


Figura 9d

Capitolo 10 – Intersezione

Intersezione fra retta e piano. (fig. 10a, 10b, 10c, 10d)

In fig. 10a, dato $\alpha(T_{\alpha y}', t_{\alpha xy}', t_{\alpha yz}')$, vogliamo ricavare l'intersezione con tre rette di diversa direzione; la prima è $a(a', T_{\alpha xy}', a_{xy}')$, il cui piano 1-2-3, proiettante su xy , interseca α secondo la 1-2 complanare con la a , che interseca nel punto $A(A', A_{xy}')$.

La seconda è $b(b', T_{bxy}')$, verticale; uno degli infiniti piani proiettanti su xy sia T_{bxy}' -4-5-6; la 6-4, sua intersezione con α , ricava B' su b' ; B_{xy}' è sul punto $T_{bxy}' = b_{xy}'$.

La terza è $c(c', c_{xy}')$, parallela a xy ; se non si dispone della $t_{\alpha zx}'$, consideriamo la 9-10 parallela a c_{xy}' , la 10-11, la 11-9 che si riporta parallela per il 12, ottenendo C' e C_{xy}' .

In fig. 10b, dato $\alpha(T_{\alpha x}', t_{\alpha xy}', t_{\alpha zx}')$, vogliamo ricavare l'intersezione con $d(d', T_{dxy}', d_{xy}')$; consideriamo su $x'-y'$ la $T_{\beta x}'$ - T_d'

$_{xy}'$ -2-3 = $t_{\beta xy}'$; da 1 si ricava T_{dyz}' ; la 2- T_{dyz}' -4 consente la $T_{\beta x}'$ -4-5 = $t_{\beta zx}'$; la 3-5 è la proiezione dell'intersezione fra α e β , complanare con la d , che incontra in $D(D', D_{xy}')$, comune al piano α e alla retta d .

In fig. 10c, $\alpha(T_{\alpha x}', t_{\alpha xy}', t_{\alpha zx}')$ è proiettante su xy ; la $c(c', c_{xy}')$ è su $\beta(T_{\beta x}', t_{\beta xy}', t_{\beta zx}')$ pure proiettante su xy ; la loro intersezione verticale individua il punto $C(C', C_{xy}')$; se vogliamo ricavare l'intersezione P fra la c e π , sappiamo che β interseca π secondo la $t_{\beta} = 1-2$, intersezioni fra $t_{\beta xy}'$ - t_{xy}' , e fra $t_{\beta zx}'$ - t_{zx}' ; tale retta ricava $P(P', P_{xy}')$.

In fig. 10d, $\alpha(t_{\alpha xy}' = t_{\alpha yz}' = t_{\alpha zx}')$ è proiettante su π ; la retta $a(a', a_{xy}')$ interseca α in $A(A', A_{xy}')$; la retta $b(b', T_{bxy}' = b_{xy}')$ verticale interseca α in $B(B', B_{xy}' = b_{xy}')$.

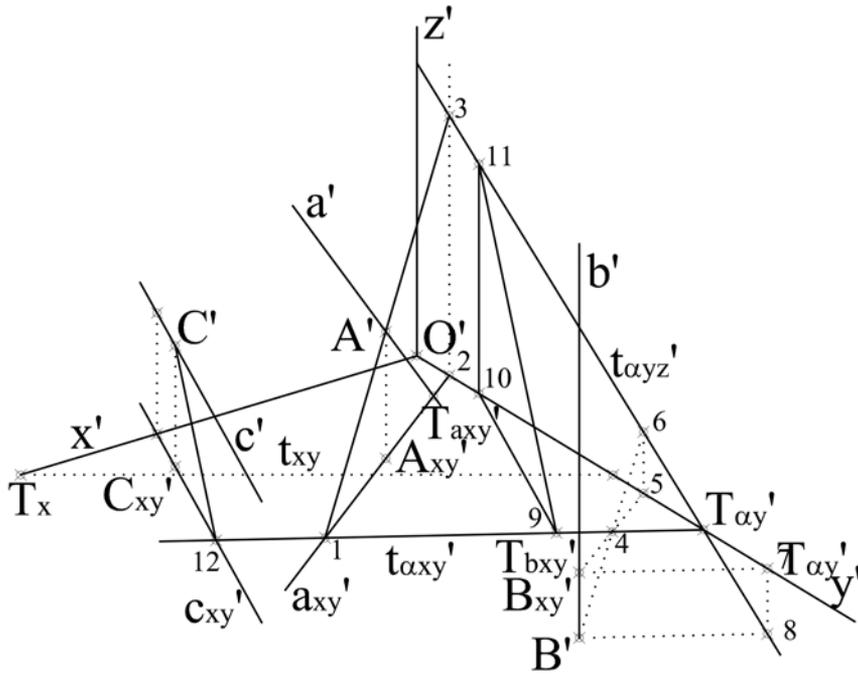


Figura 10a

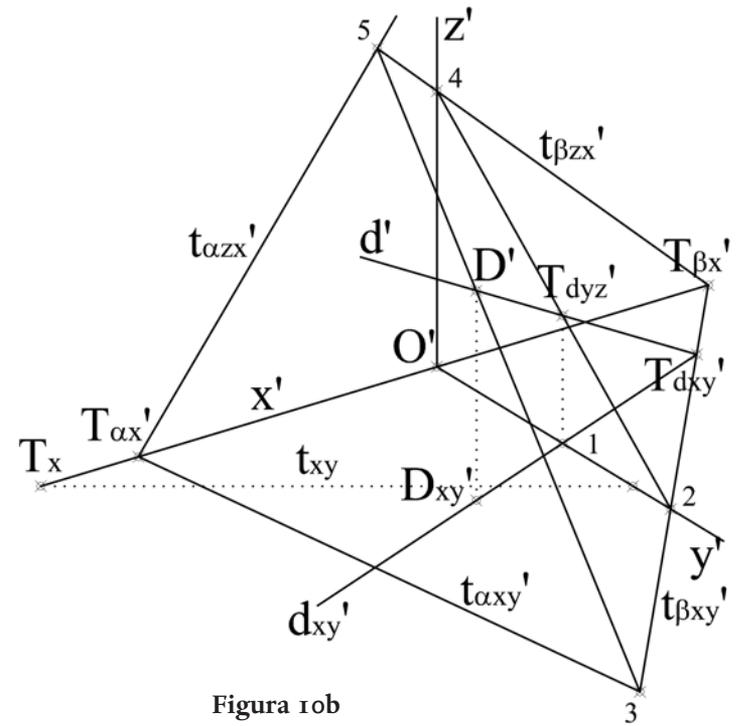


Figura 10b

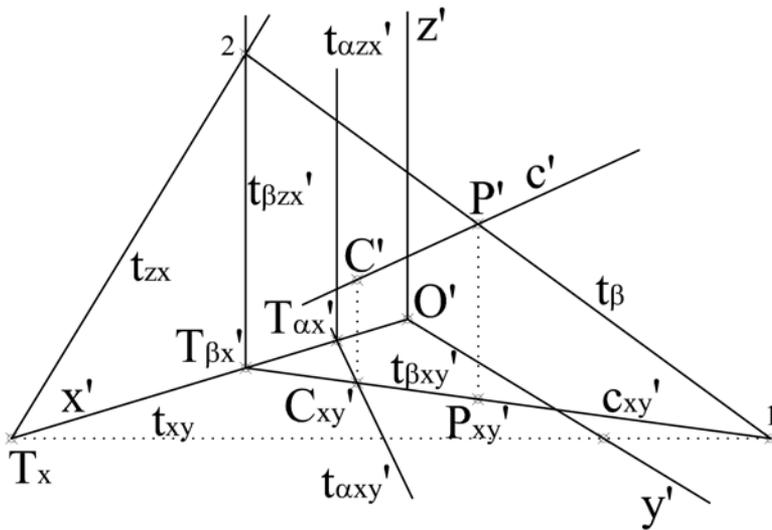


Figura 10c

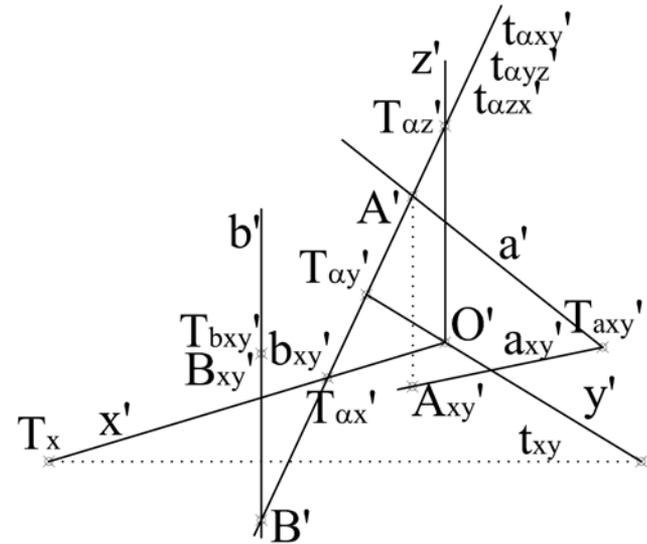


Figura 10d

Capitolo 11 – Piani

Piani generici e particolari. (fig 11a, 11b, 11c, 11d)

Il piano di cui ci siamo occupati è il quadro π , definito dalle sue rette di intersezione con i piani coordinati, t_{xy} con xy , t_{yz} con yz , t_{zx} con zx , in proiezione t'_{xy} , incidente x' in T'_x , e y' in T'_y ; t'_{yz} , incidente y' in T'_y , e z' in T'_z ; t'_{zx} , incidente z' in T'_z , e x' in T'_x ; la traccia t_{xy} è ortogonale a z' , la t_{yz} a x' , la t_{zx} a y' ; se sono fuori campo si varia π -O.

Consideriamo (fig 11a) un piano α e le sue intersezioni $t_{\alpha xy}$ con xy , $t_{\alpha yz}$ con yz , $t_{\alpha zx}$ con zx , t_{α} con π ; le relative proiezioni siano $t'_{\alpha xy}$, incidente x' in $T'_{\alpha x}$ ed y' in $T'_{\alpha y}$; $t'_{\alpha yz}$, incidente y' in $T'_{\alpha y}$ e z' in $T'_{\alpha z}$; $t'_{\alpha zx}$, incidente z' in $T'_{\alpha z}$ ed x' in $T'_{\alpha x}$; la t_{α} è definita dai punti di intersezione $T_{\alpha z\pi}$ fra la $t_{\alpha zx}$ e la t_{α} , $T_{\alpha x\pi}$ fra la $t_{\alpha xy}$ e la t_{α} , $T_{\alpha y\pi}$ fra la $t_{\alpha yz}$ e la t_{α} ; quest'ultima in figura risulta fuori campo; è auspicabile che, per definire la t_{α} , due di tali tracce siano in campo; possiamo, eventualmente, ridurre la π -O.

Se una, o più, delle tracce di α con gli assi sono fuori campo, dobbiamo accertare che le rette tracce di α , relative a quel punto traccia fuori campo, vi concorrano; il piano α può essere definito da due delle tracce con i piani coordinati, dalle tre tracce con gli assi, da due rette incidenti al finito o all'infinito, da una retta e un punto, da tre punti; la t_{α} ha tre punti noti, le intersezioni, allineate, con le tracce fra π e i piani coordinati, per cui da sola non definisce α ; occorre dare la t_{α} assieme ad una traccia fra α e uno dei tre piani coordinati o ad una delle tracce di α con gli assi.

Analizziamo l'immagine a); il piano α attraversa π proprio secondo la t_{α} ; O sta dietro O', sulla ortogonale in O' a distanza O'-O*, mentre il punto T_x di x ha da π distanza nulla; ne deriva che il punto spaziale comune a T_x -O relativo a $T'_{\alpha x}$ ha una distanza, dietro a π , sulla ortogonale a π , in $T'_{\alpha x}$, facilmente deducibile per proporzionalità nel rapporto T_x -O' contro T_x - $T'_{\alpha x}$.

Ebbene possiamo visualizzare pressappoco la giacitura di α pensando il piano che contiene la t_{α} e la ricostruzione, dietro a π , della posizione spaziale del punto $T'_{\alpha x}$, appartenente ad α . Possiamo capire pure che il piano α con i suoi punti, rette, figure, che gli appartengono, se vogliamo averli in vera forma e grandezza, alla scala grafica prestabilita per le misure su π , si può ribaltare su π , per rotazione intorno alla t_{α} , e solo intorno ad essa. Il ruolo fondamentale ed esclusivo della t_{α} ci dice ancora che se pensiamo di ribaltare un piano α intorno ad una retta diversa, come qualcuno pretende di ribaltarlo, per esempio, su xy ruotando intorno ad x' , commettiamo un grave errore concettuale.

Nella fig. 11b esaminiamo le diverse giaciture particolari di un piano; il piano α_1 presenta $t_{\alpha_1 zx}$ parallela ad x' , per cui $T'_{\alpha_1 x}$ incontra x' all'infinito e nello spazio la retta $t_{\alpha_1 zx}$ è parallela a xy ; la $t_{\alpha_1 yz}$ è parallela a y' , per cui $T'_{\alpha_1 y}$ incontra y' all'infinito e nello spazio la retta $t_{\alpha_1 yz}$ è parallela a xy ; il piano α_1 , a cui esse appartengono, è perciò parallelo a xy , cioè, orizzontale; esso interseca xy all'infinito in $t_{\alpha_1 xy}$.

Il piano α_1 può traslare in giù sotto xy ; è illimitato e quindi oltre il piano yz , oltre il piano zx ; lo stesso esempio può essere trattato per riflessione, parallelo a yz e a zx ; se l'immagine presenta le caratteristiche lette e capite, si tratta di un piano parallelo ad uno dei tre piani coordinati; viceversa, se vogliamo disegnare un piano parallelo ad uno dei tre piani coordinati, in figura devono verificarsi le caratteristiche peculiari della giacitura già riscontrate e immancabilmente verificate.

Il piano α_2 è parallelo ad x poiché le due tracce $t_{\alpha_2 zx}$ e $t_{\alpha_2 xy}$ si presentano parallele a x' ; è da osservare che le suddette tracce, mantenendosi parallele a x' possono traslare la prima in giù, sotto la x' , la seconda all'indietro, oltre il piano zx ; possiamo avere perciò quattro casi; il che vale anche per un piano paral-

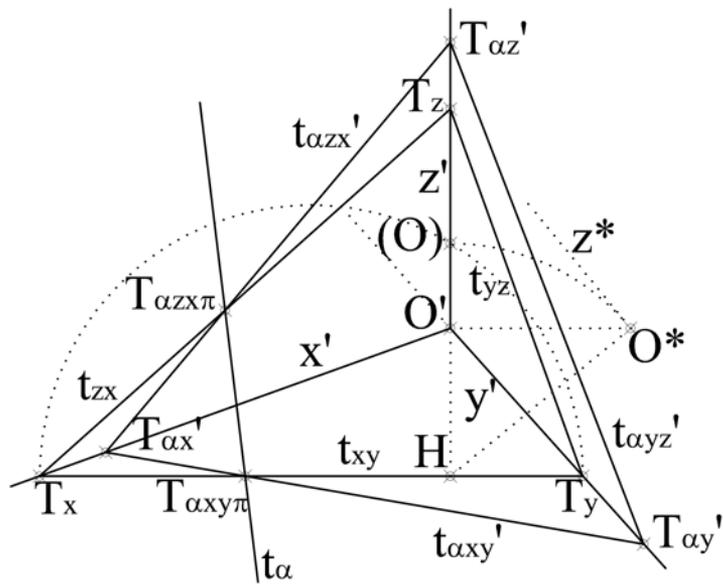


Figura 11a

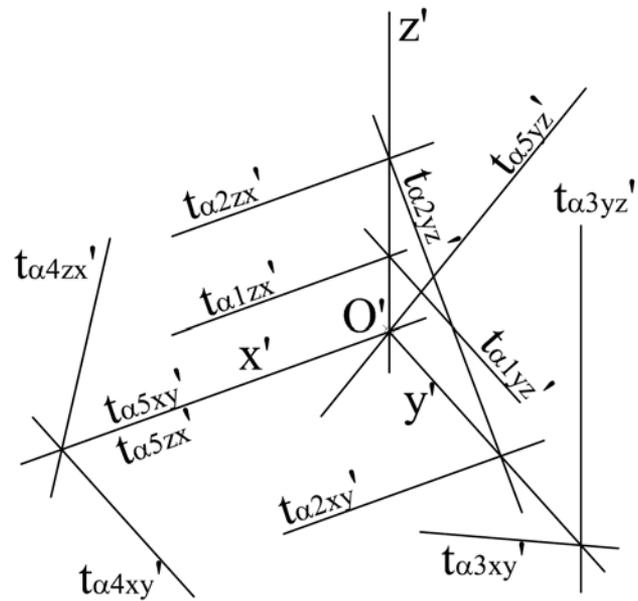


Figura 11b

lelo a y , o a z , come si verifica per il piano α_3 , parallelo a z e per il piano α_4 parallelo a y .

I piani paralleli ad un asse sono ortogonali al piano che si oppone all'asse coinvolto; i precedenti piani paralleli a quelli coordinati risultano compresi fra questi, paralleli agli assi, anzi a due assi contemporaneamente e ortogonali ai due piani, escluso il parallelo.

Dunque, se un piano è parallelo ad un piano coordinato, esso è parallelo anche a ciascuno degli assi del piano coordinato a cui è parallelo; viceversa se un piano è parallelo ad un asse non è necessariamente parallelo ad un piano coordinato.

Il piano α_5 contiene x' , per cui le due tracce t_{α_5xy}' e t_{α_5zx}' , identificate in x' non bastano a definire la giacitura; dobbiamo completarla con la t_{α_5yz}' , oppure assegnando un punto del piano, purchè non appartenente a x' .

In fig. 11c consideriamo un piano α di giacitura particolare, parallelo a π ; le sue tracce sono parallele a quelle fra π e i tre piani coordinati; possiamo anche traslare α oltre O ; il piano β rappresenta il caso; le sue tracce conservano il predetto parallelismo ma il famosissimo triangolo delle tracce appare giustamente capovolto; aggiungiamo che se nel traslare α ci fermiamo proprio su O , il triangolo famosissimo delle tracce diventa un inesplicabile punto; la geometria funziona lo stesso, non può essere scalfita da pregiudizi o da preconcetti vincolanti la libertà del pensare.

In fig. 11d consideriamo un piano generico, definito da $t_{\alpha'zx}'$ e $t_{\alpha'xy}'$ e presentato sdoppiato; nel caso più vicino ad O' , manteniamo ferma la $t_{\alpha'xy}'$ e ruotiamo il piano nello spazio variando la $t_{\alpha'zx}'$; il piano cambia giacitura: prima con la $t_{\alpha'zx1}'$, poi con la $t_{\alpha'zx2}'$, e si tratterà di un piano parallelo a z , poi con la $t_{\alpha'zx3}'$, con la $t_{\alpha'zx4}'$, con la $t_{\alpha'zx5}'$. Infine, con la $t_{\alpha'zx6}'$, una giacitura per la quale le tre tracce del piano sono espresse da una unica retta; le sue tre tracce conservano l'indipendenza, la $t_{\alpha'zx6}'$ contiene i punti $T_{\alpha'x}$ e $T_{\alpha'z6}'$, la $t_{\alpha'xy6}'$ contiene i punti $T_{\alpha'x}$ e $T_{\alpha'y6}'$, la $t_{\alpha'yz6}'$ contiene i punti $T_{\alpha'y6}'$ e $T_{\alpha'z6}'$; ricostruendo la posizione spaziale dei tre punti sugli assi, possiamo visualizzare la giacitura spaziale del piano.

Nel caso contiguo, del piano α teniamo ferma la $t_{\alpha'zx}'$ e muoviamo la $t_{\alpha'xy}'$; nella posizione 2 il piano è diventato parallelo a y , nella 4 la $t_{\alpha'xy4}'$ interseca x' in $T_{\alpha'x}$ e y' in $T_{\alpha'y}$, non segnata, e la $t_{\alpha'zx}'$ incontra z' in $T_{\alpha'z}$, non segnata; la traccia la $t_{\alpha'yz}'$ contiene i punti $T_{\alpha'y}$ e $T_{\alpha'z}$, non segnata; il piano è un normale piano generico.

Nella posizione 6 si riverifica la sovrapposizione delle tre tracce, già esaminata nel caso precedente; nella rotazione si è escluso il caso che la traccia rotante coincidesse con un asse; in tale caso la giacitura coinciderebbe rispettivamente con xy o con zx .

La panoramica delle possibili giaciture dei piani rispetto a quelli coordinati e rispetto a π è forse completa; non si escludono effetti diversi di riflessioni e ragionamenti diversamente impegnati.

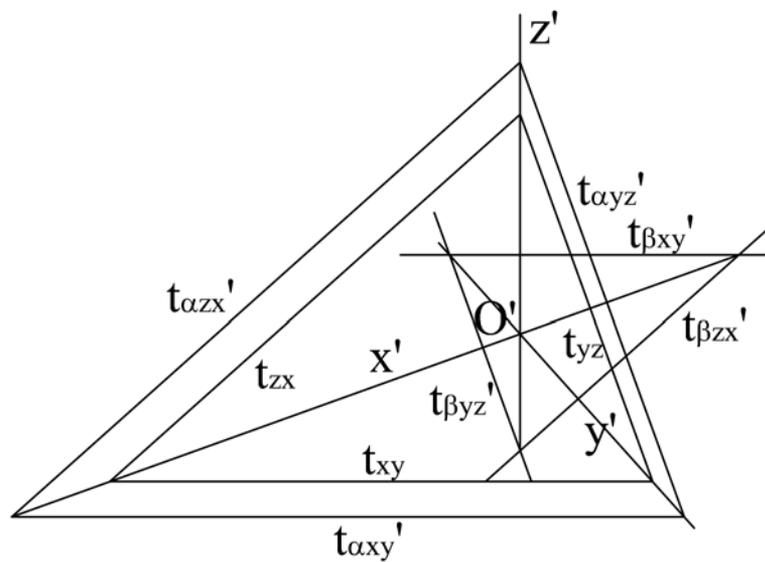


Figura 11c

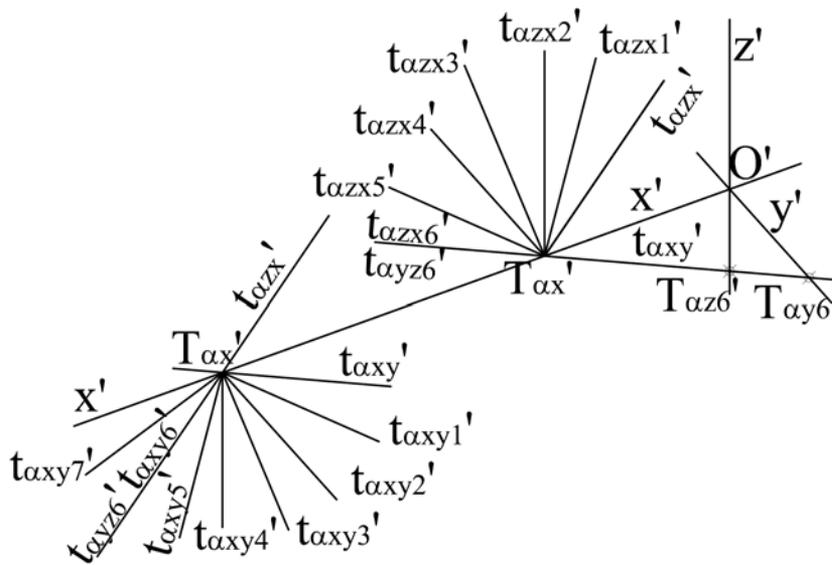


Figura 11d

Capitolo 12 – Angoli

Angolo fra retta e piano. (fig. 12)

Discutiamo sul processo risolutivo del problema dell'angolo fra retta e piano; data una retta r su α , se vogliamo costruire su α una retta s che formi l'angolo φ con la r , bisognerà fissare, a partire dal punto P della r , vertice dell'angolo, il suo verso, destro o sinistro; dobbiamo ribaltare il piano su π intorno alla traccia t_α e sulle r^* , per P^* segneremo con s^* l'angolo φ , ricavando a ritroso la s' ; per P di r vogliamo segnare una delle infinite s che formi con la r l'angolo φ ; sono tutte le generatrici di un cono di angolo 2φ al vertice P ; sul piano r, s si ripropone l'esercizio già discusso.

Dato α , dal suo punto P si vuole condurre la r spaziale che formi con esso l'angolo φ ; bisogna scegliere per P la r_α , proiezione ortogonale della r su α ; il piano β , per r_α ed n_α , ortogonale in P ad α , ribaltato su α , ricava la (r_α) e la (n_α) ; segnata la (r_φ) si ottiene la r_φ ; la r_α è scelta fra le infinite rette del fascio piano di centro P . In figura, è dato $\alpha(t_{\alpha xy}, t_{\alpha yz}, t_{\alpha zx})$ con la traccia $T_{\alpha x}$ impropria, cioè parallelo ad x ; è una giacitura particolare, che non richiede il ribaltamento di α su π ; la $T_{\alpha z} - T_{\alpha y} = t_{\alpha yz}$ è retta di massima pendenza p_α' di α su xy , ed appartiene a yz , che si ribalta su π , essendo asse di rotazione la $T_y - T_z = t_{yz}$, ortogonale a x' ed asse di

omologia, affine ortogonale definita dalla coppia di punti omologhi $O', (O)$; in tale ribaltamento, (z) corrisponde a z' , $(T_{\alpha z})$ a $T_{\alpha z}'$, $(p_\alpha) = 2 - (T_{\alpha z})$ a $2 - T_{\alpha z}' = p_\alpha'$; $(n_\alpha) = (T_{\alpha z}) - 3$ ortogonale in $(T_{\alpha z})$ alla $2 - (T_{\alpha z})$ corrisponde a $3 - T_{\alpha z}' = n_\alpha'$, la quale, su $y'z'$, rappresenta la proiezione della direzione ortogonale ad α .

Consideriamo il punto A_α' e, per esso, parallelo a yz il piano $\beta(t_{\beta xy}, t_{\beta zx})$ proiettante sia su zx , che su xy ; la $a_{\alpha\beta}'$, comune ai due piani e parallela alla p_α' , contiene per A_α' la retta parallela a $T_{\alpha z}' - 3$, indicata con 90° ; se vogliamo su β una retta che formi con la $a_{\alpha\beta}'$ angoli di 30° , o 60° in positivo o in negativo, ne ricaviamo le direzioni per omologia; dividiamo l'angolo di 90° reale, di vertice $(T_{\alpha z})$ in tre parti, ne ricaviamo le divisioni omologhe e ne riportiamo parallele per A_α' ; per simmetria obliqua ricaviamo anche le direzioni in negativo.

Se per A_α' consideriamo s_α' , distinta dalla $a_{\alpha\beta}'$, il piano γ di A_α' - 90° , ed s_α' si ribalta su π , intorno alla sua traccia, si ricavano le omologhe di A_α' - 90° , ed s_α' , si delimita φ con la nuova retta, dalla quale per omologia a ritroso si risponde al quesito.

Un piano γ , ortogonale alla $r_{\alpha\beta}$ di α e β , li interseca in $r_{\gamma\alpha}, r_{\gamma\beta}$, il cui φ è quello fra α e β ; per ribaltamento di γ , applicando l'omologia, ricaviamo o rappresentiamo φ ; l'arco φ' è un arco di ellisse, proiezione di un arco di circonferenza.

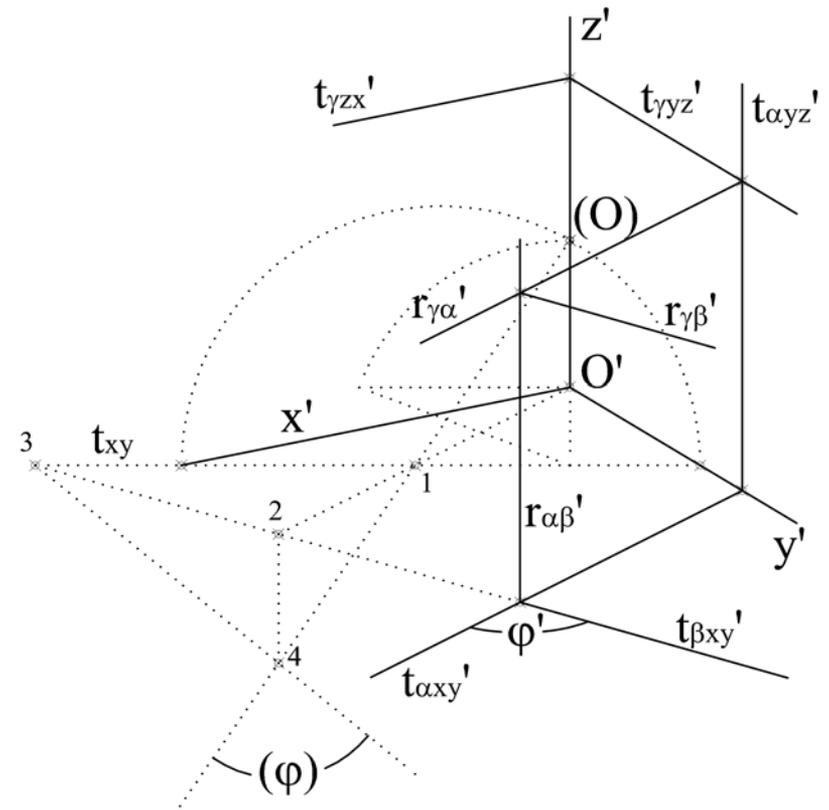
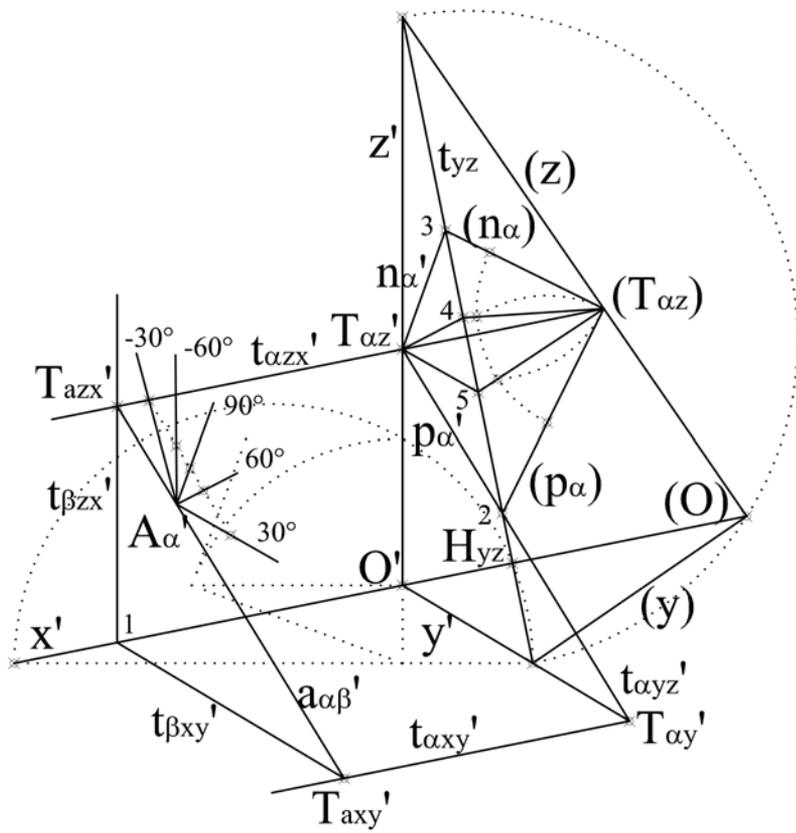


Figura 12

Capitolo 13 – Assonometria panoramica frazionata

Assonometria panoramica frazionata. (fig. 13a, 13b)

In fig. 13a considero la t_{xy} che designa π rispetto alla terna x'_6 , y'_6 , z' , scelta in modo che $H_{xy}-O'=u$ nel ribaltamento di xy su π intorno alla t_{xy} risulti $H_{xy}-(O'_6)=6u$, eseguendo operazioni note: la semicirconferenza ha il diametro $T_{x'_6}-H_{xy}-T_{y'_6}$ e il centro in H_{xy} , essendo, per semplificare e senza pregiudizio, x'_6 e y'_6 simmetrici rispetto a z' ; $O'-O'_6$ è pari alla distanza di O da π ; $H_{xy}-O'_6=6u$ è il ribaltamento su π della distanza tra H_{xy} ed O , nel senso della profondità, misurata su xy in direzione della massima pendenza di xy rispetto a π , il cui angolo è il complemento di $O'_6-H_{xy}-T_{x'_6}$. Considero su xy un punto Q a una certa distanza da t_{xy} , per esempio, Q_6 , alla stessa distanza di O da t_{xy} ; la sua posizione ribaltata è (Q'_6) e la sua proiezione è Q_6 , che, come per O' , risulta u , pari a un sesto di quella vera, stabilita dal rapporto $(H_{xy}-O'=u)$: $(H_{xy}-O=H_{xy}-(O'_6)=6u)$, che denominiamo rapporto omologico di xy rispetto a π .

In conclusione, scelto nel sistema indicato con pedice $_6$ un punto P a distanza doppia, $12u$, la distanza $o-Q'_6$ raddoppia, $o-P'_6$ risulta $2u$; osservo che tutti i punti di xy , inclusi nella fascia ribaltata delimitata dalla t_{xy} e dalla $(O_{12})-(P_6)$, nello spazio la profondità $H_{xy}-O_{12}=12u$, in proiezione occupa la fascia dalla t_{xy} alla parallela per P'_6 pari a un sesto, cioè $2u$; la fascia reale profonda $24u$ in proiezione occuperà la fascia a $4u$ da H_{xy} ; viceversa, la fascia in proiezione pari a $4u$ corrisponde a quella profonda $24u$ da H_{xy} ; la striscia larga quanto il foglio e profonda 6 ($H_{xy}-(O_{12})=72u$) occuperà in proiezione la stessa ampiezza frontale e una profondità pari a $12u$, nel rapporto $1:6$.

