

# La distribuzione di Maxwell-Boltzmann: i risultati di una sperimentazione svolta nell'ambito dei corsi di laurea in ingegneria

**Onofrio Rosario Battaglia**

UOP\_PERG (University of Palermo Physics Education Research Group)  
Dipartimento di Fisica, Università di Palermo, Italia

E-mail: [battaglia@difter.unipa.it](mailto:battaglia@difter.unipa.it)

## **Abstract.**

This paper describes the outcomes of an teaching experiment conducted in the seminar held at the Faculty Engineering of Palermo University. The theme of the seminar focused on undergraduate experiment that yields the velocity distribution of thermionic electrons by analyzing the I-V characteristics of diodes and triodes. By using a simple model, the velocity distribution of thermionic electrons emitted by the vacuum tube cathode can be described by Maxwell's distribution. The experiment allows students to focus on the distribution function more than on difficulties arising from the complexity of thermionic emission.

## **Riassunto.**

Questo articolo descrive i risultati di una sperimentazione didattica condotta in un seminario tenutosi presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università di Palermo.

La tematica del seminario è stata concentrata su di un esperimento attraverso cui ottenere la distribuzione di velocità degli elettroni termoionici, analizzando le caratteristiche I-V di diodi e triodi. Utilizzando un semplice modello, la distribuzione della velocità degli elettroni termoionici emessi dal catodo tubo a vuoto può essere descritta dalla distribuzione di Maxwell. L'esperimento permette agli studenti di concentrarsi sulla funzione di distribuzione piuttosto che sulle difficoltà derivanti dalla complessità dell'emissione termoionica.

## **1 Introduzione**

La distribuzione di Maxwell-Boltzmann è uno dei temi più rilevanti dei corsi di termodinamica e meccanica statistica poiché mostra come le proprietà misurabili dei gas siano derivabili dalla media delle velocità di tutte le molecole nel gas.

Di notevole importanza è l'ambito all'interno del quale lo strumento distribuzione è utilizzato. Nell'ambito delle scienze statistiche, ad esempio, risulta utile fare una distinzione fra la statistica descrittiva, attraverso cui si studia un fenomeno aleatorio ma ben definito, e la statistica inferenziale, in cui il fenomeno aleatorio è anche sconosciuto. Nel primo caso si possono soltanto identificare alcune caratteristiche dei fenomeni collettivi. Nel secondo caso, osservando un certo comportamento e attraverso i concetti della teoria delle probabilità, si tenta di risalire alla conoscenza delle parti mancanti.

La distribuzione può essere vista, inoltre, come una lente attraverso cui osservare le variazioni che avvengono nel mondo reale, dopo però averli rappresentati sotto forma di set di dati [1]. I set di dati non sono altro

che le frequenze con cui una data grandezza può essere ripartita, pervenendo quindi ad una distribuzione di frequenze.

Ma da dove ha origine questa variabilità dei dati? In generale possiamo affermare che queste variazioni sui dati o sono reali, cioè caratteristiche di un dato sistema, oppure indotte, ad esempio a causa degli strumenti di misura.

In relazione a come si perviene ad una data distribuzione è possibile distinguere fra due tipi di approccio. Quelle di tipo teorico e quello empirico o di frequenza. Le distribuzioni empiriche contengono le variazioni che si possono osservare direttamente in un set di dati. In questo caso, non si fanno in alcun modo delle inferenze, ma soltanto una descrizione dei dati raccolti. Nel caso del secondo approccio, di tipo teorico, attraverso un modello che fa uso della teoria delle probabilità si cerca di interpretare un dato fenomeno con una distribuzione che può essere ad esempio quella parametrica, o quella normale, ecc.

Nel cercare di adattare la distribuzione ottenuta da un modello a dei dati sperimentali risulta spesso indispensabile fare delle inferenze statistiche. Bisogna notare che in diversi manuali di meccanica statistica spesso questa distinzione fra i due diversi approcci non è ben evidenziata. Inoltre, in molti casi non si fa sufficientemente chiarezza sul significato statistico o probabilistico da assegnare alla funzioni matematiche utilizzate.

