Giornate di studio dell'Insegnante di MATematica

ATTI del convegno

Insegnare ed apprendere la matematica nella scuola che cambia: nuove e vecchie "sfide" di pratica e ricerca didattica

20-21 OTTOBRE 2023
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA
UNIVERSITÀ DI PALERMO

Quaderni di Ricerca in Didattica
Numero speciale N. 12, 2023

A cura di

Benedetto Di Paola

G.R.I.M. - Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento/Apprendimento delle Matematiche

Università degli Studi di Palermo

ISSN 1: 1592-4424
ISSN 2: 1592-5137

L'evento è stato promosso dai seguenti enti:

Dipartimento di Matematica e Informatica,
Università degli Studi di Palermo

Dipartimento di Matematica e Informatica,
Università di Catania

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e del Merito

U4Learn s.r.l.

G.R.I.M.
Gruppo di Ricerca sull'insegnamento/Apprendimento delle matematiche

Piano Lauree Scientifiche - PLS

Con la sponsorizzazione di:

Associazione GIMat

MaTek - Enhancement of research excellence in Mathematics Teacher Knowledge. H2020-WIDESPREAD-2018-2020. Project Id: 951822

Indice

“Quaderni di Ricerca in Didattica”, Numero speciale n.12, 2023
G.R.I.M. (Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo)

Risoluzione geometrica delle equazioni di I e II grado

Cinzia Cerroni,
Dipartimento di Matematica e Informatica dell’Università degli Studi di Palermo

E-mail: cinzia.cerroni@unipa.it

Maria Concetta Di Prima
Liceo Scientifico Statale Benedetto Croce di Palermo.

E-mail: mariaconcetta.diprima@liceocroce.it

Abstract. I metodi di risoluzione algebrica delle equazioni di I e di II grado proposti ai nostri studenti risalgono a tempi abbastanza recenti, così come la notazione utilizzata che fa uso delle espressioni letterali a noi note. In realtà, per i Greci del periodo classico, quelle che oggi chiamiamo equazioni erano equivalenze tra figure geometriche, e la soluzione, che per noi è un numero reale, era per loro un segmento da costruire con riga e compasso. Il nostro laboratorio propone la descrizione di macchine virtuali che permettono di costruire in Geogebra le soluzioni delle equazioni di I grado e particolari equazioni di II grado. Queste attività fanno parte di un progetto più ampio, “Il moltiplicatore geometrico di Euclide”, realizzato presso il Liceo Scientifico Benedetto Croce di Palermo, che si è classificato secondo al premio Ricci 2022.

1. Macchine in Geogebra che risolvono le equazioni di I grado del tipo *ax*=*b*, con *a*, *b* positivi.

Per gli antichi Greci, l’equazione di primo grado $ax=b$ è da interpretare come un’equivalenza tra due figure geometriche e, quindi, come un’uguaglianza tra due aree; pertanto le variabili presenti, a, b e x, sono positive e, nello specifico, a e x sono le misure di due segmenti (quindi ax è l’area di un rettangolo) e b l’area di un quadrato. Risolvere l’equazione significa costruire il lato di un rettangolo, di cui sia nota l’altra dimensione, equivalente a un quadrato assegnato. Descriveremo le macchine risolutive delle equazioni di I grado utilizzando ***tre approcci differenti***.

1) Il metodo del completamento al quadrato.

Esso fa uso della Proposizione 43 del I Libro degli Elementi di Euclide: “*I complementi dei parallelogrammi intorno alla diagonale di ogni parallelogramma sono uguali tra loro*”, ciò, dato un parallelogramma, scelto ad arbitrio un punto di una delle due diagonali e tracciate da esso le rette parallele ai lati, si ottengono quattro parallelogrammi; i due che non sono attraversati dalla diagonale scelta sono equivalenti. La fig.1 mostra l’equivalenza dei parallelogrammi *BGEF* e *EHDI,*

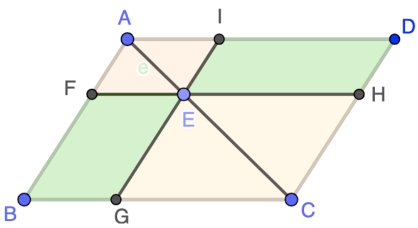

Fig.1 *Prop.43*

Questa proposizione, applicata ai rettangoli, risolve il problema:

Dato un quadrato del quale sia nota l’area b, determinare un lato del rettangolo ad esso equivalente, di cui sia dato l’altro lato a. Algebricamente, il problema viene tradotto dall’equazione: ax=b, per cui dovremo prima costruire il quadrato di area b, cioè di lato radice quadrata di b (faremo uso del II teorema di Euclide).