Cambio il rapporto; a parità di $H_{xy}-O'=u$, raddoppio $H_{xy}-(O_{12})=12u$; la profondità, che si confronta con u è nel ribaltamento $H_{xy}-(O_{12})=H_{xy}-O_{12}$; l'angolo in O' fra la proiezione degli assi

x, y , non è più $T_{x'_6}-O'-T_{y'_6}$, bensì $T_{x_{12}}-O'-T_{y_{12}}$; l'angolo fra xy e π è il complemento di $O_{12}-H_{xy}-T_{x_{12}}$; il rapporto omologico è diventato un dodicesimo, per cui un punto (P_{12}) a $12u$ da t_{xy} , in proiezione si ritrova con $o-P'_{12}=u$; a parità di distanza rispetto al caso precedente, la striscia corrispondente in proiezione è dimezzata e la stessa fascia precedente profonda $12u$ potrà accogliere la proiezione di profondità reale pari a $144u$.

Ampliando l'angolo fra gli assi x', y' , il piano xy si avvicina all'ortogonalità su π ; le dimensioni nel senso della profondità si accorciano sempre più mentre le dimensioni ortogonali a xy si accorciano sempre meno, in una vista che richiama il panorama, un'assonometria ortogonale panoramica; dipende dal rapporto omologico.

In fig. 13b il riquadro rappresenta il foglio, il campo in vista di xy , o una finestra, sul cui vetro si può disegnare ciò che di xy si vede oltre, in assonometria ortogonale.

Se tutto dipende dal rapporto, non necessita la premessa della proiezione della terna; posso stabilire un'orizzontale con le funzioni di t_{xy} , asse dell'omologia affine ortogonale del ribaltamento di xy su π ; su t_{xy} , scelta la scala del disegno e quindi l'unità $u=0-1$, riporto sulla verticale da o la distanza, finora indicata con $H_{xy}-(O)$, la distanza in profondità, per esempio, pari a $10u$, distanza ribaltata, che confronto con l'unità u ; il rapporto omologico è un decimo; per esempio, le due rette $10-3$ e $10-30$ sono omologhe. e consentono,

La fascia ribaltata da o a 30 si proietta nella fascia da o a 3 ; dato (A) sulla 30 si ricava A' sulla linea 3 ; dato (B) nella stessa fascia di (A) si ricava B' interno alla corrispondente fascia $0-3$, appoggiandosi alle rette omologhe (r_{30}), r_{30} , alla t_{xy} secondo (A)-(B)- t_{xy} -A' e (B)-B', o alle rette omologhe $10-30$ e $10-300$ che attraver-

sano fino alla decima striscia ribaltata e fino alla decima striscia proiezione della precedente.

La seconda striscia è fuori campo ma si può staccare fisicamente dalla prima e traslare in giù fino a far coincidere la linea 30 con la 3 e procedere alla proiezione dei punti della seconda striscia frazionata appoggiandosi alle rette omologhe precedenti o a due nuove rette omologhe che rispettino il rapporto omologico di riduzione a un decimo della loro distanza dalla linea 30 posta sulla 3.

Così può continuare per assonometria panoramica frazionata, riducendo le operazioni applicate a strisce fuori campo; le successive strisce possono essere dimensionate in modo che la seconda sia delimitata dalla linea 30, che va sulla 3, alla 57 che va sulla 30; la terza sarà delimitata dalla 57 che va sulla 6 e dalla 81 che va ancora sulla 30, etc.; si può impiantare una formula; la proiezione può giovare di fogli trasparenti sotto cui le strisce

trovano la precisa collocazione, per essere trasformate in proiezione.

Il rapporto omologico può variare in modo da permettere, ove il campo lo consenta, la proiezione di strisciate di nuclei urbani o di territorio con profondità senza limiti; in un foglio largo 70cm, con la scala grafica frontale 1:1000 si rappresenta una larghezza di 700m; se l'altra dimensione del foglio è 50cm con un rapporto omologico di 1:10 si può rappresentare una profondità di $10 \times 500 = 5000\text{m} = 5\text{km}$.; con un rapporto omologico di 1:20 si possono rappresentare 10km di profondità.

Si può lavorare, scomponendo e distribuendo a riquadri una mappa; i contributi singoli ricompongono la mappa assonometrica, ottimizzando i risultati.

È possibile ubicare nelle relative strisce alle relative distanze in profondità i punti, come C'-D', i punti E'-F', facendoli appartenere alla striscia di J'-K'.

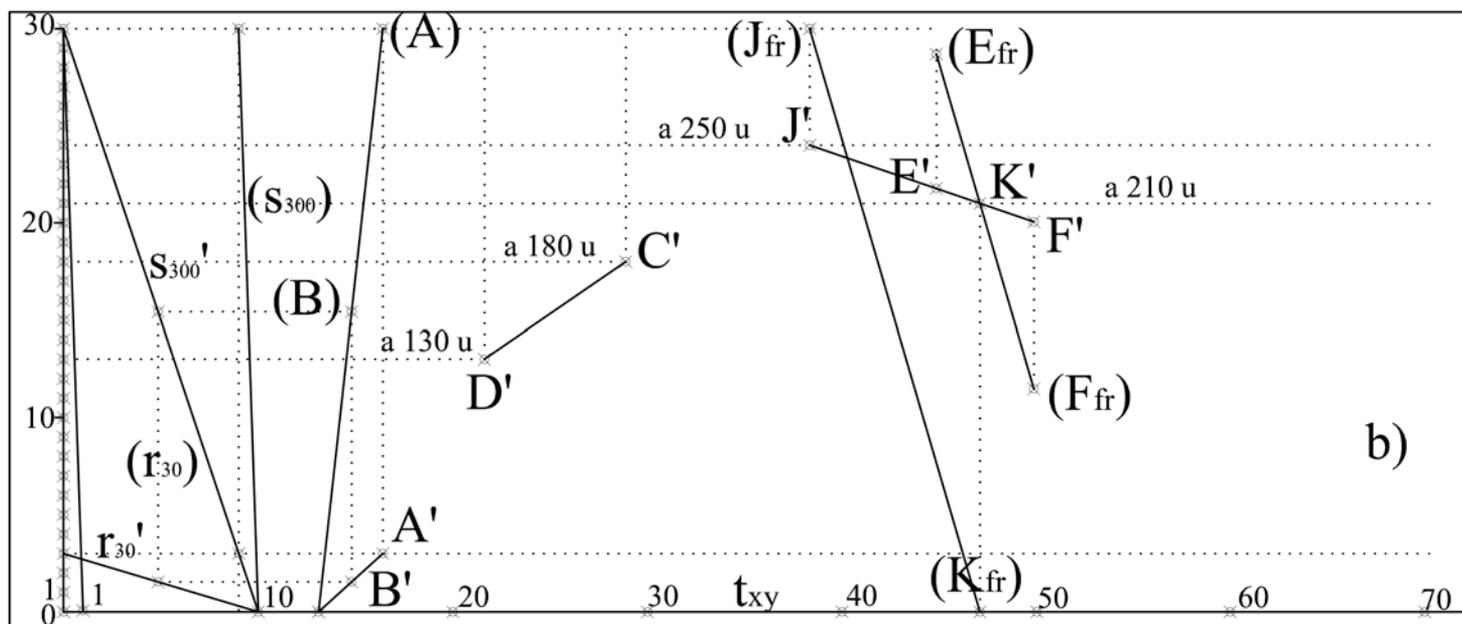


Figura 13b

Capitolo 14 – Poliedri

Poliedri regolari in assonometria. (fig. 14a, 14b, 14c, 14d)

La superficie del tetraedro è costituita da quattro triangoli equilateri uguali, quella dell'ottaedro da otto triangoli equilateri uguali, quella dell'icosaedro da venti triangoli equilateri uguali, quella dell'esaedro o cubo da sei quadrati uguali, quella del dodecaedro da dodici pentagoni uguali.

Del tetraedro è dato su (xy) (fig. 14a) il triangolo equilatero di base $(1)-(2)-(3)$ di centro (o) ; il vertice (1) è su t_{xy} e coincide con $1'$; la (s) per (O) parallela a $(1)-(2)$ ha come omologa la s' per O' ; la $1'-2'$ è parallela a s' ; appoggio il (3) a $(1)-(2)$, passo a $1'-2'$ e ricavo $3'$; ricavo l'altezza $(o)-5$ ruotando la $4-(3)$; riporto $(o)-5$ in $o'-6^*$ parallela a z^* e per proiezione ottengo la $o'-6'$, proiezione dell'altezza del tetraedro, che completo.

Il piano sezionante α , di traccia $t_{\alpha xy}$ parallela a $1'-2'$ voglio che sia parallelo alla faccia $1'-2'-6'$ (fig. 14b); la sezione si completa con la $7'-8'$ parallela a $1'-6'$ e la $8'-9'$ parallela a $6'-2'$; ricordo che un piano seziona due piani paralleli fra loro secondo due parallele e che in proiezione dall'infinito due parallele risultano sempre parallele fra loro.

Un punto $11'$ dato sulla faccia $1'-2'-6'$ sta sulla generatrice $6'-11'-12'$, la cui proiezione sul piano di base è $12'-o'$; la proiezione di $11'$ sul piano di base è $13'$; osservo che, essendo $1o'$ il medio di $1'-2'$, la $6'-1o'$ rappresenta la mediana ma, in realtà, è anche altezza della faccia reale e retta di massima pendenza di essa su xy ; inoltre, il triangolo $7'-8'-9'$ rappresenta un triangolo equilatero; un piano sezionante il tetraedro può ricavarvi un quadrilatero e, casi particolari un parallelogramma.

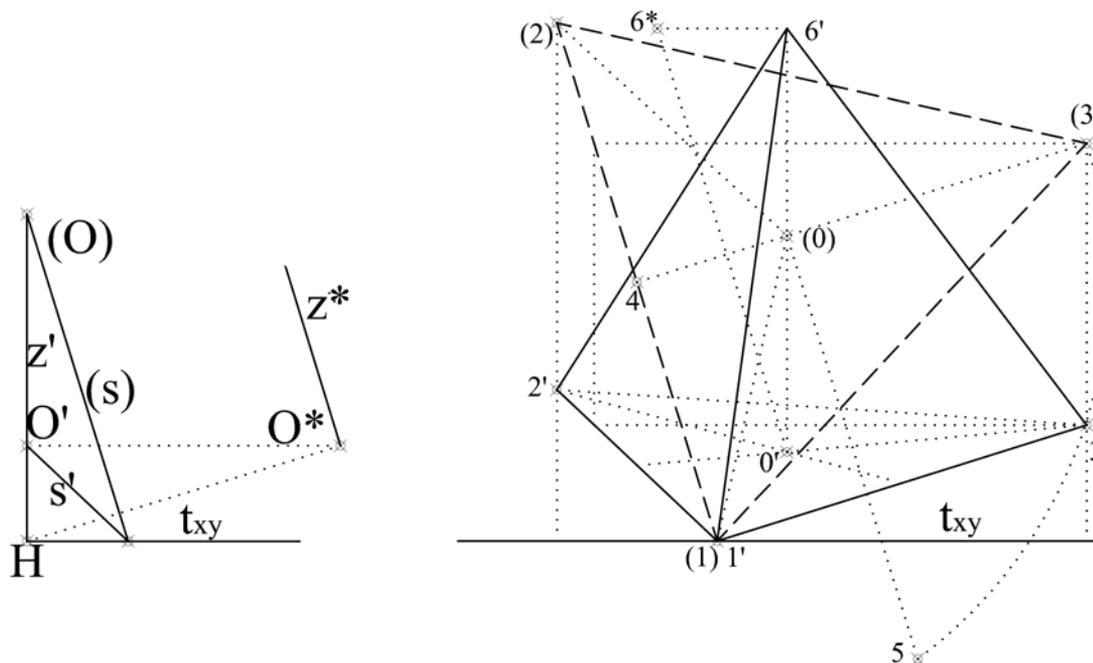


Figura 14a

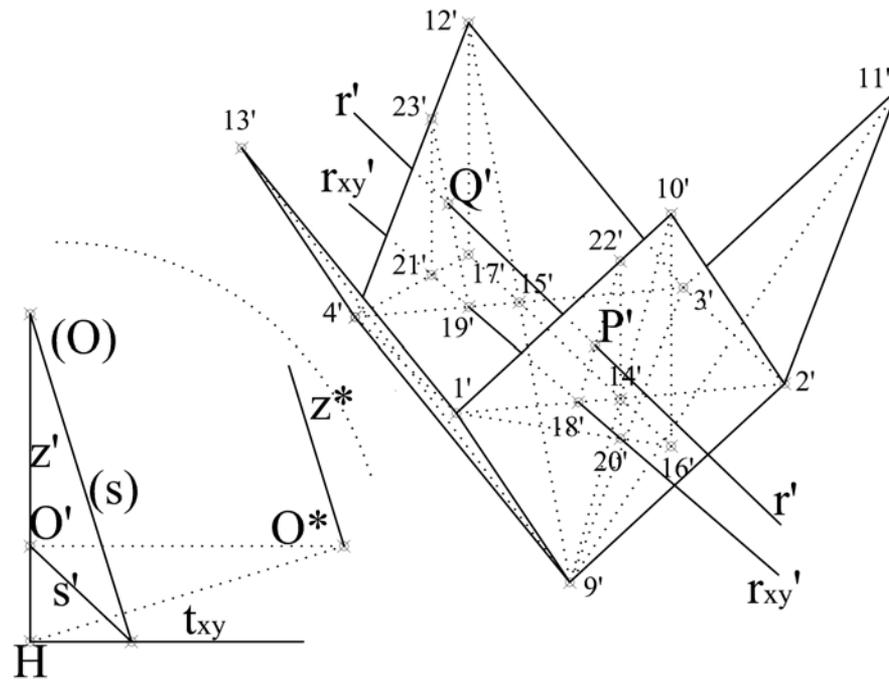


Figura 14c

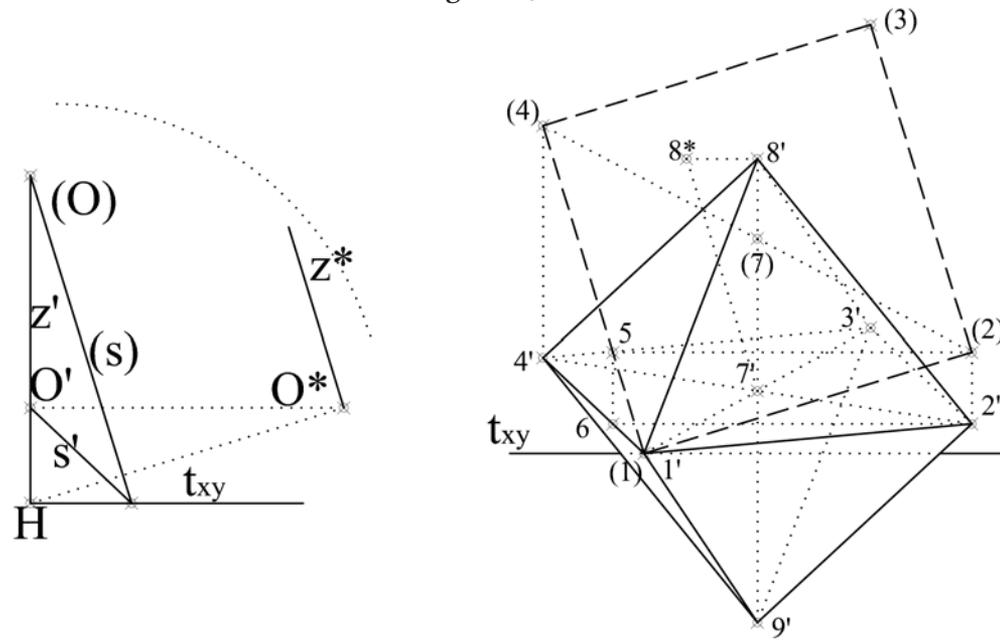


Figura 14d

Capitolo 15 – Coniche

Assonometria delle coniche. (fig. 15a, 15b, 15c, 15d)

L'assonometria ortogonale di un arco piano appartenente a xy , a yz , a zx o ad α , si ricava per punti, utilizzando l'omologia di ribaltamento su π del piano di appartenenza, sfruttando eventuali simmetrie, direzioni coniugate, segmenti di uguali dimensioni e direzione, eventuali similitudini e proporzionalità, etc.

La circonferenza ha il vantaggio di risultare un'ellisse; la proiezione di due diametri ortogonali è una coppia di diametri coniugati, che bastano per costruire l'ellisse; il diametro parallelo alla traccia del suo piano conserva in proiezione la direzione e la dimensione ed è l'asse maggiore dell'ellisse; il diametro ortogonale diventa asse minore e si accorcia secondo la retta di massima pendenza del piano rispetto a π .

La proiezione della circonferenza di xy (fig. 15a) ha l'asse maggiore $A'_{xy}-B'_{xy}-C'_{xy}$ parallelo a t_{xy} ; il semiasse minore $B'_{xy}-D'_{xy}$ si ricava dal raggio $B'_{xy}-A'_{xy}$ parallelo ad $H_{xy}-O_{xy}$ mediante la $A'_{xy}-D'_{xy}$ parallela a $O_{xy}-O'$.

La proiezione della circonferenza di yz (fig. 15b) ha l'asse maggiore $A'_{yz}-B'_{yz}-C'_{yz}$ parallelo a t_{yz} ; il semiasse minore $B'_{yz}-D'_{yz}$ si ricava dal raggio $B'_{yz}-A'_{yz}$ parallelo ad $H_{yzr}-O_{yzr}$ mediante la

$A'_{yz}-D'_{yz}$ parallela ad $O'_{yzr}-O_{yzr}$; mancando lo spazio, si è utilizzato un sistema ridotto ausiliario.

La proiezione della circonferenza di zx (fig. 15c) ha l'asse maggiore $A'_{zx}-B'_{zx}-C'_{zx}$ parallelo a t_{zx} ; il semiasse minore $B'_{zx}-D'_{zx}$ si può ricavare come nel caso precedente oppure si considera il raggio $B'_{zx}-I$ parallelo a z^* e si accorcia in $B'_{zx}-2$; per chiarezza grafica considero il simmetrico $B'_{zx}-3$; per l'omologia affine ortogonale avente per asse $A'_{zx}-B'_{zx}-C'_{zx}$ al 4-3 corrisponde 4-5, e al 5-6-7 il 3-7- D'_{zx} .

Per angoli in O' pari a 120° le tre ellissi risultano eguali; se in una data ellisse proiezione il diametro parallelo alla traccia non è asse maggiore, essa non è proiezione di una circonferenza, bensì di un'altra ellisse.

Per la proiezione della circonferenza di $\alpha(t_{\alpha xy}, t_{\alpha zx})$ (fig. 15d), occorre ricavare la $t_\alpha = T_{\alpha zx \pi} - T_{\alpha xy \pi}$, comuni rispettivamente a t_{zx} , $t_{\alpha zx}$ e t_{xy} , $t_{\alpha xy}$; l'asse maggiore è $A'_\alpha - B'_\alpha - C'_\alpha$ parallelo a t_α ; per il semiasse minore si definisce nell'omologia di ribaltamento di α su π , avente per asse $A'_\alpha - B'_\alpha - C'_\alpha$, la coppia di punti omologhi $T'_{\alpha x}$, $(T_{\alpha x})$, tramite la $O_{xy}^* - T'_{\alpha x} - 1$, $T'_{\alpha x} - 2$ ortogonale a t_α , $T'_{\alpha x} - 3 = T_{\alpha x} - 1$ ortogonale a $T_{\alpha x} - 2$, rotazione in 2- $(T_{\alpha x})$ della 2-3; alla 5-6 parallela a $(T_{\alpha x}) - 4$ corrisponde la 6- D'_α ; avendo il semiasse minore $B'_\alpha - D'_\alpha$, si ricava l'ellisse.

La circonferenza trasli conservando la giacitura; l'ellisse proiezione non cambia.

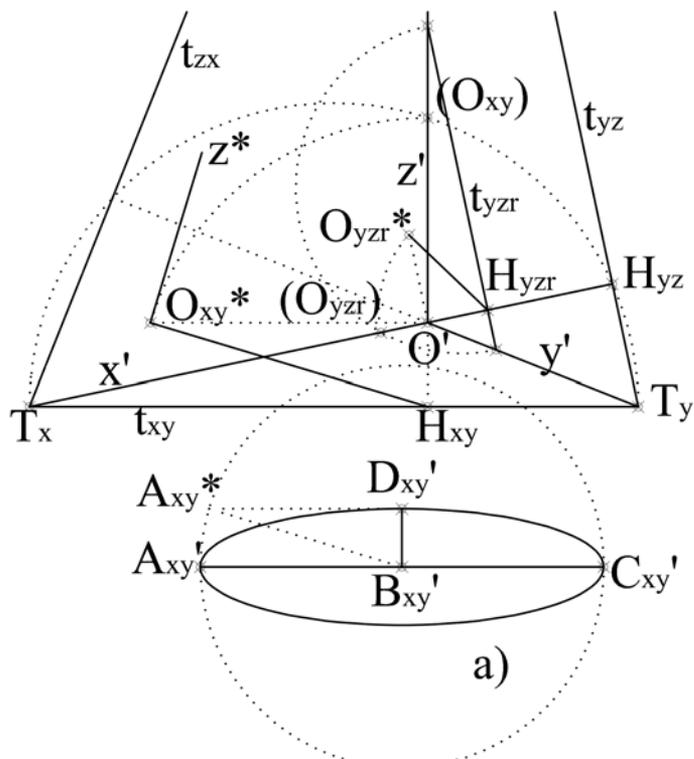


Figura 15a

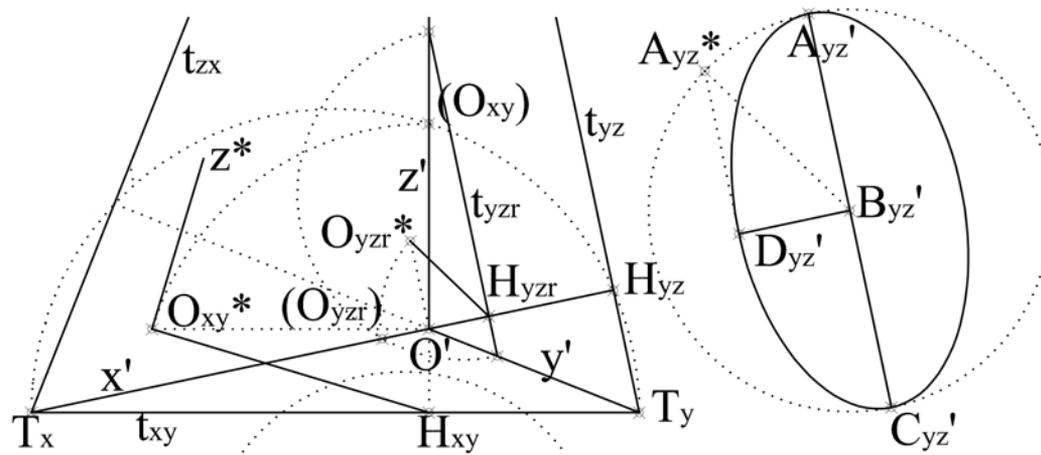


Figura 15b

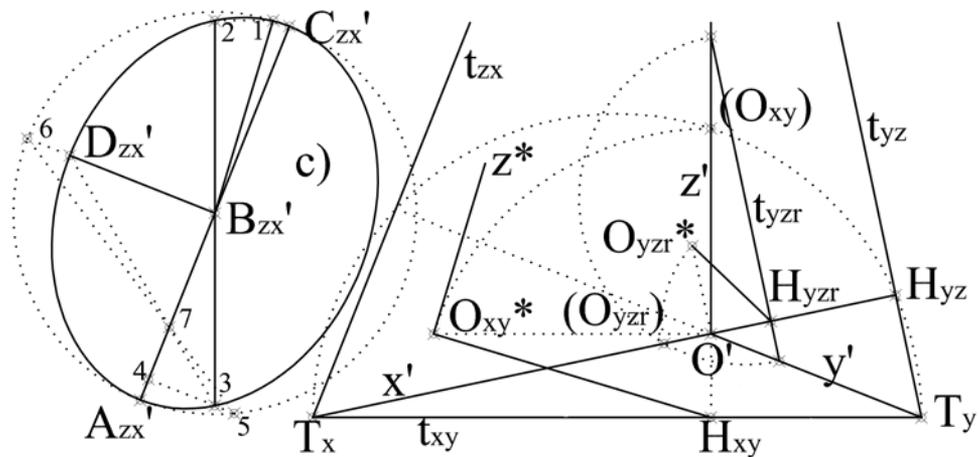


Figura 15c

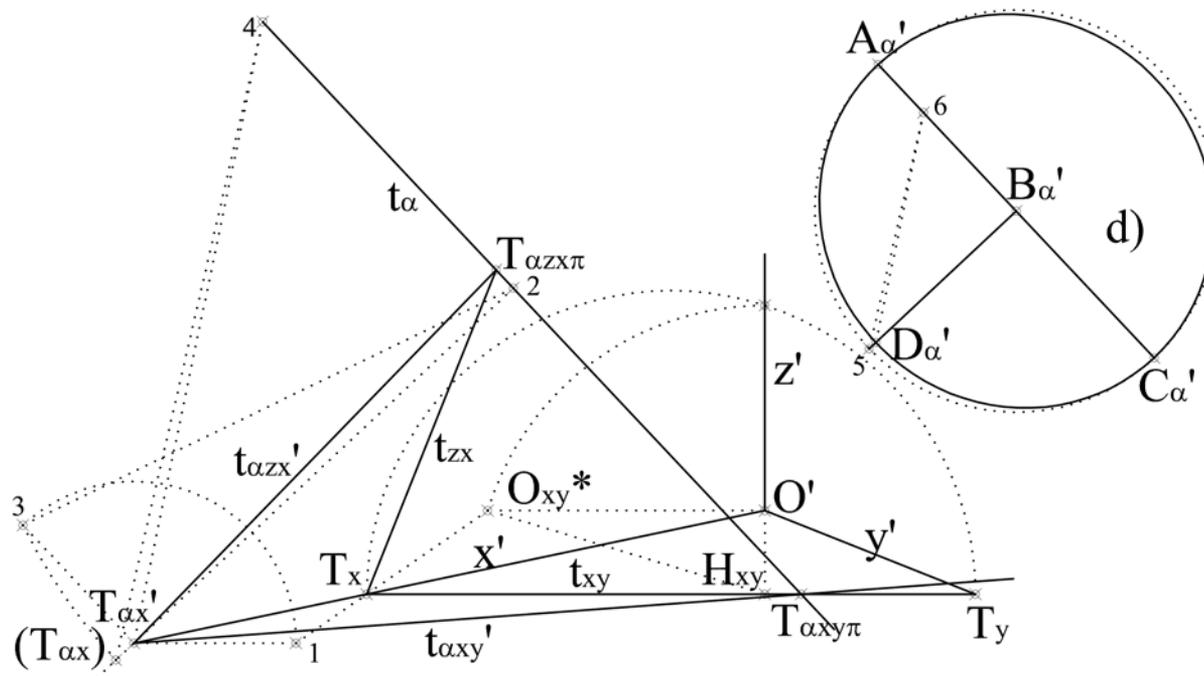


Figura 15d

Capitolo 16 – Prisma

Prisma, retta, piano. (fig. 16a, 16b, 16c)

Il pensiero comune del volume di un prisma nasce dalla considerazione di due poligoni di base, regolari, piani, distinti, uguali e paralleli, resi solidali da segmenti rettilinei, detti spigoli laterali, uguali, paralleli, congiungenti i vertici corrispondenti, ortogonali alla giacitura delle basi.

La congiungente i centri delle basi è l'asse del prisma; essa è equidistante dai predetti spigoli, è ad essi parallela e di uguale lunghezza; questa è la distanza ortogonale fra le basi.

Spigoli laterali e spigoli di base costituiscono le facce laterali del prisma, tutte uguali, tanti rettangoli piani quanti sono i lati di base; se tale numero è pari, le facce laterali, a due a due, risultano fra loro parallele.

Tale descrizione non è inesatta, ma estremamente limitativa e persino fuorviante; non è a livello universitario, scientifico, generalizzato; non richiama ad un processo di genesi geometrica. Vi invito a riflettere sulla superficie generata da una retta, detta generatrice, che muovendosi e conservando una data direzione, scorra con continuità sugli infiniti punti di una poligonale assegnata, detta direttrice.

Questa può essere aperta o chiusa, appartenente ad una o più giaciture piane e non, con o senza punti multipli, persino contenente in qualche suo lato, fra due vertici consecutivi, la direzione della retta. Per chiarire le idee, penso un prisma come è stato definito all'inizio e scarabocchio, comunque scorrendo su tutte le facce laterali piane, una linea qualsiasi, escludendovi la scelta incon-

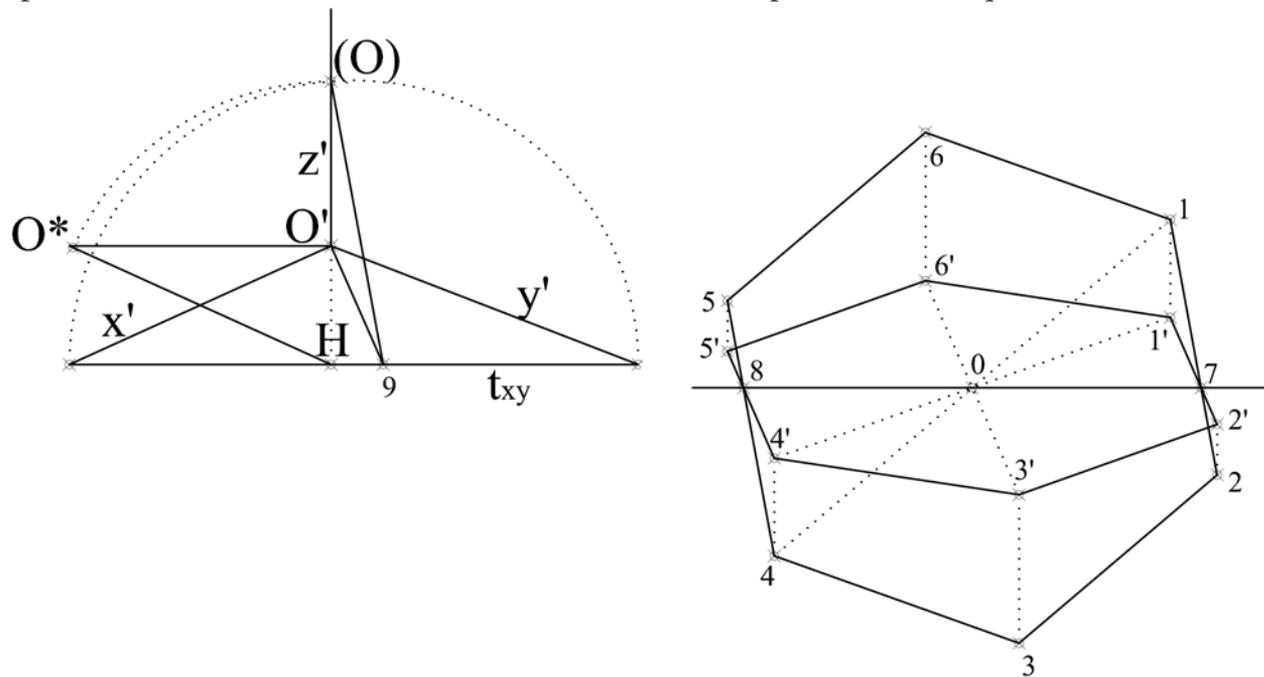


Figura 16a

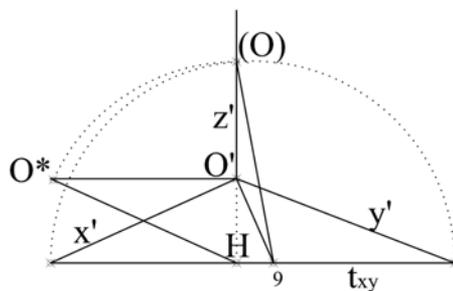
gruente della persistenza della direzione assunta per gli spigoli, ossia per la retta generatrice.

Questo scarabocchio è una delle infinite direttrici possibili, che, associata alla retta generatrice, genera una superficie prismatica; di essa fa parte, previa la troncatura delle due basi, proprio quel prisma da me voluto.

L'esempio è uno spunto per pensare in generale, liberi; posso scambiare la direttrice con la generatrice; se muovo lo scarabocchio traslandone il punto di contatto con la retta, genero la stessa superficie prismatica.

Ed ancora, voglio la libera troncatura delle due basi, che possono non essere uguali, la libera scelta dell'angolo fra il piano di base e l'asse, che può variare per 180° , estremi esclusi, e non essere per forza 90° . Via via che rifletto, penso altre libertà: l'esposizione di una libera forma prismatica mi può apparire insidiante, inducendomi a riconoscere non un prisma ma una piramide; la lettura responsabile è incompatibile con la fretta di riconoscere.

Considero in (fig. 16a), sul piano ribaltato (xy), un esagono regolare di vertici 1-2-3-4-5-6, e ne ricavo la proiezione $1'-2'-3'-4'-5'-6'$; utilizzo l'omologia affine ortogonale di asse 7-0-8, parallelo a t_{xy} , nel riferimento x',y',z',O' .



In tale omologia sappiamo che ad (O) corrisponde O' ed è (O)- O' la direzione del centro di omologia; a 9-(O), parallelo ad 1-7-2, corrisponde 9- O' , al quale è parallelo $1'-7'-2'$.

Ricavo, secondo le numerose vie omologiche già note la proiezione dei vertici e dei lati, tenendo conto delle simmetrie, dei parallelismi e della centralità, rispetto al punto o.

So, in (fig. 16b), di potermi sganciare dalla particolare posizione di riferimento spaziale della terna, appoggiandomi ad un piano orizzontale di comodo xy .

