



**Università
degli Studi
di Palermo**



**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI CAGLIARI**



**Politecnico
di Torino**

Dottorato di ricerca in Tecnologie e metodi per la formazione universitaria
Dipartimento di Fisica e Chimica “Emilio Segrè”
Settore Scientifico Disciplinare PSIC-04/A e SDEA-01/A

La storia della matematica come risorsa pedagogica:
genealogia di un dibattito e *systemic review* della ricerca

IL DOTTORE
Roberto Zarcone

IL COORDINATORE
Prof. Claudio Fazio

TUTOR
Prof. Cinzia Novara

CO TUTOR
Prof. Elisabetta Di Giovanni

CICLO XXXVIII
ANNO ACCADEMICO 2024/2025

Abstract

La tesi indaga il ruolo della storia della matematica nell'insegnamento della disciplina dal punto di vista pedagogico e didattico, articolando tre anime tra loro complementari. La prima parte ricostruisce l'evoluzione storica dell'educazione matematica in Italia dall'Ottocento a oggi, ricostruendo il dibattito nazionale e internazionale sia sul versante epistemologico che sul versante dell'istruzione e delle politiche scolastiche, mostrando come il dibattito sul ruolo della storia della matematica sia presentato dall'Unità d'Italia ad oggi contemporaneamente all'istituzionalizzazione dei sistemi scolastici e alla definizione dei relativi curricula. Continuando sul solco diacronico, la seconda parte si concentra sul presente, esaminando gli aspetti teorici inquadrati in seno al gruppo di ricerca internazionale sviluppatosi negli anni Settanta noto come *History and Pedagogy of Mathematics* (HPM), esplorando le dimensioni pedagogiche, didattiche ed epistemologiche che interessano il dibattito sul ruolo della storia della scienza nei processi d'insegnamento della matematica. La terza anima, a carattere Conclusivo, presenta il lavoro di una review sistematica ispirata al metodo PRISMA sulla letteratura scientifica di ricerche empiriche con disegni di ricerca qualitativi che quantitativi condotte nel decennio 2014-2024, identificando i costrutti teorici prevalenti, gli effetti derivati dall'uso della storia della matematica su alcune dimensioni rilevanti trasversalmente in letteratura e le principali strutture didattiche adottate nelle relative sperimentazioni. In linea con i risultati di precedenti sintesi di ricerca internazionali, i risultati di questo lavoro mostrano una sostanziale contraddittorietà tra le ricerche esaminate, evidenziando lacune e percorsi di ricerca che necessitano ancora di essere adeguatamente indagati sul piano empirico. In tal senso, pur esaminando le diverse attività didattiche sperimentate, l'analisi non conduce a un modello didattico trasversale unico, bensì lascia emergere come la questione della storia della matematica nell'insegnamento costituisca primariamente un problema di respiro pedagogico prima ancora che una questione didattica, interessandone gli scopi formativi.

Indice

Introduzione	1
1. Il ruolo della storia nell'educazione matematica dall'Italia Unita al secondo dopoguerra (1800-1955)	6
1.1 L'Italia Unita e il <i>Ritorno a Euclide</i>	7
1.2 Gli sforzi di rinnovamento di fine Ottocento: gli effetti dell'“operazione Euclide”	12
1.2.1 Epistemologia e pedagogia matematica in Felix Klein	14
1.2.2 La Scuola logica di Giuseppe Peano: epistemologia, storia e didattica	16
1.3 La Commissione Reale e il dibattito di riforma per la Scuola Secondaria	19
1.3.1 Giovanni Vailati e la <i>humanitas</i> scientifica	20
1.3.2 Guido Castelnuovo e il liceo moderno	25
1.3.3 Federigo Enriques e la matematica come “entità viva e dinamica”	30
1.4 La Pedagogia Matematica nell'Italia Fascista: tra idealismo, didattica e propaganda	33
1.4.1. Il dissenso della comunità dei Matematici	36
1.4.2 Dibattito Pedagogico-Didattico negli Anni Venti e Trenta	39
1.5 L'educazione matematica in Italia nel secondo dopoguerra: la defascistizzazione della scuola	48
1.5.1 Cenni all'attivismo pedagogico di Washburne	53
1.5.2 I programmi di matematica del 1945	55
1.5.3 Il contesto internazionale: la ricostituzione dell'ICMI e la Sottocommissione italiana	57
1.5.4 Il progetto di riforma Gonnella e le innovazioni pedagogiche di Emma Castelnuovo	58
1.6 La storia della matematica come riflesso delle concezioni pedagogiche di un'epoca	61
2. Dal dibattito sulla <i>Matematica Moderna</i> alla soglia del nuovo Millennio	65

2.1 Il contesto epistemologico della matematica: la rivoluzione bourbakista	67
2.2 L'influenza di Nicolas Bourbaki nei rapporti tra matematica e società, istruzione e storiografia.....	69
2.3 La riflessione internazionale sui sistemi d'istruzione: il ruolo delle matematiche e delle scienze	73
2.3.1 La conferenza di Woods Hole.....	74
2.3.2 Le conferenze dell'OEEC	75
2.3.3 Le critiche alla matematica moderna e la nascita del gruppo di ricerca internazionale <i>History and Pedagogy of Mathematics</i>	79
2.4 Il dibattito entra in Italia: la conferenza OEEC di Bologna, 1961	83
2.5 La cautela italiana verso la matematica moderna.....	84
2.5.1 La Scuola Media Unica.....	86
2.5.2 Dibattiti e proposte per i programmi della scuola secondaria	89
2.5.3 Verso il superamento della matematica moderna: i programmi del 1977 per la scuola media	92
2.6 Progetti sperimentali per la matematica a cavallo tra gli anni Settanta e Novanta	93
2.7 Sulla soglia del nuovo Millennio.....	96
2.7.1 Matematica 2001: il primo ciclo d'istruzione.....	97
2.7.2 Matematica 2003 e 2004: il secondo ciclo d'istruzione	98
2.7.3 Il riordino della scuola secondaria: le nuove Indicazioni Nazionali per i Licei e le Linee Guida per gli Istituti Tecnici e Professionali.....	99
2.8 Bilancio di un passato ancora presente.....	101
3. L'Istituzionalizzazione dell'HPM come area di ricerca: questioni e nodi epistemologici.....	103
3.1 Le origini del dibattito	103
3.1.1 Il principio di ricapitolazione genetica come epistemologia storica	103
3.1.2 L'approccio genetico e i suoi sviluppi	110

3.2 L'internazionalizzazione della ricerca e il caso italiano.....	114
3.3 Nodi epistemologici dell'HPM.....	115
3.3.1 La giustificazione all'uso della storia delle matematiche nella didattica	116
3.3.2 L'umanizzazione della matematica.....	120
3.3.3 Nuovi paradigmi matematici: pragmatismo e multiculturalismo .	125
3.3.4 Le discipline matematiche come sistemi semiotici: sincronie e diacronie	128
3.3.5 Specificità storiografiche e matematiche: i rischi di anacronismo e il loro superamento	129
3.4 La HPM alla luce della Teoria antropologica della didattica	132
3.4.1 Dal sapere sapiente al sapere insegnato: la trasposizione didattica	132
3.4.2 Prasseologie ed ecologie: storia e matematica.....	134
3.5 Aspetti didattici della HPM	135
3.5.1 Rapporto tra obiettivi e materiali didattici: una necessaria assonanza	136
3.5.2 Funzioni della storia della matematica	137
3.5.3 Storia come obiettivo e storia come strumento.....	139
3.5.4 I gradi d'integrazione della storia nel curriculum matematico	140
3.5.5 L'approccio ermeneutico e il ruolo delle fonti primarie.....	143
3.5.6 Dal discorso al metadiscorso: il contributo della teoria della Commognizione	146
3.6 Il contributo della HPM alle competenze matematiche.....	150
3.6.1 La competenza matematica: un costrutto multidimensionale.....	150
3.6.2 Il contributo della HPM al dibattito sulle competenze	153
3.7 HPM e conoscenza degli insegnanti.....	155
3.7.1 Il contributo seminale di Shulman: SMK e PCK.....	156
3.7.2 L'elaborazione di Ball: la <i>Mathematical Knowledge for Teaching</i>	157

3.8 Integrare la storia della matematica: due possibili paradigmi pedagogici	163
4. La <i>systemic review</i> con PRISMA	165
4.1 Metodologia.....	165
4.1.1 Le precedenti review sull'efficacia dell'HPM.....	165
4.1.2 Il disegno dello studio.....	168
4.1.3 Criteri di eleggibilità e di esclusione	170
4.1.4 Il processo di raccolta e selezione degli studi.....	171
4.1.5 Raccolta ed estrazione dati.....	175
4.1.6 Sintesi dei dati.....	179
4.1.7 L'analisi tematica.....	188
4.2 Risultati delle analisi e discussioni.....	191
4.2.1 Caratteristiche generali degli studi inclusi.....	191
4.2.2 Framework teorici.....	205
4.2.3 La distribuzione dei codici.....	210
4.3 Discussioni	220
4.3.1 Picchi editoriali ed incidenza pandemica nella pubblicazione accademica	220
4.3.2 Analisi tematica del cluster studenti	223
4.3.4 Analisi tematica del cluster docenti	231
4.4 Commenti conclusivi alla review sistematica: i limiti della ricerca e i gap in letteratura	238
5. Conclusioni.....	242
5.1 Le risposte alle domande della review	243
5.1.1 <i>Quali caratteristiche metodologiche possiede la ricerca empirica sulla storia della matematica con docenti e con studenti?</i>	243
5.1.2 Quali benefici si riscontrano nell'integrazione della storia della matematica nei docenti e negli studenti?.....	244
5.1.3 Esiste un modello didattico trasversalmente emergente dalla ricerca scientifica?.....	245

5.2 Riflessioni sull'integrazione della HoM nel contesto scolastico: contraddizioni ed emergenze alla luce del concetto di <i>dépaysement épistémologique</i>	248
5.2.1 Contraddizioni empiriche e fattori mediatori.....	248
5.2.2 Il <i>dépaysement épistémologique</i> come meccanismo interpretativo	249
5.2.3 Implicazioni per la formazione degli studenti	251
Bibliografia	253
Appendici.....	283
Appendice A: Tabella sinottica degli studi esaminati	284
Appendice B: Tabella valutazione qualità degli studi con MMAT.....	312
Appendice C: Tabella sinottica sulle attività sperimentate	314
Appendice D: Codebook	324
Appendice E: Matrice Studio/Codice - Studenti	340
Appendice F: Matrice Studio/Codice - Docenti	345
Appendice G: Tabella delle co-occorrenze dei codici – Studenti	350
Appendice H: Tabella delle co-occorrenze dei codici – Docenti	355

Introduzione

L'educazione matematica contemporanea si trova di fronte a una persistente contraddizione. Da un lato, la ricerca educativa internazionale riconosce da oltre mezzo secolo il valore formativo della storia della matematica nei processi di insegnamento-apprendimento, evidenziando benefici che spaziano dalla motivazione degli studenti alla trasformazione delle loro concezioni epistemologiche sulla natura della disciplina (Jankvist, 2009; Tzanakis et al., 2000). Dall'altro, questa stessa ricerca fatica a documentare incrementi significativi nei risultati di apprendimento misurati attraverso gli strumenti valutativi tradizionali, generando perplessità sulla reale sostenibilità, in termini didattici, di tale integrazione (Bütüner, 2015a; Lim & Chapman, 2015; Clark, et al., 2016).

Il paradosso si manifesta con particolare evidenza nell'analisi della letteratura scientifica più recente. Gli studi empirici documentano sistematicamente come l'esposizione a contenuti storici incrementi l'interesse, la motivazione e l'engagement degli studenti, trasformando il loro rapporto emotivo e cognitivo con la disciplina (Clark, 2012; Siu, 2006). Al contempo, le metanalisi che aggregano i risultati degli studi sperimentali controllati mostrano *effect size* modesti o statisticamente non significativi su misure standardizzate legate ai risultati dei test, sollevando interrogativi circa l'opportunità di investire tempo curricolare nell'integrazione storica (Bütüner, 2015a; Huntley & Flores, 2010). Come interpretare questa contraddizione? La storia della matematica rappresenta un lusso culturale che l'educazione di massa non può permettersi? Oppure costituisce davvero una risorsa educativa importante?

La presente ricerca sostiene che tale contraddizione sia apparente anziché reale, e che derivi da un fraintendimento categoriale fondamentale: l'integrazione della storia della matematica nell'educazione non costituisce una questione didattica, e non coinvolge primariamente la questione dei metodi, delle tecniche e delle strategie per migliorare l'efficacia dell'insegnamento, anche solo rispetto a contenuti matematici definiti, ma rappresenta una questione fondamentalmente pedagogica, ossia una scelta – individuale e sociale – che coinvolge la questione dei fini educativi, la concezione della matematica da formare e, in ultima analisi, al modello antropologico di persona “matematicamente” educata che si intende

promuovere. Riconoscere questa distinzione non significa svalutare gli aspetti metodologici o strumentali dell'uso della storia, che esistono e meritano adeguata attenzione come si avrà modo di discutere nel corso del capitolo 6, ma significa collocare tali contraddizioni dentro una cornice interpretativa più ampia, capace di illuminarne il senso profondo, giustificandone la presenza curricolare al di là delle questioni di mera efficacia: non si tratta di "incrementare" qualcosa di misurabile, come le performance o delle dimensioni cognitive attraverso test standardizzati, ma di costruire spazi di ascolto empatico e dialogo tra docente e studente con la mediazione della disciplina, consentendo di effettuare un lavoro di scoperta e formazione del proprio "sé matematico".

In tal senso, richiamare la distinzione tra pedagogia e didattica non è cosa scontata quando il principale termine di paragone costituisce la letteratura internazionale. Nel contesto anglosassone i termini *education* e *pedagogy* sono impiegati per riferirsi a ciò che nel contesto accademico italiano corrisponde alla didattica: la *mathematics education* è la didattica della matematica, opera in un orizzonte di razionalità strumentale, interrogandosi sull'efficacia e sull'efficienza dei mezzi rispetto a fini che assume come dati, impegnandosi a comprendere "come insegnare" efficacemente determinati concetti attraverso specifiche sequenze di attività intenzionalmente progettate per facilitare l'acquisizione di specifici concetti e favorire al contempo lo sviluppo di specifiche competenze. *Pedagogy* costituisce un sinonimo più ampio ma sempre riferito all'alveo delle "metodologie didattiche". Diversamente, in italiano il termine pedagogia tende ad assumere una connotazione più sfumata: operando in un orizzonte di razionalità assiologica, s'interroga criticamente sul senso e sul significato delle pratiche educative, sui loro presupposti impliciti e sulle loro conseguenze formative a lungo termine, ovvero sui fini educativi, sui valori che orientano le scelte formative e sul modello antropologico che sottende ogni proposta educativa, occupandosi dei "perché" dell'educazione.

Calare questa distinzione, ormai decennale nella tradizione delle scienze dell'educazione, sulle questioni relative all'integrazione della storia disciplinare nella didattica scolastica assume una propria specificità che consente di interpretare adeguatamente le contraddizioni riportate in letteratura. Se l'integrazione storica viene concepita come questione didattica, allora la sua legittimazione deve passare attraverso la dimostrazione di una superiorità metodologica: occorre provare che "insegnare con la storia" produce risultati migliori rispetto a "insegnare senza la storia", misurati attraverso prove standardizzate di profitto. Se, al contrario, l'integrazione storica viene concepita come questione pedagogica, allora la sua legittimazione passa attraverso la dimostrazione che essa trasforma

qualitativamente la natura dell'esperienza d'apprendimento della matematica negli studenti e nei docenti, modificando la concezione della disciplina, il rapporto con il sapere e, conseguentemente, la propria identità di soggetti matematicamente educati. Nel primo caso, la storia è un mezzo per raggiungere fini esterni ad essa nel secondo caso, la storia è parte costitutiva del fine stesso dell'educazione matematica, che non consiste nella mera acquisizione di competenze tecniche ma nella formazione di una cultura matematica consapevole (Fried, Guillemette & Jahnke, 2016). La «lunga storia» e il «vivido presente» della matematica (Clark et al., 2019, p. 1) non costituisce un prodotto finito in sé conchiuso, limitato a conoscenze e applicazioni di carattere tecnico, ma include tutto quell'insieme di pratiche caratterizzanti il “fare matematica” dei matematici: come l'utilizzo di argomentazioni euristiche, il procedere per tentativi ed errori, l'esperienza del dubbio e della confutazione, la negoziazione di significati, la ristrutturazione di framework concettuali, ecc. La scelta di presentare la matematica come prodotto finito anziché come processo storico non è neutra né puramente didattica: essa riflette e trasmette implicitamente una concezione pedagogica circa la natura della matematica (come sistema di verità atemporali o come costruzione culturale) e circa il tipo di rapporto con il sapere che si intende promuovere negli studenti (come esecutori di algoritmi o come partecipanti a una tradizione intellettuale). L'integrazione della storia, in tal senso, non costituisce un'aggiunta di contenuti a una struttura altrimenti immutata, bensì la trasformazione radicale della natura stessa di ciò che viene insegnato e appreso. Come osserva Barbin (1997), esporre gli studenti alla dimensione diacronica della matematica significa renderli partecipi di quel processo riflessivo e di *sense-making* che caratterizza l'attività matematica autentica: collegare vecchie e nuove conoscenze, interrogarsi sulle motivazioni profonde dei concetti, riconoscere pattern di continuità e rottura nello sviluppo storico. È precisamente questo tipo di apprendimento significativo (Ausubel, 1968), anziché la mera memorizzazione di procedure, che la dimensione pedagogica dell'integrazione storica persegue.

Questa impostazione di fondo costituisce l'ipotesi interpretativa che guida la struttura logica della tesi: nei primi due capitoli lo sforzo è volto a percorrere “a ritroso” il *filo rosso* che lega l'educazione matematica alla sua pedagogia, svolgendo quello che Foucault avrebbe forse definito una forma di “archeologia del sapere”. Infatti, rintracciare la presenza – o anche l'assenza, come si avrà modo di fare emergere – della storia della matematica nei curricula scolastici attraverso una ricognizione storica del dibattito educativo italiano dall'Ottocento ai giorni nostri adeguatamente impregnato delle influenze provenienti dal dibattito internazionale sul versante sia epistemologico che istituzionale, consente di mostrare come la

questione della dimensione storica si rifletta nelle concezioni pedagogiche dominanti in ciascuna epoca ed è strettamente correlata alle politiche educative adottate: l'intenzionalità di integrare o meno la storia della matematica nell'insegnamento costituisce così una questione sociale e culturale, legata alle politiche educative, alle dinamiche del mercato editoriale e allo stato dell'arte cui versa lo statuto epistemologico della scienza, prima ancora che interessare la volontà di trasposizione didattica del singolo docente. Il cosiddetto "ritorno a Euclide" che interessò i curricula scolastici dell'Italia Unità sembra essere strettamente correlato a questo tipo di dinamiche. Se nel corso dell'Ottocento (e dei primi anni del Novecento) la storia della matematica sembra trovare una propria collocazione nella formazione scolastica, supportata da specifiche impostazioni pedagogiche ed epistemologiche, la rivoluzione bourbakista e l'ingresso delle *matematiche moderne* a cavallo tra il 1960 e il 1975 determinano la scomparsa del ruolo storico della disciplina nel dibattito educativo internazionale. L'enfasi sulle strutture astratte, sull'assiomatica, il rifiuto della geometria euclidea e delle metodologie tradizionali produce una concezione pedagogica nuova, orientata alla sperimentazione e alla scoperta dei principi matematici di strutture fondamentali (algebriche, topologiche, d'ordine) che costituirebbero l'essenza della matematica stessa. In questa prospettiva, la storia della matematica viene rifiutata come possibile percorso euristico di approfondimento, portando a un sostanziale silenzio sul suo ruolo pedagogico e educativo. In reazione a questa eclissi, a partire dalla metà degli anni Settanta, emerge la *History and Pedagogy of Mathematics* (HPM) come movimento internazionale organizzato, in seno all'*International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI), contribuendo a fare riemergere la componente diacronica della disciplina come componente essenziale dell'educazione matematica: i contributi di questa branca di ricerca e i suoi nodi epistemologici e didattici sono presentati nel corso del capitolo 3, dove, metaforicamente, si giunge al *gomitolo di lana rossa* che tiene insieme le tre anime di questa tesi.

Infine, il capitolo 4 articola il percorso di revisione della letteratura scientifica di stampo empirico condotta sistematicamente adottando le linee guida PRISMA 2020. La revisione è stata guidata da una domanda che si pone "al contrario" rispetto alla tesi avanzata in questo lavoro: "*Può un curriculum orientato alla storia della matematica avere ricadute positive sui risultati d'apprendimento degli studenti?*". Al fine di dare risposta a questa domanda, si è scesi ulteriormente nei seguenti particolari:

- RQ1) Quali caratteristiche metodologiche ha la ricerca empirica su HoM ¹ con i docenti e con gli studenti?
- RQ2) Quali benefici si riscontrano nell'integrazione della HoM sui docenti e sugli studenti?
- RQ3) Esiste un modello didattico che trasversalmente emerge dalla ricerca scientifica?

L'intento della review non mira a stabilire “se la storia funzioni” in termini di efficacia didattica, ma a verificare se le evidenze empiriche mostrano il tipo di effetti attesi da una prospettiva pedagogica: trasformazioni qualitative nella concezione della matematica, cambiamenti nel rapporto emotivo e identitario con la disciplina, sviluppo di visioni epistemologiche più sofisticate. La presenza di effetti significativi su queste dimensioni accompagnata da effetti modesti o nulli sui risultati ai test scolastici costituirebbe una conferma dell'orientamento sostenuto in questa tesi: la storia della matematica opera su un piano pedagogico anziché su un piano didattico. Essa mira alla trasformazione della persona matematicamente formata e non all'incremento delle performance su contenuti predefiniti.

¹ Al fine di non appesantire la lettura dell'ultimo capitolo, quello più tecnico, si è deciso di adottare l'acronimo HoM per indicare la *History of Mathematics*.

Capitolo 1

Il ruolo della storia nell'educazione matematica dall'Italia Unita al secondo dopoguerra (1800-1955)

Livia Giacardi (2006), storica della matematica, afferma che, nella storia della matematica, i contrasti tra approcci differenti, acquistano senso se collocati all'interno del loro più ampio contesto di riferimento, consentendo di chiarire e approfondire i problemi della matematica e del suo insegnamento. Il dialogo tra i ricercatori impegnati nella ricerca matematica e il mondo scolastico, il panorama politico che colora ciascuna epoca e le divisioni ideologiche che attraversano la comunità scientifica caratterizzano il panorama dell'educazione matematica a cavallo tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento. Da queste dinamiche, ricostruite dagli storici della disciplina attraverso l'analisi di carteggi, prefazioni a libri di testo, articoli su riviste scientifiche e persino necrologi (nei quali spesso si ripercorrono le carriere di studiosi), emerge un quadro ricco di intrecci tra ricerca, didattica e politiche educative, contribuendo a delineare gli indirizzi che hanno portato alla definizione dei programmi scolastici del nascente Stato italiano. Nascono manuali più adeguati alle necessità dell'insegnamento, cresce l'attenzione per la formazione dei docenti, si sviluppano opere enciclopediche destinate ad arricchire la preparazione matematica degli insegnanti delle scuole secondarie, e si consolidano approcci più rigorosi e scientifici nello studio dei problemi legati all'educazione matematica. L'integrazione della storia della matematica nell'educazione, come si avrà modo di testimoniare attraverso questa prima ricognizione storica, non costituisce primariamente una questione didattica ma rappresenta una questione pedagogica, ossia una scelta inerente ai fini formativi, a quale concezione della matematica trasmettere e, in ultima analisi, al modello antropologico di persona che si intende promuovere.

1.1 L'Italia Unita e il *Ritorno a Euclide*

Con il Regio Decreto del 13 novembre 1859 n. 3725 del Regno di Sardegna, re Vittorio Emanuele II, nel pieno della Seconda guerra d'indipendenza (27 aprile del 1859), promulgò a Torino la legge fondativa del sistema d'istruzione italiano, su proposta del ministro della Pubblica Istruzione, Gabrio Francesco Casati, da cui ne prese il nome (D'Amico, 2010). Fu la prima normativa a organizzare in modo organico il sistema scolastico del Regno di Sardegna dalla scuola primaria all'università, e verrà successivamente "indossata" da tutto il territorio italiano unificato (D'Amico, 2010), costituendo quel nucleo legislativo del sistema d'istruzione italiano la cui struttura resterà fundamentalmente invariata fino alla riforma Gentile del 1923. Sebbene Gabrio Casati non fosse un uomo politico favorito nel clima dell'epoca, Vittorio Emanuele II aveva permesso il proliferare di quella cultura fatta di idee liberali capace di favorire il rinnovamento e l'estensione dell'istruzione popolare, i cui principi sarebbero confluiti nella legge Casati (Orecchia, 2007; D'Amico, 2010). L'unificazione e lo sviluppo economico dell'Italia unita esigevano l'abbattimento delle barriere doganali, la generalizzazione del mercato nazionale e la creazione di un'organizzazione statale, militare e burocratica, centralizzata e autoritaria (Giacardi, 2006; D'Amico, 2010). Le esigenze principali dell'Italia unificata, dunque, consistevano nel creare e promuovere, da un lato, un sistema d'istruzione adeguato a formare una classe dirigente il più possibile omogenea, capace di guidare il nuovo paese; e dall'altro, estendere e consolidare la coscienza nazionale attraverso la formazione di un ceto medio, la diffusione della lingua italiana e, conseguentemente, la riduzione dell'analfabetismo (Giacardi, 2006; D'Amico, 2010).

Secondo l'articolo 188 della legge Casati: «L'Istruzione secondaria ha per fine di ammaestrare i giovani in quegli studi mediante i quali si acquista una cultura letteraria e filosofica che apre l'adito agli studi speciali che menano al conseguimento dei gradi accademici nelle Università dello Stato». Si tratta di una visione fortemente centralizzata, che vede il ruolo dominante dell'università sullo schema d'istruzione complessivo (D'Amico, 2010). L'accentramento burocratico del sistema d'istruzione era volto a favorire l'unità linguistica, culturale e sociale dell'Italia, mentre la formazione della classe dirigente doveva basarsi sui valori della cultura umanistica (Giacardi, 2006; D'Amico, 2010). È in tal senso che si comprende la struttura del sistema d'istruzione dell'Italia postunitaria, suddivisa in scuola elementare e superiore (D'Amico, 2010). In particolare, l'istruzione elementare era articolata in due cicli: un ciclo inferiore biennale (6-7 anni di età), obbligatorio e gratuito, e un ciclo superiore, anch'esso biennale (8-9 anni di età),

presente solo nei comuni sede di istituti secondari (Giacardi, 2006; D'Amico, 2010). Quindi segue l'istruzione secondaria, impernata su due possibili binari paralleli: l'istruzione secondaria classica, distinta in ginnasio (5 anni) e liceo (3 anni), aveva lo scopo di istruire i giovani negli studi umanistici fornendo quella formazione letteraria e filosofica che fosse propedeutica all'accesso ai corsi universitari e al conseguimento dei titoli accademici presso gli atenei statali, di fatto costituendo la formazione per la classe dirigente; e l'istruzione tecnico-professionale, gestite da Scuole e Istituti Tecnici e di durata triennale, che prevedeva una formazione definita nell'articolo 272 come "generale e speciale", volta a preparare i giovani alle carriere di servizio pubblico, industria, commercio e agraria (Giacardi, 2006; D'Amico, 2010). Altro percorso previsto dall'ordinamento della legge Casati è la formazione dei docenti di scuola elementare, affidata alle scuole Normali e di durata triennale, cui si accedeva a 16 anni previo superamento di un esame di ammissione (D'Amico, 2010).

L'unificazione dell'Italia e la fondazione del sistema d'istruzione nazionale, attraverso l'emanazione della Legge Casati, contrassegnò un momento di discontinuità non soltanto dal punto di vista ordinamentale, ma anche e soprattutto dal punto di vista dei programmi scolastici, con particolare riguardo per la matematica (Pepe, 2006). L'ordinamento dei programmi, infatti, era stato costruito intorno alla scuola secondaria, con il liceo classico come asse portante; mentre le discipline scientifiche e le relative facoltà erano aperte soltanto dalla specifica sezione fisico-matematica dell'istituto tecnico, creata poco dopo nel 1860 (Giacardi, 2006; D'Amico, 2010).

«Con alti e bassi, questa sezione per un sessantennio rappresentò il ramo di scuola secondaria in cui la matematica aveva il posto di maggiore rilievo, ed ebbe il merito di formare, tra l'altro, matematici di alto profilo scientifico quali Vito Volterra, Corrado Segre e Francesco Severi» (Giacardi, 2006, p. 2-3).

In tal senso, dal punto di vista formativo la matematica acquisiva una propria specificità soltanto all'interno di questo ramo dell'istituto tecnico, almeno fino all'istituzione del liceo scientifico ad opera della riforma Gentile. Questo perché, nell'impostazione data dalla Legge Casati, le discipline scientifico-matematiche avevano un ruolo marginale nei primi tre anni del ginnasio, delineando un quadro che resterà pressoché invariato fino al secondo dopoguerra negli anni Sessanta (Giacardi, 2006; D'Amico, 2010). Tuttavia, pur restando fondamentalmente

inascoltati, non mancarono voci di eminenti matematici dell'epoca attivamente impegnati nell'insegnamento che si inserirono a vario titolo nel dibattito sul ruolo formativo delle matematiche, interagendo e rinnovando il sistema editoriale e stimolando il coinvolgimento, attraverso la fondazione di associazioni di insegnanti in cui i docenti poterono esprimere il proprio parere, discutere i programmi scolastici e contribuire, dal basso, al dibattito nazionale e internazionale (Giacardi, 2006).

Per l'emanazione dei programmi di matematica si dovrà attendere l'emanazione del decreto Coppino nel 1867. Si tratta di una svolta importante, poiché ispiratore dei programmi di matematica e delle relative indicazioni metodologiche fu Luigi Cremona, geometra che scelse gli *Elementi* di Euclide come manuale di riferimento della geometria nei ginnasi e nei licei (Giacardi, 2006). Una mossa che potremmo definire “strategica”, dettata non soltanto da un preciso orientamento epistemologico, che vedeva la geometria scevra da legami con l'algebra, ma anche e soprattutto per la condizione in cui versava la formazione dei docenti di allora. Infatti, come documenta Giacardi (2006), sebbene Cremona auspicasse un rinnovamento più profondo dei programmi e dell'istruzione matematica italiana (come si evince da alcuni suoi articoli nonché dalla corrispondenza tenuta dall'autore), il così detto “ritorno ad Euclide” costituisce una soluzione di compromesso volta a risollevare la condizione di scarsa qualità in cui versava l'insegnamento della matematica in Italia, caratterizzata da una preparazione inadeguata dei docenti di matematica, che per esercitare la professione non necessitavano di una laurea nelle discipline scientifiche. Consapevole della condizione cui versava l'istruzione scientifica in Italia, nel decreto Cremona delinea una visione dei programmi liceali classici come strumenti di “ginnastica intellettuale” volti a coltivare e sviluppare le facoltà logiche e di ragionamento necessarie a distinguere la verità dall'apparenza:

«La matematica nelle scuole secondarie classiche non è da risguardarsi solo come un complesso di proposizioni o di teorie, utili in sé, delle quali i giovanetti debbano acquistare conoscenza per applicarle poi ai bisogni della vita; ma principalmente come un mezzo di coltura intellettuale, come una ginnastica del pensiero, diretta a svolgere la facoltà del raziocinio, e ad aiutare quel giusto e sano criterio che serve di lume per distinguere il vero da ciò che ne ha soltanto l'apparenza» (Decreto Coppino, 1867).

Si tratta di una prospettiva sulle matematiche da ricondurre a una visione complessiva che vede la disciplina come strettamente correlata alla filosofia e in particolare alla logica. Nel decreto Coppino il programma viene delineato a grandi linee ed è ripartito nel triennio che va dal V ginnasio al I e II liceo, insistendo soprattutto sul metodo: se insegnata con il metodo degli antichi, in particolare il metodo euclideo, la geometria risulta non soltanto più adatta a formare nei giovani l'attitudine al rigore nei processi di ragionamento, ma anche più semplice e attraente dell'algebra. Questa predilizione della geometria all'algebra era dovuta anche a un certo pregiudizio di fondo dovuto alla predilizione nei confronti di una presunta geometria pura: «Soprattutto non intorbidì la purezza della geometria antica, trasformando teoremi geometrici in formole algebriche, cioè sostituendo alle grandezze concrete [...] le loro misure» (Decreto Coppino, 1867). Una posizione che concepisce il sapere matematico non come unico grande edificio disciplinare, ma come un agglomerato di scienze particolari, ognuna con una propria specificità. Di conseguenza, al fine di conferire efficacia educativa all'insegnamento della geometria, seguendo l'esempio delle scuole inglesi l'autore propose un vero e proprio "ritorno agli *Elementi* di Euclide", visto ed osannato come modello di rigore geometrico perfetto (Giacardi, 2006). Diversamente, l'insegnamento dell'aritmetica avrebbe dovuto seguire un approccio deduttivo e dimostrativo, mentre nell'algebra gli allievi sarebbero stati introdotti allo studio dei limiti, partendo dal concetto di funzione e di "numero incommensurabile" (Decreto Coppino, 1867). In generale, è possibile constatare come tra i diversi filoni delle scienze matematiche, fu in special modo la geometria a influenzare il dibattito sulla pedagogia e la didattica della matematica di fine secolo poiché, meglio di ogni altro settore della matematica, la geometria consente di focalizzare meglio il problema dell'insegnamento, evidenziando quel delicato rapporto che sussiste fra *formazione* e *informazione*. Non stupisca, dunque, come l'impronta pedagogica scelta dall'autore sia perfettamente in linea con la proposta educativa di Lacroix, sicché ciò che risulta pregnante non è che «ciascuna parte del programma sia svolta con grande estensione, e condotta a minuti particolari; possono invece bastare le proposizioni fondamentali e più generali; ma è necessario che si vada innanzi senza salti, che tutto sia coscienziosamente dimostrato colla più severa esattezza, e che nessuno dei punti toccati rimanga oscuro o dubbioso» (Decreto Coppino, 1867). Il che implica una consapevolezza della gradualità e della consequenzialità degli argomenti trattati nel processo di insegnamento, ovvero quel delicato sistema di rimandi che caratterizza quello che oggi chiamiamo "curricolo verticale". Dal punto di vista strettamente pedagogico, lo scopo dell'insegnamento matematico non coincide col fornire agli studenti conoscenze matematiche, quanto, piuttosto,

fornire loro un metodo e un'attitudine a quello che oggi chiameremmo *problem solving*, l'attitudine ad affrontare i problemi: una qualità che nel complesso assume una funzione strumentale indispensabile per tutti i coloro che avrebbero affrontato gli studi universitari e che un giorno avrebbero costituito la classe dirigente della neonata nazione.

Riga e compasso, gli strumenti di Euclide, si configurano, nell'economia curricolare dell'epoca, come strumenti per testare, confutare e disvelare la verità della realtà. Come documentato da Giacardi (2006), tutti questi aspetti trovano peculiare esplicitazione negli sforzi dell'autore volti a curare la traduzione italiana de *Gli Elementi d'Euclide con note aggiunte ed esercizi ad uso de' ginnasi e de' licei per cura dei professori Enrico Betti e Francesco Brioschi*, pubblicato nel 1868. Promulgando tale testo come riferimento scolastico unico, Cremona si proponeva di superare quei manuali compilati per pura speculazione dai docenti ma privi di rigore scientifico o adeguatezza didattica, così spingendo il sistema editoriale a pubblicare manuali scolastici nazionali di buona qualità. Uno sforzo che a ben vedere scosse il sistema editoriale italiano e le comunità degli insegnanti, poiché il testo di Cremona non era esente da criticità: si trattava di una traduzione italiana degli *Elementi* di Euclide priva di alcuna forma di mediazione didattica del linguaggio e del contenuto (Giacardi, 2006). In tal senso, non piacque né ai docenti, che lo considerarono carente sul piano didattico, né ai matematici stessi, che percepirono come un ritorno al passato e una chiusura verso le nuove scoperte della geometria, che nel frattempo andava progressivamente maturando un connubio con l'algebra. Il dibattito si accese ulteriormente a seguito della traduzione di un articolo del matematico britannico J. M. Wilson, pubblicato nel 1868 e tradotto da Battaglini, che criticava scientificamente e didatticamente gli *Elementi* di Euclide, vedendolo come vecchio, artificioso, illogico e inadatto all'istruzione (Giacardi, 2006). Cremona stesso dovette ammettere che in vari punti gli *Elementi* avrebbero dovuto essere semplificati, purché non travisati e ancorati alla geometria pura (Giacardi, 2006). È opportuno ricalcare come questa operazione editoriale fosse indirizzata soprattutto ai docenti: si trattò di un vero e proprio shock volto a muovere le acque stagnate in cui riversava l'insegnamento della matematica in Italia, consentendo di mettere in luce l'esigenza di approfondimento epistemologico delle matematiche – sui loro fondamenti, i metodi di insegnamento della geometria, l'indipendenza o meno della geometria dall'algebra e l'aritmetica nonché il rapporto, sul piano logico-argomentativo, fra rigore e intuizione. Dal punto di vista del sistema editoriale, invece, favorì la fondazione di nuove riviste dedite ai problemi d'insegnamento della matematica nonché la pubblicazione di nuovi manuali di geometria di alto spessore da parte di alcuni matematici italiani

dell'epoca che, confrontando tra loro impostazioni metodologiche diverse, ebbero modo di stimolare il dibattito sull'insegnamento della matematica (Giacardi, 2006).

In tal senso, emerge come educazione ed epistemologia disciplinare siano tra loro strettamente correlate, in quanto tra l'una e l'altra avviene un'operazione di vera e propria trasposizione didattica (Chevallard, 1989, 2019). L'operazione editoriale di Cremona, pur criticata per rigidità e mancanza di mediazione didattica, raggiunse l'obiettivo di stimolare il dibattito epistemologico e pedagogico sulla matematica (Giacardi, 2006). Nei decenni successivi apparvero manuali di geometria e algebra che, pur ispirandosi a tradizioni diverse (la geometria algebrica di Enriques e Amaldi, la logica matematica di Peano) condividevano l'esigenza di superare l'impostazione dogmatica euclidea valorizzando i processi euristici e le connessioni con altre discipline (Giacardi, 2006). Si tratta di proposte editoriali costruite attorno a una visione epistemologica non fondata sull'autorevolezza di un solo testo, ma sulla scoperta e la valorizzazione dei percorsi di costruzione del sapere matematico, sebbene ciascun autore valorizzasse sfumature diverse in funzione della branca disciplinare insegnata (Giacardi, 2006).

1.2 Gli sforzi di rinnovamento di fine Ottocento: gli effetti dell'“operazione Euclide”

Il quadro delineato da Giacardi (2006) tratteggia il periodo compreso tra l'Unità d'Italia e i primi decenni del Novecento come uno scenario caratterizzato da un intenso fermento politico e sociale, accompagnato da un significativo progresso della ricerca scientifica: in quegli anni la scuola italiana di geometria algebrica ottenne risultati di rilievo internazionale e, parallelamente, Giuseppe Peano aprì nuove prospettive negli studi di logica matematica. Sul finire dell'Ottocento si sviluppò, inoltre, un legame fecondo tra la matematica elementare e la ricerca avanzata: molti studiosi impegnati nella ricerca pura si dedicarono anche alla stesura di manuali scolastici, alla definizione di politiche culturali, alla progettazione di una legislazione educativa più moderna e alla formazione degli insegnanti. In questo contesto si consolidò anche un vivace scambio tra università e scuola secondaria con docenti universitari che avviavano la propria carriera come docenti di scuola media mentre alcuni docenti delle scuole secondarie tenevano corsi universitari, arricchendo così l'insegnamento con l'esperienza maturata in entrambi i contesti. Sicché, la nascita di una stampa editoriale italiana dedicata alla didattica disciplinare è una delle manifestazioni di questo clima di profondo rinnovamento, testimoniato anche dalla fondazione delle Scuole di Magistero nel

1875, volte alla formazione del corpo docente, delle prime associazioni di docenti, come l'*Associazione Mathesis fra gli insegnanti di matematica delle scuole medie*, fondata da Rodolfo Bettazzi nel 1895 a Torino, volto a incrementare la formazione dei docenti sotto il profilo didattico e scientifico e di migliorare, così, la scuola. Si tratta di arene politiche entro cui i docenti ebbero modo di dibattere e far sentire la propria voce in merito ai provvedimenti legislativi che caratterizzavano la scuola secondaria italiana. Inoltre, nel 1901 la *Federazione Nazionale Insegnanti Scuola Media* fu fondata con scopi dichiaratamente politici e indirizzo democratico, volta a tutelare i diritti economici e giuridici dei docenti, promuovendo, così, il miglioramento delle scuole secondarie.

Tuttavia, nonostante questo forte movimento di scambio e rinnovamento, culturale e pedagogico, riconosciuto anche sul fronte internazionale, non si assistette a un effettivo cambiamento istituzionale capace di valorizzare la matematica dal punto di vista sociale, né a un miglioramento della qualità dell'insegnamento (Giacardi, 2006). I provvedimenti legislativi emanati tra il 1881 e il 1904, concernenti le ore i contenuti dei programmi, erano caratterizzati dall'assenza della geometria analitica e del calcolo differenziale, testimoniando come i rapporti tra geometria e algebra, e quindi anche tra matematica e realtà durante il terzo anno degli istituti tecnici, non fossero adeguatamente riconosciuti: in linea di massima si continuò, quindi, a prediligere il metodo razionale su quello grafico intuitivo (Giacardi, 2006). Infatti, in linea con questo quadro situazionale, negli anni Ottanta del XIX secolo, le relazioni sugli esami di licenza liceale mostrano che l'efficacia dell'insegnamento risultava in molti casi inadeguato se posto a confronto con il sistema di istruzione delle altre nazioni europee, soprattutto tedesche:

«Innanzitutto rilevava un numero eccessivo di ore dedicato alla lingua patria e la mancanza dell'insegnamento delle lingue straniere e poi, per quanto riguarda la matematica, l'assenza di alcuni temi quali la geometria analitica e il calcolo differenziale (che in Prussia erano previsti come argomenti complementari fin dal 1882), lo scarso coordinamento fra l'insegnamento della matematica e quello della fisica e, infine, l'adozione di un metodo didattico esclusivamente razionale con poco spazio alle applicazioni» (Giacardi, 2006, p. 17).

A quarant'anni dall'Unità d'Italia, vari fattori indicavano in modo palese l'urgenza di una riforma. I congressi della *Mathesis* tra la fine dell'Ottocento e i

primi anni del Novecento (Torino 1898, Livorno 1901, Napoli 1903, Milano 1905) segnarono un passaggio importante: gli insegnanti cominciarono a partecipare attivamente al dibattito sulla politica scolastica, mettendo in luce le gravi carenze della scuola secondaria (Giacardi, 2006). Al tempo stesso, il rapido mutamento del contesto sociale (come l'aumento degli iscritti) e l'influenza dei movimenti di riforma europei (in particolare l'influenza di Felix Klein in Germania), evidenziavano l'incapacità del sistema italiano di adeguarsi pienamente alle nuove esigenze educative (Giacardi, 2006).

