

## ANALISI DEL COMPORTAMENTO AD INDENTAZIONE IN TRAVI SANDWICH IN COMPOSITO CON ANIMA IN SCHIUMA POLIMERICA

G. Pitarresi<sup>a</sup>, J. Amorim<sup>b</sup>, A. Arena<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Università di Palermo, Dipartimento di Meccanica, Viale delle Scienze 90128, Palermo, Italy*  
e-mail: [pitarresi@dim.unipa.it](mailto:pitarresi@dim.unipa.it);

<sup>b</sup> *Centro Ricerche Fiat, Structural Assessment & Optimization, Orbassano (TO), Italy.*

### Sommario

Nel presente lavoro si propone una estensione dei modelli basati sulla teoria delle travi vincolate su una fondazione cedevole di tipo Winkler per lo studio del comportamento ad indentazione di travi sandwich in schiuma polimerica sollecitate da carichi concentrati. L'approccio proposto è in grado di considerare schiume polimeriche aventi comportamento a compressione di tipo non lineare. Sono derivate soluzioni analitiche in forma chiusa della curva di indentazione per anime in schiuma polimerica il cui comportamento a compressione è approssimabile con un andamento bi-lineare. In tal modo è possibile considerare comportamenti di *softening* o *hardening* della schiuma nel tratto post-elastico. Le previsioni dei modelli sviluppati sono confrontate con le curve di indentazione misurate su travi sandwich realizzate con schiume di poliammide e polistirene estruso. I modelli proposti migliorano la simulazione del processo di indentazione rispetto ai modelli classici basati su un comportamento a compressione della schiuma polimerica di tipo elastico-perfettamente plastico.

### Abstract

In this work a generalised analytical model to investigate the indentation of sandwich beams under concentrated loads is presented, based on the Winkler foundation theory. Fully backed sandwich beams with elastic skins and polymeric foam cores are considered. The proposed analytical approach is in particular able to consider polymeric foams with generic non-linear compressive behaviour. The study presents a closed form analytical solution able to model the uniaxial compressive behaviour of foam cores with generic bi-linear curves. The bi-linear discretisation is able to better model softening, hardening or marked non-linear trends in the post-elastic high deformation range of the foam uniaxial compression curve. Analytical predictions have been compared with experimental indentation curves measured on sandwich beams employing polyamide and extruded polystyrene foam cores, both exhibiting peculiar non linear compressive behaviours. It is found that the proposed bi-linear model is able to give a better match of the experimental data than the classic elastic perfectly plastic models.

**Parole chiave:** Sandwich Composites, Indentation, Winkler Foundation, Foam Cores.

### 1. INTRODUZIONE

Strutture sandwich in composito con anime in schiuma polimerica o nido d'ape sono ormai una consolidata soluzione strutturale in grado di realizzare elevate prestazioni in termini di rigidezza e resistenza flessionale specifica [1]. Di contro tali strutture in genere hanno una bassa rigidezza e resistenza nella direzione trasversale. Ciò rende tali strutture particolarmente prone a sviluppare peculiari modi di rottura indotti dall'azione di carichi concentrati, quali ad esempio micro-buckling sulle pelli e indentazione locale. L'occorrenza di elevati carichi localizzati è per altro comune in molte applicazioni strutturali, soprattutto in prossimità di giunzioni o per esempio a causa di impatti a bassa velocità [2]. Di conseguenza un notevole sforzo di ricerca nel campo dello studio di sandwich in composito è stato dedicato allo sviluppo di modelli analitici in grado di prevedere il comportamento meccanico in presenza di carichi concentrati. Alcune configurazioni particolarmente semplici si sono diffuse al fine di analizzare le dinamiche di danneggiamento ed in particolare lo studio di travi e

pannelli sandwich sottoposti a flessione a tre e quattro punti, applicando semplici condizioni al contorno quali soportti o incastri alle estremità, o provini poggiati su fondazioni perfettamente rigide (“fully backed”) [3-6]. Nel presente lavoro si analizza in particolare il caso del comportamento ad indentazione sotto l’azione di carichi concentrati su travi poggiate su una fondazione perfettamente rigida. Tale schematizzazione è stata proposta in letteratura per investigare l’instaurarsi di una indentazione permanente o l’evoluzione di tale indentazione al crescere del carico localizzato [2,6]. Infatti una indentazione locale permanente dell’anima del sandwich può deteriorare in modo significativo le capacità strutturali residue della struttura danneggiata [2,6,7], oltre che determinare deterioramenti inaccettabili da un punto di vista estetico o funzionale.

Le teorie classiche delle travi sandwich in genere considerano l’anima come trasversalmente rigida, riuscendo in tal modo a determinare semplici formulazioni analitiche tra la configurazione di carico e la rigidità flessionale ed a taglio globale [1]. Tali formulazioni sono quindi particolarmente impiegate nella caratterizzazione e progettazione di massima di strutture sandwich. Esse tuttavia non danno adeguata previsione del comportamento e dei modi di rottura attivati in presenza di carichi localizzati [3-5,8]. Alcuni approcci analitici più sofisticati sono stati proposti al fine di indagare il comportamento ad indentazione, ed in particolare al fine di determinare: a) previsioni analitiche della legge carico-spostamento di indentazione, includendo comportamenti a compressione dell’anima sia di tipo elastico che plastico; b) le condizioni critiche di inizio di deformazione permanente dell’anima; c) l’interazione tra i diversi modi di rottura sotto l’azione di carichi locali mediante l’ottenimento di mappe di rottura in forma parametrica; d) l’estensione di una indentazione residua. Tre principali approcci analitici si sono impiegati per indagare su tali aspetti: la *higher order sandwich panel theory* (HSAPT), modelli basati sulla teoria della fondazione elastica di Winkler ed infine modelli basati sulla sovrapposizione degli effetti.

L’approccio secondo la HSAPT proposto da Frostig et al [9,10] permette di modellare il comportamento trasversalmente non-lineare dell’anima. Sebbene non semplice, l’approccio mediante la HSAPT ha consentito di simulare bene alcune situazioni complesse quali l’influenza della distribuzione locale del carico [11], l’interazione tra deformazione locale di indentazione e deformazione per globale cedimento flessionale ed a taglio. La complessità dell’approccio HSAPT ha tuttavia raramente condotto a formulazioni analitiche di semplice uso per la pratica progettuale [12,13]. Inoltre un altro grosso limite è la difficoltà di modellare il fenomeno di indentazione oltre il tratto di comportamento elastico dei materiali costituenti.