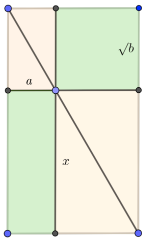

Fig.2 *Prop.43 applicata a un rettangolo*

2) *Il primo teorema di Euclide*

In questa macchina, l'equazione $ax=b$ è risolta facendo uso del I teorema di Euclide, pensandola come l'equivalenza tra il rettangolo, avente dimensioni a e x congruenti rispettivamente all'ipotenusa e alla proiezione di un cateto sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo (e viceversa), e il quadrato costruito sul cateto considerato. Come nel metodo precedente, costruiremo dapprima il segmento di lunghezza radice quadrata di b.

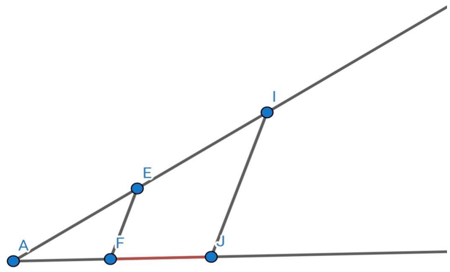

Fig.3 Teorema di Talete

3) *Il teorema di Talete*

Se consideriamo due semirette AI e AJ che formano un angolo qualsiasi e i tre segmenti noti $AE = a$, $EI = b$ e $AF = 1$, se $FJ = x$ è staccato sulla semiretta AJ da IJ parallela a EF, il teorema di Talete ci garantisce che a, b, 1 e x stanno nella proporzione:

$$a : b = 1 : x$$

Poiché in una proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi, la costruzione data risolve l'equazione di primo grado $ax=b$.

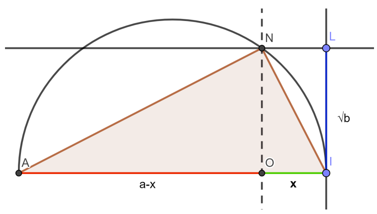

Fig.4 II teorema di Euclide

2. Macchine in Geogebra che risolvono equazion i di II grado

Descriveremo la macchina risolutiva delle equazioni di II grado che presentano due variazioni, quindi del tipo $x^2\text{-}ax+b=0$ utilizzando i teoremi di Euclide. Le sue soluzioni possono determinarsi riscrivendo tale equazione come:

$$\left(\sqrt{b}\right)^2 = x \cdot (a - x)$$

Interpretando le grandezze coinvolte in tale equazione come aree, si ottiene che $\sqrt{b}$ deve essere il lato di un quadrato equivalente a un rettangolo di lati x e $a-x$, dove x è l'incognita da determinare. Se interpretiamo x e $a - x$ come le proiezioni sull'ipotenusa a dei cateti di un triangolo rettangolo di altezza relativa all’ipotenusa pari a $\sqrt{b}$, il secondo teorema di Euclide risolve il problema geometricamente.

3. Conclusioni

Questo laboratorio, rendendo la Geometria una disciplina applicabile anche in contesti non geometrici, ha permesso agli studenti di capirne l’importanza. I ragazzi hanno imparato a usare Geogebra con naturalezza e spontaneità, non perché dovevano, ma perché serviva loro per costruire una macchina virtuale funzionante. I loro docenti si sono resi conto che per migliorare la propria didattica occorre motivare gli studenti e utilizzare metodologie e strategie pratiche e coinvolgenti.

4. Ringraziamenti

Un sentito ringraziamento alla prof.ssa Ducato Roberta, fonte continua di idee e spunti di lavoro, sempre stimolanti e di grande interesse, volti al coinvolgimento dei nostri studenti nello studio della Matematica, che ha ispirato la realizzazione di questo laboratorio.

APPENDICE 1

Macchine in Geogebra che risolvono le equazioni di primo grado

Macchina risolutiva delle equazioni di I grado col metodo a completamento

Macchina risolutiva delle equazioni di I grado con i teoremi di Euclide

Macchina risolutiva delle equazioni di I grado col teorema di Talete

Macchine in Geogebra che risolvono le equazioni di secondo grado

Macchina risolutiva delle equazioni di II grado con due variazioni del tipo $x^2 - ax + b = 0$, con a e b positivi.

Macchina risolutiva delle equazioni di II grado con una variazione e una permanenza del tipo $x^2 - ax + b = 0$ oppure $x^2 + ax - b = 0$ con a e b positivi

Bibliografia e sitografia

Euclide: Elementi libro I proposizione 43, libro III proposizione 3, libro VI proposizione 8, libro VI proposizione 2
Cartesio (1637): La Gèomètrie
https://www.geogebra.org