Traslo il precedente esagono in $1_{xy}', 2_{xy}', 3_{xy}', 4_{xy}', 5_{xy}', 6_{xy}'$, con centro in o_{xy}' ; fisso in proiezione l'altezza in $o_{xy}'-o'$ e traslo la base inferiore in $1'-2'-3'-4'-5'-6'$.

Collegando i vertici inferiori con i corrispondenti superiori, ottengo l'immagine del prisma esagonale regolare retto, evidenziandovi in punteggiato gli spigoli non in vista.

Un problema importante: determinare in assonometria diretta le intersezioni A_r' e B_r' fra il prisma e la retta r (r', r_{xy}'); la r_{xy}' , complanare con la base inferiore del prisma, ne interseca gli spigoli di base $5_{xy}'-6_{xy}'$ in $7_{xy}'$ e $3_{xy}'-2_{xy}'$ in $8_{xy}'$.

La verticale, condotta per il $7_{xy}'$, individua sulla r' il punto A_r' interno alla faccia $5_{xy}'-6_{xy}'$, $6'-5'$; al verticale, condotta per $8_{xy}'$, in-

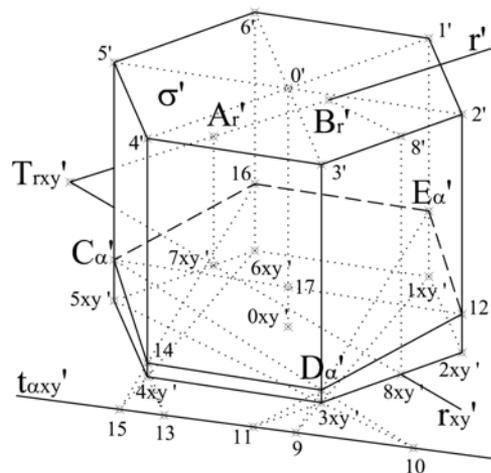


Figura 16b

terseca lo spigolo superiore $3'-2'$ in $8'$, prima di raggiungere la r' . Allora considero per r' il piano verticale, che interseca le due basi, parallele secondo la $8_{xy}'-7_{xy}'$ e la parallela $8'-B_r'$; le intersezioni reali fra r e prisma sono individuate sempre da quelle reali fra la r' e la proiezione della predetta sezione poligonale piana. Nella stessa immagine b) è risolto anche il problema della sezione piana generica del prisma con α definito dai tre punti C_α' , dato su $5_{xy}'-5'$, D_α' , dato su $3_{xy}'-3'$, E_α' , dato su $1_{xy}'-1'$. Le rispettive proiezioni su xy in proiezione ricadono in $5_{xy}'$, $3_{xy}'$, $1_{xy}'$; posso seguire vie diverse; ricavo i punti 9 e 10 come intersezioni fra $E_\alpha'-D_\alpha'$ e $1_{xy}'-3_{xy}'$ e fra $C_\alpha'-D_\alpha'$ e $5_{xy}'-3_{xy}'$. La retta 9-10 è la traccia $t_{\alpha xy}'$, asse dell'omologia affine obliqua che lega la base e la sezione; il centro dell'omologia è la verticale; ripetendo la precedente costruzione ottengo la $2_{xy}'-3_{xy}'-11$ e la corrispondente $11-12-D_\alpha'-12$, la $5_{xy}'-4_{xy}'-13$ e la corrispondente $13-14-C_\alpha'$, la $6_{xy}'-4_{xy}'-15$ e la corrispondente $15-14-16$. La $C_\alpha'-12$ individua sulla $o_{xy}'-o'$ il punto 17, centro di simmetria della sezione $C_\alpha'-14-D_\alpha'-12-E_\alpha'-16-C_\alpha'$; il piano α può essere assegnato anche con una retta e un punto; i punti possono appartenere alle facce, possono essere interni, esterni; siamo liberi di immaginare le varianti possibili. L'inclinazione del piano può determinare la parzializzazione della base inferiore o superiore, la suddivisione del prisma secondo

rapporti di volume o superficiali prefissati; basta sbizzarrirsi. Nella (fig. 16c) considero un generico piano $\alpha(t_{\alpha xy}', t_{\alpha zx}')$ sezionante un prisma obliquo, in cui l'asse $o_{xy}''-o'$ si proietta su xy in $o_{xy}''-o_{xy}'$; in punteggiato ho riportato sia il poligono di base appartenente ad xy , che la proiezione su xy della base superiore, collegandone i vertici corrispondenti con la proiezione dei relativi spigoli obliqui. La 2-3 è parallela alla $o_{xy}''-o_{xy}'-1$ e la 1-5 è parallela alla 2-4; utilizzando l'omologia affine obliqua di asse $t_{\alpha xy}'$, la simmetria di centro 5, nonché il parallelismo fra spigoli e tra facce, ottengo a trattini la sezione proposta. L'argomento resta aperto a tutte le immaginabili speculazioni teoriche e pratiche; il cubo è un particolare prisma; anche il parallelepipedo. Tanto interesse sottendono alla trattazione delle intersezioni fra prismi; notevoli sono quelle riguardanti i fori, i vuoti, gli incavi, etc, da sviluppare e svolgere in altra occasione e sede.

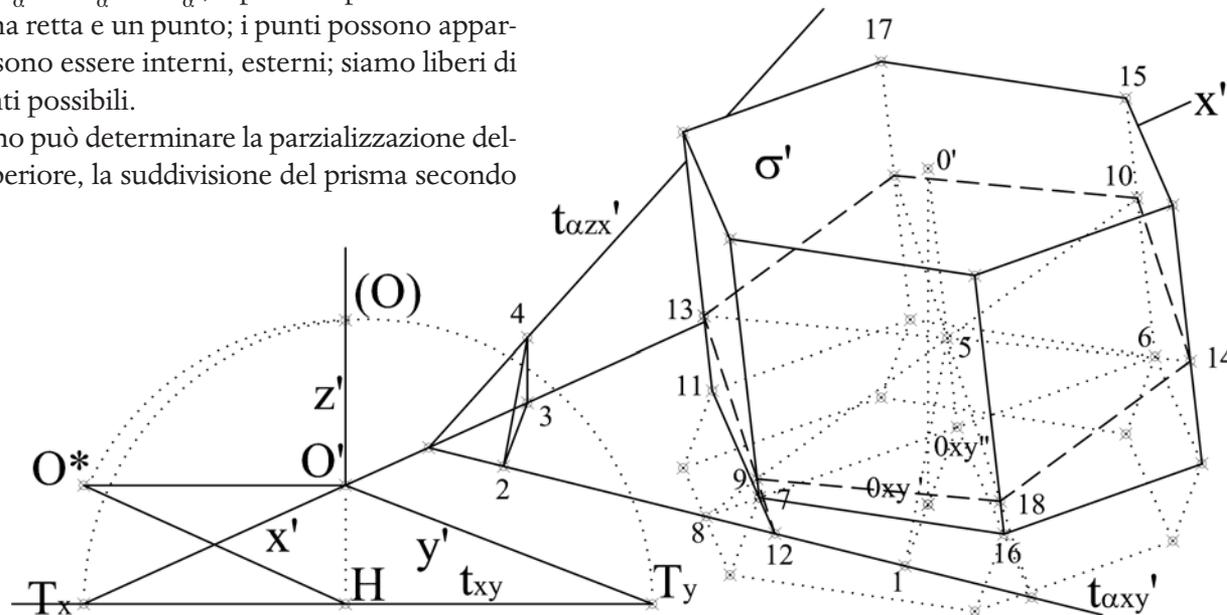


Figura 16c

Capitolo 17 – Piramide

Piramide, retta, piano.

Se i vertici di un esagono σ , piano, regolare, vengono uniti con un punto, V , non appartenente al piano di σ , bensì alla retta condotta per il centro C della base esagonale, ortogonalmente ad essa, nell'immaginario collettivo, si costruisce una piramide esagonale, regolare, retta, di base o direttrice σ , di vertice V , con sei facce tutte eguali, a forma di triangolo isoscele, ciascuna con uno stesso angolo al vertice, ciascuna con uno stesso angolo con l'asse $V-C$, ciascuna con una stessa altezza, distinta e maggiore di $V-C$, altezza della piramide; se $V-C$ è infinita si ha il prisma.

Mi sembra di aver detto tutto, anzi, tanto; ma non basta a li-

vello universitario; la poligonale direttrice può essere chiusa o aperta, piana o gobba, regolare o irregolare, ad n lati pari o dispari, ciascuno essendo un segmento rettilineo e, persino, curvilineo, purchè complanare al vertice V ; la retta per V ortogonale al piano della direttrice è asse; solo se tale asse contiene il centro della base regolare, la piramide è retta, altrimenti è obliqua; nella superficie piramidale la direttrice non può mancare, anzi possono aversi infinite direttrici, che con il vertice formino la stessa superficie; invece quella che intendiamo per base della piramide esiste solo se pensiamo di troncare la superficie piramidale, di sezionarla con il piano di base; la superficie è infinita ed ha due falde contrapposte al vertice, centro di simmetria; la superficie è una rigata, cioè può essere generata da

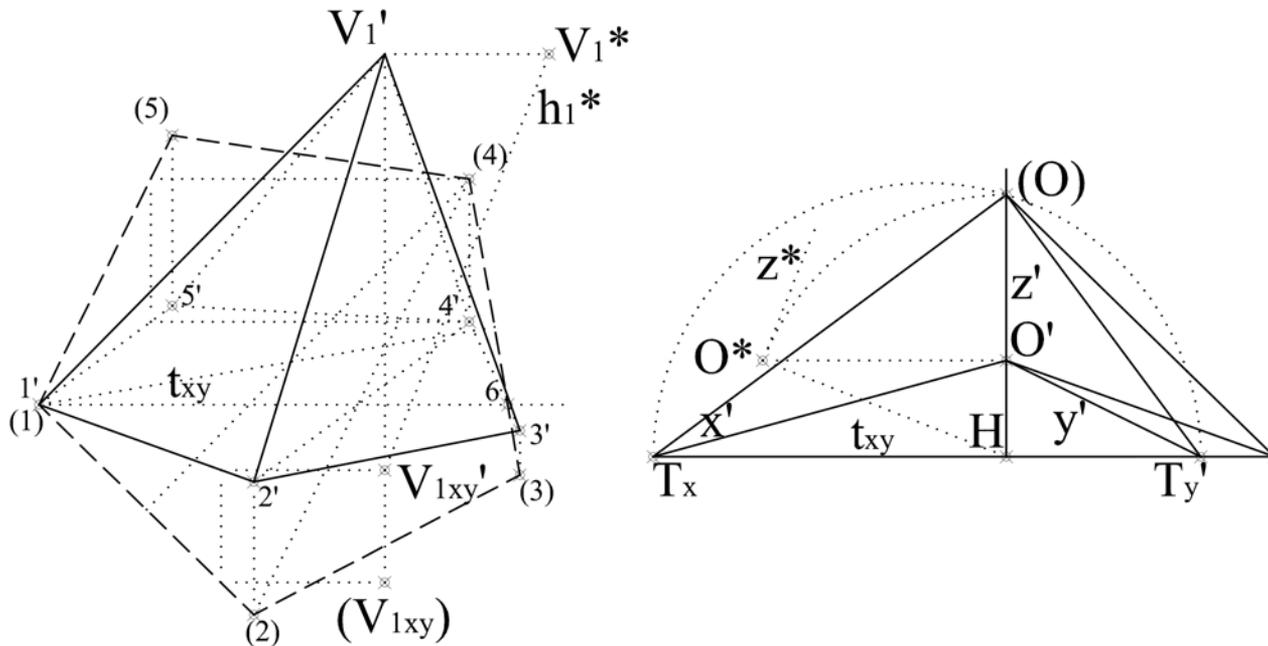


Figura 17a

una retta, generatrice, che, contenendo il vertice V , si appoggia a ciascuno degli infiniti punti della direttrice, fra cui i vertici che generano gli spigoli; questi possono intendersi come rette comuni ai piani di facce contigue; in conclusione, se siamo liberi di pensare, sulla piramide possiamo dire di più, sempre di più. Consideriamo su (xy) (fig. 17a) un pentagono regolare $(1), (2), (3), (4), (5)$, ricaviamone per omologia affine ortogonale di asse t_{xy} e coppia $(O), O'$, la proiezione $1', 2', 3', 4', 5'$ della base di una piramide di vertice $V_1(V_1', V_{1xy}')$, avendo fissato (V_{1xy}') su (xy) ; non ho scelto come proiezione verticale del vertice sul piano di base xy il centro del pentagono, per cui si tratta di una piramide obliqua. Posso dare direttamente la proiezione di una piramide di vertice $V_2(V_2', V_{2yz}')$ (fig. 17b) avente la base poggiata su yz e intersecarla con $r(r', r_{yz}')$, ricavandone i punti $P(P', P_{yz}')$, $Q(Q', Q_{yz}')$; la superficie della piramide è ottenuta unendo con V_2' i vertici di base $1', 2', 3', 4', 5', 6', 7'$; la relativa proiezione su yz è ottenuta unendo i predetti con V_{2yz}' ; il piano α proiettante r' su yz in r_{yz}'

ha in r_{yz}' la traccia $t_{\alpha yz}'$, la quale individua i punti $8'$ e $9'$ sui lati di base $1'-2'$ e $4'-5'$, e $10'$ su $V_2'-2'$, da cui, secondo x' , si ricava 13 su $V_2'-2'$, $11'$ su $V_{2yz}'-3'$, da cui 14 su $V_2'-3'$, $12'$ su $V_{2yz}'-4'$, da cui 15 su $V_2'-4'$ $13'$; unendo $8'-13'-14'-15'-9'$, ottengo con $8'-9'$, la poligonale chiusa intersezione tra la superficie della piramide e il piano α ; la poligonale ed r' sono complanari; la r' interseca in P' e Q' ; su r_{yz}' ricavo P_{yz}' e Q_{yz}' . Infine rappresentiamo una piramide regolare retta di vertice V_3' (fig. 17c), di base quadrata, con la faccia $1'-V_3'-2'$ appartenente alla giacitura xy , il lato $1'-2'$ su x' , l'altezza della faccia $C_\beta'-V_3'$ su y' , la base quadrata $1'-2'-3'-4'$, su β da ricavare; la piramide sarà sezionata dal piano $\alpha(t_{\alpha xy}', T_{\alpha x}', t_{\alpha zx}')$. Detto γ il piano della mediana $A-B$ del quadrato di base, ortogonale a x e dell'asse $C_\beta'-V_3'$, altezza della piramide, $A-V_3'$ è l'altezza del triangolo isoscele, faccia della piramide e $B-D$ è la quota rispetto a xy dei due vertici contrapposti agli estremi del lato posizionato su x ; il lato su x si accorcia come $T_x-(O)$ in

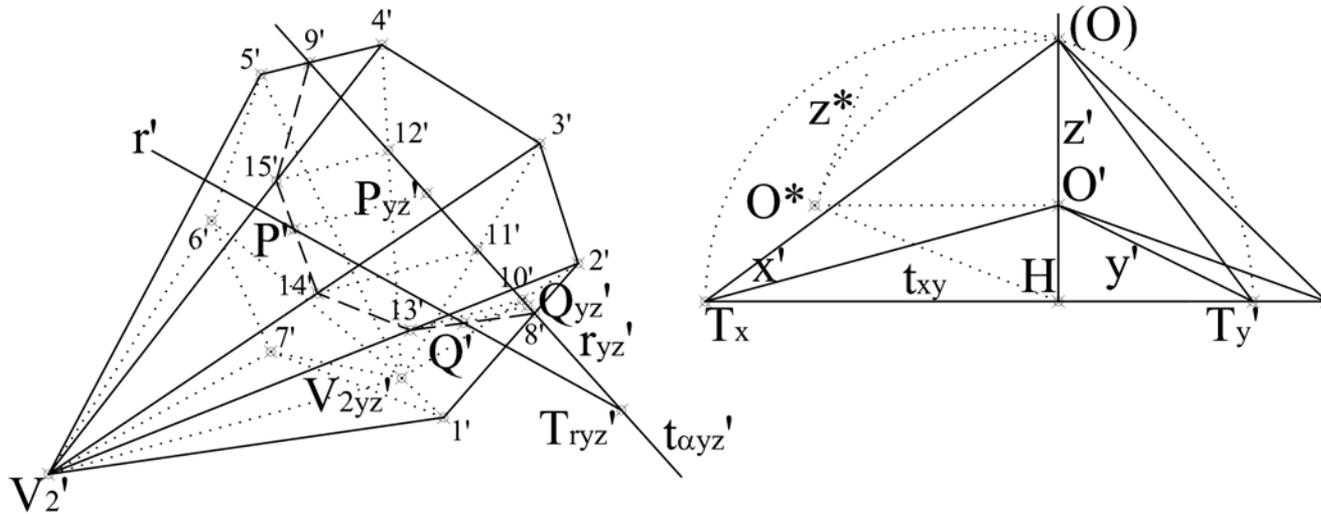


Figura 17b

T_x-O' e precisamente ne considero metà in $A'-(1)$ parallelo ad (X) , che si accorcia su x' in $A'-1'$; ricavo $2'$ raddoppiando $A'-1'$; da $A'-(D)-(M)$ ottengo la proiezione su xy di B ed M' , accorciando come $T_y-(O)$ in T_y-O' ed essendo $A'-(M)$ la metà di $A-V_3$, raddoppio in $A'-V_3'$; la faccia della piramide appartenente a xy è in $1'-V_3'-2'$; sulla parallela a z^* per D' riporto $D-B$ in $D'-B^*$ e accorcio in $D'-B'$; conduco per B' il lato superiore $3'-4'$ parallelo a x' e concludo la base $1'-2'-3'-4'$; unisco i vertici di base con V_3' e seleziono spigoli e facce in vista; la base è sul piano β .

Assegno le tracce $t_{\alpha xy}'$, $t_{\alpha zx}'$ del piano α sezionante e procedo con l'omologia, determinando su zx la proiezione della base da V_3' ; ottengo da C_β' il punto $5'$, da B' il $6'$ e sulla parallela a $3'-4'$ gli estremi $7'$ e $8'$; risulta il trapezio $1'-2'-7'-8'$ intersecato in $9'$ e $10'$ da $t_{\alpha zx}'$, che è asse di omologia di centro V_3' e coppia $1', 11'$

sullo spigolo $1'-V_3'$ della faccia appartenente a xy ; le rette $A'-1'-T_{\alpha x}'=x'$ e $t_{\alpha xy}'$ sono omologhe.

La $9'-11'$ individua il 12 , altro vertice della sezione, appartenente alla base $1'-2'-3'-4'$; osservo che $T_{\alpha x}'-12$ è la retta comune ad α e β ; ricavo il $13'$; la $10'-13'$ interseca la faccia $3'-V_3'-4'$, che è parte della $7'-V_3'-8'$, secondo la $10'-13'-14'$; poiché la $T_{\alpha x}'-11'$ appartiene alla faccia $1'-V_3'-2'$, incontra lo spigolo $V_3'-2'$ in $15'$; dunque, la sezione risulta definita dalla poligonale chiusa $11'-12'-13'-14'-15'-11'$, da cinque lati, poiché α coinvolge anche la base della piramide; la proiezione del lato $3'-4'$ su xy è data da $16'-17'$, di cui D' è il medio; il rettangolo proiezione su xy della base è dato dal parallelogramma $1'-2'-16'-17'$; $V_3'-16'$ e $V_3'-17'$ incontrano x' in $18'$ e $19'$; risulta $18'-19'=7'-8'$.

Una piramide particolare è il tetraedro, uno dei cinque poliedri regolari.

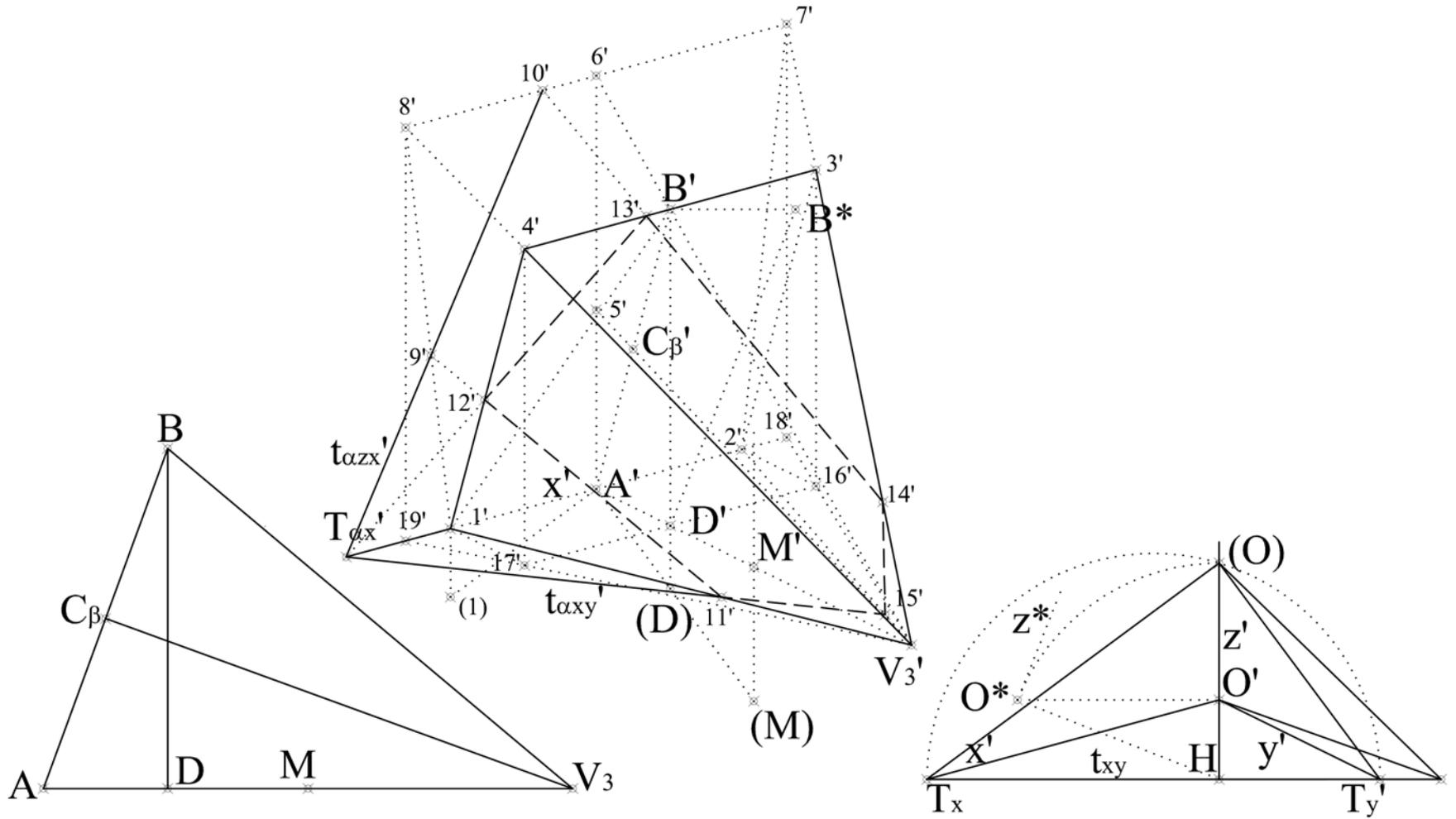


Figura 17c

Capitolo 18 – Cilindro

Cilindro in assonometria ortogonale. (fig. 18a, 18b)

Disegno una circonferenza su giacitura xy , ne traslo in giù l'ellisse proiezione, collego le due basi, evidenzio le parti in vista; ho l'immagine di un cilindro circolare retto, visto dall'alto; posso vederlo dal basso se pongo l'ellisse inferiore tutta in vista e quella superiore per metà nascosta; affronteremo casi più complicati.

La $r(r', r_{xy}')$ interseca il cilindro (fig. 18a); la r_{xy}' individua il piede delle due generatrici, le quali mostrano in comune con r' i due punti di intersezione; nel caso di $s(s', s_{xy}')$ uno dei due punti

è virtuale; per l'estremo superiore della generatrice conduco la parallela alla s_{xy}' , individuando il secondo punto di intersezione. Sullo stesso cilindro sviluppo altri problemi (fig. 18b); un piano α , dato da $t_{\alpha xy}'$ e da r' sull'asse $o'-o_{xy}'$, interseca il cilindro secondo un'ellisse, che si proietta ancora secondo un'ellisse e' , utilizzando l'omologia affine obliqua che ha per asse la traccia $t_{\alpha xy}'$, e centro improprio $r'-r_{xy}'$ verticale; scelto 2 su $t_{\alpha xy}'$, $2-r_{xy}'$ ricava $3_{xy}'$ e $2-r'$ sulla generatrice per il $3_{xy}'$ ricava il $3'$ punto della costruenda ellisse; si utilizza la simmetria rispetto a r' .

Nella realtà, l'ellisse sezione ha l'asse minore per r' parallelo a $t_{\alpha xy}'$ e l'asse maggiore nella direzione di massima pendenza di α rispetto

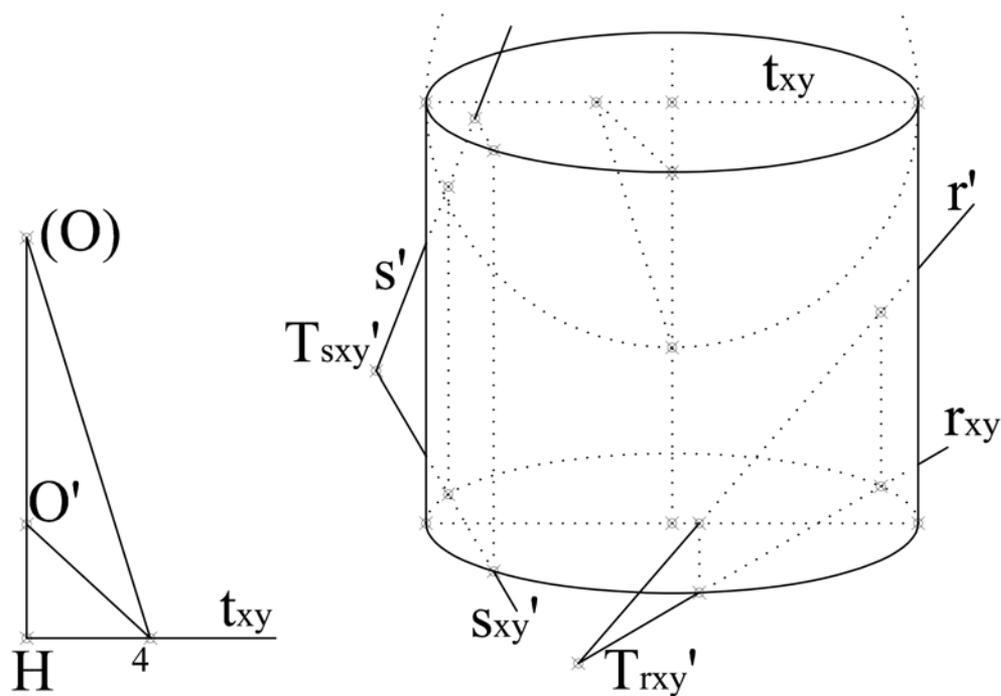


Figura 18a

a xy , cioè sull'ortogonale a $t_{\alpha xy}$; in proiezione tali assi diventano diametri coniugati, poiché le tangenti ai loro estremi in realtà sono paralleli fra loro e il parallelismo in proiezione dall'infinito si conserva. Devo ricavare su $x'y'$ il coniugato ($t_{\alpha xy}$) di t_{xy} ; scelto 5, conduco 5-6 parallelo a 4-O', 5-7 parallelo a 4-(O); per ottenere ($t_{\alpha xy}$) basta unire il 7 con l'intersezione di $t_{\alpha xy}$ con t_{xy} ; essendo tale punto fuori campo costruisco il triangolo 8-9-10 omotetico a 5-6-7 e la 10-7 è ($t_{\alpha xy}$); la $11-12$, ortogonale a ($t_{\alpha xy}$), porta alla $11-12$, al piede 13_{xy} e al 13 , estremo del diametro $13'-1'-14'$. Per $15_{xy}'$ conduco $15_{xy}'-16_{xy}'$ parallelo a $t_{\alpha xy}$ e le generatrici per $15_{xy}'$ e $16_{xy}'$ intersecano in $15'$ e $16'$ la parallela a $t_{\alpha xy}$ per $1'$;

dai diametri coniugati $13'-1'-14'$ e $15'-1'-16'$ ricavo gli assi $17'-1'-17'$ e $18'-1'-18'$; l'ellisse sezione e' ha altri punti notevoli; alla $19_{xy}'-16_{xy}'-20$ corrisponde $20-16'-19'$; i punti $19'$ sono di contatto fra la e' e le generatrici di contorno apparente del cilindro. Se $1'$ è scelto più vicino a o' , cresce l'angolo di α rispetto a xy ; il $13'$ resta sempre il più basso e il simmetrico, finché ricade sulla sua generatrice, è il più alto; ma può ricadere oltre; in tal caso, l'ellisse di base e l'ellisse sezione hanno in comune due punti; il segmento che li unisce è una corda parallela a $t_{\alpha xy}$. La distanza di $P(P', P_{xy}')$ dal cilindro: utilizzando la circonferenza omologa, dalla $P'-Q'-o'$ ricavo la $o'-(Q)-(P)$; la distanza

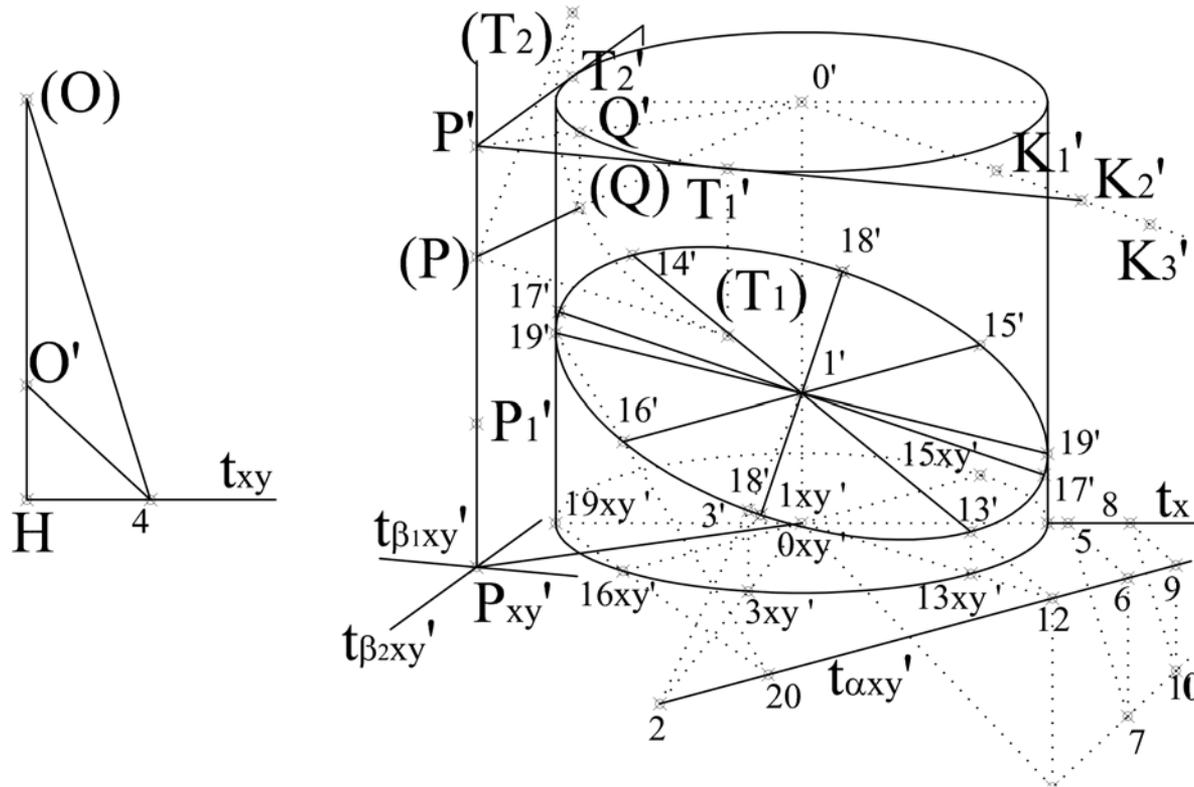


Figura 18b

(P)-(Q) di P dal cilindro non varia spostando P sulla sua verticale, parallela all'asse del cilindro; se conduco da (P) le (P)-(T₁), (P)-(T₂), tangenti la circonferenza omologa, ricavo le tangenti P'-T₁', P'-T₂', condotte da P alla base superiore, le quali con la P'-P_{xy}' formano i piani tangenti β₁, β₂.

Essi delimitano la superficie cilindrica in vista da P₁'; il contorno apparente da P₁' è definito in proiezione dalle due generatrici per T₁', T₂' e dall'arco T₁'-Q'-T₂' della base superiore e dal corrispondente in quella inferiore.

P₁' può spostarsi fino all'infinito sulla sua verticale e quando supera la posizione P' vede per intero la base superiore; l'arco di contorno apparente diventa il complemento di T₁'-Q'-T₂'; restano le due generatrici e l'arco inferiore corrispondente a T₁'-Q'-T₂'; se P₁' si avvicina al cilindro le generatrici si avvicinano; se si appoggia alla generatrice per Q' la superficie in vista si annulla; se si allontana dalla superficie cilindrica la parte in vista si approssima alla metà e tale diventa se va all'infinito.

Se P₁' si posiziona nello spazio occupato potenzialmente dal cilindro la parte in vista è la sola base ad esso esposta; il contorno apparente si riduce alla circonferenza di base; osservo, infine che la retta T₁'-T₂' è polare di P nella circonferenza di centro o; la

polarità si conserva in proiezione; il piano delle generatrici per T₁', T₂' è polare della P'-P_{xy}'.

Infine considero il punto K in movimento sul piano della base superiore, esterno ad essa e pongo il quesito della sua visualizzazione da P₁'; avensò già ricavati i piani tangenti, posso concludere che K₁' non è esposto a P₁', e K₃' lo è; K₂' appartiene al piano tangente e divide il percorso di K, in vista e non.