1.2.1 Epistemologia e pedagogia matematica in Felix Klein

La concezione di Cremona, pur pedagogicamente consapevole, restava ancorata a una visione della matematica (e della geometria in particolare) come disciplina formale, il cui valore risiedeva nel rigore logico e dimostrativo. Ben diversa era la prospettiva che emergeva in quegli stessi anni in Germania con Felix Klein, che merita un focus specifico sul suo contributo nell'insegnamento della matematica: il ben noto Programma di Erlangen da lui ideato, nel 1872, ebbe una risonanza tale da influenzare il dibattito sui programmi scolastici anche in Italia.

Felix Klein si formò a Berlino nella scuola matematica di Plücker, focalizzandosi su aspetti specifici della geometria analitica. All'età di 23 anni ricevette la richiesta di entrare come lettore nell'università di Erlangen (Norimberga), dove espose il suo programma di insegnamento alla comunità accademica sotto forma di *Antrittsvorlesung*, che non fu solo una lezione, ma un vero e proprio discorso inaugurale in cui espose un'idea rivoluzionaria per la geometria dell'epoca: similmente a quanto fece secoli prima Cartesio con l'algebra simbolica, allo stesso modo Klein vedeva un elegante e strettissimo rapporto tra geometria e algebra generale delle strutture. Una prospettiva di incredibile modernità che concepisce in modo unificato l'epistemologia della geometria e dell'algebra, proseguendo quel percorso di unificazione della matematica che, passando in seguito per l'opera di Bourbaki, cambierà il rapporto tra matematica, le discipline scientifiche attigue e l'educazione stessa della disciplina. Come scrive Boyer (1982), Klein s'interessò apertamente alle questioni relative all'insegnamento, esercitando un forte influsso sugli ambienti pedagogici. In particolare, è a partire dalla metà degli anni Novanta del XIX secolo che Klein cominciò a interessarsi al problema della formazione dei docenti, organizzando seminari espressamente rivolti ad essi allo scopo di tentare un'inversione di quella tendenza, allora prevalente nella didattica scolastica, la quale verteva troppo su

approcci formali e astratti, promuovendo, di contro, maggiori collegamenti con le altre discipline scientifiche e lo sviluppo dell'intuizione spaziale.

«Mi pareva che l'insegnamento di tipo matematico scientifico fosse troppo grettamente legato alle competenze specifiche dei vari docenti. Mi pareva che esso andasse modificato: anzitutto bisognava, ancor più che in passato, porre in primo piano il legame fra tutte le discipline scientifiche e contrastare un'eccessiva specializzazione, priva d'idee guida generali; in secondo luogo, si doveva includere la Matematica applicata nell'insegnamento delle discipline per cui essa è rilevante, come la Tecnica, l'Astronomia, la Geodesia, le Assicurazioni; infine bisognava organizzare, come un tutto organico, l'intero settore dell'apprendimento matematico dai primi inizi, nella scuola elementare, fino alla più alta ricerca scientifica» (Klein, 2000; citato in Giacardi, 2006, p. 20-21).

Klein illustra le sue idee sull'organizzazione scolastica tedesca e i punti cardine del programma di riforma scolastica in matematica, la cui portata ha investito anche il dibattito sulla riforma scolastica italiana, in un congresso tenutosi nel 1905 a Merano: tre percorsi paralleli di scuola secondaria (*Gymnasium*, *Realgymnasium* e *Realschule*) avrebbero dovuto essere considerati come equivalenti dal punto di vista dei programmi di matematica, a loro volta ridefiniti per rendere il più possibile agevole il passaggio orizzontale da una qualsiasi scuola secondaria al sistema d'istruzione superiore (università e scuola politecnica). Una tale riforma rendeva necessario un rinnovamento profondo dell'istituzione scolastica tedesca, appianando le conoscenze e competenze in uscita che differenziavano i tre curricula scolastici, di fatto consentendo agli studenti di *Realschule* e *Realgymnasium* di accostarsi alla geometria analitica, al calcolo differenziale e integrale, fino ad allora trattato solo nel *Gymnasium*: la grande novità dell'epoca era una preparazione più completa sicché a prescindere dalla provenienza scolastica, a tutti gli studenti sarebbe stato offerta una base matematica sicura per gli studi superiori. Tuttavia, non essendo riuscito ad attuare la riforma per decreto del ministero dell'istruzione, tentò di ottenere l'appoggio dei docenti incentivando cambiamenti "dal basso": «Il pensiero funzionale divenne lo slogan di questo suo movimento di riforma e alcune scuole pilota cominciarono a sperimentare i nuovi programmi» (Giacardi, 2006, p. 22). Klein così innova l'educazione matematica e scientifica sforzandosi di colmare la frattura fra insegnamento secondario e universitario, valorizzando le applicazioni della matematica a tutte le scienze naturali, ponendo l'accento all'importanza delle

applicazioni e il ricorso a problemi reali, l'uso dei modelli geometrici per l'insegnamento della geometria e l'accento al punto di vista storico e filosofico della disciplina al fine di catturare l'interesse dell'allievo presentando la disciplina in modo intuitivo. Tutto questo era possibile per la matematica della scuola secondaria ponendo al centro dei curricula scolastici i concetti di funzione e di trasformazione. L'insegnamento della matematica attraverso la storia era reso possibile, secondo l'autore, facendo ricorso al cosiddetto "metodo genetico", consistente nel presentare una teoria seguendo il modo con cui essa si è sviluppata nella storia e non nella sua formulazione finale.

In Italia furono soprattutto i matematici di due scuole di pensiero ad apprezzare l'impostazione didattica e pedagogica di Felix Klein: i geometri algebrici e i logici matematici influenzati da Peano. Tra questi ultimi, infatti, spicca una testimonianza di alto valore storico, un articolo di Bettazzi intitolato *La pratica nell'insegnamento della matematica*, in cui l'autore espone i propri assunti didattici facendo esplicito riferimento all'impostazione di Klein: da un lato, come Peano, Bettazzi è un sostenitore di quel rigore logico indispensabile per la chiarezza e la semplicità espositiva; dall'altro, come Klein, ritiene necessario e utile nella didattica l'uso dell'intuizione affinata attraverso l'applicazione pratica anche in assonanza con discipline limitrofe, come la fisica o la topografia.

1.2.2 La Scuola logica di Giuseppe Peano: epistemologia, storia e didattica

L'influenza di Klein in Italia non fu uniforme. Mentre i geometri algebrici (come Enriques e Castelnuovo) ne apprezzarono soprattutto l'approccio sintetico e intuitivo, i logici della scuola di Peano, matematico italiano di grande rilievo, svilupparono una riflessione autonoma sul rapporto tra storia e insegnamento (Luciano, 2006; Furinghetti, 2006). Giuseppe Peano costituisce una figura cardine nel panorama culturale della matematica italiana di fine Ottocento. Studioso di analisi, raggiunse grandi traguardi nel calcolo differenziale e integrale, fondò ciò che oggi conosciamo come calcolo vettoriale e diede fondazione assiomatica alla teoria dei numeri naturali, rispetto ai quali adottò una spiegazione basata sul concetto di classe (Luciano e Roero, 2008; D'Amore e Sbaragli, 2020). Ponendosi sul solco di Leibniz e conosciuto per il suo contributo alla logica matematica, Peano cercò di individuare il sistema più semplice di concetti logici, necessari e sufficienti, per esprimere in forma simbolica le verità matematiche e le relative dimostrazioni: la ricerca di un linguaggio matematico universale, conciso, chiaro e univoco nell'interpretazione (Luciano e Roero, 2008; Luciano, 2012; D'Amore e Sbaragli, 2020). Questo impegno si tradusse in ambiziosi progetti scientifici e editoriali: il

Formulario di Matematica (in cinque edizioni), la *Rivista di Matematica* (attiva fra il 1891 e il 1906) e il *Dizionario di Matematica*.

Dotato di salda padronanza delle lingue classiche e di profondo interesse per la storia della disciplina, Peano elaborò una visione originale dell'insegnamento della matematica, incentrata sul ruolo motivante della storia (Luciano, 2006; Furinghetti, 2006). La sua proposta consisteva nell'insegnare matematica «con metodo storico preciso» al fine di infondere «negli allievi, senza alcuna coercizione, amore per la scienza» (Gliozzi 1932, p. 255). Dal punto di vista epistemologico, per Peano la storia consente di dare fondamento a una disciplina giunta alla propria maturità, mettendo in evidenza sia le ragioni logiche delle verità matematiche sia le interconnessioni storiche soggiacenti allo sviluppo delle teorie. Il graduale processo di formalizzazione viene inquadrato come risposta all'esigenza di rigore (Luciano, 2006). Sul piano didattico, la storia permette di contestualizzare i risultati recenti della ricerca individuando i «precursori» di concetti, assiomi, teoremi e metodi attraverso lo studio critico, diretto e comparato delle fonti originali: opere a stampa, carteggi, manoscritti e documenti storici di differenti civiltà, uniti dal valore universale delle verità matematiche (Luciano, 2006). In tal senso, nel lavoro scolastico-editoriale della scuola di Peano, assumono un ruolo chiave l'accuratezza delle trascrizioni e dell'analisi semantica, l'importanza delle ricostruzioni etimologiche e il legame con le ricerche fondazionali (Luciano, 2006). Tuttavia, Peano non fu uno storico della matematica in senso stretto. Pur evidenziando componenti dell'indagine storiografica di importanza indiscutibile, la sua concezione rivela oggi limiti oggettivi, come una visione rettilinea del progresso matematico che pone l'accento sulle sole verità che hanno contribuito all'avanzamento della scienza, senza cogliere deviazioni e percorsi alternativi (Luciano, 2006; Luciano & Roero, 2008). Ciononostante, Peano e i suoi allievi mostrano una corretta percezione della dimensione storica delle differenti discipline matematiche, non cadendo nella mera aneddotica. L'impostazione di Peano trovò fortuna nei testi curati dagli allievi della sua scuola, i cui manuali prevedevano apparati di note storiografiche capaci di integrare la matematica con un ampio panorama concettuale in cui essa si coniuga con le discipline umanistiche quali storia, filosofia, lettere, arte e tecnica. «L'indagine storica mira soprattutto a rintracciare le linee fondamentali della storia del simbolismo, indicando come sono stati introdotti i segni per le operazioni fondamentali» (Luciano, 2006, p. 294). La fortuna di questi manuali della scuola torinese è testimoniata dalle numerose edizioni prodotte, pur restando sempre contrastata e criticata per lo stile d'insegnamento basato sulla ricerca autonoma (Luciano, 2006).

Dalle premesse teoriche derivano proposte concrete per migliorare l'insegnamento della matematica a tutti i livelli. Peano raccomandava ai docenti di non limitarsi alla comunicazione di formule da apprendere mnemonicamente, ma di integrare le lezioni con conoscenze capaci di alimentare la riflessione su genesi, sviluppo, applicazione e fortuna dei concetti trattati (Luciano, 2006). Particolare

rilievo assumeva il confronto diretto coi testi matematici classici: la lettura di pagine significative di Euclide, Archimede o Apollonio era ritenuta indispensabile come approfondimento scientifico, condotto sulla falsariga dell'analisi letteraria o filosofica (Luciano, 2006). In qualità di relatore presso la Mathesis, Peano raccomandava ai docenti di perseguire rigore e chiarezza espositiva, privilegiando un linguaggio essenziale privo di ridondanze, e di ricorrere a ogni strumento capace di stimolare l'interesse per la matematica, traendo spunti curiosi dalla vita quotidiana o dalla tradizione scientifica ed elaborando giochi e problemi ingegnosi (Luciano & Roero, 2008).

Nel 1902 Peano pubblicò l'*Aritmetica generale ed Algebra elementare*, manuale di base per i docenti di scuola secondaria modellato sulla base del precedente *Formulario*, in cui applicò le sue teorie logiche alla manualistica elementare. L'aritmetica doveva avere caratteri di semplicità, chiarezza, razionalità e praticità: occorreva superare il verbalismo e l'apprendimento mnemonico in favore di spiegazioni semplici con chiari risvolti applicativi (Luciano, 2006). Esempi e quesiti dovevano essere "sensati" nell'impostazione e nei risultati, fornendo gli strumenti matematici necessari per affrontare i problemi della vita quotidiana (Luciano, 2006). Nonostante l'aderenza ai programmi ministeriali, l'uso massiccio di simbolismo, il linguaggio formale e l'alta condensazione testuale fecero di questo testo una rottura nel panorama editoriale italiano, che venne aspramente criticato sia dai matematici (che vi vedevano i difetti del *Formulario*) sia dai docenti, costretti a una costante e impegnativa attività di mediazione didattica (Luciano, 2006). Elemento di originalità era il fornito apparato di note storico-critiche mutate dal *Formulario*, con puntuali indicazioni bibliografiche, rimandi a edizioni critiche dei classici, glossari e citazioni in lingua originale (Luciano, 2006). Fra gli argomenti documentati con particolare cura emergono i sistemi di numerazione, i regoli di Nepero e l'aritmetica binaria, la storia dei logaritmi, delle progressioni aritmetiche e delle unità di misura (Luciano, 2006). Se l'insegnamento dell'aritmetica deve stimolare l'intelligenza creativa e critica, non stupisce che Peano attribuisse grande importanza agli indovinelli e ai rompicapi (Luciano, 2006; Luciano & Roero, 2008). Nel 1924 pubblicò *Giochi di aritmetica e problemi interessanti*, destinato ai maestri di scuola elementare. Previsti nei programmi scolastici, i giochi matematici erano poco diffusi nei libri di testo, nonostante l'indubbio pregio di catturare l'attenzione dei bambini e svilupparne la sagacia (Luciano & Roero, 2008). Il testo illustra quadrati e triangoli magici, tavole misteriose, problemi capziosi e operazioni curiose come la moltiplicazione fulminea, i giochi sui numeri sferici e l'aritmetica parlata.

A partire dal 1910, nonostante fosse stato rimosso dall'insegnamento dell'Analisi superiore, Peano mantenne attivo l'impegno pedagogico rivolgendo i propri sforzi ai legami tra università e scuola. Si dedicò ai problemi della formazione degli insegnanti e della didattica della matematica, partecipando intensamente alle attività della Mathesis, prestando servizio nelle commissioni per

gli esami di maturità e conducendo le Conferenze Matematiche Torinesi tra il 1915 e il 1924 (Luciano, 2006; Luciano & Roero, 2008). Queste idee, portate avanti dai suoi allievi, confluirono nel dibattito che coinvolse la successiva Commissione Reale, trovando timido riscontro nei programmi della Riforma Gentile (Luciano, 2006). Gli sforzi di Peano riuscirono a stimolare il dialogo fra cultura umanistica e scientifica e a proporre un insegnamento interdisciplinare, in un'originale e modernissima sintesi delle attività di ricerca matematica, storica e didattica che costituisce uno dei lasciti più duraturi della Scuola di Peano nella cultura italiana.

1.3 La Commissione Reale e il dibattito di riforma per la Scuola Secondaria

Le idee pedagogiche di Peano, mediate dai suoi allievi e in particolare da Giovanni Vailati, nonché le proposte di rinnovamento scolastico proposte da Klein in Germania, trovarono una propria espressione istituzionale nei lavori della Commissione reale, istituita nel 1905 su proposta del ministro della Pubblica Istruzione, Leonardo Bianchi, al fine di studiare e paragonare l'ordinamento degli studi secondari italiani con quelli vigenti negli altri Stati europei, gettando le basi per una futura riforma della scuola secondaria (Giacardi, 2006). La commissione era composta da insegnanti di scuola media, ispettori ministeriali e docenti universitari, fra i quali lo storico Gaetano Salvemini e il matematico Giovanni Vailati, quest'ultimo della scuola di Peano (Giacardi, 2006). Il progetto della scuola media inferiore, unica e triennale, era volto a prevenire una scelta prematura dell'indirizzo di studi successivo: «A questo ciclo inferiore unico dovevano seguire tre rami della scuola media superiore ciascuno con caratteri ben distinti» (Giacardi, 2006, p. 26).

Come documenta Giacardi (2006), la proposta non era nuova, poiché vari ministri sin dagli anni dell'Italia postunitaria se ne erano fatti promotori senza riuscire ad attuarla: Giovanni Maria Bertini (1865), Michele Coppino (1867), Paolo Boselli (1888), Ferdinando Martini (1893) e ad altre proposte analoghe successive. Si tratta di proposte attentamente esaminate dalla Commissione reale, evidenziando pregi e difetti per trarne indicazioni, accompagnata da un'ampia inchiesta che trasversalmente coinvolse i docenti delle scuole medie, degli istituti superiori e delle facoltà universitarie, alimentando un vivace dibattito cui contribuirono significativamente le associazioni di insegnanti, tra cui la *Mathesis*, generalmente favorevoli alla media inferiore unica con accesso a tre possibili rami di scuola superiore, sottolineando il valore formativo delle scienze e l'importanza di differenziare l'approccio all'insegnamento matematico nei due ordini: espositivo

nella scuola media inferiore e deduttivo nella scuola superiore (Giacardi, 2006). Tali interessanti proposte, tuttavia, si arenarono:

«Proprio i contrasti circa l'unificazione delle scuole medie inferiori, la convinzione che il latino non potesse essere proposto alle masse, né rinviato al quinquennio delle superiori e anche la difficoltà ad accettare una *humanitas* scientifica, fin dal 1906 avevano creato all'interno della Commissione reale opposizioni che condussero alle dimissioni di alcuni membri, fra i quali Salvemini stesso» (Giacardi, 2006, p. 30).

L'avversione di Salvemini rifletteva una concezione della cultura umanistica (legata al latino e destinata alle élite) come scissa dalla formazione tecnico-scientifica (destinata alla preparazione professionale), volta a dare a ogni classe sociale una scuola corrispondente ai propri bisogni. La conclusione cui pervenne la Commissione si concretizzò nel febbraio 1908, con un disegno di legge che proponeva due percorsi paralleli: uno tecnico professionale, di tre anni con accesso all'istituto tecnico, e una scuola media triennale unica, senza latino, con accesso ai tre rami del liceo: classico (con latino e greco), scientifico (con due lingue moderne e potenziamento della sezione scientifica), e moderno (con latino e due lingue straniere). Tuttavia, la proposta della Commissione reale non fu varata: la riforma scolastica si era arenata sulle scogliere belliche della storia quando il 5 maggio del 1915 l'Italia scelse di scendere sul campo della Grande Guerra. Il dibattito, così, si arrestò ed ebbe modo di proseguire soltanto sulla soglia degli anni Venti, all'interno di un contesto culturale, sociale ed economico profondamente mutato, dominato non più dal positivismo, bensì dall'Idealismo del Ministro Giovanni Gentile.

1.3.1 Giovanni Vailati e la *humanitas* scientifica

Le idee pedagogiche di Peano, mediate dai suoi allievi, e le proposte di rinnovamento promosse da Klein in ambito internazionale trovarono espressione istituzionale nei lavori della Commissione reale per la riforma della scuola secondaria, istituita nel 1905. Tra i membri della Commissione figurava Giovanni Vailati, matematico, filosofo e membro della scuola di Peano, al quale fu affidato il compito di redigere i programmi di matematica e le relative indicazioni metodologiche per la scuola media inferiore unica e per i tre licei proposti (classico, scientifico, moderno) (Giacardi, 1999, 2006). Vailati rappresenta una figura emblematica per comprendere come, all'inizio del Novecento, il dibattito sul ruolo della storia nell'insegnamento matematico si fosse progressivamente emancipato

da una funzione meramente erudita per assumere una portata pedagogica ed epistemologica consapevole. Nel pensiero di Vailati confluiscono istanze positivistiche, in particolare il principio secondo cui il processo di apprendimento procede gradualmente dal concreto all'astratto, la lezione della scuola di Peano, con la sua attenzione al rigore logico e alla democratizzazione del sapere, e l'influenza del pragmatismo americano con la sua concezione dei concetti come strumenti operativi (Giacardi, 1999, 2006).

La critica che Vailati rivolge alla scuola tradizionale, già visibile dalla recensione del testo di Laisant del 1899, *La Mathématique: philosophie, enseignement*, si articola intorno all'opposizione tra un modello di insegnamento basato sul verbalismo e l'apprendimento passivo, che riduce la scuola a «una palestra mnemonica» anziché a «un istituto di cultura intellettuale», e una visione alternativa in cui l'allievo è «occupato a imparare (*apprendre, accipere*) e troppo poco a capire (*comprendre, concipere*)» ed è «considerato più come un recipiente da riempire che non come un campo da seminare, una pianta da coltivare, un fuoco da eccitare» (Vailati, 1899, citato in Giacardi, 1999). Questa concezione pedagogica che vede la cultura come un tutto organico e l'allievo come protagonista attivo nel processo di apprendimento e non come spettatore passivo, si inserisce in una più ampia visione dell'educazione come formazione integrale della persona, che rifiuta la divisione tra cultura umanistica e cultura scientifica. Vailati si oppone esplicitamente allo sdoppiamento in liceo classico e liceo scientifico, argomentando che:

«l'effetto finale sarebbe quello di favorire e accentuare sempre più la divisione delle persone colte in due classi, l'una delle quali scrive e parla bene di quello che non sa e l'altra non sa parlare né scrivere convenientemente di quello che sa; da una parte cioè gli artefici della parola armoniosa e vuota, dall'altra gli scienziati dal linguaggio barbaro e dall'animo incolto» (Vailati, 1900, citato in Giacardi, 1999, p. 323).

La matematica, in questa prospettiva di *humanitas* scientifica, assume un valore formativo non strumentale ma costitutivo: essa deve far intravedere «subito la mirabile funzione di questa disciplina come accrescitrice, non pure della mente, ma della coscienza e della dignità umana» (Vailati, 1910, citato in Giacardi, 1999, p. 337). In tal senso, secondo Vailati il docente dovrebbe sin da subito abituare gli studenti a fare uso autonomo delle facoltà intellettive e creative (raziocinio e invenzione), coltivando continuamente le loro cognizioni mediante le capacità di

problem solving o di superamento delle difficoltà (Vailati, 1907b, citato in Giacardi, 1999). Non basta insegnare a eseguire operazioni, calcoli o algoritmi risolutivi: gli allievi devono intuirne le ragioni profonde, cioè capire perché quei calcoli funzionano, da dove vengono le regole, quali idee concettuali vi soggiacciono, non limitandosi quindi a banali compiti o usi tecnici, bensì «seguire nelle loro vie misteriose i mondi che vediamo roteare intorno a noi», collegando astratto e concreto, e permettendo così l'avvicinamento alla vita pratica e consentendo «di tracciare ed inalzare edifici e di trattenere forze, sollevare macigni, forare monti, creare le macchine più mirabili e potenti e lanciarle oltre i continenti e gli oceani e attraverso i cieli». (Vailati 1910, citato in Giacardi, 1999, p. 337). Una visione che, esulando dalle sole questioni didattiche, apre le porte alla pedagogia: profondità e comprensione sono la base per lo sviluppo della creatività e della permanenza dell'apprendimento a lungo termine, coltivando stupore e immaginazione, indispensabili per adoperare la matematica nel mondo concreto, al di là del semplice formalismo e del mnemonismo.

Ne consegue che quella auspicata da Vailati è una scuola laboratorio, intesa non nel senso riduttivo di spazio per esperienze scientifiche, ma come «luogo dove all'allievo è dato il mezzo di addestrarsi, sotto la guida e il consiglio dell'insegnante, a sperimentare e a risolvere questioni, a misurare e soprattutto a *misurarsi* e a mettersi alla prova di fronte ad ostacoli e difficoltà atte a provocare la sua sagacia e coltivare la sua iniziativa» (Vailati, 1906a, citato in Giacardi, 1999, pp. 326-327). Questa impostazione trova applicazione particolare nell'insegnamento della geometria, per il quale Vailati respinge la denominazione corrente di “metodo intuitivo” in favore di quella più precisa di «geometria sperimentale o operativa» (Vailati, 1907a, citato in Giacardi, 1999, p. 304), riservando l'aggettivo “razionale” alla geometria deduttiva del ciclo superiore. La scelta terminologica non è casuale: Vailati intende sottolineare che la prima fase dell'insegnamento geometrico non si fonda sull'intuizione immediata, ma sull'attività operativa dello studente, che attraverso il disegno, la costruzione di figure, il ricorso a strumenti concreti acquisisce «cognizioni di fatto sul modo di costruire le figure e sulle loro proprietà» (Vailati, 1907a, citato in Giacardi, 1999, p. 305). Il passaggio alla geometria razionale deve essere graduale: la deduzione non deve servire «a dimostrare proposizioni che agli alunni appaiano già abbastanza evidenti [...] ma piuttosto a ricavare, appunto da queste ultime, altre proposizioni che essi ancora non conoscano», presentandosi così anche come un mezzo di scoperta (Vailati, 1909, citato in Giacardi, 1999, p. 339).

È tuttavia nella riflessione sul ruolo della storia nell'insegnamento matematico che il pensiero di Vailati raggiunge la sua originalità più significativa. La dimensione storica assume in Vailati una duplice funzione: pedagogica ed epistemologica. Sul piano pedagogico, Vailati osserva empiricamente come l'introduzione di considerazioni storiche trasformi qualitativamente l'esperienza didattica:

«A nessuno che abbia avuto occasione di trattare in iscuola, davanti a dei giovani, qualunque soggetto che si riferisca alle parti astratte e teoriche della matematica, può essere sfuggito il rapido cambiamento di tono che subisce l'attenzione e l'interessamento degli studenti ogni qualvolta l'esposizione lascia luogo a delle considerazioni d'indole storica. Di questo appetito sano e caratteristico delle menti giovani è certamente desiderabile trarre il maggior partito possibile. Utilizzarlo intelligentemente vuol dire rendere l'insegnamento più proficuo e nello stesso tempo più gradevole, più efficace e insieme più attraente» (Vailati, 1897, citato in Giacardi, 1999, p. 328).

Questa osservazione, che anticipa le evidenze empiriche contemporanee sull'effetto motivazionale della storia, si accompagna in Vailati a una giustificazione pedagogica più profonda: il metodo storico è particolarmente adatto a «spedantizzare» la forma di esposizione della matematica, contrastando quella presentazione dogmatica e atemporale che aliena gli studenti dalla disciplina, contribuendo ad accrescere il senso critico e a contrastare il dogmatismo (Giacardi, 1999, 2006). Tale visione, influenzata da Gianbattista Vico, porta a considerare la conoscenza di un problema come strettamente correlato alla sua conoscenza storico-evolutiva, mentre, in sintonia con l'epistemologia critica di Ernst Mach, la dimensione storica si configura come strumento volto a relativizzare il carattere apparentemente assoluto delle teorie scientifiche (Giacardi, 1999, 2006):

«La storia delle scienze, insegnandoci come la gran nemica di ogni progresso intellettuale sia stata sempre la tendenza a mutilare e svisare la natura per farla violentemente entrare nel letto di Procuste dei preconcetti tradizionali, e mostrandoci come quelli che noi chiamiamo preconcetti non sono che le dottrine e le teorie scientifiche corrispondenti ad uno stadio anteriore di sviluppo delle conoscenze umane, ci pone in guardia contro il pericolo inerente al credere che, perché un'ipotesi o una teoria è

stata utile e feconda in passato deve per ciò solo continuare a rimaner tale anche per l'avvenire» (Vailati, 1896, citato in Giacardi, 1999, p. 329).

Significativamente, Vailati si contrappone a una visione linearistica dello sviluppo delle idee scientifiche, concependo il percorso della ricerca matematica in forma reticolare, analogo a una rete ferroviaria ricca di diramazioni, incroci e vicoli ciechi, in cui l'oggetto della storia diventa il mondo delle teorie parziali, degli errori, delle opinioni anche sbagliate degli scienziati (Giacardi, 1999, 2006). Questa concezione della storia scientifica come percorso non teleologico, attento agli errori e alle false partenze, distingue nettamente la posizione di Vailati da quella del suo maestro Peano, per il quale la storia tendeva a configurarsi come ricostruzione rettilinea delle sole "verità" che avevano contribuito al progresso della disciplina.

I programmi elaborati da Vailati per la Commissione reale riflettevano questa visione complessiva. Per il triennio unificato prevedevano un insegnamento della geometria articolato gradualmente dalla fase sperimentale-operativa a quella razionale-deduttiva; per i tre licei introducevano contenuti innovativi come i concetti di funzione, derivata e integrale, differenziando le applicazioni in base all'indirizzo: nel liceo classico si privilegiava lo studio della geometria euclidea accompagnato dalla lettura di passi dei grandi geometri antichi, per offrire «un quadro più completo della civiltà classica, non limitato alla letteratura e all'arte»; nel liceo scientifico si potenziavano le applicazioni alle scienze naturali; nel liceo moderno si introduceva il calcolo delle probabilità e le sue applicazioni economico-sociali (Giacardi, 2006). In tutti i programmi, il ricorso alla storia era esplicitamente raccomandato sia per collegare cultura scientifica e umanistica, sia per evitare ogni forma di dogmatismo nell'insegnamento. Le proposte di Vailati non furono esenti da critiche. Come documentato da Giacardi (2006), una commissione costituita in seno alla Mathesis nel 1908, composta da Luigi Berzolari, Ettore Bortolotti, Roberto Bonola ed Emilio Veneroni, pur concordando sull'opportunità di riferimenti continui ad applicazioni e problemi pratici, riteneva eccessivo il sacrificio dell'unità e del legame logico tra le teorie, lamentando in particolare la mancanza di una sistemazione razionale dell'aritmetica e l'assenza della geometria descrittiva (Giacardi, 2006). La morte prematura di Vailati nel 1909, a soli quarantatré anni, interruppe bruscamente questa stagione di elaborazione pedagogica.

1.3.2 Guido Castelnuovo e il liceo moderno

La morte prematura di Vailati nel 1909 interruppe bruscamente una stagione di elaborazione pedagogica che aveva posto al centro del dibattito il ruolo formativo della matematica e la funzione critica della dimensione storica nell'insegnamento. Al congresso della Mathesis di Padova dello stesso anno, Guido Castelnuovo rese omaggio alle proposte elaborate dalla «mente vasta e spregiudicata» di Vailati, impegnandosi a riprenderne e svilupparne le istanze fondamentali in un contesto storico e istituzionale mutato (Giacardi, 2006). Castelnuovo rappresenta in questo senso una figura complementare ma non sovrapponibile a Vailati: dove quest'ultimo aveva elaborato una visione teorica ed epistemologicamente sofisticata del rapporto tra storia, critica del dogmatismo e insegnamento, Castelnuovo si configurò come organizzatore culturale e realizzatore pragmatico, capace di tradurre principi pedagogici in iniziative istituzionali concrete e di mobilitare consenso attraverso una comunicazione politicamente efficace.

Guido Castelnuovo (1865-1952), tra i maggiori esponenti della scuola italiana di geometria algebrica e figura di primo piano nella comunità matematica internazionale, affiancò all'attività scientifica un intenso impegno civile e pedagogico che si manifestò attraverso una partecipazione sistematica alle arene del dibattito educativo nazionale e internazionale. Nel 1903 ottenne, alla morte di Cremona, l'insegnamento per il corso di Geometria superiore: «Il saggio ordinamento degli studi matematici in Italia, che il Cremona prediligeva, corre oggi il rischio di esser sovvertito. Le intemperanze di qualche insegnante, lo spirito utilitario di alcuni ingegneri, tendono a rompere quell'unione feconda tra i due indirizzi scientifico e pratico che tanto giovò al nostro paese» (Castelnuovo, 1909). Nel 1908, in occasione del Congresso internazionale dei matematici tenutosi a Roma, fu segretario del IV congresso internazionale dei matematici che avrebbe portato alla fondazione dell'*International Commission on the Teaching of Mathematics* (ICTM), di cui Felix Klein fu il primo presidente e composta per l'Italia, oltre che dallo stesso Castelnuovo, da Enriques, Vailati e Scorza. Nel corso dei lavori dell'ICTM, Castelnuovo instaurò contatti internazionali sistematici e promosse la diffusione delle idee di Klein in Italia, condividendone pienamente l'impostazione metodologica: l'enfasi sul concetto di funzione come filo conduttore dell'insegnamento matematico, la valorizzazione delle applicazioni alle scienze naturali, l'attenzione al “metodo genetico” che presentasse i concetti secondo il loro sviluppo storico (Giacardi, 2006). Tuttavia, mentre Klein operava in un contesto istituzionale relativamente favorevole e poteva sperimentare riforme “dal basso” attraverso scuole pilota, Castelnuovo si confrontava con un sistema scolastico

italiano in cui la matematica rimaneva marginalizzata nel liceo classico e confinata alla sezione fisico-matematica dell'istituto tecnico (Giacardi, 2006).

L'interesse di Castelnuovo per l'insegnamento nasce non da esigenze epistemologiche, bensì da un sentimento di dovere civico e sociale (Castelnuovo, 1914): «Nello stesso interesse della nostra scienza dobbiamo combattere quella tendenza ristretta dello spirito che, col creare barriere troppo rigide fra la matematica e le scienze d'osservazione, finisce per inaridire le fonti dei futuri progressi di quella» (Castelnuovo, 1913, citato in Giacardi, 2006, p. 41). Il suo pensiero si articola intorno a una diagnosi lucida delle carenze del sistema scolastico italiano il cui insegnamento matematico viene criticato, sulla scia di quanto già notato da Cremona e Vailati: astratto e teorico, privo di ogni riferimento reale e pratico, irrigidito da un'eccessiva pedanteria che distorce la visione complessiva della cultura (Giacardi, 2006).

«[...] la cultura generale che esso (l'insegnamento medio) si propone di fornire non deve assomigliare ad un territorio selvaggio e montuoso, le cui vette illuminate dal sole sono separate da abissi profondi e inesplorati. Deve esser piuttosto un dominio già civilizzato, le cui provincie siano collegate da ponti e strade» (Castelnuovo, 1913, citato in Giacardi, 2006, p. 41).

Partendo dal contesto sociale concreto, Castelnuovo articola una visione della scuola secondaria come istituzione democratica il cui compito primario è formare "l'uomo civile", rivolgendosi «alle intelligenze medie» per costruire «quella democrazia colta, che è pur la base di ogni Nazione moderna» (Castelnuovo, 1913 citato in Giacardi, 2006, p. 41). In questa prospettiva, lo scopo dell'insegnamento matematico nella scuola media non è fornire una cultura enciclopedica, bensì accenderne il desiderio, il bisogno di sapere, consentendo il costituirsi di «un'idea chiara, per quanto necessariamente molto limitata, delle principali questioni che i vari rami di conoscenza prendono in esame, e di qualcuno dei metodi che furono impiegati per trattarle» (Castelnuovo, 1910, citato in Giacardi, 2006, p. 42). L'insegnamento deve sviluppare in modo armonico le capacità di osservazione, le facoltà logiche e la creatività, fornendo non una preparazione specialistica per gli studi universitari ma quell'attitudine e quel carattere necessari per seguire gli studi più elevati (Giacardi, 2006). Si tratta, quindi, di gettare le basi in termini di atteggiamenti, abilità e competenze necessari per poter proseguire gli studi nello specifico settore scientifico-matematico.

Come documentato da Giacardi (2006), questa concezione trova espressione sintetica in slogan politicamente efficaci che Castelnuovo disseminava nei suoi scritti e interventi pubblici: «Riabilitare i sensi», «Abbattere il muro che separa la scuola dal mondo esterno», «Accostare l'insegnamento alla natura e alla vita». Formule che condensavano una critica radicale all'astrazione disincarnata dell'insegnamento tradizionale e prefiguravano una scuola aperta al mondo delle applicazioni, delle scienze sperimentali, della vita sociale ed economica. Nel suo articolo programmatico *Il valore didattico della matematica e della fisica*, pubblicato nel 1907, che costituisce una sorta di manifesto pedagogico, Castelnuovo sostiene l'importanza dell'osservazione e delle attività sperimentali:

«Esso permette infatti di chiarire un concetto, sopra cui i giovani hanno le più oscure e, direi quasi, mistiche idee. Alludo ai due significati diversi che si dà all'aggettivo *esatto* nella teoria e nella pratica. È essenziale far rilevare agli allievi che l'*esattezza teorica*, od *assoluta*, è una nozione puramente astratta, che non ha, e non può avere, riscontro nelle applicazioni. Qui è lecito parlare soltanto di esattezza pratica, la quale consente un errore, che il perfezionarsi degli strumenti adoperati tende a diminuire, ma non renderà mai nullo. Gioverà notare a tale proposito che una costruzione *teoricamente* esatta può, *in pratica*, riuscir meno esatta di una costruzione approssimata. Il pregio della prima consiste solo in ciò, che essa non presenta errori *sistematici*, all'infuori di quelli inerenti agli strumenti impiegati» (Castelnuovo, 1907, p. 333).

La valorizzazione di «quei procedimenti che vengono detti euristici» (Castelnuovo, 1907, p. 336) costituisce un mezzo non solo per giungere alla verità scientifica ma anche «l'unica forma di procedimento logico, che sia applicabile nella vita quotidiana ed in tutte le conoscenze che con questa hanno rapporti» (Castelnuovo, 1907, p. 336). Significativamente, l'articolo si conclude con una raccomandazione esplicita: l'insegnante deve attingere alla storia della scienza al fine portare gli studenti a comprendere il fallibilismo che soggiace a ogni teoria matematica:

«Non si nasconda poi ai giovani il carattere relativo e provvisorio di ogni teoria; e si ricordi loro che questa risulta dal complesso delle ipotesi, le quali, nello stato attuale della scienza, sembrano più atte a spiegar i fatti noti ed a scoprirne dei nuovi.

La teoria è destinata a trasformarsi nell'avvenire, come è già mutata nel passato. Anzi il modo più efficace per metter in rilievo questa continua evoluzione delle teorie è forse quello di ricorrere alla storia della scienza. Si osserverà infatti che molte teorie sono cadute in discredito, non tanto perché contenessero errori insanabili, quanto perché fornivano spiegazioni più grossolane, o più antropomorfe, rispetto a quelle che la scienza oggi sia in grado di dare. Per evitare pericolose illusioni o delusioni, atte a generare il misticismo o lo scetticismo, debbono i giovani tener presente ciò che la scienza può insegnare, e ciò che da essa non è lecito pretendere. Debbono essi ricordare che la grandezza della scienza non consiste già in una perfezione, che è irraggiungibile e priva di senso, ma in una illimitata perfettibilità» (Castelnuovo, 1907, p. 336-337).

Diversamente da Vailati, dove la storia è strettamente legata a una dimensione critico-epistemologica, antidoto al dogmatismo attraverso la ricostruzione degli errori e dei percorsi tortuosi, in Castelnuovo la storia è orientata a una funzione pragmatica di relativizzazione delle certezze teoriche e di apertura alla dimensione dinamica e progressiva della conoscenza scientifica, riconducibile oggi a una concezione fallibilista del progresso scientifico.

L'occasione per tradurre questi principi pedagogici in realtà istituzionale si presentò con l'istituzione del Liceo Moderno nell'anno scolastico 1911-1912, promossa dal ministro Luigi Credaro con il contributo di Enriques, Severi e dello stesso Castelnuovo. Il nuovo corso di studi sostituiva il greco con una lingua moderna (tedesco o inglese), ampliava lo spazio delle materie scientifiche, introduceva elementi di scienze economiche e giuridiche e, per quanto riguarda la matematica, dava più spazio alle approssimazioni numeriche e introduceva il concetto di funzione, di derivata e di integrale (Giacardi, 2006). Castelnuovo fu estensore dei programmi e delle relative istruzioni metodologiche, nelle quali ribadì quanto formulato nell'articolo del 1907: coordinare l'insegnamento della matematica con la fisica, evitare i tecnicismi della critica matematica, senza tuttavia cadere in un empirismo grossolano, tenere conto dei processi storici che dai problemi hanno condotto alle soluzioni e, infine, far cogliere agli studenti il ruolo della matematica nella società (Giacardi, 2006). Il riferimento al processo storico rifletteva la convinzione che la dimensione genetica, ossia mostrare come i concetti nascano da problemi concreti e si sviluppino attraverso progressive elaborazioni,

fosse indispensabile per contrastare quella presentazione astratta e dogmatica che alienava gli studenti dalla matematica.

L'esperienza del Liceo Moderno, tuttavia, si scontrò con ostacoli strutturali che ne compromisero l'efficacia e prefigurarono le difficoltà che avrebbero accompagnato ogni tentativo di rinnovamento nei decenni successivi. La mancata formazione dei docenti, inadeguati sia nella preparazione scientifica sui nuovi contenuti (funzioni, derivate, integrali) sia nella capacità di tradurre didatticamente l'approccio genetico e storico proposto dalle indicazioni metodologiche, costituì il principale fattore di debolezza (Giacardi, 2006). A questo si aggiunsero le resistenze dagli ambienti della cultura classica, che percepivano il Liceo Moderno come minaccia al proprio prestigio, dirottando al liceo moderno gli alunni considerati meno bravi, contribuendo a stigmatizzarlo come percorso di seconda serie (Giacardi, 2006). Infine, la carenza di fondi che ostacolava la realizzazione dei laboratori rese impossibile attuare quella dimensione sperimentale e operativa che costituiva uno dei pilastri del progetto pedagogico (Giacardi, 2006). Nonostante queste difficoltà, l'esperienza del Liceo Moderno generò una vivace produzione editoriale: manuali come le *Nozioni di matematica ad uso dei licei moderni* di Enriques e Amaldi (1914) e il *Corso di algebra elementare* di Sebastiano Catania (1914), pur ispirati alle indicazioni di Castelnuovo, riflettevano approcci diversi, testimoniando la pluralità di sensibilità che convivevano nel dibattito pedagogico italiano (Giacardi, 2006).

Parallelamente all'esperienza del Liceo Moderno, la Mathesis sollecitava una riforma dei programmi degli istituti tecnici, considerati obsoleti e sovraccarichi, proponendo l'introduzione dei concetti di derivata e integrale e una differenziazione più marcata della sezione fisico-matematica (Giacardi, 2006). Gran parte di queste istanze confluirono nei programmi secondari del 1917, che miravano a un insegnamento capace di fornire strumenti utili agli studi superiori e alla vita pratica, educando al tempo stesso alla severità del ragionamento attraverso una valorizzazione per le applicazioni fisiche a discapito del rigore formale e l'introduzione di concetti fondamentali per mezzo del processo storico (Giacardi, 2006). Seguire il processo storico costituiva ormai un nodo cruciale della riflessione pedagogica italiana nell'ambito della matematica, sedimentato attraverso i contributi di Peano, Vailati e ora Castelnuovo, anche se le modalità concrete rimanevano in larga misura affidate alla sensibilità e alla preparazione dei singoli docenti, in assenza di una tradizione consolidata di formazione storico-didattica degli insegnanti.

L'esperienza del Liceo Moderno e i programmi del 1917 rappresentarono l'apice di questa stagione riformatrice. La Prima Guerra Mondiale (1915-1918) interruppe bruscamente il dibattito pedagogico e, quando esso riprese negli anni immediatamente successivi, il contesto politico e culturale era profondamente mutato. Sarebbe stata la Riforma Gentile del 1923 a liquidare l'esperienza del Liceo Moderno e a ridefinire radicalmente il ruolo delle discipline scientifiche nel sistema scolastico italiano, segnando la fine di quella stagione in cui l'*humanitas* scientifica aveva tentato di affermarsi come concezione alternativa della formazione liceale. Prima di tale cesura, tuttavia, il dibattito continuò ad alimentarsi attraverso figure come Federigo Enriques, che al congresso di Trieste del 1919 avrebbe sintetizzato le istanze pedagogiche maturate nel primo ventennio del secolo (Giacardi, 2006).