Un altro approccio molto popolare nello studio del comportamento ad indentazione fa uso della teoria di Winkler mediante la quale la pelle del sandwich è modellata come una trave elastica incollata su una fondazione cedevole coincidente con l’anima del sandwich [2,6]. Dalla soluzione dell’equazione differenziale di equilibrio della trave si ottiene la relazione tra carico puntuale e spostamento del punto di applicazione, ovvero la legge di indentazione. Un limite di tale approccio consiste nel modellare solamente l’interazione locale tra pelle superiore ed anima, non considerando l’influenza dello spessore del sandwich e della pelle inferiore. Di contro l’approccio è in grado di modellare la progressione dell’indentazione anche oltre il limite elastico a compressione del materiale che costituisce l’anima. Soluzioni analitiche della curva di indentazione nel campo di comportamento elastico dell’anima sono state ottenute sia per travi sandwich [2,3,6,14] che per pannelli indentati con carichi puntuali [14-17]. In [15,17] la risposta elastica della fondazione prevede l’uso di due parametri elastici per includere anche la presenza all’interfaccia di forze di taglio, anche se nel caso di anime in schiuma polimerica queste risultano trascurabili [3]. La gran parte delle soluzioni riguarda il caso di travi sandwich ove la pelle inferiore poggia su una superficie rigida [2,6,14,17-20]. Soluzioni per travi semplicemente appoggiate, caricate a flessione a tre punti sono state ricavate con il metodo della sovrapposizione degli effetti, aggiungendo alla componente di indentazione le componenti di spostamento dovute a flessione e taglio calcolate con la teoria classica delle travi sandwich [10,21,22]. Un approccio più rigoroso è proposto da Steeves et al [3] ove si fornisce una soluzione del caso di trave soggetta a flessione a tre punti in cui l’anima in schiuma polimerica ha un comportamento a compressione di tipo elastico perfettamente plastico. La rottura per indentazione secondo le previsioni ottenute in [3] è quindi impiegata per ricavare mappe di rottura che considerano l’interazione con altri modi di rottura [3-5].

Il comportamento ad indentazione oltre il limite elastico a compressione della schiuma è stato modellato mediante l’assunzione di un comportamento post-elastico perfettamente plastico, ipotesi

accettabile per un'ampia classe di schiume polimeriche (in genere comprendenti PVC, PMI, PUR), per questo indicate come schiume con comportamento “Crushable” [2,3,6,14,18,19,21,22].

In questo lavoro si propone una procedura di tipo incrementale che utilizza lo schema della *Winkler foundation* per valutare la curva di indentazione su travi sandwich in schiuma polimerica il cui comportamento post elastico è in generale non-lineare. L'approccio proposto si basa su un modello denominato “segment-wise” proposto di recente da Minakuchi et al. [20] per lo studio del comportamento ad indentazione su travi sandwich con anima in nido d'ape. Il presente lavoro in particolare mostra come il modello incrementale proposto è una generalizzazione dei metodi sino ad ora pubblicati in letteratura i quali prevedono un comportamento post elastico a compressione della schiuma al più di tipo perfettamente plastico. Le potenzialità del metodo incrementale proposto sono dimostrate considerando alcuni esempi di anime in schiuma polimerica con comportamenti vari.

## 2. DESCRIZIONE DEI MODELLI ANALITICI

Lo studio dell'indentazione locale considera la pelle della trave sandwich come una trave elastica perfettamente incollata ad una fondazione cedevole di tipo Winkler che rappresenta l'anima del sandwich in schiuma polimerica [2,6,20]. I parametri costitutivi del comportamento a compressione uniassiale della schiuma determinano la risposta della fondazione cedevole in termini di forze all'interfaccia anima-pelle. Tale risposta è in genere rappresentata da una forza distribuita agente perpendicolarmente alla pelle (*one-parameter Winkler foundation*).

L'espressione generale che governa l'equilibrio della trave (pelle) è una equazione differenziale del quarto ordine [2,3,6], i cui coefficienti costanti sono funzioni delle proprietà costitutive e geometriche di pelli ed anima. Tale espressione ha la forma generale data da:

$$l \cdot \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + m \cdot \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + k \cdot w(x) = c \tag{1}$$

Dove  $x$  è la coordinata assiale della trave con origine in mezzzeria nel punto di applicazione del carico concentrato, e  $w$  è lo spostamento trasversale dei punti della trave (vedi schema in figura 1).

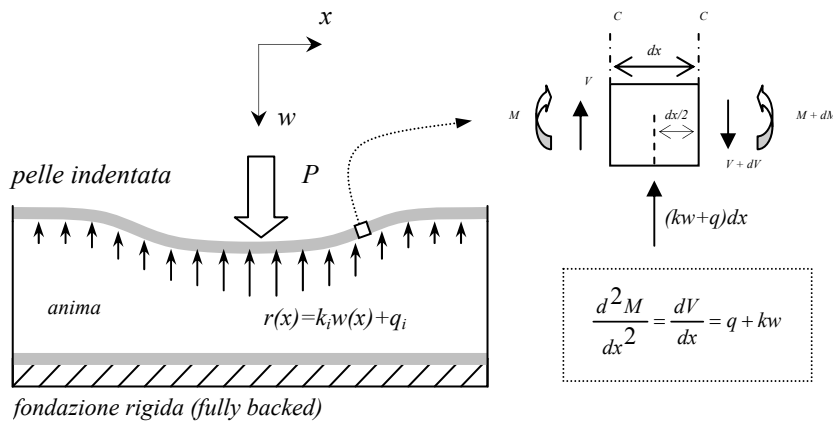


Figura 1: rappresentazione schematica della configurazione di carico della trave sandwich e derivazione dell'equazione differenziale dall'equilibrio dell'elemento infinitesimo di trave.

La soluzione dell'eq. (1) da quindi la componente di spostamento ortogonale alla trave in funzione di carichi e vincoli. In particolare la eq. (1) comprende diversi casi in termini di vincoli e comportamento costitutivo della schiuma. Tali casi sono riassunti in tabella 1 ed i coefficienti definiti in tabella 2.