Un'analisi storico-epistemologica dei lavori di Maxwell mette in evidenza l'ambiguità prima menzionata. L'interpretazione moderna dei suoi lavori converge spesso verso una giustificazione delle ipotesi di tipo probabilistico, nonostante egli non abbia (forse) mai veramente accettato gli strumenti della teoria della probabilità e si sia mosso con una certa indecisione utilizzando concetti di tipo probabilistico senza mai farne riferimento esplicito.

Inoltre, sia Maxwell che Boltzmann affrontano il problema soltanto da un punto di vista teorico; essi ricavano la distribuzione di velocità di un gas perfetto facendo delle considerazioni basate su di un modello di gas in cui si presuppone che le particelle possano interagire soltanto per gli urti perfettamente elastici, ed in cui le componenti delle velocità ortogonali fra loro siano linearmente indipendenti (nel senso dell'algebra lineare o statistico). Anche i libri di testo difficilmente propongono lo studio delle distribuzioni di velocità o di energia basandosi su una metodologia sperimentale. È noto che Maxwell derivò la legge di distribuzione nel 1860, ma Miller e Kusch [2] eseguirono la prima rigorosa dimostrazione sperimentale, ancora valida oggi, quasi 100 anni dopo. In seguito, furono condotti altri esperimenti [3] utilizzando diversi analizzatori meccanici di particelle, atti a selezionare le velocità da una vasta gamma di valori possibili.

Esperimenti pensati per scopi didattici [4] usano oggi simulazioni meccaniche, in cui le molecole sono rappresentate come palline di metallo o di vetro agitate da un vibratore meccanico, e messe in condizione di rimbalzare sulle pareti interne di un certo volume.

Diverse sono state negli ultimi anni le pubblicazioni scientifiche nelle quali è stato affrontato il problema della costruzioni di sistemi atti alla determinazione sperimentale della distribuzione di un sistema di particelle. Questi sistemi possono essere suddivisi in due grandi categorie: la prima che fa uso di apparati di tipo meccanico; la seconda di tipo elettromagnetico. La prima tipologia di apparati risulta essere molto più complessa della seconda, sia costruttivamente che dal punto di vista della comprensione del funzionamento. Inoltre, tali metodi sperimentali richiedono spesso apparecchiature sofisticate e costose.

Come emerge dall'analisi delle pubblicazioni, comunque, anche i metodi che fanno uso di sistemi elettromagnetici spesso risultano complessi o non pienamente coerenti. Alcuni, infatti, utilizzano apparati di difficile reperibilità nei laboratori didattici universitari o, peggio ancora, scolastici, altri hanno come obiettivo soltanto la verifica della distribuzione di Maxwell, ma non permettono di determinarla esplicitamente.

La nostra proposta didattica nasce dalla necessità di approcciarsi alla tematica delle distribuzioni attraverso un metodo sperimentale e fa uso dei metodi della famiglia dei metodi “elettromagnetici”. Si propone un percorso sperimentale e di analisi dei risultati sperimentali in cui gli studenti possano concentrarsi sulla funzione di distribuzione molto più che sulle difficoltà derivanti dalla complessità del fenomeno di emissione termoionica.

A partire da una analisi sperimentale, si risale alla distribuzione statistica del gas di elettroni emessi per effetto termoionico, rappresentativa di una caratteristica intrinseca del sistema studiato. La nostra analisi cerca di chiarire inoltre la natura del sistema analizzato, considerandolo come un campione rappresentativo dell'intera popolazione, motivo per il quale è necessario fare delle inferenze di tipo statistico. Per fare questo bisogna definire un modello per il sistema studiato e definire quindi la distribuzione di probabilità a cui questo deve obbedire.

Nei prossimi paragrafi saranno descritti brevemente i dettagli fisici e concettuali della nostra proposta. Inoltre, si descriveranno i risultati di una sperimentazione didattica effettuata su un campione di studenti della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Palermo.