1.3.3 Federigo Enriques e la matematica come “entità viva e dinamica”

La riflessione pedagogica di Federigo Enriques, geometra algebrico, collaboratore di Castelnuovo nella redazione dei manuali scolastici e nell'esperienza del Liceo Moderno, nonché presidente della Mathesis, si inserisce pienamente nel solco dell'*humanitas scientifica*, portandone a maturazione teorica alcuni aspetti rimasti impliciti nelle riflessioni di Vailati e Castelnuovo.

Se Vailati aveva insistito sulla funzione antidogmatica della storia e Castelnuovo sulla necessità di “abbattere il muro” tra scuola e mondo esterno, Enriques articola una visione epistemologica complessiva in cui la dimensione storico-genetica dell'insegnamento diventa conseguenza necessaria della natura stessa della matematica come *entità viva e dinamica*:

«L'educazione matematica contribuisce infatti, secondo Enriques, alla formazione generale dello spirito, in quanto coopera allo sviluppo delle capacità critiche e dell'attitudine alla ricerca. Come tale, il sapere scientifico non può allora essere trascurato in alcun tipo di curricula.» (Luciano & Tealdi, 2012 p. 187)

Per Enriques, la matematica non costituisce un sistema di conoscenze statiche ma un «procedimento di approssimazioni successive, dove dalle deduzioni parzialmente verificate e dalle contraddizioni eliminanti l'errore delle ipotesi implicite, sorgono nuove induzioni più precise, più probabili, più estese» (Enriques, 1906, p. 145, citato in Luciano & Tealdi, 2012 p. 189). Le teorie scaturiscono le une dalle altre attraverso un continuo processo di revisione e rettifica: la scienza

non procede verso verità definitive ma rappresenta un cammino di costruzione collettiva e storica del sapere. Questa concezione epistemologica si traduce immediatamente in una prescrizione specifica: la matematica va presentata agli studenti «non soltanto nell'aspetto statico, ma anche nel suo divenire» (Enriques, 1938b, p. 190, citato in Luciano & Tealdi, 2012 p. 193), come frutto di un percorso cumulativo dall'esito provvisorio e sempre rivedibile. Solo attraverso questa prospettiva è possibile far comprendere agli allievi che la verità non è una proprietà intrinseca del pensiero, ma è frutto di uno sforzo individuale fatto di tensione, lotta e conquista (Luciano & Tealdi, 2012). La storia della matematica costituisce quindi lo strumento privilegiato per implementare tale visione dinamica e genetica volta a favorire la comprensione del contenuto concreto all'interno dell'astrattezza: non esisterebbe strada più efficace che quella di «rifare la strada che la mente umana ha percorso per giungervi, ripigliando dunque i metodi e i principii elementari dei Greci» (Enriques, 1926a, pp. 595-596, citato in Luciano & Tealdi, 2012 p. 193).

I concetti matematici vengono così introdotti mostrando le idee che li hanno ispirati, le intuizioni attraverso cui si sono formati, i problemi che hanno sollecitato la loro elaborazione. L'uso della storia non si limita tuttavia alla narrazione delle scoperte in quanto Enriques raccomanda agli insegnanti di educare i propri allievi sui capolavori dei Maestri, commentandone in classe gli stralci più salienti e guidando gli studenti a ricostruire i risultati degli antichi tenendo conto delle conoscenze da essi effettivamente possedute (Enriques, 1925b). Questo tipo di attività rappresenta una tappa indispensabile verso la lettura autonoma dei testi classici, essenziale perché:

«Per una cultura seria e veramente fattiva è necessario che [i giovani] vengano messi a contatto coi grandi pensatori, e avviati così a conoscere la genesi storica delle idee scientifiche. I poeti sviluppano la loro coscienza in compagnia dei poeti, i mercanti in compagnia dei mercanti, i filosofi dei filosofi. Anche per quella filosofia che è la scienza è tempo di volgersi dai manuali e dalle compilazioni alle fonti» (Enriques, 1925b, p. 11, citato in Luciano & Tealdi, 2012 p. 190).

Particolarmente significativa è la valorizzazione dell'errore nella prospettiva di Enriques: nelle molteplici sfaccettature, l'errore non è un elemento da trascurare, in quanto costituisce un elemento connaturato nel processo evolutivo della matematica. Per il docente, la comprensione degli errori degli allievi diventa «la cosa più importante della sua arte didattica» (Enriques, 1936, p. 12, citato in

Luciano & Tealdi, 2012 p. 190), poiché gli errori significativi possono essere sfruttati come tappe del pensiero volto alla ricerca della verità. Questa concezione, che anticipa di decenni le riflessioni didattiche sull'errore come risorsa, si fonda implicitamente su una visione genetica della storia della matematica: così come nella storia della disciplina i concetti si sono affinati attraverso progressivi errori e rettifiche, così nell'apprendimento individuale l'errore costituisce una fase necessaria del processo di appropriazione del sapere.

La visione enriquesiana si inserisce in un orizzonte più ampio di *humanitas scientifica*, in cui la matematica non è mera tecnica di calcolo ma componente fondamentale di una *humanitas culturale* (Luciano & Tealdi, 2012):

«[lo studio scientifico] deve essere opportunamente accompagnato da altri che conferiscono insieme alla formazione dell'intelligenza più armonica; in specie gli studi umanistici, di cui deve ritenersi come parte integrante. [...] L'umanismo include, in ogni caso, la mentalità storica, che – come abbiamo visto – deve comporsi colla mentalità scientifico-matematica universalistica, per una migliore aderenza ai vari aspetti della realtà» (Enriques 1938b, p. 178, citato in Luciano & Tealdi, 2012, p. 188).

L'insegnante deve costantemente richiamare sia i legami interni tra diversi settori della matematica, sia quelli esterni con le altre discipline, dalla fisica alla filosofia. Questa visione unitaria del sapere (condivisa con Vailati e Castelnuovo) si accompagna a una concezione dell'insegnamento come processo dialogico e maieutico: «l'insegnamento non può essere un regalo che il maestro faccia a qualcuno che viene ad ascoltare le sue ben tornite lezioni [...]; ma è piuttosto un aiuto a chi voglia imparare da sé [...]» (Enriques, 1921, p. 6, citato in Luciano & Tealdi, 2012, p. 191). Il sapere matematico, proprio perché storicamente costruito e sempre rivedibile, deve essere “conquistato” dagli studenti attraverso un processo attivo che ripercorra, in forma abbreviata e guidata, il cammino storico della disciplina: senza mai citare il principio di ricapitolazione genetica, esposto nel capitolo 1, Enriques si inserisce pienamente nel contesto internazionale.

Con Enriques si completa dunque quella traiettoria pedagogica che, da Peano attraverso Vailati e Castelnuovo, aveva posto la dimensione storica della matematica al centro della riflessione sull'insegnamento, non come decorazione erudita ma come componente costitutiva di una concezione della disciplina come costruzione culturale e collettiva. Questa stagione dell'*humanitas scientifica*

avrebbe trovato una brusca interruzione nell'avvento del fascismo e nella Riforma Gentile, che avrebbero trasformato radicalmente il panorama dell'educazione italiana.

1.4 La Pedagogia Matematica nell'Italia Fascista: tra idealismo, didattica e propaganda

La Prima Guerra Mondiale (1915-1918) interruppe bruscamente il dibattito pedagogico che aveva animato il primo ventennio del secolo, sospendendo le attività delle associazioni scientifiche e compromettendo ulteriormente la già fragile esperienza del Liceo Moderno (Giacardi, 2006). Nel breve periodo del dopoguerra si registrò un tentativo di ripresa: nel settembre 1919 la Mathesis organizzò a Trieste (da poco annessa all'Italia) un congresso dedicato all'unificazione dei programmi delle "province redente" con quelli del Regno. I programmi austriaci, ispirati alle riforme di Klein, erano considerati più avanzati, specialmente per l'introduzione sistematica del concetto di funzione e l'attenzione al metodo genetico (Giacardi, 2006). Federigo Enriques, presidente della Mathesis, ribadì in quella sede la necessità di un insegnamento che presentasse la matematica non in un "assetto statico" ma nel suo "divenire", studiandone "le origini, le connessioni" attraverso la dimensione storica (Enriques, 1921, p. 343).

Queste istanze si scontravano tuttavia con una realtà politica radicalmente mutata. La crisi dello Stato liberale, l'instabilità dei governi, l'ascesa dei movimenti nazionalisti culminarono nell'ottobre 1922 con la Marcia su Roma. Benito Mussolini, giunto al potere, affidò la riforma della scuola a Giovanni Gentile, filosofo neoidealista e teorico dell'attualismo, inaugurando una stagione che avrebbe posto fine alle speranze di rinnovamento democratico e scientifico dell'educazione italiana e ridefinito radicalmente il ruolo della matematica e della sua dimensione storica nel sistema scolastico. La Riforma Gentile, pur rompendo con le istanze democratiche della Commissione reale, ereditò paradossalmente alcuni suoi presupposti ideologici, in particolare la visione selettiva della scuola media e la concezione dell'educazione come conquista personale (Genovesi, 2010).

Dopo la caduta del governo Giolitti nel 1921 e una breve fase segnata dai governi Bonomi e Facta, nell'ottobre 1922 Mussolini, giunto al potere dopo la ben nota marcia su Roma, affidò l'incarico di riformare la scuola al filosofo Giovanni Gentile. Mussolini, da ex maestro di scuola elementare e professore (seppur con

brevissime esperienze alle spalle), non poteva non possedere una propria “filosofia” della Pubblica Istruzione basata sulla sua ideologia totalitaria che «pur non coincidendo esattamente con l’organica riforma Gentile, vi si adagia in attesa di tempi più maturi, facendo passare per fascista [...] una legge che il suo autore crede di offrire al liberalismo: la fascistizzazione integrale della scuola può attendere e sarà affidata a all’opera di ministri veramente ortodossi» (D’Amico, 2010, p. 261). Con questa nomina, perciò, prese avvio uno stretto legame tra idealismo e regime fascista che, almeno fino all’assassinio Matteotti, si mantenne saldo e determinò un progressivo coinvolgimento della scuola nei processi di inasprimento autoritario (Semeraro, 1998). Come Nicola D’Amico (2010) evidenzia, è bene ricordare che la carica di Gentile a Ministro della Pubblica Istruzione durò solo un anno e 8 mesi: il 14 giugno del 1924 (pochi giorni dopo il delitto Matteotti) Gentile rassegnò le proprie dimissioni, pur continuando collaborare strettamente con il governo.

In linea con i cardini filosofici del neoidealismo e i principi pedagogici dell’attualismo, la riforma Gentile si fonda su una visione dell’educazione come un processo dialettico di conquista personale del sapere, in cui maestro e allievo sono componenti di un unico movimento dello Spirito (Cambi, 2003; D’Amico, 2010). L’attualismo di Gentile si configura come una pedagogia incentrata sull’identità spirituale del soggetto umano *in atto*, diversamente dai modelli educativi di stampo attivistico che privilegiavano la dimensione dell’esperienza, configurandosi come un’opera di ricostruzione di un ordine educativo e scolastico fondato sull’autorità e la tradizione (Cambi, 2003). Una visione che, nel complesso, privilegia il sapere del docente a discapito di ogni sapere didattico (visto come puro tecnicismo) e pedagogico, ridotto a sua volta in filosofia (Cambi, 2003; D’Amico, 2010).

La riforma azzerò gli esiti dei movimenti culturali condotte a partire dalla legge Casati (Luciano, 2014): il nuovo ordinamento scolastico si caratterizzò per una struttura rigidamente gerarchica che rifletteva la gerarchia dei saperi nell’ottica idealistica: il primato della cultura umanistica su quella scientifica. L’*humus* di fondo di tutti i provvedimenti che seguirono dal 1922 al 1924 è ispirato a elementi fissi, come la “religiosità concreta”, “l’umanesimo diffuso” e “il patriottismo”: la scuola è vista come strumento al servizio dello Stato in cui famiglia e privati assumono funzioni di collaborazione e integrazione, con l’obbligo scolastico funzionale alla formazione di quell’ “uomo nuovo” a cui aspira l’ideologia mussoliniana (D’Amico, 2010). Fu soppresso il Liceo Moderno, sostituito dal Liceo Scientifico (con accesso limitato alle facoltà di ingegneria, scienze naturali e medicina) e il Liceo Femminile (privo di sbocchi universitari). Questa architettura istituzionale era funzionale a esaltare la specificità e la preminenza del Liceo

Classico, concepito come unico percorso formativo per la classe dirigente e dotato di pieno accesso universitario (Giacardi, 2006; Genovesi, 2010; D'Amico, 2010). L'esame di maturità classica acquisiva il carattere di vero e proprio esame di ammissione all'università e doveva attestare il possesso di un'ampia cultura umanistica (Genovesi, 2010; D'Amico, 2010). Coerentemente con questa visione, l'insegnamento della matematica nel liceo classico venne accorpato con quello della fisica, con un orario complessivo talvolta inferiore a quello precedentemente destinato alla sola matematica (Giacardi, 2006).

Nel processo di definizione dei nuovi programmi di matematica a cui Guido Castelnuovo aveva rifiutato di collaborare, il ministro fu affiancato da Gaetano Scorza, altro eminente matematico attivo nella Società Mathesis e rappresentante italiano nella Commissione internazionale per l'insegnamento della matematica (Giacardi, 2006). Già in un discorso pubblico, lo stesso Scorza aveva espresso un netto scetticismo verso le correnti filosofiche idealiste, da lui percepite come potenzialmente riconducibili a una forma di nichilismo, contrapponendovi una vigorosa difesa del valore formativo, etico ed estetico della disciplina matematica (Giacardi, 2006). In successive riflessioni, egli ribadì con forza come una solida preparazione matematica fosse indispensabile per il filosofo, sostenendo la necessità di un insegnamento non passivo ma basato su un metodo attivo ed euristico, volto a sviluppare parallelamente la creatività e il rigore critico dello studente (Giacardi, 2006).

Nonostante la distanza con l'impostazione gentiliana, l'opera di Scorza nella stesura dei programmi è da intendersi come un tentativo di mediazione con le istanze riformistiche del Ministro: il nuovo curriculum si inseriva in un quadro epistemologico che subordinava il valore educativo delle discipline scientifiche alla tradizione filosofica umanistica (Giacardi, 2006). Ai precedenti programmi che fornivano indicazioni dettagliate sui contenuti e sulle metodologie, subentrarono schematici programmi d'esame, i quali delineavano soltanto gli obiettivi finali senza alcuna indicazione sul percorso didattico per raggiungerli: si presuppose che il docente possedesse già le competenze per elaborare autonomamente un piano di studi, senza tuttavia garantirne un'adeguata formazione (Giacardi, 2006). Questa carenza era acuita dalla ristrutturazione del sistema di formazione insegnanti, dove le Scuole di Magistero, ormai aperte ad ambo i sessi, rinominate in Istituti Superiori di Magistero ed equiparate a facoltà universitarie, avevano come fine la formazione dei docenti di filosofia e pedagogia, del personale dirigente e ispettivo, trascurando completamente la formazione pedagogico-disciplinare degli insegnanti di materie scientifiche (Giacardi, 2006).

1.4.1. Il dissenso della comunità dei Matematici

Da tempo Federigo Enriques era interlocutore privilegiato di Giovanni Gentile per le questioni concernenti il sapere scientifico e matematica. Nel febbraio del 1923, appena ebbe notizia dell'imminenza della riforma della scuola secondaria e delle linee generali tendenti a rafforzare la cultura umanistica a scapito di quella scientifica, Enriques si mobilitò prontamente indicando una seduta straordinaria del Consiglio direttivo della Mathesis per presentare al ministro una valida proposta di riforma che tenesse in conto i lavori condotti dalle precedenti attività convegnistiche: facendo riferimento alle grandi riforme introdotte in Germania e in Francia, i lavori presieduti dallo stesso Castelnuovo fecero esplicito riferimento alle lungo meditate e mai attuate proposte della Commissione reale, nonché le recenti esperienze emerse dal nuovo liceo moderno, nella speranza che la futura riforma non svalutasse il valore formativo delle scienze. Si auspicava in una struttura tripartita del sistema d'istruzione secondaria italiana, in cui Liceo Classico, Liceo Moderno e Liceo-Ginnasio Scientifico fossero parimenti preparatori all'università. Di fatti, tuttavia, i matematici più autorevoli della commissione (come Francesco Severi e lo stesso Enriques) riconoscevano una superiorità formativa al ginnasio-liceo classico, sicché l'assemblea non accolse la proposta avanzata da Castelnuovo, decidendo di consultare le varie sezioni locali in via preventiva.

Se Enriques, in quanto matematico, riconosceva il valore formativo delle scienze, Gentile ne screditava il valore pedagogico in quanto la verità matematica vien vista come infeconda e arida, basata su un presunto principio logico d'identità valido per le cose ma non per lo Spirito mutevole e autocreativo (Giacardi, 2006). Tuttavia, entrambi convergevano nella prospettiva pedagogica ed educativa: entrambi concepivano la scuola media come base formativa e selettiva nell'indirizzamento agli studi secondari, e il sapere come frutto di una conquista personale ed entrambi consideravano l'educazione come libero sviluppo di energie interiori favorito da un rapporto docente-allievo in cui «qualcosa di vivo che è in noi [docenti] passi nello spirito di lui, come scintilla di fuoco ad accendere altro fuoco». Il matematico e il filosofo divergevano anche nel modo di intendere la formazione dei docenti: Enriques immaginava una riorganizzazione dei corsi universitari scientifici basata sulla distinzione tra laurea a indirizzo scientifico e laurea a indirizzo pedagogico (Giacardi, 2006). Quest'ultima avrebbe previsto un primo biennio destinato a consolidare le conoscenze fondamentali della disciplina, seguito da un secondo biennio presso la Scuola di Magistero (Giacardi, 2006). Qui lo studio si sarebbe articolato in tre ambiti: approfondimenti su aspetti della scienza collegati a una comprensione più solida degli elementi di base; corsi di pedagogia

applicata, con particolare attenzione all'analisi critica dei manuali scolastici; e infine attività pratiche, comprendenti tirocinio sia in università sia nelle scuole secondarie, oltre a esercitazioni di disegno e di tecnica sperimentale (Giacardi, 2006). Diversamente per Gentile la formazione del docente coincide con la sua preparazione scientifica (Cambi, 2003; Giacardi, 2006).

Il decreto relativo alla scuola secondaria non si fece attendere e fu emanato il 6 maggio 1923, stesso anno della commissione Mathesis. La base fortemente umanista della riforma emerge chiaramente dall'incipit delle *Avvertenze* che precedono i programmi del ginnasio-liceo:

«Il Liceo-Ginnasio dev'essere un istituto di cultura umanistico storica: prepara agli alti uffici della vita civile, alle professioni libere, alla vita politica, prepara da lontano, preparando l'uomo: l'uomo morale, che è a suo posto nella Storia, e perciò, sa il travaglio faticoso dell'umanità dalla spelunca in cui visse selvaggio a quella civiltà che non consiste nei perfezionamenti tecnici così appariscenti nella nostra vita moderna, fino al punto da apparire fini e non mezzi, ma consiste nella più profonda comunione di animi, nel più profondo senso della libertà e del dovere umano, nella più profonda coscienza della propria personalità» (Bollettino Ufficiale del Ministero dell'istruzione pubblica, 1928, citato in Giacardi, 2006, p. 59)

L'associazione Mathesis reagì con prontezza alla nuova riforma. Nel maggio del 1923, il Consiglio direttivo, presieduto da Enriques, presentò alle autorità ministeriali un articolato promemoria che manifestava serie preoccupazioni per quella che veniva interpretata come una generale svalutazione delle discipline scientifiche nel nuovo ordinamento scolastico, avanzando delle richieste specifiche come: evitare che l'accorpamento di matematica e fisica comportasse una riduzione del monte ore complessivo; tutelare gli studenti del liceo classico intenzionati a proseguire gli studi scientifici all'università; garantire che i programmi del nuovo liceo scientifico mantenessero standard non inferiori a quelli del soppresso liceo moderno e della sezione fisico-matematica degli istituti tecnici (Giacardi, 2006; D'Amico, 2010). Particolare disappunto veniva inoltre espresso per la completa esclusione delle discipline matematiche e scientifiche dal curriculum del liceo femminile (Giacardi, 2006; D'Amico, 2010). La conclusione del promemoria suonava come un monito: tali provvedimenti rischiavano di porre l'Italia in

condizione di svantaggio rispetto agli altri paesi, innescando un declino culturale dalle conseguenze incalcolabili (Giacardi, 2006).

Le risposte evasive del ministro Gentile spinsero la Mathesis a organizzare a Livorno, nel settembre successivo, un congresso nazionale dedicato alla discussione della riforma in cui l'assemblea ebbe modo di formulare nuove richieste: permettere che il liceo scientifico consentisse l'accesso a un maggior numero di facoltà universitarie (oltre a quelle di ingegneria, scienze naturali e medicina; la separazione dell'insegnamento di fisica da quello di matematica, con il suo accorpamento alla chimica nel liceo classico; l'incremento delle ore di matematica; il potenziamento della rete degli istituti tecnici inferiori, numericamente insufficiente rispetto ai ginnasi (Giacardi, 2006). Gli orari e i programmi definitivi, approvati nell'ottobre 1923, ignorarono completamente queste istanze, pur generando reazioni non uniformemente negative nel corpo docente: i nuovi programmi, infatti, suscitarono particolare perplessità per la radicale revisione dell'impostazione geometrica, che abbandonava l'approccio pratico-sperimentale in favore di un rigido metodo assiomatico-deduttivo. Inoltre, altre perplessità erano suscitate dalle significative omissioni di contenuti come la teoria dei numeri reali, lo studio delle proporzioni e il confinamento dell'algebra al solo corso inferiore (Giacardi, 2006). L'assenza di precise linee guida metodologiche, se da un lato garantiva maggiore autonomia ai docenti, dall'altro rischiava di frammentare la prassi didattica in una molteplicità di approcci soggettivi, fondati più sull'iniziativa individuale che su una preparazione pedagogica sistematica (Giacardi, 2006).

Le proteste della Mathesis trovarono eco in altre società scientifiche e in numerose facoltà universitarie, tra cui, la più significativa, giunse dall'intervento della prestigiosa Accademia dei Lincei: una commissione accademica (presieduta tra gli altri da Volterra e Castelnuovo), elaborò una dettagliata relazione critica "*Sopra i problemi dell'insegnamento superiore e medio a proposito delle attuali riforme*" (Giacardi, 2006). Il documento, redatto da Castelnuovo, si articolava in due sezioni dedicate rispettivamente all'istruzione superiore e media e, confermando le preoccupazioni già sollevate dalla Mathesis, la relazione denunciava la preminenza accordata all'insegnamento filosofico nei licei, paventando un ritorno a tendenze aprioristiche e a sterili formalismi verbali (Giacardi, 2006). Veniva inoltre criticato l'accorpamento di discipline eterogenee sotto la responsabilità di un singolo docente, pratica che minacciava di appiattire la qualità dell'insegnamento e impoverire il dibattito scientifico. Anche l'introduzione degli esami di Stato, pur basata su un principio condivisibile, destava perplessità

per il rischio di ridurre l'attività scolastica a mera preparazione alla prova finale (Giacardi, 2006).

Nonostante questa vasta e qualificata mobilitazione, lo squilibrio tra formazione umanistica e scientifica, già presente nella legge Casati e accentuato dalla nuova riforma, continuò a caratterizzare il sistema educativo italiano per i decenni successivi, lasciando un'impronta indelebile sulla cultura nazionale (Giacardi, 2006). Le proteste dei matematici non riguardavano solo la marginalizzazione delle discipline scientifiche, ma anche la perdita di quella concezione dell'insegnamento matematico come processo critico e storicamente situato che aveva caratterizzato il dibattito dei decenni precedenti. Come vedremo, la dimensione storica, lungi dall'essere semplicemente soppressa, diventerà oggetto di strumentalizzazione in chiave nazionalista.

Nel contesto della crisi politica successiva al delitto Matteotti (10 giugno 1924), Giovanni Gentile si dimise dal governo; sicché la guida dell'ormai Ministero dell'Educazione Nazionale fu assunta prima da Alessandro Casati (da luglio 1924 a gennaio 1925) e successivamente da Pietro Fedele (da gennaio 1925 a luglio 1929), sotto la cui direzione fu avviata quella "politica dei ritocchi" volta a far aderire la riforma gentiliana all'ideologia di Mussolini e colmare il divario che si era creato tra la formazione letteraria e la cultura scientifica (Giacardi, 2006; D'Amico, 2010). Tuttavia, gli emendamenti specificamente rivolti ai contenuti e all'insegnamento della matematica non risultarono particolarmente incisivi o sostanziali, lasciando immutato l'impianto della riforma (Giacardi, 2006).

1.4.2 Dibattito Pedagogico-Didattico negli Anni Venti e Trenta

Le discussioni sull'insegnamento della Matematica che hanno caratterizzato con vivacità i decenni precedenti proseguirono nel corso del ventennio fascista con delle differenze significative (Luciano, 2014).

In primo luogo, nell'ambito del dibattito sul rapporto tra rigore e intuizione, si assiste a una sostanziale prevalenza dell'approccio intuitivo a discapito di quello ipotetico-deduttivo di matrice logista, strenuamente difesa dai matematici della scuola di Peano: quel pensiero astratto formalizzato con linguaggio raffinato e rigoroso si era dimostrato difficile da sostenere specialmente nel contesto della scuola elementare e magistrale. Di conseguenza, nei materiali didattici del ventennio fascista si riscontra la predominanza degli appelli al taglio intuitivo, costruttivo, sintetico e induttivo. Parallelamente si assiste alla diffusione del

modello pedagogico elvetico-francese delle scuole nuove o delle scuole attive introdotta da pedagogisti come Adolphe Ferrière a partire dal 1899, i quali prevedevano una prassi didattica attiva, dinamica, valorizzante gli aspetti psicologici e cognitivi coinvolti nell'apprendimento, la libertà, la spontaneità dell'allievo, nonché le dinamiche gruppali che si instaurano in aula fra allievi e docenti (Cambi, 2003; Chiosso, 2012).

In questo clima culturale non privo di contraddizioni, non stupisce come nell'insegnamento della Matematica si possa riscontrare l'insuccesso della tendenza peaniana, prevalentemente sancito dalle dinamiche che caratterizzavano la comunità accademica italiana in cui si può riscontrare il prevalere della Scuola di Geometria di Segre, specialmente sui temi legati all'insegnamento scientifico (Luciano, 2014). Tra i suoi componenti figurano Gaetano Scorza, Oscar Chisini e Francesco Severi, quest'ultimo, in particolare, avrà una forte influenza sulla matematica e la sua didattica in Italia nel corso degli anni Trenta (Luciano, 2014). Non mancano chiaramente anche voci appartenenti a tradizioni culturali indipendenti, come Corrado Ciamberlini e Alpinolo Natucci. Da parte degli esponenti della Scuola di Peano, inoltre, possiamo assistere a un ripensamento della loro esperienza educativa e didattica giungendo spesso a forme di autocritica, come la seguente (tradotta dal latino *sine flexione*) di Cavallaro:

«Le definizioni artificiali servono forse a esporre con maggiore rigore scientifico e logico una teoria. Ma tale teoria è utile nelle scuole superiori, dannosa invece nelle scuole medie: una geometria sviluppata con il massimo rigore scientifico, in cui l'esperienza è ridotta al minimo perché l'autore si limita al minor numero possibile di postulati intuitivi, non è una geometria adatta alla formazione degli studenti delle scuole medie. È questa, senza dubbio, la causa dell'odio implacabile degli alunni contro la matematica. Nelle scuole medie, inoltre, è un grave danno introdurre considerazioni filosofiche sull'evoluzione dei principi della scienza: l'età degli studenti non permette loro di fare i filosofi». (Cavallaro, 1924, pp. 80-81, citato in Luciano, 2014, p. 241-242).

Secondo Erika Luciano (2014), il testo di riferimento tale da costituire una sorta di "cartina di tornasole" del pensiero pedagogico-matematico del tempo nelle branche rispettivamente dell'Aritmetica e della Geometria è costituito dalla voce *Didattica della Matematica* curata da Severi nell'*Enciclopedia delle Enciclopedie*,

a cura di Formaggini Santamaria del 1931, i cui punti chiave e indicazioni sono ripresi anche in molteplici altri interventi di stampa periodica del periodo:

- trasmettere agli studenti delle scuole medie e secondarie una visione unitaria della cultura capace di evidenziare il carattere formativo della matematica, intesa come educazione al retto dedurre e argomentare;
- nel corso delle lezioni in aula focalizzare l'essenziale, procedendo progressivamente per gradi verso il completo rigore della trattazione. Nella didattica delle scuole elementari e medie inferiori, tuttavia, viene data precedenza assoluta all'intuizione;
- messa al bando di ogni eccesso di cura circa gli aspetti formali e logico-filosofici, specialmente quelle definizioni di critica fondazionale che attecchiscono all'attenzione e alla comprensione degli alunni, con conseguente studio mnemonico privo di comprensione e susseguente decadimento.

Tuttavia, accanto a questi sviluppi pedagogici che privilegiavano l'intuizione e l'esperienza concreta, si andava delineando un fenomeno di natura radicalmente diversa: la progressiva fascistizzazione dell'apparato scolastico, che avrebbe investito anche gli aspetti più apparentemente 'neutrali' dell'insegnamento matematico, inclusa la narrazione storica della disciplina.

Così, ad esempio, come documenta Erika Luciano (2014), l'ispettore scolastico e pedagogista di regime, Giorgio Gabrielli, giunge ad affermare come aritmetica e geometria siano elementi che circondano la vita dello studente e compito del docente non è inventarle, bensì «deve creare il bisogno di scoprirle, deve far nascere questa nuova maniera di vedere le cose sotto aspetti di forme regolari e entità numeriche, comparabili le prime, e scomponibili in mille modi le altre» (Gabrielli, 1926, p. 235, citato in Luciano, 2014). Fra le pratiche più efficaci per rendere attivo l'apprendimento delle scuole elementari continua a spiccare il ricorso ai giochi e a tutte le forme di matematica ricreativa su cui già Peano aveva pubblicato un testo per maestri. Anche in geometria vengono seguite le stesse istanze, basate su un approccio sperimentale ed esperienziale, più adatto ad educare la visione geometrica e la capacità di lettura e interpretazione di figure, diagrammi o grafici. Viene raccomandato l'uso di modelli autocostruiti utilizzando materiali poveri come cartone, fil di ferro, sughero o legno. Dopo una fase ludica ed esplorativa effettuata sotto la guida del docente, l'alunno potrà ampliare il raggio dei suoi esperimenti, variando le costruzioni e deducendo, grazie a queste, relazioni e proprietà di regolarità, di simmetria, ecc. Infine, l'uso della carta quadrettata e del chirigami (figure solide create con carta e forbici) è consigliato per estendere alla

terza dimensione le nozioni di geometria piana precedentemente acquisite. Il complesso di questi assunti trova concreta attuazione nei migliori libri di Aritmetica e Geometria per le scuole elementari pubblicati in Italia negli anni Venti, e fino all'istituzione del Libro unico di Stato nel 1930 (Luciano, 2014).

L'impostazione dell'insegnamento matematico negli istituti magistrali del ventennio si rivelò particolarmente problematica. Nonostante le oscillazioni delle indicazioni ministeriali, che nel 1923 bandirono la geometria pratica dal corso magistrale inferiore per poi, negli anni Trenta, desistere dal prescrivere l'approccio logico-deduttivo, la manualistica italiana continuò a mantenere il tradizionale rigore scientifico maturato nei decenni precedenti (Luciano, 2014). Questo creò una tensione irrisolta: i programmi prevedevano che i temi di aritmetica del corso magistrale inferiore fossero ripresi in quello superiore in chiave assiomatico-deduttiva, ma non offrivano indicazioni pratiche su come tale mediazione epistemico-cognitiva andasse attuata, lasciando l'adattamento dei contenuti alla responsabilità dei singoli docenti (Luciano, 2014). La carenza era acuita dalla ristrutturazione del sistema di formazione insegnanti: gli Istituti Superiori di Magistero, equiparati a facoltà universitarie, erano finalizzati alla formazione dei docenti di filosofia e pedagogia, trascurando completamente la preparazione pedagogico-disciplinare degli insegnanti di materie scientifiche (Giacardi, 2006).

Come osserva Luciano (2014), «partendo dal presupposto che la preparazione culturale sia sufficiente a garantire quella professionale, si finisce per ignorare la particolare natura e struttura degli istituti magistrali», con il risultato che «la produzione di materiali, da utilizzare in queste scuole per l'insegnamento della pedagogia della matematica, si riduce a uno sparuto ed eterogeneo manipolo di testi» (p. 245). Queste lacune vennero almeno in parte compensate dalla produzione di manualistica di elevata qualità da parte di autori come Severi, Severi-Bini e Severi-Mascalchi.

Il manuale *Aritmetica razionale* di Severi e Umberto Bini, destinato agli istituti magistrali superiori, rappresenta un caso emblematico della sintesi tra rigore peano e approccio intuitivo che caratterizzò la didattica del ventennio. L'opera adottò l'impianto teorico di Peano, con l'esposizione degli assiomi dei numeri naturali, ma lo innestò su una base intuitiva, accompagnando ogni assioma con commenti di carattere empirico (Luciano, 2014). Nella prefazione, Severi criticava esplicitamente «un'arida trattazione, che ignorasse la sostanza delle proprietà e delle operazioni da giustificarsi e si contentasse invece di una sistemazione scheletrica, osservante soltanto le forme del bigottismo logico», dichiarando che

«anche questo libro, come gli altri miei testi, è ispirato al fermo proposito di non deporre mai il senso comune alla porta, quando si sta per entrare nel tempio della Dea logica» (Severi-Bini, 1936, citato in Luciano, 2014, p. 248).

Emerge così una linea di continuità, pur filtrata e trasformata, con le concezioni pedagogiche sviluppatesi nei primi decenni del Novecento. L'orientamento condiviso da diversi studiosi, da Peano a Severi, si opponeva fermamente all'apprendimento mnemonico e meccanico, propugnando strategie educative capaci di stimolare l'interesse attraverso la risoluzione di quesiti concreti e attività ludico-matematiche (Luciano, 2014). Tuttavia, accanto a questi sviluppi pedagogici, che privilegiavano l'intuizione e l'esperienza concreta, si andava delineando un fenomeno di natura radicalmente diversa. La fascistizzazione dell'insegnamento non risparmiò neppure la dimensione storica della matematica, che da strumento di riflessione critica (come era stata per Vailati e Peano) si trasformò in veicolo di propaganda nazionalista e, dopo il 1938, di retorica razziale. Se nei primi due decenni del Novecento la storia della matematica era stata invocata da Vailati come antidoto al dogmatismo e da Peano come strumento per infondere amore per la scienza, durante il ventennio fascista essa subì una trasformazione radicale: da dispositivo critico a veicolo di propaganda.

L'utilizzo strumentale della pedagogia per fini di indottrinamento non costituisce un'invenzione dei regimi totalitari del Novecento: nel contesto della dittatura fascista l'"elevazione" politica, spirituale e morale del popolo italiano, costruita sull'immagine dell'uomo nuovo mussoliniano, divenne immediatamente un caposaldo della propaganda fascista, da perseguire sistematicamente nell'ambiente scolastico (Giacardi, 2006; D'Amico, 2010). Per ottenere quel controllo e quel consenso delle masse funzionale alla formazione di nazione coesa da un'unica fede (il fascismo), il regime implementò un articolato apparato di iniziative finalizzate alla totale fascistizzazione della società e della scuola: furono mobilitate tutte le istituzioni, dalle associazioni di categoria alle riviste pedagogiche, fino all'organizzazione di eventi come la Mostra della Scuola di Firenze (1925), sfruttando ogni mezzo di comunicazione disponibile, dalla stampa ai nascenti mezzi di comunicazione di massa, come la radio e il cinema (Giacardi, 2006; D'Amico, 2010; Luciani, 2014). Nel ventennio compreso tra il 1925 e il 1943, il sistema educativo italiano subì quindi un profondo processo di omologazione e strumentalizzazione politica. Oltre a un'ingerenza diretta sui contenuti didattici, attuata attraverso la censura e il rigido controllo dei libri di testo, ai tradizionali percorsi formativi si affiancarono organizzazioni giovanili a struttura paramilitare: l'Opera Nazionale Balilla (1926), i Figli della Lupa (1933) e la Gioventù Italiana

del Littorio (1937), divenute vere e proprie fucine per il plagio delle coscienze. Parallelamente, il corpo docente fu sottoposto a una stretta irreggimentazione e sorveglianza, esercitate da enti di partito come l'Associazione Nazionale Fascista della Scuola Primaria (1927-31) e l'Associazione Fascista della Scuola (1931-43).

In merito alla pedagogia della Matematica, la fascistizzazione tocca non tanto l'epistemologia della disciplina, quanto i suoi aspetti "para-epistemici": come i contesti entro cui erano inseriti gli esercizi d'insegnamento e la narrazione che la veicola. In tal senso degni di nota sono i tentativi di leggere la storia recente della matematica in senso arianizzante e fascistizzante, soprattutto la recente geometria algebrica italiana entro cui è possibile constatare una forzatura volta a far rientrare nella categoria degli approcci sintetici l'approccio logico di Peano (Luciano, 2014). Anche nel campo dell'istruzione scientifica era tutt'altro che semplice perseguire una rigida politica di autarchia culturale, considerate le contaminazioni estere cui era soggetta la tradizione italiana (come quelle giunte dalla Francia, dalla Germania e dagli Stati Uniti d'America sulla scorta dei volumi di Charles-Ange Laisant, Emile Borel, Maximilian Simon, Walther Lietzmann, Felix Klein e John Wesley Young, senza considerare i lavori dell'ICMI). In tal senso, gli intellettuali che gestirono l'opera di fascistizzazione della Matematica rinunciarono sin da subito nell'impresa, non sostituendo le prassi didattiche con nuovi quadri pedagogici propriamente fascisti, bensì limitandosi ad operare sulle componenti contestuali (quali gli aspetti linguistici e iconografici dell'istruzione), nonché ridefinendo un mercato librario che coinvolse direttamente il contesto della scuola primaria (Luciano, 2014).

Il sistema di controllo editoriale subì modificazioni sostanziali durante gli anni seguenti, caratterizzandosi per una progressiva politicizzazione delle commissioni valutative. Nello specifico, l'analisi diacronica condotta dalla storica Erika Luciano (2014) ha rivelato un'evoluzione tripartita del fenomeno: durante il primo decennio, la manipolazione ideologica delle discipline matematiche mantenne carattere episodico e non sistematico; nella seconda fase, inaugurata dall'introduzione del manuale unificato (1930-31), segnò l'intensificazione del processo di controllo contenutistico. Il culmine si raggiunse successivamente alle campagne coloniali africane (1935-36), quando anche gli ambiti scientifici furono sottoposti ai dettami delle politiche razziali (1938-43). È evidente quindi che l'inserimento di figure allineate all'orientamento politico dominante comportò una graduale subordinazione dei criteri di valutazione scientifica ai principi dell'ideologia nazionale, soprattutto nel corso degli anni Trenta, quando i parametri di giudizio dei testi scolastici iniziarono a includere elementi extra-disciplinari, privilegiando

manifestazioni di patriottismo e celebrazioni dell'identità nazionale. Tale tendenza emergeva chiaramente nelle osservazioni critiche formulate nei confronti di opere considerate insufficientemente orientate verso la promozione dell'orgoglio civico e del culto delle tradizioni patrie.

L'esame dei manuali unificati rivela approcci differenziati nella strutturazione dei contenuti matematici: in tal senso gli esempi di Gaetano Scorza e Maria Mascalchi risultano paradigmatici. Figura di prestigio nel panorama matematico italiano, Scorza (1876-1939) aveva costruito una carriera accademica di rilievo che lo aveva portato da Cagliari a Parma, da Catania a Napoli, fino alla cattedra romana nel 1934. Formatosi a Pisa sotto la guida di Eugenio Bertini, Luigi Bianchi e Ulisse Dini, la sua autorevolezza scientifica, unita alla posizione istituzionale ricoperta come membro del Consiglio Superiore dell'Educazione Nazionale, conferiva credibilità e legittimità alle riforme scolastiche del periodo. Il contributo di Scorza per l'insegnamento aritmetico, evidente nel capitolo di *Aritmetica* del sussidiario nazionale, si caratterizzò per l'adozione di metodologie intuitive, implementate attraverso supporti grafici e variazioni tipografiche finalizzate all'evidenziazione dei nuclei concettuali attraverso una progressione didattica calibrata, sostenuta da un linguaggio accessibile e rigoroso. Tuttavia, l'impostazione mantenne un carattere prevalentemente teorico, con limitata presenza di applicazioni pratiche e attività coinvolgenti. La neutralità espositiva che caratterizza i suoi testi, pur rappresentando un servizio importante per il regime attraverso la partecipazione alle iniziative educative ufficiali, consentì di preservare il testo da compromissioni esplicite ideologiche. Diversamente si configurò l'approccio adottato da Maria Mascalchi, docente al liceo D'Azzeglio di Torino, per un sussidiario di aritmetica, destinato alla quarta elementare, curato insieme allo zio Severi. Il suo contributo incorporò principi pedagogici orientati alla sperimentazione pratica, privilegiando l'azione rispetto alla verbalizzazione teorica, in linea con l'approccio didattico e pedagogico di Severi: le definizioni formali venivano introdotte come sintesi conclusiva di percorsi esplorativi condotti attraverso problematiche concrete, lo stile comunicativo, marcatamente intuitivo, era caratterizzato dall'iterazione concettuale e dall'abbondanza di materiali esercitativi. Questo approccio metodologico rese semplice l'implementazione di strategie di manipolazione ideologica efficaci, basati sulla trasformazione sistematica dei contesti e dei contenuti dei problemi capaci di permettere l'integrazione di elementi celebrativi del sistema politico, la promozione di sentimenti nazionalistici e la giustificazione di politiche espansionistiche. Gli esempi didattici abbandonarono riferimenti neutri per incorporare simbologie e terminologie del regime, mentre gli apparati

iconografici si arricchirono di elementi decorativi ideologicamente connotati (Luciano, 2014).

«Gli enunciati dei problemi e degli esempi sono modificati ad hoc al fine di celebrare le conquiste del regime, fomentare il nazionalismo e il culto del Duce, giustificare la politica colonialista ed esaltare i modelli di vita imposti dal fascismo. Le righe e le file cessano di essere composte da fanciulli e si popolano di balilla e cannoni, i disegni geometrici cedono il passo a greche di fasci littori, ecc.

Se ciò non bastasse, si può plasmare del tutto la coscienza critica e l'immaginario dell'alunno attraverso un uso strumentale della storia della matematica, della prosa scientifica e degli apparati iconografici, come avviene nelle sezioni di Aritmetica del sussidiario per la terza e per la quinta classe, curate rispettivamente da Ezio Bonomi e Carmelo Cottone» (Luciano, 2014, p. 257-258).

Dove c'è narrazione storica c'è sempre l'adozione di uno specifico punto di vista, sicché l'utilizzo strategico di elementi storici, narrativi e visuali favorì un controllo capillare della formazione degli studenti.

Anche le riviste scientifiche e matematiche subirono un processo di politicizzazione i cui primi semi iniziarono già a germogliare durante il primo conflitto mondiale, trovando effettiva intensificazione nel corso del biennio 1919-1920 attraverso manifestazioni di dissenso verso gli accordi post-bellici e celebrazioni delle iniziative nazionalistiche, configurandosi come vero e proprio preludio alla cosiddetta "fascistizzazione editoriale" (D'Amico, 2010; Luciano, 2023). Questo fenomeno si presenta come un articolato sistema di interventi strutturali implementato a partire dal 1922, con particolare acme nel periodo 1924-1925, quando questo processo si manifestò attraverso meccanismi di repressione dell'associazionismo professionale (con conseguente contrazione delle pubblicazioni di settore e decadenza della stampa pedagogica in generale), selezione autoriale, controllo editoriale e censura, raggiungendo il suo apice con l'emanazione della legislazione razziale del 1938, che introduce l'antisemitismo di Stato con significative ripercussioni sul panorama editoriale nazionale (Chiosso, 1997; D'Amico, 2010; Luciano, 2023).