Tutto ciò che ho detto per il cilindro circolare retto avente la base su xy, è esteso ai casi diversi di cilindri circolari retti con la base appartenente alle giaciture yz e zx; se qui ho fatto riferimento alle proiezioni delle proiezioni sul piano di appoggio, anche in caso diverso è conveniente riferirsi al nuovo piano; per esempio, ho dato P', P_{xy}', non utilizzando P_{yz}' né P_{zx}'; se il cilindro poggia su zx, lavorerò con P', P_{zx}'.

Se il cilindro è poggiato su una giacitura generica, per utilizzare l'omologia e ricavare la sezione tra un piano e il cilindro devo ricavare la traccia del piano sezionante sul piano di appoggio e quella sarà l'asse di omologia; bisogna pensare gli adattamenti e perseguire le vie più convenienti; per esempio, può convenire il prolungamento del cilindro poggiato sul piano generico fino al piano di giacitura xy.

Capitolo 19 – Cono

Cono, retta, piano. (fig. 19a, 19b, 19c, 19d)

Considero per il centro di una circonferenza, detta direttrice, un segmento, detto asse, ortogonale al suo piano e, per l'estremo libero, detto vertice, un altro segmento, detto generatrice, che lo unisca a un punto della circonferenza, il quale, ruotando intorno all'asse, la percorra tutta: ho generato un cono circolare retto.

Oppure: considero su una retta generatrice un punto, detto vertice, e un punto di una curva spaziale, detta direttrice, qualsiasi, generica o particolare, aperta o chiusa, regolare o irregolare, piana o gobba, persino con cuspidi e flessi, con l'eventuale piano non contenente il vertice; il punto della curva la percorra trascinandolo la generatrice, fermo restando il suo passaggio per il vertice; genero una superficie rigata a due falde aperte all'infinito, detta cono.

Per semplificare, con il pericolo di mistificazione, scelgo una sola delle falde, la direttrice circolare, detta base, dal piano ortogonale alla congiungente il vertice con il suo centro, detta altezza, e ottengo il cono circolare retto.

Noto che la generazione di tale superficie può essere determinata dalla rotazione di un triangolo rettangolo intorno ad uno dei cateti; se ruota intorno all'ipotenusa genera due coni contrapposti; una poligonale piana di n segmenti rettilinei, che ruoti intorno ad un asse complanare, genera n tronchi di cono circolari retti; la rotazione di un segmento sghembo con l'asse genera una quadrica detta iperboloidi iperbolico; esso è una rigata a punti iperbolici, mentre il cono è una quadrica a punti parabolici.

Fisso il rapporto omologico $HO':H(O)$ (fig. 19a) relativo a t_{xy} ; conseguono $H-O^*$ e z^* ; su una libera t_{xy} pongo $1_{xy}-0_{xy}-2_{xy}$, diametro della base circolare del cono retto e l'altezza $0_{xy}-3^*$ paral-

lelo a z^* , da cui ricavo in proiezione l'altezza $0_{xy}-3'$ e il vertice $3'$; da $0_{xy}-4^*$ parallelo ad $H-O^*$ ottengo $0_{xy}-4'$ semiasse minore; costruisco l'ellisse di base; per omologia ottengo le generatrici di contorno apparente $3'-5'$ e $3'-6'$, tangenti dal vertice all'ellisse; la polare $5'-6'$ non coincide con l'asse maggiore $1_{xy}-0_{xy}-2_{xy}$ e può ricavarsi secondo il quadrangolo completo mediante la generica $3'-7'-8'-9'-10'-7'$ e la $5'-10'-6'$; evidenzio in punteggiato l'arco dell'ellisse di base non visto.

Sulla stessa figura risolvo la verifica di appartenenza al cono di un punto $P(P', P_{xy}')$; se $0_{xy}-P_{xy}'-11_{xy}'$ è proiezione su xy della generatrice $3'-P'-11_{xy}'$, P appartiene alla superficie del cono; secondo che $3'-P'-11_{xy}'$ interseca la $0_{xy}-P_{xy}'-11_{xy}'$ in un punto esterno o interno a $0_{xy}-11_{xy}'$, P è esterno o interno al cono.

Sulla stessa figura risolvo la minima distanza di $A(A', A_{xy}')$ dalla superficie del cono; il piano assiale verticale $3'-0_{xy}'-A_{xy}'$ ricava $3'-12_{xy}'$ e $3'-A'-T_{Axy}'$; determino $T_{Axy}'-13$ parallela a $12_{xy}'-1_{xy}'$; riporto $0_{xy}'-3^*$ in $0_{xy}'-14$; il 15 , ricavato sulla $13-3'$, conducendo per A' la parallela a $12_{xy}'-1_{xy}'$, va in su nel 16 sulla $13-14$, mentre la $1_{xy}'-3'$ si sposta in $1_{xy}'-14$.

Ho trovato al vero le dimensioni e le posizioni, per cui $16-17$, ortogonale dal 16 della $13-14$ alla $1_{xy}'-14$, è la minima distanza fra A e il cono; dal 17 su $1_{xy}'-3'$ ottengo il 18 e dal 18 per parallela a $12_{xy}'-1_{xy}'$ individua B' sulla generatrice $3'-12_{xy}'$; $A'-B'$ è la proiezione della predetta distanza, ortogonale da A al cono in B ; il percorso eseguito è riportato, ingrandito per omotetia, a parte in alto.

Sulla stessa figura, applicando l'omologia, conduco per T_{Axy}' le due tangenti all'ellisse di base, che con la $3'-T_{Axy}'$ formano i due piani tangenti al cono condotti per A ; è segnato solo quello che ha su xy traccia $T_{Axy}'-19_{xy}'$; quello di traccia $T_{Axy}'-20_{xy}'$ non è segnata; le generatrici di contatto dei piani tangenti, $19_{xy}'-3'$ e $20_{xy}'-3'$ delimitano la superficie del cono in vista da A , meno di metà.

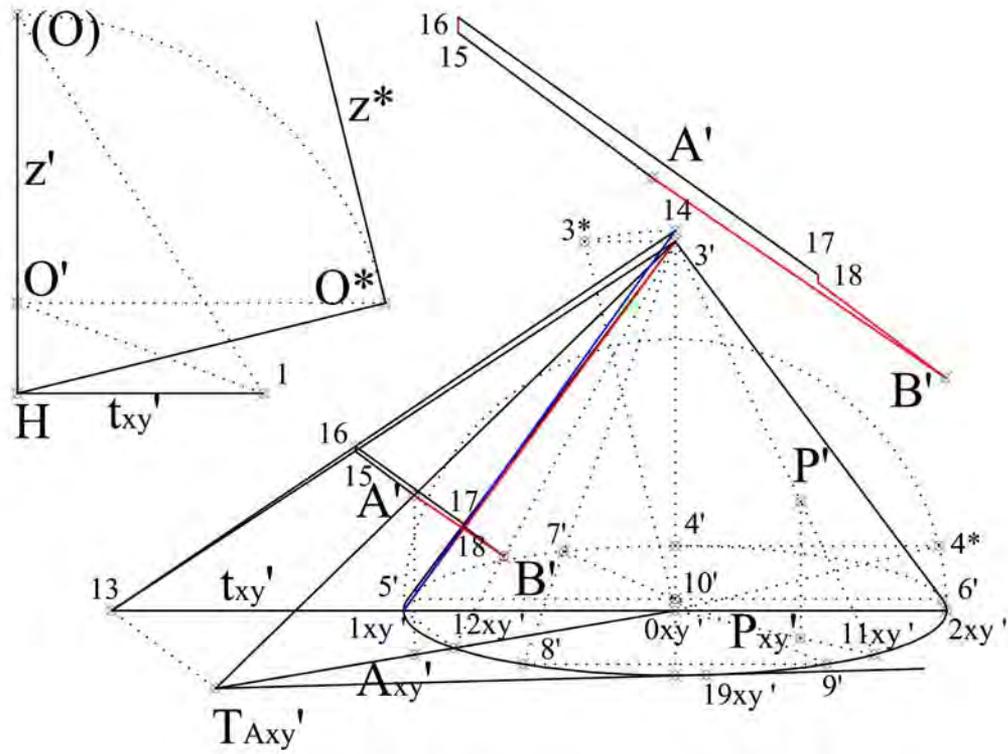


Figura 19a

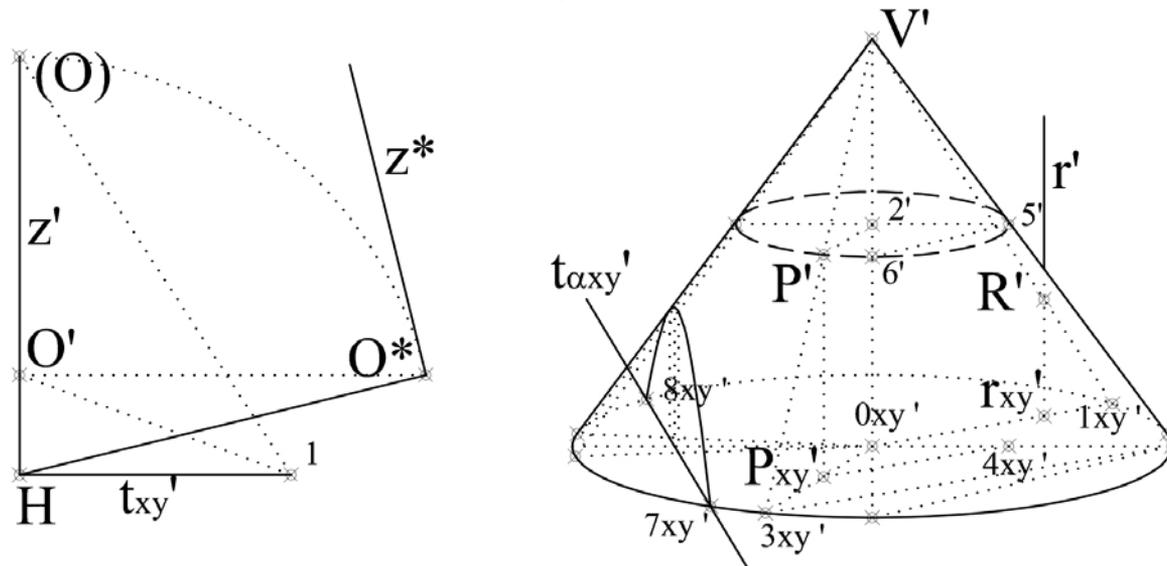


Figura 19b

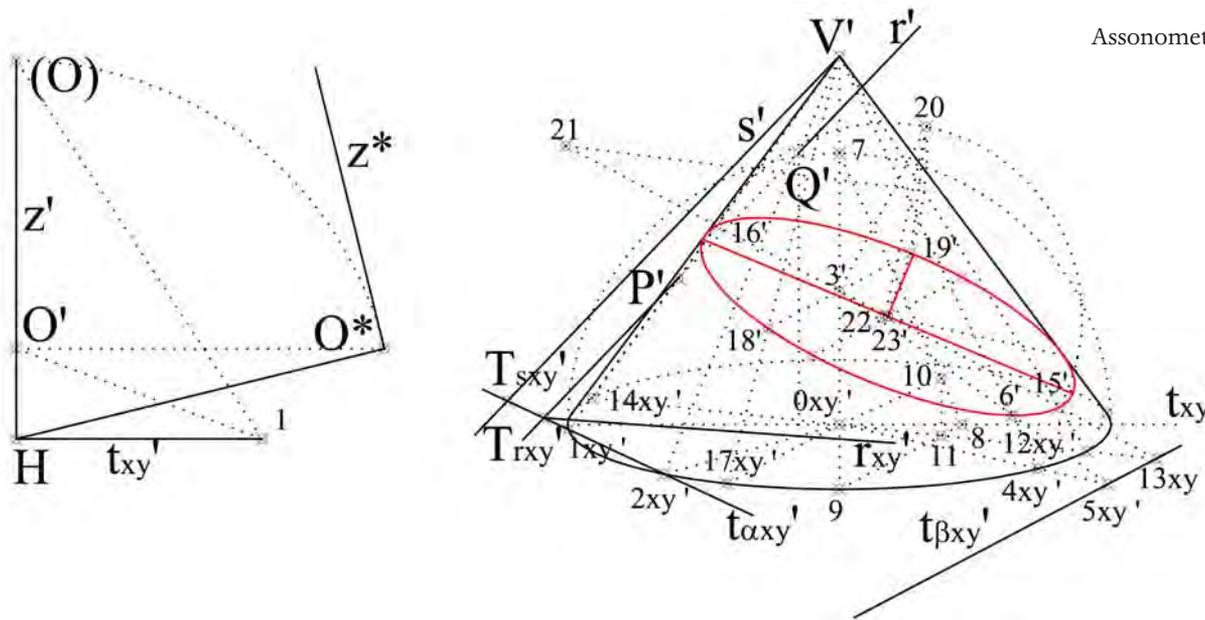


Figura 19c

Essa diventa metà se $3'-A'$ è parallela a xy ed A' non entra nello spazio della falda di cono non segnata, poiché in tal caso la superficie del cono considerato sarebbe tutta esposta ad A ; la vista supera la metà se A supera la quota del vertice, poiché in tal caso la T_{Axy}' ricade nel campo opposto e la tangenti da essa implicano la vista di un arco di base maggiore della metà.

Estrapolando la proiezione del cono precedente, svolgo altre considerazioni (fig. 19b); per esempio, ricavo l'intersezione R di una retta r parallela all'asse del cono: la $o_{xy}'-r_{xy}'-I_{xy}'-V'$ individua R' nella parte nascosta.

La sezione con un piano parallelo alla base è rappresentata da una ellisse, proiezione di una circonferenza della stessa giacitura, cioè con lo stesso rapporto tra i semiassi; stabilito il centro $2'$, per ogni $o_{xy}'-3_{xy}'-V'$, condotta per $2'$ la parallela a $o_{xy}'-3_{xy}'$, ricavo un punto P' della sezione con relativa P_{xy}' ; il semiasse maggiore non si ricava sull'orizzontale per $2'$ fino all'intersezione con la generatrice di contorno apparente, bensì per proporzione: $o_{xy}'-4$ sta al semiasse dell'ellisse di base come $o_{xy}'-P_{xy}'$ sta a $o_{xy}'-3_{xy}'$; il semiasse maggiore $o_{xy}'-4$ si riporta in $2'-5'$; il

semiasse minore $2'-6'$ si ricava conducendo per $2'$ la parallela alla congiungente gli estremi dei semiassi dell'ellisse di base; il $5'$ non è punto di contatto.

La sezione del cono con un piano parallelo all'asse è un'iperbole, la cui proiezione è un'iperbole; la verticale per l'intersezione tra g_{xy}' di una generatrice g' e la traccia $t_{\alpha xy}'$ ricava su g' un punto dell'iperbole, il cui arco ha estremi in $7_{xy}'$ e $8_{xy}'$; punti notevoli appartengono alla generatrice il cui piede è estremo della polare, del semiasse maggiore, del raggio coniugato a $t_{\alpha xy}'$.

In fig. 19c propongo di ricavare i punti comuni al cono e alla retta r (r', r_{xy}', T_{rxy}'); conduco per V' la s' parallela a r' e per o_{xy}' la parallela a r_{xy}' ; il piano α delle due rette parallele r ed s ha su xy la traccia $t_{\alpha xy}'$; essa interseca l'ellisse di base in $1_{xy}'$ e $2_{xy}'$, individuando le generatrici $1_{xy}'-V'$ e $2_{xy}'-V'$; esse sono complanari alla r e su r' ricavano i punti P' e Q' , comuni al cono e a r ; se $t_{\alpha xy}'$ non incide l'ellisse di base, la r non interseca il cono; se T_{rxy}' è interna all'ellisse di base si ha un punto di intersezione sulla superficie conica ed uno nella base in T_{rxy}' ; se T_{sxy}' è fuori campo, si opera per similitudine, in uno schema ridotto o per omologia.

Nella stessa figura risolvo la sezione piana del cono; un piano seziona il cono circolare retto secondo: a) una circonferenza se è parallelo alla base, b) un'ellisse se interseca tutte le generatrici di una sola falda del cono, per cui nessuna generatrice risulta parallela al piano sezionante, c) una parabola se una generatrice risulta parallela al piano, d) un'iperbole se il piano seziona entrambe le falde del cono, per cui due generatrici del cono risultano parallele al piano sezionante.

Nel caso in esame, il piano β condotto per la traccia $t_{\beta xy}$ ed il $3'$, punto assegnato come intersezione di β con l'asse $V'-o_{xy}$, seziona sulla superficie conica un'ellisse; la costruisco per punti, come il $6'$ tramite $o_{xy}'-4_{xy}'-5_{xy}'$, $4_{xy}'-V'$, $5_{xy}'-6'-3'$; oppure, posso ricavare un diametro, per esempio quello di massima pendenza di β rispetto a xy , in proiezione coniugata a $t_{\beta xy}$, ed una corda coniugata parallela a $t_{\beta xy}$; ricavato il diametro e la corda coniugata, applico la costruzione per ottenere gli assi.

Il diametro di massima pendenza $15'-3'-16'$ consegue a: premesso che il 7 ha la funzione di (O) conduco per 7 la $7-8$ parallela alla $(O)-1e$ per 8 la $8-9$ simmetrica rispetto a t_{xy} della $1-O'$; la $7-8$ e la $8-9$ sono omologhe; la $o_{xy}'-10$ è ortogonale alla $7-8$; 11 è omologo del 10 ; la $o_{xy}'-11$ è la direzione coniugata a $t_{\beta xy}$; tramite la $o_{xy}'-11-12_{xy}'-13_{xy}'$, la $12_{xy}'-V'$, la $13_{xy}'-3'$ ottengo il diametro di massima pendenza $15'-3'-16'$; tramite la $o_{xy}'-17_{xy}'$ parallela a $t_{\beta xy}$ e la $17_{xy}'-V'$ ricavo il $18'$ sulla parallela a $t_{\beta xy}$ condotta per il $3'$; la $18'-3'-19'$ è la corda coniugata al diametro $15'-3'-16'$.

Considero l'omologia affine obliqua tra ellisse costruenda e circonferenza di diametro $15'-3'-16'$ e conduco la $3'-20$, ortogonale all'asse $15'-16'$; il 20 è omologo del $19'$; l'asse del $19'-20$ ricava il 21 sulla $15'-16'$; l'arco di centro 21 e raggio $21-20$ contiene il 21 e interseca la $15'-16'$ in 22 ; la coppia omologa $22-19'$, $22-20$ e quella delle relative ortogonali, traslate sul centro 23 dell'ellisse, medio del diametro $15'-23-16'$ determinano la coppia dei semiassi; l'ellisse può costruirsi.

La costruzione degli assi può dedursi conoscendo sia una coppia di diametri coniugati, sia un diametro e una corda ad esso coniugata, cioè parallela al diametro coniugato, che non è coinvolto.

In fig. 19c costruisco l'immagine del precedente cono circolare retto con una generatrice appartenente a xy ; considero la sezione retta del cono, $1-V_{xy}'-2$, segnata a tratti; $2-3$ è la quota del punto più alto rispetto a xy della base circolare che si dispone su una giacitura obliqua.

Pongo la $V_{xy}'-4 = V_{xy}'-1$ parallela a $1-(O)$; la sua proiezione $V_{xy}'-5$ è parallela a $1-O'$; $V_{xy}'-3$ ruota in $V_{xy}'-6$, che si accorcia in $V_{xy}'-7$; la $7-8=2-3$ parallela a z^* si accorcia in $7-9$; nel triangolo $5-V_{xy}'-9$, proiezione della sezione assiale verticale corrispondente alla $1-V_{xy}'-2$, il $5-10-9$ è il diametro di massima pendenza.

Da un punto 11 di t_{xy} considero la $11-12$ ortogonale a $V_{xy}'-4$ e l'omologo $11-13$; per il 10 conduco la metà di $1-2$ parallelo a $11-12$ lo accorcio in $10-14$ parallelo a $11-13$; avendo i diametri coniugati $5-10-9$ e $14-10-15$ ricavo gli assi $16-10-16$ e $17-10-17$ e l'ellisse; da V_{xy}' invio le tangenti $V_{xy}'-18$ e $V_{xy}'-19$; il cono è completo.

Osservo che la generatrice di appoggio su xy è la $V_{xy}'-5$, non in vista; l'ellisse di base ha in 5 il punto più basso e in 9 quello più alto; la traccia $t_{\alpha xy}$ del piano di base su xy è parallela al $14-10-15$, condotta per il 5 ; l'ortogonale alla base del cono ha la direzione $V_{xy}'-10$; un segmento ortogonale ad α si accorcia come $V_{xy}'-20$ in $V_{xy}'-10$; il $10_{xy}'$ sta sulla generatrice di appoggio $V_{xy}'-5$.

Data una retta r ortogonale ad α , definita in proiezione da r' parallela a $V_{xy}'-10$, dalla traccia $T_{r\alpha}'$ interna all'ellisse di base, dalla r_{xy}' parallela a $V_{xy}'-5$ per il 22 ricavato sulla $t_{\alpha xy}$ conducendo per $T_{r\alpha}'$ la parallela a $9-10-5$, ricavo il punto R di intersezione tra r e cono considerando la $10-T_{r\alpha}'-21$ e la $21-V_{xy}'$; la proiezione verticale su xy della $T_{r\alpha}'$ è il punto 23 sulla r_{xy}' .

Capitolo 20 – Sfera

Sfera, retta, piano. (fig. 20a, 20b, 20c, 20d, 20e)

Le proprietà della sfera sono moltissime e altrettanto importanti sono le differenze e le affinità che la relazionano con le altre quadriche; queste sono superfici rappresentabili con equazioni di secondo grado, si distinguono in quadriche a punti ellittici, quali la sfera, l'ellissoide, il paraboloido ellittico, l'iperboloido a due falde, a punti parabolici, quali i cilindri e i cono, aventi la sezione piana conica, a punti iperbolici, quali il paraboloido iperbolico e l'iperboloido iperbolico, in funzione della relazione con l'infinito.

Tutti i punti della sfera distano dal centro della stessa misura, il raggio; la sezione piana della sfera è sempre e solo una circonferenza, che è massima se il piano sezionante contiene il centro della sfera, che è anche centro della circonferenza sezione; più si allontana dal centro il piano sezionante, più piccolo è il suo raggio; quando è a distanza pari al raggio, la sezione si riduce a un punto e il piano diventa tangente, ortogonale al raggio che contiene il punto di tangenza.

Un cilindro, che proietta una sfera, è un cilindro circolare retto, la tange secondo una circonferenza massima, il cui piano contiene il centro ed è ortogonale all'asse del cilindro; i raggi proiettanti sul quadro π , i punti della sfera comuni alla circonferenza di tangenza del cilindro definiscono su π una conica chiusa.

Per qualsiasi direzione proiettante essa è ellisse, tranne quando la proiezione è ortogonale a π' come in assonometria ortogonale; in tal caso, la conica intersezione e la circonferenza di tangenza sono parallele e perciò eguali; dunque, in assonometria ortogonale la proiezione di una sfera σ è sempre e solo una circonferenza, il cui centro o' è la proiezione del centro della σ e il cui raggio è pari a quello della σ ; nessun raggio proiet-

tante un punto della σ può essere esterno al cilindro tangente, nessun punto proiezione può ricadere all'esterno della predetta, che, perciò, è contorno apparente c_{app}' delle proiezioni dei punti della σ .

In riferimento alla terna $x'y'z'$, il centro o' deve essere associato sempre ad una seconda proiezione, per esempio, a quella su xy , o_{xy}' , che può risultare più giù o più su di o' ; se scelgo il centro della σ appartenente ad xy , si ha l'unicità di o' e o_{xy}' (fig. 20a).

La proiezione della circonferenza massima appartenente a xy è un'ellisse e_q' di centro o_{xy}' ; l'asse maggiore $1_{xy}'-o_{xy}'-2_{xy}'$ è parallelo a t_{xy} ; il semiasse minore $o_{xy}'-4_{xy}'$ è l'accorciamento del raggio ribaltato, di massima pendenza di xy rispetto a π , $o_{xy}'-3_{xy}'$, parallelo ad $H-O^*$ per proiezione secondo O^*-O' ; la circonferenza orizzontale, per consuetudine, è detta equatore; la indico e_q' .

Fra i diametri ha un ruolo importante quello ortogonale alla sezione massima orizzontale, detto asse polare, i cui estremi sono detti polo nord e polo sud, in proiezione N' ed S' ; il raggio polare è parallelo a z e si accorcia secondo z^* su z' ; il raggio $o_{xy}'-N^*$ ortogonale a $o_{xy}'-3_{xy}'$ si proietta sulla verticale condotta per o_{xy}' ; ricavandovi N' ; S' è il suo simmetrico rispetto a o_{xy}' .

Disegnatane la proiezione, voglio dare al suo centro o' una quota positiva rispetto a xy , spostando in basso o_{xy}' ; rispetto al sistema di riferimento adottato, ho prodotto un doppio movimento della σ ; l'ho innalzata e avvicinata; la proiezione sembra inalterata, immobile, e, invece, è proiezione di un'altra σ , ovvero della stessa ma in una posizione diversa; se la sfera è appoggiata su xy , o_{xy}' è sovrapposto ad S' .

Insisto sulla considerazione della distanza $o'-o_{xy}'$; definite σ_1' con $o_1'-o_{1xy}'$ e σ_2' con $o_2'-o_{2xy}'$, se sposto o_{2xy}' rispetto a o_{1xy}' , fermo restando l'immagine dei contorni apparenti, posso stravolgere l'assetto posizionale di alto e vicino fra i due elementi rappresentati, indipendentemente dal riferimento.

Dunque, per la percezione visiva della realtà è essenziale la dichiarazione grafica della proiezione o_{xy} dei centri; la loro mancanza, per dimenticanza, sottovalutazione o ignoranza del ruolo di o_{xy} blocca la lettura e la comprensione della struttura dell'immagine; l'immagine informatica, per esempio, è spesso fuorviante.

Rilevo in figura o_{xy}' sulla orizzontale t_{xy} , traccia del piano xy su π , avendo scelto per la e_q' l'appartenenza ad xy ; ciò agevola l'applicazione dell'omologia di ribaltamento definita dal rapporto omologico dato a parte; è una libertà di comodo priva di controindicazioni, come l'aver scelto la sovrapposizione di o' su o_{xy}' . In funzione del rapporto omologico $H-O':H-(O)$ adottato, il $4_{xy}'$ si può allontanare da o_{xy}' e contemporaneamente N' si avvicina ad o_{xy}' ; la posizione di N' è facilmente prevedibile; il rapporto può non essere espresso a parte, ma essere deciso assegnando $o_{xy}'-4_{xy}'$; allora si segna $4_{xy}'-3$, $3-o_{xy}'$, l'ortogonale $o_{xy}'-N^*$, ed N^*-N' . Posso decidere che N' coincida con il 6, cioè l'asse polare sia parallelo a π e il piano equatoriale sia ortogonale a π ; in tal caso, l'equatore si rappresenterà nel solo diametro $1'-o'-2'$ e non se-

condo un'ellisse; si tratta di una proiezione ortogonale frontale della σ e non di un'assonometria; dunque, N' non può confondersi con il 6; la considerazione è molto seria e importante, poiché non è rara questa "svista".

La visualizzazione della σ è realizzata dalla c_{app}' , dalla e_q' e da $N'-o_{xy}'-S'$; può essere arricchita dalla rappresentazione di meridiani, sezioni massime su piani ortogonali al piano equatoriale condotti per $N'-o_{xy}'-S'$, di sezioni piane minori parallele all'equatore, dette paralleli, di sezioni piane minori parallele ai meridiani, da sezioni piane generiche, massime o minori.

Si può avere la concomitanza di più sezioni piane, ottenendo fusi, calotte, zone, triangoli, cunei, vele, reticoli sferici circoscritti ai poliedri regolari, semiregolari, etc., ad elementi semplici o composti, aggregati o esplosi; l'arco minimo che separa due punti della superficie sferica appartiene alla circonferenza, che contiene i due punti e il centro della σ .

Tutto ciò posso pensarlo riferito ad una σ che presenti l'asse polare non verticale; unitamente devo approfondire i problemi di appartenenza di punti a σ , di distanza di punti da σ , d'in-

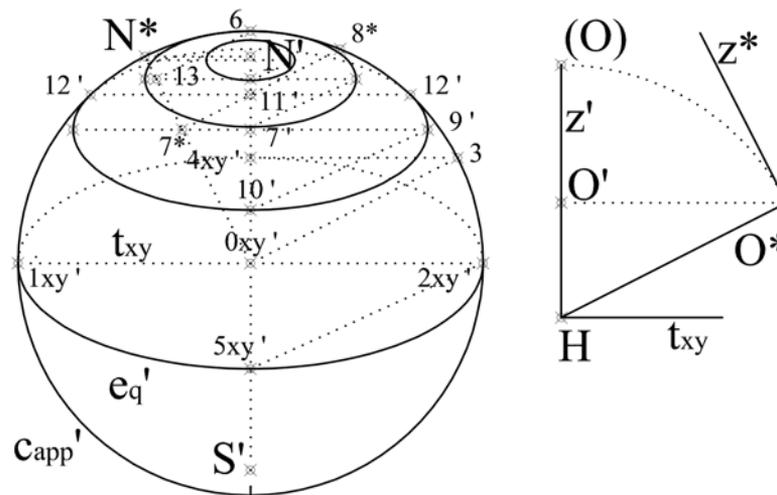


Figura 20a

tersezione di rette con σ , di piani tangenti, di distanza di piani da σ , d'esposizione di σ a un punto, di visualizzazione di Q da P consentita o impedita da σ , di determinazione rispetto a P dello spazio in vista o nascosto da σ , in condizioni statiche o dinamiche, percorsi particolari di un punto su σ , etc.

Occupiamoci del disegno dei paralleli, sezioni piane circolari minori parallele al piano equatoriale; sul semiasse polare superiore ribaltato, $o_{xy}'-N^*$; a distanza $o_{xy}'-7^*$ dal centro della sfera il raggio della sezione è 7^*-8^* ; via via che la distanza cresce il 7^* si avvicina a N^* e il raggio 7^*-8^* si riduce; come N^* si proietta in N' così 7^* si proietta in $7'$ e $7'-9'=7^*-8^*$ è il semiasse maggiore, mentre $9'-10'$ parallela a $2_{xy}'-5_{xy}'$ ricava il semiasse minore $7'-10'$; posso costruire l'ellisse proiezione del parallelo, avendone ricavato gli assi.

La 7^*-8^* interseca $o_{xy}'-N'$ in 11 ; la parallela all'asse maggiore condotta per 11 individua sul contorno apparente c_{app}' i punti $12'$ e $12''$ di tangenza; spostando il 7^* sul 13^* , l'estremo, che si richiama a 8^* , ricade sul 6; il 6 diventa punto di contatto unico dell'ellisse relativa al parallelo, la cui distanza dal centro è pari a $o_{xy}'-13^*$.

L'ellisse e_q' per metà è nascosta, l'ellisse del primo parallelo è nascosta per meno di metà, l'ellisse del secondo parallelo è il primo ad essere tutto in vista; se il 7^* continua ad avvicinarsi a N^* , l'ellisse del relativo parallelo appare tutto in vista.

N' resta sempre incluso in ogni parallelo tutto in vista; il parallelo estremo in N' ha raggio nullo; i paralleli, tutti in vista, a partire da quello tangente in 6, mostrano un infittimento fra 6 ed N' di uno degli estremi dell'asse minore rispetto all'altro.

Ricordiamoci che z' è sul foglio in direzione verticale, ma l'asse spaziale z , rispetto a noi che osserviamo, è inclinato verso noi; z è verticale, nel senso che è ortogonale a xy , il quale non è orizzontale ma è pure inclinato rispetto a noi; guardiamo i punti di un parallelo; essi sono tutti alla stessa quota rispetto a xy ; il $10'$ non è più basso del $9'$ e il 6 non è più alto di N' ; la realtà comunicata dall'immagine è la lettura intelligente dell'apparenza.

Se cancelliamo la semicirconferenza inferiore, isoliamo una calotta emisferica; è ancora una calotta, ma non emisferica, se fermiamo l'immagine ad un parallelo superiore o inferiore all'equatore; possiamo considerare una emisfera concentrica a raggio minore, che realizzi un volume cavo, a spessore costante; isoliamo l'emisfera inferiore; otteniamo una tazza emisferica, con lo spessore del bordo tutto in vista; le due ellissi del bordo sono fra loro omotetiche.

Svolgo analoghe considerazioni per una vista assonometrica dal basso e non dall'alto; l'emisfera mostra la e_q' per intero, la metà superiore della c_{app}' ; del primo parallelo resta in vista l'arco del $10'$ consentito dalla e_q' ; il resto è nascosto; però, in una vista assonometrica urbanistica, cioè con il rapporto omologico prossimo ad uno l'ellisse e_q' si approssima alla circonferenza e scopre il punto N' , che apparirà prossimo ad o_{xy}' ; allora saranno in vista anche i paralleli vicini ad N , quelli senza contatto con c_{app}' , e_q' permettendo.

Le sezioni massime che contengono il diametro $N'-o_{xy}'-S'$ rappresentano i meridiani (fig. 20b); ciascuna di esse interseca la e_q' secondo un diametro coniugato a $N'-o_{xy}'-S'$; per esempio, il meridiano m_1' è definito da $3_{xy}'-o_{xy}'-4_{xy}'$; disponendo di due diametri coniugati, ricavo gli assi e l'ellisse.

L'asse maggiore è $5'-o_{xy}'-6'$, ortogonale al diametro di e_q' coniugato al $3_{xy}'-o_{xy}'-4_{xy}'$; i suoi estremi individuano i punti di contatto di m_1' con c_{app}' ; ricavo il predetto coniugato $9_{xy}'-o_{xy}'-10_{xy}'$ per l'omologia affine ortogonale di asse $1_{xy}'-o_{xy}'-2_{xy}'$, eseguendo $4_{xy}'-7$ ortogonale all'asse, $7-o_{xy}'$, l'ortogonale $o_{xy}'-8$, $8-9_{xy}'$; l'asse minore $11'-o_{xy}'-12'$ si ottiene da N' per l'omologia affine ortogonale di asse $5'-o_{xy}'-6'$.