## 2 Il modello e l'esperimento

In tubi a vuoto, come diodi e triodi, la selezione di elettroni emessi entro un dato intervallo di velocità può essere facilmente effettuata utilizzando i potenziali ritardanti e misurando le variazioni nella corrente elettronica. In questo modo, analizzando le variazioni di corrente in un tubo a vuoto ad una temperatura appropriata per l'emissione termoionica è possibile determinare la distribuzione del gas di elettroni e mostrare come questa verifichi la legge di Maxwell.

È stato dimostrato da L. H. Germer [5] e O. W. Richardson [6] attraverso degli esperimenti divenuti ormai storici che la distribuzione di velocità iniziale di elettroni termoionici in alto vuoto ha, con buona approssimazione, componenti di velocità che seguono la legge di Maxwell-Boltzmann. Infatti mentre gli elettroni all'interno di un conduttore si comportano come un gas di Fermi degenere, quelli emessi dalla superficie costituiscono la componente più energetica, localizzabile nella coda della distribuzione suddetta la quale può approssimarsi ad una distribuzione di Maxwell-Boltzmann opportunamente definita.

Gli elettroni liberi in un metallo a temperatura  $T$ , che riescono a superare una barriera di  $\varphi$  volt al di sopra del livello di Fermi, forniscono una densità di corrente,  $J_o$ , descritta dall'equazione di Richardson (vedi rif. [6])

$$J_o = AT^2 e^{\frac{-e\varphi}{kT}} \quad (1)$$

dove  $A = 120,4 \text{ A cm}^{-2} \text{ K}^{-2}$ ,  $\varphi$  è l'effettiva barriera misurata rispetto al livello di Fermi ed  $e$  la carica dell'elettrone.

In molte pubblicazioni, ormai datate, è affrontato il fenomeno della corrente termoionica in tubi a vuoto, sia da un punto di vista teorico [7] che sperimentale [8], quando fra gli elettrodi è applicato un potenziale ritardante,  $V_r$ , (ottenuto, ad esempio, fissando a zero il potenziale di anodo e positivo il potenziale di catodo). In questo caso il campo elettrico impedisce agli elettroni con energia  $\varepsilon < eV_r$  di raggiungere l'anodo.

Per costruire un modello della dinamica degli elettroni, si considera un diodo con una geometria regolare e una spaziatura catodo anodo abbastanza piccola, anche per minimizzare gli effetti della carica spaziale. In questa condizione, può essere assunta come una buona approssimazione la geometria piana.

Come mostrato in Battaglia et al. [9] è possibile definire un modello del gas di elettroni relativamente semplice, attraverso il quale è possibile dedurre la distribuzione statistica del gas di elettroni emessi per effetto termoionico.

Tale modello porta alla seguente relazione

$$n(\varepsilon) \propto -\frac{dI}{d\varepsilon} \quad (2)$$

In accordo con l'eq. (2), la distribuzione di velocità può essere ottenuta, differenziando la corrente anodica rispetto alla tensione ritardante di anodo per ogni valore di tensione anodica (energia). Pertanto, le misure della corrente anodica in funzione della tensione ritardante, accompagnata da un adeguato metodo di derivazione numerica, può condurre alla valutazione della distribuzione di velocità degli elettroni.

Come mostrato in Battaglia et al.[9], l'esperimento fa uso di un tipico diodo commerciale 12AX3 formato da un catodo cilindrico in nichel ricoperto da ossido. Il set di misure è realizzato fissando la temperatura di filamento e variando il potenziale ritardante dell'anodo da zero fino al valore minimo di corrente corrispondente alla sensibilità del nostro micro-amperometro.

Al fine di studiare la forma della funzione di distribuzione  $n(v_z)$  (distribuzione degli elettroni rispetto alla componente di velocità perpendicolare alla superficie di emissione) si possono seguire le seguenti fasi:

- calcolo delle derivate numeriche delle misure corrente-tensione come descritto dalla eq. (2);
- fitting dei punti derivati con la funzione semi-maxwelliana.