Nello specifico contesto delle pubblicazioni matematiche, l'influenza ideologica si concentrò prevalentemente sugli aspetti formali e retorici piuttosto che sui sostanziali contenuti epistemici: diversamente da quanto avvenuto nel contesto germanico, in cui si assistette a una revisione ideologica e sistematica da parte del Terzo Reich orientata alla definizione di una vera e propria *Deutsche Mathematik*, l'ambiente matematico italiano adotta modalità di adesione ideologica meno incisiva, sebbene resti comunque segnata da azioni di valorizzazione della cosiddetta *Matematica Nazionale* (Luciano, 2023). Erika Luciano (2023) individua il punto fondamentale attorno cui ruotò l'argomentazione teorica nella postulazione dell'esistenza di tradizioni di ricerca "genuinamente italiane" tanto nell'ambito della matematica pura (logica, geometria algebrica, analisi, calcolo vettoriale) quanto in quello applicato (scienze attuariali, statistica). Sebbene le caratterizzazioni di tali tradizioni non risultino uniformi nelle diverse pubblicazioni periodiche, la scuola logica italiana viene generalmente definita in relazione all'utilizzo del sistema ideografico di Peano, al quale viene attribuito non solo il merito pioneristico ma anche la creazione di un framework logico-fondazionale superiore alle proposte straniere (soprattutto in relazione a matematici come Hilbert e Russell) (Luciano, 2023). Nell'ambito dell'insegnamento matematico si presentarono tradizioni nazionali distinte, benché su questo fronte non sussistettero unanimità di vedute: anche gli intellettuali più allineati con l'ideologia di regime manifestano difficoltà nell'attribuire il carattere di "italianità" all'educazione al rigore logico negandolo contemporaneamente all'orientamento pedagogico alternativo dell'educazione all'intuizione, sostenuto da Castelnuovo ed Enriques (Luciano, 2023).

Le tradizioni di ricerca nazionali avrebbero beneficiato di influenze internazionali mantenendo tuttavia un carattere distintamente nazionale, configurandosi come manifestazioni dirette dello "spirito latino", caratterizzato da un approccio sintetico e costruttivo, nelle scienze matematiche teoriche e applicate. Inoltre, secondo la narrativa di regime, le scuole di ricerca nazionali fondate dal regime (come l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo fondato nel 1932 e l'Istituto Nazionale di Alta Matematica fondato nel 1939) avrebbero conferito alla matematica italiana una posizione di leadership mondiale: un primato che, secondo l'ideologia, affondava le proprie radici in un passato remoto (Luciano, 2023). In tal senso, divenne un imperativo morale per molti storici della scienza nazionale ricostruire e rivendicare le conquiste nazionali di fronte alla comunità internazionale, quantomeno sulla base del principio secondo cui il progresso dell'indipendenza politica nazionale risulta inscindibile dallo sviluppo dell'attività scientifica (Luciano, 2023). In particolare, fu all'Accademia d'Italia, organo

consultivo nelle questioni scientifiche e artistico-letterarie e centro di coordinamento delle forze intellettuali nazionali, che venne affidato il compito di promuovere e valorizzare il patrimonio scientifico nazionale (Luciano, 2023). A partire dal 1938, a questi elementi retorici della *Matematica Nazionale* se ne aggiungono altri due: una reinterpretazione in chiave razziale della storia della matematica italiana contemporanea, presentata come preservata dalle influenze dell'“internazionalismo” e dalle “tradizioni orientali e massoniche”, e l'assunto della necessità di intraprendere, in analogia con i paesi dell'“Asse”, un'opera di diffusione della “vera cultura europea” in preparazione alla “vittoria finale contro l'ideologia bolscevica” (Luciano, 2023). Secondo questa prospettiva, l'Italia avrebbe dovuto condividere con l'alleato tedesco la responsabilità della direzione politica, economica e culturale dell'Europa ricostruita, raggiungendo un livello di parità particolarmente significativo nell'ambito matematico, settore nel quale il paese godeva di riconoscimento internazionale (Luciano, 2023).

1.5 L'educazione matematica in Italia nel secondo dopoguerra: la defascistizzazione della scuola

L'ordinamento scolastico italiano nell'immediato dopoguerra cominciò ad assumere una fisionomia che si potrebbe dire riconoscibile agli occhi contemporanei in quanto strutturato su tre ordini scolastici. Oltre al ciclo primario, coincidente con la Scuola elementare, la Riforma Bottai aveva istituito un ciclo medio differenziato dal ciclo secondario: la legge del 1° luglio 1940, n. 899 aveva accorpato i diversi percorsi triennali inferiori in un'unica istituzione scolastica che riuscì a funzionare già subito nello stesso anno di promulgazione della legge, quando l'Italia era entrata in guerra da circa tre mesi (D'Amico, 2010). La scuola media unica aveva lo scopo di fornire i primi fondamenti di cultura umanistica coniugandoli con la pratica del lavoro e osservare, conoscere e educare le attitudini e le capacità degli alunni, al fine di orientarli nelle scelte degli studi successivi (introducendovi, per la prima volta, l'idea di orientamento scolastico), in collaborazione con le famiglie il cui ruolo veniva così accentuato (D'Amico, 2010). Paradossalmente, proprio la scuola media unica di Bottai, concepita in pieno regime fascista, divenne l'istituzione che avrebbe accompagnato l'Italia nella fase democratica. Le forze Alleate, pur considerandola un'istituzione fascista (il Memorandum AMGOT del 18 novembre 1943, n. 23, ne sanciva formalmente la soppressione), dovettero prendere atto che essa continuava de facto a funzionare, essendo l'unica struttura organizzativa esistente per il ciclo medio (D'Amico, 2010). Questa continuità istituzionale contrastava con la discontinuità ideologica

che la defascistizzazione intendeva realizzare, creando una tensione tra l'esigenza di rottura con il passato e la necessità pragmatica di mantenere funzionante il sistema scolastico. Nella scuola media di Giuseppe Bottai l'Italia del dopoguerra trovò la propria istituzione funzionante dopo i 5 anni di conflitto bellico durante i quali la scuola era soggiaciuta a due tipi di autorità principali: quella della Repubblica Sociale Italiana, retta dai gerarchi fascisti al Nord, e il Regno d'Italia dei governi Badoglio, al Sud. Il ciclo d'istruzione della scuola secondaria, invece, era suddiviso in quattro indirizzi di liceo (classico, scientifico, artistico e magistrale), scuole professionali e istituti tecnici (Ciarrapico, 2002; D'Amico, 2010).

Sebbene in precedenza la matematica fosse relegata, sia per contenuti sia per l'entità oraria, a un ruolo secondario, nella neonata Scuola media voluta da Bottai essa acquistò gradualmente maggiore rilievo: il numero di ore settimanali salì a tre per classe e la prova scritta venne reintrodotta negli esami di licenza; nonostante i programmi conservassero prevalentemente un'impostazione tradizionale, le direttive metodologiche manifestavano alcuni segnali di apertura con raccomandazioni sull'inserimento di notazioni a carattere storico nell'insegnamento della matematica (Ciarrapico, 2002). L'orientamento dell'insegnamento, tuttavia, avrebbe subito una radicale inversione di intendenza all'indomani della Seconda Guerra mondiale, dovuta all'influenza delle istanze attivistiche che le forze Alleate portarono in Italia e che inevitabilmente coinvolsero anche il dibattito educativo delle matematiche, quando in Italia si poté assistere alla cosiddetta "defascistizzazione" della scuola, già iniziata con lo sbarco delle truppe anglo-americane in Sicilia, il 9 luglio del 1943 (Ciarrapico, 2002; Bruni, 2005; D'Amico, 2010).

Le forze Alleate, infatti, avevano strategicamente coinvolto nell'esercito un piccolo gruppo di militari-funzionari, di fatto disarmati, destinati a organizzare l'amministrazione provvisoria delle provincie liberate: l'*Allied Military Government of Occupied Territories* (AMGOT) (Ciarrapico, 2002; D'Amico, 2010). Sotto un governo militare alleato si provvide così ad epurare l'ideologia fascista dai programmi e i libri di testo: vennero designati nuovi ordinamenti per l'insegnamento della matematica nella Scuola media e nei licei che, recepiti dal Ministero della Pubblica Istruzione, entrarono in vigore a partire dall'anno scolastico 1945/46 (Ciarrapico, 2002).

Tra i funzionari che si sarebbero dedicati alla politica e gestione degli affari scolastici, la Sottocommissione per l'istruzione fu affidata a Trence V. Smith, già

docente di filosofia presso l'Università di Chicago, affiancato da Carleton W. Washburne, già maestro di scuola elementare nel Winnetka (Chicago), e l'antropologo britannico Robin Gayre (D'Amico, 2010). La commissione anglo-americana aveva il compito di cancellare l'eredità della dittatura fascista: oltre alla riedificazione di edifici danneggiati dai bombardamenti era necessario effettuare un lungo lavoro di revisione dei programmi e dei libri di testo epurandoli da ogni riferimento al militarismo e al fascismo (White, 1991). Gli stessi funzionari alleati dovettero anche avviare una selezione del personale educativo, a partire dai dirigenti scolastici di alto livello, avviata nel 1943 ma conclusa l'anno successivo con il rientro degli stessi dirigenti alle loro cariche (D'Amico, 2010). L'opera di defascistizzazione avvenne tenendo come criterio progettuale le istanze valoriali democratiche e progressiste (White, 1991). Si trattava di principi che si ponevano in netta antitesi rispetto a un modello scolastico di impronta quasi militaresca, costruito sull'imposizione di un "consenso collettivo" ritenuto imprescindibile per la stessa legittimazione del regime (D'Amico, 2010). La proposta centrale consisteva nel modificare radicalmente gli obiettivi fondamentali dell'istruzione, ponendo lo studente al cuore del processo educativo e innovando le metodologie didattiche consolidate, armonizzando la crescita personale con quella sociale dell'educando, fulcro dell'intero percorso formativo. L'abbandono della visione individualistica tipica dell'ideologia fascista e della tradizione idealistica di Gentile andava così sostituita da una prospettiva collettiva dell'educazione, fondata sui principi dell'attivismo pedagogico deweyano: ciò comportò l'ingresso nel dibattito educativo della nuova psicologia dell'educazione e dell'analisi dei processi cognitivi individuali (White, 1991). L'istituzione scolastica smetteva, così, di essere un ambiente destinato unicamente alla comunicazione di contenuti prestabiliti, all'acquisizione di nozioni specifiche e alla formazione di comportamenti standardizzati spostando l'asse da veicolo di trasmissione dei saperi a spazio condiviso di sviluppo delle capacità personali da integrarsi armoniosamente con il tessuto sociale. Una trasformazione fondata sul riconoscimento della doppia natura psicologica e sociologica dell'educazione, nonché sulla valorizzazione delle esigenze e delle inclinazioni degli studenti, riconosciuti come protagonisti attivi del proprio percorso di crescita.

«Particularly in Sicily, the subcommission took steps to increase community initiative in the life of the school. Gayre was determined to restore an even-handed and untrammelled competition between state and private educational institutions. Washburne placed high hopes on introducing Italy's teachers to the insights of contemporary child psychology. Washburne and

Koopman were also eager to begin adapting programs of study more closely to what they regarded as the requirements of an industrializing mass society» (White, 1991, p. 48).

Il maggiore Carleton Washburne, figura chiave nell'introduzione dell'attivismo in Italia, era inizialmente destinato alla Germania; tuttavia gli eventi bellici lo portarono in Italia, dove ricoprì ruoli di crescente responsabilità: nel 1943 venne inviato in Sicilia al fine di comprendere la situazione cui versava l'istruzione scolastica per conto del sovrintendente all'istruzione Robin Gayre, il quale, tuttavia, intendendosi prevalentemente di università, aveva scarsa conoscenza dell'istruzione elementare e secondaria, sicché Washburne si dedicò personalmente a questo settore (Washburne, 1970; Gelmi, 2019). Il compito del maestro soldato nel corso della guerra era di

«[...] togliere all'esercito la preoccupazione di doversi guardare alle spalle facendo sì che le condizioni nella retroguardia fossero pacifiche. L'esercito combattente voleva concentrarsi in avanti, sul nemico; il governo militare era responsabile dell'ordine da tenere fra le popolazioni dietro le linee. I bambini via dalle strade, i genitori tranquilli dal momento che ai loro figli veniva impartita un'istruzione» (Washburne, 1970, p. 274).

Questo clima, testimoniato dalle memorie di Washburne, era strettamente correlato anche alla mancanza di pianificazione pedagogica pre-invasione rigorosa, nonché dalla continua bassa priorità riservata alle politiche educative nello sforzo bellico complessivo (White, 1991). Più tardi, inoltre, si dovette far fronte alle scarse scorte di carta nel Mezzogiorno e all'assenza di stamperie, prevalentemente presenti nel Nord (White, 1991). La Sottocommissione dedicò grandi e sistematici sforzi all'esame di ciascun manuale scolastico pubblicato nel Ventennio, con l'obiettivo di eliminare ogni traccia di carattere personale o ideologico riconducibile a Mussolini e al regime fascista (D'Amico, 2010; Khalaf, 2019). In un primo momento la commissione si convinse che la defascistizzazione dei libri scolastici non sarebbe stata un'opera complessa (sulla base anche di precedenti esperienze italiane dei membri stessi della sottocommissione); tuttavia, come ebbe modo di constatare analiticamente Robert Gayre nel settembre del 1943, si ci rese subito conto che la penetrazione dell'ideologia fascista nei libri d'istruzione era molto più profonda, specialmente nei libri di testo delle scuole elementari, dove lo stesso insegnamento religioso era mescolato con il (presunto) diritto italiano a dominare il Mediterraneo (White, 1991). Come si è precedentemente detto, anche i libri di aritmetica erano stati fascistizzati in tutti quegli aspetti para-epistemologici il cui

peso educativo risulta certo non indifferente (Giacardi, 2006): erano presenti problemi di storia considerati “perniciosi” dagli americani, come “*Un membro dei Balilla ha otto anni; in quanti anni può diventare un Avanguardista?*” (citato in White, 1991, p. 63). Tuttavia, fatta eccezione per le antologie letterarie, i testi di storia moderna e quelli di geografia, la commissione ritenne utilizzabile la maggior parte del materiale scolastico per l’anno scolastico imminente sicché le scuole Siciliane ricevettero un compendio di opere proscritte, volumi accettati e libri da espurgare (White, 1991).

In questo contesto, Washburne costituì in Sicilia un gruppo di lavoro volto a elaborare i nuovi libri di testo (White, 1991; Gelmi, 2019). Con il suo portamento più affabile, coinvolse un docente di lingua inglese delle scuole secondarie e di un gruppo di docenti antifascisti di scuola elementare per completare l’opera di defascistizzazione dei libri di testo iniziata da Gayre, non senza incontrare ostacoli: sebbene già nel dicembre dello stesso anno i lavori furono quasi conclusi, la carenza di materie prime fu colmata diversi mesi dopo, dopo l’arrivo degli Alleati a Napoli prima e a Roma poi (Washburne, 1970; White, 1991; Gelmi, 2019). Man mano che acquisì cariche più alte, Washburne lavorò a stretto contatto con i ministri italiani della Pubblica Istruzione del governo monarchico liberato, in particolare con Guido de Ruggiero e Vincenzo Arangio-Ruiz, contribuendo significativamente alla stesura dei programmi nazionali del 1945 (Washburne, 1970; White, 1991; Gelmi, 2019).

«gli insegnanti necessitavano di libri di testo e di “programmi” (come dicono in Italia). I fascisti avevano fatto un eccellente lavoro nel provvedere programmi dettagliati e, specialmente per le scuole elementari, testi uniformi, assai attraenti e ben redatti. [...] Gli insegnanti non avevano nessuna preparazione di psicologia pedagogica e “si limitavano ad eseguire i programmi secondo i testi di stato”. Così il mio primo lavoro, quando misi piede in Sicilia, e poi a Napoli e Roma, fu di elaborare nuovi programmi e nuovi testi» (Washburne, 1970, p. 274)

L’anno scolastico 1942-1943 si riaprì con un memorandum del Comando militare alleato dal titolo *Programmi di studio ed indicazioni didattiche per le scuole elementari per l’anno scolastico 1943-1944*, cui si accompagnò un’appendice intitolata *Consigli per la modernizzazione della scuola elementare*, ispirato ad una prospettiva educativa di istanza progressista, in cui si segnala

l'abbandono dell'idealismo gentiliano in favore di un approccio pedagogico ispirato all'attivismo di John Dewey, all'approccio pedagogico di Maria Montessori e, più in generale, a un favorevole ingresso della didattica per problemi (White, 1991; D'Amico, 2010). La Sottocommissione alleata prese così numerose decisioni sul piano didattico-organizzativo, tra cui: sollevare dagli incarichi provveditori, ispettori e direttori scolastici nominati per meriti del regime; ripristinò le scuole medie inferiori nei vari indirizzi, abolì il libro di stato; affrontò il problema della formazione dei docenti di scuola elementare coinvolgendo Jean Piaget che predispose un corso apposito; fissò che i programmi di storia dovessero fermarsi alla Grande Guerra, per dare cenni su richiesta degli alunni alla Seconda Guerra Mondiale; convocò gli insegnanti più stimati per realizzare nuovi programmi e i relativi testi, che cominciarono a essere usati in Sicilia già nel 1943 (White, 1991; D'Amico, 2010).

1.5.1 Cenni all'attivismo pedagogico di Washburne

Carleton Wolsey Washburne rappresenta una figura chiave nella trasformazione del sistema educativo italiano durante e immediatamente dopo la Seconda Guerra Mondiale.

Pedagogista di formazione deweyana e ideatore della celebre esperienza pedagogica innovativa denominata "Piano Winnetka"², Washburne fu chiamato dall'esercito americano nella primavera del 1943 a prendere parte al governo militare volto a ristabilire le istituzioni scolastiche nei paesi conquistati (Washburne, 1970; Gelmi, 2019). La filosofia dell'educazione da Washburne era stata elaborata sulla base della personale esperienza educativa condotta nel Winnetka, nei pressi di Chicago, e nella successiva maturazione avvenuta dal confronto con varie correnti pedagogiche americane attraverso la partecipazione all'*American Education Research*, la *National Society for Study of Education* e la *Progressive Education Association* (Gelmi, 2019). Il processo educativo, secondo l'autore, andava osservato da diverse angolazioni: il fanciullo andava visto come portatore di bisogni di base comuni agli altri bambini, legati alla sfera della salute, del benessere fisico, emotivo e a una naturale tensione alla felicità (Washburne, 1957; Gelmi, 2019). In quanto individuo con una propria unicità, il concetto di auto-

² È bene precisare che il nome "Piano Winnetka" non fu mai approvato o usato dal Washburne e i suoi collaboratori, le cui intenzioni esulavano dall'idea di stabilire un modello scolastico standard da trasferire in tutte le scuole ed erano strettamente legate al desiderio di offrire agli alunni la migliore istruzione che la ricerca scientifica sull'educazione e l'istruzione potesse offrire (Washburne, 1960).

espressione personale assume un ruolo centrale in quanto manifestazione non di indisciplina, bensì di bisogni, inclinazioni e personalità, che si sviluppano seguendo una propria traiettoria di sviluppo (Washburne, 1957; Gelmi, 2019). Inoltre, quale unità organica della società, il fanciullo è in costante contatto con altri soggetti e altre istituzioni sociali complesse, sicché diviene necessario imparare non soltanto tutta una serie di abilità di base che mettano ciascuno nelle condizioni di contribuire attivamente alla società (come le abilità di letto-scrittura, l'aritmetica, le nozioni di storia, geografica e scienza) ma anche i modelli culturali che orientano il comportamento di ciascuno (Washburne, 1957; Gelmi, 2019).

La sua metodologia privilegiava l'individualizzazione dell'insegnamento, sicché le pratiche didattiche vengano adattate alle peculiarità del singolo discente, rispettando i ritmi di apprendimento. A questo concorre la creazione di un ambiente scolastico che favorisse la sicurezza emotiva e l'integrazione sociale, con particolare attenzione alla felicità del bambino come "misura base" dell'efficacia educativa (Gelmi, 2019), la soppressione delle classi tradizionali in favore di un approccio alla gestione della classe che prediligesse gruppi omogenei per interessi e per attitudini cognitive, nonché dall'eliminazione dei voti e della bocciatura (D'Amico, 2010; Morandi, 2014; Khalaf, 2019).

L'originalità dell'approccio di Washburne applicato al contesto italiano risiedeva nel tentativo di coniugare l'attivismo pedagogico con le esigenze di una società in ricostruzione democratica, introducendo concetti come l'autogoverno scolastico, la biblioteca di classe e l'apprendimento cooperativo (Spadafora, 1997; Gelmi, 2019). Tuttavia, la sfida principale consisteva nell'innestare i principi dell'educazione progressiva americana - caratterizzata da forte decentramento e autonomia locale - su una realtà scolastica italiana tradizionalmente centralizzata e burocratizzata, che aveva inoltre subito l'involuzione autoritaria del ventennio fascista (Gelmi, 2019). Come osserva D'Amico (2010), tre elementi cardine del Piano Winnetka non trovarono accoglimento nel sistema italiano: i test oggettivi con autocorrezione, la possibilità per gli alunni di procedere liberamente secondo il proprio ritmo d'apprendimento, e l'approccio diretto all'educazione sessuale. Roberta Piazza (2013) conclude che la riforma promossa da Washburne non produsse i risultati attesi nel vasto quadro pedagogico del dopoguerra. Tuttavia, è innegabile il rilievo dell'apertura verso nuovi orizzonti culturali: la didattica italiana si aprì più marcatamente alle scienze dell'educazione, in particolare alla psicologia dello sviluppo, che avrebbe influenzato profondamente i successivi sviluppi dell'educazione matematica (Gasca, 2013).

1.5.2 I programmi di matematica del 1945

Con il D.L.L. del 24 maggio 1945 n. 459 e il D. Luogotenenziale 7 settembre 1945 n. 816 entrano in vigore i programmi defascistizzati per le scuole materne, elementari, medie e per gli istituti e scuole magistrali (D'Amico, 2010). Nel secondo dopoguerra, in linea con i rinnovamenti importati dall'attivismo di Washburne, i curricula di matematica, in particolare per la scuola media, acquisirono una configurazione marcatamente orientata verso applicazioni concrete e metodologie empiriche, rendendo facoltativo l'approfondimento di aspetti storici della disciplina (Ciarrapico, 2002). I programmi liceali della medesima Commissione, invece, non manifestarono elementi di particolare rilievo innovativo, rimanendo di stampo gentiliano, sebbene con importanti indicazioni metodologiche a corredo della documentazione del biennio ginnasiale, in cui veniva raccomandato di privilegiare l'approccio intuitivo, assecondando le origini psicologiche e storiche delle teorie, nonché la connessione con la realtà fisica, suggerendo l'adozione di un approccio metodologico basato su progressivi approfondimenti che conducano a progressivamente a una piena comprensione di concetti e proprietà (Ciarrapico, 2002). È la prima volta che vengono richiamate esplicitamente le esigenze psicologiche degli studenti, fino a quel momento fondamentalmente trascurate dal dibattito pedagogico, anche in ambito matematico (Ciarrapico, 2002)

Questo rinnovato approccio all'educazione matematica si evince anche nei problemi scolastici che caratterizzavano i nuovi libri di aritmetica nelle scuole elementari (Gabrielli, 2017). I programmi del 1945 mantennero infatti il tradizionale riferimento alla compravendita nell'aritmetica elementare, inserendovi tuttavia contesti che rispecchiavano la complessità delle dinamiche economiche contemporanee (Gabrielli, 2017), in linea con l'approccio pedagogico attivistico attento alla dimensione sociale dell'apprendimento (Gelmi, 2019). Le direttive enfatizzavano la qualità degli esercizi rispetto alla quantità, individuando nei temi economici un nucleo generativo per la formulazione di problematiche didattiche: concetti quali spesa, ricavo, guadagno e le relazioni tra variabili come entità del lavoro, numero di operatori e tempi di esecuzione venivano proposti come strumenti operativi per la risoluzione di questioni analoghe (Gabrielli, 2017).

Le indicazioni metodologiche suggerivano inoltre di attingere alle conoscenze pratiche degli studenti riguardo prezzi, tariffe, salari e compensi nella costruzione di problemi ed esercizi, favorendo il coinvolgimento attivo degli scolari stessi in tale processo al fine di consolidare la corrispondenza tra ambiente scolastico e realtà quotidiana (Gabrielli, 2017). L'obiettivo era quello di far percepire agli alunni il

valore sociale dell'aritmetica attraverso esperienze concrete di natura economica, identificando nel cooperativismo scolastico uno strumento didattico particolarmente efficace (Gabrielli, 2017). Analogamente, si prevedeva che le attività grafiche e manuali supportassero l'insegnamento geometrico e della computisteria, disciplina che, oltre alle competenze contabili, veicolava valori morali e sociali quali previdenza, risparmio e onestà negli affari (Gabrielli, 2017). Tale rinnovamento si concretizzava nelle prescrizioni per le singole classi, con esercitazioni contabili legate alle cooperative scolastiche per la quarta classe e attività pratiche di registrazione e compilazione di documenti commerciali per la quinta (Gabrielli, 2017).

Fatta eccezione per il contesto della scuola primaria (Gasca, 2013; Gabrielli, 2017; Gelmi, 2019), i contenuti disciplinari delle matematiche liceali rimasero sostanzialmente invariati rispetto alla Riforma Gentile: le raccomandazioni metodologiche non trovarono necessariamente accoglimento nei manuali scolastici e, conseguentemente, non influenzarono in modo significativo la pratica docente (Ciarrapico, 2002). L'insegnamento algebrico, continuando a privilegiare regole computazionali acquisite meccanicamente e prive di consapevolezza concettuale, si manteneva separato dall'approccio geometrico il quale, pur attento ai processi deduttivi, restava chiuso a qualunque forma di analisi critica: la metodologia didattica rimase perciò ancorata a quella tradizione cattedratica, fatta di esposizione, esercitazione e verifica orale, che non favoriva l'autonomia dell'allievo, ma, anzi, riduceva il processo d'apprendimento a mera memorizzazione e ripetizione (Ciarrapico, 2002). Per gli istituti magistrali, i programmi furono rinnovati con scelte più appropriate, tra cui la collocazione dell'aritmetica razionale nel biennio conclusivo (Ciarrapico, 2002; D'Amico, 2010). Tuttavia, il tentativo di trasformare l'istituto in un percorso realmente professionalizzante per i docenti di scuola primaria fallì, e esso mantenne il carattere di alternativa meno prestigiosa rispetto ai licei (White, 1991).

Infine, nel 1946 il Ministero elaborò anche programmi per l'istruzione tecnica, che sostanzialmente riproponevano quelli preesistenti al conflitto (i programmi De Vecchi del 1936), caratterizzati da un approccio piuttosto tradizionale e particolarmente impegnativi per alcuni indirizzi: l'unica modifica consisteva nell'adattamento alla nuova strutturazione dei cicli: 3 anni per la scuola media e 5 per quella secondaria superiore, conformemente alla Riforma Bottai e in contrasto con la precedente organizzazione 4+4 (Ciarrapico, 2002). Per l'istruzione tecnica, elementi di novità emergeranno solo con gli indirizzi che saranno introdotti a partire dal 1966 (Ciarrapico, 2002; D'Amico, 2010).

1.5.3 Il contesto internazionale: la ricostituzione dell'ICMI e la Sottocommissione italiana

Contemporaneamente a livello internazionale si stava ricostituendo l'organismo che per mezzo secolo aveva coordinato gli sforzi di rinnovamento dell'educazione matematica: la *Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique* (ICMI). Come documentato da Giacardi (2009), Dopo la dissoluzione seguita alla Seconda Guerra Mondiale, l'*International Mathematical Union* (IMU) fu ricostituita nel 1950, con la Prima Assemblea Generale tenutasi a Roma nel 1952. In quell'occasione ICMI fu trasformata in sottocommissione permanente dell'IMU, mantenendo i suoi obiettivi originari di promozione e coordinamento degli studi sull'insegnamento matematico: ciascun paese membro nominò una sottocommissione nazionale che avrebbe dovuto cooperare con i delegati ICMI nelle attività internazionali (Giacardi, 2009). La Sottocommissione italiana per l'Insegnamento della Matematica fu costituita a Bologna il 28 marzo 1954, in occasione della riunione della Commissione Scientifica dell'Unione Matematica Italiana, composta da matematici attivi nella ricerca scientifica, che condividevano tuttavia un interesse per l'educazione (come Guido Ascoli, Vincenzo Amato, Luigi Amerio, ecc.) (Giacardi, 2009). Particolarmente significativo è il vuoto generazionale che si era creato rispetto alla precedente stagione dell'educazione matematica italiana: nessuno dei precedenti membri della commissione ICMI, attiva prima della guerra, era infatti ancora in vita: Enriques era scomparso nel 1946, Guido Castelnuovo nel 1952, Scorza nel 1939, Loria nel 1954 (Giacardi, 2009). Veniva quindi meno anche la memoria vivente di quella tradizione di "humanitas scientifica" che aveva caratterizzato la scuola italiana prima del fascismo.

Il primo compito che la commissione dovette affrontare fu la preparazione dei rapporti per le due inchieste promosse dall'ICMI in vista del XII Congresso Internazionale dei Matematici nel 1954 (Giacardi, 2009). La prima inchiesta riguardava l'istruzione matematica per studenti tra i 16 e i 21 anni, la seconda il ruolo della matematica e del matematico nella società contemporanea. I lavori che ne seguirono evidenziarono limiti e difetti strutturali della Riforma Gentile ed esplorarono il ruolo sociale, educativo e morale della matematica, segnalando l'esigenza di ripensare il significato della disciplina nella formazione dei giovani cittadini di una società democratica (Giacardi, 2009). Tuttavia, il dibattito rimaneva confinato in ambito specialistico, senza riuscire a tradursi in proposte concrete per la riforma dei programmi.

1.5.4 Il progetto di riforma Gonnella e le innovazioni pedagogiche di Emma Castelnuovo

Il 25 giugno 1945 la nuova Italia Repubblicana ebbe il primo governo De Gasperi con Guido Gonella quale ministro della Pubblica Istruzione fino al 1951. Docente di filosofia del diritto, nel 1947 insediò una commissione volta a disegnare una nuova riforma scolastica attraverso un'inchiesta che si protrasse fino al 1949, fornendo così un quadro complessivo dell'istruzione scolastica (D'Amico, 2010). Emerse la condizione complessa cui versava il paese negli anni della ricostruzione: carenza di strutture (in quanto distrutte o occupate dagli eserciti di varie fazioni) nonché carenza di risorse didattiche per gli insegnanti: da tale condizione fu possibile incentivare i finanziamenti per la ricostruzione del sistema (D'Amico, 2010).

Nel 1951 i lavori della Consulta scolastica continuarono con il Disegno di Legge n. 2100, mai approdato in parlamento e perciò mai realizzatosi, in cui, ignorando i dibattiti sulla scuola media unica che avevano caratterizzato gli anni antecedenti al fascismo, propose programmi aggiornati per la scuola elementare e un nuovo tipo di istruzione "inferiore" distinto in tre rami corrispondente ai tre licei: classico, scientifico e normale; l'istituto magistrale diveniva, inoltre, ufficialmente liceo (D'Amico, 2010).

Secondo Ciarrapico (2002) i programmi di matematica sviluppati in quegli anni meritano attenzione: i tre indirizzi inferiori, infatti, presentavano un programma di matematica comune orientato alle osservazioni scientifiche. L'orario previsto per la matematica risultava tuttavia molto limitato, inferiore persino a quello della Riforma Gentile, rendendo difficilmente realizzabili le proposte innovative. I programmi preparati dalla medesima Consulta per l'istruzione tecnica, invece, non includevano le aperture proposte da Frajese per la scuola liceale, giacché alla matematica veniva ancora attribuita una funzione prevalentemente formativa nei licei e un significato strumentale e di supporto alle discipline professionali nella scuola tecnica (Ciarrapico, 2002). In particolare, in relazione alla geometria si optò per un ritorno all'approccio razionale ma, al tempo stesso, al fine di rendere più graduale l'incontro con la matematica e per prevenirne atteggiamenti di rifiuto, veniva suggerito di evitare nelle prime classi liceali l'uso di sequenze di postulati, privilegiando, invece, le proprietà evidenti delle figure per avviare solo in seguito il processo dimostrativo. Dimostrazione di proprietà dal carattere chiaramente intuitivo venivano omesse, dato che la loro complessità non sarebbe stata comprensibile a queste età (Ciarrapico, 2002). Una maggiore sistematizzazione era

prevista nel biennio liceale conclusivo, una volta che gli studenti avrebbero raggiunto una maggiore maturità, acquisita anche grazie agli studi filosofici già avviati, consentendo così uno studio puramente razionale della geometria (Ciarrapico, 2002). In questa seconda fase, si suggeriva di dedicare attenzione alla rielaborazione critico-storica di argomenti precedentemente affrontati, come il ragionamento ipotetico-deduttivo o il valore del rigore matematico (Ciarrapico, 2002). I programmi della Consulta non trovarono attuazione poiché la legge di riforma Gonella non ottenne l'approvazione parlamentare, né vennero favorevolmente accolti dalla Mathesis (Ciarrapico, 2002; D'Amico, 2010). Tuttavia, gli elementi di discontinuità fin qui descritti trovano corrispondenza con i nuovi programmi della scuola elementare del ministro Ermini, promulgati con il D.P.R. del 14 giugno 1955, n. 503: i piani didattici mostrano maggiore consapevolezza della struttura psicologica del bambino con una graduazione dei programmi per "cicli" che fossero rispettosi delle loro fasi di sviluppo, in linea con le ricerche di Jean Piaget introdotte in Italia proprio in quegli anni (D'Amico, 2010). Non vengono proposte metodologie d'insegnamento di Stato, ma si danno esplicite indicazioni quali il procedere a partire dall'esperienza concreta dei bambini, sollecitandone gli interessi e abbandonando il nozionismo in favore del gioco (D'Amico, 2010).

Le nuove idee culturali, che caratterizzarono l'Italia a seguito dell'influenza esercitata dal governo militare alleato, ebbero modo di influenzare tanto il legislatore quanto e soprattutto l'intera classe dei docenti italiani, mostrando una vivace passione per la "missione" educatrice non soltanto della scuola, ma anche delle discipline stesse: la psicanalisi e psicopedagogia spinsero a spostare il focus dai programmi ai bisogni del bambino e dell'adolescente (D'Amico, 2010).

I programmi scolastici del dopoguerra marginalizzavano la dimensione storica nell'insegnamento matematico, riducendola a elemento facoltativo frutto della scelta dei docenti. Nel dicembre del 1946, quando la defascistizzazione era ancora in pieno svolgimento, Emma Castelnuovo pubblicò sul *Periodico di Matematiche* un articolo dal titolo significativo: *Un metodo attivo nell'insegnamento della Geometria intuitiva*. Si trattava di una proposta didattica innovativa, che poneva al centro proprio quella dimensione storica che i programmi stavano accantonando. Emma Castelnuovo, figlia del celebre matematico Guido Castelnuovo, che con Federigo Enriques aveva animato il dibattito sull'educazione matematica, ereditava e riformulava in chiave pedagogica moderna. Insegnante di scuola media, quindi immersa nella pratica quotidiana dell'insegnamento e non isolata nell'accademia, ella osservava che era «fattore fondamentale per lo sviluppo della mente e della

personalità di allievi dai 10 ai 14 anni un insegnamento delle proprietà geometriche delle figure condotto in modo da saper suscitare l'entusiasmo del ragazzo» (Castelnuovo, 1946, p. 129). Richiamandosi esplicitamente a Enriques e alla sua visione dinamica dell'insegnamento, Castelnuovo affermava la necessità di stimolare l'intelligenza degli studenti rendendoli partecipi al lavoro creativo matematico in cui regole e concetti possiedono una propria ragion d'essere, disvelandosi attraverso l'uso del pensiero e della logica (Castelnuovo, 1946). La critica di Castelnuovo al metodo tradizionale si fondava su due ordini di considerazioni: una di ordine storico-epistemologico, l'altra di ordine pedagogico. Dal punto di vista storico-epistemologico ella notava come la geometria fosse una scienza sperimentale nata per risolvere problemi pratici (ad esempio la misura dei terreni) e, sebbene venisse anche esplicitato nelle lezioni, di fatti questa veniva presentata alla rovescia partendo dall'astratto al concreto: lo studente avrebbe dovuto prima concepire le idee astratte e poi applicarle, secondo un percorso che invertiva sia lo sviluppo storico della disciplina sia quello psicologico del bambino (Castelnuovo, 1946). Conseguentemente, dal punto di vista pedagogico, l'insegnamento convenzionale trascurava le precedenti esperienze matematiche degli alunni vissute durante le scuole elementari, nonché la loro specifica dimensione psicologica dell'apprendimento (Castelnuovo, 1946).

In tal senso, Castelnuovo suggeriva di sostituire al tradizionale *metodo descrittivo* un *metodo costruttivo* fondato sullo sviluppo storico della matematica, procedendo dal concreto all'astratto, permettendo allo studente di costruire e studiare direttamente la matematica, seguendo le leggi psicologiche dell'apprendimento (cfr.: Castelnuovo, 1953, 1963). Così come l'umanità aveva sviluppato la geometria progressivamente, partendo da problemi concreti per arrivare solo successivamente alla sistematizzazione euclidea, altrettanto dovrebbe fare lo studente nel suo percorso di apprendimento. Il *metodo attivo continuo* che si viene a delineare porta gli studenti a costruire una geometria con una propria logica, coincidente con la geometria di Talete e Pitagora (Castelnuovo, 1946): successivamente, dopo aver acquisito familiarità con i concetti geometrici attraverso l'esplorazione concreta, lo studente sarà in grado di giungere alla sistematizzazione euclidea. Il metodo costruttivo proposto da Castelnuovo prevedeva di coinvolgere la storia, riprendendo ad esempio le origini della geometria adottando molti esempi ed applicazioni, per poi far esercitare gli allievi con qualcosa di concreto e tangibile, come modelli in cartoncino per mezzo dei quali comporre e ricomporre figure piane, offrendo agli studenti la possibilità di analizzare e sintetizzare, sviluppando la facoltà di osservazione (Castelnuovo,

1946). La costruzione della conoscenza matematica passa così congiuntamente per la manipolazione e la riflessione.

Negli articoli pubblicati nel 1957, Castelnuevo approfondì ulteriormente la sua riflessione, inquadrando la propria proposta didattica in una più ampia analisi storica dell'insegnamento matematico italiano. La democratizzazione della scuola italiana nel secondo dopoguerra aveva radicalmente trasformato la composizione sociale dell'utenza scolastica, rendendo insostenibili le metodologie didattiche e gli approcci elaborati per una élite culturale: gli studenti provenivano da ambienti eterogenei e generalmente non colti (Castelnuevo, 1957).

1.6 La storia della matematica come riflesso delle concezioni pedagogiche di un'epoca

Il percorso ricostruito in questo capitolo documenta oltre un secolo di trasformazioni nell'educazione matematica dall'Italia preunitaria, frammentata e dipendente dai modelli francesi, fino alla sistematica fascistizzazione dell'insegnamento durante il Ventennio. Tuttavia, al di là della successione di riforme, programmi e dibattiti istituzionali, emerge con particolare evidenza il *filo rosso* che attraversa l'intero arco temporale considerato: il rapporto tra la concezione epistemologica della matematica dominante in ciascuna epoca e le modalità con cui la dimensione storica della disciplina viene incorporata, tematizzata, utilizzata o soppressa nell'insegnamento. L'osservazione di questo rapporto consente di mostrare come l'integrazione della storia della matematica nell'educazione non costituisce primariamente una questione didattica, bensì una questione pedagogica, che riflette determinate concezioni sulla natura della disciplina e del tipo di soggetto matematicamente educato che si intende formare. Nell'arco temporale considerato si possono identificare tre configurazioni distinte.

Il primo periodo, che abbraccia l'età preunitaria e le prime decadi postunitarie (1800-1890 circa), è caratterizzato dall'assenza di una tematizzazione esplicita della dimensione storica nell'insegnamento matematico. Gli *Elementi* di Euclide costituiscono il testo fondamentale dell'insegnamento geometrico in tutti gli Stati preunitari senza che i manuali dell'epoca mostrino una riflessione esplicita sul carattere storico del testo antico: Euclide viene utilizzato come modello di rigore dimostrativo, come *exemplum* del “metodo degli antichi”, ma non emerge una consapevolezza del suo essere prodotto di una specifica cultura e di un determinato contesto intellettuale. Analogamente, quando Luigi Cremona nel 1867 impose con il decreto Coppino il “ritorno a Euclide” nelle scuole del Regno unificato, la

giustificazione addotta riguardava la superiorità del metodo sintetico per la formazione del “retto ragionare” e la “ginnastica del pensiero”, non la valorizzazione di una tradizione storica consapevolmente riconosciuta come tale (Giacardi, 2006), presentando il testo Euclideo in forma fondamentalmente tradotta priva di qualsiasi forma di mediazione didattica, relegata allo sforzo interpretativo dei docenti, che si configurano come i veri destinatari della riforma editoriale. La manualistica francese dominante (Lacroix, Legendre), sebbene fosse basata su principi pedagogici illuministi (qualità sulla quantità, rigore non formalistico, critica dell'apprendimento mnemonico), presentava i contenuti secondo una struttura deduttiva che procedeva dal generale al particolare, senza riferimenti espliciti ai processi storici di scoperta e formulazione dei concetti. Come osserva Pepe (2006), persino gli *Elementi* di Lacroix, nonostante i nobili intenti pedagogici dichiarati dall'autore, riprendono gli elementi di geometria del XVIII secolo più di quanto lascino intravedere le nuove esigenze critiche della società contemporanea. L'assenza di riferimenti storici espliciti nei programmi, nei manuali e nei documenti ministeriali del periodo suggerisce che la dimensione storica non fosse percepita come componente rilevante dell'insegnamento matematico, il cui valore formativo risiedeva piuttosto nell'esercizio delle facoltà logiche attraverso dimostrazioni rigorose.