Il diametro $9_{xy}'-o_{xy}'-10_{xy}'$ definisce il meridiano m_2' , ortogonale al precedente; il suo asse maggiore $13'-o_{xy}'-14'$ è ortogonale al $3_{xy}'-o_{xy}'-4_{xy}'$; l'asse minore $18'-o_{xy}'-19'$ si ricava da $9_{xy}'$ per l'omologia affine ortogonale di asse $13'-o_{xy}'-14'$; conduco la $9_{xy}'-15$, ortogonale al $13'-o_{xy}'-14'$, la $15-o_{xy}'$, la $o_{xy}'-16$, la $16-17$ parallela

alla $15-0_{xy}'$, l'omologa $17-18'$ parallela alla $9_{xy}'-0_{xy}'$, e infine $18'-0_{xy}'$.

Osservo che il $9_{xy}'-0_{xy}'-10_{xy}'$, rispetto al meridiano m_1' ha la stessa funzione dell'asse polare rispetto all'equatore; se conduco per il $9_{xy}'$ la $9_{xy}'-20$, parallela all'asse $5'-0_{xy}'-6'$, la $20-0_{xy}'$, l'ortogonale $0_{xy}'-21$, la parallela a $5'-0_{xy}'-6'$ condotta per il 21 ricava l'estremo $11'$ dell'asse minore della m_1' ; per esattezza, dovrei indicare con N_{eq} il polo N' relativo all'equatore, con N_{m_1} il polo $9_{xy}'$ relativo ad m_1' , con N_{m_2} il polo $4_{xy}'$ relativo ad m_2' .

Il meridiano frontale m_{fr}' è definito da $N'-0_{xy}'-S'$, asse maggiore dell'equatore e da $N'-0_{xy}'-S'$, asse polare e asse minore; l'asse polare di c_{app}' è il punto $0_{xy}'$ e in tal caso la c_{app}' funge da equatore e ogni diametro rappresenta un suo meridiano; i paralleli relativi risultano circolari e concentrici; paralleli e meridiani del c_{app}' usato da equatore, non si interpretano se non attraverso la proiezione della loro proiezione su xy , essendo paralleli e ortogonali a π .

Considero un meridiano (fig. 20c), il relativo asse polare e alcune sezioni minori parallele; in figura riporto c_{app}' , e_q' , m_1' definito da $3_{xy}'-0_{xy}'-4_{xy}'$, traccia del meridiano sul piano equatoriale e diametro coniugato a $N_{eq}'-0_{xy}'-S_{eq}'$, asse polare relativo alla e_q' ; secondo il percorso noto, $4_{xy}'-5-0_{xy}'-6-N_{m_1xy}'$ individuo $N_{m_1xy}'-0_{xy}'-S_{m_1xy}'$, diametro di e_q' coniugato a $3_{xy}'-0_{xy}'-4_{xy}'$ e asse polare relativo a m_1' ; l'asse maggiore $7'-0_{xy}'-8'$ di m_1' è ortogonale a $N_{m_1xy}'-0_{xy}'-S_{m_1xy}'$; secondo il percorso sopra illustrato, la $N_{m_1xy}'-N_{m_1xy}'$ parallela a $7'-0_{xy}'-8'$, la $N_{m_1xy}'-0_{xy}'$, l'ortogonale $0_{xy}'-9$, la $9-10'$, ricavo $10'-oxy'-11'$, asse minore di m_1' .

Su $N_{m_1}'-0_{xy}'$, ribaltato del raggio polare scelgo la distanza $0_{xy}'-12^*$, che si proietta sulla $N_{m_1}'-0_{xy}'$ in $12_{xy}'$, centro del costruendo parallelo; disegnata la e_q' , individuo la corda $13_{xy}'-12_{xy}'-14_{xy}'$, che è diametro che definisce l'ellisse assieme al coniugato verticale $15'-12_{xy}'-16'$ ottenuto con-

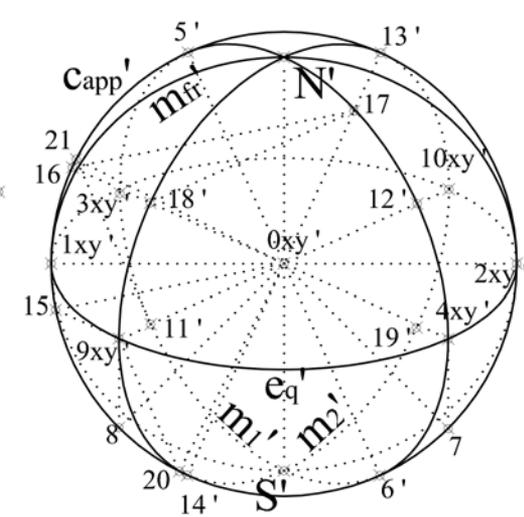
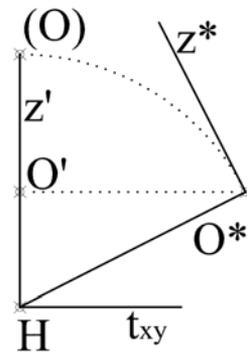


Figura 20b

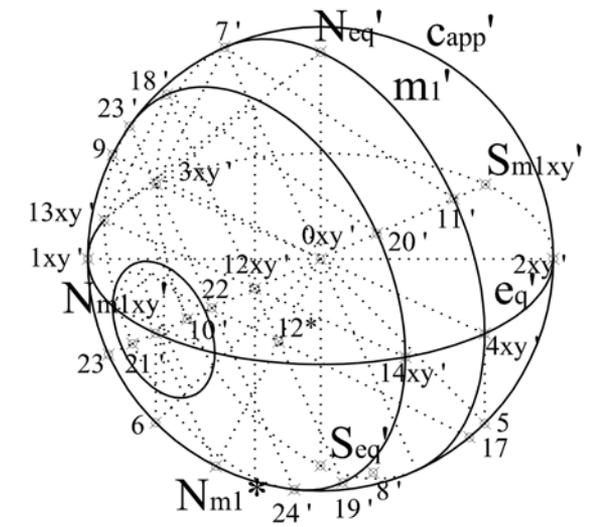
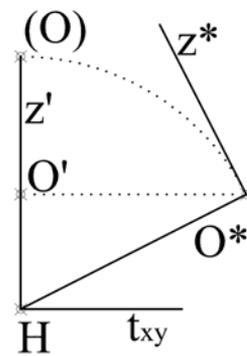


Figura 20c

ducendo per il $13_{xy}'$ la parallela a $3_{xy}'-N_{eq}'$; l'asse maggiore $18'-12_{xy}'-19'$ è parallelo a $7'-o_{xy}'-8'$; il semiasse maggiore è pari $12^*-17'$, ortogonale a $N_{mi}'-o_{xy}'$; il semiasse minore $12_{xy}'-20'$ si ottiene conducendo per il $18'$ la parallela a $7'-11'$; la $17'-12_{xy}'$ interseca l'asse polare $N_{mixy}'-o_{xy}'-S_{mixy}'$ in 22 ; l'ortogonale a $N_{mixy}'-o_{xy}'-S_{mixy}'$ condotta per il 22 individua su c_{app}' i punti di contatto, $23'$, $24'$.

Spostando il 12^* verso N_{mi}' , il 22 si sposta verso N_{mixy}' ; quando il 22 raggiunge l'estremo 23 , l'ellisse ha un solo punto di tangenza ed è la prima ad essere tutta in vista; il suo centro ribaltato sarà l'intersezione fra $N_{mi}'-o_{xy}'$ e la ortogonale alla $N_{mi}'-o_{xy}'$ condotta per il 23 ; la proiezione di tale punto, centro ribaltato, sulla $N_{mixy}'-o_{xy}'$ è la proiezione del centro dell'ellisse; il semiasse maggiore è pari al segmento di ortogonale che va dal centro ribaltato alla circonferenza c_{app}' ; quando il 12^*-22 nel suo spostamento supera il 23 , il raggio c_{app}' si avvicina al valore nullo che si avvera per il 12^* sovrapposto a N_{mi}' ; nell'intorno accennato, l'ellisse circoscrive N_{mi}' e non ha contatti ed i paralleli risultano interamente in vista.

Un cono di vertice $V(V', V_{xy}')$ (fig. 20 d) tange una sfera σ di cui siano noti o_{xy}' , c_{app}' , e_q' , $N'-o_{xy}'-S'$, secondo una sezione circolare minore della massima e di giacitura piana α ortogonale alla $V-o_{xy}'$; considero il piano proiettante verticale per $V-o_{xy}'$, di traccia $V_{xy}'-o_{xy}'$, sezionante la σ secondo una sezione meridiana m' definita dal diametro $3_{xy}'-o_{xy}'-4_{xy}'$, comune alla e_q' e dal coniugato verticale $N'-o_{xy}'-S'$, asse polare relativo all'equatore; determino il diametro $7_{xy}'-o_{xy}'-8_{xy}'$ coniugato al $3_{xy}'-o_{xy}'-4_{xy}'$; è già noto che, nell'ellisse m' , la $9'-o_{xy}'-10'$, ortogonale al $7_{xy}'-o_{xy}'-8_{xy}'$, è asse maggiore e che l'asse minore $13'-o_{xy}'-14'$, sovrapposto al $7_{xy}'-o_{xy}'-8_{xy}'$, si ricava secondo il percorso $7_{xy}'-11-o_{xy}'-12-13'$.

Le $V'-15'$ e $V'-16'$, tangenti da V' alla m' , definiscono $15'-17'-16'$, diametro della sezione c_t' di contatto fra σ e cono; il coniugato è parallelo a $7_{xy}'-o_{xy}'-8_{xy}'$ condotto per il 17 , intersezione fra $V'-o_{xy}'$ e $15'-16'$ e medio della corda polare.

Per determinare la distanza reale $17'-o_{xy}'$, ovvero le vere dimensioni dei cateti $o_{xy}'-17_{xy}'$ e $17_{xy}'-17'$, considero $o_{xy}'-18$ omologo di $o_{xy}'-$

$17_{xy}'$ e $17_{xy}'-19$ parallelo a z^* , che misura $17_{xy}'-17'$; l'ipotenusa $20-21$ dei cateti $o_{xy}'-18$ e $17_{xy}'-19$, riportato a parte, si confronta in $20-22$ con il $20-23$, raggio di c_{app}' , ortogonale a $7_{xy}'-o_{xy}'-8_{xy}'$; la semicorda $22-24$, raggio della circonferenza di tangenza c_t' , è parallela a $6-o_{xy}'$ e si accorcia in $22-25$, ossia, in $17'-26'$; il diametro $26'-17'-27'$ è coniugato a $15'-17'-16'$; costruita l'ellisse, $V'-28'$ e $V'-29'$ sono tangenti di contorno apparente del cono di vertice V tangente la σ .

La retta t_{oxy}' parallela a $7_{xy}'-o_{xy}'-8_{xy}'$ condotta per il 30 , intersezione tra $16'-17'-15'$ e $o_{xy}'-17_{xy}'-V_{xy}'$, è la traccia sul piano equatoriale del piano α della c_t' , ed è asse d'omologia di centro V' fra la c_t' e l'ellisse c_{oxy}' proiezione della c_t' da V sul piano equatoriale. Della c_{oxy}' , non disegnata in figura, ricaviamo facilmente le intersezioni su xy delle generatrici $V'-16'-16_{oxy}'$ e $V'-17'-17_{oxy}'$, ove $16_{oxy}'$ e $17_{oxy}'$ sono estremi di un diametro e quelle delle $V'-27'-27_{oxy}'$ e $V'-26'-26_{oxy}'$, ove $27_{oxy}'$ e $26_{oxy}'$ sono estremi di una corda parallela a $7_{xy}'-o_{xy}'-8_{xy}'$ e coniugata al diametro precedente; avendo un diametro e una corda ad esso coniugata, sappiamo costruire l'ellisse c_{oxy}' .

Dato un punto $P(P', P_{xy}')$, conduco per P' la parallela alla $V'-17'$ e per P_{xy}' la parallela a $o_{xy}'-17_{xy}'$, ricavo la $31_{xy}'-o_{xy}'-32_{xy}'$ e la $32_{xy}'-17'-33'$; il $33'$ è l'intersezione della $P'-V'$ con α e ricade interno alla c_t' ; concludo che V non vede P .

Considero ancora la sfera σ precedente (fig. 20e); segno interno al contorno apparente c_{app}' un punto P_1' , avente sul piano equatoriale la proiezione in $3_{xy}'$; verifico se P_1' è sulla superficie della σ ; ruoto $o_{xy}'-3_{xy}'-4$ in $o_{xy}'-5-2_{xy}'$; per il 5 conduco la verticale $5-6$, la riporto in $5-7$ parallela a z^* e accorcio in $5-8$; secondo $4-2_{xy}'$ da 8 ricavo P' ; sulla verticale per P_1' è P' la posizione del punto per appartenere alla σ ; deve avere quota maggiore; P_1' è interno alla σ ; P_2' appare interno al c_{app}' , ma è esterno alla σ . Del punto P_2' voglio la distanza minima dalla superficie sferica; posso seguire diverse vie; trovo l'omologa di $o_{xy}'-3_{xy}'$, conduco per O' la parallela alla $o_{xy}'-3_{xy}'$ fino a t_{xy}' , unisco con (O) , e per o_{xy}' conduco la parallela, ottenendo la dimensione della $o_{xy}'-3_{xy}'$; misuro secondo z^* la quota apparente $3_{xy}'-P_2'$; sottraggo il

Capitolo 21 – Toro

Superfici toriche. (fig. 21)

La superficie torica, intesa come estradosso o come intradosso, di un volume pieno o cavo, può essere generata dalla rotazione di una curva generatrice circolare, conica o generica con flessi o cuspidi, piana e non, costante o variabile, chiusa o aperta, regolare e non, semplice o composta con uno o più centri, intorno ad un asse, che può o non intersecare, secondo una direttrice, che è comunemente una circonferenza di raggio maggiore, uguale o minore del diametro della generatrice circolare, oppure può essere una conica, o generica con flessi o cuspidi, spirale, elica, piana e non, costante o variabile, chiusa o aperta, regolare e non, semplice o composta con uno o più centri, con traiettoria anche intrecciata, anche ciclica.

Gli esempi che illustrerò sono i più semplici e comuni; il primo è un toro avente la sezione generatrice circolare di giacitura verticale il cui centro, ruotando intorno ad un asse pure verticale descrive una direttrice circolare, ortogonale all'asse, di raggio maggiore del diametro della generatrice.

Riflettiamo; le sezioni dovute ad un piano assiale sono sempre due circonferenze distinte, rispetto all'asse sono equidistanti, in simmetria ortogonale; quelle di un piano parallelo all'asse hanno due sezioni non coniche, distinte, simmetriche rispetto al piano assiale ortogonale al piano scelto, e in avvicinamento mentre il piano sezionante trasla allontanandosi dall'asse.

Le due sezioni entrano in contatto quando il piano sezionante tange la direttrice di gola e la sezione unica ha la forma di un otto a doppia simmetria; da questo punto in poi la sezione è unica, con le due costituenti compenstrate, a doppia simmetria, con cuspidi via via più lontani sulla verticale assiale della sezione.

Quando il piano tange la direttrice per i centri delle sezioni ver-

ticali la sezione unica non ha più cuspidi e da quel punto in poi la sezione unica si restringe, presentando due assi di simmetria; non si tratta di conica; per il piano tangente la direttrice di diametro massimo la sezione si annulla nel punto di tangenza.

C'è una sezione assiale frontale costituita da due ellissi proiezione di due circonferenze; l'asse orizzontale è pari al diametro della circonferenza generatrice, l'asse minore è il diametro verticale della stessa, accorciato secondo z^* ; in proiezione si può agire sulla giacitura, ma non si potrà ottenere una proiezione circolare.

Determinata per una giacitura assiale la coppia di diametri coniugati e i conseguenti assi, da ogni sezione ellittica, sia per traslazione sul piano assiale sezionante, sia per doppia simmetria, possono ottenersi quattro sezioni.

Nella giacitura assiale proiettante, la cui traccia è sovrapposta alla proiezione dell'asse, le due sezioni sono rappresentate da un segmento verticale pari al diametro in vera grandezza.

Le sezioni ellittiche con piani orizzontali, ortogonali all'asse, sono proiezioni di circonferenze; riconosciamo l'ellisse che contiene i centri delle ellissi sezioni verticali assiali e quelle ad essa parallele di quota massima e minima, traslate da quella, a distanza del raggio accorciato.

Sul piano centrale precedente riconosciamo l'ellisse di gola e quella di massimo ingombro; ho considerato due piani orizzontali sezionanti a quote intermedia e i simmetrici; l'orditura di paralleli e di meridiani è completata da un contorno apparente esterno, proiezione della sezione di giacitura parallela a π .

Tale sezione dipende dal rapporto omologico stabilito per xy e dalla posizione scelta per il toro; se l'asse è parallelo a π la sezioni parallele, ad esso ortogonali, sono tali anche per π , sono proiettanti e le loro tracce sono paralleli ai raggi del fascio di

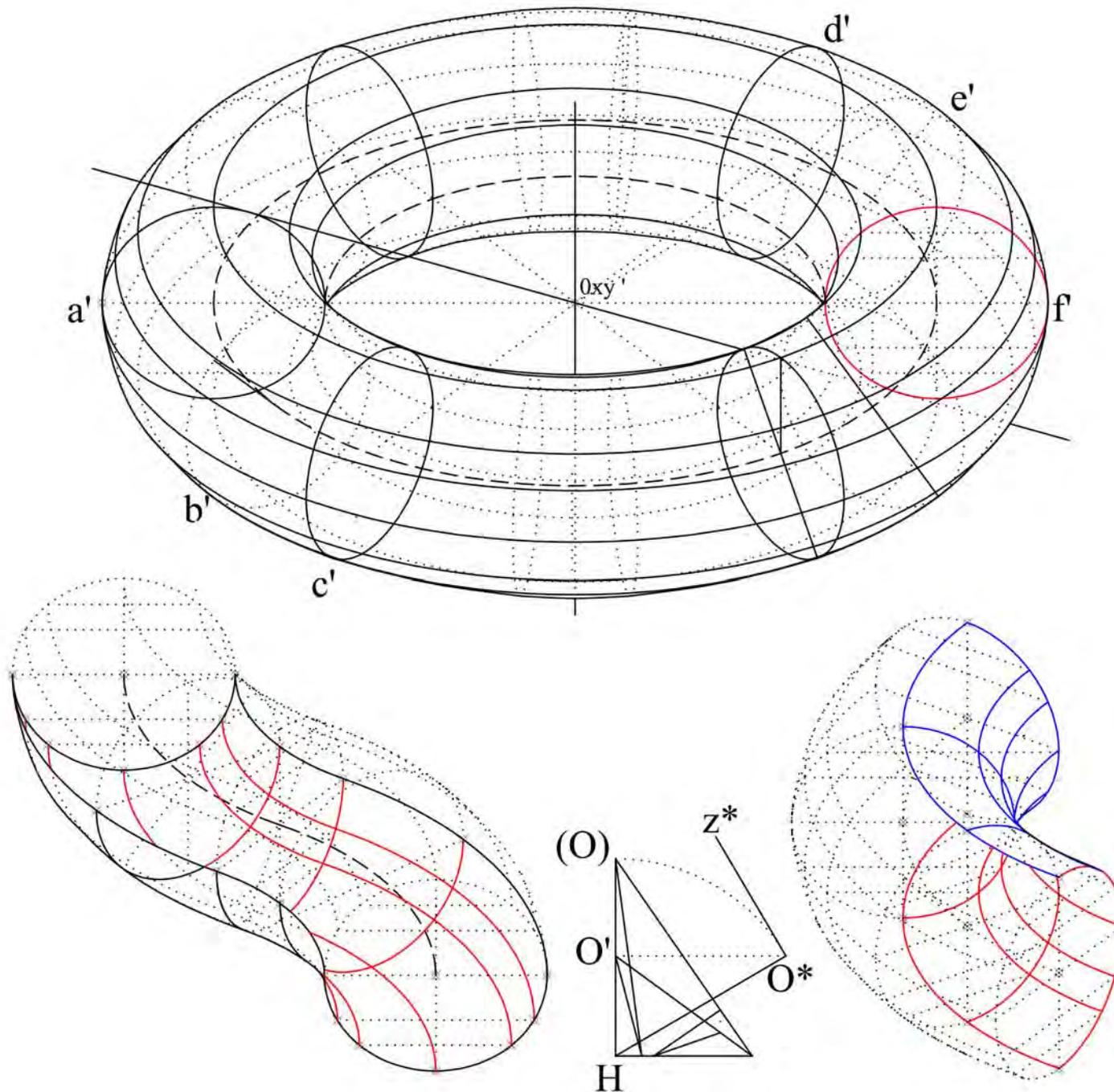


Figura 21

centro o_{xy}' e fra questi sono quelli che proiettano x in x' , y in y' , z in z' .

In tal caso il contorno apparente risulta formato da due semicirconferenze collegate da segmenti paralleli; l'ampiezza massima risulta pari al diametro di massimo ingombro, i segmenti di collegamento sono pari al diametro della direttrice dei centri.

Se l'asse è ortogonale a π , il contorno apparente esterno è dato dalla circonferenza massima; risulta in vista totale anche il contorno apparente interno, costituito dalla circonferenza proiezione di quella di gola; risulta in vista la metà della superficie.

Per direzioni dell'asse diverse, il contorno apparente cambia, ma conserva il massimo ingombro; in funzione delle proporzioni e delle giaciture può manifestarsi un secondo contorno apparente, minore, interno, e, come nel caso rappresentato in cui l'asse è parallelo a z , composto da un tratto involuppo delle sezioni parallele inferiori, in vista soprastante, arretrate e da un tratto involuppo dei paralleli superiori, in vista sottostante al precedente, delimitante la parte della superficie più vicina all'osservatore.

Le considerazioni e le riflessioni sull'esempio in studio sono ancora innumerevoli; la retta per o_{xy}' , tangente, è generatrice delle due falde del cono tangente.

Occorre immaginare il caso dell'annullamento dell'effetto ciambella, quando la sezioni opposte si toccano, oppure, addirittura, si intersecano, e quando la superficie si parzializza.

Propongo l'esempio del tronco di toro con flesso, visto per la sola metà inferiore, in cui ho evidenziato la parte in vista da quella nascosta e da quella soppressa, la parte in vista esterna da quella in vista interna.

La canaletta con flesso è stata estratta dal toro iniziale e l'asse dei centri, a tratti, indica l'utilizzo del tratto compreso fra le

sezioni a' , b' , c' , associato al tratto opposto e simmetrico d' , e' , f' ; la sezione di congiungimento c' è uguale alla d' .

Osservo che il contorno apparente si compone delle due semiellissi di testa collegate dalle due curve ad s , destra e sinistra, del piano orizzontale assiale e da una curva di contorno apparente a sinistra, che delimita la parte della superficie esterna.

Evidentemente l'inversione di curvatura può implicare l'inserimento di un tratto cilindrico; potrei pensare anche ad un raccordo tronco conico che unisca due tronchi di toro a sezione diversa e curvatura opposta; la stessa superficie presentata in posizione diversa può migliorare la lettura della forma.

Altro esempio derivato dal toro iniziale è il gomito, che presenta a sinistra la parte convessa delimitata dalla curva di contorno apparente, ricavata per involuppo di numerosissime sezioni o per poligonazione approssimativa di un numero discreto di punti.

Ho creduto opportuno considerare l'asportazione della metà del gomito secondo il cilindro sezionante verticale coassiale al toro avente per direttrice proprio la circonferenza dei centri delle sezioni verticali radiali della superficie torica.

Ho così ottenuto un tratto, che evidenzia la concavità che richiama, nella sua completezza, tante applicazioni, quali la carucola, il disco per pneumatico di una ruota, etc.

La superficie torica ha notevoli tradizioni storiche sia nel campo dell'architettura che in quello della tecnica edilizia e industriale; basta ricordare alcune diffuse presenze, dai prodotti come anelli e bracciali del settore ornamentale, alle condotte idriche, alle gallerie in curva di strade e miniere, dagli stampi per dolci ai ghieri dei portali strombati dell'architettura medioevale o araba; è un ambito aperto alla curiosità e al piacere di osservare, ragionare e disegnare.

Capitolo 22 – Elissoide

Elissoide in assonometria ortogonale. (fig. 22)

L'elissoide è una quadrica a punti ellittici, cioè ogni suo piano tangente ha in comune con la sua superficie due rette immaginarie coniugate, il cui unico elemento reale è il punto di tangenza. Può immaginarsi ottenuta per movimento di un'ellisse generatrice 10 di assi $6-o_{xy}-6$ e $7-o_{xy}-7$, variabili in modo che gli estremi 6 descrivano per traslazione ortogonale e per variazioni condizionate l'ellisse 8, di assi $5-o_{xy}-5$ e $6-o_{xy}-6$ e in concomitanza gli estremi 7 descrivano trascinati nella predetta traslazione ortogonale e per variazioni condizionate l'ellisse 9; le tre ellissi sono mutuamente ortogonali e hanno i tre assi in comune, detti assi dell'elissoide.

Più brevemente, i punti della superficie dell'elissoide rispondono ai requisiti di una equazione di secondo grado nello spazio, da cui deriva l'essere una quadrica.

Per definirla al fine della sua rappresentazione in assonometria ortogonale, sono dati in proiezione tre diametri mutuamente coniugati, corrispondenti ai tre assi, e che a coppie definiscono le tre ellissi proiezioni delle tre ellissi principali.

Posto il rapporto omologico $H-O': H-(O)$, assegno la proiezione del primo asse della prima ellisse principale, posizionata liberamente su xy , nel diametro $5-o_{xy}-5$; la relativa dimensione reale va ricavata nella direzione $1-(O)$ omologa della $1-O'$ parallela alla $5-o_{xy}-5$.

L'altro asse dell'ellisse diventa diametro $6-o_{xy}-6$ coniugato al $5-o_{xy}-5$, parallelo a $2-4$ omologo di $2-3$ ortogonale a $1-(O)$; costruisco l'ellisse 8 utilizzando la coppia dei diametri coniugati o tramite gli assi da essi ricavati; ho evidenziato gli estremi degli assi.

La proiezione $7-o_{xy}-7$ del terzo asse, ortogonale all'ellisse principale già descritta, appartenente ad xy , è ottenuta per accorciamento di z^* in z' ; utilizzando $7-o_{xy}-7$ in coppia con $6-o_{xy}-6$ e con $5-o_{xy}-5$ ottengo le ellissi 9 e 10 proiezioni delle ellissi principali verticali, ortogonali fra loro e ad xy .

L'immagine dell'elissoide si completa con il contorno apparente, al quale le tre sezioni principali risultano tangenti; per l'ellisse 8 ricavo le tangenti parallele al diametro $7-o_{xy}-7$, per la 9 al diametro $5-o_{xy}-5$, per la 10 al diametro $6-o_{xy}-6$; i punti di tangenza sono estremi di tre diametri del contorno apparente. Illustro la costruzione del primo diametro $15-o_{xy}-16$; utilizzo l'omologia affine ortogonale di asse $11-o_{xy}-11$ tra l'ellisse 8 e la circonferenza omologa di diametro $11-o_{xy}-11$; l'omologo del semiasse minore $o_{xy}-12$ è $o_{xy}-13$; la $14-13$, omologa della $12-14$ parallela a $o_{xy}-7$, è la direzione della tangente la circonferenza, di cui individuo il punto di tangenza considerando il raggio ortogonale a $13-14$.

Per esso conduco la parallela alla $13-14$ ricavandone l'omologa e l'omologo 15 del punto di tangenza; il $15-o_{xy}-16$ è il diametro dell'ellisse c_e , contorno apparente della proiezione dell'elissoide.

Ripeto la costruzione per l'ellisse 9 e ricavo il diametro $17-o_{xy}-18$; utilizzo l'omologia affine obliqua di asse $15-o_{xy}-16$ tra l'ellisse c_e' e la circonferenza omologa di diametro $15-o_{xy}-16$; la tangente in 17, parallela a $6-o_{xy}-6$, interseca l'asse $15-o_{xy}-16$ in 19 fuori campo; la $19-20$ omologa della $17-19$ è tangente la circonferenza in 20; la $o_{xy}-21$ è ortogonale a $15-o_{xy}-16$; la $21-22$ è parallela a $o_{xy}-20$ e la $22-23$ a $o_{xy}-17$; $o_{xy}-23$ è raggio coniugato a $15-o_{xy}-16$; ricavo gli assi $24-o_{xy}-24$ e $25-o_{xy}-25$ e l'ellisse c_e' .

Alcune osservazioni: dell'ellisse 10 non è necessario determinare i punti di tangenza; le sezioni piane parallele sono sempre omotetiche, per cui una corda dell'ellisse 8 parallela alla $5-o_{xy}-5$ ha il diametro coniugato verticale in proporzione $o_{xy}-7: o_{xy}-5$.

Un parallelogramma a lati paralleli agli assi, proiezione di un rettangolo inscritto nella 8, concentrico, può essere la traccia su xy di quattro piani verticali; le ellissi sezioni, a coppia, hanno in chiave una quota diversa e una luce di imposta diversa.

Possiamo imporre le monte costanti e i punti chiavi appartenenti alla sezione orizzontale; si genera la vela ellissoidica e la successiva trasformazione in volta a pennacchi ellissoidici.

Posso ripetere tutte le ipotesi fatte per la sfera: coppe, cupole, calotte, fusi, zone, triangoli, cunei, cavità, aggregazioni, tamburi e sovrastanti cupole ellissoidiche, lunette, composizioni di elementi modulati, ma anche, crociere ad arco ellittico, etc.

Il fare va accoppiato alla fantasia; l'ellissoide può essere rotondo, se, per esempio, la sezione principale, in proiezione l'ellisse π_0 , non è ellisse ma circonferenza; in tal caso si tratta di una superficie e di un solido di rotazione; la direttrice è circolare e la generatrice è una ellisse.

La proiezione di ellisse può risultare una circonferenza; l'ellissoide di direttrice circolare parallela a π , appare come una circonferenza; bisogna riflettere.

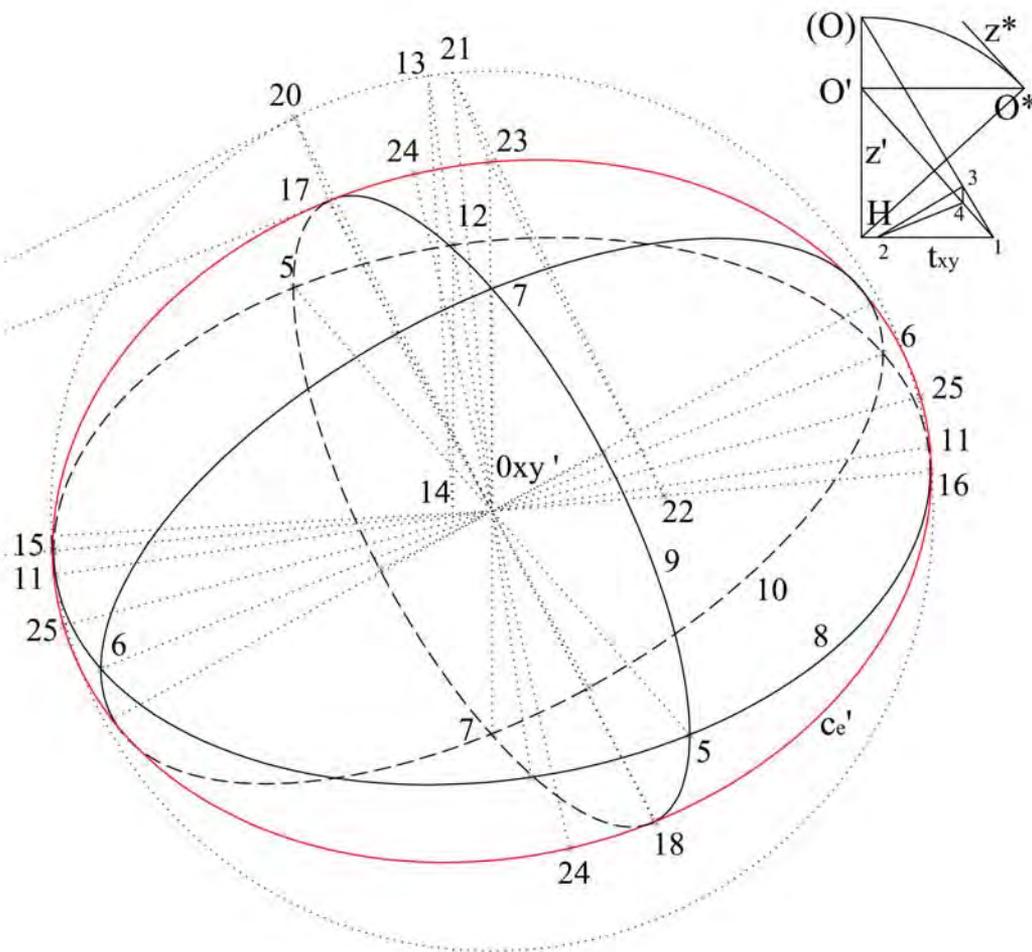


Figura 22

Capitolo 23 – Elicoide

Elicoide, rampa e scala. (fig. 23)

Numerose sono le superfici generate per moto rototraslatorio; occorre considerare una direttrice del moto, che può essere un asse rettilineo, un'elica, sovente cilindrica o una curva, non piana, appartenente ad una superficie gobba, anche quadrica, anche aperta all'infinito, anche intrecciata.

La generatrice può essere costituita da uno o più segmenti, da una poligonale piana e non, una curva aperta o chiusa, piana o gobba, semplice e non, singola o multipla, modulare, etc.

Il moto rototraslatorio può influire sui risultati, in funzione della velocità di rotazione uniforme o non, di quella di traslazione, uniforme e non e dalla loro combinabilità.