In sintesi, le misure così effettuate [9] ci permettono di concludere che gli elettroni mostrano un comportamento maxwelliano solo in un range di 100 K, corrispondente alle nostre temperature più basse. La deviazione dalla legge di Maxwell per alti valori di temperatura conduce all'ipotesi che questi dati possono essere fortemente affetti dalla notevole carica spaziale (la muta repulsione degli elettroni nello spazio tra gli elettrodi) nel caso di alta densità di carica e a causa del basso valori di corrente per alti valori del potenziale anodico. In ogni caso, alti valori dei potenziali ritardanti, producono l'effetto di modificare il lavoro di estrazione del catodo (effetto Schottky).

### 3. Il contesto sperimentale

La sperimentazione didattica è stata sviluppata nell'ambito di un seminario dal titolo *“Un esperimento sull'emissione termoionica: la distribuzione di velocità degli elettroni emessi in un tubo a vuoto”* attivato presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università di Palermo, svolto nel periodo che va da marzo a maggio 2010. Tale attività seminariale ha visto coinvolti tre corsi di laurea: Ingegneria Elettronica, Ingegneria Informatica ed Ingegneria delle Telecomunicazioni.

#### 3.1 Il campione di studenti

Al seminario hanno partecipato 43 allievi ed ha avuto una durata di 12 ore. Gli allievi hanno formato un gruppo molto variegato, sia in termini di età che per corso di laurea: 32 del corso di laurea di primo livello e 11 del corso di laurea specialistica suddivisi fra i corsi precedentemente citati. Gli allievi avevano tutti affrontato i corsi di analisi matematica, di calcolo numerico, e i corsi di fisica generale. Buona parte di loro aveva già affrontato il problema delle distribuzioni statistiche, ma solo in termini di funzioni continue nell'ambito dei corsi generali di fisica.

La progettazione delle attività ha tenuto conto del livello medio di conoscenza di uno studente universitario delle lauree di I livello, considerando come prerequisito essenziale le conoscenze di fisica classica (meccanica ed elettromagnetismo), analisi matematica, analisi numerica e competenze sull'utilizzo di software quale il foglio di calcolo.

In realtà, durante l'attività, spesso è stato necessario richiamare diversi concetti, soprattutto riguardanti l'analisi numerica e l'utilizzo del foglio di calcolo. Inoltre, anche l'attività sperimentale ha richiesto un notevole impegno da parte degli studenti i quali hanno dimostrato di non essere sufficientemente abituati all'uso di apparecchiature ed all'attività di laboratorio in generale.

### 4. Le fasi della sperimentazione e i risultati

La sperimentazione è stata strutturata secondo le seguenti fasi:

Somministrazione di un test di ingresso, tramite il quale evidenziare le conoscenze già acquisite dallo studente in riferimento ai temi trattati della proposta didattica e da cui trarre informazioni per una migliore calibrazione degli interventi.

Realizzazione degli interventi in classe progettati sulla base della proposta didattica descritta precedentemente e dei risultati del questionario in ingresso. Gli interventi sono strutturati in modo tale da analizzare e allo stesso tempo stimolare l'acquisizione delle tematiche oggetto della nostra ricerca.  
somministrazione del questionario in uscita

L'efficacia della proposta didattica è stata valutata attraverso il confronto tra i risultati del questionario d'ingresso e del questionario d'uscita. Il questionario somministrato in uscita è uguale al questionario in ingresso, pertanto l'analisi è stata eseguita sulla base di variabili cognitive e dei criteri di valutazione che fanno riferimento alla capacità di lettura e di costruzione di una distribuzione e alla capacità di confronto di più distri-

buzioni. La classificazione delle risposte è stata strutturata su quattro livelli in ordine crescente di comprensione.

Tale classificazione è stata realizzata secondo l'analisi fenomenografica attraverso un pre-test da cui si sono individuate le classi di risposte.