Il secondo periodo, che coincide approssimativamente con l'ultimo decennio dell'Ottocento e il primo ventennio del Novecento (1890-1922), segna un mutamento qualitativo caratterizzato da una tematizzazione della dimensione storica della disciplina in modo esplicito e consapevole. Questo processo di storicizzazione, documentato attraverso articoli, programmi e dichiarazioni programmatiche, risponde a mutamenti profondi sia nell'epistemologia della matematica (la crisi dei fondamenti, l'emergere delle geometrie non euclidee, le riflessioni logico-fondazionali) sia nelle concezioni pedagogiche (soprattutto del movimento delle scuole nuove europee). Figure come Giuseppe Peano, Giovanni Vailati, Guido Castelnuovo e Federico Enriques articolano per la prima volta in modo organico, in scritti e interventi pubblici, il ruolo formativo della dimensione storica. Per Peano, come testimonia Gliozzi (1932), insegnare matematica «con metodo storico preciso» significa infondere «negli allievi, senza alcuna coercizione, amore per la scienza» (p. 255), mostrando attraverso l'analisi di testi classici (Euclide, Archimede, Apollonio) come i concetti siano sorti da problemi concreti e si siano progressivamente formalizzati. Per Vailati invece, come documenta Giacardi (2006) la storia costituisce esplicitamente un antidoto al dogmatismo: mostrare come le teorie del passato, un tempo considerate definitive, siano state superate e rettificate significa insegnare che ogni teoria, anche quella attuale, ha

carattere provvisorio. Significativamente, Vailati contrappone alla visione linearistica dello sviluppo delle idee una concezione del progresso scientifico come «rete ferroviaria con diramazioni, incroci e binari morti», in cui l'oggetto della storia diventa «il mondo delle teorie parziali, degli errori, delle opinioni anche sbagliate degli scienziati» (Giacardi, 2006, p. 328). Per Castelnuovo, nelle istruzioni metodologiche allegate ai programmi del Liceo Moderno e degli Istituti Tecnici del 1917, la storia deve servire a «far comprendere ai giovani il carattere relativo e provvisorio di ogni teoria» e a mostrare «il processo storico che ha condotto ai problemi e alla loro risoluzione» (Giacardi, 2006, p. 343). Enriques, infine, teorizza organicamente la necessità di presentare la matematica non nell'aspetto statico, bensì nel suo divenire, studiandone le origini, le connessioni e invitando gli studenti a rifare la strada che la mente umana ha percorso insieme ai matematici greci (Luciano & Alice, 2012).

In questo periodo, la storia non è più assente o implicita, ma diventa componente esplicita e tematizzata delle proposte pedagogiche, giustificata attraverso argomentazioni epistemologiche (natura dinamica e provvisoria della conoscenza matematica) e motivazionali (catturare l'interesse degli studenti). Questa concezione dell'*humanitas* scientifica, che vede nella matematica una «componente indispensabile di una sola ed unica *humanitas* culturale» (Enriques, 1938b, citato in Luciano & Alice, 2012), trova parziale traduzione istituzionale nell'esperienza del Liceo Moderno e nelle indicazioni metodologiche dei programmi del 1917, sebbene le resistenze del sistema scolastico, la formazione inadeguata dei docenti e la mancata riforma complessiva ne abbiano limitato l'effettiva implementazione.

Il terzo periodo, che corrisponde al ventennio fascista (1923-1943), produce una trasformazione radicale della funzione della storia: da strumento di riflessione critica a veicolo di propaganda ideologica. La Riforma Gentile del 1923, espressione dell'attualismo neoidealista, marginalizza le discipline scientifiche subordinandole alla filosofia come coronamento della formazione umanistica. I nuovi programmi, schematici e privi di orientamenti pedagogici, lasciano ai docenti (la cui formazione scientifica era e rimase largamente inadeguata) la responsabilità di elaborare autonomamente il percorso didattico. In questo nuovo clima politico, la storia della matematica viene sistematicamente strumentalizzata in chiave nazionalista e, dopo il 1938, razziale. Come documenta Luciano (2014), nei manuali del periodo, specialmente dopo l'introduzione del libro unico di Stato (1930-31) e l'intensificazione del controllo ideologico, si assiste a un uso strumentale della storia della matematica finalizzato a plasmare le coscienze e

l'immaginario collettivo degli alunni. La storia, che per Vailati era antidoto al dogmatismo e per Enriques strumento per mostrare il carattere provvisorio delle teorie, diventa nel fascismo dispositivo di indottrinamento: gli enunciati dei problemi si popolano di balilla e cannoni, i disegni geometrici cedono il passo a fasci littori, le biografie dei matematici vengono filtrate attraverso la retorica del primato nazionale (Luciano, 2014).

Questi tre momenti non costituiscono fasi nettamente separate né tantomeno uno sviluppo teleologico, ma rappresentano configurazioni distinte del rapporto tra concezione epistemologica della matematica e la sua pedagogia, che riflette il senso della dimensione storica nell'insegnamento.

Infine, la fase di ricostruzione del dopoguerra si chiude con un bilancio ambivalente per quanto riguarda la dimensione storica nell'educazione matematica italiana. L'abbandono della strumentalizzazione propagandistica fascista costituiva un passo necessario e inevitabile verso una scuola democratica, liberata dalla retorica nazionalistica e dall'utilizzo strumentale della memoria. Il fallimento del progetto Gonella non aveva precluso la possibilità di sperimentare un approccio storico-critico alla disciplina, come testimoniato dalle riflessioni di Emma Castelnuovo, che pur riesce a coniugare la necessità di adeguare l'insegnamento alle capacità psicologiche degli studenti (ricependo le novità provenienti dalla pedagogia delle scuole nuove e della psicologia dello sviluppo di Piaget) con il percorso evolutivo e dinamico della storia della matematica sulla base del principio genetico. Tuttavia, l'avvento negli anni Sessanta delle *Matematiche Moderne* arresterà in larga la riflessione sul ruolo della storia della matematica nell'insegnamento, sull'onda rivoluzionaria del formalismo e dello strutturalismo bourbakista, che avrebbe dominato il dibattito internazionale sull'educazione matematica per oltre un decennio. Solo a partire dagli anni Settanta, con le reazioni critiche alle *Matematiche Moderne*, si sarebbe assistito a un graduale recupero della dimensione storica nell'insegnamento, un processo che avrebbe trovato piena legittimazione istituzionale, almeno sulla carta, nei programmi Brocca degli anni Novanta, come vedremo nei capitoli successivi.

Capitolo 2

Dal dibattito sulla *Matematica Moderna* alla soglia del nuovo Millennio

Nel periodo successivo al secondo conflitto mondiale, i sistemi educativi nazionali europei e statunitensi attraversarono una profonda fase di crisi che investì particolarmente anche l'educazione matematica (Gasca, 2013). Le complesse trasformazioni nel panorama delle idee acquisirono caratteri di particolare radicalità, mettendo in discussione i fondamenti stessi non soltanto della disciplina matematica, ma anche delle istituzioni scolastiche che dovettero iniziare ad affrontare nuove e crescenti sfide all'interno di uno scenario geopolitico e sociale profondamente mutato (Gasca, 2013; Furinghetti, 2015).

Gli anni Sessanta furono caratterizzati da profondi mutamenti sia dal punto di vista sociale sia da quello scolastico: il lancio dello Sputnik aveva catalizzato l'attenzione istituzionale sull'importanza della formazione scientifica, e in particolare sul ruolo giocato dalle scienze matematiche, sicché le nuove trasformazioni della società richiedevano nuove politiche educative orientate verso la scolarizzazione di massa (Furinghetti, 2015). Inoltre, si andavano delineando quei movimenti di lotta per una nuova eguaglianza e per la ridefinizione della natura stessa della società, conducendo alla rivoluzione culturale del Sessantotto (Bruner, 1977; D'Amico, 2010). Infatti, la crescente sensibilità manifestata nei confronti degli studenti e del loro modo di apprendere, congiunta a una sempre crescente democratizzazione della scuola, avevano evidenziato delle criticità che, nel caso specifico dell'apprendimento delle scienze, erano strettamente correlate al sentimento di avversione verso le matematiche: il dibattito internazionale e nazionale che ne seguì si interrogò, quindi, da un lato sui contenuti epistemici e d'altro sul ruolo delle metodologie didattiche (Ciarrapico, 2002). La matematica si trovò così a dover affrontare simultaneamente due distinte esigenze di rinnovamento, quella pedagogica e quella epistemologica, i cui contenuti erano

rimasti praticamente immutati per secoli (Gasca, 2013). Per comprendere gli sviluppi che seguirono e il loro impatto sull'insegnamento della matematica in Italia, è necessario cogliere come questo rinnovamento si sia articolato a livello internazionale.

In questo nuovo scenario, in cui il movimento della *matematica moderna* – o *New Math* – si era diffuso in modo capillare nel dibattito internazionale, co influenzando profondamente i programmi e i curricula scolastici con effetti ravvisabili ancora oggi. Il ruolo della storia della matematica nell'insegnamento e la sua pregnanza formativa vennero progressivamente eclissati per due ragioni diverse ma complementari. La prima era una ragione *esterna* alla matematica stessa: la disciplina andava acquisendo un valore sempre più di tipo strumentale, funzionale alle esigenze della società del secondo Novecento, alla formazione scientifica per la competizione tecnologica, al supporto delle scienze applicate e dell'industria. In questa prospettiva utilitaristica, la dimensione storica appariva come un lusso culturale, un'appendice erudita priva di valore formativo immediato.

La seconda ragione era *interna* all'epistemologia matematica: la rivoluzione culturale avviata dallo strutturalismo bourbakista proponeva una visione in cui la matematica acquisiva la propria unità attraverso il formalismo, l'assiomatica e la teoria degli insiemi. In questo edificio logico-deduttivo, la storia della matematica - con il suo procedere per tentativi, errori e scoperte contingenti - non trovava collocazione: essa appariva come una disciplina a sé stante, con obiettivi, oggetto e metodo completamente diversi rispetto alla matematica pura.

In tal senso, non sorprende come il ruolo formativo e didattico della storia della scienza sia stato in questa fase non semplicemente trascurato, ma attivamente respinto come incompatibile con la nuova concezione epistemologica della disciplina: la storia della matematica nella didattica era infatti vista come coincidente con quell'approccio didattico tradizionale che la *matematica moderna* tentava di contrastare. Tuttavia, la fondazione dell'*International Study Group on Relations between History Pedagogy of Mathematics* (HPM) come sottosezione specifica alla ICMI nel 1972 costituirà una importante tappa dello sviluppo internazionale che costituisce anche una reazione contraria alle mode della *matematica moderna*, volta a favorire non soltanto il riconoscimento del ruolo formativo della storia della matematica, ma anche a stimolare il dibattito internazionale. Gli sviluppi di questa nuova branca di ricerca verranno più ampiamente trattati nel capitolo seguente.

2.1 Il contesto epistemologico della matematica: la rivoluzione bourbakista

Sul piano strettamente epistemologico, le nuove idee si svilupparono già nel corso degli anni Trenta, quando le attività dei matematici erano dirette soprattutto sulla ricerca dei “fondamenti”, al fine di risalire alle basi logico-filosofiche della disciplina. Come osserva Della Vecchia (2023), tra la fine del XIX e l’inizio del XX secolo cominciava a maturare l’idea che la matematica non fosse una scienza naturale, bensì prodotto dell’intelletto umano, configurandosi come forma di pensiero assiomatico in cui, partendo da premesse arbitrarie, è possibile trarre conclusioni valide. Gli sforzi che si compirono fino agli anni Trenta furono volti a dare una rigorosa giustificazione assiomatica formale all’insieme di definizioni e deduzioni su cui si basava la matematica (e l’aritmetica in particolare), dando vita a diverse scuole di pensiero: il logicismo di Russell, l’intuizionismo di Brouwer e il formalismo di Hilbert.

In questo contesto di fermento epistemologico, nei primi decenni del XX secolo un gruppo di giovani matematici decise di usare lo pseudonimo collettivo Nicolas Bourbaki per un progetto rivoluzionario. Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, Charles Ehresmann, René de Possel, Szolem Mandelbrojt e André Weil fondarono nel 1935 l’*Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki*, operativa fino al 1983 presso l’*École Normale Supérieure* di Parigi. Il loro ambizioso progetto culturale e editoriale era volto a riscrivere interamente la matematica sulla base della teoria degli insiemi e del concetto di struttura (Israel, 2013; D’Amore e Sbaragli, 2020).

Il matematico Giorgio Israel, in un saggio dedicato all’eredità del bourbakismo nella cultura matematica, afferma che Il gruppo Bourbaki è stato capace di interpretare le nuove tendenze del secolo abbattendo le separazioni insite alla matematica stessa, sebbene sia rimasto chiuso esso stesso in una visione “classica”: il suo progetto non si è limitato all’unificazione delle tecniche e dei linguaggi matematici (processo già avviatosi con Poincaré, Hilbert, Peano, Klein, ecc.) ma ha fondamentalmente «*proposto un modello di stampo cartesiano di unificazione di tutta la matematica su pochi concetti di base*» (Israel, 2013, posizione 125). Tale progetto possedeva profonde radici storico-sociali: come ricordava Dieudonné (1970), la Prima Guerra Mondiale ebbe conseguenze tragiche per la matematica francese. A differenza della Germania, che impiegò i propri scienziati in attività di

ricerca per potenziare l'esercito, la Francia ritenne che tutti, compresi i giovani matematici, dovessero combattere in prima linea, con il risultato che due terzi degli studenti dell'*École Normale Supérieure* morirono al fronte, creando un drammatico vuoto generazionale nella matematica francese con importanti ripercussioni sulla ricerca matematica francese per gli anni successivi.

La svolta avvenne quando il matematico Jacques Hadamard (e successivamente Gaston Julia) iniziò a tenere dei seminari volti all'analisi dei lavori di matematici contemporanei (Dieudonné, 1970). È in questa occasione di confronto e approfondimento delle idee matematiche circolanti in ambienti culturali italiani, tedeschi e polacchi che si formò il gruppo bourbakista e il suo progetto editoriale enciclopedico che, da semplice opera libraria, ben presto avrebbe assunto la forma di un vero e proprio programma teso a rintracciare elementi di unità nei diversi settori della matematica (Bourbaki, 1950; Israel, 2013). L'idea dominante, come spiegava Dieudonné (1970), era che l'opera dovesse costituire uno *strumento* utilizzabile in tutti gli ambiti matematici, concentrandosi sulle idee fondamentali e rifiutando tutto ciò che era secondario o privo di applicazioni immediate. In questo contesto emerse il concetto di *struttura* matematica, che però non rappresentava un'invenzione originale: «What Bourbaki has done is to define and generalize an idea which already was widespread for a long time», definendo e generalizzando un'idea già ampiamente diffusa (Dieudonné, 1970, p. 138).

Nel 1935 il progetto di rifondazione si concretizzò negli *Éléments de Mathématique*, opera in cinque volumi (il cui titolo richiama volutamente gli *Elementi* di Euclide) aggiornati ancora oggi con numerose integrazioni e riedizioni. All'interno di un articolo del 1948, oggi considerato il manifesto programmatico del gruppo, i bourbakisti esplicitarono che l'unificazione delle matematiche cui tendeva il progetto mirava a realizzare quella “intellegibilità profonda” frutto dell'applicazione del metodo assiomatico: un procedimento di analisi e sintesi che procedeva dall'isolamento dei meccanismi fondamentali della teoria alla loro ricombinazione, verificandone l'interazione reciproca (Bourbaki, 1950; Israel, 2013). Questo metodo consentiva di individuare e studiare le strutture matematiche sottostanti alle teorie consolidate (Israel, 2013). Tuttavia, come specificava Dieudonné (1970), il metodo proposto non mirava a fornire nuovi indirizzi di ricerca, bensì a sistematizzare l'edificio epistemico della matematica operando sulle strutture esistenti: «The aim is, I repeat, to provide worktools, not to give stimulating speeches on the open problems of the new mathematics, because these open problems are in general much farther than Bourbaki can go» (Dieudonné, 1970, p. 145). Sulla base di questo lavoro vennero individuate tre tipologie

fondamentali di strutture matematiche – algebriche, d’ordine e topologiche – considerate dai bourbakisti come veri e propri strumenti di lavoro per ricondurre a unità tutte le branche del sapere matematico (Bourbaki, 1950).

In merito alle dispute filosofiche sui fondamenti, il gruppo bourbakista ha adottato sin da subito un atteggiamento “pragmatico”: pur non entrando nel merito del dibattito essi propongono un approccio chiaramente ispirato al formalismo di Hilbert (Della Vecchia, 2023) e, in merito al problema sull’essenza logica del pensiero matematico, il gruppo affermava si trattava di una questione psicologica e metafisica, che esulava dal lavoro del gruppo (Bourbaki, 1949).

L’impianto ideologico bourbakista influenzò profondamente il campo della didattica, ispirando il movimento delle “matematiche moderne” e trovò, al tempo stesso, consonanza con l’opera di Jean Piaget, in virtù di analogie tra le strutture matematiche e le strutture dell’intelletto (Marshall, 2002; Israel, 2013).

2.2 L’influenza di Nicolas Bourbaki nei rapporti tra matematica e società, istruzione e storiografia

Nel saggio *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* del 1968, Dieudonné mosse una critica radicale all’istruzione matematica francese, evidenziando il paradosso di un insegnamento secondario cristallizzato su contenuti tradizionali – geometria euclidea con le sue costruzioni di riga e compasso, algebra di Viète e Cartesio, rudimenti di calcolo infinitesimale – mentre la ricerca matematica aveva subito una rivoluzione epistemologica profonda attraverso un processo di astrazione sempre più radicale.

Sul piano pedagogico, Dieudonné (1970) dichiarava un personale disinteresse per le questioni dell’insegnamento secondario, limitandosi a individuare alcuni principi di coerenza epistemologica per una possibile riforma della scuola francofona. Il suo ragionamento partiva da una constatazione pratica: pur riconoscendo la profondità di alcune nozioni apprese a scuola, la stragrande maggioranza delle carriere professionali si accontentava di nozioni elementari. Emergeva così una dicotomia fondamentale: da un lato l’accumulo di conoscenze particolari ed eterogenee volte a preparare a tutte le possibili professioni; dall’altro la centratura sul pensiero matematico attraverso un numero ristretto di nozioni

generali accuratamente selezionate, volte a formare una “testa ben fatta”³ (Dieudonné, 1970). La proposta di Dieudonné si articolava su tre principi che avrebbero conferito all’insegnamento matematico una dignità pari alle discipline classiche, stimolando l’immaginazione e le facoltà creatrici degli allievi.

- Pensare i contenuti dei curricula in continuità con l’università, garantendo coerenza tra insegnamento secondario e terziario.
- Iniziare precocemente ai metodi moderni, privilegiando approcci basati sul ragionamento logico piuttosto che sulle figure geometriche intuitive, che lo studente avrebbe dovuto costruire autonomamente attraverso la pratica dei “grafici”.
- Unificare le discipline matematiche, evitando rigide separazioni che costringessero a riapprendere da zero conoscenze già acquisite.

Dieudonné era consapevole delle difficoltà psicologiche da affrontare: condurre l’allievo a prendere coscienza della necessità di un’impostazione assiomatica fornendo ricchi esempi di deduzione logica, ma senza trattare esplicitamente il tema degli assiomi (almeno fino ai 15 anni); familiarizzare con l’uso costante delle notazioni astratte e le loro applicazioni. Si trattava, tuttavia, di un “male necessario” poiché queste costituivano le pietre angolari su cui poggiavano le strutture matematiche.

In questo quadro pedagogico strutturalista, la storia della matematica assumeva inevitabilmente un ruolo del tutto marginale. Per i Bourbakisti la storia della matematica, pur non costituendo un loro precipuo interesse, tende ad essere interpretata attraverso la lente della moderna formalizzazione, con un’enfasi sul miglioramento della chiarezza e della coerenza logica: non si soffermano tanto sugli aspetti culturali o storico-sociali, bensì sulla progressiva costruzione di strutture matematiche astratte, che soltanto in retrospettiva si collocano nel corso storico (Israel, 2013). Lo sviluppo storico della matematica è inteso così come un’accumulazione progressiva di scoperte in cui le idee originali d’impronta prettamente individuale trovano continuità e discussione in una comunità di altri matematici, esplorandone le possibilità aperte e deducendone le conseguenze in diverse direzioni (Dieudonné, 1978). La storia della matematica veniva così sostanzialmente trascurata dal movimento Bourbakista, assumendo un ruolo

³ Come nota Israel nel suo saggio (2013), Dieudonné impiega qui un’espressione che oggi associamo principalmente a Edgar Morin e alla sua opera *La testa ben fatta. Riforma dell’insegnamento e riforma del pensiero* (1999). Tuttavia, scrivendo nel 1968, Dieudonné utilizzava uno slogan già diffuso nell’ambiente pedagogico dell’epoca non riconducibile a un autore specifico.

secondario nell'edificio stesso della disciplina: il motore stesso della matematica è visto come interno alla disciplina stessa, senza che vi sia una connessione stretta con il contesto storico di sviluppo né con le altre discipline limitrofe (Dieudonné, 1978).

In effetti, gli *Eléments de Mathématique* presentavano già dalla loro prima pubblicazione delle note storiche a conclusione di ciascun capitolo, la cui bibliografia contiene libri e le memorie originali importanti nell'evoluzione della teoria oggetto di discussione, ma senza alcuna pretesa di completezza storiografica: non era permesso esulare dall'organizzazione logica del lavoro editoriale che doveva privilegiare l'argomento matematico; di fatto, però, rispecchiano i dibattiti interni tra i matematici del gruppo (Paumier e Aubin, 2016). Gli *Éléments d'histoire des mathématiques* del 1960 costituiscono, invece, l'opera più propriamente storiografica del gruppo bourbakista: anch'essa collettivamente scritta, di fatti costituisce uno sforzo volto a dispiegare lo sviluppo interno della disciplina matematica da una prospettiva storica che esuli dalle dimensioni sociali e culturali extra-matematiche (Paumier e Aubin, 2016). In linea generale, l'approccio storiografico dichiarato da Bourbaki è quello di tracciare lo sviluppo delle “idee guida” in matematica, escludendo deliberatamente informazioni biografiche o aneddotiche, sicché lo sviluppo storico è attribuito principalmente a grandi individui (come Riemann, Boole, Galois), considerati i “creatori” di intere branche della matematica moderna. Come notano Paumier e Aubin (2016), il testo è pieno di espressioni di attesa (come “bisogna attendere Cauchy” o “bisogna attendere Möbius”) che rafforzano l'idea di un progresso inevitabile guidato da figure geniali. Non essendovi un vero e proprio contesto di riferimento, questi viene sostituito da metafore fluide che collegano i contributi dei matematici alla storia delle idee matematiche (come “flusso di idee”, “vortice” o “ribollire”) invocando perfino lo *Zeitgeist* di hegeliana memoria.

L'approccio emergente, definito come *storia internalista dei concetti*, mostrava uno sviluppo di idee guida e di concetti matematici, visti come un flusso quasi autonomo, isolato da influenze esterne come il contesto sociale, politico o biografico (Paumier e Aubin, 2016). Tale approccio ha il merito di porre enfasi sulle idee e sul loro sviluppo logico progressivo; d'altro canto, sul piano strettamente storiografico, è stato anche criticato come un approccio Whig alla storiografia: la storia è letta con le lenti della teleologia, interpretando il passato come un percorso lineare e progressivo verso il presente, culminando nell'opera di Bourbaki stessa; un approccio che, tuttavia, sembra offrire utili spunti ai matematici (Corry, 1989).

A conclusione del saggio, Giorgio Israel (2013) prova a trarre le somme sull'influsso del bourbakismo nella matematica e nella società. Nel campo strettamente epistemologico della matematica il gruppo bourbakista ha esercitato una forte influenza in discipline come l'algebra e, in particolare, la geometria algebrica, il cui linguaggio e le cui tecniche furono rifondati dall'opera di Alexandre Grothendieck e Jean Dieudonné, gli *Éléments de Géométrie Algébrique*, pubblicata tra il 1960 e il 1967. Il tentativo bourbakista di identificare un nucleo centrale e immutabile della matematica, epurato dall'intuizione e dall'artigianato individuale a favore di una deduzione logica platonizzante, è apparso sempre più anacronistico di fronte alla vitalità disordinata e intuitiva della ricerca, che ha finito per ribellarsi a un simile disciplinamento. Sicché l'influsso più duraturo del bourbakismo si è esercitato sull'immagine culturale della matematica e nell'identità del matematico come una figura disinteressata dagli eventi della cultura e della società, fuori dal tempo e dal mondo (anche dalla scienza), in contrapposizione alla figura dell'intellettuale integrale che si è esplicitata in personalità come Poincaré, Hilbert, Klein, Peano, Enriques o il loro contemporaneo Lucio Lombardo Radice. Questa autorappresentazione fu sostenuta da una storiografia "cumulativa" e distorta, per la quale Dieudonné fu largamente responsabile, tesa a giudicare il passato alla luce del presente e a liquidare sommariamente contributi non allineati con l'ortodossia strutturalista. L'esempio proposto da Israel è illuminante:

«Per esempio, secondo Dieudonné, la limitazione delle costruzioni alla riga e al compasso è un "brutto scherzo" di cui non si conosce l'autore. Dieudonné non si sforza neppure per ipotesi di cercarne la spiegazione, che è extra-matematica e relativa al fatto che, per i Greci (e per secoli in seguito), gli unici moti perfetti (e quindi suscettibili di rappresentazione razionale) erano la caduta rettilinea dei gravi verso il basso (il loro "luogo naturale") o il moto circolare perfetto dei corpi celesti. Per Dieudonné l'unica spiegazione possibile è nella prassi dei matematici, i quali hanno l'adorabile vezzo di porsi dei problemi futili per il mero gusto di risolverli, e quindi in un'ottica enigmistica (i matematici "così son fatti"), e che qualche sconsiderato prende troppo sul serio, come nel caso della riga e del compasso» (Israel, 2013, posizione 1395).

Secondo Marshal (2002), è sulla base di Bourbaki che si diffuse l'idea che la matematica fosse un linguaggio universale destinato ad essere impiegato in tutte le discipline, comprese le scienze umane e sociali, e questa concezione si accompagnò

alla tendenza moderna di privilegiare le relazioni fra oggetti (numeri, funzioni, figure geometriche ecc.), le cui proprietà particolari venivano considerate di secondaria importanza. Molti proclamarono che «la matematica è ovunque», affermazione che, pur esprimendo la convinzione della sua centralità come sapere accademico e culturale, pareva attingere anche alla moda dello strutturalismo che attraversava filosofia, letteratura, etnologia, linguistica e psicologia. Parallelamente, le nuove istanze pedagogiche, originate in parte dall'interpretazione piagetiana dello sviluppo cognitivo, secondo cui le strutture mentali che il bambino costruisce nell'apprendere la matematica sono analoghe alle «strutture-madri» discusse da Bourbaki, spinsero verso un insegnamento basato sull'apprendimento attivo. Si privilegiavano osservazioni, esperimenti e inferenze condotte dagli studenti con il supporto dell'insegnante, anziché su una trasmissione unidirezionale di conoscenze. Lo stile formale e strutturale proposto da Bourbaki, prestandosi meglio a mettere in luce relazioni e schemi astratti, parve più adatto al nuovo approccio pedagogico rispetto allo stile tradizionale.

2.3 La riflessione internazionale sui sistemi d'istruzione: il ruolo delle matematiche e delle scienze

Dal punto di vista delle discussioni sull'istruzione scolastica, i primi sforzi di riforma precedettero lo *Sputnik shock* del 1957 (Marshall, 2002; Kilpatrick, 2012). Negli Stati Uniti, il comitato sulla matematica scolastica dell'Università dell'Illinois (UICSM) sviluppò alla fine degli anni Cinquanta un curriculum completo per il ciclo secondario, introducendo nuovi argomenti come logica, algebra moderna, probabilità e statistica, e adottando il linguaggio moderno degli insiemi, delle mappature, dei gruppi e degli spazi vettoriali, al fine di supportare la preparazione matematica degli studenti già durante le scuole superiori (Beberman, 1958; Kilpatrick, 2012). Si trattò di sforzi sperimentali analoghi a quelli che sorsero presso molte altre istituzioni universitarie statunitensi, volti a introdurre uno spirito moderno nell'insegnamento della matematica scolastica, nei rami dell'aritmetica, dell'algebra e della geometria elementare adottando il linguaggio nuovo degli insiemi, delle mappature, dei gruppi e degli spazi vettoriali (Fey e Graeber, 2003; Furinghetti et al., 2008; Kilpatrick, 2012).

Istanze analoghe sorsero nel dibattito europeo, trainato dall'onda rivoluzionaria bourbakista (Marshall, 2002; Israel, 2013). La *Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (CIEAEM), nata nel 1950 come gruppo di lavoro intorno al pedagogista e matematico Caleb

Gattegno e istituzionalizzata nel 1952 con il matematico Gustave Choquet come presidente e lo psicologo Jean Piaget come vicepresidente, riuscì a radunare studiosi da retroterra culturali diversi, come matematici, filosofi e psicologi. Vennero trattati temi che avrebbero influenzato il dibattito europeo: la rilevanza della psicologia nell'educazione matematica, l'attenzione alla metodologia d'insegnamento, il ruolo dei materiali concreti, la relazione tra strutture mentali e matematica (Furinghetti, 2015).

2.3.1 La conferenza di Woods Hole

Sulla base di queste condizioni, il lancio del primo Sputnik da parte dell'Unione Sovietica nell'ottobre 1957 costituì, di fatto, un movente per accelerare gli sforzi di modernizzazione della matematica scolastica, negli USA così come in Europa (Marshall, 2002; Kilpatrick, 2012; Furinghetti, 2019).

In questo clima di cambiamento, nel 1959 Jerome Bruner coordinò la conferenza di Woods Hole presso l'Accademia Nazionale delle Scienze americana: per dieci giorni, 35 studiosi, tra psicologi dell'educazione e scienziati, discussero i problemi legati alla diffusione del sapere scientifico negli Stati Uniti, affrontando questioni sui ritmi d'insegnamento, i mezzi e le metodologie, le motivazioni all'apprendimento, il ruolo dell'intuizione e dei processi conoscitivi (Bruner, 1977; Franceschini, 2022).

All'apogeo dello strutturalismo, uno degli scopi della Conferenza fu di trovare il modo migliore per mettere in comunicazione la struttura epistemologica delle discipline e la struttura psicologica di chi apprende, coinvolgendo il problema della strutturazione dei programmi (Bruner, 1977; Franceschini, 2022). Secondo Bruner, per apprendere i concetti fondamentali di una disciplina era necessario non solo apprenderne i principi generali, ma anche maturare un atteggiamento all'indagine e alla scoperta, suscitando, per mezzo del docente, l'amore per il sapere. Nella consapevolezza che «la comprensione delle strutture rende più interessante una disciplina» (Bruner, 1977, p. 47), l'autore formulò l'idea del curriculum a spirale, i cui contenuti seguono un movimento ciclico e ricorsivo caratterizzato da crescenti livelli di complessità e astrazione. In questo approccio, l'articolazione tra pensiero analitico (deduttivo, logico-matematico) e pensiero intuitivo (basato sulla percezione della totalità del problema) assumeva un ruolo centrale nell'apprendimento matematico. La sua formulazione scritta sarebbe stata funzionale più al docente che non al discente: «Se esso non riesce a modificare, a spronare, a turbare, a informare gli insegnanti, non avrà alcun effetto su coloro a

cui essi insegnano. [...] Se avrà qualche effetto sugli alunni, lo avrà perché lo ha avuto sui docenti» (Bruner, 1977, p. 16).

Nella logica del curriculum a spirale, Bruner sottolineava la necessità di articolare sapientemente due modalità di pensiero complementari. Il pensiero analitico procede con piena consapevolezza dell'informazione e delle operazioni implicate, attraverso un ragionamento deduttivo (che faccia uso della matematica e della logica con un chiaro piano d'azione) oppure induttivo-sperimentale (che si serva dei principi della ricerca scientifica e dell'analisi statistica). Il pensiero intuitivo, al contrario, non procede per passi cauti e ben definiti, ma si basa su una percezione della totalità del problema (Bruner, 1977).

Nel campo della matematica, Bruner riconosceva all'intuizione un ruolo particolare, distinguendone due accezioni. La prima riguarda il momento della scoperta: quando, dopo un lungo lavoro su un problema, si raggiunge improvvisamente la soluzione, della quale occorre però ancora fornire una dimostrazione logica. La seconda riguarda la capacità del matematico esperto di formulare rapidamente ipotesi promettenti su come affrontare un problema nuovo: «quando altri gli si presentano con dei problemi, può con molta rapidità azzardare delle ipotesi molto giuste sul modo in cui stanno le cose o su quale, tra i vari modi di affrontare un problema, si dimostrerà fecondo» (Bruner, 1977, p. 79).

2.3.2 Le conferenze dell'OEEC

2.3.2.1 Royaumont, 1959

Parallelamente ai lavori convegnistici di Wood Hole, nel 1959 presso il Cercle Culturel de Royaumont, ad Asnières-sur-Oise, in Francia, si tenne un seminario intitolato *New Thinking in School Mathematics* e organizzato dall'ICMI e dall'OEEC (Organisation for European Economic Co-operation), organismo antenato dell'OCSE⁴, con il fine di elaborare una riforma curricolare di respiro internazionale che accogliesse i contributi di rinnovamento linguistico ed epistemologico che si andavano configurando (Furinghetti, 2019; Furinghetti e Menghini, 2023a). Fu in seno a questi contesti che esplosero le idee sulla “matematica moderna” (conosciuta anche come *New Math* in area anglosassone):

⁴ Al seminario parteciparono i 18 paesi membri (Austria, Belgio, Danimarca, Francia, Grecia, Islanda, Irlanda, Italia, Lussemburgo, Paesi Bassi, Norvegia, Portogallo, Svezia, Svizzera, Turchia, Regno Unito e Germania dell'Ovest) più i delegati di USA, Canada e Jugoslavia. Tra i delegati per l'Italia furono mandati in quell'occasione Luigi Campedelli e Emma Castelnuovo (Furinghetti e Menghini, 2023a, 2023b).

la ricerca matematica teorica, particolarmente nell'ambito algebrico, aveva infatti compiuto significativi progressi, mentre l'insegnamento scolastico rimaneva ancorato all'algebra classica e alla geometria euclidea, sicché se la scienza progredisce, anche l'educazione non può restare indietro (Ciarrapico, 2002; Kilpatrick, 2012; Furinghetti, 2019; Furinghetti e Menghini, 2023a). Tuttavia, secondo Fehr (1961), lo scopo del seminario non era formalizzare l'istruzione matematica sulla base del metodo logico-assiomatico di matrice bourbakista, bensì evidenziare la necessità di introdurre concetti moderni, definizioni chiare e metodi di insegnamento che conducessero, infine, a una struttura formale della matematica: Dieudonné e Stone costituirono, nello specifico, due poli opposti con cui l'argomento venne trattato (Furinghetti e Menghini, 2023a).

Jean Dieudonné esplicitò, nel corso della propria discussione, la frattura che si era venuta a formare tra l'insegnamento nella scuola secondaria (fatto di algebra classica e geometria euclidea) e le moderne scoperte scientifiche (concetti nuovi che gli studenti avrebbero incontrato e difficoltà che sarebbero sorte da un utilizzo massiccio e non familiare del simbolismo e del linguaggio formale e assiomatico) (Ciarrapico, 2002; Furinghetti e Menghini, 2023a). Dieudonné illustrò anche quali dovessero essere i nuovi contenuti da insegnare: utilizzare fin dalla scuola primaria il linguaggio e le notazioni simboliche della teoria degli insiemi e familiarizzare in geometria con i concetti di simmetria, traslazione, rotazione, per giungere in cicli successivi agli aspetti formali delle strutture algebriche, in particolare dei gruppi di trasformazioni geometriche e più generalmente delle trasformazioni lineari (Ciarrapico, 2002; Furinghetti e Menghini, 2023a).

Nel corso dello stesso seminario vi furono, tuttavia, anche posizioni più moderate: era effettivamente necessario introdurre nuovi argomenti nell'insegnamento matematico? Piuttosto che entrare nel merito delle questioni epistemologiche, l'intervento di Marshall Stone pose enfasi sulla necessità di sviluppare le competenze didattiche specifiche degli insegnanti, creando nuovi istituti di ricerca e aumentando il numero delle cattedre. Inoltre, al fine di migliorare la condizione dell'insegnamento nella scuola secondaria, ritenne che fosse importante esaminare e implementare i programmi per le scuole elementari, sviluppando efficientemente talenti e interessi matematici dei bambini per non allontanarli permanentemente dallo studio della matematica (Furinghetti e Menghini, 2023a).

Tra le posizioni emerse durante i lavori convegnistici, quella di Jean Dieudonné fu quella che suscitò le discussioni più accese, senza tuttavia proporre

effettivamente la rimozione integrale di Euclide dai curricula delle scuole secondarie (Furinghetti e Menghini, 2023a). In quelle circostanze iniziò tuttavia a diffondersi il ben noto motto “*À bas les triangles, à bas Euclide!*” che sarebbe presto divenuto il vessillo di una diversa pedagogia matematica. A conclusione del Convegno fu redatta una mozione volta a costituire una commissione per progettare un programma sperimentale capace di modernizzare l’insegnamento matematico slegandolo dalla geometria euclidea, con progetti editoriali di appropriati testi a corredo (Ciarrapico, 2002).

È significativo notare come nelle discussioni di Royaumont la dimensione storica dell’insegnamento matematico fosse assente. Né Dieudonné, con la sua proposta radicale di modernizzazione, né Stone, con la sua enfasi sulla formazione degli insegnanti e lo sviluppo dei talenti matematici dei bambini, menzionarono il ruolo che la storia della matematica potesse avere nell’insegnamento né dal punto di vista pedagogico né dal punto di vista didattico. Al contrario, il celebre motto “*À bas Euclide!*” che emerse dal convegno non costituiva soltanto un rifiuto della geometria euclidea come contenuto da insegnare, visto come antimoderno, bensì rappresentava simbolicamente la marginalizzazione della tradizione storica della matematica. In tal senso, Euclide divenne simbolicamente un ostacolo da rimuovere per accedere direttamente alle strutture algebriche moderne.

2.3.2.2 Aarhus e Zagreb-Dobrovnik, 1960

La successiva conferenza tenutasi ad Aarhus, in Danimarca, nel 1960 rappresentò il primo tentativo sistematico di sviluppare le idee di Royaumont, ma mise anche in evidenza le profonde divisioni all’interno della comunità dei matematici, non soltanto sul versante epistemologico (con ben cinque diverse proposte assiomatiche per la geometria) ma anche sul versante strettamente didattico e pedagogico. Si esplicitò così l’emblematica distanza tra matematici come Freudenthal, Servais e Viola da un lato, e Behnke e Dieudonné dall’altro: se quest’ultimo riteneva che le questioni psicologiche e pedagogiche fossero marginali rispetto agli aspetti epistemologici⁵, Freudenthal tentò di introdurre una prospettiva più ampia, distinguendo tra un approccio assiomatico rigoroso e un approccio deduttivo con deduzioni locali in cui i “fatti” euclidei potevano essere collocati, al

⁵ È nota la frase pronunciata da Dieudonné stesso, «*la psychologie, je m’en fiche*» (la cui traduzione in italiano suona come “della psicologia, non me ne frega niente”) (Behnke, et al., 1960, p. 104).

fine di favorire negli studenti la formazione di una visione d'insieme della disciplina (Furinghetti e Menghini, 2023a).

Successivamente, nel 1960 l'OEEC organizzò una sessione di lavoro in Jugoslavia articolata in due distinte fasi: la prima (tra il 21 agosto e 2 settembre) a Zagreb, la seconda (tra il 4 e il 17 settembre) a Dubrovnik (Furinghetti, 2019; Furinghetti e Menghini, 2023a). Lo scopo del lavoro convegnistico era prettamente pratico: sviluppare un programma moderno per l'insegnamento della matematica che potessero essere effettivamente implementato (Furinghetti e Menghini, 2023a). L'anno successivo l'OEEC pubblicò *Un programme moderne de mathématiques pour l'enseignement secondaire*: le proposte si riferivano a un corso triennale di ciclo medio inferiore caratterizzato dall'introduzione di nozioni elementari di teoria degli insiemi e concetto di vettore che sarebbero stati sviluppati nel corso del ciclo triennale superiore, quando si sarebbe potuto compiere una sistemazione teorico-formale (Castelnuovo, 1965; Ciarrapico, 2002). Per la prima volta si esplicitò la necessità di alternare la teoria con esercizi ed esempi pratici, seguendo così un approccio integrato (Furinghetti e Menghini, 2023a).

Il nuovo programma rappresentava effettivamente un compromesso fragile tra le posizioni emerse nei precedenti convegni e una sintesi tra tradizioni educative e culturali dei diversi paesi (Furinghetti e Menghini, 2023a). Freudenthal (1963) criticò il percorso proposto, specialmente in geometria, definendolo una vera e propria “inversione antididattica”: un approccio che, partendo dalla visione della matematica come prodotto finito, trascurava il ruolo chiave dell'indagine e dell'esplorazione nel processo di apprendimento dello studente. Nonostante queste critiche e la fragilità sia del consenso che dei presupposti pedagogici, i lavori convegnistici influenzarono profondamente le riforme scolastiche a livello internazionale, sia del blocco occidentale che di quello orientale, specialmente nel corso della seconda metà degli anni Sessanta (Furinghetti e Menghini, 2023a).

Inoltre, a ben vedere la critica di Freudenthal toccava indirettamente anche la questione della dimensione storica, sebbene egli non la esplicitasse in questi termini al convegno di Dubrovnik. Se la matematica veniva presentata come “prodotto finito” invece che come processo di indagine ed esplorazione, veniva eliminato proprio quel percorso genetico, storico e psicologico insieme, che avrebbe permesso agli studenti di comprendere come e perché certi concetti erano stati sviluppati. L'approccio proposto invertiva non solo la didattica (partendo dalle strutture astratte invece che dall'esperienza concreta), ma anche la prospettiva storica (presentando il risultato finale invece del processo di scoperta). Tuttavia, la

posizione di Freudenthal, pur attenta agli aspetti didattici e psicologici, non recuperava esplicitamente il ruolo della storia della matematica nell'insegnamento e nella formazione: questo tema che sarebbe emerso solo più tardi, con la fondazione del gruppo HPM negli anni Settanta.

La matematica moderna si diffuse rapidamente negli Stati Uniti, Regno Unito e paesi francofoni (Marshal, 2002; Gasca, 2013). Durante gli anni Sessanta e Settanta comparvero manuali che introducevano la teoria degli insiemi fin dalla scuola primaria e, nella secondaria, concetti come le corrispondenze e la definizione di numero negativo attraverso classi di equivalenza (Gasca, 2013). Secondo quanto riferito da Kilpatrick (2012), la matematica moderna si diffuse rapidamente secondo tre direttrici fondamentali. Per prima cosa, l'estensione dalla scuola secondaria superiore alla primaria, con la teoria degli insiemi introdotta fin dai primi anni di scuola (Fehr, 1964; Kilpatrick, 2012). In secondo luogo, la trasformazione da curriculum per l'élite destinata all'università a curriculum per tutti gli allievi, come nel caso del *Mathematics for the Majority Project* britannico (1967) o dei testi MSG americani concepiti per studenti di tutte le abilità (Kilpatrick, 2012). Infine, la propagazione dai paesi OCSE verso paesi esterni, come l'Unione Sovietica dove Kolmogorov promosse riforme analoghe approvate nel 1968 (Abramov, 2010; Kilpatrick, 2012). Tuttavia, questa strategia radicale non fu adottata uniformemente a livello internazionale: in alcuni paesi l'introduzione avvenne con ritardo, proprio quando altrove si iniziava a registrare un'inversione di tendenza dovuta alle crescenti critiche (Gasca, 2013). Nei paesi extra-OCSE come Cina, Europa orientale e Unione Sovietica, il collegamento con la tradizione scolastica non subì le interruzioni radicali dei paesi occidentali (Kilpatrick, 2012; Gasca, 2013).

In Francia, un esempio emblematico del movimento fu la Commissione Lichnerowicz (1967), composta da bourbakisti e non-bourbakisti, che propose l'introduzione di concetti algebrici moderni (gruppi, anelli, campi) e la sostituzione della geometria tradizionale con l'algebra lineare, pur mantenendo un'attenzione agli aspetti psicologici dello sviluppo in linea con Piaget (Ciarrapico, 2002; Gasca, 2013). Le riforme in altri paesi furono di analoga natura (Marshal, 2002).