Esempi diffusi sono la rampa elicoidale, da cui deriva la scala elicoidale, comunemente detta scala a chiocciola, la vite senza fine, da cui deriva la cloaca delle impastatrici da laboratorio o da cantiere edile.

In figura è presentato un elicoide, sede di una scala, delimitata da travi perimetrali, di altezza tripla delle alzate; le loro superfici verticali sono ritagliate da due cilindri per ciascuna trave; la faccia estradossale è un elicoide.

Fra esse si allocano i gradini, le cui alzate piane verticali appartengono a piani assiali, e le cui pedate orizzontali non sono rettangolari, ma sono definite da due archi concentrici e da due spigoli complanari convergenti sull'asse.

L'ampiezza della pedata è da misurare sulla circonferenza media, proiezione sul piano orizzontale dell'elica mediana; il rapporto alzata-pedata varia intorno al valore sperimentale 16:30. Indirettamente, ciò stabilisce la pendenza della scala; essa varia da un massimo al limite interno della pedata ad un minimo nella parte più esterna; per limitare tale differenza di pendenza, al fine di garantire al fruitore comodità e sicurezza di esercizio.

Ove possibile, per la tromba della scala si assume un diametro ampio; altrimenti si rimedia stabilendo il piano delle alzate non assiale ma tangente ad un cilindro virtuale coassiale.

L'intradosso della scala è la superficie di una rampa elicoidale che spicca dal piano orizzontale d'imposta in corrispondenza della seconda alzata ed è delimitata da due eliche coassiali cilindriche, che insistono sulle circonferenze aventi il raggio $o_{xy}-1$ e $o_{xy}-2$, semiassi maggiori delle corrispondenti ellissi, massima, esterna e minima, interna; ricaviamo i relativi semiassi minori usando l'omologia e la parallela ad H-O*.

Disegniamo su xy le quattro ellissi, proiezioni di altrettante circonferenze, tracce su xy dei cilindri direttori delle eliche, due dell'intradosso e quattro dei bordi superiori delle travi; la proiezione dell'elica sul piano π è una cicloide; il passo verticale $o_{xy}'-3$, diviso in 20 parti uguali, è la proiezione di quello dell'elica, accorciato secondo z^* .

Il disegno di una seconda rampa di scala si ottiene per traslazione di un passo lungo l'asse, pari a $o_{xy}'-3$; al compiersi del passo, si salgono 20 gradini; perciò divido in 20 parti uguali la circonferenza esterna, omologica all'ellisse esterna.

Per evitare in proiezione il risultato poco efficace di due pedate sul piano assiale proiettante, la suddivisione è ruotata, per cui gli estremi degli assi non sono punti di suddivisione.

Dalla circonferenza omologica, con le verticali di richiamo, otteniamo la suddivisione dell'ellisse maggiore e per omotetia di centro o_{xy}' quella delle altre ellissi; i venti archetti non appaiono uguali, ma corrispondono ad archetti uguali.

Il raggio iniziale è $o_{xy}'-4-5$; il ciglio della prima pedata 6-7 converge in 8 e deriva dai punti 9 e 10, appartenenti alle ellissi relative all'ampiezza dei gradini; i vertici 11-12 e 13-14 dei bordi delle travi convergono sul 15 e derivano dai punti 5-9 e 10-4.

Su xy tra il $5-o_{xy}'$ e il $16-o_{xy}'$ abbiamo due archetti in 9-17 e 10-

18; si portano su di un'alzata pari a $0_{xy}'-8$; il primo non risulta in vista e si omette, il secondo trasla in 7-19; lo spigolo di fondo della prima pedata è esposto solo per il tratto 19-20.

È fondamentale la corretta osservazione di ciò che è in vista e ciò che non lo è; gli spigoli delle alzate sono parallele, quelli della pedata sono convergenti; le alzate appaiono tutte di altezza pari a $0_{xy}'-8$, mentre le pedate appaiono tutte diverse.

Avendo ruotato la suddivisione, l'asse non funziona come asse di simmetria relativa; un'alzata di piena larghezza non c'è; ogni alzata impegna due punti dell'asse, a quota successiva, ma sopra di una unità e sotto di una unità ritroviamo punti dei bordi delle travi e degli spigoli dell'intradosso.

La parete cilindrica esterna mostra l'arco di base, circolare, in proiezione ellittico, 5-16 e dal 16 fino al 22, di proiezione 21, estremo del semiasse maggiore, è proiezione di archi di elica; il 20-23 è proiezione di arco di elica; il 23-24 è la traslazione del 16-22; il segmento verticale 22-24 è proiezione della generatrice di contorno apparente della fascia cilindrica compresa fra due eliche traslate.

Tale superficie al di là del 22-24 non è più in vista; ricompare dal tratto verticale 25-26, sulla verticale dell'estremo 1 per finire in 27-28; la 16-22 continua non in vista e riappare dal 25 al 27, mentre la 20-23-24 continua in vista fino al 29, riappare in 30-26-28.

La proiezione dell'elica, che inizia dal 12, nello spazio mantiene con la precedente che inizia dal punto 11 lo spessore costante pari a 1-31; in proiezione tale differenza fra i raggi relativi varia con la rotazione, scompare alla vista nel 32, riappare nel 33, nel 34 è sulla verticale per il 31, ed è in vista dal 34 al 35.

Dall'osservazione delle proiezioni delle due eliche affiancate

superiori, appartenenti al doppio cilindro direttore interno rileviamo la generatrice di contorno apparente 36-37, alta due unità, il cui piede 36 non coincide con il vertice 38 dello spigolo del quarto gradino e sulla pedata c'è, anche se si vede male, l'archetto 38-36, che è parte del corrispondente archetto su xy. Rileviamo ancora che, delle due proiezioni, quella interna, a cui appartiene la 36-37, dal 39 non è più in vista e riappare in 40 per finire in 41; nella zona non in vista, la predetta curva risulta tangente alla verticale per il 42; inoltre in 43 essa manifesta un flesso e lo spessore risulta proiettante su π .

La curva che inizia dal 14, è in vista fino al 39, continua nella zona non in vista, ove risulta tangente alla verticale per il 2, e ricompare nel 43 finendo nel 44.

La curva che inizia dal 4 ha il primo tratto non in vista composto da un archetto appartenente all'ellisse di base e continua con la proiezione del primo tratto dell'elica; essa è in vista nel tratto 45-46, mostrando in 47 un punto di flesso, sulla verticale per il 43; l'altro è nel tratto nascosto, che termina nel 48; tale curva è spigolo inferiore della faccia cilindrica di raggio minore e delimita all'interno l'intradosso elicoidale.

La curva che inizia dal 16 è in vista fino al 22, continua nascosta fino al 47, riappare per il tratto 47-49, riappare, formando un cappio, per il tratto 25-27; della superficie intradosale elicoidale risulta visibile solo il triangolo 47-46-49.

Spingendo al più alto livello l'osservazione dei risultati è possibile evidenziare anche vie di facile controllo, tutto derivando dai raggi di base e dalla quota di verifica; cambiando il rapporto omologico, o eseguendo solo un elicoide senza i gradini, possiamo certamente capire meglio la prevedibilità della genesi e della vista finale.

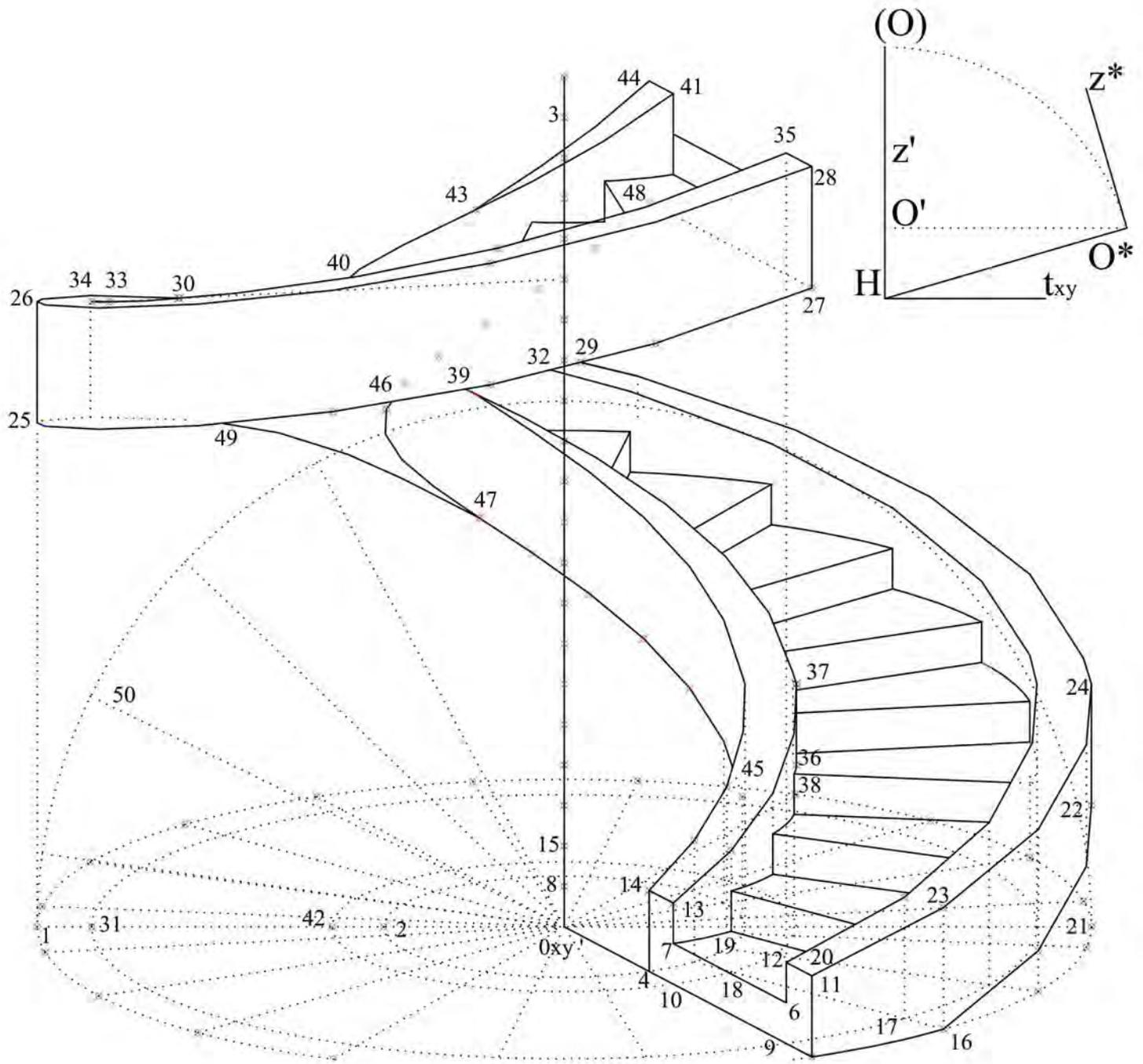


Figura 23

Capitolo 24 – Volte

Le volte cilindriche in assonometria ortogonale diretta. (fig. 24)

Noto il riferimento assonometrico, considero due quadrati concentrici e omotetici come imposta di un semicilindrico circolare retto con due archi di testa a spessore, come direttrici del cilindro; fra le generatrici notiamo quelle di imposta, quella di colmo e quella di contorno apparente.

Costruisco le due sezioni diagonali verticali eguali, ciascuna costituita da due semiellissi, concentriche, omotetiche, a spessore variabile, aventi per asse maggiore le diagonali e per semi-asse minore il raggio di monta del semicilindro.

In proiezione rilevo che le semiellissi di testa appaiono traslate e quelle diagonali, fra loro ortogonali appaiono notevolmente diverse; risulterebbero uguali e sovrapposte scegliendo un lato del quadrato d'imposta orizzontale parallelo a t_{xy} , perdendo efficacia espositiva.

Guardando l'immagine si ha l'effetto dell'inversione; sembra guardare dal basso e con qualche sforzo dall'alto; osservo che la divisione origina due unghie e due fusi; nelle prime le generatrici della superficie esterna iniziano da quella massima di colmo per finire nulle sul piano di imposta, mentre quelle della superficie interna vanno da quella massima di colmo uguale alla precedente al minimo non più nullo ma pari alla spessore. Ritengo che la descrizione esecutiva, assolutamente conforme a quanto approfondito e già acquisito, non richieda di essere pedissequamente ripetuta; però, raccomando di concentrarci sulla massima osservazione, riflessione e lettura-confronto fra apparenza e realtà.

Credo opportuno relazionare difficoltà e risultati anche alle scelte del rapporto omologico relativo ad xy , della posizione rispetto a π , della forma, della giacitura, delle dimensioni di direttrici e generatrici.

Suggerisco un'analisi a tutto campo, ipotizzando, senza condizionamenti, ogni trasformazione e associazione, in prospettiva di una padronanza più stabile e rassicurante, nel produrre o nell'interpretare immagini assonometriche.

Per esempio, ho esploso la copertura cilindrica, offrendo di ciascun quarto la vista isolata derivandolo per semplice traslazione dal gruppo assemblato; ogni nuova osservazione, coronata da motivazioni indubbie, è un contributo gratificante.

A sinistra in basso ho rappresentato per traslazione, associazione e composizione quattro fusi, costituendo una volta a padiglione su pianta quadrata, impostata sul corrispondente prisma; avvertiamo il senso del chiuso, del raccolto, del buio.

È occasione, anzi necessità per l'accesso, dotare la volta a padiglione di un vano di porta architravato aperto, a stipiti piani verticali e paralleli; intravediamo un tratto di spigolo di base della parete interna.

Sull'altra parete ho praticato un vano ad arco semicilindrico e stipiti piani in tangenza con l'imbotte; riflettendo sulla luce verticale relativa alla generatrice di colmo comparata al soprastante piano di imposta della copertura, non sfugge l'incongruenza dell'ipotesi che non preveda la collocazione di una trave-cordolo da cui si eleva la convessità-concavità strutturale della volta. Anche attraverso il varco si intravede un tratto di spigolo di base della parete interna, distinta dalla precedente; osservo che spesso stipiti e imbotte hanno superfici spezzate, sagomate, secondo gusti stilistici, omologati dall'uso locale o storico architettonico, in strombature, fasci cilindro-torici a ghiera, trabeazioni, etc.

La volta a padiglione illustrata presenta anche un'apertura a lunetta semicilindrica retta, con davanzale piano orizzontale e imbotte che va dal piano verticale frontale della sezione di testa fino all'intersezione con la superficie cilindrica del fuso, esterna e interna.

Le predette curve di intersezione non sono piane ma gobbe; determino il loro punto di chiave che non è una cuspide; dallo spigolo del davanzale orizzontale pervengo sulla curva diagonale e per l'intersezione conduco la verticale, complanare con la sezione di testa semicircolare della lunetta; l'orizzontale per la chiave interseca la verticale e dal punto considero la parallela alla diagonale incidendo le due curve diagonali; per i punti conduco le generatrici delle due superfici fino ad intersecare la generatrice di colmo dell'imbotte nei due punti di chiave delle due intersezioni gobbe.

Analogo processo svolgo per ricavare a coppie gli altri punti; sul piano di testa della lunetta considero le parallele allo spigolo del davanzale, intersecando l'arco di testa in due punti per i quali considero le due generatrici dell'imbotte, verso l'interno e la retta verticale d'angolo; per tale punto traccio la parallela alla diagonale, incidendo le due curva diagonali; per i due punti considero la generatrici, e ottengo le intersezioni con quelle dell'imbotte, quattro punti alla volta; una parte dell'arco interno s'intravede attraverso la luce.

È importante rilevare che la generatrice di colmo della lunetta deve intersecare la superficie interna, più bassa di quella esterna, in un punto della sezione circolare mediana del fuso ortogonale alle generatrici; tale punto non può coincidere o essere prossimo al punto di chiave della superficie interna della volta, altrimenti non si tratta più di lunetta, bensì di crociera.

Nell'immagine non ho assegnato all'arco di testa lo spessore, che riduce la luce della lunetta; in tal caso la superficie esterna della lunetta interseca la superficie esterna del fuso e slega le due curve gobbe.

Immaneabili esercizi riguardano l'esecuzione di sezioni della volta con piani assiali verticali mediani e diagonali, o con piani orizzontali; in quest'ultimo caso ottengo due quadrati concentrici e omotetici, aventi il lato pari alla lunghezza della generatrice a livello del taglio.

Iniziando dal piano di imposta fino al punto di chiave interna della volta, il quadrato interno ha il lato che decresce dal massi-

mo a zero e la distanza fra i lati corrispondenti varia dallo spessore del muro alla semicorda orizzontale nell'arco direttore semicircolare massimo, mediano, esterno, a livello della chiave del corrispondente arco concentrico interno; per distanze dal piano d'imposta superiori al raggio interno, la sezione contiene il solo quadrato esterno.

Le sezioni con i piani assiali mediani determina archi concentrici a spessore costante; per qualsiasi altra giacitura, nella sezione con piano assiale ottengo ellissi concentriche omotetiche, a spessore minimo in chiave.

Altri esercizi utili riguardano l'appartenenza di punti, l'intersezione con rette, piani tangenti, distanza di punti, intersezioni con canne fumarie prismatiche, tronco piramidali, cilindriche, tronco coniche, mansarde, cavità, lucernari, muretti di confine, cornici, etc. In basso a destra propongo una volta composta da quattro unghie a spessore, interpretata come intersezione di due semicilindrici circolari retti uguali impostati su unico piano e ad assi ortogonali incidenti su base quadrata.

Rispetto all'esempio iniziale ho dovuto costruire l'arco a spessore sulla giacitura che ne mancava, sostituendo ai due fusi, i risultati di queste unghie, nuove solo per la loro esposizione a π ; tutto il resto è derivato per traslazione e assemblaggio.

La volta a crociera ha il piano d'imposta geometrico; a suo sostegno sono posti i quattro pilastri parallelepipedi verticali; si tratta di una volta aperta, luminosa, leggera, ricercata, stimolante.

L'iter esecutivo non contempla novità di rilievo; i quattro frontali si proiettano sul piano di base nei lati del quadrato esterno; nei corrispondenti lati del quadrato interno si proietta la volta interna corrispondente alla diagonale minore; le quattro testate ad essa corrispondenti non costituiscono, però, gli archi minori delle testate esterne; fra le testate effettive esterne e quelle dalla volta interna, in geometrica tangenza sono quattro semicilindri con generatrice lunga quanto il lato del pilastro.

Per la superficie esterna della crociera la pianta è quadrata, per quella interna il quadrato relativo presenta quattro ali o bracci;

il nome di crociera è dovuto alla caratteristica della sezione parallela al piano d'imposta, a forma di croce.

Sul piano sezionante la superficie esterna a una quota inferiore al punto di chiave dell'arco di testa minore ogni unghia presenta due generatrici parallele, dalla testata alle diagonali, complessivamente una croce greca, di lunghezza crescente con la quota.

Coassiale e omotetica appare la corrispondente croce relativa alla sezione della superficie interna; crescendo la quota, la distanza fra le generatrice di ciascun braccio della croce si assottiglia fino ad annullarsi nelle due generatrici unite, quando si raggiunge quella quota; superandola, la croce è relativa solo alla superficie esterna, e si assottiglia sino ad annullarsi nelle due generatrici ortogonali di colmo.

Guardando l'immagine osservo che la faccia del pilastrino è in tangenza con l'imbotte, che la generatrice di colmo non costituisce limite, funzione demandata alla generatrice di contorno apparente; tale generatrice ha un estremo sull'estremo dell'asse maggiore, ortogonale all'altro lato del quadrato di base e l'altro estremo in tangenza sull'ellisse diagonale; nelle unghie più lontane il tratto di generatrice di contorno apparente di una di esse prevale su quella dell'unghia contigua; ciò è dovuto al contatto in tangenza delle due che non avviene nello stesso punto.

Padiglioni e crociere possono insistere su poligoni regolari a n lati; nelle basi rettangolari, in uno dei lati si ha un arco di testa circolare, sull'altro è ellittico ad eguale monta; la generatrice di colmo può essere non parallela al piano d'imposta.

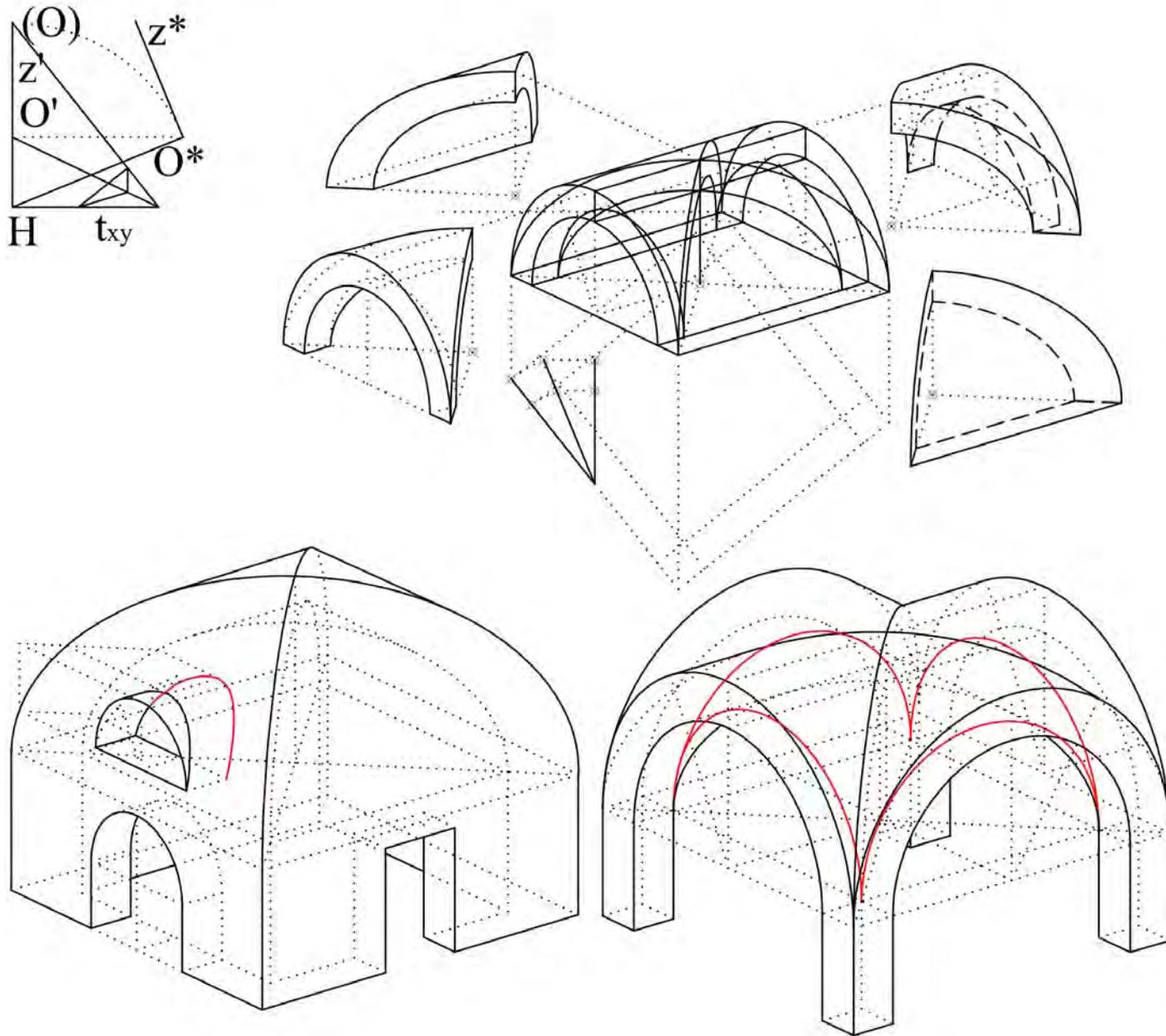


Figura 24

Capitolo 25 – Volte a vela

Volta a vela e a pennacchi.

Da cilindri e conici possiamo derivare per composizione di intersezioni piane opportune le superfici composte a padiglione ed a crociera; dalla superficie della sfera, dell'ellissoide, del paraboloide rotondo ed ellittico, di una falda di un iperboloide a due falde, rotondo o ellittico possiamo elaborare per sezione piana ben programmata e successiva asportazione le superfici a vela e a pennacchi.

Definito il solito riferimento, considero un quarto di sfera sostenuto da un semicilindro circolare retto ad asse verticale con l'estremo superiore centro della sfera; si genera una nicchia cilindro-sferica; il punteggiato guida a riconoscere l'iter.

Il quarto di sfera può essere a sbalzo da un muro; può essere un cupolino, una tenda, una pensilina, etc., a riparo di un vano di porta ad arco cilindrico circolare retto ad asse ortogonale al muro e contenente il centro della sfera, visto dal basso.

Considero sul piano di imposta di una semisfera a spessore inscritto alla corona circolare della sezione massima orizzontale una coppia di quadrati concentrici e omotetici, intesa come traccia di piani di sezione verticali si fraziona la semisfera in quattro semicalottine e un corpo ad esse incluso detto vela.

La vela esterna, a quattro vertici o cuspidi, insiste sul quadrato esterno, la cui diagonale è diametro della sfera; la vela interna insiste sul quadrato interno, la cui diagonale, diametro della sfera interna, differisce dalla precedente del doppio della diagonale dei quadratini ai vertici della coppia di quadrati d'imposta. Ne discende che la sfera a doppia superficie ha lo spessore pari, non al lato della base dei pilastrini sul piano d'imposta della semisfera, bensì alla relativa diagonale; inoltre osservo che a ciascun lato della vela è associato un segmento, di lunghezza pari

al lato del pilastrino, di un cilindro circolare retto, che collega la superficie velica interna, al piano esterno del frontale, sul quale ha la traccia circolare minore.

La struttura sferica, di inavvertita pesantezza dovuta al suo maggiore spessore, sembra leggera, aerea, aperta, spaziosa, luminosa; la lettura geometrica ne evidenzia la verità.

Il rimedio è realizzato nella volta a pennacchi; sull'impianto della volta a vela pratico una sezione orizzontale alla quota della chiave dell'arco maggiore della testata; genero così una nuova imposta a corona circolare a spessore maggiore, geometricamente determinabile, su cui impianto una cupola semisferica.

Conseguo il singolare vantaggio di mutare la pianta originariamente poligonale, in questo caso quadrata, in circolare; della vela sono rimasti quattro triangoli sferici detti pennacchi a superficie esterna e interna, a spessore pari alla diagonale del pilastrino.

Lo spessore della cupola a spessore costante implica la concentricità della superficie sferica esterna con quella interna; il triangolo interno del pennacchio ha l'arco orizzontale a livello della chiave dell'arcata interna, più bassa dell'esterna; la differenza è colmata dall'inserimento di un cilindro circolare retto ad asse verticale, di lunghezza pari alla differenza di quota delle due chiavi, cioè lo spessore in chiave della doppia arcata esterna pari al lato del pilastrino. Il gioco compositivo ed espositivo delle forme, delle sfumature e delle diverse possibilità di utilizzazione del manufatto, di natura tecnica e architettonica può essere arricchito ponendo tra il piano superiore dei pennacchi e l'imposta della cupola un cilindro circolare retto ad asse verticale, detto tamburo, ottimo per l'apertura di vani finestra per illuminare l'ambiente dall'alto.

Anche la cupola può essere finestrata; in genere si tratta di tonde; l'accostamento tamburo-cupola può essere marcato da una cornice trabeata; da cosa nasce cosa.

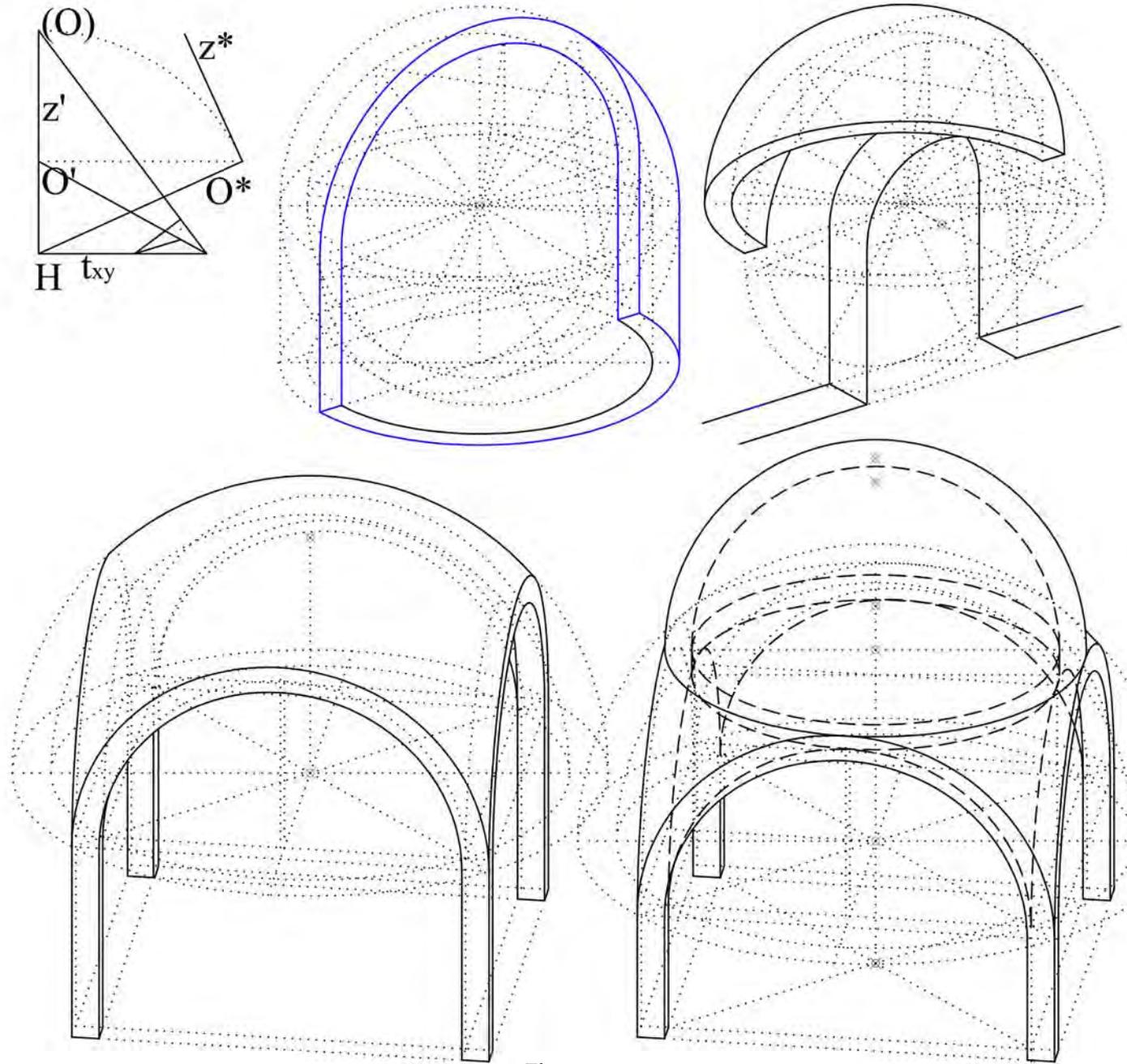


Figura 25

La superficie dei pennacchi è sede di affreschi, di bassorilievi, di abbellimenti ammirati, per opulenza ed altri numerosi valori intrinseci; l'esperienza di percezione visiva e razionale sconfinata sicuramente nell'imprevedibile e nell'inimmaginabile.

Il piano di sezione orizzontale a quota superiore alla chiave dell'arcata maggiore lascia la presenza parziale dell'originaria vela; interessante riflettere sulle modificazioni adottate dalle possibili ipotesi di ulteriori interventi, particolarmente evidenziabili attraverso le sezioni verticali, assiali e non.

Partendo da un ambiente delimitato dagli n lati uguali di un poligono possiamo parlare di vele a n cuspidi e di n pennacchi; certamente si origina il problema della sezione dei pilastrini, ovviamente non a sezione quadrata.

Posso ancora supporre basi rettangolari con vele ad archi non solo circolari ma ellittici, sezionando non un'emisfera ma un semiellissoide, circoscritto al rettangolo; si tratterà di pennacchi ellissoidici; non si esclude il coinvolgimento delle quadriche a punti ellittici, dei coni quadrici e non, degli iperboloidi iperbolici, etc.

Capitolo 26 – Iperboloide

Iperboloidi in assonometria ortogonale. (fig. 26)

La costruzione della superficie quadrica a punti ellittici detta iperboloide a due falde si appoggia a due dati; il primo è una direttrice ellittica e_d' , che poniamo su xy , di centro o_{xy} ed assi paralleli ad H-3 ed I-3, i quali, in proiezione assonometrica, non sono più assi ma diametri coniugati 4- o_{xy}' -4 e 5- o_{xy}' -5, dai quali ricaviamo gli assi 6- o_{xy}' -6 e 7- o_{xy}' -7.

Il secondo, sul piano verticale di traccia 4- o_{xy}' -4, è l'iperbole generatrice ig_1' , la quale, ruotando intorno al suo asse focale, ed asse dell'iperboloide, varia con continuità, diventando ad un quarto di giro la ig_2' ; il punto 6 scorre lungo la e_d' e la corda passa dal valore 4- o_{xy}' -4 a 5- o_{xy}' -5, dando luogo alla ig_2' .

La vera lunghezza di o_{xy}' -4 è o_{xy}' -8 parallelo ad H-2; sono noti, sull'ortogonale a o_{xy}' -8, parallela a z^* , i valori o_{xy}' -V* e o_{xy}' -C*; sono dati gli asintoti t_1^* , t_2^* ; consideriamo la 8-V*-9, la 9-10-11 parallela ad H-2, la 10-12 parallela alla H-3, la 10-13 parallela alla O*-O', la 10-13 trasla in 13-14; la C'-14 è t_1' e la C'-15 è t_2' .

