Iori M. (2011). Il senso *semiotico-interpretativo* delle rappresentazioni degli oggetti matematici e delle loro trasformazioni. In: Sbaragli S. (Ed.) (2011). *La Matematica e la sua didattica, quarant'anni di impegno. Mathematics and its didactics, forty years of commitment. In occasion of the 65 years of Bruno D'Amore*. Bologna: Pitagora. 125-127.

Il senso *semiotico-interpretativo* delle rappresentazioni degli oggetti matematici e delle loro trasformazioni

Maura Iori
N.R.D. Bologna – Dottoranda Università di Palermo

Abstract. *A semiotic-interpretative analysis (from a Peircean point of view) of different representations of mathematical objects and of their transformations can explain how the process of sense-making is related to changes of iconic, indexical and symbolic components of the representation selected or obtained (as a result of previous semiotic transformations), as well as to collateral knowledge and to the mathematical practices.*

La natura delle rappresentazioni semiotiche degli oggetti matematici è un po' evanescente, sfumata o impallidita dalle molteplici trasformazioni alle quali le rappresentazioni sono sottoposte quotidianamente da insegnanti e studenti; tutti alla ricerca quasi obbligata (se non disperata) di un qualche senso condiviso, oltre a quello puramente contrattuale. I differenti modi di scegliere e utilizzare opportunamente le rappresentazioni semiotiche per raggiungere i medesimi obiettivi, anche "minimi", sono una delle manifestazioni più evidenti della complessità e problematicità della loro natura, strettamente legata a quella degli *oggetti* e degli *interpretanti* (in senso peirceano) coi quali possono intrecciare relazioni complesse, anche conflittuali, a seconda delle *conoscenze collaterali* messe in gioco; una manifestazione, questa, di convinzioni epistemologiche, cognitive e didattiche di natura pragmatista.
L'analisi semiotica-interpretativa (in senso peirceano) delle rappresentazioni degli oggetti matematici, e in generale di qualsiasi segno coinvolto nelle attività matematiche, evidenzia come le loro componenti (iconiche, indicali e simboliche) siano fortemente intrecciate alle conoscenze collaterali di studenti e insegnanti, ai contesti d'uso, alle pratiche d'aula condivise, e ai sensi (interpretanti) differenti che le diverse trasformazioni possono fornire all'oggetto matematico (di natura dinamica) preso in esame. Dal punto di vista semiotico-interpretativo, in caso di conoscenze collaterali distanti da (o non in equilibrio con) quelle condivise, le componenti iconiche o indicali giocano un ruolo predominante, e diventano, per lo studente, l'unica risorsa o fonte accreditata in situazioni di relativa incertezza o "emergenza", come nelle prove di valutazione.
Bruno (D'Amore, 2006a) evidenzia con estrema chiarezza e minuzia che «il passaggio dalla rappresentazione di un oggetto matematico ad un'altra attraverso trasformazioni, da un lato conserva il significato dell'oggetto stesso, ma talvolta può cambiarne il senso». Numerosi episodi evidenziati da Bruno (D'Amore, 2006a) suggeriscono diversi spunti di analisi semiotico-interpretativa; per brevità, ci soffermeremo soltanto sui seguenti:

1. *Allievi di scuola primaria*: «$7+3=10$ è un'addizione, ma $10=7+3$ no».

2. *Allievi di scuola secondaria di I grado*: «$\frac{1}{2}$ è esprimibile come $0{,}5$ o come 50%; ma, mentre $\frac{1}{2}$ equivale a  , $0{,}5$ no, e ancora meno 50%».

3. *Allievi di Università*: $(n-1)+n+(n+1) \Rightarrow 3n$ (dopo il trattamento).

Senso: da «La somma di tre interi consecutivi» a «Il triplo di un numero naturale»; Ric: «Ma si può pensare come somma di tre interi consecutivi?»; allievo C: «No, *così* no, *così* è la somma di tre numeri uguali, cioè n».

4. *Allievi di corsi postlaurea*: Rappresentazione dell'oggetto matematico: Successione dei numeri triangolari; interpretazione e conversione: $1,\ 3,\ 6,\ 10,\ ...$; cambio di rappresentazione per trattamento: $1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ 1+2+3+4,\ ...$; questa rappresentazione viene riconosciuta come «Successione delle somme parziali dei naturali successivi».