Il confronto fra i quesiti dei questionari è stato eseguito assieme allo studio della significatività statistica. Si è scelto di utilizzare il test non parametrico del  $\chi^2$ , considerando come ipotesi nulla,  $H_0$ , quella per cui le differenze fra ingresso ed uscita delle risposte fornite non sono statisticamente significative e come livello di significatività un valore della probabilità  $p < 0,05$ . In particolare, quando la condizione prima enunciata risulta essere verificata siamo sicuri di poter scartare l'ipotesi nulla e quindi ritenere significativo il confronto fra le distribuzioni in ingresso ed in uscita.

### 5.1 Analisi dei quesiti

#### Quesito n. 1

Il quesito n. 1 mostra una immagine di un modello di un gas di particelle libere in movimento all'interno di una scatola e il relativo istogramma delle velocità.

Nella prima parte è richiesto di descrivere le caratteristiche della distribuzione attraverso le informazioni che si possono dedurre dalla lettura del grafico della distribuzione, mentre nella seconda parte di analizzare e comparare due differenti distribuzioni dello stesso sistema di particelle sotto condizioni differenti. Le due questioni sono state analizzate in parallelo, poiché le caratteristiche individuate e confrontate risultano le stesse.

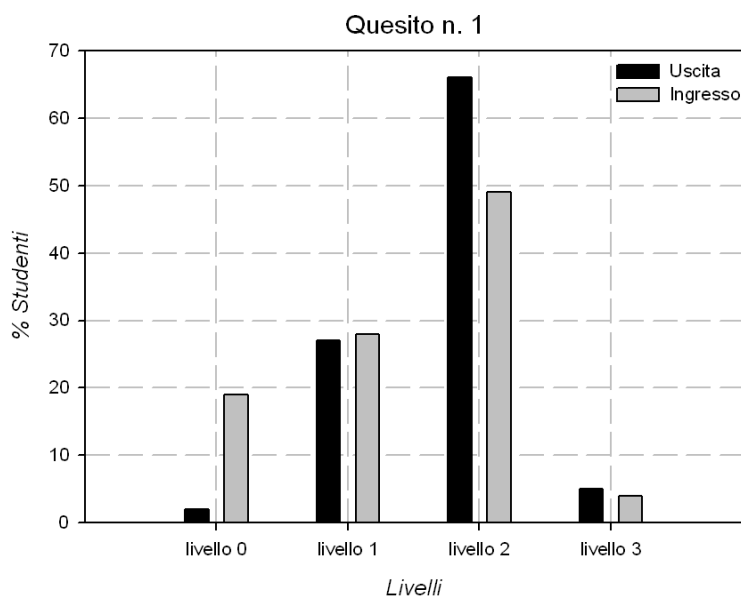


Figura 1. Confronto ingresso-uscita relativo al quesito n. 1,  $\chi^2 = 7,05$ ;  $p = 0,07$ .

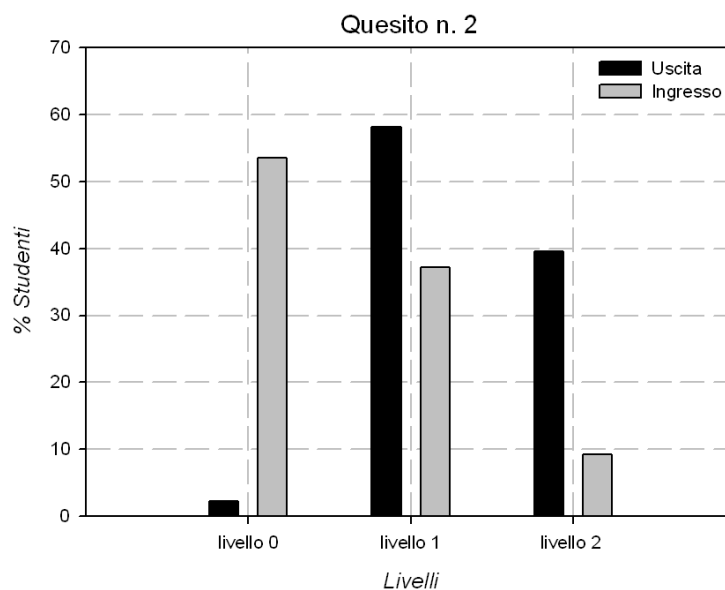
Il test del  $\chi^2$  indica differenze fra ingresso e uscita non del tutto statisticamente significative.