2.3.3 Le critiche alla matematica moderna e la nascita del gruppo di ricerca internazionale *History and Pedagogy of Mathematics*

Secondo Manin (1991), l'educazione matematica generale della prima metà del Novecento era orientata all'applicazione pratica, fornendo una base minima per la soluzione di problemi di vita quotidiana e una transizione graduale verso lo studio

dell'ingegneria e dei calcoli scientifici a livello universitario. Nel tempo, tuttavia, si assistette a una crescente distanza tra i curricula scolastici e l'attività dei matematici professionisti, distanza che divenne particolarmente marcata negli anni Cinquanta con la rivoluzione bourbakista e lo sviluppo dell'algebra astratta. Questa frattura generò la necessità di una riforma dell'istruzione globale che prese il nome di *New Math* negli Stati Uniti e *Matematica moderna* in Europa (Manin, 1991).

La riforma, come si ha avuto modo di argomentare, prevedeva l'introduzione nei curricula scolastici di nozioni e principi tipici della matematica professionale contemporanea: la teoria degli insiemi come linguaggio unificante, la cultura rigorosa delle definizioni e la presentazione assiomatica delle dimostrazioni. Quest'ultima, in particolare, divenne una questione di principio nei programmi, considerata come il miglior mezzo non soltanto per comprendere gli oggetti matematici, ma anche per offrire agli studenti una visione essenziale della moderna matematica professionale ed enfatizzare i criteri di rigore universalmente riconosciuti (Manin, 1991). Come abbiamo visto nelle sezioni precedenti, questa visione si tradusse concretamente nelle proposte delle conferenze OEEC di Royaumont e Dubrovnik, nell'implementazione di curricula come l'SMSG americano, e nelle riforme nazionali di numerosi paesi occidentali nel corso degli anni Sessanta.

Tuttavia, l'espansione della *Matematica moderna* fu accompagnata fin dagli anni Settanta da voci critiche sempre più insistenti (Manin, 1991). Il movimento, diffusosi rapidamente a livello internazionale, si rivelò presto un fallimento: gli insegnanti denunciavano la difficoltà di trasmettere i nuovi contenuti astratti, gli studenti mostravano scarsa comprensione dei concetti proposti, e i genitori lamentavano la perdita delle competenze elementari nei propri figli (Marshall, 2002). Le critiche investivano non solo gli aspetti pedagogici (l'eccessivo formalismo, la distanza dall'esperienza concreta, la mancanza di motivazione) ma anche, più profondamente, l'impianto epistemologico stesso del movimento (Marshall, 2002). La matematica presentata come sistema di strutture astratte, prive di contesto storico e culturale, risultava incomprensibile e priva di senso per studenti che non potevano cogliere né le ragioni che avevano storicamente condotto a quelle astrazioni, né il significato culturale della disciplina. Come osservarono vari critici del movimento, se l'obiettivo era avvicinare gli studenti alla matematica dei professionisti, il risultato fu paradossalmente quello di allontanarli definitivamente dalla disciplina (Gasca, 2013).

Come documentato da Kilpatrick (2012), alcune delle critiche più articolate provennero dagli Stati Uniti, dove già nel 1962 Morris Kline, insieme a matematici del calibro di George Pólya, Lipman Bers e Max Schiffer, aveva pubblicato un memorandum firmato da 65 matematici americani e canadesi e pubblicato simultaneamente sull'*American Mathematical Monthly* e sul *Mathematics Teacher*. Il documento sosteneva che il curriculum doveva servire tutti gli studenti e non solo i futuri matematici, che le astrazioni non dovessero essere introdotte prematuramente e che significativamente le idee matematiche dovessero essere introdotte, quando possibile, seguendo il loro sviluppo storico (Kilpatrick, 2012). Questo esplicito richiamo al metodo genetico rappresentava un rifiuto diretto dell'approccio storico delle *Matematiche Moderne*: non si trattava solo di criticare l'eccessivo formalismo, ma di proporre un'alternativa pedagogica fondata proprio su quella dimensione storica che Bourbaki e i suoi seguaci avevano eclissato. Secondo Kilpatrick (2012) la pubblicazione del libro di Kline *Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math* nel 1973 segnò il fallimento del movimento, sicché a partire dalla fine degli anni Settanta la *Matematica moderna* fu progressivamente abbandonata, lasciando spazio a una controriforma che reintrodusse la geometria tradizionale, ridusse il formalismo e restituì centralità al calcolo e alle abilità operative di base (Marshall, 2002; Kilpatrick, 2012; Gasca, 2013).

In questo clima di crescente insoddisfazione nei confronti delle *Matematiche Moderne*, emerse a livello internazionale un movimento che proponeva un recupero della dimensione storica come antidoto al formalismo sterile e all'astrazione prematura (Furinghetti, 2020). Il momento cruciale fu il secondo *International Congress on Mathematical Education* (ICME-2) del 1972, durante il quale venne istituito un gruppo di lavoro dedicato specificatamente alla History and Pedagogy of Mathematics, su iniziativa di Phillip S. Jones e Leo Rogers. Il gruppo fu istituzionalizzato in modo permanente durante il terzo congresso (ICME-3) a Karlsruhe, in Germania, nel 1976, sotto l'etichetta *International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics* (HPM) (Giacardi, 2009; Furinghetti, 2020; Guillemette, 2023). La nascita di HPM segnò un punto di svolta: per la prima volta, l'idea che la storia della matematica avesse una pregnanza formativa e potesse contribuire all'insegnamento si radicava ampiamente nella comunità scientifica internazionale, non più come posizione isolata di singoli didatti, ma come programma di ricerca condiviso (Fried, 2014).

Il gruppo HPM stabilì otto obiettivi principali che orientarono gli sviluppi scientifici successivi (Fasanelli & Fauvel, 2006; Fried, 2014; Clark, 2019;

Furinghetti, 2020). I primi tre obiettivi erano di natura organizzativa e informativa: promuovere contatti internazionali e scambiare informazioni sui corsi di storia della matematica nelle università e nelle scuole; raccogliere opinioni sul rapporto tra storia e didattica della matematica a tutti i livelli; promuovere la ricerca interdisciplinare riunendo matematici, storici, insegnanti, psicologi, pedagogisti e altri studiosi interessati. Gli obiettivi dal quarto al settimo erano di natura più strettamente didattica e operativa: promuovere una comprensione più profonda del modo in cui la matematica si evolve e delle forze che contribuiscono a questa evoluzione; mettere in relazione l'insegnamento della matematica e la storia dell'insegnamento con lo sviluppo della disciplina, in modi che favorissero il miglioramento dei curricula; produrre materiali utilizzabili dagli insegnanti per mostrare punti di vista alternativi e promuovere la discussione critica; facilitare l'accesso ai materiali di storia della matematica. L'ottavo e ultimo obiettivo era di portata culturale più ampia: promuovere la consapevolezza della storia della matematica come parte significativa dello sviluppo delle culture umane.

Questi obiettivi rappresentavano un manifesto programmatico che si opponeva punto per punto alla visione delle *Matematiche Moderne*. In contrasto con l'idea di una matematica quale edificio logico atemporale, HPM proponeva di promuovere una comprensione più profonda del modo in cui la matematica si evolve, in contrapposizione all'approccio formale che presenta la matematica come prodotto finito, suggerendo di produrre materiali utilizzabili dagli insegnanti capaci di mostrare il processo di costruzione storica dei concetti (Manin, 1991; Clark et al., 2018). In tal senso emerge una visione che interpreta la storia della matematica come parte significativa dello sviluppo della cultura umana (Clark et al., 2018). In particolare, uno degli obiettivi dichiarati del movimento era costruire una coscienza critica in opposizione al dogmatismo che aveva caratterizzato l'approccio bourbakista (Clark et al., 2018; Manin, 1991).

Nei primi venticinque anni di esistenza, il gruppo HPM si concentrò su questioni prevalentemente teoretiche: giustificare epistemologicamente l'uso della storia della matematica in aula, definire i rapporti tra sviluppo storico e sviluppo psicologico dei concetti, individuare ostacoli epistemologici ricorrenti nella storia della disciplina e nell'apprendimento contemporaneo, elaborare metodologie per l'integrazione della storia nei curricula (Clark, 2019; Barbin, 2012). Questa elaborazione teorica avvenne in un contesto ancora dominato, almeno fino alla fine degli anni Settanta, dalle riforme della *Matematica moderna*, rendendo la posizione di HPM controcorrente rispetto al mainstream pedagogico dell'epoca (Clark et al., 2018). Hans Freudenthal, che sarebbe diventato una figura centrale del movimento

HPM sviluppando l'approccio della *Realistic Mathematics Education* fondato sull'idea che gli studenti dovessero "reinventare" la matematica seguendo un percorso ispirato (ma non vincolato) allo sviluppo storico (Jahnke, Jankvist & Kjeldsen, 2022), aveva definito senza mezzi termini la matematica moderna come «a fierce competition between both experts and charlatans with, in general, distressing results», denunciando come ciò che veniva insegnato fosse spesso «New Nonsense-unteachable, unlearnable, unmathematical» (Freudenthal, 1979, p. 321). Solo progressivamente, con il declino delle Matematiche Moderne e l'affermarsi di nuovi paradigmi didattici più attenti alla dimensione costruttivista e culturale dell'apprendimento, le idee del movimento HPM avrebbero trovato un'accoglienza più ampia nella comunità degli educatori matematici.

2.4 Il dibattito entra in Italia: la conferenza OEEC di Bologna, 1961

Una vera e propria opportunità per entrare in contatto con la matematica moderna che veniva discussa in ambito internazionale fu data all'Italia nel corso della conferenza internazionale dal titolo "*A discussion of the Aarhus and Dubrovnik reports on the teaching of geometry at the secondary level*" tenutasi a Bologna nel 1961, in piena continuità con le conferenze precedenti (Ciarrapico, 2002; Furinghetti, 2015; Furinghetti e Menghini, 2023a, 2023b). Per il dibattito italiano questa conferenza ha una duplice importanza: da un lato offrì una sintesi delle varie proposte internazionali e chiari le posizioni sulla matematica moderna di molti matematici di punta (come Stone, Artin, Cartan e Freudenthal); dall'altro, consentì l'apertura dell'Italia alla matematica moderna (Furinghetti e Menghini, 2023b). Nel discorso di apertura di Mario Villa, era infatti riconosciuta la necessità di modernizzare l'insegnamento nelle scuole secondarie italiane, che era rimasto immutato da quasi mezzo secolo, enfatizzandone tuttavia la necessità di adottare un approccio cauto e moderato (Villa, 1962; Furinghetti e Menghini, 2023b; Tomasi e Demattè, 2025). La tendenza a mantenersi ai margini del problema centrale rappresentato dalla matematica moderna sarebbe stata criticata (seppur non direttamente) da matematici come Cartan, secondo cui "alcuni" avrebbero voluto innovare senza effettivamente cambiare nulla (Furinghetti e Menghini, 2023b).

Tra i delegati italiani, Ugo Morin si distinse non soltanto nel corso della conferenza di Bologna, ma anche come figura di primo piano nel dibattito sulla modernizzazione dell'insegnamento matematico degli anni Sessanta: fu Vice-Presidente dell'*Unione Matematica Italiana* (UMI) e membro attivo della

Commissione Italiana per l'Insegnamento Matematico (CIIM); la sua attività si caratterizzò per un marcato impegno politico e sociale, traducendosi nella redazione di libri di testo e nella stesura di programmi scolastici che incorporavano elementi della matematica moderna (Furinghetti e Menghini, 2023b). Durante il suo intervento alla conferenza di Bologna, il matematico italiano propose l'introduzione di strumenti didattici innovativi per l'insegnamento della geometria, includendo i numeri reali, l'algebra astratta, la teoria degli insiemi e i vettori (Furinghetti e Menghini, 2023b). Tuttavia, Morin identificò specifiche difficoltà di implementazione nel contesto italiano: l'adozione della struttura assiomatica era stata problematica in Italia a causa dell'età inferiore di accesso alla scuola superiore (14 anni in Italia; 15 anni negli altri paesi) (Furinghetti e Menghini, 2023b). La comprensione di Morin degli elementi essenziali per il rinnovamento dell'insegnamento matematico si estendeva oltre gli aspetti puramente contenutistici: erano necessarie l'integrazione di corsi psico-pedagogici nel curriculum universitario per futuri docenti di matematica destinati all'insegnamento secondario, anticipando approcci formativi che sarebbero diventati standard solo decenni dopo (Furinghetti e Menghini, 2023b).

2.5 La cautela italiana verso la matematica moderna

Nei giorni immediatamente successivi alla conferenza, si tenne un incontro di esperti designati dall'OECD per definire le modalità di sperimentazione delle nuove proposte didattiche nelle classi italiane, con la partecipazione di diversi professori universitari italiani interessati al processo di modernizzazione dell'insegnamento disciplinare: furono designati dal CIIM Buzano, Campedelli, Morin, Villa e Viola per pianificare la sperimentazione nelle scuole, le cui classi pilota, con una suddivisione finanziaria divisa tra OECD e Ministero dell'Istruzione Italiano⁶, sarebbe effettivamente partita nel corso dell'anno scolastico 1962-1963 (Furinghetti e Menghini, 2023b; Tomasi e Demattè, 2025). Nello specifico, il Ministero istituì circa 40 classi pilota distribuite tra ultime classi del Liceo Classico, Penultime classi del Liceo Scientifico e Scuole Magistrali; in un secondo momento la sperimentazione fu estesa agli istituti tecnici, destinati alla formazione di diverse tipologie di lavoratori specializzati, e ad alcune scuole medie, ampliando

⁶ Il Ministero dell'Educazione istituì una commissione dedicata all'organizzazione di corsi di aggiornamento e classi pilota per la matematica con programmi moderni. Ciò comportò anche la necessità di predisporre dei corsi di aggiornamento, che si concentrarono su argomenti derivati direttamente dalle discussioni della conferenza di Bologna: Teoria degli insiemi, Trasformazioni geometriche, Elementi essenziali di algebra astratta e strutture algebriche, Struttura logica della geometria e Matematica applicata (Furinghetti e Menghini, 2023b).

significativamente la portata dell'esperimento (Ciarrapico, 2002; Furinghetti e Menghini, 2023b).

Le classi pilota adottarono un approccio metodologico ibrido che rifletteva l'approccio prudentiale e, al contempo, enfatizzava la necessità di ascoltare le opinioni degli insegnanti: una parte del programma matematico rimaneva tradizionale, mentre l'altra sezione incorporava argomenti scelti dagli insegnanti tra quelli sviluppati nei corsi di aggiornamento (Furinghetti e Menghini, 2023b). Furono, inoltre, adottati specifici sussidi didattici, ovvero: *“Per un Insegnamento Moderno della Matematica”*, del 1963, quale pubblicazione congiunta del Ministero dell'Educazione e dell'OECD; e *“La Matematica Moderna nell'Insegnamento Secondario”*, del 1965, opera dell'ispettore ministeriale Armando Chiellini (Furinghetti e Menghini, 2023b; Tomasi e Demattè, 2025). Inoltre, con il D.P.R. del 26 luglio 1960, n. 1692, fu stabilito un nuovo curriculum universitario per i futuri insegnanti che sarebbe entrato in vigore a partire dal 1961, con la sostituzione del corso di chimica con un corso di algebra, orientando in modo più specialistico la formazione matematica dei docenti e gettando, al contempo, le basi per una nuova generazione di insegnanti per i quali il problema dell'aggiornamento su nuovi argomenti sarebbe stato presumibilmente meno pressante (Furinghetti e Menghini, 2023b).

Non mancarono voci critiche verso le nuove tendenze d'oltralpe specialmente da parte di Eugenio Togliatti, secondo cui i docenti, formati in un altro clima, non erano preparati a trattare i temi della matematica moderna e i programmi stessi rivolti agli studenti erano eccessivi spinti verso l'astrazione, finendo per non essere apprezzati e, anzi, rischiando di risultare sterili, formali, basati sulla memoria e, perciò, provocando eccessive difficoltà (Togliatti, 1963).

La penetrazione delle matematiche moderne nel sistema scolastico italiano non si limitò alla scuola secondaria. Fu proprio nella scuola primaria che le nuove concezioni strutturali, in particolare la teoria degli insiemi, trovarono la diffusione più capillare, sebbene spesso in forma semplificata e attraverso i manuali scolastici piuttosto che attraverso interventi normativi o sperimentazioni istituzionali (Gasca, 2013). Come riportano Tomasi & Demattè (2025), il primo incontro con la teoria degli insiemi nella scuola elementare avvenne già nel 1956 con la traduzione italiana dell'opera *“Initiation au calcul”* di Piaget, Boshier e Châtelet, che conteneva un capitolo di Piaget sulla genesi dei concetti di numero e misura nel bambino. L'approccio insiemistico venne accettato come “compromesso” tra le teorie piagetiane dello sviluppo cognitivo e la matematica moderna bourbakista: divenne

prassi comune iniziare l'insegnamento dell'aritmetica introducendo concetti logici e operazioni sugli insiemi prima del concetto di numero naturale (Pellerey, 1989; Tomasi & Demattè, 2025). Tale approccio si diffuse rapidamente attraverso i manuali scolastici (emblematico fu il libro di Vittorio Duse del 1969, il cui primo capitolo sulla teoria degli insiemi divenne un modello imitato da tutti gli editori) e persistette ben oltre la fine dell'era della matematica moderna, fino alla riforma dei programmi della scuola primaria del 1985 (D.P.R. 104/1985), che ridimensionò il ruolo centrale della teoria degli insiemi riportandola a mero strumento di analisi del discorso matematico (Pellerey, 1989; Gasca, 2013; Furinghetti e Menghini, 2023b).

2.5.1 La Scuola Media Unica

Nel 1962, con il IV governo Fanfani, Luigi Gui fu nominato ministro della pubblica istruzione: è sotto il suo mandato che la Scuola media Unica fu definitivamente costituita nella sua struttura così come la conosciamo oggi (Ciarrapico, 2002; Furinghetti, 2015; D'Amico, 2010). La riforma si inseriva in un piano più ampio del ministro che prevedeva la lotta all'analfabetismo, maggiore reclutamento del personale docente, l'istituzione della scuola materna statale e un miglioramento delle condizioni della scuola elementare, l'istituzione della scuola media unica (aperta anche ai disabili), implementazione dell'istruzione secondaria superiore (liceale e tecnica), diffusione maggiore della cultura, incremento dell'edilizia scolastica e provvedimenti specifici per l'università tesi all'apertura (come maggiore autonomia, creazione di dipartimenti e l'istituzione del Consiglio Universitario Nazionale) (D'Amico, 2010).

La scuola media unica fu istituita con la legge del 31 dicembre 1962, n. 1859, con un consenso politico quasi generale, realizzando l'unificazione del ciclo medio (11-14 anni), precedentemente suddiviso in diversi indirizzi inferiori, definendo un unico percorso coerente e organico (Ciarrapico, 2002; D'Amico, 2010; Furinghetti, 2015; Furinghetti e Menghini, 2023b). Di fatto, ciò che cambiò fu il punto di vista del percorso: non più una soglia preparatoria all'accesso per la scuola secondaria, bensì prolungamento dell'istruzione di base che riconosceva i bisogni evolutivi di quella specifica fascia d'età; una scuola obbligatoria, gratuita, orientativa e, soprattutto, non selettiva (D'Amico, 2010). Come riportato nell'articolo 1 della legge «concorre a promuovere la formazione dell'uomo e del cittadino secondo principi sanciti dalla Costituzione e favorisce l'orientamento dei giovani ai fini della scelta dell'attività successiva» (tra studio o lavoro) (D'Amico, 2010, p. 490).

Nonostante l'atmosfera di modernizzazione, dove, ad esempio, l'insegnamento della Matematica fu congiunto con le Scienze Naturali e insegnato dallo stesso docente, i programmi mantennero una sostanziale continuità con il passato (D'Amico, 2010; Furinghetti e Menghini, 2023b). In merito proprio alla matematica, le uniche aperture verso la modernità si limitarono all'invito a fornire esempi di "corrispondenze e funzioni" e a considerare questioni "la cui discussione comporti analogie operative e strutturali", senza mai utilizzare, significativamente, la parola "insieme" (Furinghetti e Menghini, 2023b); si fece, tutt'al più, riferimento a un avviamento al processo astrattivo della matematica, con pochi calcoli e molta "concettualità" (D'Amico, 2010). Le indicazioni metodologiche della riforma appaiono più moderne rispetto ai contenuti: si raccomandò l'uso di procedimenti induttivi che conducessero a osservazioni, facili esperimenti ed evidenze empiriche; costante cura ad armonizzare aritmetica e geometria volta a dare una visione unitaria della matematica e l'uso frequente di grafici per favorire la visualizzazione (Ciarrapico, 2002; Furinghetti e Menghini, 2023b). Inoltre, è menzionato l'invito ad utilizzare "relazioni scritte" come esercitazioni al fine di sviluppare la capacità di espressione del pensiero su questioni matematiche elementari, abituando alla correttezza e sobrietà di espressione, vista come abilità di base del ragionamento logico (Ciarrapico, 2002).

Come discusso nel capitolo precedente, Emma Castelnuovo aveva elaborato negli anni del dopoguerra (1946-1957) una proposta didattica fondata sulla dimensione storico-genetica dell'insegnamento matematico, con un metodo attivo e costruttivo che procedeva dal concreto all'astratto. Negli anni Sessanta, con la diffusione delle matematiche moderne nel dibattito didattico italiano, Castelnuovo adattò il proprio approccio al nuovo contesto culturale, mantenendo come principale campo di applicazione e sperimentazione il contesto della scuola media.

Come specificano Tomasi e Dematté (2025), Castelnuovo riconobbe che le matematiche moderne, concentrandosi sulle "regole assiomatiche operative" comuni a diverse aree della disciplina piuttosto che sui singoli "palazzi" matematici tradizionali, offrivano nuove possibilità di unificazione concettuale. Tuttavia, per la scuola media l'insegnamento avrebbe dovuto ispirarsi alle concezioni fondamentali della matematica moderna senza appiattirsi in un corso che le dispiegasse ordinatamente secondo la logica formale (Castelnuovo, 1963). Bisognava seguire lo sviluppo cognitivo dell'allievo, presentando esperienze significative attraverso un approccio che continuava a privilegiare la dinamicità, l'operatività, l'uso di materiali concreti, il movimento e i collegamenti interdisciplinari (Castelnuovo, 1963; Tomasi e Dematté, 2025). Negli scritti dei

primi anni Sessanta, Castelnuovo sviluppò ulteriormente la riflessione sul ruolo della storia nell'insegnamento matematico. La sua concezione non prevedeva una storia intesa come cronaca di eventi:

«I capitoli fondamentali della geometria – equivalenza, uguaglianza, similitudine – vengono così ad essere legati fra loro secondo una linea che non è certamente euclidea, e che, da altra parte, non rappresenta probabilmente lo sviluppo della storia della matematica nel senso di cronaca, ma che potrebbe intendersi come un'interpretazione della storia. Non si tratta dunque di presentare ai ragazzi la storia della matematica “con le date”, ma di far “sentire” uno sviluppo della matematica reso necessario da una logica degli avvenimenti, dove questi, in quanto avvenimenti umani, si succedono per crisi, per salti, per fratture. Sono successe crisi che hanno costretto l'umanità – secondo l'interpretazione di Clairaut – allo studio dei capitoli fondamentali della geometria piana, e, come ultimo, allo studio della similitudine» (Castelnuovo, 1963, p. 37).

In altre parole, si tratta di utilizzare la dimensione storico-genetica come strumento per “concretizzare” le vicende matematiche più astratte immettendole nella vita e trasformandole in un patrimonio collettivo. Non si tratta, dunque, di fare propriamente “storia”, bensì di adottare un approccio più ermeneutico, in cui «le “crisi” matematiche diventano allora vere “crisi” dell'umanità, e vengono in tal modo a segnare il profilo di una storia sociale dei numeri e delle figure» (Castelnuovo, 1963, p. 34).

L'approccio di Castelnuovo rappresentava una delle proposte italiane che, pur accogliendo elementi delle matematiche moderne, mantenevano la centralità della dimensione operativa dell'insegnamento conservando al proprio interno una visione perlopiù positiva della dimensione storica, intesa come spazio ermeneutico capace di generare una visione epistemologica più profonda e completa, ma al contempo alla portata dei bisogni cognitivi tipici degli alunni delle scuole medie. Tale prospettiva avrebbe trovato consolidamento nelle decadi successive, trovando una propria sistematizzazione nei programmi degli anni Ottanta e Novanta e nei documenti della Commissione UMI dei primi anni Duemila, sebbene all'interno non più della scuola media, bensì della scuola secondaria di secondo grado.

2.5.2 Dibattiti e proposte per i programmi della scuola secondaria

Tra il 1963 e il 1967 la comunità matematica italiana elaborò numerose proposte di rinnovamento del curriculum di matematica della scuola secondaria durante tre importanti conferenze: Gardone, Camaiore e Frascati (Furinghetti e Menghini, 2023b). Queste proposte si affiancarono alla riforma della scuola media, che tuttavia non può essere considerata in senso stretto una riforma pienamente allineata con la matematica moderna. Tali programmi tendevano a riformare il curriculum di matematica nei primi due anni delle scuole superiori *tout court* (licei e istituti tecnici), riflettendo un'aspirazione verso una maggiore standardizzazione del sistema educativo (Furinghetti e Menghini, 2023b). Sebbene non vennero mai applicati, questi programmi influenzarono le sperimentazioni che avvennero nella seconda metà degli anni Settanta (Furinghetti e Menghini, 2023b).

La prima proposta fu elaborata durante la conferenza di Gardone (27-29 maggio 1963) e si articolava secondo una struttura programmatica per l'insegnamento della geometria nel biennio, con approccio organico e rigoroso centrato sullo studio del piano, delle trasformazioni geometriche e delle proprietà fondamentali di figure piane (Furinghetti e Menghini, 2023b).

Ugo Morin, vicepresidente della UMI, sollevò però alcune critiche rispetto alle proposte di Gardone: le novità introdotte apparivano più linguistiche che sostanziali. L'obiettivo dichiarato dei programmi era duplice: rispondere alle nuove esigenze scientifiche e didattiche e aggiornare notazioni, espressioni e definizioni al livello scientifico contemporaneo. Tuttavia, emersero due problemi principali. Il primo riguardava l'ermeticità: l'uso di nuove espressioni e definizioni rese le proposte poco accessibili. Il secondo era di natura strutturale: gran parte dei contenuti relativi alla teoria degli insiemi, alle strutture d'ordine e alle strutture algebriche doveva necessariamente precedere l'insegnamento della geometria, generando una sequenza didattica controversa (Furinghetti e Menghini, 2023b).

La seconda proposta, sviluppata durante la conferenza al Lido di Camaiore (3-5 ottobre 1964), si caratterizzò per maggiore sistematicità e precisione terminologica: al primo anno erano sottolineate le proprietà affini (incidenza, parallelismo, traslazioni, vettori) e topologiche (ordine, convessità) del piano; al secondo anno si passava alle proprietà metriche (perpendicolarità, congruenze, misure), introducendo strumenti di geometria analitica ed elementi di teoria degli insiemi e strutture algebriche (gruppi, anelli, campi), con approccio intuitivo ai numeri reali (Furinghetti e Menghini, 2023b).

I lavori convegnistici mostrarono un atteggiamento generalmente favorevole alla riforma dei curricula scolastici. In particolare, venne apprezzata la possibilità di creare nuove connessioni “trasversali” tra i concetti classici (struttura, insieme, vettore, funzione). Come suggerì Emma Castelnuovo, si propose anche di focalizzarsi sulle proprietà geometriche piuttosto che sulla tipologia di figure (Furinghetti e Menghini, 2023b). I programmi di Camaione riflettevano l’idea che i recenti sviluppi della matematica (in particolare l’algebra astratta e la topologia) dovessero necessariamente influenzare l’insegnamento scolastico (Furinghetti e Menghini, 2023b). Emersero anche posizioni più radicali a favore della matematica moderna. De Finetti, ad esempio, apprezzò molto i programmi implementati in Belgio per la scuola media e per le scuole superiori, considerandoli un modello di riferimento per il curriculum da realizzare. Secondo de Finetti, era necessario basarsi sulla nozione di sistema (e spazio) lineare, accantonando la geometria euclidea, giudicata come innaturale e pesante: una scelta che avrebbe permesso una semplificazione radicale, una revisione degli strumenti matematici e una visione unificata di quasi tutti gli argomenti (Furinghetti e Menghini, 2023b).

L’intenzione del Ministero di modernizzare la matematica scolastica suscitò reazioni contrastanti nel corpo docente: mentre gli insegnanti che avevano partecipato alle sperimentazioni nelle classi pilota si mostrarono entusiasti, la maggioranza esprimeva perplessità e rifiuto, in particolare i docenti più anziani. I docenti della scuola media furono, invece, particolarmente critici a causa della loro preparazione matematica non specifica (Furinghetti e Menghini, 2023b). Le classi pilota, in cui ispettori ministeriali e insegnanti profusero il massimo impegno, non ottennero grande successo per varie ragioni, incluso il fatto che il progetto fu sperimentato solamente negli ultimi due anni scolastici. Nei licei e nelle scuole magistrali non fu avviata alcuna riforma ufficiale e, a parte gli esperimenti, i programmi di matematica rimasero di fatto immutati dal 1945 (Ciarrapico & Berni, 2017; Furinghetti e Menghini, 2023b).

Tra il 1966 e il 1967, presso Villa Falconieri a Frascati, si svolsero due importanti conferenze sotto l’egida dell’UMI e del CIIM che portarono alla formulazione dei cosiddetti “Programmi di Frascati” (Ciarrapico, 2002; Furinghetti e Menghini, 2023b). Questi convegni videro la partecipazione di illustri matematici universitari come Campedelli, de Finetti, Prodi e Villani, insieme a docenti di scuola secondaria, rappresentanti del Ministero dell’Educazione e membri del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione (Furinghetti e Menghini, 2023b).

Le due conferenze produssero proposte distinte: quella del 1966 riguardava i primi due anni di scuola superiore, mentre quella del 1967 si concentrava sui tre anni finali dei licei classici e scientifici (Furinghetti e Menghini, 2023b). I programmi di Frascati individuarono due finalità principali per l'insegnamento della matematica: da un lato, la finalità formativa tesa a sviluppare la mente degli studenti, introducendoli alla riflessione e al ragionamento matematico attraverso strumenti semplici e fondamentali di indagine; dall'altro, l'adozione del metodo "per problemi", la cui idea di fondo, particolarmente diffusa nel decennio successivo, era che risolvere problemi significativi provenienti da vari campi della scienza potesse suscitare l'interesse degli studenti, partendo da situazioni reali prima di giungere all'esposizione teorica (Ciarrapico, 2002; Furinghetti e Menghini, 2023b). Ciarrapico (2002), nota che «l'attenzione ai problemi dell'apprendimento e alle esigenze educative a tutti livelli di scuola è maggiormente sentita, e ancor più lo sarà negli anni successivi. Entriamo in un periodo, quello degli anni '70, di nuova tendenza rispetto agli incontri di Royamont e di Dubrovnik» (p. 5).

Come analizzato da Furinghetti e Menghini (2023b), nonostante gli stimoli delle riforme europee, i matematici italiani scelsero un percorso differente da quello francese, più vicino alla tradizione matematica locale, mantenendo un approccio sintetico alla geometria pur accogliendo elementi di modernizzazione come l'introduzione anticipata del piano cartesiano e il trattamento intuitivo dei numeri reali nel secondo anno (Furinghetti e Menghini, 2023b). Questi programmi rappresentarono un punto di equilibrio tra istanze innovative e posizioni conservative, benché non trovassero mai applicazione pratica contribuendo tuttavia a sensibilizzare i docenti più attenti sulla necessità di rinnovamento didattico. È significativo notare che, in linea con l'impostazione strutturalista e bourbakista dominante nel dibattito internazionale, nessuno di questi programmi (Gardone, Camaione, Frascati) prevedeva riferimenti espliciti alla dimensione storica della matematica: l'attenzione era interamente rivolta all'esposizione assiomatico-deduttiva dei contenuti e alle connessioni strutturali tra diversi ambiti disciplinari, considerando la storia come elemento estraneo o addirittura fuorviante rispetto agli obiettivi formativi.

Dopo le conferenze di Frascati del 1966 e del 1967, l'attenzione ai problemi dell'apprendimento crebbe, sicché si intensificò la ricerca sull'insegnamento della matematica e furono avviate numerose iniziative sperimentali (alle quali gli insegnanti parteciparono con entusiasmo, sostenuti da docenti universitari) mentre gli sviluppi internazionali nell'educazione matematica alimentavano questa

evoluzione offrendo ulteriori occasioni di confronto di idee e sperimentazioni non solo nelle riunioni del CIEAEM, ma anche nel neocostituito *International Congress on Mathematical Education* (ICME) e negli incontri dell'*International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME) (Furinghetti e Menghini, 2023b).

2.5.3 Verso il superamento della matematica moderna: i programmi del 1977 per la scuola media

La storica seduta alla Camera del 31 marzo 1977 fu emblematica: la riforma sulla scuola media unica, avviata nel 1963, aveva lasciato aperti alcuni problemi che emersero durante la discussione del disegno di legge governativo n. 740 recante *Modifiche di alcune norme della legge 31 dicembre 1962, n. 1859, sulla istituzione e l'ordinamento della scuola media statale* (D'Amico, 2010). In particolare, la proposta di legge si faceva carico di alcuni problemi: sottoutilizzazione (e discriminazione) degli insegnamenti di Educazione musicale ed Educazione tecnologica; difficoltà di organizzazione oraria; disomogeneità nella formazione degli allievi; la soppressione del latino (e l'uso della dizione Elementari conoscenze di Latino, in seno all'Italiano) (D'Amico, 2010). I nuovi programmi entrarono in vigore con il Decreto Ministeriale del 9 febbraio 1979, n. 268.

Alla matematica viene concesso più spazio, passando da 3 ore settimanali a 6, divenendo, tuttavia, integrata con le scienze sperimentali, quali chimica, fisica e scienze naturali (Ciarrapico, 2002; D'Amico, 2010; Menghini, 2016). Per la riforma dei programmi scolastici, che intaccavano anche l'insegnamento della matematica, il Ministero della Pubblica Istruzione istituì una commissione di 60 membri, tra i cui membri dell'area matematica spiccavano Emma Castelnuovo, Prodi, Francesco Speranza e Villani (Menghini, 2016; Furinghetti e Menghini, 2023b). Sebbene la matematica moderna avesse perso il proprio slancio, ne rimanevano alcune tracce nel testo legislativo, come il richiamo all'uso del linguaggio dell'insiemistica come strumento di chiarificazione volto a fornire una visione unitaria della disciplina (Ciarrapico, 2002; Menghini, 2016; Furinghetti e Menghini, 2023b). L'impostazione privilegiava un approccio didattico fondato sulla "matematizzazione della realtà": partire da osservazioni, esperimenti e problemi concreti per motivare l'attività matematica, costruendola su una solida base intuitiva (Ciarrapico, 2002). I contenuti erano divisi in sette temi (geometria, insiemi numerici, probabilità e statistica, problemi ed equazioni, coordinate, trasformazioni geometriche, corrispondenze) per favorire un'integrazione flessibile e interdisciplinare degli argomenti, mentre gli obiettivi dell'insegnamento enfatizzavano lo sviluppo delle capacità intuitive, il passaggio graduale

dall'intuizione al ragionamento organizzato, e l'acquisizione di un linguaggio sempre più chiaro e preciso utilizzando espressioni verbali, grafiche e simboliche (Ciarrapico, 2002; Menghini, 2016; Furinghetti e Menghini, 2023b). Questi programmi, ispirati al contributo di Emma Castelnuovo, sebbene fossero all'avanguardia se paragonati al contesto internazionale, trovarono scarsa applicazione nelle scuole a causa delle resistenze al cambiamento da parte dei docenti: il programma molto vasto era difficilmente applicabile e i docenti non erano in grado di completarli, sicché si continuò a insegnare principalmente algebra e geometria con i metodi tradizionali (Ciarrapico, 2002; Menghini, 2016; Furinghetti e Menghini, 2023b).

Nonostante la maggiore attenzione agli aspetti pedagogici e alla dimensione applicativa della matematica, i programmi non prevedevano alcun riferimento alla dimensione storica della disciplina: l'assenza della storia rimaneva totale, in continuità con l'impostazione strutturalista dominante nel dibattito precedente, rimanendo relegata all'iniziativa dei docenti.

2.6 Progetti sperimentali per la matematica a cavallo tra gli anni Settanta e Novanta

A partire dagli anni Settanta, dopo i movimenti del Sessantotto e i mutamenti sociali che cambiarono il rapporto tra scuola e società, si aprì una lunga stagione di riforme mancate per i licei (D'Amico, 2010; Furinghetti e Menghini, 2023b).

Gli istituti tecnici videro invece un rinnovo dei programmi con l'introduzione di informatica, statistica e probabilità. Il computer e l'informatica divennero oggetti di studio negli indirizzi tecnici della scuola secondaria, configurandosi come disciplina autonoma prevalentemente legata alla formazione professionale, ma affiancata da un insegnamento matematico robusto (Ciarrapico, 2002). Con il D.P.R. del 31 luglio 1981, n. 725, vennero inserite importanti avvertenze per ciascun insegnamento, tra cui quella relativa al programma di matematica esplicitava:

«L'obiettivo prioritario dell'insegnamento di tale disciplina non deve essere l'esaltazione del gusto della pura astrazione, né il desiderio di costruire un edificio perfetto e rigoroso, bensì la realizzazione di un processo logico col quale raggiungere cognizioni che, se già valide dal punto di vista metodologico,

risultano però finalizzate alla rappresentazione della realtà»
(Gazzetta Ufficiale, 10 dicembre 1981, Supplemento Ordinario).

Per i licei, l'immobilità legislativa fu superata grazie al D.P.R. 419 del 1974, che autorizzò singoli istituti ad avviare sperimentazioni didattiche autonome (D'Amico, 2010; Furinghetti e Menghini, 2023b). Questi decreti, sebbene abbiano avuto impatto limitato nella maggior parte delle scuole (D'Amico, 2010), favorirono la nascita dei Nuclei di Ricerca in Didattica della Matematica presso numerose università italiane, dove la collaborazione tra docenti universitari e insegnanti permise di attuare importanti sperimentazioni (Furinghetti e Menghini, 2023b). Dal 1976 il CNR finanziò progetti sperimentali che, rifacendosi ai programmi di Frascati, introdussero contenuti innovativi come informatica, statistica, probabilità e programmazione lineare (Ciarrapico, 2002; Menghini, 2016; Furinghetti e Menghini, 2023b). Furono pubblicati nuovi manuali con approcci didattici innovativi, basati sul metodo dei problemi e sulle trasformazioni geometriche, che ebbero un ruolo importante nella formazione degli insegnanti sebbene con una penetrazione limitata nelle scuole (Ciarrapico e Berni, 2017; Furinghetti e Menghini, 2023b).

Nonostante questa significativa apertura verso nuovi contenuti e metodologie didattiche, anche le sperimentazioni più avanzate degli anni Settanta e Ottanta non prevedevano riferimenti alla dimensione storica della matematica. L'innovazione riguardava l'introduzione di nuove discipline a carattere tecnico e tecnologico (informatica e statistica) e nuovi metodi (didattica per problemi), ma la storia rimase esclusa dal dibattito didattico e pedagogico italiano.

Nel corso degli anni Ottanta seguirono altre due importanti sperimentazioni di respiro nazionale che si protrassero fin agli anni Novanta, come i programmi del Piano Nazionale Informatica (PNI) del 1985 e il Progetto Brocca avviato nel 1988, che costituirono il risultato del dibattito che coinvolse associazioni disciplinari (come UMI, CIIM e Mathesis) e docenti scolastici e universitari (Ciarrapico, 2002; Tomasi, 2012; Furinghetti e Menghini, 2023b). Si tratta, in altri termini, di occasioni di rinnovamento disciplinare colte da matematici e docenti nel tentativo di modernizzare l'insegnamento della matematica, i cui programmi erano rimasti ancorati a quelli del 1945 (Ciarrapico, 2002; Tomasi, 2012).

Varato nel 1985 dal Ministro Falcucci, il Piano Nazionale Informatica (PNI) introdusse l'insegnamento dell'informatica in forma sperimentale⁷, affiancandola ad elementi di logica e matematica moderna (Ciarrapico, 2002; Tomasi, 2012). I programmi, coerenti con le linee guida della scuola media del 1979, si articolavano in cinque aree tematiche (geometria, insiemi numerici, relazioni e funzioni, probabilità e statistica, logica e informatica) enfatizzando i processi di matematizzazione della realtà e la didattica per problemi (Ciarrapico, 2002; Tomasi, 2012). I corsi di formazione partirono a cascata già nel 1985, coinvolgendo docenti di matematica e matematica e fisica quali destinatari (Tomasi, 2012). Come nota Tomasi (2012) «Una delle critiche prevalenti si riferiva alla vastità dei contenuti, forse perché i docenti hanno la tendenza a conservare, nel loro insegnamento, il 'vecchio' e il 'nuovo'» (p. 205), sicché il mercato editoriale si adeguò proponendo libri di testo molto voluminosi in cui i nuovi argomenti non trovavano un'organica integrazione. Nonostante le limitazioni, la grande diffusione della sperimentazione PNI ha favorito un certo rinnovamento dell'insegnamento matematico nelle scuole superiori che finirà via via per consolidarsi nel tempo (Tomasi, 2012). Anche in questa sperimentazione la dimensione storica della matematica non trovò spazio nei programmi.

Nel 1987 il Ministro Giovanni Galloni costituì una commissione presieduta dal sottosegretario Beniamino Brocca, composta da 40 specialisti tra cui Giovanni Prodi per l'area matematica, al fine di elaborare una proposta per il riordino della scuola secondaria superiore (Ciarrapico, 2002; D'Amico, 2010; Tomasi, 2012). Dopo un lungo lavoro consultivo che produsse i piani di studio per il biennio (1988) e per il triennio (1990), il progetto fu attivato in via sperimentale nell'a.s. 1991/1992 (D'Amico, 2010). Al fine di agevolare l'operato esecutivo, la commissione delegò un Comitato ristretto che definì le finalità e l'impianto generale della nuova scuola ed i piani di studio degli indirizzi che avrebbero dovuto sostituire la Scuola liceale e tecnica, con dibattito avente per oggetto ogni disciplina: nel 1988 furono elaborati i piani di studio per il biennio, mentre nel 1990 quelli del triennio; nel 1992 le Proposte furono completate nei dettagli in forma definitiva (Ciarrapico, 2002; D'Amico, 2010; Tomasi, 2012). Il progetto, poiché non attivabile per via parlamentare, fu attivato in via sperimentale nell'a.s. 1991/1992 attraverso la Circolare del 19 aprile del 1990, n 109 (D'Amico, 2010).

⁷ Come nota Ciarrapico (2002) l'insegnamento fu introdotto in forma generalizzata a tutte le scuole di ogni ordine e grado. Tuttavia, tale indicazione restò sulla carta, poiché di fatto fu applicato soltanto nelle Scuole Secondarie.