I coefficienti  $l, m, k$  e  $c$  sono presenti sulla base del tipo di comportamento costitutivo ipotizzato per la schiuma in compressione monoassiale. In particolare *RPP* sta per fondazione rigida perfettamente plastica [3,18], *E* per un comportamento puramente elastico lineare [2,3,6,13,19], *EPP* per fondazione

elastica perfettamente plastica [2,3,6], ed  $SW$  per una discretizzazione multilineare della curva di compressione monoassiale della schiuma secondo l'approccio *Segment-Wise* proposto in [20].

Tabella 1. forma dell'eq. 1 in base ai vari modelli presentati in letteratura e capacità di previsione (il tipo di vincolo può essere FB – fully backed o TPB – three point bending).

Contributo in letteratura	Tipo di supporto	Curva carico-spostamento				Carico all'incipiente snervamento	Carico critico di rottura a flessione della pelle
		RPP	E	EPP	SW		
Soden [18]	FB	×	-	-	-	-	×
Shuaieb et al. [19]	FB	-	×	-	-	×	×
[2,6]	FB	-	$l, k$	$l, c$	-	×	-
Steeves et al. [3]	TPB	$l, m, c$	$l, m, k$	$l, m, c$	-	×	-
Minakuchi et al. [20]	FB	×	×	×	$l, k, c$	-	-

Tabella 2. Definizione dei coefficienti dell'eq. (1).

Coeff.	Definizione	note
$l$	$E_f I_f$	Rigidezza flessionale della trave ( $E_f$ Modulo di Young a flessione, $I_f$ momento di inerzia);
$m$	$PL/4(t_c + t_s)$	Forza membranale agente sulla trave ( $P$ carico esterno applicato, $L$ distanza tra i supporti nella configurazione TPB, $t_c$ spessore dell'anima, $t_s$ spessore della pelle) [3]
$k$	$E_c b/t_c$	Modulo elastico della fondazione ( $E_c$ rigidezza a compressione dell'anima, $b$ larghezza della trave sandwich);
$c$	$-b \cdot q_i$	Componente di tensione costante applicata all'interfaccia tra pelle ed anima (vedi fig. 1)
	$-b \cdot \sigma_c$	$\sigma_c$ tensione di snervamento della schiuma (valore del plateau per il comportamento EPP).

I coefficienti  $k$  e  $q$  sono i parametri costitutivi del comportamento a compressione della fondazione, ovvero della schiuma. In particolare  $k$  considera una reazione della fondazione proporzionale allo spostamento  $w$  mentre  $q$  prevede una componente di reazione costante. Minakuchi et al. [20] hanno proposto di rappresentare la curva di compressione monoassiale dell'anima (nel caso citato un nido d'ape) attraverso una serie di segmenti definiti dalla coppia di parametri  $k_i$  e  $q_i$ . In tal modo un generico comportamento non lineare della schiuma può essere discretizzato da un generico numero di tali segmenti (vedi figura 2a).

La discretizzazione del comportamento a compressione individua sulla trave sandwich delle sezioni ed una serie di segmenti di larghezza  $a_i$  rappresentati in fig. 2b (dove per simmetria è rappresentata solamente la metà destra della trave sandwich).

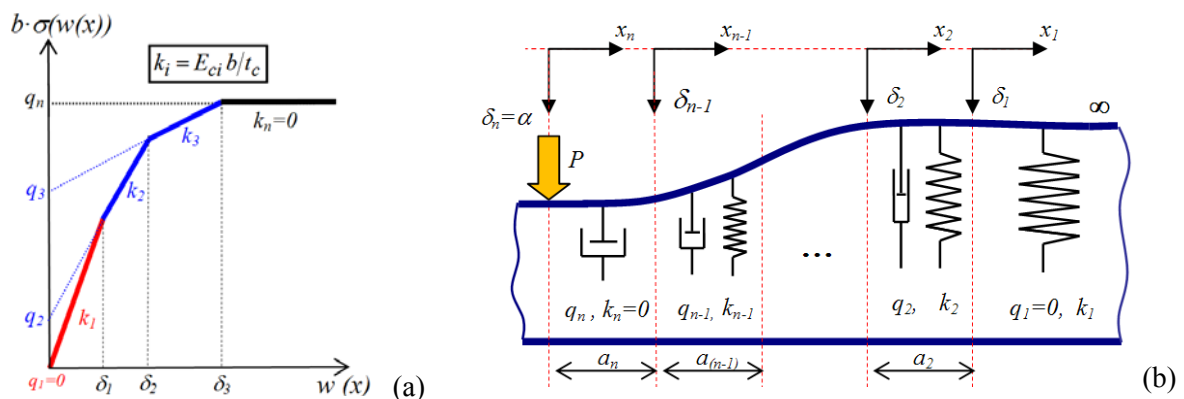


Figura 2: (a) discretizzazione per segmenti della curva di compressione monoassiale di una generica schiuma polimerica ( $b$  è la larghezza del sandwich); (b) rappresentazione schematica della discretizzazione *segment-wise* della trave sandwich.

All'interno di un segmento  $i$ -esimo la schiuma ha un comportamento a compressione descritto dai parametri  $k_i$  e  $q_i$ . In tal modo anche la trave sandwich si trova rappresentata da una serie discreta di zone o segmenti, da cui il nome di *segment-wise* (SW) model dato in [20]. Con il procedere dell'indentazione, segmenti con nuovi valori di  $k_i$  e  $q_i$  inizieranno in modo incrementale dal centro

della trave e si sposteranno verso l'esterno. i punti della trave compresi in un segmento  $a_i$  hanno subito uno spostamento verticale  $w$  compreso tra i valori  $\delta_i$  e  $\delta_{i+1}$  (vedi fig. 2a). Quindi  $\delta_i$  rappresenta lo spostamento verticale oltre il quale la schiuma modifica il suo comportamento a compressione da  $k_i$ ,  $q_i$  (segmento più esterno) a  $k_{i+1}$ ,  $q_{i+1}$  (segmento più interno).

In [20] il comportamento dell'anima in nido d'ape era tale per cui la larghezza  $a_i$  dei segmenti era sempre uguale e legata alle dimensioni delle celle della struttura a nido d'ape. Quando il modello si applica ad anime in schiuma la dimensione dei segmenti  $a_i$  è in generale una incognita, ovvero una ulteriore variabile del problema. Si nota inoltre che il segmento più esterno,  $a_1$ , è sempre quello che ha un comportamento puramente elastico ( $q_1=0$ ).