Si verifica che 4-16 è pari a V'-15; ipotizziamo di condurre per V' una qualsiasi secante t_1' in X_1' e t_2' in X_2' , basta riportare da X_1' verso V' la distanza V'- X_2' per individuare sulla secante un nuovo punto dell'iperbole ig_1' ; la parallela alla 4- o_{xy}' -4 incontra l'asse e ricava il simmetrico; individuiamo così il diametro di una successiva ellisse, omotetica alla direttrice e_d' , della quale costruiamo l'altro diametro coniugato, gli assi e l'ellisse, secondo il consolidato iter esecutivo.

Abbiamo applicato tutto ciò per altre tre sezioni ellittiche; uniamo gli estremi dei diametri ottenendo le iperboli ig_1' e ig_2' ; si possono condurre per i centri i semidiametri paralleli e ottenere tutte le iperboli che vogliamo.

Il contorno apparente è ricavato per involuppo e risulta tanto più preciso quanto più fitta è la serie di ellissi; si noti che il vertice è nascosto dal contorno apparente; gli asintoti considerati appartengono al cono asintotico di vertice C'; la sezione del cono asintotico su xy è un'ellisse omotetica alla direttrice e_d' , definita dal diametro 17- o_{xy}' -18; le 19 e 20, tangenti ad essa da C', sono generatrici di contorno apparente del cono asintotico. Come per ogni cono, le sezioni piane possono risultare, secondo la loro giacitura, ellissi, circonferenze, parabole, iperboli, e tali possono risultare sull'iperboloide a due falde; la seconda falda è in simmetria di centro C' rispetto a quella disegnata.

Del volume, sempre parziale, limitato, troncato da quello aperto due volte all'infinito, in funzione della posizione dei dati, possiamo avere esposizioni d'impatto percettivo molto vario; si può trattare di un calice, di una cupola, di una prominenzia convessa in estradosso, di una cavità concava in intradosso.

Le elaborazioni con piani sezionanti possono generare volte a vele, a pennacchi iperboloidei, a crociera, composizioni anche modulari o sequenziali, a grafo, etc.; la struttura a spessore introduce inevitabili motivi di profonda riflessione e di non comune dominio di conoscenze, di capacità di attenzione e di autocontrollo.

Infine la direttrice può essere una circonferenza; l'iperbole generatrice è unica; l'iperboloide è rotondo, meno complesso; restano da considerare i problemi elementari canonici: appartenenza di un punto alla superficie, intersezione fra retta e superficie, distanza di punto dalla superficie, distanza minima fra due punti della superficie, retta per un punto tangente la superficie, esposizione, o meno, di un punto da un altro per interferenza della superficie; piani tangenti per un punto, etc.

L'iperboloide iperbolico è una superficie rigata non sviluppabile; si può pensare generata semplicemente contrapponendo due circonferenze uguali, parallele fra loro, ortogonali all'asse, suddivise in n parti uguali, corrispondenti sia nelle relative origini, poste su una parallela all'asse, su cui stanno i centri a una data distanza, che in tutti gli n punti divisori individuati per numerazione equiversa.

Se il punto di posto k di una delle due circonferenze è collegato con un punto dell'altra di posto $k+s$, con s diverso da n o da $n:2$, mediante una retta generatrice, che si sposti unitariamente in $k+1$ e $k+s+1$, otteniamo la predetta superficie gobba.

La stessa può ottenersi con una seconda schiera di rette, con la prima generatrice condotta per la posizione $k+s$ della prima e k della seconda, avanzando come prima; si costituisce un reticolo di rette sghembe; per ciascun punto del reticolo esistono due rette del reticolo, l'una della prima schiera, l'altra della seconda; le due rette sono complanari e il piano che le contiene è tangente la superficie, anche se la divide in due; la superficie dell'iperboloide iperbolico è perciò a punti iperbolici.

Ciascuna delle generatrici è sghemba con tutte le rette della propria schiera e incide tutte le generatrici dell'altra schiera; la proiezione di ciascuna generatrice sul piano di una delle circonferenze direttrici, involuppa una circonferenza, direttrice di un cilindro coassiale che contiene la sezione direttrice di gola, di raggio minimo, il cui centro è sull'asse, medio fra i centri delle due circonferenze direttrici uguali.

Osserviamo che se lo sfasamento voluto è pari ad $n:2$ la gola diventa un punto, vertice di una superficie conica, di cui le due direttrici sono sezioni simmetriche rispetto al vertice.

I dati per costruire l'iperboloide iperbolico possono essere due direttrici circolari e parallele, ma non uguali, di cui una può essere quella di gola; il processo esecutivo è lo stesso; posso ottenere la superficie, utilizzando come generatrici i due rami di un'iperbole ruotanti per mezzo giro attorno all'asse non focale.

L'immagine assonometrica presenta il contorno apparente iperbole, larga o stretta secondo il rapporto di sfasamento piccolo tendente a 0 o grande tendente a $n:2$; l'esposizione del volume risultante per i dati prescelti, come il rapporto omologico, la giacitura delle basi, la dimensione del raggio e della distanza fra le basi, può non garantire la vista dei rami dell'iperbole di contorno apparente, negando il relativo effetto chiaroscurale caratterizzante la superficie.

In figura ho scelto due direttrici uguali, parallele, ortogonali all'asse, non circolari ma ellittiche, la cui proiezione è ancora ellittica, estrapolandola dal precedente iperboloide ellittico a due falde; l'immagine ottenuta è appariscente.

Sorgono, però, notevoli perplessità, prima che pratiche, di natura teorica; l'ellisse proiezione è stata suddivisa in 48 parti, con riferimento omologico ad una circonferenza di diametro pari all'asse maggiore, facilmente divisibile in parti uguali.

Si doveva procedere suddividendo in parti uguali l'ellisse realmente corrispondente a quella proposta direttamente in proiezione, per riportarne successivamente la proiezione suddivisa; nel caso illustrato, l'effetto di ciò è che le due schiere di rette generatrici portano a due superfici distinte.

La bella immagine non ha le qualità dovute e non rappresenta la geometria dell'iperboloide iperbolico; la suddivisione in parti non uguali cambia la pendenza della retta generatrice sulla giacitura della direttrice.

Il piano della generatrice evidenziata in figura è verticale parallelo all'asse e ha traccia sulla base, pari alla corda; avanzando la generatrice di un archetto sopra e di uno sotto, seppure realmente archetti di lunghezza uguale, la corda relativa nell'ellisse non può restare la stessa; ciò avviene nella circonferenza, non in un'ellisse; dunque la pendenza cambia, contravvenendo ai requisiti geometrici.

L'esempio a destra in basso è un iperboloide iperbolico rotondo a direttrici diverse.

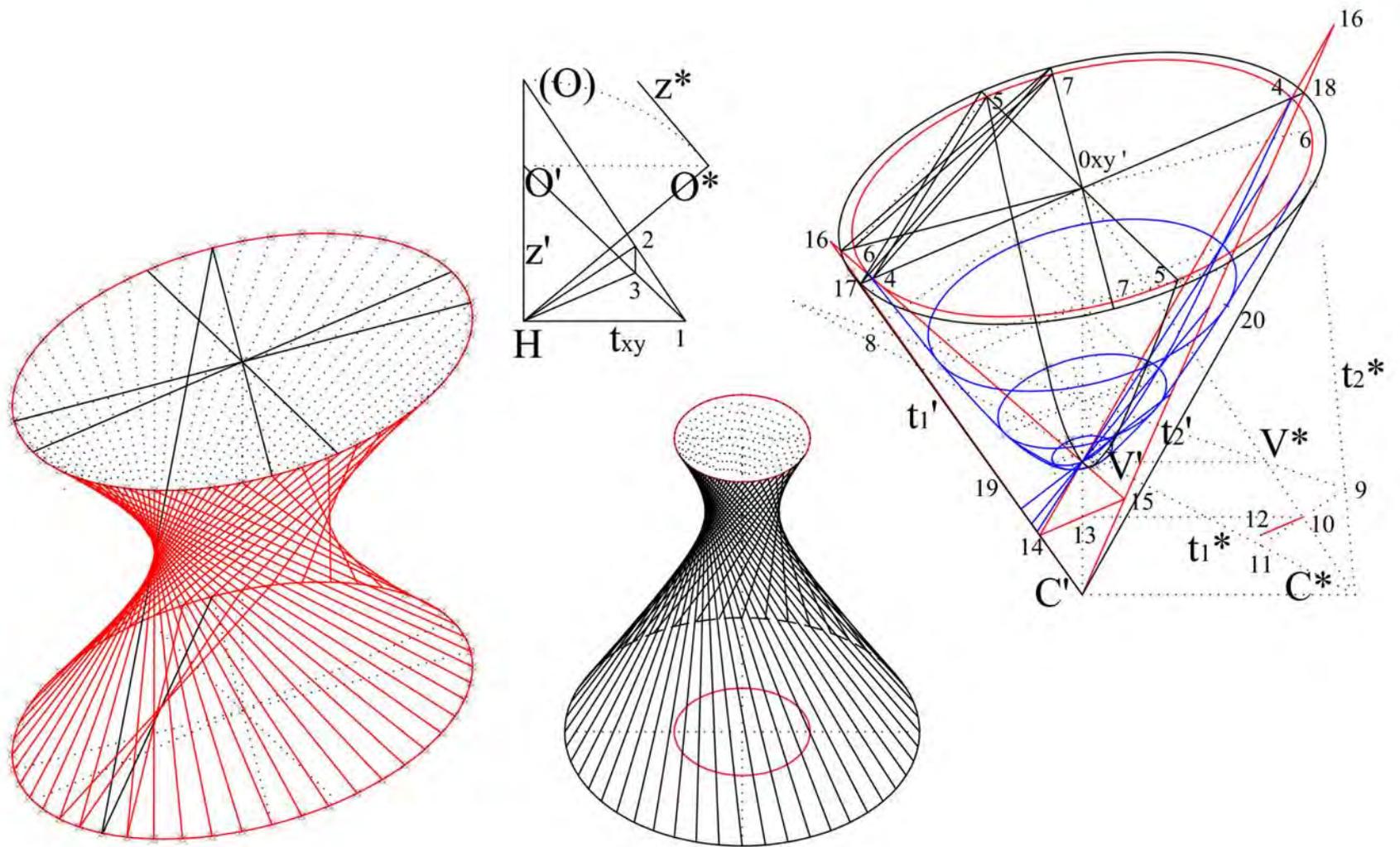


Figura 26

Capitolo 27 – Paraboloide

Paraboloidi in assonometria ortogonale. (fig. 27)

Il paraboloido ellittico può essere costruito pensando a due parabole direttrici principali equiverse, fra loro ortogonali, con vertice ed asse comuni a quelli del paraboloido, e a un'ellisse generatrice, ortogonale al predetto asse, su cui ha il centro e con gli estremi dei suoi due assi sulle parabole direttrici.

I due assi decrescono omoteticamente quando la generatrice trasla il suo centro sull'asse, verso il vertice, generando il paraboloido, quadrica a punti ellittici, cioè che, rispetto a un piano tangente, resta tutta dalla stessa parte.

In figura, la proiezione degli assi dell'ellisse generatrice, di giacitura xy , sono i diametri coniugati $5-0_{xy}-5$ e $6-0_{xy}-6$; sappiamo ricavare gli assi e l'immagine dell'ellisse; la proiezione delle parabole direttrici è ricavata nelle parabole $5-7-5$ e $6-7-6$; il centro delle altre sezioni è su $0_{xy}-7$; per omotetia ricavo i relativi assi e le ellissi; il contorno apparente è una parabola, che può ottenersi per involuppo; il suo asse è parallelo a $0_{xy}-7$ e il suo vertice è il punto di tangenza secondo al t_{xy} .

Se le due parabole direttrici sono eguali, il paraboloido è rotondo e la sezione generatrice è una circonferenza; in assonometria quest'ultima è sempre un'ellisse, tranne se l'asse è ortogonale a π ; nel paraboloido rotondo la parabola ruota intorno all'asse, e la direttrice è una sezione circolare definita da un punto della parabola. Del paraboloido posso disegnare un volume finito, pieno o vuoto, un segmento a due basi, una calotta, una coppa, una cupola, un fuso, uno spicchio, un cuneo a superficie triangolare, poligonale, a stella, una vela, un pennacchio, una crociera-padiglione, etc.

La superficie del paraboloido iperbolico è generata trasladando una parabola generatrice, mantenendola a contatto di un'altra parabola direttrice di giacitura diversa, spesso ortogonale,

In figura, ho due parabole verticali, $12-11-13$ e $9-11-14$, aventi su xy le tracce sulle diagonali, $8-10-8$ e $9-10-9$, di un rettangolo $8-9-8-9$ di xy , proiezione del campo della superficie considerata; indifferentemente, una di esse è direttrice, l'altra è generatrice. La superficie è una rigata non sviluppabile, presenta una sella; è una quadrica a punti iperbolici, per cui il piano tangente in un suo punto ha sulla superficie due rette, una per ciascuna schiera di rette generatrici; nel vertice 11 ha un piano tangente che la divide in due parti, superiore e inferiore secondo le due rette, segnate a trattini.

Le due schiere di rette formano nello spazio un reticolo, in cui ciascuna retta di una schiera è sghemba con le contigue e interseca tutte le rette dell'altra schiera; il reticolo spaziale e la sua proiezione su xy permettono di verificare l'appartenenza del punto 15 di proiezione 16 , utilizzando le coordinate lineari; il piano tangente in 15 contiene le due rette del reticolo, a cui il 15 appartiene.

Tutte le sezioni piane verticali, assiali e non, sono parabole, come risulta la $19-20$; i punti si ricavano dalle intersezioni della traccia $17-18$ con le proiezioni delle rette generatrici sul reticolo di base. La tessitura del reticolo origina il profilo curvo del contorno apparente; la parabola $9-11-14$ lo tange in 21 ; il piano secante $22-23-24$ parallelo a quello di base individua un'iperbole; l'arco di iperbole $22-24$ è uno dei due rami; l'altro si ricava ripetendo per il 25 il procedimento seguito a destra sul 23 , oppure, per simmetria; il centro dell'iperbole sul piano sezionante è comune al piano e alla retta dell'asse; la parallela alla diagonale $23-25$ passante per il centro è l'asse dei fuochi dell'iperbole.

Se $8-23$ diminuisce l'arco si allarga; se diventa inferiore a $10-11$, si ha l'inversione dei due rami dell'iperbole sezione; se il piano sezionante è parallelo a quello di una parabola, genera la stessa parabola trasladata, se parallelo a quello di un'iperbole, genera

un'iperbole diversa, i cui vertici, si avvicinano al centro, fino a coincidere; la curva degenera nei due asintoti, rette del piano tangente avente quella giacitura.

Ipotizzo nullo il 9-14 e quadrata la base originaria; l'elemento di sinistra delimitato dall'arco di parabola 9-11-9 quadruplicato intorno a 8-12 genera una copertura a crociera su base quadrata. Annulliamo 8-13; risulta un elemento che associato può diventare la copertura a padiglione su pianta quadrata, con guglia centrale; la pianta può essere un quadrangolo qualsiasi, con sequenze modulari.

Pensiamo di suddividere una coppia di poligoni, regolari e non, concentrici omotetici, ad n lati, in altrettanti quadrilateri di imposta per superfici di paraboloidi iperbolico combinabili e ripetibili in senso radiale; si possono ottenere effetti percettivi, visivi e razionali, di grande interesse, sia per la forma che per i fattori chiaroscurali che caratterizzano la sella parabolica.

In funzione della scelta di orientamento dei lati di base posso ottenere viste con contorno apparente di maggiore efficacia; l'esperienza è determinante nel prevedere l'esposizione e le scelte dei dati idonei ad ottenere risultati attesi e gratificanti.

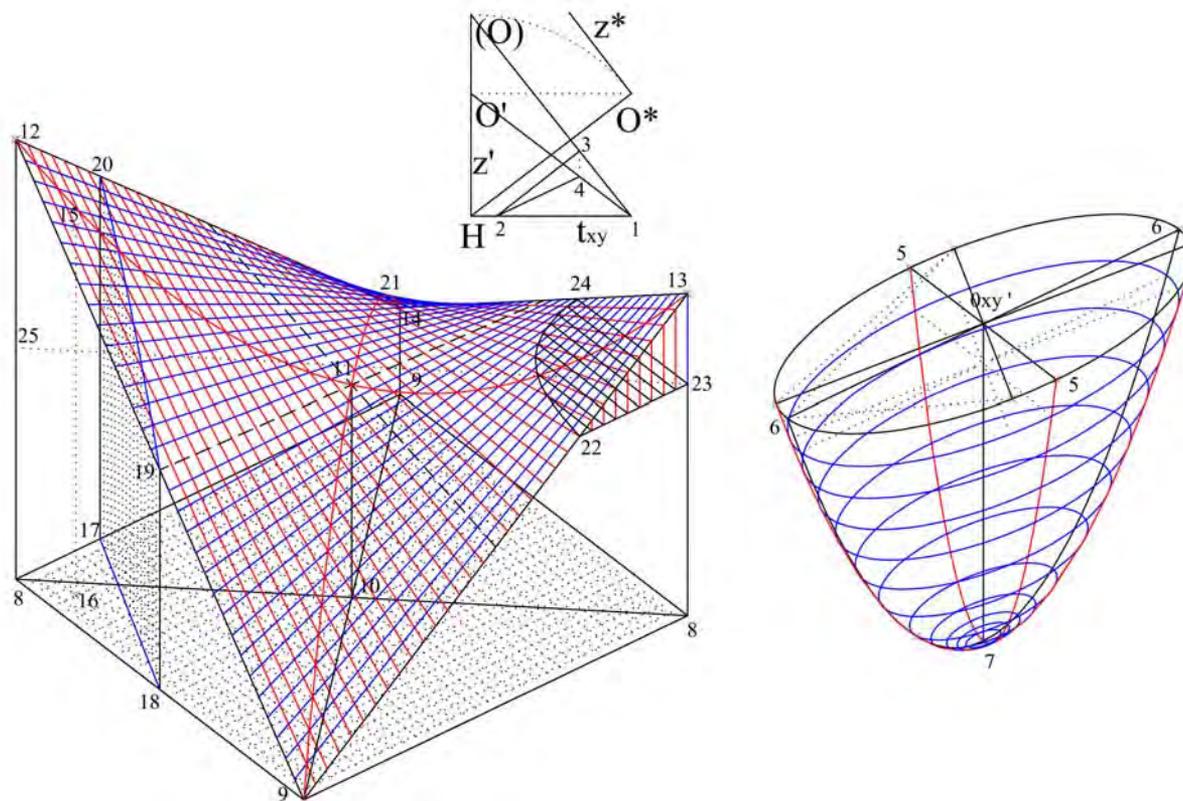


Figura 27

Capitolo 28 – Conoide

Conoidi. (fig. 28)

Si tratta di una superficie rigata, non sviluppabile, a due falde aperte all'infinito; le rette generatrici contigue sono sghembe fra loro e stanno su piani paralleli al piano direttore; la direttrice è una curva chiusa variabile in forma e dimensioni, non appartiene al piano direttore, interseca tutte le generatrici; un segmento rettilineo unisce le due falde.

Illustro la proiezione della superficie del cono conoide; l'ellisse definita dai diametri coniugati $1_{xy}'-0_{xy}'-2_{xy}'$, $3_{xy}'-0_{xy}'-4_{xy}'$, a cui corrispondono gli assi maggiore $5_{xy}'-0_{xy}'-6_{xy}'$ e minore $7_{xy}'-0_{xy}'-8_{xy}'$, è la proiezione della circonferenza direttrice verticale, ortogonale al piano direttore verticale, definito dalla sezione triangolare $3_{xy}'-V_{xy}'-4_{xy}'$ per l'asse $0_{xy}'-V_{xy}'$, il quale è ortogonale al piano della direttrice e al segmento $A_{xy}'-B_{xy}'$, sezione al vertice V_{xy}' , che è un segmento orizzontale di lunghezza pari al diametro $1_{xy}'-0_{xy}'-2_{xy}'$ della direttrice, alla quale è parallelo.

Il piano xy sezionante il cono secondo il rettangolo $1_{xy}'-0_{xy}'-2_{xy}'-B_{xy}'-V_{xy}'-A_{xy}'$, è di simmetria ortogonale, in proiezione è obliqua nella direzione $3_{xy}'-V_{xy}'-4_{xy}'$ del diametro coniugato a $1_{xy}'-0_{xy}'-2_{xy}'$; quello verticale direttore assiale è pure piano di simmetria ortogonale, in proiezione è obliqua nella direzione $1_{xy}'-0_{xy}'-2_{xy}'$; gli altri piani assiali sono a simmetria obliqua e sezionano la superficie secondo curve passanti per V_{xy}' .

La superficie è generata facilmente; suddivido in parti eguali $1_{xy}'-0_{xy}'-2_{xy}'$ e $A_{xy}'-V_{xy}'-B_{xy}'$, per i punti di $1_{xy}'-0_{xy}'-2_{xy}'$ considero le verticali, incidendo l'ellisse in due punti che congiungo con quello di posto corrispondente su $A_{xy}'-V_{xy}'-B_{xy}'$.

L'insieme mostra che le rette sono sghembe e che il contorno apparente è una curva fittizia a cui contribuiscono diverse generatrici solo per una parte; preceduta da una parte in vista e una nascosta; tale curva, estratta dal volume, dipende dalla po-

sizione del cono rispetto a p e dal rapporto omologico assunto $H-O':H-(O)$.

Se riflettiamo, si può pensare al volume vuoto, alla metà del cono o del vuoto con un piano assiale per $A_{xy}'-V_{xy}'-B_{xy}'$, oppure ortogonale ad esso; le sezioni parallele al piano $3_{xy}'-V_{xy}'-4_{xy}'$, sono triangoli isosceli, quelle parallele al rettangolo $1_{xy}'-0_{xy}'-2_{xy}'-B_{xy}'-V_{xy}'-A_{xy}'$ sono archi a due rami, aperti all'infinito; quelle parallele alla direttrice sono curve chiuse, fra loro non omotetiche; risultano pure curve chiuse quelle prodotte da piani sezionanti una sola falda con giacitura incidente il piano direttore secondo rette parallele a $3_{xy}'-0_{xy}'-4_{xy}'$; sono curve a un solo ramo, aperte all'infinito, le sezioni con piani paralleli a una sola generatrice, escluse $1_{xy}'-A_{xy}'$ e $2_{xy}'-B_{xy}'$.

Illustro una diversa applicazione del conoide; la superficie gobba può essere una copertura di grandi capannoni, realizzati in modo da offrire una vasta superficie di luce dall'alto; il frontespizio è la metà dell'ellisse precedente che si collega con un arco di un'ellisse, omotetica ma a diametri più grandi.

La connessione in complanarità è possibile, se il suo centro o' è ribassato in modo che la corda dell'arco $1_{xy}'-0_{xy}'-2_{xy}'$ risulti uguale e sovrapposta al diametro dell'ellisse frontespizio del segmento successivo, traslata di quella del primo frontespizio.

Utilizzo le stesse suddivisioni e lo stesso processo costruttivo della superficie rigata; il contorno apparente non è una generatrice; alla sua apparenza curva contribuiscono, ciascuna con brevi tratti rettilinei disgiunti e sghembi, numerose generatrici rettilinee consecutive, la cui lunghezza appare in parte in vista, in parte attiva nella formazione della poligonale multipiana, in parte nascosta.

Il profilo apparentemente unico ed effettivamente frazionato è assimilato ad una curva continua, dipendente dalla esposizione rispetto a π , e dal rapporto omologico relativo ad xy ; osserviamo con attenzione le diverse differenze non trascurabili.

Ho detto in precedenza della invertibilità dell'immagine assonometrica ortogonale, a meno di alcuni dettagli, che nell'inversione mutano da apparenti o nascosti a nascosti o apparenti; l'occhio attento riesce a percepire nella ricercata vista dal basso i nuovi vuoti, la vista del primo frontespizio dalla parte interna e non più dall'esterno; la stessa sensazione si coglie per il frontespizio a mezzaluna visto dall'interno.

In figura è accennato il corpo di fabbrica a pareti verticali che fa da imposta alla copertura conoide; nell'inversione nasce lo spigolo di base, che nasconde una parte del primo frontespizio; il profilo curvo del contorno apparente resta invariato; appaiono viste dal basso e dall'esterno la generatrici che dal punto di tangenza proseguono scendendo sull'arco di testa fino all'estremo della semicirconferenza.

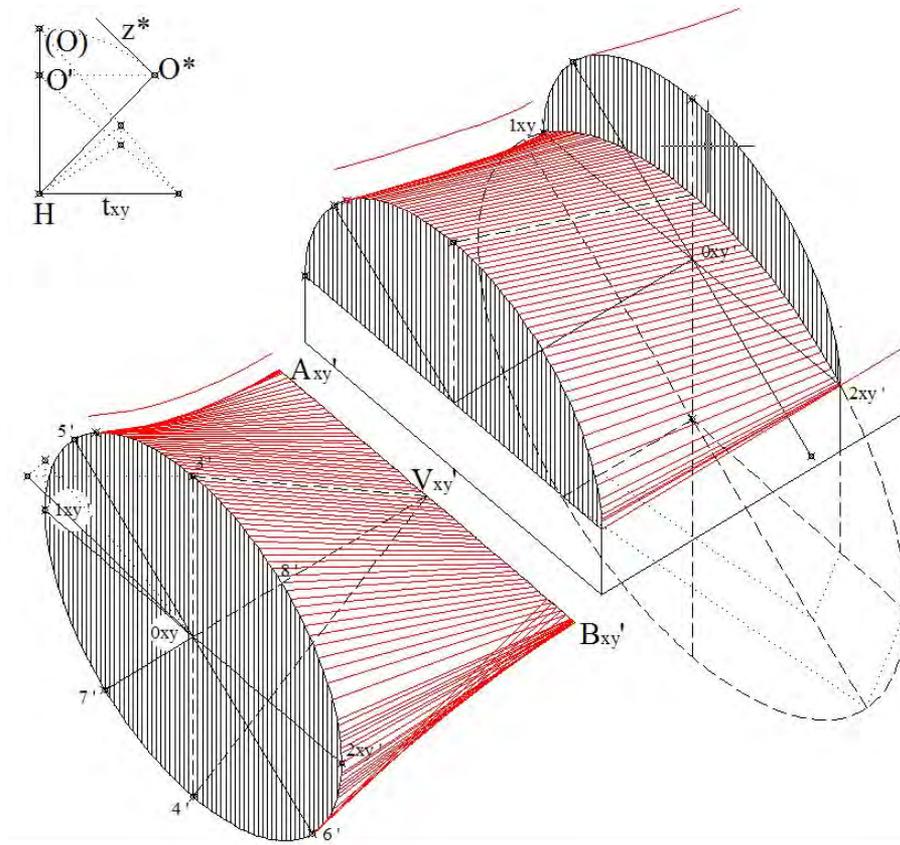


Figura 28

Capitolo 29 – Applicazione I

Ponte-viadotto in assonometria ortogonale panoramica. (fig. 29)

Vogliamo riflettere sulla rappresentazione assonometrica di una grande opera stradale, di dimensioni tali che nella larghezza del campo, legata alla scala del disegno, ricada oltre i limiti disponibili.

Sappiamo che nel senso della profondità i limiti sono definiti dal rapporto omologico e se un viadotto a numerose campate è rettilineo, in vista longitudinale ne è possibile la vista apprezzabile, se scegliamo la proiezione dell'asse secondo la diagonale del campo.

Se ne può ottenere la vista, compressa a volontà, giocando non solo sulla scala, che vincola l'esposizione in larghezza, ma anche sul rapporto omologico, che rende flessibile la rispondenza al disegno di una qualsiasi profondità voluta.

Rappresentiamo un viadotto largo 20 m., a campate di 30 m., il cui asse, fra due tratti rettilinei, si sviluppa in un ampio arco di circonferenza c_a , di centro o_{xy} , e raggio di 200 m.

Stabilita sulla retta orizzontale t_{xy} del campo l'unità della scala frontale $u=H-I=10m.$, la larghezza disponibile è di 100 m.; il raggio $2 \cdot o_{xy}$ della circonferenza assiale c_a , che è anche semiasse maggiore della corrispondente ellisse e_a , ricade in buona parte fuori campo.

Si può riportare tutto in campo, riducendo la scala frontale, ma, così facendo, si miniaturizza l'immagine con sensibile degrado percettivo; non è ciò che vogliamo.

Scelto o_{ixy} , centro dell'arco della curva circolare assiale della strada di raggio dimezzato, alla scala prefissata, operando sul sistema ridotto, dall'arco di ellisse e_{ia} di semiasse maggiore $2' \cdot o_{ixy} = 10$ (H-I) ricavata dalla circonferenza omologa c_{ia} , otteniamo i punti della ellisse e_a .

Nel riferimento H-O':H-(O), il semiasse minore $o_{ixy} \cdot 3_{ie}$ della e_{ia} si ottiene utilizzando la H-O*; dobbiamo riportare sulla c_{ia} la suddivisione a mezze unità, che nella c_a sarebbero unità intere.

Per esempio, dal 10_a^* della c_a^* , a 10 unità da $2'$, ricavo l'omologo 10_{ea} sulla e_a ; se il centro e molti punti della c_a^* sono fuori campo, non la utilizziamo.

Ci riferiamo al 10_{ci} della c_{ia}^* , a 10 mezze unità da $2'$, sapendo che $2(2' - 10_{ci}) = 2' - 10_a^*$ di c_a^* ; sulla e_{ia} dal 10_{ci} si ottiene 10_{ei} ; $2(2' - 10_{ei})$ ricava il 10_{ea} .

La direzione $10_{ei} - o_{ixy}$ è radiale anche per la e_a in 10_{ea} ; l'ampiezza della semicarreggiata, pari ad $u=10$ m. si riporta sulla $10_{ci} - o_{ixy}$ e si proietta in $u_{10} = 10_{ea} - 10_d$; la u varia secondo la direzione radiale

La tangente in 10_{ea} ha la direzione coniugata ad r' e tale resta per gli estremi destro 10_d e sinistro 10_s della sezione stradale; le dimensioni del pilone verticale, longitudinali secondo la tangente e trasversale secondo la r' si ottengono per omologia; l'altezza del pilone è accorciata secondo z^* .

A partire dal punto 16_{ea} , l'asse continua rettilineo secondo la tangente; dal 16_{ci} della c_{ia}^* si va in 16_{ei} sulla e_{ia} ; segue $2' - 16_{ei} - 16_{ea}$; la u si dispone secondo la $s^* = 16_{ci} - o_{ixy}$, la u_{16} si ottiene sulla direzione $s' = 16_{ei} - o_{ixy}$.

La tangente in 16_{ea} è parallela alla n' coniugata ad s' e omologa della n^* ortogonale ad s^* ; dal 16_{ea} si susseguono costanti gli intervalli unitari u_{ar} , il cui accorciamento è ottenuto come n' da n^* .

Ripetendo per tutti i punti della suddivisione riportata sulla c_{ia}^* ottengo altrettante sezioni radiali; l'esercizio va completato di spessori, sbalzi, cigli, ringhiere, muretti, reti frangivento, tombini, cunette, travi scatolari con canali e condotte di servizio, siepi antiabbaglianti, etc.

I punti dell'arco che precede il $2'$ sono simmetrici di quelli già ricavati; da un certo punto inizia un altro rettilineo, in tangenza alla curva nel suo estremo; si ricava come in 16_{ea} ; la curva

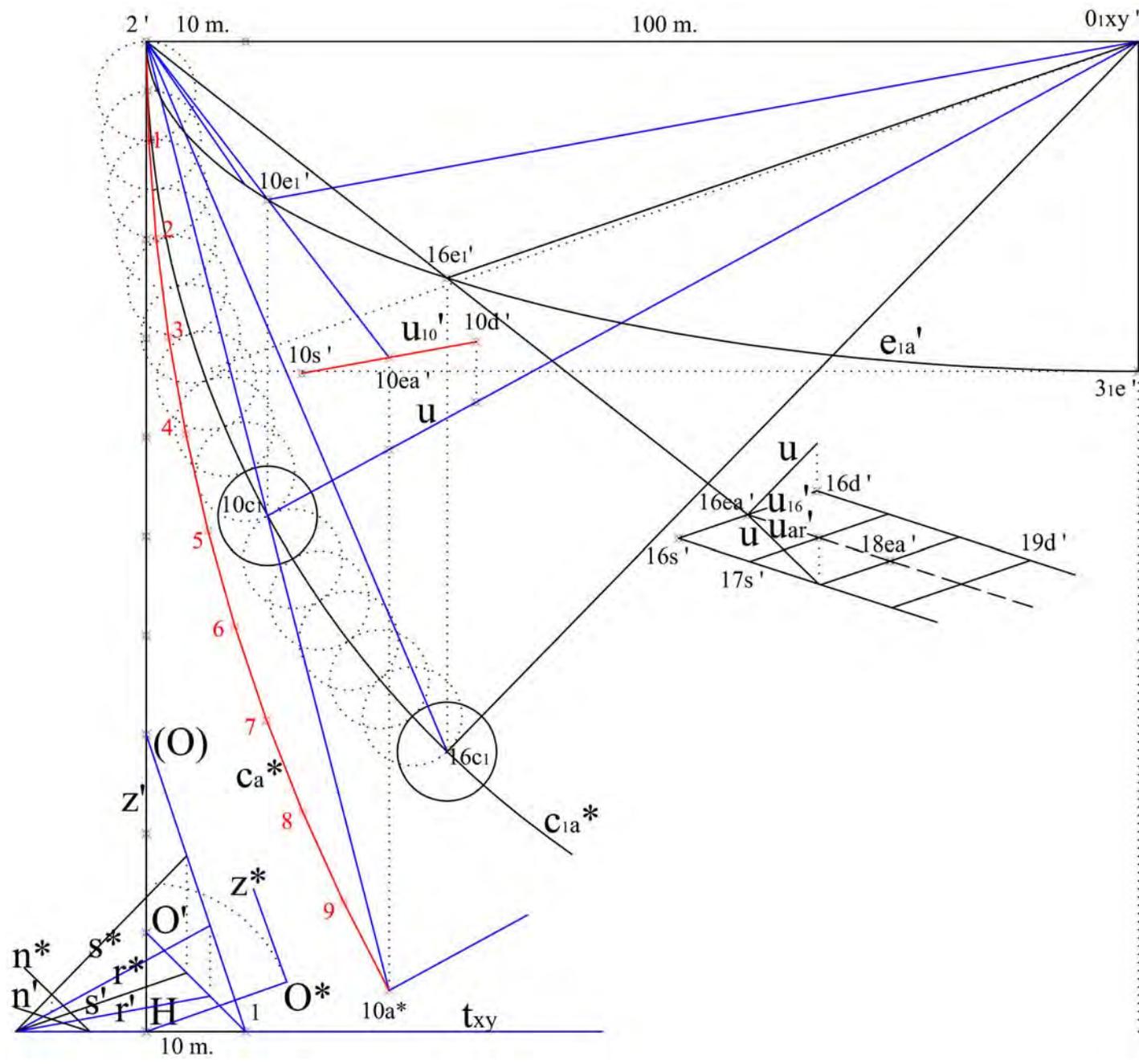


Figura 29

può avere un punto di flesso, in cui cambia verso di curvatura; i suoi punti si ottengono per simmetria rispetto al flesso; nel flesso può interporsi un rettilineo; i punti dell'arco di curvatura inversa si ricavano ancora per simmetria.