In linea generale, il programma di matematica del biennio Brocca ricalcò quello previsto nel PNI presentandosi, tuttavia, all'interno di un quadro generale diverso, caratterizzato da un rinnovamento che coinvolgeva tutte le discipline (Ciarrapico, 2002; Tomasi, 2012). A differenza dei programmi precedenti, il Progetto Brocca includeva riferimenti espliciti alla dimensione storica della matematica. Tra le finalità dell'insegnamento venne indicato «l'interesse sempre più penetrante a cogliere aspetti genetici e momenti storico-filosofici del pensiero matematico» in tutti gli indirizzi liceali (Ministero della Pubblica Istruzione, 1991, p. 249), mentre tra gli obiettivi di apprendimento comparivano la necessità di inquadrare storicamente l'evoluzione delle idee matematiche fondamentali cogliendone le interazioni con il pensiero filosofico. Alcuni contenuti specifici, come il problema della misura e lo sviluppo delle geometrie non euclidee, dovevano essere «inquadrato preferibilmente sotto il profilo storico» (Ministero della Pubblica Istruzione, 1991, p. 247). Le indicazioni didattiche invitavano i docenti a “storicizzare” le questioni matematiche presentandole come una successione di tentativi e a sfruttare ogni occasione per illustrare questioni di epistemologia della matematica, eventualmente attraverso la lettura di passi significativi di testi classici in collaborazione con i colleghi di filosofia (Ministero della Pubblica Istruzione, 1991, p. 248).

2.7 Sulla soglia del nuovo Millennio

Nella seconda metà degli anni Novanta furono approvate leggi che mutarono la struttura della scuola, tra cui la Legge Bassanini del 1997 sull'autonomia scolastica, la riforma dell'esame di maturità e l'istituzione della Scuola di specializzazione per l'insegnamento secondario (SSIS) quale formazione universitaria specifica per l'insegnamento secondario (poi abolita dal Ministro Gelmini) (D'Amico, 2010; Tomasi, 2012). Nel 2000 il Ministro Tullio De Mauro nominò una commissione per il rinnovo dei curricula che, pur arenandosi con la fine anticipata della legislatura nel 2001, produsse il documento *Matematica 2001* elaborato dalla commissione UMI (D'Amico, 2010; Tomasi, 2012).

Nel 2000 il nuovo Ministro, il noto linguista Tullio De Mauro, nominò una nuova commissione per il rinnovo dei curricula della scuola (superando, in tal senso, i limiti della sperimentazione Brocca), ma si arenarono sul termine anticipato della legislatura, nel 2001 (D'Amico, 2010; Tomasi, 2012). Nonostante ciò, i lavori della commissione nominata dall'UMI confluirono in un documento, *Matematica 2001*, centrato sull'elaborazione di un curriculum adeguato alle esigenze della nuova contemporaneità (Tomasi, 2012). Le intenzioni della Commissione, tuttavia,

prevedevano un rinnovamento del curriculum di matematica per tutta la scuola secondaria superiore, delineando competenze, abilità e conoscenze matematiche da destinare a tutti i cittadini, indipendentemente dalla specifica formazione scolastica: queste, confluite poi in Matematica 2003 e Matematica 2004, furono adattate per il primo ciclo d'istruzione (Primaria e Scuola secondaria di I grado) (Tomasi, 2012).

Esso articola abilità e conoscenze matematiche destinate alla scuola secondaria di Primo grado, in rapporto di continuità con la scuola primaria. In esso, emerge l'idea di una "matematica per il cittadino" intesa come «corpus di conoscenze e abilità fondamentali, necessarie a tutti coloro che entrano nell'attuale società, da acquisire secondo una scansione organica articolata nei successivi livelli scolastici» (UMI, 2001, p. 2). Il documento, anticipando la struttura delle più moderne Indicazioni Nazionali per il Primo ciclo d'istruzione, articolava competenze trasversali (tra cui significativamente "Collocare nel tempo e nello spazio") e competenze matematiche specifiche relative a nuclei tematici (UMI, 2001).

2.7.1 Matematica 2001: il primo ciclo d'istruzione

Il documento Matematica 2001, destinato al primo ciclo d'istruzione, articolava competenze trasversali e competenze matematiche specifiche relative a nuclei tematici (UMI, 2001). È rilevante notare che la prima competenza trasversale trattata era "Collocare nel tempo e nello spazio", definita come sviluppo della «consapevolezza della dimensione storica e della collocazione spaziale di eventi considerati» (UMI, 2001, p. 3). Sul piano contenutistico, i nuclei tematici erano corredati da specifici spunti storici: sistemi di numerazione antichi, il metodo di Eratostene, i valori approssimati di π , le questioni probabilistiche del Seicento (UMI, 2001). Dal punto di vista metodologico, la storia era presentata come contesto di apprendimento interno alla matematica stessa: l'inserimento graduale della dimensione storica consentiva di offrire una visione diacronica che permetteva di recuperare il significato originario della disciplina (UMI, 2001, p. 17). Il metodo proposto prevedeva la discussione di classe accompagnata dalla lettura critica e interpretazione di fonti storiche, le quali non dovevano avere carattere monologico ma essere interpretabili con riferimento all'esperienza già svolta dagli allievi (UMI, 2001, p. 23).

Con alcune modifiche, il documento costituirà la base dei successivi nuovi curricula di Matematica per la scuola primaria e per la scuola secondaria di I grado promulgati con D. Lgs. del 19 febbraio 2004, n. 59.

2.7.2 Matematica 2003 e 2004: il secondo ciclo d'istruzione

I volumi Matematica 2003 e Matematica 2004, dedicati alla scuola secondaria di II grado, presentavano una lunga premessa in cui veniva specificato come l'educazione matematica contribuisse alla formazione culturale del cittadino, consentendo una consapevole partecipazione sociale esercitata con capacità critica (UMI, 2003). L'insegnamento matematico «non deve costituire unicamente un bagaglio astratto di nozioni» (UMI, 2003, p. 4): il bambino e l'adolescente sono soggetti di apprendimento attivo che costruiscono le proprie conoscenze attraverso esperienze matematiche. In questa prospettiva, «priva del suo carattere strumentale, la matematica sarebbe un puro gioco di segni senza significato; senza una visione globale, essa diventerebbe una serie di ricette prive di metodo e di giustificazione» (UMI, 2003, p. 4).

La Commissione UMI si mostrò consapevole che una visione strumentale della matematica fosse strettamente correlata al contesto storico-sociale che trasversalmente permea la disciplina, sicché tale relazione poteva essere colta attraverso opportune riflessioni storiche introdotte gradualmente: «Essendo per sua natura di carattere critico, la riflessione storica dovrà attendere che i concetti relativi si siano consolidati, in modo da non generare confusione e quindi incertezza negli studenti» (UMI, 2003, p. 5). La Commissione avvertì i docenti sull'importanza di non forzare lo studente o falsare la narrazione storica: «la narrazione storica potrà e dovrà essere semplificata, ma non falsata» (UMI, 2003, p. 5). La dimensione storica era collegata a una visione della matematica come impresa umana, con conseguenze sul piano didattico in merito al ruolo degli errori, dei misconcetti, del linguaggio metaforico e dell'intuizione, elementi che non contaminavano la “purezza” della matematica ma costituivano parte integrante del processo d'apprendimento (UMI, 2003).

Sul piano strettamente curricolare, la proposta articolava quattro nuclei tematici (Numero e algoritmi; Spazio e figure; Relazioni e funzioni; Dati e previsioni), ciascuno corredato da specifici spunti storici che spaziavano dall'antichità al mondo moderno: dall'evoluzione del concetto di numero alle origini della geometria euclidea, dalle tecniche risolutive delle equazioni nelle antiche civiltà alla nascita della statistica, dai paradossi di Zenone ai problemi classici greci (UMI, 2003). Tre nuclei trasversali (Argomentare, congetturare, dimostrare; Misurare; Risolvere e porsi problemi) completavano il curriculum con ulteriori riferimenti storici (UMI, 2003).

In questo quadro metodologico, la storia della matematica era presentata come specifico percorso laboratoriale, ovvero un percorso strutturato di attività volto a costruire il significato degli oggetti matematici motivando gli studenti all'apprendimento, con sviluppi interdisciplinari verso storia, filosofia e arte: «In questo quadro, quindi, la storia della matematica può dare al singolo docente l'opportunità di scegliere, se le condizioni lo consentono, un percorso didattico aperto alle connessioni interdisciplinari e generalmente capace di suscitare l'interesse degli allievi; è quindi ovvio che il contesto del laboratorio esclude la determinazione di contenuti disciplinari specifici relativi alla storia della matematica» (UMI, 2003, p. 28).

Il volume Matematica 2004, dedicato all'ultimo anno di liceo, ribadì che la storia delle matematiche costituiva un sussidio didattico particolarmente efficace nell'ultimo triennio, dove poteva essere introdotta in modo articolato grazie alla maggiore maturità degli studenti: «Consentono cioè di non limitarsi esclusivamente ad una storia “raccontata”, ma di presentare l'evoluzione delle idee matematiche attraverso temi opportunamente scelti [...] o con letture mirate dei classici, adeguatamente contestualizzate» (UMI, 2004, p. 22). La storia permetteva di superare la visione statica della disciplina vedendo in essa uno strumento euristico per risolvere problemi attraverso i processi di matematizzazione, favorendo una visione unificante e stimolando la creatività.

2.7.3 Il riordino della scuola secondaria: le nuove Indicazioni Nazionali per i Licei e le Linee Guida per gli Istituti Tecnici e Professionali

Sebbene il Ministro Moratti abbia promulgato nuove Indicazioni Nazionali per la scuola secondaria di II grado nel 2005, la successiva legislatura, con Fioroni all'ufficio del Ministero, ne sospese l'applicazione (D'Amico, 2010; Tomasi, 2012). Nel 2008 subentrò il ministro Gelmini che operò una ben nota politica di tagli alla spesa sul sistema d'istruzione italiano: furono soppresse le sperimentazioni del progetto Brocca (quelle attive sarebbero andate a esaurimento) e fu introdotto il Riordino dei Licei, degli Istituti tecnici e Professionali attraverso l'emanazione di nuove Indicazioni e Linee Guida (D'Amico, 2010; Tomasi, 2012).

Rispetto ai precedenti quadri orari, si assiste a una diminuzione delle ore di lezione di matematica in tutti gli indirizzi di studio, in contraddizione con le dichiarazioni politiche del governo che esaltava l'importanza della disciplina (Tomasi, 2012). Inoltre, la rapidità con cui è stato applicato il riordino ha portato a

delle sostanziali differenze rispetto ai documenti varati, dovuto al fatto che il gruppo di esperti non condivideva un'impostazione comune, tranne che per i nomi dei temi da trattare, sicché se la matematica delle Linee Guida presenta una stesura organizzata su conoscenze e abilità suddivise in due colonne, quella dei licei è a colonna unica e discorsiva, presentando un'impostazione organica caratterizzata da un punto di vista prettamente culturale (Tomasi, 2012).

In entrambi i documenti si riconosceva l'influenza della Commissione UMI e dei volumi Matematica 2003 e 2004, dai quali venivano ripresi temi, abilità e competenze; persino i riferimenti alla storia della matematica furono recuperati, sebbene in forma meno articolata rispetto a quanto proposto dalla Commissione (Tomasi, 2012). Nonostante gli evidenti limiti legati all'esiguo monte ore, le Indicazioni Nazionali presentavano alcuni punti di forza: la continuità curricolare con la scuola secondaria di I grado, l'introduzione del tema "Dati e previsioni" in tutte le scuole, l'enfasi sull'attività di matematizzazione, sull'insegnamento per problemi e il riferimento esplicito al laboratorio di matematica (Tomasi, 2012).

Un aspetto particolarmente rilevante richiamato nelle linee generali e competenze delle Indicazioni Nazionali per i Licei (D.P.R. 89/2010) fu il riferimento esplicito al valore culturale della matematica come prodotto del pensiero umano sviluppatosi nel tempo (MIUR, 2010a). Nelle Indicazioni si stabiliva che lo studente avrebbe dovuto acquisire "una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico", con particolare attenzione a tre momenti storici considerati fondamentali:

«Lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico. In particolare, avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nella civiltà greca, il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico, la svolta che prende le mosse dal razionalismo illuministico e che conduce alla formazione della matematica moderna e a un nuovo processo di matematizzazione che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche) e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica» (MIUR, 2010a).

Tale formulazione riprendeva, in forma semplificata, alcuni degli spunti storici presenti nei documenti UMI, sebbene con una periodizzazione più schematica e senza gli approfondimenti metodologici sulla storia come laboratorio didattico.

Per quanto concerne le Linee Guida per gli Istituti Tecnici e Professionali (D.P.R. 88/2010), il riferimento alla dimensione storica si configurava come uno degli obiettivi generali a cui il docente di matematica avrebbe dovuto concorrere per far conseguire allo studente specifici risultati d'apprendimento al termine del percorso quinquennale, tra i quali figurava il saper "collocare il pensiero matematico e scientifico nei grandi temi dello sviluppo della storia delle idee, della cultura, delle scoperte scientifiche e delle invenzioni tecnologiche" (MIUR, 2010b, p. 45). L'espressione "concorrere" lasciava intendere che tale obiettivo fosse trattato prevalentemente dal docente di storia, nelle cui Linee Guida si faceva riferimento al saper "collocare le scoperte scientifiche e le innovazioni tecnologiche in una dimensione storico-culturale ed etica" e al saper "analizzare criticamente il contributo apportato dalla scienza e dalla tecnologia allo sviluppo dei saperi" (MIUR, 2010b, p. 43). L'impostazione risultava dunque più legata al progresso scientifico-tecnologico generale che non specificamente alla storia della matematica come disciplina, diversamente da quanto previsto per i Licei.

2.8 Bilancio di un passato ancora presente

Il percorso dell'educazione matematica italiana dal 1961 al 2010 mostra un'evoluzione significativa nel rapporto con la dimensione storica della disciplina. Dalla marginalizzazione sistematica operata dalle matematiche moderne negli anni Sessanta, che consideravano la storia come elemento estraneo all'impostazione strutturalista bourbakista, si giunse a un progressivo recupero della dimensione storico-genetica attraverso le sperimentazioni degli anni Ottanta e Novanta (PNI e Progetto Brocca), fino alla piena legittimazione istituzionale nei documenti della Commissione UMI dei primi anni Duemila. I volumi Matematica 2001, 2003 e 2004 sistematizzarono il ruolo della storia come strumento didattico per comprendere i processi costruttivi della matematica, come laboratorio per sviluppare competenze trasversali e come chiave per una visione della matematica come impresa umana situata nel tempo, riflettendo gli sforzi compiuti sul piano internazionale del gruppo HPM.

Il riordino del 2010, pur realizzato in un contesto di tagli alla spesa pubblica e riduzione dell'orario di matematica, recepì parzialmente le istanze dei documenti UMI. Le Indicazioni Nazionali per i Licei introdussero riferimenti espliciti alla

dimensione storico-critica della matematica, identificando tre momenti fondamentali della formazione del pensiero matematico (Grecia antica, rivoluzione scientifica seicentesca, matematica moderna), mentre le Linee Guida per gli Istituti Tecnici e Professionali collocarono la storia della matematica nell'ambito più generale della storia delle idee scientifiche e tecnologiche. Il recupero della dimensione storica nei programmi ministeriali, se da un lato segnò il definitivo superamento della marginalizzazione bourbakista, consolidando un approccio che integrava dimensione formale, applicativa e storico-culturale dell'insegnamento matematico, dall'altro queste istanze restarono e in larga parte restano ancora oggi sulla carta: come rilevato dalla ricerca didattica (Furinghetti, 1997; Baccaglini-Frank et al., 2018), la trattazione dello sviluppo storico della matematica è rimasta per lungo tempo estranea al percorso formativo dei docenti, poiché gli insegnamenti di storia della matematica non sempre costituivano parte del curriculum universitario, demandando di fatto tale conoscenza a un percorso di studio autonomo (Furinghetti, 1997). Tale criticità, che è possibile riscontrare ancora oggi, avrebbe reso particolarmente rilevante il contributo della ricerca internazionale sull'integrazione tra storia e pedagogia della matematica, sviluppatasi a partire dagli anni Settanta attraverso il contributo del gruppo di lavoro HPM (*History and Pedagogy of Mathematics*) che, consolidatasi nelle decadi successive attraverso studi teorici ed empirici sul ruolo della storia nell'apprendimento matematico, come vedremo nel prossimo capitolo, avrebbe costituito un campo di ricerca autonomo.

Capitolo 3

L'Istituzionalizzazione dell'HPM come area di ricerca: questioni e nodi epistemologici

3.1 Le origini del dibattito

L'idea di integrare la storia della matematica nell'istruzione generale scolastica non è nuova in letteratura. Già da diversi decenni insegnanti, matematici e storici della matematica esprimono le proprie idee sulle relazioni da un lato, sul piano contenutistico, tra la matematica e la sua storia e, dall'altro, sul piano dei processi didattici, tra insegnamento e apprendimento della disciplina, articolando non soltanto motivazioni diversificate ma soprattutto riconoscendo il valore formativo della storia della matematica, vista come una risorsa per l'educazione scolastica e specialistica capace di mostrare come la disciplina non costituisca un prodotto finito, bensì uno sforzo collettivo di astrazione umana, ponendo in tal modo sotto una luce diversa concetti, teorie, teoremi nonché tutti quegli “ostacoli epistemologici” che costellano l'apprendimento delle scienze matematiche (Brousseau, 2002), le quali sono costituite da molteplici e affascinanti sfaccettature (Fried, 2014; Furinghetti, 2020). La storia delle matematiche è quindi utile a porre in contesto e problematizzare specifici oggetti matematici mostrando prospetticamente l'evoluzione del rigore, delle ideologie sottese, del metodo, delle forme di argomentare e provare nonché di collegare tra loro le altre discipline limitrofe.

3.1.1 Il principio di ricapitolazione genetica come epistemologia storica

Nel corso della seconda metà del XIX secolo, la modernizzazione degli Stati Nazionali ebbe come principale obiettivo l'incremento o la fondazione di un sistema d'istruzione che fosse capace di combattere l'analfabetismo diffuso

attraverso l'istruzione primaria, mentre, a livello più avanzato, l'obiettivo è stato fornire agli studenti un background indispensabile per lo svolgimento di una specifica professione lavorativa (Furinghetti, 2020). Come riportato dallo storico della matematica Michael N. Fried (2014), nel periodo a cavallo tra Ottocento e Novecento si distinguono diverse figure che hanno apportato importanti contributi all'educazione matematica (americana ma anche europea) influenzando lo sviluppo delle idee e il dibattito internazionale: David Eugene Smith (1860-1944) e Felix Klein (1849-1925), i cui contributi sull'internazionalizzazione della ricerca furono cruciali per la fondazione dell'ICMI, e Florian Cajori (1859-1930), il cui contributo costituisce un esempio circa il clima intellettuale e filosofico che si respirava in quegli anni, permeato dalle influenze del positivismo e del darwinismo su tutti i campi del sapere. Nel 1908 il confronto e la ricerca sull'argomento raggiungono un livello tale d'internazionalizzazione che portò alla fondazione dell'*International Commission on the Teaching of Mathematics*, organismo antenato del più recente *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) (Furinghetti, 2020). Già all'epoca, tra i mezzi volti a potenziare l'istruzione matematica, v'era la proposta d'introdurre la storia della matematica nelle classi, sulla scia di importanti pubblicazioni sia sul piano della trattatistica di divulgazione sia sul piano delle riviste di divulgazione scientifica (Furinghetti, 2020).

Secondo quanto riportato da Smith nel suo classico *The Teaching of Elementary Mathematics* (Smith 1904), la storia della matematica, alla quale dedica tre interi capitoli, non doveva essere separata dall'educazione matematica tradizionale (Fried, 2014). Presso la Michigan State Normal School di Ypsilanti il matematico enfatizzò l'importanza di una prospettiva storica nell'insegnamento, come testimoniato dal corso universitario sulla storia della matematica per insegnanti che tenne presso la sua cattedra (Donoghue 2006; Fried, 2014). Il contributo di Smith fu centrale poiché prese parte al comitato del *National Committee on Mathematical Requirement* nel 1923, in seno al quale preparò il rapporto dove vennero evidenziati gli obiettivi culturali dell'educazione matematica, tra i quali spiccano il ruolo che la matematica e il pensiero astratto hanno avuto nello sviluppo culturale occidentale (Bidwell & Clason 1970; Fried, 2014). Il riconoscimento del contributo culturale apportato dalle scienze matematiche è evidente anche nell'opera di Felix Klein in Europa, anch'egli tra i principali fautori dell'inserimento di aspetti storici nell'insegnamento della matematica (Fried, 2014; Furinghetti, 2020). È interessante notare come nella seconda parte del suo *The teaching of Elementary mathematics from an advanced standpoint* del 1939 Klein affermi come «[...] alongside of knowledge of details, as these are supplied by the special lectures, there should be a grasp of subject-matter and of historical relationship» (Klein 1939, II, p. 2, citato

in Furinghetti, 2020) proprio mentre era presidente della neonata *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI), avviata insieme a Smith (Fried, 2014).

Come riportato da Furinghetti (2020), sicuramente il documento antesignano della discussione sull'ingresso della storia della matematica nelle aule scolastiche è costituito da un articolo presentato dal matematico inglese G. Heppel nel 1893 presso l'*Association for the Improvement of Geometrical Teaching* dove l'autore, richiamando le informazioni comparse nelle fonti d'illustrazione storica dell'epoca, restringe il campo d'uso della storia della matematica in tre punti: similmente da quanto affermato da Smith, (1) la storia della matematica non dovrebbe essere considerata una forma di sapere separato dalla matematica stessa, ma dovrebbe assumere una funzione strettamente ancillare e ausiliaria rispetto all'educazione scolastica. In tal senso, (2) non sarebbe l'intera storia della disciplina a dover essere presa in considerazione, ma soltanto le porzioni di essa più significative e utili all'apprendimento. È in tal senso che (3) essa non dovrebbe essere oggetto di valutazione tout court (Heppel, 1893; Furinghetti, 2020). Indagando come la storia della matematica possa rendere lo studio della disciplina più agevole, chiara e interessante agli studenti, Heppel rimarca come la storia sia capace di fornire una visione stereoscopica sulla disciplina al di là dei soli grafici e diagrammi, consentendo agli oggetti matematici di essere intellettualmente osservati sotto molteplici sfaccettature, ognuna delle quali capaci di differenti modalità di trattamento e analisi (Heppel, 1893; Furinghetti, 2020). In altre parole, al fine di favorire la piena comprensione di un concetto matematico complesso, può essere utile ricorrere alla storia delle idee circa quel dato concetto, evidenziandone i successivi sviluppi. Un altro beneficio sta nel fatto che la storia della scienza contrasta l'idea comune circa la presunta aridità della matematica richiamandone il valore culturale: «Mathematics is full of life and interest, that it appeals to the imagination as well as to the intellect, that is it has a poetry peculiarly its own» (Heppel, 1893, p. 24, citato in Furinghetti, 2020, p. 3). Si tratta, nel complesso, di argomenti presenti nel dibattito scientifico odierno sull'uso della storia della matematica in classe (Furinghetti, 2020).

Come Smith, Klein e Heppel, anche Cajori, intuendone l'importanza per l'insegnamento, si interessò del valore della storia della matematica per la formazione degli insegnanti e per il possibile contributo che tale branca storico-epistemologica poteva apportare alla didattica scolastica nonché alla divulgazione scientifica più generale (Dauben, 2002; Furinghetti & Radford 2008; Fried, 2014). Di origine svizzera, migrò negli Stati Uniti per scelta personale, studiando presso

la University of Wisconsin (Dauben, 2002). Adottando una visione positivista sulla conoscenza, vista come bagaglio informativo oggettivo gradualmente accumulato attraverso l'apprendimento, Cajori intese la storia come un processo di dispiegamento fondato sull'idea del progresso che procede dall'antico al moderno, secondo una ben nota matrice illuminista (Furinghetti & Radford, 2008). In particolare, nel testo *A History of Elementary Mathematics with Hints on Methods of Teaching* del 1896, Cajori esplicitò il senso della sua proposta educativa relativa alla storia della matematica. In particolare, l'educazione matematica deve concordare, sia nell'organizzazione dei contenuti che nelle modalità d'insegnamento, con l'educazione dell'umanità stessa considerata dal punto di vista storico, secondo un ben noto darwinismo pedagogico di fondo in piena sintonia con le idee di Spencer e di Heppel (Cajori, 1896; Furinghetti & Radford 2008; Fried, 2014). In particolare, l'autore considera la storia della scienza come un vero e proprio rimedio ai problemi dell'educazione scientifica:

«If this principle, held also by Pestalozzi and Froebel, be correct, then it would seem as if the knowledge of the history of a science must be an effectual aid in teaching that science. Be this doctrine true or false, certainly the experience of many instructors establishes the importance of mathematical history in teaching».
(Cajori, 1896, citato in Fried, 2014, p. 676)

È opportuno considerare come implicitamente Cajori adottò il principio di ricapitolazione elaborato dal biologo Ernst Heinrich Haeckel (1834-1919), il quale nel 1874 formulò la nota legge secondo cui l'ontogenesi, ovvero lo sviluppo individuale, ricapitola la filogenesi, ossia lo sviluppo dell'intera specie (Furinghetti & Radford 2008; Schubring 2011; Fried, 2014; Furinghetti, 2020). La legge di ricapitolazione genetica di Haeckel costituisce molto più di una semplice ripetizione condensata di passaggi evolutivi della specie, suggerendo piuttosto che gli embrioni umani, a un certo stadio del loro sviluppo biologico, sono quasi indistinguibili da quelli di altre specie (pesci, anfibi, rettili, mammiferi, ecc.), sicché nel corso della crescita si passa per diverse tappe evolutive (Gould, 1977; Furinghetti & Radford, 2008):

«The series of forms through which the individual organism passes during its development from the ovum to the complete bodily structure is a brief, condensed repetition of the long series of forms which the animal ancestors of the said organism, or the ancestral forms of the species, have passed through from the

earliest period of organic life down to the present day» (Haeckel, 1912, p. 2-3).

La legge di ricapitolazione è stata trasposta dalla biologia alla psicologia dallo stesso Haeckel il quale affermò che, nel corso del loro sviluppo, gli studenti attraversano naturalmente più o meno le stesse tappe dello sviluppo culturale umano, sicché le tappe che caratterizzano lo sviluppo del funzionamento della psiche infantile sono considerabili alla stregua di un viaggio passante per le stesse tappe percorse dai suoi antenati ancestrali (Haeckel, 1912; Fauvel, 1991; Furinghetti & Radford 2008; Furinghetti, 2020). Questa teoria ha influenzato le idee pedagogiche di Herbert Spencer ed è stata accolta come argomento teorico capace di giustificare l'introduzione della storia della matematica in classe agli inizi del secolo scorso (Furinghetti & Radford 2008). L'influenza che il principio di ricapitolazione ha avuto nella didattica della matematica si evince anche nel ruolo centrale che ha assunto nel principale testo di educazione e didattica della matematica del secolo scorso (Furinghetti & Radford 2008; Fried, 2014; Furinghetti, 2020). Benchara Branford (1867-1944) scrisse a cavallo tra il 1896 e il 1908, anno di pubblicazione, il manuale *A Study of Mathematical Education* presentando molti metodi innovativi di insegnamento, come l'uso di strumenti manipolativi centrati sul fare e l'accento posto sui laboratori matematici, così come il dialogo con le teorie psicoanalitiche circa la funzione dell'inconscio (Fauvel, 1991; Scott, 2009; Fried, 2014; Furinghetti, 2020). Nel frontespizio del testo compare il noto diagramma "*of the Development of Mathematical Experience in the Race and in the Individual*", ovvero una rappresentazione grafica dell'intera epistemologia matematica al centro suddivisa in fasi della storia umana elencate lungo il margine sinistro e i periodi della vita dell'individuo (embrionale, infanzia, fanciullezza, scuola e università) elencati lungo il margine destro (cfr.: figura 1) (Branford, 1908; Fauvel, 1991; Fried, 2014; Furinghetti, 2020):

«Thus, for each age of the individual life infancy, childhood, school, college may be selected from the racial history [i.e. la storia della razza umana] the most appropriate form in which mathematical experience can be assimilated» (Branford, 1908, p. 245).

teacher's satisfaction is not the sole purpose of teaching [...] above all one should be concerned with the student's mind and of what we want him to become. Zoologists claim that the embryonal development of animals summarizes in a very short time all the history of its ancestors of geologic epochs. It seems that the same happens to the mind's development. The educators' task is to make children follow the path that was followed by their fathers, passing quickly through certain stages without eliminating any of them. In this way, the history of sciences has to be our guide» (Poincaré, 1899, p. 159, citato in Furinghetti & Radford 2008, p. 633).

Non sorprende perciò come lo stesso Klein fece indirettamente riferimento alla legge di ricapitolazione, sebbene considerasse lo studio della storia della disciplina insieme alla matematica una questione che avesse a che fare con la cultura matematica generale e non una questione puramente didattica (Schubring, 2011; Fried, 2014; Furinghetti, 2020). Proprio a tal proposito, per quanto concerne l'apprendimento della matematica scolastica Klein era più interessato ad affrontare il problema del ben noto rapporto dicotomico tra *insight* e rigore logico, vertendo a favore del primo nodo, quello dell'intuizione, rispetto al quale la storia della matematica costituisce il contesto adatto per riportarlo al centro del processo formativo (Furinghetti & Radford, 2008):

«I maintain that mathematical intuition [...] is always far in advance of logical reasoning and covers a wider field [...] I might now introduce a historical excursus, showing that in the development of most of the branches of our science, intuition was the starting point, while logical treatment followed. This holds in fact, not only of the origin of the infinitesimal calculus as a whole but also of many subjects that have come into existence only in the present century». (Klein, 1896, p. 246, citato in Furinghetti & Radford, 2008)

Infine, secondo Furinghetti (2004) il principio di ricapitolazione e la sua trasposizione pedagogico-didattica apportata da Branford erano conosciute anche nel contesto accademico italiano, sebbene nessuno abbia mai fatto esplicito riferimento alle teorie di Haeckel.

Nonostante la teoria di Haeckel abbia mostrato nel corso del tempo non pochi difetti e non sia adeguatamente supportato da evidenze empiriche sia in biologia che in psicologia, la legge della ricapitolazione ha continuato a influenzare il discorso didattico sulla matematica ispirando la ricerca sull'apprendimento umano,

come dimostrato dagli studi sull'epistemologia genetica di Jean Piaget e quelli sulla prospettiva storico-culturale di Lev Semenovič Vygotskij (Furinghetti & Radford, 2002, 2008). Oggigiorno, il rapporto tra filogenesi e ontogenesi è stato oggetto di una profonda revisione e sono state svolte nuove riflessioni con l'obiettivo di trovare spiegazioni più adeguate ponendo al centro l'influenza della cultura nel pensiero e nell'apprendimento. In particolare, Radford (1997) e Schubring (2007) hanno mostrato come le concezioni della storia possano plasmare la visione circa la relazione tra ricapitolazione biologica e ricapitolazione psicologica, mentre gli storici della matematica e gli epistemologi hanno spostato l'attenzione sulla discussione circa la natura stessa della storia della matematica (Fried, 2001; Grattan-Guinness, 2004). Il rapporto tra storia della matematica e pensiero matematico ha comunque interessato anche matematici di spicco: Henri Poincaré, ad esempio, era consapevole del problema della ricapitolazione, adottando una posizione vicina alla visione di Klein sull'efficacia della storia nell'insegnamento della matematica; mentre il caso di Klein è in tal senso emblematico poiché egli non si limitò ad ipotizzare ma utilizzò concretamente la storia nei suoi corsi per futuri insegnanti, senza mai applicare né fare riferimento, tuttavia, alla legge della ricapitolazione (Furinghetti & Radford, 2008). Per lui, come per Poincaré e altri matematici, la storia era un modo per abolire l'enfasi sul solo uso della logica e gli eccessi del rigore (Furinghetti & Radford, 2008).

3.1.2 L'approccio genetico e i suoi sviluppi

L'elaborazione teorica sull'introduzione della storia della matematica nell'insegnamento non ha condotto soltanto all'applicazione diretta della legge della ricapitolazione genetica in educazione, ma anche all'adozione di approcci genetici all'insegnamento, visti come potenziali approcci alternativi al tradizionale metodo logico-assiomatico, generalmente indifferente al ruolo evolutivo dei concetti matematici (Furinghetti & Radford 2008; Furinghetti, 2020). In tal senso, collegare la conoscenza matematica con le proprie radici storiche permetterebbe agli studenti di sviluppare una visione epistemologica diversa, in cui il ruolo creativo dell'immaginazione può giocare un ruolo chiave: spesso gli studenti stessi intuiscono come un dato teorema non sia stato originato ex nihilo, bensì da domande precedentemente emerse nel corso del tempo (Furinghetti & Radford, 2008).

L'esempio più conosciuto circa l'approccio genetico applicato nella pratica didattica fu elaborato da Otto Toeplitz (1881-1940) all'interno di un corso di calcolo strutturato secondo la metodologia genetica, dal titolo *Die Entwicklung der*

Infinitesimalrechnung: Eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode, pubblicato postumo nel 1949 e tradotto in inglese soltanto nel 1963 col titolo *The Calculus: A Genetic Approach* (Furinghetti, 2020). In questo testo Toeplitz affronta la questione del come restare rigorosi nel corso di una lezione matematica dispiegando al contempo una visione prospettica che consenta allo studente di incontrare le idee matematiche nella loro sequenza di sviluppo e non soltanto attraverso una rigida modalità logico-sequenziale (Burn, 1999). Infatti, l'idea che l'apprendimento della matematica avvenga seguendo una sequenza determinata soltanto dalla logica mostrava (ieri come oggi) i propri limiti pedagogici: concetti come integrali, limiti e derivate, se organizzati attorno alla sola base logica, risultano astratte sicché il peso dell'apprendimento vien fatto ricadere interamente sulla comprensione di regole e teoremi formali, di fatto incentivando le difficoltà degli studenti a cogliere i significati corrispondenti (Furinghetti & Radford, 2008). Come esplicitato in un articolo del 1927, Toeplitz propone realisticamente un compromesso tra i due modi di pensare l'insegnamento della matematica, quello logico e quello evolutivo, con l'obiettivo di fornire un percorso di comprensione progressiva basata su un susseguirsi di sequenze e passaggi forniti dai materiali didattici capaci di guidare e, così, facilitare l'apprendimento del calcolo infinitesimale da parte degli studenti (Toeplitz, 1927, 1963; Furinghetti & Radford, 2008). In tal senso, la preoccupazione principale dell'autore non consiste nell'insegnamento della storia, bensì nella ricerca di sequenze d'apprendimento (Furinghetti & Radford, 2008):

«[...] tutti questi oggetti del calcolo infinitesimale che oggi vengono insegnati come sostegni canonizzati, il teorema del valore medio, la serie di Taylor, il concetto di convergenza, l'integrale definito, soprattutto il quoziente differenziale stesso, e in cui la questione non viene toccata da nessuna parte: perchè così? come puoi raggiungerli? Tutti questi oggetti di scena devono essere stati oggetto di una ricerca emozionante, di un'azione emozionante, proprio nel momento in cui sono stati creati. Se si tornasse a queste radici dei concetti, la polvere del tempo, i graffi della lunga usura cadrebbero da loro e si presenterebbero di nuovo davanti a noi come esseri viventi». (Toeplitz, 1927, p. 92-93, trad. mia⁸).

⁸ Originale tedesco: «[...] alle diese Gegenstände der Infinitesimalrechnung, die heute als kanonisierte Requisiten gelehrt werden, der Mittelwertsatz, die Taylorsche Reihe, der Konvergenzbegriff, das bestimmte Integral, vor allem der Differentialquotient selbst, und bei denen

Nello specifico, Toeplitz distingue tra un *metodo genetico diretto* da un *metodo genetico indiretto* (Toeplitz, 1927). Nell'approccio diretto, il cui effetto è spiegato sulla base del principio genetico, lo sviluppo storico viene presentato allo studente come un modo di presentare i concetti matematici stessi. È questo approccio diretto che caratterizza maggiormente il lavoro di Toeplitz che, pur mirando all'idea di limite, come nella maggior parte dei libri di testo, lungo il percorso si lascia guidare da esempi storici piuttosto che da considerazioni di carattere strettamente logico. Nell'approccio indiretto, invece, gli insegnanti utilizzano lo sviluppo storico per trarre conclusioni sull'insegnamento dei concetti matematici senza che questi siano necessariamente trattati in modo strettamente cronologico adottando piuttosto un processo di chiarificazione delle difficoltà tipiche degli studenti:

«E da lì ci sarebbe un duplice percorso per la pratica: o si potrebbe presentare la scoperta direttamente agli studenti in tutta la sua drammaticità e in questo modo lasciare che le domande, i concetti e i fatti si presentino davanti a loro - questo è ciò che chiamerei il genetico diretto metodo - oppure da una tale analisi storica si potrebbe imparare da soli qual è il vero significato, il vero nucleo di ogni concetto, e trarre conclusioni per insegnare questo concetto che come tali non hanno più nulla a che fare con la storia - quella indiretta metodo genetico». (Toeplitz, 1927, p. 93, trad. mia⁹).

Questo approccio fondato sull'analisi storica si configura perciò come una didattica dal carattere "diagnostico e terapeutico" (Toeplitz, 1927, p. 99, citato in Fried, 2014) che riguarda non gli oggetti matematici in sé stessi, bensì la meta-conoscenza, mirando così a fornire agli insegnanti in formazione una maggiore consapevolezza della disciplina (Schubring, 2011; Furinghetti, 2020). Tuttavia, come afferma Schubring (2011), l'approccio indiretto non consente di liberarsi

nirgends die Frage berührt wird: warum so? wie kommt man zu ihnen? alle diese Requisiten also müssen doch einmal Objekte eines spannenden Suchens, einer aufregenden Handlung gewesen sein, nämlich damals, als sie geschaffen wurden. Wenn man an diese Wurzeln der Begriffe zurückginge, würde der Staub der Zeiten, die Schrammen langer Abnutzung von ihnen abfallen, und sie würden wieder als lebensvolle Wesen vor uns erstehen»

⁹ Originale tedesco: «Und von da aus würde sich dann ein doppelter Weg in die Praxis darbieten: entweder man könnte den Studenten direkt die Entdeckung in ihrer ganzen Dramatik vorführen und solcherart die Fragestellungen, Begriffe und Tatsachen vor ihnen entstehen lassen - das würde ich die direkte genetische Methode nennen -, oder man könnte für sich selbst aus solcher historischer Analyse lernen, was der eigentliche Sinn, der wirkliche Kern jedes Begriffs ist, und konnte daraus Folgerungen für das Lehren dieses Begriffs ziehen, die als solche nichts mehr mit der Historie zu tun haben - die indirekte genetische Methode»

veramente da una soggiacente visione teleologica secondo cui lo sviluppo della matematica è continuo e cumulativo, rendendo tale idea infruttuosa.

Il metodo genetico, così, si differenzia dal metodo propriamente storico *tout court* per la minor enfasi data alla ricerca storica (Burn, 1999, 2005; Furinghetti, 2020). Infatti, sebbene il metodo genetico dipenda da un'attenta ricerca storica, non coincide di per sé con lo studio della storia, ma si configura come una selezione, dal calderone della storia, di argomenti e concetti utili alla pratica didattica in classe adottando un simbolismo e una terminologia moderni (Furinghetti, 2020). Si tratta nel complesso di approcci che riflettono la convinzione secondo cui l'appropriazione della conoscenza matematica da parte degli studenti sia un processo che richiede il loro coinvolgimento attivo con gli oggetti matematici (Furinghetti, 2020).

Il lavoro di Toeplitz sul metodo genetico fu riscoperto più tardi ponendosi come contraltare rispetto alla rinnovata attenzione al rigore determinata dal movimento della *NewMath* (Kronfellner, 2002; Furinghetti & Radford, 2008; Furinghetti, 2020). A tal proposito il metodo della “reinvenzione guidata” di Freudenthal (1973) costituisce un esempio emblematico poiché fornisce un'interpretazione del metodo genetico attraverso un approccio pedagogico che non segue l'ordine cronologico e tortuoso con cui i concetti son sorti, né adatta tale ordine in una linearità, ma è orientato a far “reinventare la storia” agli studenti selezionando le tappe fondamentali che è necessario conoscere per cogliere a pieno il senso di un dato concetto matematico:

«Urging that ideas are taught genetically does not mean that they should be presented in the order in which they arose, not even with all the deadlocks closed and all the detours cut out. What the blind invented and discovered, the sighted afterwards can tell how it should have been discovered if there had been teachers who had known what we know now [...] It is not the historical footprints of the inventor we should follow but an improved and better guided course of history». (Freudenthal, 1973, pp. 101 e 103)

Ancora oggi l'approccio genetico continua ad ispirare la ricerca, riflettendo una visione della conoscenza matematica secondo cui la storia e la comprensione della disciplina da parte degli studenti comporti un processo “genetico” basato su un coinvolgimento attivo degli studenti con gli oggetti della conoscenza (Fried, 2014; Furinghetti, 2020). Ad esempio, Van Amerom (2003) ha applicato l'interpretazione

di Freudenthal del metodo genetico nel suo progetto “Reinvenzione dell’algebra”, che utilizza metodi informali e pre-algebrici di ragionamento e di simbolizzazione per facilitare la transizione da un *problem solving* a carattere aritmetico a un carattere algebrico.

3.2 L’internazionalizzazione della ricerca e il caso italiano

Infine, non si possono trascurare alcune importanti tappe d’internazionalizzazione del dibattito sull’insegnamento della matematica, tra le quali spiccano sicuramente la fondazione dell’*International Commission on Mathematical Instruction* a Roma in occasione del IV Congresso Internazionale dei Matematici del 1908, con Felix Klein quale primo presidente e 18 paesi aderenti (Giacardi, 2009; Fried, 2014; Furinghetti, 2020). In questa prima fase, l’obiettivo della Commissione era la promozione di indagini e diffusione di rapporti generali sulle principali tendenze dell’insegnamento della matematica nei vari Paesi membri (Giacardi, 2009; Furinghetti, 2020). In questo primo periodo è proprio Klein a trainare la leadership internazionale, volta a tentare di colmare il divario tra insegnamento secondario e universitario; creare legami più stretti tra le varie branche applicative e pure della matematica; e dare maggior rilievo alla matematica elementare dal punto di vista avanzato nella formazione dei docenti (Giacardi, 2009).

Gli sforzi di internazionalizzazione, tuttavia, si arenarono allo scoppio della Grande Guerra portandone allo scioglimento nel 1920 (Giacardi, 2009). L’ICMI fu ricostituita nel 1928 a Bologna durante il VIII Congresso Internazionale dei Matematici, ma non produsse idee o progetti fruttuosi tanto quanto i decenni precedenti, portando di fatti avanti il vecchio programma di Klein fino allo scoppio della Seconda Guerra Mondiale che ne causò nuovamente lo scioglimento e l’arresto definitivo delle attività. Si dovrà attendere più di un ventennio per ricostituire nuovamente l’ICMI: nel 1952, a Roma, sotto forma di sottocommissione permanente dell’Unione Matematica Internazionale, la cui struttura andava configurando collaborazioni proficue con altre organizzazioni internazionali (Giacardi, 2009; Furinghetti, 2020). Questa rinascita, la cui fioritura sarebbe avvenuta nel corso degli anni Sessanta, avrebbe portato a una maggiore internazionalizzazione delle linee di ricerca (Giacardi, 2009).