L'equazione differenziale d'equilibrio per ogni segmento di trave si scriverà quindi come:

$$E_f I_f \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + k_i \cdot w(x) + q_i = 0 \quad (2)$$

Soluzioni generali dell'equazione (3) sono riportate in letteratura in [2,6,20]. Quattro casi generali si possono presentare: a)  $k_i > 0$  e  $q_i=0$  (es. quando  $i=1$ ), b)  $k_i > 0$  e  $q_i \neq 0$  (tale caso indica una deformazione post-elastica di *hardening*), c)  $k_i < 0$  e  $q_i \neq 0$  (tale caso indica una deformazione post-elastica di *softening*), d)  $k_i = 0$  e  $q_i \neq 0$  (es. un tratto finale corrispondente con un plateau quando  $i=n$ ). Le soluzioni generali per i quattro casi sono date da:

$$\begin{aligned} a) \quad w_1(x_1) &= e^{-\lambda_1 x_1} [A_1 \sin(\lambda_1 x_1) + B_1 \cos(\lambda_1 x_1)] + e^{\lambda_1 x_1} [C_1 \sin(\lambda_1 x_1) + D_1 \cos(\lambda_1 x_1)] \\ b) \quad w_i(x_i) &= -q_i/k_i + e^{-\lambda_i x_i} [A_i \sin(\lambda_i x_i) + B_i \cos(\lambda_i x_i)] + e^{\lambda_i x_i} [C_i \sin(\lambda_i x_i) + D_i \cos(\lambda_i x_i)] \\ c) \quad w_i(x_i) &= -q_i/k_i + A_i e^{-\lambda_i x_i} + B_i e^{\lambda_i x_i} + C_i \sin(\lambda_i x_i) + D_i \cos(\lambda_i x_i) \\ d) \quad w_n(x_n) &= -\frac{q_n}{24E_f I_f} x_n^4 + A_n \frac{x_n^3}{3} + B_n \frac{x_n^2}{2} + C_n x_n + D_n \end{aligned} \quad (3)$$

dove:

$$\lambda_i = 4 \sqrt{\frac{k_i}{4E_f I_f}} \quad \text{per } k_i > 0 \quad \text{e} \quad \lambda_i = 4 \sqrt{\frac{-k_i}{E_f I_f}} \quad \text{per } k_i < 0 \quad (4)$$

In generale il problema assegna un numero complessivo di condizioni al contorno (BC che sta per *boundary conditions*) pari a  $5 \times n$ , riassunte in figura 3 per il caso in cui si considerano solamente 2 segmenti. In particolare per una trave di lunghezza infinita vi saranno sempre due BC che imporranno l'assenza di spostamento e rotazione della sezione estrema della trave [2,6]:

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} w_1(x_1) = 0; \quad \lim_{x_1 \rightarrow \infty} w_1'(x_1) = 0 \quad (5)$$

Tre ulteriori BC si applicheranno sul punto di applicazione del carico di indentazione  $P$ :

$$w_n(0) = \alpha; \quad w_n'(0) = 0; \quad w_n'''(0) = \frac{P}{2E_f I_f} \quad (6)$$

dove  $\alpha$  è lo spostamento ortogonale massimo in mezzeria per  $x=0$ . La seconda BC nelle (6) indica la condizione di inclinazione nulla nella sezione di mezzeria e la terza condizione invece si ottiene dalle condizioni di equilibrio delle forze di taglio sul concio di trave infinitesimo nella mezzeria. Infine un numero ulteriore di  $5 \times (n-1)$  BC si ottiene imponendo nelle sezioni di passaggio tra segmenti contigui (es.  $a_i$  ed  $a_{i+1}$ ) la continuità degli spostamenti, delle inclinazioni dei momenti flettenti e delle forze di taglio:

$$\left. \begin{aligned} w_i(a_i) = w_{i-1}(0); \quad w'_i(a_i) = w'_{i-1}(0); \quad w''_i(a_i) = w''_{i-1}(0); \\ w'''_i(a_i) = w'''_{i-1}(0); \quad w_i(a_i) = \delta_{i-1} \end{aligned} \right\} \text{dove } i = 2, 3, \dots, n \quad (7)$$

Quindi la soluzione del problema intesa come determinazione della curva di indentazione  $(P, \alpha)$ , si ottiene in modo incrementale risolvendo di volta in volta il sistema di equazioni che si ottiene dall'applicazione delle BC sulla base del numero di segmenti presenti ad una data fase di carico. Se sono presenti  $n$  segmenti, si dovranno considerare  $n$  equazioni tra le soluzioni mostrate in (3). Imponendo quindi le condizioni al contorno si otterrà un sistema di  $5 \times n$  equazioni con  $(5 \times n + 1)$  incognite:  $4 \times n$  date dai coefficienti  $A_i, B_i, C_i$  e  $D_i$  (con  $i=1-n$ ),  $(n-1)$  valori di  $a_i$  (con  $i=2-n$ ), ed infine le ultime due incognite  $P$  ed  $\alpha$  (dalle quali si ottiene il tratto di curva di indentazione in esame). Il sistema si può ridurre a  $5 \times n$  incognite assegnando valori ad  $a_2$ . Per ogni valore assegnato all'interno di un dato range si ottiene una soluzione. Iterando la procedura si ottiene l'intero tratto di curva  $P, \alpha$ . In generale si trova che per  $n > 2$  il sistema di equazioni è non lineare, con la compresenza di termini esponenziali e trigonometrici che rendono la soluzione in forma chiusa complessa. Si è osservato invece che per  $n=2$  (vedi fig. 3) il sistema di equazioni è facilmente risolvibile anche quando il secondo tratto della curva di compressione non è un plateau ( $q_2 \neq 0$ ). Tale caso è quindi analizzato in particolare nel proseguo del lavoro.