In realtà dalla fig. 5 si può comunque apprezzare che c'è stato sia un aumento degli studenti che sono riusciti ad individuare e quindi confrontare più elementi caratteristici delle distribuzioni, come varianza e velocità più probabile, sia una notevole diminuzione degli studenti che non avevano individuato alcun elemento caratteristico.

#### Quesito n. 2

Il quesito n. 2 entra nello specifico del tipo di gas di particelle e mostra un apparato sperimentale storico (apparato di Miller e Kush), attraverso cui è possibile determinare la distribuzione di velocità di un gas di ioni emessi da un forno portato ad elevata temperatura ed in cui è stato fatto il vuoto. Tali ioni emessi a diverse

velocità possono incidere su di un tamburo ruotante a velocità costante sul quale quindi si viene a determinare la forma della distribuzione. Il quesito chiede di descriverne il funzionamento e quindi individuare il metodo di selezione attraverso cui discriminare le velocità delle particelle.

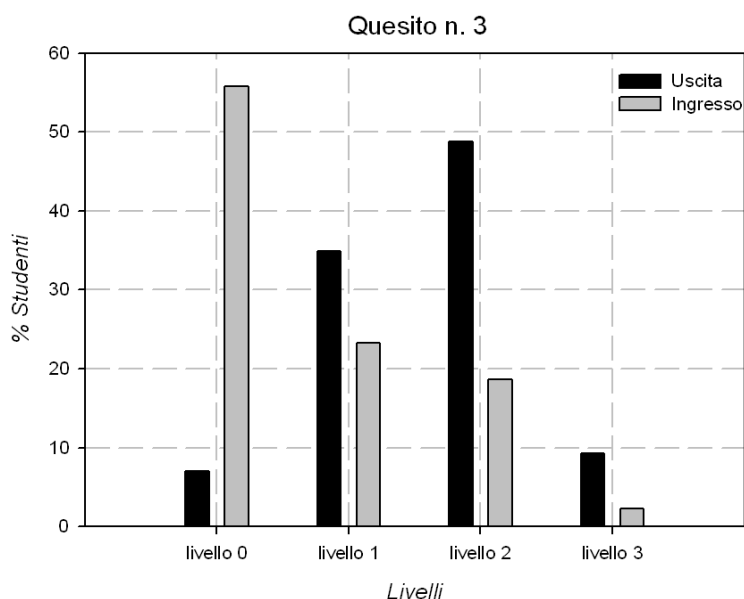


**Figura 2.** Confronto ingresso-uscita relativo al quesito n. 2,  $\chi^2 = 30,19$ ;  $p = 2,8 \cdot 10^{-7}$ .

L'ipotesi nulla può essere scartata e, come si evince dalla fig. 2, c'è stato un notevole miglioramento rispetto all'ingresso. Seppur tale apparato non sia mai stato descritto durante l'attività, tutti gli studenti sono stati in grado almeno di descrivere correttamente l'apparato; inoltre, il 40% di essi è riuscito ad individuare il metodo di selezione esplicitandolo chiaramente nelle proprie risposte. Dalle risposte è risultato evidente come l'individuazione del metodo di selezione nella descrizione dell'apparato abbia acquisito, rispetto all'ingresso, una consistente priorità.

### Quesito n. 3

Il quesito n. 3, strettamente connesso al precedente, chiede di determinare il grafico che si viene a formare sul tamburo rotante e dedurre da questo la forma della distribuzione.