«In nessuno dei casi qui brevemente illustrati gli allievi hanno accettato che il senso della rappresentazione semiotica ottenuta per ultima, dopo le trasformazioni semiotiche evidenziate, coincidesse con il senso dell'oggetto matematico di partenza. È ovvio che questo punto apre la strada a nuove future analisi» (D'Amore, 2006a).

Analizziamo brevemente i singoli episodi sopra riportati:

1. Le differenti componenti iconiche (in senso strutturale) delle due rappresentazioni semiotiche suggeriscono due interpretanti differenti: un'operazione di addizione (nel primo caso) e una possibile riscrittura di un numero come somma di altri due (nel secondo caso), entrambe strettamente legate a conoscenze collaterali e a pratiche matematiche condivise. Per gli allievi in questione il segno "$=$" non rappresenta una relazione di equivalenza, ma un indice procedurale (non simmetrico).[1]

2. Le conversioni dal registro semiotico "frazioni" al registro semiotico "numeri decimali", oppure al registro semiotico "percentuali", sono abbastanza frequenti a livello di scuola secondaria di I grado; altrettanto numerose sono le conversioni dal registro "frazioni" al registro figurale geometrico. In particolare, la componente iconica del segno "$\frac{1}{2}$" viene immediatamente tradotta o convertita nella componente simbolica dell'espressione "un mezzo", e quest'ultima trattata come la componente simbolica della parola "metà"; d'altra parte, la componente iconica di "$\frac{1}{2}$" è

[1] Lo studente di scuola secondaria utilizza, spesso e volentieri, una freccia orientata da sinistra verso destra, "$\longrightarrow$", per rappresentare il segno "$=$" (se non fa parte di un'equazione).

spesso convertita anche nell'operazione di divisione "$1:2=0,5$"; raramente scritta o interpretata "alla rovescia", cioè "$0,5=1:2$".
3. Il trattamento ha modificato la componente iconica della rappresentazione iniziale; la componente simbolica della nuova rappresentazione è identificata con la sua componente iconica, in relazione stretta con altri oggetti, in particolare con: "La somma di tre numeri uguali a n».
4. Anche in questo caso, la componente iconica iniziale viene modificata, prima dalla conversione e poi dal trattamento; la nuova rappresentazione è associata a conoscenze collaterali che rinviano a un altro oggetto matematico, del tutto simile e condivisibile.

Dray, Edwards e Manogue (2008), per evidenziare le differenze tra matematici e altri scienziati, in particolare fisici, hanno posto loro la seguente domanda: «*Supponi* $T(x,y)=k(x^2+y^2)$. *Che cos'è* $T(r,\vartheta)$?». Gli autori rilevano che: «Alcuni matematici dicono "$k(r^2+\vartheta^2)$". Molti matematici rifiutano di rispondere, sostenendo che la domanda è ambigua. Tutti gli altri, inclusi alcuni matematici, dicono "kr^2". (…) Gli studenti esprimono spesso la loro incapacità a sfruttare il contesto con le parole "Non so proprio come partire". E sì, in realtà un fisico scriverebbe $T(x,y)=k(x^2+y^2)$ per indicare, diciamo, la temperatura di una lastra di metallo rettangolare, e $T(r,\vartheta)=kr^2$ per indicare la stessa temperatura in coordinate polari, anche se il matematico sosterrebbe che il simbolo T è stato usato per due funzioni differenti» (Dray, Edwards, Manogue, 2008).

I primi quattro esempi sono stati suggeriti da uno dei numerosi lavori di ricerca svolti da Bruno nell'àmbito della Didattica B; ma l'analisi semiotico-interpretativa sopra indicata può essere estesa anche alla Didattica C (D'Amore, 2006b), come evidenzia l'ultimo esempio. Il processo di costruzione di senso, in ogni caso, è legato a componenti iconiche, indicali e simboliche delle rappresentazioni scelte oppure ottenute (dopo trattamenti e conversioni), così come alle conoscenze collaterali e alle pratiche condivise dai soggetti coinvolti, nei contesti da loro considerati più rilevanti.

Bibliografia

D'Amore B. (2006a). Oggetti matematici e senso. Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica*. 4, 557-583.

D'Amore B. (2006b). Didattica della matematica "C". In: Sbaragli S. (Ed.) (2006). *La matematica e la sua didattica, vent'anni di impegno*. Atti del Convegno Internazionale omonimo, Castel San Pietro Terme, 23 settembre 2006. Roma: Carocci. 93-96.

Dray T., Edwards B., Manogue C.A. (2008). *Bridging the Gap between Mathematics and Physics*. http://tsg.icme11.org/document/get/659.