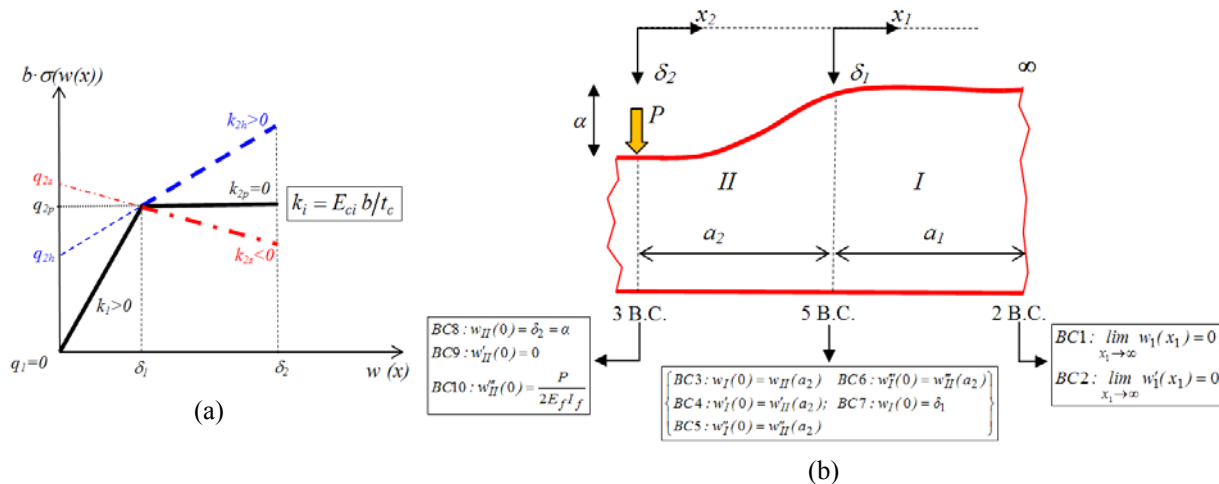


Figura 3: (a) generica discretizzazione bi-lineare della curva di compressione monoassiale della schiuma; (b) Modello *segment-wise* della trave sandwich relativo ad un comportamento a compressione della schiuma di tipo bi-lineare, con le relative condizioni al contorno.

## 2.1 Modello Bi-lineare del comportamento a compressione della schiuma polimerica

Dallo schema generale del modello *segment-wise* presentato sopra si possono derivare le soluzioni già proposte in letteratura in particolare per i casi di comportamento a compressione della schiuma di tipo elastico (E) ed elastico perfettamente-plastico (EPP). In tale lavoro si riporta il sistema risolutivo per il caso di un comportamento a compressione di tipo bi-lineare (fig. 3a), ed in particolare con il secondo tratto crescente (incrudimento o *hardening* con  $k_2 > 0$ ). Nella prossima sezione dedicata ai risultati sperimentali verrà mostrato come tale estensione possa già migliorare significativamente i modelli di previsione delle curve di indentazione per comportamenti tipicamente non-lineari di alcune schiume. Per brevità di seguito si riporta solamente il sistema risolutivo per il caso bi-lineare con incrudimento, e si rimanda il lettore a [25] per altri casi risolti mediante l'approccio *segment-wise*. Per il caso in esame vi sono dieci BC (vedi fig. 3b) e dieci incognite ( $P, \alpha, A_i, B_i, C_i, D_i$  with  $i=1,2$ ). La soluzione per il segmento  $a_1$  è l'eq. (3a) e per il segmento  $a_2$  la (3b). I termini trigonometrici e esponenziali in  $a_2$  presenti nell'eq. (3b) diventano delle costanti quando si assegnano dei valori ad  $a_2$  per cui il sistema di equazioni risultante è un sistema lineare. In particolare si ottiene il seguente sistema risolutivo:

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{23} & b_{23} & c_{23} & d_{23} \\ a_{14} & -a_{24} & -b_{24} & -c_{24} & -d_{24} \\ -a_{15} & a_{25} & b_{25} & c_{25} & d_{25} \\ -a_{16} & a_{26} & b_{26} & c_{26} & d_{26} \\ 0 & a_{29} & b_{29} & c_{29} & d_{29} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 + q_2/k_2 \\ -b_{14} \cdot \delta_1 \\ 0 \\ b_{16} \cdot \delta_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} \alpha = B_2 + D_2 - q_2/k_2 \\ P = 4 \cdot D_f \cdot \lambda_2^3 \cdot [A_2 + B_2 + C_2 - D_2] \end{cases} \quad (8)$$

Risolvendo in modo iterativo le (8) al variare di  $a_2$  si determinano le coppie di valori ( $P, \alpha$ ) del tratto di curva di indentazione che segue il primo tratto puramente elastico lineare in cui tutta la trave sandwich è ancora con valori di indentazione  $w(x) < \delta_j$ . Quindi la soluzione data dal sistema (8) inizia quando nella mezzera della trave si è raggiunto il valore di indentazione  $\alpha = \delta_j$ . I coefficienti della matrice delle eq. (8) sono definiti in tabella 3. Si fa notare l'uso della notazione per cui il coefficiente  $a_{24}$ , ad esempio, è il coefficiente moltiplicativo dell'incognita  $A_2$  nell'equazione che assegna la condizione al contorno numero 4 secondo la successione indicata in fig. 3b.

Tabella 3. Coefficienti del sistema risolutivo per modello bi-lineare con incrudimento dato in (8) (per brevità si definiscono i simboli:  $s = \sin(\lambda_2 a_2)$ ;  $c = \cos(\lambda_2 a_2)$ ).