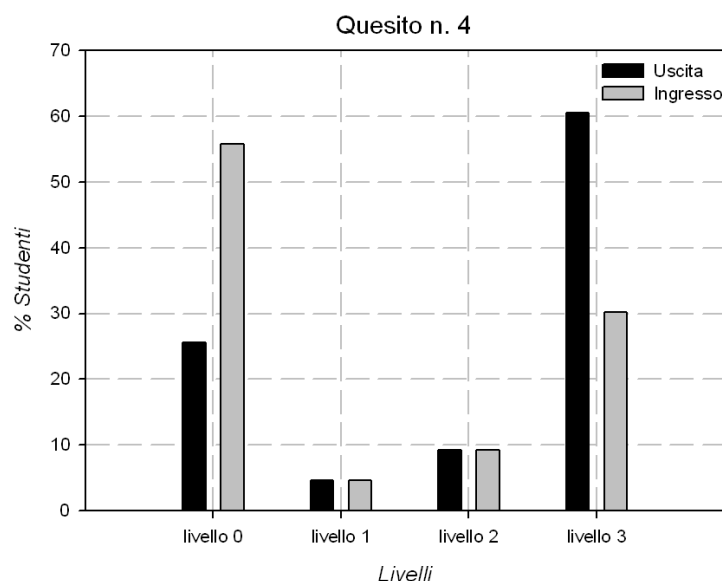


**Figura 3.** Confronto ingresso-uscita relativo al quesito n. 3,  $\chi^2 = 25,42$ ;  $p = 1,3 \cdot 10^{-5}$ .

La significatività statistica è verificata e la fig. 3 mostra i risultati di tale confronto. Anche in questo caso le risposte degli studenti evidenziano un notevole miglioramento. Mentre nel questionario in ingresso nessun allievo era riuscito ad individuare la distribuzione corretta, adesso il 9% riporta il grafico della distribuzione di Maxwell-Boltzmann relativa ai moduli. Inoltre una buona percentuale, il 49%, riesce ad individuare una qualche distribuzione superando parzialmente gli ostacoli legati al tipo di metodo di selezione. Bisogna evidenziare che sembrerebbe esserci una discrepanza fra tale risultato e quello precedente sull'individuazione del metodo di selezione. Infatti, la percentuale di quelli che individuano una qualche distribuzione (49%) è più alta rispetto a chi individua il metodo di selezione (40%). Questo fatto mostra una qualche incoerenza spiegabile, forse, con il fatto che una parte degli studenti sia stata influenzata nel cercare di determinare una distribuzione senza vere capito bene le cause.

#### Quesito n. 4

Il quesito n. 4 mostra tre distribuzioni di velocità normalizzate e chiede di confrontarle in relazione alle rispettive temperature dei sistemi di particelle che queste descrivono.



**Figura 4.** Confronto ingresso-uscita relativo al quesito n. 4,  $\chi^2 = 9,16$ ;  $p = 0,03$ .

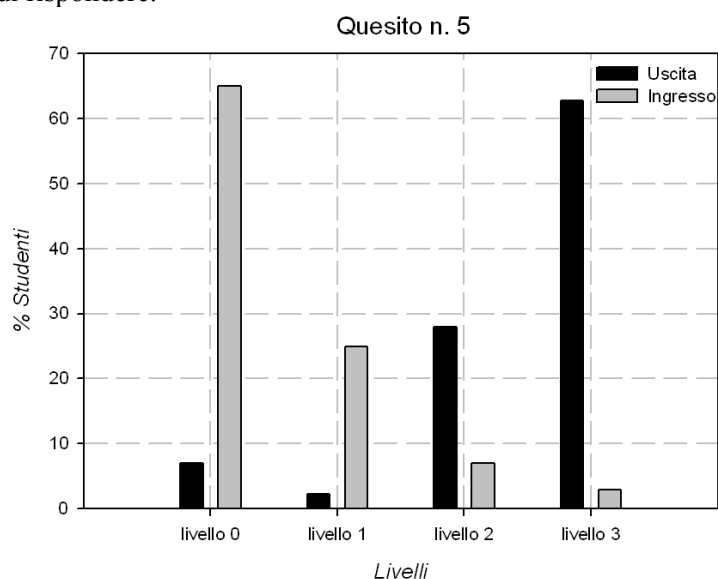
Come mostra la fig. 4 il miglioramento rispetto allo stesso quesito posto all'ingresso risulta notevole, sia perché è diminuita la percentuale di coloro che non riuscivano a individuare una risposta sia perché il 60% è riuscito ad individuare correttamente la varianza ed ha saputo metterla in relazione con la temperatura.