La curva può avere diverse curvature e per ogni valore di raggio si ripete l'iter costruttivo già discusso; più complessa è la rappresentazione per curvatura gradualmente variabile come si presenta nei raccordi tra rettilinei e archi circolari.

La curva con pianta orizzontale a corona circolare ed asse ad

elica è un elicoide; un rettilineo può presentare un dosso o una cunetta, con profilo assiale su piano verticale circolare o a curva di raccordo a clotoide, arco parabolico, catenaria, etc.

Uno svincolo, un bivio, un cavalcavia, un sottopasso, una galleria paramassi, una scarpata in scavo o in riporto, l'insediamento dei piloni su terreni articolati o in acqua, un'intersezione non a livello, sono diversivi che si offrono a corollario di questo avviamento di problematiche di un'immagine che deve essere completata.

Capitolo 30 – Applicazione II

Applicazione architettonica. (fig. 30)

In assonometria ortogonale diretta possiamo operare correttamente anche al di fuori dei precedenti schematismi, con più libertà e spontaneità, raccontando e non traducendo, inventando, immaginando, portando avanti una rappresentazione che si evolve, agganciandosi ed esprimendo i capricci del pensiero, imprevedibile.

Stabilisco il rapporto omologico (O)-O'-H, la t_{xy} , la $1-(O)=(r)$ su (xy), ribaltamento di xy su π e l'omologa $1-O'=r'$ di $x'y'$, proiezione di xy su π , T_x-T_y , 2-4-3, 3-4-O*-z*, per il 5 la x' parallela a T_x-4 e la y' parallela a T_y-4 ; comincio il racconto.

C'è un muretto parallelepipedo retto e ne stabilisco direttamente in proiezione le proporzioni; per le dimensioni posso subito ricavarle, conducendo le parallele a (x), (y), z*; per non essere banale e in piena libertà fisso sulla facciata in vista 6-7-8= $z'-x'$ il punto 9, centro di una circonferenza, pensandola di giacitura zx e ribaltata; essa ha il raggio 9-10 in vera grandezza e da essa trarrò gli elementi per scavare nel muretto e per il suo spessore un arco semicilindrico retto; questo sarà delimitato da due semiellissi; il loro semiasse maggiore è il raggio 9-10 parallelo alla traccia t_{zx} ortogonale a y' .

Una pausa di riflessione; potevo dare il diametro 11-9-12 secondo x' e ricavarli il raggio 9-10; potevo dare il semidiametro verticale e tramite z* ricavare il corrispondente raggio vero, uguale a 9-10; sono stata e sono libera di scegliere la via.

Per l'omologia fra l'ellisse costruenda e la circonferenza concentrica, ricavo il semiasse minore 9-17 si accorcia il raggio 9-11 parallelo a z* in semidiametro verticale 9-12, con 11-12 orizzontale; per il 12 considero l'ortogonale al semiasse maggiore 9-10 intersecando la circonferenza omologa in 13; scelto sull'asse di omologia 9-10 il 14, ottengo le rette omologhe 14-12 e 14-13;

considero il raggio 9-15 ortogonale al 9-10; con la 15-16 parallela alla 13-14 e la 16-17 parallela alla 14-12 ricavo il semiasse minore 9-17 e la semiellisse 18-10-19; per traslazione del centro 9 in 20 ottengo la semiellisse 21-24-22; ne è in vista solo l'arco 22-23; attenzione alle trasparenze: va segnato 10-24, generatrice di contorno apparente della cavità cilindrica.

Non posso complicare la figura; la fantasia può suggerirmi di sostituire il segmento retto di generatrice 19-22 con una poligonale fratta da sporgenze e rientranze, rette od oblique, simmetriche o non; le ellissi, ovviamente si moltiplicano, genero altre superfici cilindriche, superfici coniche, superfici a direttrici comunque curve, ondulate, troncate, con canalette, etc.; posso pensare ad un arco circolare minore o maggiore di metà, e perché no, ad una semiellisse proiezione di una semiellisse reale.

Realizziamo i tre gradini di una scala ad angolo retto, con tre alzate verticali di giacitura yz e zx e due pedate di giacitura xy; stabilisco il rapporto fra sporto di pedata e alzata di due a uno; stabilite le tre alzate sulla parallela a z*, si proiettano sulla verticale e per essi considero le parallele a x' , arretrando di una pedata per il primo gradino e di un'altra per il secondo; lo sporto di pedata si ricava riportando il doppio dell'alzata sulla parallela a (x) e accorciando secondo x' ; per l'altro senso si procede con la parallela a (y) e accorciando secondo y' ; i differenti accorciamenti si evidenziano negli arretramenti ad angolo; sulla stessa pedata i punti vertici d'angolo stanno sulla proiezione della retta a 45° , che si può ottenere bisecando l'angolo di 90° in 2, intersecando con t_{xy} e unendo con 4; le varie vie possono consentire, eventuali controlli in itinere.

L'angolo in 5 posso pensarlo diverso e la diagonale ha la direzione omologa alla bisettrice dell'angolo voluto e riportato da (x) in 2; l'ampiezza delle pedate posso stabilirla in proiezione e proporzionare le alzate; per piccole immagini non è possibile rilevare la pendenza necessaria al piano del calpestio a partire da 8, punto più alto; è un problema, che, comunque, mi devo porre; in 5 posso sostituire il vertice con arco.

Sul muro di fondo, con giacitura yz e traccia ortogonale a x' , mi sembra opportuna un vano di porta ad arco con imbotte cilindrica retta; prevedo contrapposti due stipiti piani verticali, ortogonali al paramento frontale, sui quali si imposta la superficie cilindrica delimitata da due semiellissi, quella anteriore ricavata come si è fatto per la 18-10-19; la 25-26 è la generatrice di contatto in tangenza fra piano di stipite e imbotte e non va segnata; non va segnata la 27-28 generatrice di colmo, mentre anche se in trasparenza va segnata la 29-30 generatrice di contorno apparente.

Le considerazioni svolte per il profilo 19-22 valgono anche per il tratto di generatrice 27-28; posso arricchire il prospetto con cornice in aggetto comunque sagomata, moltiplicandola in

ghiere, intere o frazionate, a battente per infisso, concentriche e non, ribassate o rialzate, ad archi con flesso, con cuspidi, etc.; liberi di proporre.

Il pavimento a livello, che dal pianerottolo di arrivo dopo i gradini porta al di là del vano, mostra, centrato, una circonferenza racchiudente un giuoco geometrico di segmenti radiali ed archi circolari dello stesso raggio della circonferenza perimetrale. L'ellisse sulla giacitura xy ha l'asse maggiore parallelo a t_{xy} e il semi-asse minore ottenuto per accorciamento del raggio parallelo a $3-O^*$; gli archetti sono ricavati per traslazione dell'ellisse perimetrale. Sul piano $x'y'$, esterno al manufatto, ho proposto una vaschetta cilindrica a 2 gradini e fondo tronco-conico; vediamo cinque ellissi, la prima in vista, le altre solo in parte.

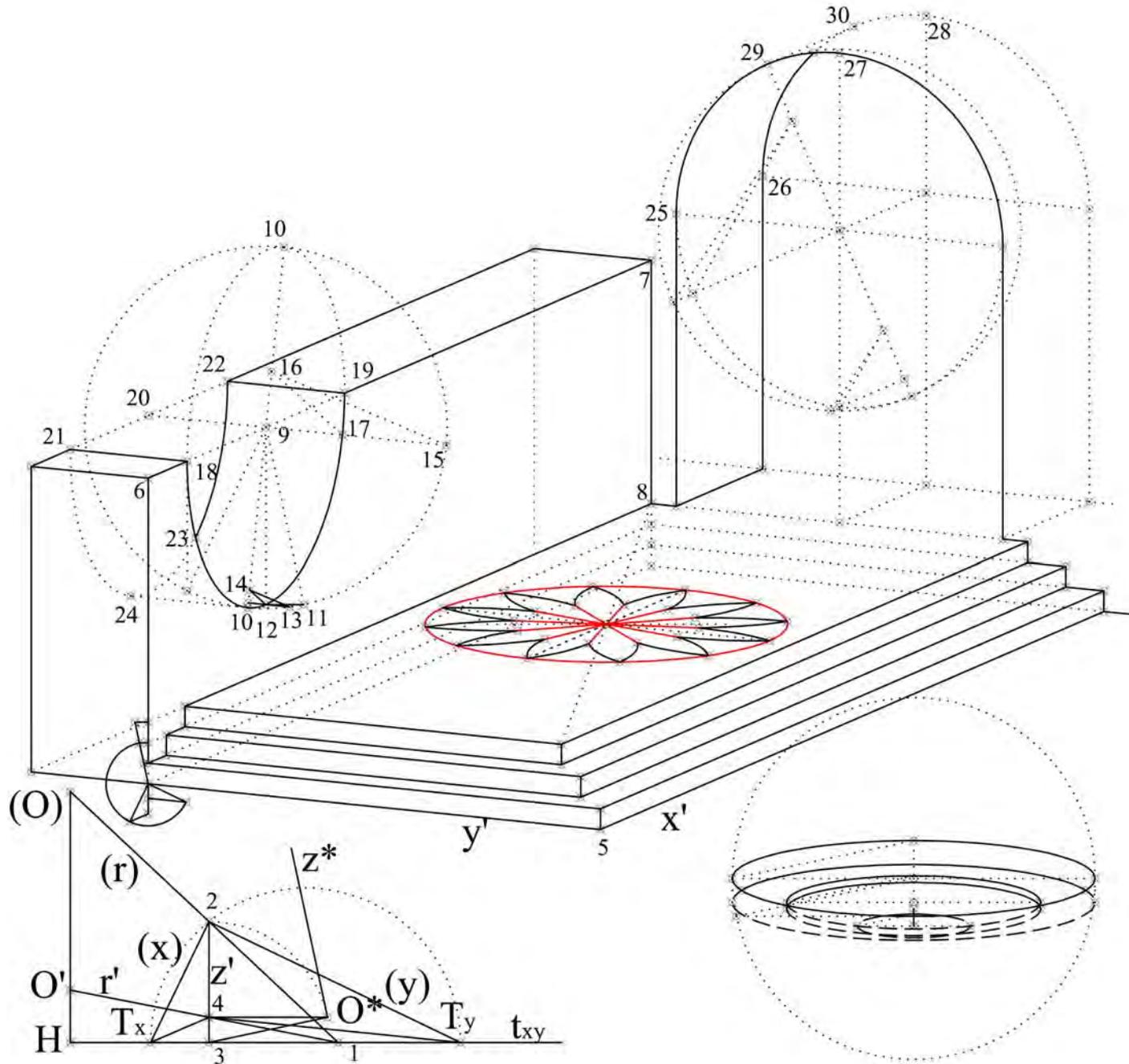


Figura 30

La geometria e le sue applicazioni in architettura



Akron Art Museum Ohio, USA.
(Compenetrazione di solidi, piani generici e loro intersezioni, solidi irregolari)



**Hironaka House, Tokyo, Giappone.
(Poliedri irregolari)**



**Il bosco della speranza, Bogotá, Colombia.
(Dodecaedro tronco)**



**Il bosco della speranza, Bogotá, Colombia.
(Dodecaedro tronco)**



Daniel Libeskind, Royal Ontario Muesum, Toronto, Canada.
(Piramide, prisma irregolare, penetrazione, aggregazioni, intersezione, smusso, troncatura)



Ziggurat Piramide, Dubai, architettura sostenibile (progetto)
(Piramide, intersezione, sottrazione)



Isola di cristallo, Mosca. (progetto)
(porzione di iperboloide stellato)



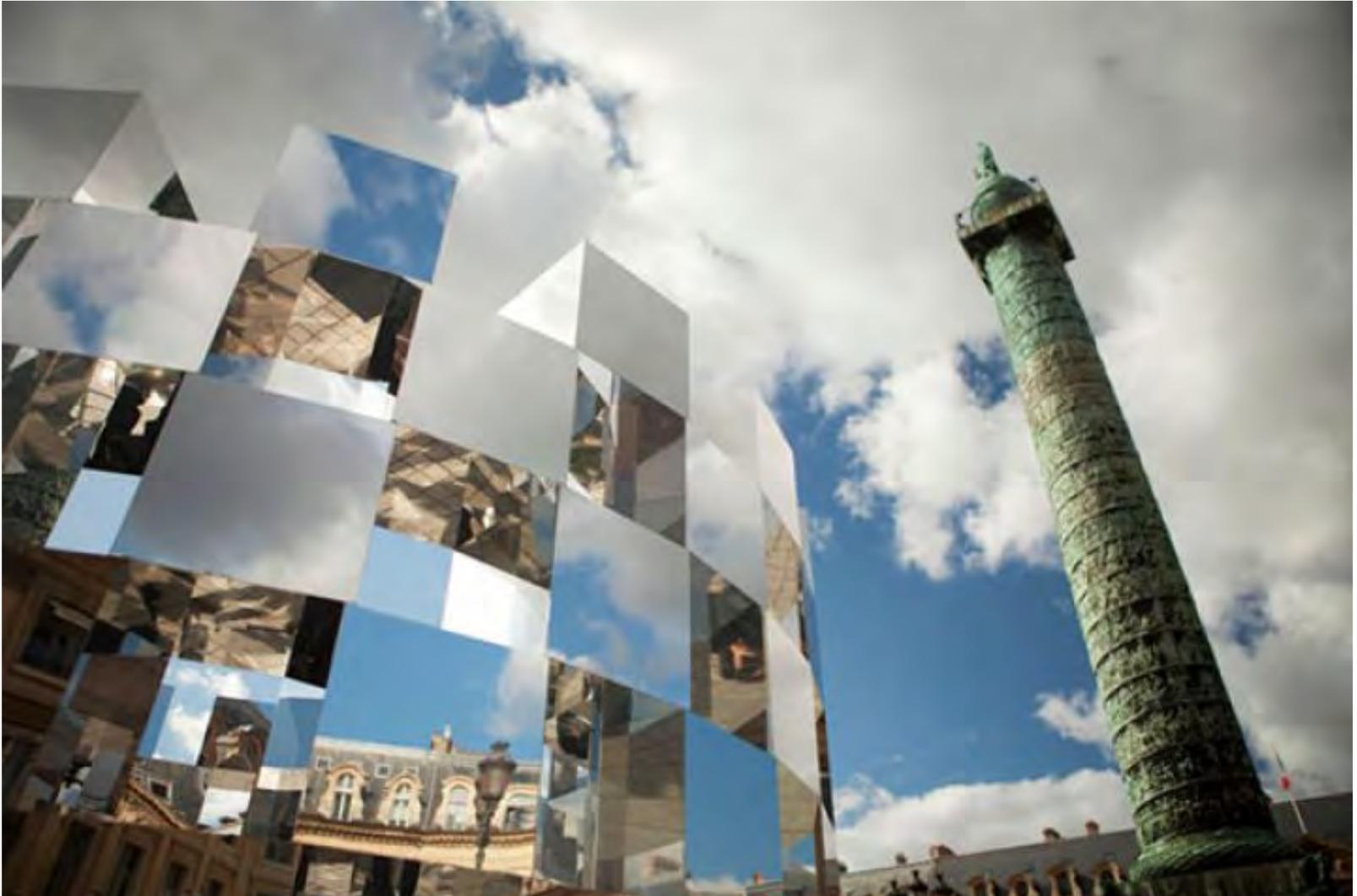
Eglise romane de st. Martin de Londres, France
(elementi prismatici, porzioni di cilindro, raccordi, troncature, intersezioni, compenetrazioni)



Piramide del Louvre, Parigi, Francia
(pentaedro, piramide, composizione geometrica, triangolo equilatero, tetraedro)



Piramide della pace di Astana, Kazakistan.
(pentaedro, piramide, composizione geometrica, triangolo equilatero, tetraedro)

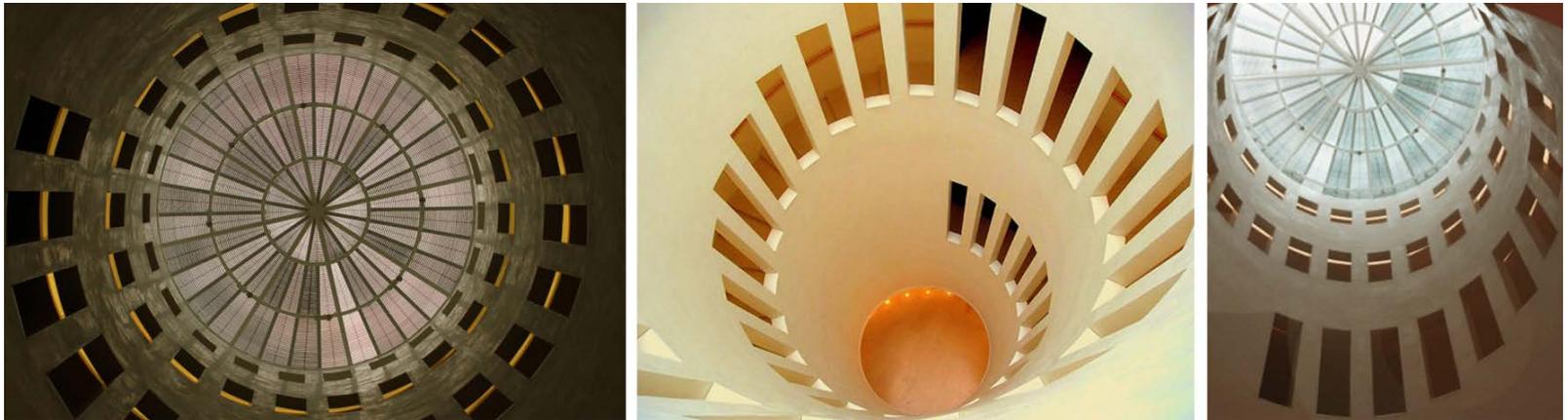


Edificio esposizione Audi, Parigi 2011, France.
(cilindro, generatrici e direttrici, superfici riflettenti, cavità)



Z10 towers, Golfo Persico, progetto.

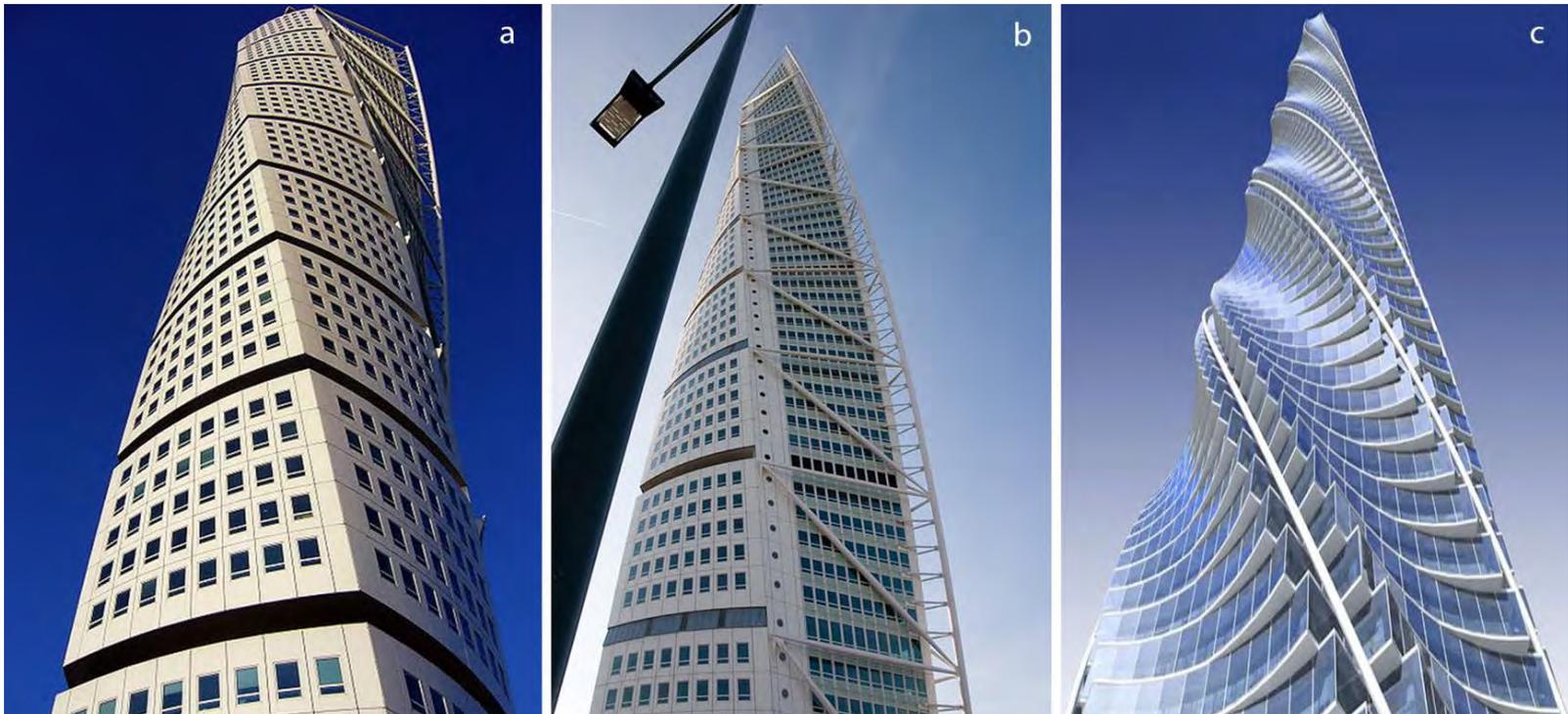
(Cilindro obliquo, intersezioni prisma- cilindro obliquo, suddivisione reticolare della superficie laterale di un cilindro obliquo)



**Museo d'arte Samsung Seoul, Corea del Sud.
(Elica/elicoide conica, cono, tronco di cono, aggregazione)**



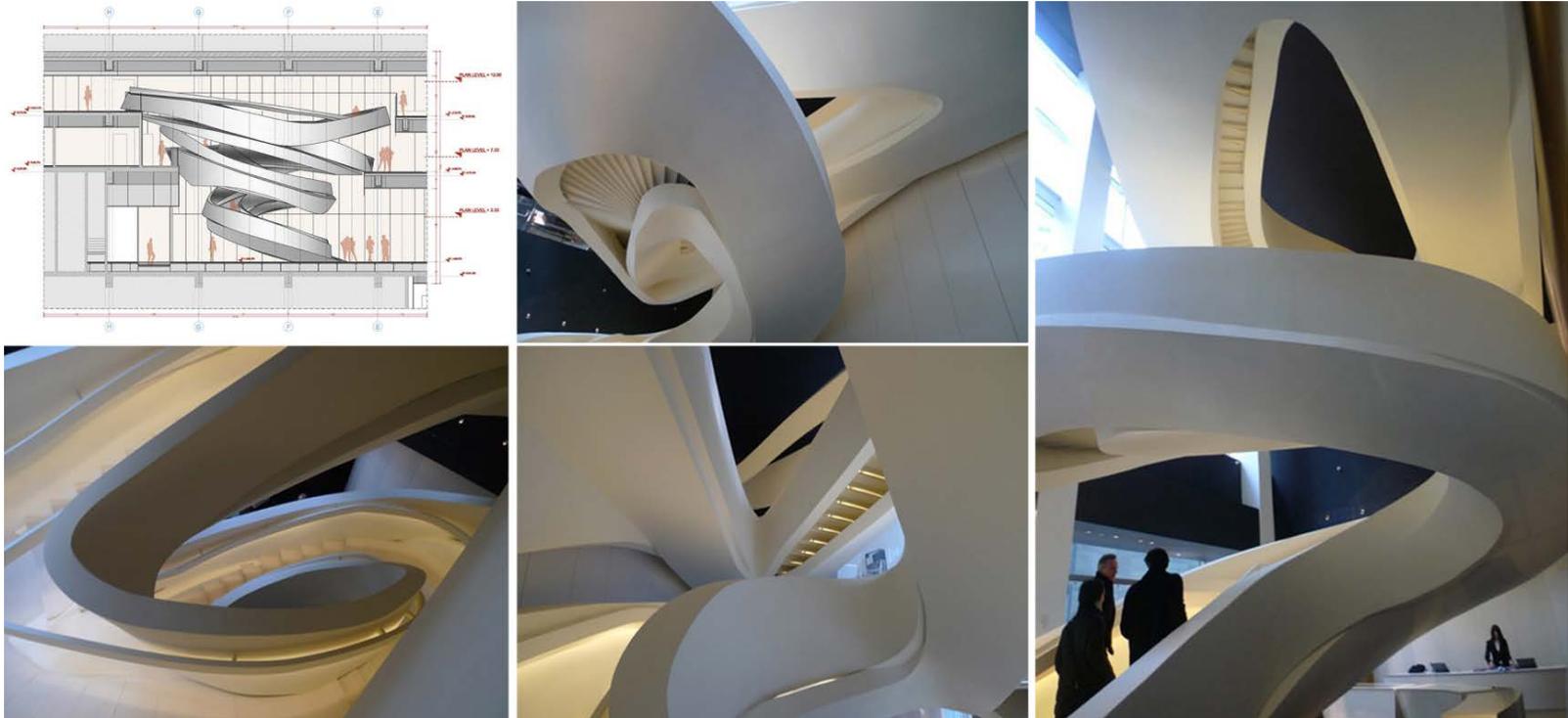
Musei Vaticani, Roma, Italia.
(elica, elicoide)



Turning Torso Chicago Spiral, Chicago, USA
(torsione, elicoide conica, piani direttori)



Abbazia di Melk, Melk, Austria.
(elicoide)



Armani store, New York, USA
(elicoide irregolare conica)



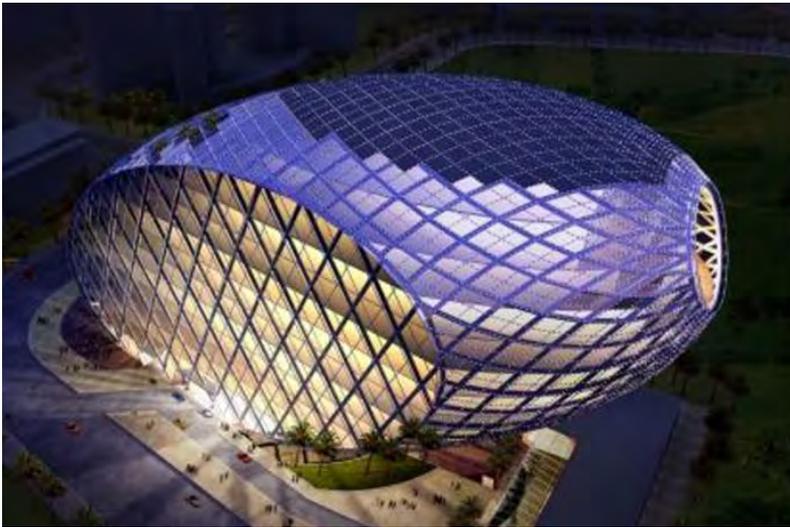
London City Hall, Londra, Inghilterra
(geometrie irregolari, ellissoide, elicoide ellittica)



a) Scala elicoidale nella Certosa di Padula, Italy; b) Scala elicoidale nel Castello di Hartenfels, Torgau, Germany;
c)- d) Museo del Pobo Galego, Santiago de Compostela, Spagna.
(elicoide)



National Centre for the Performing Arts, Beijing, Cina.
(ellissoide, simmetria, immagini riflesse)i



Cybertecture Egg, Mumbai, India.
(ellissoide, intersezione, smusso)



Distillerie Nardini, bassano del Grappa, Vicenza, Italia.
(ellissoide, aggregazione)



Grand Lisboa hotel Macau, Cina.
(ellissoide, eggregazioni, intersezioni, iperboloido iperbolico)



Henan Art Center, Zhengzhou, Cina.
(ellissoide, ovoide)



Infosys Building, Hinjewadi, Pune, India.
(Ellissoide, aggregazione, intersezione)



Museo del jurásico de Asturias (MUJA), Rasa de San Telmo, Colunga, España.
(porzioni di ellissoidi, intersezioni, aggregazioni)



**Arndale Bridge over Corporation Street, Manchester, England.
(iperboloide iperbolico)**



**Cantom Tower near Chigang Pagoda, Haizhu District, Guangzhou, Cina.
(iperboloide iperbolico)**



**Tall Poplar Tree, Astana, Kazakhstan.
(iperboloide iperbolico)**



**Tall Poplar Tree, Astana, Kazakhstan.
(iperboloide iperbolico)**



Television Tower, monte Jested, Liberec, Repubblica Ceca.
(iperboloide iperbolico)



Sede BMW, Monaco.
(iperboloide iperbolico, aggregazione, intersezione)

Bibliografia

- ALBEGGIANI M. (1926), *Applicazioni della geometria descrittiva*, Palermo.
- VAGNETTI F. (1947), *La prospettiva lineare*, Roma.
- BRION-GUERRY L. (1962), *Jean Plérier viator sa place dans l'histoire de la perspective*, Paris.
- DE FIORE G. (1964), *Teoria della rappresentazione architettonica*, Facoltà di Architettura di Roma
- CAPITANO V. (1996), *Considerazioni omologiche nella prospettiva centrale su quadro inclinato*, Facoltà di Ingegneria di Palermo
- DE FIORE G. (1967), *Dizionario del disegno*, Brescia
- FILOSTO R. (1968), *Lineamenti teorici del disegno*, Palermo
- CAPITANO V. (1972), *Applicazioni di geometria proiettiva e descrittiva nel disegno delle forme geometriche elementari*, Palermo
- DE SIMONE M. (1973), *Percezione e disegno*, Palermo
- FILOSTO R. – INZERILLO M. (1974), *Contributo dell'omologia nella rappresentazione grafica*, Palermo
- DE RUBERTIS R. (1975), *Geometria Descrittiva*, Roma
- INZERILLO M. (1977), *Lezioni di Applicazioni di Geometria Descrittiva*, Palermo
- INZERILLO M. (1977), *Lezioni di Teoria del Disegno Prospettico*, Palermo
- SACCARDI U. (1977), *Applicazioni di Geometria Descrittiva*, Firenze
- INZERILLO M. - D'ALESSANDRO M. (1978), *omologia e rette limiti nella prospettiva delle immagini riflesse*, Palermo
- D'ALESSANDRO M. (1979), *Omologia nella prospettiva della sfera*, collana di studi di disegno della Facoltà di Ingegneria di Palermo
- FILOSTO R. – INZERILLO M. (1979), *Riduzione diretta in prospettiva di aree e volumi*, collana di studi dell'istituto di disegno della Facoltà di Ingegneria di Palermo
- INZERILLO M. – BUCCHERI F. (1980), *un'interpretazione della prospettiva: la sfera*, Palermo
- CUNDARI C. (1983), *Teoria della Rappresentazione dello spazio architettonico, applicazioni di geometria descrittiva*, Roma
- INZERILLO M. – D'ALESSANDRO M. – PIZZURRO P. (1983), *omografia e prospettiva*, Facoltà di Ingegneria di Palermo
- BONANNO L. – D'ALESSANDRO M. (1985), *Fra geometria e percezione*, Facoltà di Ingegneria, Palermo
- DOCCI M. (1985), *Manuale di disegno architettonico*, Bari
- DOCCI M. – MIGLIARI R. (1992), *Scienza della rappresentazione*, Roma
- SGROSSO A. (1996), *La rappresentazione geometrica dell'architettura, applicazioni di geometria descrittiva*, Napoli
- INZERILLO L. (2004), *Procedure di costruzione della prospettiva nel progetto del disegno*, in *Disegnare idee e immagini*, n. 28, Gangemi editore, Roma
- MIGLIARI R. (2008), *Prospettiva dinamica interattiva*, (a cura di), edizioni Kappa, Roma
- DOCCI M. – GAIANI M. – MAESTRI D. (2011), *Scienza del Disegno*, Città studi edizioni, Novara
- INZERILLO L. (2012). *The Ellipsoid in Orthogonal Axonometric: Homology Application*, in *DISEGNARECON*, ISSN 18285961, vol. 5 n° 9, 2012, pag. 335-342. Autorizzazioni del Tribunale di Bologna n. 7896 del 30/10/2008
- Di PAOLA F - INZERILLO L. (2012). *Hyperboloid and Paraboloid in Orthogonal Axonometric*, in proceeding in "The 15th International Conference on Geometry and Graphics, Montreal, Canada, 1-5 August 2012, ISBN: 978-0-7717-0717-9

Sitografia

www.nettuno.it Corso di Disegno per Ingegneria Civile ed Architettura.

www.micheleinzerillo.eu

Finito di stampare nel mese di novembre del 2012
dalla «ERMES. Servizi Editoriali Integrati S.r.l.»
00040 Ariccia (RM) – via Quarto Negroni, 15
per conto della «Aracne editrice S.r.l.» di Roma