<b>BC1:</b> $C_1 = 0$	<b>BC2:</b> $D_1 = 0$	<b>BC3:</b> $b_{13} = 1$ ; $r_{23} = -q_2/k_2$ ; $a_{23} = e^{-\lambda_2 a_2} \cdot s$ ; $b_{23} = e^{-\lambda_2 a_2} \cdot c$ ; $c_{23} = e^{\lambda_2 a_2} \cdot s$ ; $d_{23} = e^{\lambda_2 a_2} \cdot c$	
<b>BC4:</b> $a_{14} = \lambda_1$ ; $b_{14} = -\lambda_1$ ; $a_{24} = -\lambda_2 e^{-\lambda_2 a_2} \cdot (s - c)$ ; $b_{24} = -\lambda_2 e^{-\lambda_2 a_2} \cdot (s + c)$ ; $c_{24} = \lambda_2 e^{\lambda_2 a_2} \cdot (s + c)$ ; $d_{24} = -\lambda_2 e^{\lambda_2 a_2} \cdot (s - c)$			
<b>BC5:</b> $a_{15} = -2\lambda_1^2$ ; $a_{25} = -2\lambda_2^2 e^{-\lambda_2 a_2} \cdot c$ ; $b_{25} = 2\lambda_2^2 e^{-\lambda_2 a_2} \cdot s$ ; $c_{25} = 2\lambda_2^2 e^{\lambda_2 a_2} \cdot c$ ; $d_{25} = -2\lambda_2^2 e^{\lambda_2 a_2} \cdot s$			
<b>BC6:</b> $a_{16} = b_{16} = 2\lambda_1^3$ ; $a_{26} = 2\lambda_2^3 e^{-\lambda_2 a_2} \cdot (s + c)$ ; $b_{26} = -2\lambda_2^3 e^{-\lambda_2 a_2} \cdot (s - c)$ ; $c_{26} = -2\lambda_2^3 e^{\lambda_2 a_2} \cdot (s - c)$ ; $d_{26} = -2\lambda_2^3 e^{\lambda_2 a_2} \cdot (s + c)$			
<b>BC7:</b> $b_{17} = 1$	<b>BC8:</b> $r_{28} = -q_2/k_2$ ; $b_{28} = d_{28} = 1$	<b>BC9:</b> $a_{29} = c_{29} = d_{29} = \lambda_2$ ; $b_{29} = -\lambda_2$	<b>BC10:</b> $a_{210} = b_{210} = c_{210} = 2\lambda_2^3$ ; $d_{210} = -2\lambda_2^3$

### 3. RISULTATI SPERIMENTALI E DISCUSSIONE

In genere le schiume polimeriche strutturali impiegate come anime di compositi sandwich, sollecitate a compressione monoassiale mostrano sempre un comportamento iniziale elastico lineare. Questa fase iniziale è in genere, ed in modo più o meno graduale, seguita dall'insorgere di un danneggiamento locale permanente legato al cedimento a *buckling* delle pareti delle celle della schiuma, che ha l'effetto di aumentare la cedevolezza della curva di compressione [6]. In questa seconda fase di grandi deformazioni i vuoti interni della struttura cellulare sono progressivamente riempiti dal cedimento delle pareti delle celle finché si determina un graduale e rapido incremento della rigidità a causa del compattamento o densificazione del materiale. Per una classe di schiume polimeriche denominate di tipo "crushable" le due fasi, elastica e post-elastica o fase delle grandi deformazioni, vengono ben modellate da un andamento bi-lineare di tipo elastico-perfettamente plastico (secondo tratto perfettamente orizzontale) [6]. Tuttavia esistono diverse tipologie di schiume per le quali si osservano marcate non linearità sia in avanzata fase elastica che nella successiva fase di grandi deformazioni. La fase post-elastica può inoltre dar luogo ad un più o meno marcato incrudimento che non è considerato dal modello perfettamente plastico. Il modello analitico bi-lineare presentato in questo lavoro è stato quindi applicato su due esempi di schiume polimeriche il cui comportamento a compressione ha dato luogo a marcate non-linearità.

In particolare si presentano i risultati delle prove di indentazione condotte su due tipologie di travi sandwich le cui caratteristiche geometriche e proprietà dei materiali costituenti sono riassunte in tab. 4. Nel caso del provino 1 le pelli e l'anima sono state incollate mediante una colla epossidica, mentre il sandwich 2 è stato fornito già assemblato (vedi riferimenti in tab. 4).

Al fine di determinare i parametri costitutivi delle schiume per la determinazione del modello bi-lineare ( $k_1, \delta_1, k_2$  e  $q_2$ ) si sono eseguite delle prove di compressione monoassiale seguendo le linee guida indicate dallo standard ASTM C 365. In particolare provini di compressione di sezione quadrata ( $30 \times 30 \text{ mm}^2$ ) sono stati ricavati dai pannelli sandwich e la prova di schiacciamento eseguita con le pelli incollate sulla schiuma. Sia le prove di compressione uniassiale che di indentazione sono state

eseguite su una macchina prova materiali Instron 3367 equipaggiata con una cella di carico da 1 kN. Per le prove di indentazione si è utilizzato come indentatore un cilindro d'acciaio di diametro 20 mm.

Tabella 4. Dati delle travi sandwich realizzate e analizzate ( $b$ ,  $L$  larghezza e lunghezza del provino,  $t_f$  spessore della pelle,  $t_c$  spessore dell'anima,  $E_c$  modulo di Young dell'anima). Le proprietà con apice  $M$  sono state misurate (incertezza pari alla dev. std. su 5 provini), e quelle con apice  $S$  sono ricavate dai fornitori. Materiali impiegati: <sup>I</sup> Tepex<sup>®</sup> dynalite 102-RG600 (45% volume di fibra); <sup>II</sup> ThermoTec<sup>®</sup> XPS40 PBT1212-50-0 fornito da IQ Tec Germany GmbH; <sup>III</sup> Zotek<sup>®</sup> N B50 polyamide 50 kg/m<sup>3</sup>.

Provini sandwich			Pelli			Anima		
ID	$b$ [mm]	$L$ [mm]	laminato	$t_f$ [mm]	$E_f$ [GPa]	Schiuma	$t_c$ [mm]	$E_c$ [MPa]
1	30	150	Glass/PA6 <sup>I</sup> [0°/90°] <sub>s</sub> twill	2	20.21±0.63 <sup>M</sup>	PA <sup>III</sup>	10	0.8 <sup>M</sup>
2	30	208	PBT1212-50-0 <sup>II</sup>	0.8	10.40±0.42 <sup>M</sup>	XPS40 <sup>II</sup>	28	11.62 <sup>M</sup>

In figura 4 si mostrano le curve di compressione misurate e la loro approssimazione attraverso due tratti lineari. In particolare per il provino 1 con schiuma termoplastica di Poliammide (PA) si è rilevato un comportamento di tipo iperelastico. In figura 4a si osserva che la curva sperimentale è ben approssimata con due tratti lineari, di cui il secondo avente pendenza positiva. Per questo materiale si è anche utilizzata una modellazione di tipo elastico perfettamente plastico (EPP) che però approssima in modo molto grossolano il comportamento nel campo delle grandi deformazioni. Per quanto riguarda il provino 2 realizzato con una schiuma di Polistirene Estruso (XPS), la fase post-elastica, pur essendo di tipo “crushable”, ha seguito un andamento crescente (*hardening*), molto marcato in una prima fase, e poi più graduale in una seconda fase che perdura sino alla densificazione del materiale danneggiato. In questo caso il secondo tratto del modello bi-lineare è stato caratterizzato secondo due andamenti: il primo (indicato con BL\_1) è costituito da una retta che interpola bene i punti sperimentali nel primo tratto di incrudimento, ma non approssima bene la seconda fase di incrudimento; il secondo (BL\_2) invece interpola l'intero tratto di incrudimento fino all'inizio della densificazione.