Le risposte rientranti in quest'ultima percentuale risultano essere ben argomentate ed esaustive.

#### Quesito n. 5

L'ultimo quesito, il n. 5, chiede di determinare la corrente elettronica in un tubo a vuoto nel caso in cui gli elettroni emessi siano emessi tutti con la stessa velocità. Questo quesito ripropone in parte la condizione sperimentale in cui gli studenti si sono trovati ad operare, ribaltando però la logica della problematica. In questo caso si suppone di conoscere la distribuzione e si chiede quale possa essere la conseguente forma della corrente in funzione della tensione.

Tal quesito in ingresso era risultato sicuramente il più difficile; infatti una altissima percentuale di studenti non era stata in grado di rispondere.



**Figura 5.** Confronto ingresso-uscita relativo al quesito n. 5,  $\chi^2 = 56,95$ ;  $p = 2,6 \cdot 10^{-12}$ .



Adesso in uscita troviamo una situazione ribaltata. Infatti, come mostra la fig. 5, più del 60% ha individuato correttamente la forma della corrente, dimostrando di avere compreso lo stretto legame tra corrente e distribuzione di velocità e quindi anche le evidenze sperimentali che la distribuzione comporta.

## 5. Discussione e conclusioni

In riferimento alla lettura di un grafico al fine di ottenere le maggiori informazioni possibili e alla rappresentazione di una distribuzione di particelle, gli studenti hanno dimostrato di avere già approfondito queste tematiche sufficientemente, riuscendo ad ottenere più informazioni soprattutto nel caso di rappresentazione ad istogrammi. Per quanto riguarda il confronto i migliori risultati sono stati ottenuti ancora nel caso della rappresentazione ad istogrammi, mentre nel caso delle funzioni continue con particolare riferimento alla temperatura è stato notato un notevole miglioramento rispetto all'ingresso già durante le fasi di elaborazione dei dati sperimentali. Come precedentemente accennato, l'esperimento è risultato relativamente semplice nella realizzazione e tutti gli studenti hanno compreso il suo significato concettuale di selezionatore di velocità. Il metodo dei potenziali ritardanti è risultato più facilmente comprensibile rispetto ai sistemi meccanici di selezione e anche l'approfondimento di questa metodologia ha avuto delle ricadute positive nella comprensione dei sistemi di selezione meccanici. Come effetti secondari di apprendimento si è riscontrato un notevole miglioramento nelle competenze necessarie all'esecuzione di esperimenti e all'elaborazione numerica dei dati sperimentali.

## Bibliografia

- [1] C. Wild (2006), The Concept of Distribution, *Statistics Education Research Journal*, vol. 5, n.2, pp. 10-26.
- [2] R. C. Miller & P. Kush (1955), Velocity distributions in Potassium and Thallium Beams, *Physical Review*, vol. 99, pp. 1314-1321.
- [3] O. R. Frisch (1965), Molecular Beams, *Sci. American*, vol. 212, pp. 58-75.
- [4] J. J. Prentis (2000), Experiments in statistical mechanics, *Am. J. Phys.*, vol. 68.
- [5] L. H. Germer (1925), The distribution of initial velocities among thermionic electrons, *Phys. Rev.*, vol. 25, pp. 795-807.
- [6] O. W. Richardson (1921), *The emission of electricity from hot bodies*, Longman Green and Company.
- [7] von Walter Schottky (1914), Uber den Austritt von Elektronern aus Qliihdrdhten bei verzogerden Potentialen, *Ann.d. Physik*, vol. 44, pp. 1011-1032.
- [8] C. S. Hung (1950), Thermionic Emission from Oxide Cathods: Retarding and Accelerating Fields, *J. of Applied Physics*, vol. 21, pp. 37-44.
- [9] O. R. Battaglia, C. Fazio, I. Guastella, and R. M. Sperandeo-Mineo (2010), “An experiment on the velocity distribution of thermionic electrons,” *Am. J. Phys.* Vol. 78 n. 12, 1302–1308.