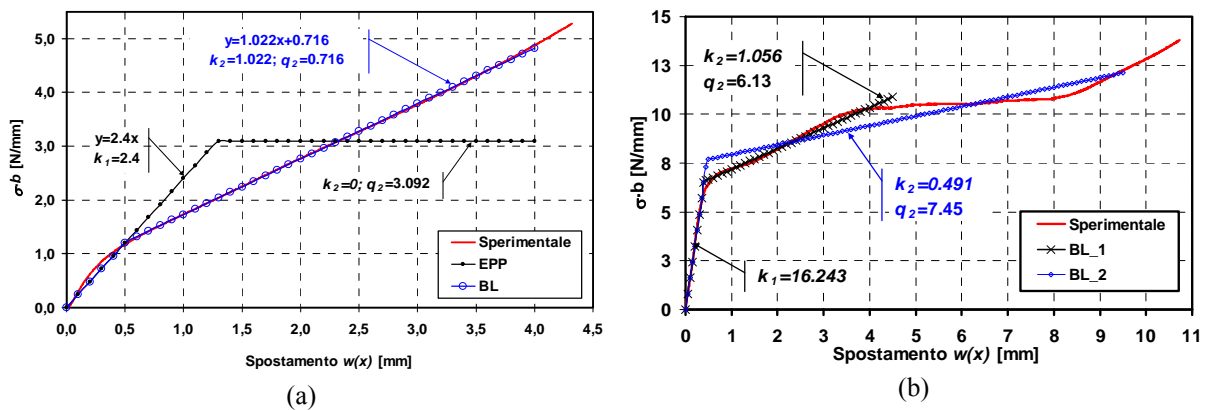


Figura 4: curve sperimentali di compressione monoassiale delle schiume polimeriche e relativa discretizzazione secondo modelli bi-lineari rispettivamente per (a) schiuma di poliammide (PA) usata nel provino 1; (b) schiuma di polistirene estruso (XPS) usata nel provino 2.

In figura 5 infine sono riportate le curve di indentazione misurate sperimentalmente e le previsioni analitiche relative ai diversi modelli bi-lineari identificati in fig. 4. Il primo tratto delle curve di indentazione analitiche è ricavato considerando per la trave un solo segmento  $a_1$  in cui vale la soluzione data dall'eq. (3a) e applicando solo 5 BC (due all'estremità della trave e tre in mezzera). Il tratto elastico procede sino al valore di indentazione in mezzera di  $\alpha=\delta_1$ , oltre il quale inizia a crescere il segmento  $a_2$ , per cui la soluzione della curva di indentazione procede secondo quanto esposto nella sezione 2.1.

Per quanto riguarda il confronto tra curve di indentazione sperimentali e previsioni analitiche, per il provino 1 (fig. 5a) si vede che il modello BL segue molto meglio l'andamento sperimentale rispetto al



modello EPP. In particolare il modello BL segue bene il trend crescente della curva sperimentale anche per valori elevati di indentazione oltre i 3 mm, mentre il modello EPP diparte in maniera sostanziale.

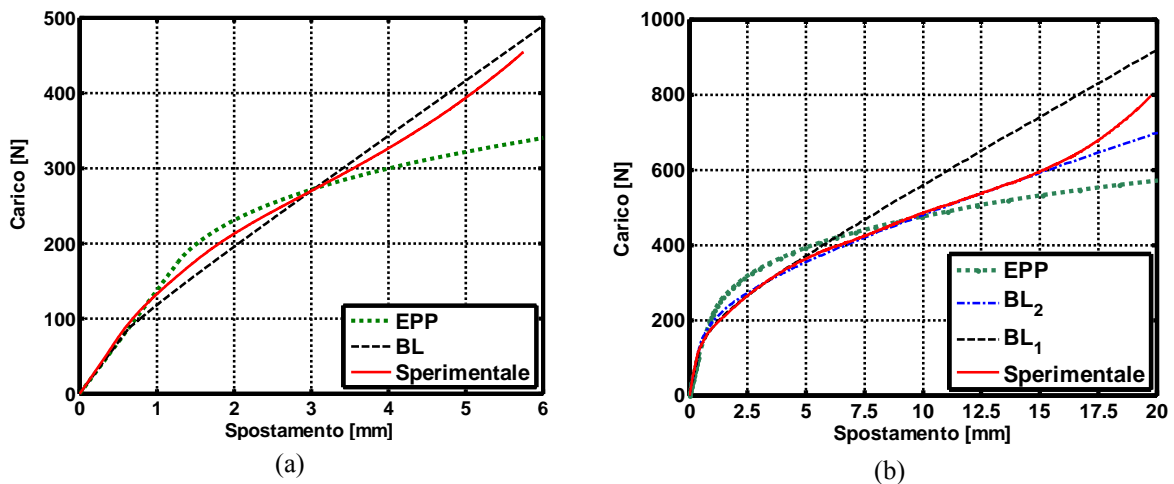


Figura 5: confronto analitico sperimentale delle curve di indentazione: (a) provino 1; (b) provino 2.

Si nota comunque che il marcato andamento non-lineare dovuto al comportamento iperelastico della schiuma di Poliammide determina ancora qualche differenza sia pur contenuta tra dati sperimentali e previsioni del modello BL. Si ritiene che il confronto possa ulteriormente migliorare adottando una discretizzazione più fitta della curva di compressione del PA, con un numero maggiore di tratti lineari. Tuttavia l'onere computazionale per risolvere il sistema non lineare va valutato rispetto ai margini di miglioramento ottenibili. Per quanto riguarda il provino 2 (fig. 5b) si nota nuovamente che il modello EPP è molto meno efficace rispetto ai modelli BL (per il modello EPP applicato in questo caso si è usato un valore della tensione di plateau di  $\sigma=0.33$  MPa). Per quanto riguarda i modelli bi-lineari si osserva che il modello BL1 segue meglio i dati sperimentali ma solo sino ad un valore di indentazione massima di circa 5 mm. Il modello BL2 invece segue molto bene i dati sperimentali sino ad un valore di indentazione di 15 mm, quando si è già in piena fase di densificazione della schiuma nella zona di mezzeria della trave sandwich.

#### 4. CONCLUSIONI

Il presente lavoro ha presentato un approccio generale per la modellazione analitica del comportamento ad indentazione di sandwich con anima di schiuma polimerica. La modellazione riguarda in particolare l'indentazione della pelle superiore sull'anima in schiuma polimerica nel caso di travi sandwich poggiate su una superficie rigida e caricate in mezzeria mediante carichi localizzati. L'approccio presentato in particolare propone la discretizzazione mediante successione di tratti lineari della curva di compressione monoassiale della schiuma. I parametri costitutivi che definiscono ogni segmento sono utilizzati per risolvere le equazioni differenziali di equilibrio valide su diversi tratti della trave sandwich. In base al numero di segmenti utilizzati per discretizzare la curva di compressione della schiuma si possono ottenere, oltre alle soluzioni già riportate in letteratura, ovvero relative a comportamenti puramente elastici ed elastici-perfettamente-plastici, anche soluzioni per comportamenti con un livello di non-linearità più complesso della schiuma. In questo lavoro in particolare è descritta la soluzione analitica in forma chiusa relativa ad un comportamento genericamente bi-lineare. Il confronto con dati sperimentali ottenuti eseguendo prove di indentazione su travi sandwich con schiume in poliammide e polistirene estruso ha mostrato come il modello bi-lineare proposto sia in grado di prevedere molto meglio la curva di indentazione rispetto al modello elastico perfettamente plastico già impiegato in letteratura.

## ACKNOWLEDGEMENTS

Gli autori ringraziano in particolare il supporto ricevuto dall'Unione Europea, attraverso l'erogazione di una borsa di studio Marie Curie nell'ambito del progetto MOMENTUM (FP7), e dagli ingegneri Giovanni Monfrino, Paolo Smeriglio e Fabrizio Urbinati del Centro Ricerche Fiat (CRF).

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Allen HG. Analysis and design of structural sandwich panels. London: Pergamon Press; 1969.
- [2] Abrate S. Localized impact on sandwich structures with laminated facings. *Appl Mech Rev* 1997;50(2):69-82.
- [3] Zenkert D, Shipsha A, Persson K. Static indentation and unloading response of sandwich beams. *Compos Part B* 2004;35:511-522.
- [4] Koissin V, Shipsha A. Residual dent in locally loaded foam core sandwich structures: analysis and use for NDI. *Compos Sci Technol* 2008;68:57-74.
- [5] Steeves CA, Fleck NA. Collapse mechanisms of sandwich beams with composite faces and a foam core, loaded in three-point bending part I: analytical models and minimum weight design. *Int J Mech Sci* 2004;46(4):561-583.
- [6] Steeves , Fleck NA. Material selection in sandwich beam construction. *Scripta Materialia* 2004;50:1335-1339.
- [7] Tagarielli VL, Fleck NA, Deshpande VS. Collapse of clamped and simply supported composite sandwich beams in three-point bending. *Compos Part B* 2004;35:523-534.
- [8] Petras A, Sutcliffe MPF. Indentation resistance of sandwich beams. *Compos Struct* 1999;46:413-424.
- [9] Frostig Y, Baruch M, Vilnay O, Sheinman I. High-order theory for sandwich-beam behavior with transversely flexible core. *J Eng Mech-ASCE* 1992;118(5):1026-1043.
- [10] Frostig Y. Classical and high-order computational models in the analysis of modern sandwich panels. *Compos Part B* 2003;34:83-100.
- [11] Petras A, Sutcliffe MPF. Indentation failure analysis of sandwich beams. *Compos Struct* 2000;50:311-318.
- [12] Sokolinsky VS, Shen H, Vaikhanski L, Nutt SR. Experimental and analytical study of nonlinear bending reponse of sandwich beams. *Compos Struct* 2003;60: 219-229.
- [13] Saadati M, Sadighi M. Indentation in lightweight composite sandwich beams. *Proc IMechE Part G: J. Aerosp. Eng.* 2009;223:825-835.
- [14] Koissin V, Shipaha A, Rizov V. The inelastic quasi-static response of sandwich structures to local loading. *Compos Struct* 2004;64:129-138.
- [15] Thomsen OT. Analysis of local bending effects in sandwich plates with orthotropic face layers subjected to localised loading. *Compos Struct* 1993;25(1-4):511-520.
- [16] Yang M, Qiao P. Nonlinear impact analysis of fully backed composite sandwich structures. *Compos Sci Technol* 2005;65:551-562.
- [17] Soden PD. Indentation of composite sandwich beams. *J Strain Anal Eng* 1996;31(5):353-360.
- [18] Shuaeib FM, Soden PD. Indentation failure of composite sandwich beams. *Compos Sci Technol* 1997;57:1249-1259.
- [19] Minakuchi S, Okabe Y, Takeda N. “Segment-wise model” for theoretical simulation of barely visible indentation damage in composite sandwich beams: Part I-Formulation. *Compos Part A* 2008;39:133-144.
- [20] Lim TS, Lee CS, Lee DG. Failure modes of foam core sandwich beams under static and impact loads. *J Compos Mater* 2004;38(18):1639-1662.
- [21] Sadighi M, Pouriayevali H. Quasi-static and low-velocity impact response of fully backed or simply supported sandwich beams. *J Sandw Struct Mater* 2008;10(6):499-524.
- [22] Rizov VI. Non-linear indentation behavior of foam core sandwich composite materials—A 2D approach. *Comp Mater Sci* 2006;35:107-115.
- [23] Gdoutos EE, Daniel IM. Nonlinear stress and deformation behaviour of composite sandwich beams. *Applied Mechanics and Materials* 2008;13,14:91-98.
- [24] Yoon KJ, Kim CK, Park HC. Nonlinear flexural deflection of thermoplastic foam core sandwich beam. *J Compos Mater* 2002;36(13):1529-1539.
- [25] G. Pitarresi, J. Amorim, “Indentation of sandwich beams with foam cores exhibiting non-linear compressive behaviour”, memoria in fase di valutazione per la pubblicazione su *Compos Struct* (2010).