Come si sarà notato, il dibattito internazionale anglosassone e tedesco fin qui delineato non ebbe un impatto diretto e sistematico sul dibattito pedagogico italiano. Come osserva Furinghetti (2004), sebbene il principio di ricapitolazione e

le sue applicazioni pedagogiche fossero probabilmente conosciute nell'ambiente accademico italiano, nessun matematico italiano fece mai esplicito riferimento alla teoria di Haeckel o agli scritti di Branford nel discutere il ruolo della storia nell'insegnamento matematico. Questa assenza non va interpretata come un'arretratezza culturale o un isolamento provinciale, bensì come la conseguenza dell'esistenza di una tradizione pedagogica italiana autonoma, radicata in un humus culturale profondamente diverso da quello anglosassone e tedesco. Come si vedrà in dettaglio nei prossimi capitoli, l'Italia tra il 1860 e il 1920 sviluppò una propria riflessione sull'educazione matematica, animata da figure di primo piano come Luigi Cremona, Giuseppe Peano, Giovanni Vailati, Guido Castelnuovo e Federigo Enriques. Questa tradizione italiana si sviluppò all'interno di una matrice culturale che privilegiava la dimensione umanistica e filosofica della disciplina rispetto a quella biologico-evolutiva. In particolare, la concezione della "humanitas scientifica" elaborata da Enriques poneva la matematica al centro della cultura generale, in dialogo con la filosofia, la storia del pensiero e le arti. Questa differenza di prospettiva rifletteva la distanza tra due tradizioni filosofiche: da un lato, il positivismo e il darwinismo che dominavano il pensiero anglosassone di fine Ottocento, e che trovavano nella teoria della ricapitolazione una conferma "scientifica" delle proprie intuizioni pedagogiche; dall'altro, una tradizione italiana che, pur recependo i presupposti del positivismo, rifletteva un clima culturale caratterizzato da un certo predominio della concezione umanistica della formazione. Questa autonomia culturale spiega perché il dibattito italiano sul ruolo della storia nell'insegnamento matematico si sia sviluppato lungo coordinate indipendenti da quelle del mondo anglosassone, pur condividendo con esso l'obiettivo fondamentale di rinnovare l'educazione matematica rendendola più accessibile, più significativa e più culturalmente rilevante.

3.3 Nodi epistemologici dell'HPM

Nei due capitoli precedenti è stata ripercorsa l'evoluzione storica dell'insegnamento della matematica dall'Ottocento al Duemila, documentando come in ogni periodo siano emerse riflessioni sul ruolo della storia della matematica congiuntamente alle riflessioni sui curricoli scolastici. Riflessioni che non si limitano a considerare la storia della matematica come strumento educativo o strategia didattica, ma, come emerso nel corso degli anni Sessanta, anche se in modo implicito, la questione è strettamente correlata al ruolo formativo e pedagogico dell'insegnamento disciplinare.

Tra l'altro, è proprio in reazione alla matematica moderna che si assiste alla nascita del gruppo internazionale della *History and Pedagogy of Mathematics* (HPM) affiliato all'ICMI dal 1976: da allora la HPM si configura come specifico settore di ricerca internazionale. A differenza delle giustificazioni ottocentesche basate su teorie della ricapitolazione genetica, l'HPM si configura come area di indagine interdisciplinare ma non unitaria che coniuga teoria e pratica. In questo capitolo vengono sistematizzati i diversi framework teorici dell'HPM che guidano la ricerca educativa degli ultimi anni.

Dopo aver documentato storicamente come la questione della storia nell'insegnamento sia emersa nel contesto italiano, è ora necessario esplicitare teoricamente quali questioni e approcci caratterizzano l'HPM come campo di ricerca contemporaneo. In particolare, verranno analizzate: le giustificazioni epistemologiche sull'uso della storia in classe (8.1), gli aspetti didattici e metodologici (8.2), e il contributo dell'HPM allo sviluppo delle competenze matematiche (8.3), con particolare riferimento ai framework internazionali PISA e KOM che hanno ridefinito gli obiettivi dell'educazione matematica nel XXI secolo. Inoltre, verranno approfondite alcune questioni aperte legate al ruolo della storia della matematica come specifica conoscenza dell'insegnamento, dialogando con i costrutti teorici della *Subject Matter Knowledge* e la *Pedagogical Content Knowledge* di Shulman, nonché la *Mathematical Knowledge for Teaching* di Ball e colleghi.

3.3.1 La giustificazione all'uso della storia delle matematiche nella didattica

L'ICME-3 di Karlsruhe (1976) sancì la costituzione permanente dell'*International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics* (Giacardi, 2009; Furinghetti, 2020; Guillemette, 2023). Questa svolta istituzionale segnò il passaggio da iniziative individuali a un programma di ricerca collettivo, conferendo finalmente legittimità al valore formativo della storia della matematica nell'insegnamento (Fried, 2014). La *History and Pedagogy of Mathematics*¹⁰ si affermò così come specifica area di ricerca teorico-pratica volta a indagare le relazioni tra la matematica e la sua storia, nonché i benefici didattici dell'integrazione storica nell'insegnamento della disciplina. Nell'intero spettro della ricerca è possibile individuare alcune questioni centrali ricorrenti che

¹⁰ Da adesso in poi HPM

esplorano le multiformi relazioni tra storia e didattica della matematica (Clark et al., 2018; Clark et al., 2019):

- Quale storia è adatta e rilevante per l'insegnamento della matematica?
- Quale ruolo può svolgere la storia nella didattica della matematica e con quali obiettivi?
- In che modo la storia può essere integrata nella pratica educativa e attraverso quali approcci?
- Come progettare e valutare tali integrazioni e in che misura esse contribuiscono all'insegnamento e all'apprendimento della matematica?

L'HPM si configura come ponte tra passato e presente, tra istruzione scolastica e ricerca scientifica, offrendo una visione prospettica sulla disciplina. In questa luce vanno lette le quindici ragioni elaborate da Fauvel (1991, p. 4) a sostegno dell'integrazione della storia della matematica in classe:

- Aiuta ad aumentare la motivazione all'apprendimento;
- Dona alla matematica un volto umano;
- Aiuta a ordinare la presentazione degli argomenti nel curriculum attraverso lo sviluppo storico;
- Mostrare agli alunni come si sono sviluppati i concetti aiuta la loro comprensione;
- Cambia la percezione degli alunni sulla matematica;
- Confrontare l'antico e il moderno consente di valorizzare le tecniche contemporanee;
- Aiuta a sviluppare un approccio multiculturale;
- Offre opportunità per le indagini;
- Gli ostacoli incontrati in passato aiutano a spiegare ciò che gli alunni di oggi trovano difficile;
- Gli alunni traggono conforto dal rendersi conto che non sono gli unici ad avere problemi con la matematica;
- Incoraggia gli studenti più veloci a guardare oltre;
- Aiuta a spiegare il ruolo della matematica nella società;
- Rende la matematica meno spaventosa;
- Esplorare la storia aiuta a sostenere l'interesse e l'entusiasmo dei docenti per la matematica;
- Offre opportunità di lavoro cross-culturale con altri docenti o discipline (Fauvel 1991, p. 4).

Sebbene nel contesto educativo attuale, caratterizzato da una maggiore enfasi su standard e risultati, alcune delle quindici motivazioni di Fauvel appaiano oggi meno centrali (Clark, 2014), la maggior parte mantiene validità e continua a ispirare la ricerca contemporanea (Clark et al., 2019). Per incentivare l'integrazione della storia della matematica in aula risulta fondamentale allineare le strategie proposte con i contenuti curriculari, le pratiche didattiche e i processi di valutazione, nonché superare lo scetticismo iniziale degli insegnanti verso i metodi storici, enfatizzando la sostenibilità pedagogica di tali strategie (Clark, 2014). Fried (2001) riconduce queste quindici ragioni a tre grandi temi. Il primo riguarda l'umanizzazione della matematica: la storia funge da ponte per approcci multiculturali, offrendo agli studenti occasioni di collegare lo studio della disciplina con emozioni e motivazioni umane (Avital, 1995; Brown, 1996). Il secondo concerne l'incremento di accessibilità e comprensibilità: la storia aggiunge varietà all'insegnamento, riduce la paura verso la disciplina e ne mostra il ruolo nelle società. Il terzo tema si concentra sull'aumento delle conoscenze: la storia offre contesti per problemi e concetti, suggerisce approcci alternativi e mostra le relazioni tra idee, definizioni e applicazioni (Avital, 1995). Più recentemente Fried (2014) ha rielaborato queste tre aree alla luce della letteratura scientifica sull'uso della storia della matematica in classe, articolandole in: tema motivazionale, tema curricolare e tema culturale. Secondo l'autore, solo gli ultimi due meritano seria considerazione, poiché il primo è soggetto a diversi *bias* metodologici.

Il tema motivazionale sostiene che la storia, umanizzando la matematica, renda l'insegnamento più interessante e meno rigido sul piano formale (Fried, 2014). In questa prospettiva, le ricadute affettivo-motivazionali giustificano di per sé l'integrazione della storia in aula: essa ridurrebbe paura e preoccupazione, migliorando indirettamente l'apprendimento e contrastando la visione di una matematica arida e rigida (Perkins, 1991; McLeod, 1994; Gulikers & Blom, 2001; Kaygin et al., 2011). Tuttavia, Clark (2014) mette in guardia contro i rischi di questo approccio: esso presuppone, spesso inconsapevolmente, che il contenuto matematico sia in sé poco attraente e necessiti di essere "abbellito" con storie e aneddoti. Tale posizione finisce per marginalizzare la storia della matematica come disciplina autonoma, non rendendo giustizia né alla matematica né alla sua storia.

Il tema curricolare: presenta più chiaramente la tendenza a considerare la matematica del passato per l'insegnamento in aula, sebbene in forma frammentaria e incompleta e considerandone la validità per il presente adattandola coerentemente con il moderno piano di studi, spesso prendendo in esame un problema del passato che consenta agli studenti l'esercizio del pensiero matematico e lo sviluppo di

quelle competenze matematiche rilevanti per il percorso scolastico attraverso la risoluzione di problemi che coinvolgano conoscenze geometriche, algebriche, trigonometriche o persino di programmazione e coding (Kronfellner, 2000; Fried, 2014). Ad esempio, attraverso la storia della matematica si può giustificare e al tempo stesso chiarire una data sequenza di argomenti, fornendo un nesso diverso nel rapporto tra concetti (come nel caso dei logaritmi) le cui considerazioni su questo strumento conducono a importanti idee matematiche (Fried, 2014). Secondo Fried (2014), tra i temi curriculari rientra a pieno titolo l'approccio genetico, termine con cui l'autore designa qualsiasi posizione pedagogica che consideri lo sviluppo storico come fonte di chiarificazione dei processi di apprendimento. Tale approccio, già esposto nel primo capitolo, individua la chiave di agevolazione della comprensione proprio nello sviluppo storico della disciplina, adottando così un punto di vista teleologico: esso presume che i concetti matematici del curriculum contemporaneo fossero già presenti, nella stessa forma, nei testi storici. Dal punto di vista dell'istruzione, l'attrattiva del parallelismo filogenesi-ontogenesi nei processi formativi risiede nella capacità di porre chiarezza nei modelli d'insegnamento e apprendimento, portando diversi autori a vedere prove empiriche sul fatto che gli studenti producono soluzioni a problemi analoghe alle soluzioni storiche sia che incontrano difficoltà che seguono anch'essi un modello storico (Thomaidis & Tzanakis, 2007).

Il tema culturale si pone in posizione diametralmente opposta alla prospettiva genetica, abbandonandone la teleologia (Fried, 2014). Il presupposto teorico deriva dagli influssi del paradigma dell'incorporazione di Csordas (1993) sulla ricerca matematica: tra corpo e cultura, tra biologia e storia, esiste un rapporto bidirezionale di influenza reciproca. Lo sviluppo biologico-naturale e quello storico-culturale, strettamente intrecciati, seguono una specifica linea di confluenza. È la commistione degli sviluppi naturali con quelli storico-culturali a costituire la vera linea di sviluppo dell'individuo dato dall'utilizzo dei sistemi di segni e altri artefatti culturali come il linguaggio. In tal senso, poiché la crescita intellettuale di ciascun individuo non può limitarsi a riprodurre un processo di formazione concettuale storico-sociale, la filogenesi non può ricapitolare l'ontogenesi (Radford & Puig, 2007). Su questa scia Radford e Puig (2007) elaborano il principio di incorporamento secondo il quale il pensiero matematico è correlato a una dimensione storico-concettuale incorporata nelle pratiche sociali, nei segni e negli artefatti culturali mediatori, aprendo non soltanto gli orizzonti della ricerca agli studi culturali, alle scienze semiotiche e alle scienze sociali (Radford, 2003a, 2003b; Radford & Puig, 2007; Furinghetti & Radford, 2008; Fried, 2008, 2014) ma riconoscendo anche che la matematica costituisce una vera e propria impresa frutto

dell'opera di molti individui nel corso dei secoli con effetto cumulativo (Bishop 1995; Fried, 2014). Guardare alle discipline matematiche come il frutto di attività essenzialmente umane, rende queste scienze non solo più vicine alle *Geisteswissenschaften* di Dilthey, ma specifica ulteriormente quell'opera di "umanizzazione della matematica" spesso espresso in termini ambigui (Tymoczko, 1994; Furinghetti, 2004; Fried, 2014; Clark et al., 2018). In questo senso, la storia della matematica non assume più la sola funzione strumentale di promuovere l'interesse e la motivazione degli studenti, ma si configura come aspetto centrale e pulsante della matematica stessa (Fried, 2014).

Le tre tematiche mostrano come esistono molteplici modi di relazionarsi con la matematica del passato, alcuni sono approcci non propriamente legati alle scienze storiche e al metodo storiografico mentre altri sì (Fried, 2018). Inoltre, risulta a questo punto abbastanza chiaro che valutare l'efficacia della prospettiva inaugurata dalla HPM è un processo complesso basato su metodologie quali-quantitative che includono non soltanto aspetti di carattere disciplinare, curriculare e metodologico, ma coinvolgono anche la formazione e la percezione che hanno gli insegnanti della propria disciplina (Barbin et al., 2000, Clark et al., 2019), costituendo così un'area di ricerca attiva in cui un consenso generale sui risultati non è stato ancora raggiunto a causa della complessità della rete di fattori interagenti in gioco, non consentendo il confronto dei risultati empirici tra i diversi lavori di ricerca (Clark et al., 2018). Preconcetti, concezioni errate e predisposizioni forti di insegnanti e studenti non possono essere modificati rapidamente. Tra i fattori decisivi che differenziano le implementazioni didattiche vi sono: il livello dell'istituzione formativa (primaria, secondaria o terziaria), l'orientamento degli studenti (compresi gli insegnanti in formazione) e le precedenti esperienze formative che hanno generato gli attuali atteggiamenti verso la matematica. Non vanno inoltre trascurati ulteriori fattori largamente indipendenti dai processi di insegnamento-apprendimento, ma capaci di favorire od ostacolare l'implementazione di approcci HPM. Tra questi: i vincoli curriculari e docimologici (tipologia di test, uso di manuali comuni, monte ore settimanale); il numero di studenti per classe; la struttura complessiva del sistema educativo (Clark et al., 2018).

3.3.2 L'umanizzazione della matematica

Spesso si sostiene che per motivare gli studenti sia necessario "umanizzare la matematica", sebbene tale espressione, che secondo Fulvia Furinghetti (2020) coinvolge matematici, epistemologi e filosofi, sia adottata senza specificarne chiaramente il senso. Con il concetto di "educazione umanistica alla matematica"

si fa riferimento a una serie di approcci caratterizzati da “somiglianze familiari” in cui categorie come *problem solving*, applicazione al mondo reale, costruzione sociale della realtà e prospettiva storica sono permeate di connessioni profonde con la sfera personale a tutti i livelli, enfatizzando il ruolo della narrazione, della gioia, dell'apprensione, della sorpresa, dell'umorismo e della poesia in uno sforzo comune volto a creare, giustificare e negoziare il significato degli enti matematici nel processo didattico (Brown, 1996).

Nel 1986, Alvin White, un matematico del Harvey Mudd College, ospitò a Claremont (California) una conferenza a cui parteciparono matematici universitari, docenti di matematica e filosofi per discutere il rapporto tra matematica e le altre discipline umanistiche al fine di dare una definizione concreta della “dimensione umanistica della matematica”, definendone gli obiettivi pedagogici, circoscrivendone le lacune dell'insegnamento e le modalità di presentazione in tutti i livelli d'istruzione (Marchisotto, 1992; Brown, 1996; Skrivanos & Zhang, 2013). Nel corso di questa conferenza, il gruppo di ricerca creò dei principi che definirono le successive esplorazioni, tra le quali figurano (Brown, 1996):

- L'apprezzamento del ruolo dell'intuizione non soltanto nella comprensione ma anche nella generazione di concetti al di là del semplice “prodotto finito” (costituito dai risultati algoritmici);
- L'apprezzamento per le dimensioni umane che motivano la scoperta: competizione, cooperazione, desiderio e bisogno di una visione d'insieme;
- La comprensione dei giudizi di valore insiti nello sviluppo di qualsiasi disciplina, concependo la sola logica come inadeguata per comprendere interamente il perché e il come l'oggetto matematico venga indagato;
- Il bisogno di setting d'insegnamento-apprendimento capaci di porre gli studenti come costruttori attivi di oggetti matematici, sorpassando il modello trasmissivo dell'apprendimento;
- L'opportunità per gli studenti di pensare come un matematico, inclusa la possibilità di lavorare su compiti a bassa definizione, di generare nuovi problemi e di partecipare a controversie su questioni matematiche;
- L'opportunità per i docenti di fare ricerca su questioni relative all'insegnamento.

A partire dall'esperienza di questa piccola conferenza venne fondata nel 1987 una newsletter divenuta, a partire dal 1992, una vera e propria rivista, *The Humanistic Mathematics Network Journal* (Skrivanos & Zhang, 2013), dedita a discutere il rapporto tra matematica e altre discipline umanistiche come la filosofia,

l'estetica, la poesia, l'arte, la letteratura e, più in generale, il linguaggio, nonché il contributo della storia alla comprensione della natura sociale e contestuale della matematica (Marchisotto, 1992; Brown, 1996).

I partecipanti alla conferenza del 1986 hanno identificato due obiettivi pedagogici che derivano dalla definizione della matematica come disciplina umanistica (Brown, 1996; Skrivanos & Zhang, 2013). Il primo, "Insegnare la matematica in modo umanistico", prevede di costruire un ambiente d'apprendimento che sia centrato sullo studente abilitandolo a un apprendimento attivo e incoraggiando lo sviluppo di una comunità d'apprendimento in cui docenti e studenti sono in grado di apprendere gli uni dagli altri in modo partecipativo. A tal fine, il docente deve riconoscere la centralità del clima emotivo e fornire un accesso adeguato a tutti gli studenti. Il secondo, "Insegnare la matematica umanistica", prevede la ricostruzione dell'intero curriculum disciplinare integrando gli elementi umanistici della scienza con la matematica scolastica (White, 1976; Marchisotto, 1992). Questo obiettivo comporta la necessità di sostenere la progettualità dell'apprendimento incoraggiando collegamenti interdisciplinari attraverso l'esplorazione delle relazioni tra matematica e cultura d'appartenenza. A tal fine, il docente deve consentire agli studenti di sperimentare il curriculum sia nel contesto del passato sia del presente al fine di coglierne il potenziale impatto sul mondo della vita. Le due direttrici sono così sintetizzate da White:

«The first theme [of teaching mathematics humanistically seeks] to place the student more centrally in the position of inquirer than is generally the case, while at the same time acknowledging the emotional climate of the activity of learning mathematics. What students could learn from each other and how they might come to better understand mathematics as a meaningful rather than arbitrary discipline [are] among the ideas of the first theme.

The second theme [of teaching humanistic mathematics focuses] less upon the nature of the teaching and learning environment and more upon the need to reconstruct the curriculum and the discipline of mathematics itself. The reconstruction would relate mathematical discoveries to personal courage, discovery to verification, mathematics to science, truth to utility, and in general, mathematics to the culture within which

it is embedded» (White, 1987; citato in Skrivanos & Zhang, 2013, p. 36).

Entrambi gli obiettivi impongono l'adozione di un punto di vista a carattere costruttivista che evidenzia i processi di *problem solving* in contesti significativi, ponendo al centro lo studente di modo tale da conferire spessore al “fare matematica” (Brown, 1996): l'errore, in quest'ottica, non diviene certificatore di difficoltà da evitare (Baccaglini-Frank et al., 2018), bensì occasione di apprendimento e invito a creare nuova conoscenza (Brown, 1996). La prospettiva costruttivista pone l'accento sul fatto che lo scopo del processo educativo è esso stesso oggetto di costruzione, esattamente come la conoscenza (Noddings, 1990, 1993; Brown, 1996). In tal senso, è importante non solo avere consapevolezza di come gli studenti pensano, ma è necessario conoscerli come persone al fine di aiutarli non soltanto ad elaborare adeguate idee matematiche, ma anche a costruire scopi ben scelti (Noddings, 1990, 1993; Brown, 1996). In tal senso, il *problem solving* consente di andare oltre la matematica come mero strumento di ragionamento e consente di problematizzare la disciplina stessa, mettendo gli studenti nelle condizioni di dare senso alla disciplina, di negoziarne gli obiettivi e di adottarne i mezzi didattici necessari a raggiungerli (Brown, 1996).

Seguirono altre riflessioni che si mossero su questo solco. Considerando il linguaggio matematico come metafora, ad esempio, Manin (1991), al Congresso Internazionale di Matematica di Kyoto, sottolinea che l'interpretazione della conoscenza matematica costituisce un atto creativo. Apparentemente, si tratta di un'opinione che non trova accordo con la tradizione secolare della matematica applicata al campo strettamente scientifico, tecnologico e ingegneristico del quale l'autore rimarca la volontà di voler ristabilire «a certain balance between the technological and the humanitarian sides of mathematics» (Manin, 1991, p. 1666): trattando i legami tra linguaggio e matematica, l'autore riflette sulle potenzialità e le necessità di veicolare i legami emotivi connessi al linguaggio matematico, considerando come i valori e i significati a esso connessi siano meglio resi nel linguaggio quotidiano (Manin, 1991). Anche nel discorso scientifico il linguaggio umano, rispetto a quello informatico, presenta vantaggi intrinseci dovuti alla sua capacità di far appello all'immaginazione spaziale e qualitativa, rendendo visibili le proprietà “strutturalmente stabili” (dimensioni, estremi, simmetrie, ecc.): «To put it bluntly, it makes possible the metaphorical use of science» (Manin, 1991, p. 1670).

Nella relazione plenaria tenuta in Québec all'ICME-7, anche Tymoczko (1994), seguendo la linea umanistica, sottolineò come in passato ci sia stata poca comunicazione tra il mondo della filosofia della matematica e quello dell'educazione alla matematica, con le sole eccezioni di Wittgenstein e Polya. Secondo Furinghetti (2004), Tymoczko considera, tra i vari aspetti caratterizzanti l'attività matematica, quelli riguardanti l'insegnamento, sebbene l'autore non abbia contezza dei processi in atto all'interno delle aule scolastiche. Secondo l'autore, i filosofi hanno errato nel trascurare il mondo reale come base della matematica, la quale costituisce parte integrante del cosiddetto "senso comune": vedere la matematica pura come l'essenza della matematica stessa ha condotto a una visione distorta della sua filosofia, partendo dal presupposto che nel corso del tempo intere civiltà sono esistite senza averne una, quali gli Egizi e i Babilonesi, sicché la cifra di senso della matematica giace nel suo essere un'attività pratica all'interno di una comunità:

«Certainly not the mere fact that humans did it? Human do science too. [...] Pure mathematics is ultimately humanistic mathematics, one of the humanities, because it is an intellectual discipline with a human perspective and a history that matters. There is no answer to the question: What is important in mathematics, once for all? We can only ask what is important in mathematics to human beings, with given abilities and limitations at a given point in their mathematical development» (Tymoczko, 1994, p. 334).

Sebbene sia stato un errore dei filosofi l'aver preso in considerazione esclusivamente la matematica pura, secondo Tymoczko è a causa della didattica e della pedagogia se oggi si è posta eccessiva enfasi ai soli criteri di utilità della matematica; un approccio, questo, che non introduce gli studenti alla disciplina matematica in quanto disciplina umanistica: «To introduce students to humanistic mathematics is to introduce them to a human adventure, an adventure that humans have actually partaken of in history» (p. 335). Più criticamente, Furinghetti (2004, 2020) nota che nella didattica disciplinare l'uso della storia per umanizzare la matematica (pur nella molteplicità dei significati che il termine "umanizzare" possa assumere) si può realizzare con modalità diverse: aneddoti, storie, illustrazioni, forme di drammatizzazione e vignette sono considerati strumenti per raggiungere questo obiettivo umanizzante poiché, presentando i matematici come persone, il mondo della matematica è reso più vicino all'esperienza degli studenti. Inoltre, le attività possibili attraverso la storia della matematica possono favorire la

comunicazione e l'interazione in classe rendendo così possibile una maggiore inclusività degli studenti con attitudini e abilità diverse (Furinghetti, 2004, 2020).

3.3.3 Nuovi paradigmi matematici: pragmatismo e multiculturalismo

Queste considerazioni sulla matematica come espressione culturale o, più radicalmente, come disciplina umanistica, mutano il punto di vista sulle matematiche (Fried, 2014), passando da un paradigma realista a uno pragmatista (D'Amore et al., 2017). Le *teorie realiste* vedono il significato come «una relazione convenzionale tra segni ed entità concrete o ideali che esistono indipendentemente dai segni linguistici; di conseguenza suppongono un realismo concettuale» (Godino & Batanero, 1994, p. 329). Questa concezione vede il significato di un'espressione linguistica, in tal caso l'oggetto matematico, non dipende dalle situazioni concrete d'uso, ma il suo uso è dipendente dal suo significato (D'Amore et al., 2017). Nella semantica realista il significato di un oggetto come ipotenusa del triangolo ABC indica una realtà specifica chiaramente rintracciabile nel mondo delle idee matematiche: ogni espressione linguistica si configura come attributo di certe entità (D'Amore et al., 2017). Questa posizione porta inevitabilmente a adottare una visione platonica degli oggetti matematici: per quanto astratto sia, l'oggetto matematico possiede una reale e osservabile esistenza indipendente dall'essere umano; “conoscere” matematicamente significa “scoprire” gli enti e le relazioni esistenti in tale dominio¹¹.

Le *teorie pragmatiste*, invece, vedono le espressioni linguistiche come portatrici di significati dipendenti dal contesto d'uso, trasformando ogni

¹¹ Si tratta, effettivamente, della posizione assunta, oltre che da matematici come Russell, Frege, Gödel ecc., anche da Paul Lockhart (2010), nel cui scritto d'opinione, *Contro l'ora di matematica*, mostra come tale paradigma non sia da far coincidere con la didattica della matematica tradizionale, da lui definita come vera e propria “pseudomatematica”, una sorta di precisa ma meccanica manipolazione di simboli volta alla risoluzione di falsi problemi, ovvero consegne di lavoro con insita una propria soluzione e, quindi, lontani dal reale “fare matematica”. Denunciando l'assenza della matematica stessa dall'ora di matematica a scuola, l'autore pone l'esigenza di partire dal contatto intellettualmente onesto con gli allievi di modo tale da guidarli verso l'esperienza diretta con l'intelligenza degli enti matematici astratti, forme fatte di idee: la matematica si configura così come disciplina dalla struttura epistemologica fondata sul principio estetico della verità, della bellezza e della semplicità (caratteristiche che rendono il linguaggio matematico preciso e sintetico). In tal senso è il lavoro con scenari didattici i cui problemi consentono non soltanto di esplorare liberamente e creativamente “l'ecologia matematica”, ma anche di dare senso alle definizioni matematiche poiché queste hanno origine nei problemi stessi (Lockhart, 2010). In tal senso, la prospettiva di Lockhart si può considerare come intermedia rispetto al paradigma pragmatista.

osservazione scientifica in osservazione dotata di uno specifico punto di vista vincolato al proprio contesto d'uso, e quindi non generalizzabile (D'Amore et al., 2017): tutto ciò che si può prendere in esame sono i diversi "giochi linguistici" che definiscono gli "usi" del linguaggio (Wittgenstein, 1967; Bloor, 1982; Sfard, 2008; D'Amore et al., 2017). Secondo questa prospettiva, gli oggetti matematici si configurano come simboli di unità culturali che emergono dagli usi di comunità di pratiche (prettamente matematiche) suscettibili a modifiche nel corso del tempo (D'Amore et al., 2017). In tal senso, il significato degli oggetti matematici dipenderebbe dal più ampio contesto di problemi entro cui si sono originati.

Come precedentemente accennato, il punto di vista pragmatista conduce inevitabilmente all'adozione di una prospettiva costruttivista nell'educazione matematica, che pone enfasi sui processi comunicativi e sulla costruzione e ricerca di significati condivisi degli oggetti matematici, i quali non sono mai dati una volta per tutte (Noddings, 1990, 1993; Brown, 1996). Di conseguenza, il contesto privilegiato dell'attività educativa è costituito da situazioni problematiche e stimolanti, capaci di venire in contro agli interessi degli alunni, sicché possano far sorgere in loro una genuina curiosità epistemica (Noddings, 1990, 1993; Brown, 1996).

Costruttivismo e pragmatismo aprono le scienze matematiche e il loro insegnamento all'antropologia, definendo un campo d'indagine in cui le dinamiche culturali assumono un ruolo centrale nella didattica. Emerge così l'etnomatematica, branca di studi interdisciplinare fondata dal matematico brasiliano Ubiratan D'Ambrosio, studiando i rapporti tra società, cultura e matematica, vedrebbe quest'ultima come un'attività umana collocata all'interno di specifici gruppi culturali: ad esempio molte culture sviluppano pattern geometrici complessi nei tessuti (tappeti berberi o tessuti andini) che incorporano concetti di simmetria, frattali e trasformazioni geometriche senza utilizzare le formalizzazioni matematiche occidentali, ma facendo uso di un sapere incorporato e culturalmente situato (Chevallard & Sensevy, 2014; D'Ambrosio & Rosa, 2017). A differenza di una concezione universalista che vede la matematica come corpus unitario e aculturale, l'etnomatematica riconosce la pluralità di tradizioni matematiche ciascuna profondamente radicata nelle pratiche sociali e istituzionali della propria comunità di origine. In questa specifica prospettiva antropologica i temi del multiculturalismo s'incontrano con la storia della matematica: le loro reciproche relazioni possiedono importanti implicazioni pedagogiche in piena sintonia con la storia della scienza, aiutando lo studente ad acquisire la consapevolezza della diversità di approcci pensiero matematico, favorendo il riconoscimento di diverse

tradizioni culturali e la comprensione di come bisogni, scopi e contesti differenti abbiano generato soluzioni matematiche diverse (Grugnetti & Rogers, 2000). La prospettiva storica evidenzia come la matematica contemporanea sia il risultato di un processo cumulativo a cui hanno contribuito molteplici culture (dalle tecniche di calcolo babilonesi ai sistemi numerici indiani, dalla geometria greca all'algebra araba) mostrando la disciplina nella sua complessità come esito di un dialogo plurisecolare tra tradizioni diverse (Bishop, 1995; Clark et al., 2018).

L'integrazione di questioni storiche ed epistemologiche nei processi didattici della matematica costituisce un modo per esporre la disciplina nel suo divenire, favorendo una comprensione più profonda tanto della sua struttura complessiva quanto delle sue componenti specifiche. Come osservano Clark e colleghi (2018), ciò contribuisce a migliorare l'educazione matematica a tutti i livelli, nella consapevolezza che, sebbene la matematica sia centrale nella società contemporanea e l'alfabetizzazione matematica sia essenziale, le questioni storiche ed epistemologiche rivestono uguale importanza. La dimensione storica consente di riconoscere che lo sviluppo della disciplina è avvenuto attraverso un costante dialogo con altre discipline scientifiche, filosofiche, artistiche e tecnologiche, rendendo esplicita l'armonia della matematica con le altre attività intellettuali e culturali dell'essere umano (Clark et al., 2018; Clark et al., 2019).

Sul piano epistemologico, tale prospettiva invita a ripensare il rapporto tra epistemologia e didattica della matematica dal punto di vista della storia delle idee, superando l'identificazione dell'epistemologia della disciplina esclusivamente con la logica formale a favore di un approccio più ampio che consideri la matematica come pratica culturale storicamente situata (Grugnetti & Rogers, 2000). Ciò significa adottare una prospettiva che ponga attenzione non solo ai prodotti finali della conoscenza matematica, ma anche ai suoi agenti storici e alle loro interazioni con le diverse società in cui le idee matematiche sono emerse e si sono sviluppate (Bishop, 1995; Fried, 2014). In questo senso, le questioni multiculturali aperte dall'etnomatematica (Rosa et al., 2016) e le questioni interdisciplinari diventano parte integrante delle riflessioni epistemologiche sulla didattica della matematica (Grugnetti & Rogers, 2000).

Clark e colleghi (2018) sottolineano come, in questo contesto più ampio, storia ed epistemologia della matematica abbiano un ruolo fondamentale nel fornire un'educazione più completa: non essendo una scienza naturale ma una scienza formale più vicina alla logica e quindi alla filosofia, la matematica possiede l'abilità intrinseca di connettere le scienze umanistiche con quelle naturali. L'integrazione

di storia ed epistemologia nell'educazione matematica può rendere visibile agli studenti questa connessione, contribuendo a superare la tradizionale dicotomia tra cultura umanistica e cultura scientifica.

3.3.4 Le discipline matematiche come sistemi semiotici: sincronie e diacronie

Nel quadro del rapporto tra didattica e storia della matematica, Fried (2007, 2008) propone una chiave interpretativa ispirata al *Cours de Linguistique Générale* di Ferdinand de Saussure (1974): vedere la matematica come sistema semiotico caratterizzato da rapporti sia sincronici che diacronici. Tale prospettiva consente di pensare la disciplina nella sua duplice natura: da un lato come disciplina dotata di sue specifiche strutture interne (qui il termine “struttura” richiama volutamente il bourbakismo), dall'altro come sistema culturalmente situato capace di mutare nel tempo.

Il punto di vista sincronico corrisponde alla visione a-storica della matematica, ovvero alla rappresentazione della conoscenza in un dato momento storico all'interno di una società (Fried, 2007, 2008). Tale prospettiva presenta la disciplina come sistema perfettamente coerente di concetti e teorie, eclissando l'effetto delle forze sociali ed evidenziando soltanto l'interrelazione logica tra i contenuti, prescindendo dai processi che ne hanno condotto la formazione. Questa visione coincide con il paradigma platonico-realista, secondo cui le idee matematiche esistono a priori, indipendentemente dal linguaggio adottato. Si tratta della cosiddetta *working mathematician's view*, che considera la matematica in termini operativi: anche spogliando la disciplina dal suo formalismo, rimarrebbe un nucleo concettuale comprensibile a chiunque possieda competenza matematica (Fried, 2007). Sul piano didattico, questa prospettiva si traduce nell'insegnamento di contenuti, concetti, teorie e teoremi come corpus coerente e immutabile, organizzato piramidalmente dall'aritmetica all'algebra fino all'analisi matematica. Viene così enfatizzata la capacità di cogliere relazioni tra elementi, tipica del matematizzare a cui aspirano i curricula scolastici (Skemp, 1978; Sfard, 2008; Fried, 2008). In senso radicale, tale prospettiva può condurre a considerare la storia della matematica come approccio illusorio, superficiale, “poetico”, estraneo alla vera matematica (Fried, 2007). Questa è effettivamente la prospettiva che si è andata a delineare nel corso della seconda ondata del Novecento a opera del gruppo di matematici francesi che firmavano sotto il nome del fittizio Nicolas Bourbaki (cfr.: capitolo 5).

Il punto di vista diacronico, per converso, introduce la dimensione storica e pone la questione del divenire (Fried, 2007, 2008). Se la prospettiva sincronica mostra il risultato delle scelte compiute, quella diacronica esplicita le scelte stesse effettuate nel processo di risoluzione dei problemi, evidenziando gli sviluppi realizzati dagli attori storici. In questa luce, un testo matematico si configura come prodotto culturale di un particolare autore o comunità di matematici vissuti in un determinato momento storico, instaurando rapporti intertestuali con altri testi coevi (Fried, 2007). La visione diacronica offerta dalla storia della matematica evidenzia così come il processo di costruzione della disciplina sia arbitrario, culturalmente e socialmente determinato (Fried, 2008). Emerge in tal modo una radice comune tra matematica e discipline umanistiche: creatività, inventività e visione caratterizzano i processi di problem solving (Grugnetti & Rogers, 2000; Fried, 2014). Si tratta di mostrare agli studenti che la matematica è disciplina fortemente incentrata sulla pratica e costituisce, per questo, una vera e propria impresa umana. Una prospettiva, questa, che trova effettivamente analogia con i metodi dell'etnistoria.

Le due prospettive corrispondono a due epistemologie distinte, poste in rapporto non di competizione bensì di complementarietà (Fried, 2007, 2008). Un'educazione matematica che non esclude la dimensione storica si sforza di progettare ponti interdisciplinari tra visione sincronica e quella diacronica, tra struttura logica e genesi storica della disciplina.

3.3.5 Specificità storiografiche e matematiche: i rischi di anacronismo e il loro superamento

Rispetto al rapporto tra sincronia e diacronia, leggere sincronicamente fenomeni squisitamente diacronici conduce a distorsioni e incongruenze nella ricostruzione storica (Grugnetti & Rogers, 2000; Fried, 2007). Diventa perciò imprescindibile chiarire i confini disciplinari: matematica e storia della matematica presentano oggetti di studio inevitabilmente diversi. Gli storici studiano materiali costituiti da oggetti culturali e testuali che, nel corso dei secoli, si sono fatti strada fino al presente, trattando questi oggetti come "sopravvivenze" di un mondo passato che oggi non esiste più, ma dal quale si è costituito il nostro mondo attuale (Oakeshott, 1999). La storia si configura così come quell'insieme di «detti, pensieri, azioni e sofferenze umane che si sono verificati nel passato e hanno lasciato un deposito nel presente; e li tratta dal punto di vista dell'accadere, del cambiamento e del particolare» (Elton, 1967, p. 23, trad. mia). Per lo storico, il passato possiede una priorità metodologica fondamentale: ciò che interessa è il passato *in quanto tale*, nella sua distanza e differenza rispetto al presente. La prospettiva diacronica

rivela modalità di esperienza che richiedono di essere considerate incondizionatamente nella loro peculiarità storica, senza proiettarvi categorie contemporanee. Il passato si configura così come alterità irriducibile rispetto al sentire contemporaneo (Butterfield, 1931/1951; Oakeshott, 1999; Fried, 2014). In altre parole, l'interesse dello storico non consiste nel sussistere delle credenze, delle azioni e delle intenzioni che occupano la sua contemporaneità: il suo compito è piuttosto chiarire le condizioni per cui un dato mondo passato sia indipendente dal presente, senza mai sussumere gli eventi passati sotto regole generali (Oakeshott, 1933). Si tratta di un lavoro volto ad arginare i pericoli di anacronismo (Kragh, 1987), lavoro non facile poiché siamo spontaneamente portati a leggere l'esperienza storica attraverso le categorie interpretative del nostro tempo (Grugnetti & Rogers, 2000; Fried, 2014).

Uno dei principali pericoli di anacronismo è il cosiddetto “Whigghismo”, termine coniato da Butterfield nella sua opera *The Whig Interpretation of History* (1931/1951), descrivendo la distorsione del passato mediante l'imposizione di categorie interpretative, intenzioni e concezioni contemporanee agli scritti e alle azioni degli attori storici, finendo per giustificare, valorizzare e incoraggiare soggetti e pratiche moderni (Fried, 2001, 2014). Tale approccio vede lo storico intervenire illegittimamente nel racconto storiografico in virtù della sua consapevolezza degli eventi successivi (Kragh, 1987; Fried, 2001). In tal senso, studiare la storia “con un occhio al passato e l'altro sul presente” genera una sorta di “illusione ottica”: una distorsione che filtra le idee estranee al modo moderno di pensare, ammettendo prevalentemente quelle adattabili agli interessi contemporanei (Butterfield, 1931/1951; Fried, 2014). Come osserva Fried (2001), lo storico della matematica si trova continuamente a dover rispondere a domande anacronistiche quali “chi ha scoperto la formula quadratica?” o “chi ha inventato il concetto di funzione?”. L'autore porta l'esempio di Oresme:

«One might credit Oresme for the invention of the function concept because his graphical representation for the intensity of qualities resembles the graph of a function. [...] Indeed, it is easy for us to find the function concept in Oresme because we have a clear idea of what we are looking for and how important it is. But by involving Oresme in our own search for the function concept, we miss his own interest in the nature of motion and change and we lose the Aristotelian context out of which this interest grew» (Fried, 2001, p. 396).

L'azione di filtrare la storia selezionando ciò che è utile al presente contrasta con i principi del pensiero storico (Fried, 2014; Furinghetti, 2020). Si tratta di una questione che non concerne primariamente la pedagogia o la didattica, bensì la storiografia stessa: non sono in discussione gli effetti dell'interdisciplinarietà sull'apprendimento, ma il carattere propriamente storico dell'operazione, che rischia di ridurre aspetti storico-culturali complessi a mere questioni formali (Fried, 2014). Al contrario, l'approccio adottato dal tema culturale, con il suo interesse per la differenza e l'impronta umana essenziale nel pensiero matematico, risulta maggiormente coerente con un approccio autenticamente storico, presupponendo che si possa apprendere dalla storia in quanto tale (Fried, 2014).

Sul piano strettamente didattico, trattare la storia della matematica come è oggi concepita, quindi in strettissima connessione con la tecnica e le scienze, conduce inevitabilmente ad adottare un approccio interpretativo anacronistico (Fried, 2014), finendo per separare idee arbitrariamente considerate "rilevanti" da idee considerate in modo altrettanto arbitrario come "irrilevanti", semplicemente assecondando le esigenze del curriculum moderno (Fried, 2001), nonché delle correnti politiche educative. I docenti di matematica si trovano quindi ad affrontare un dilemma: da un lato, devono gestire pressioni contestuali e istituzionali che orientano l'insegnamento della storia verso la matematica moderna, adottando una visione anacronistica legittimamente posta al servizio delle idee e dei bisogni contemporanei; dall'altro, potrebbero insistere sul fatto che la storia della matematica sia storia a tutto tondo, mettendo in secondo piano l'enfasi curricolare (comunque legittima) sull'apprendimento delle matematiche moderne nelle scienze pure e applicate (Fried, 2001, 2007, 2014).

Per superare questi problemi, Fried (2014) propone di ripensare l'educazione matematica adottando un approccio che consideri la storia della scienza come forma di conoscenza autonoma, piuttosto che strumento (Jankvist, 2009; Fried, 2014). In questa prospettiva, il confronto con i testi risulta cruciale: essi coincidono con il pensiero matematico stesso così come è stato comunicato alla comunità scientifica (Grugnetti & Rogers, 2000; Katz et al., 2000; Fried, 2014). I testi si configurano come parte integrante di una cultura e tradizione matematica intesa non in senso dogmatico, bensì come raccolta di opere tramandate sulla cui base la disciplina si è formata e sviluppata (Fried, 2014). Il quadro educativo che emerge da questa prospettiva, condivisa nell'ambito della HPM, supera la sola padronanza di tecniche di risoluzione o la conoscenza di concetti matematici. Esso si proietta verso la lettura critica e l'apprendimento di un corpus di testi matematici (anche in traduzione) secondo una logica di dibattito, come nel caso degli *Elementi* di

Euclide, della *Géométrie* di Cartesio o dell'*Introduzione* di Eulero (Sfard, 2008; Fried, 2014).

3.4 La HPM alla luce della Teoria antropologica della didattica

3.4.1 Dal sapere sapiente al sapere insegnato: la trasposizione didattica

Le considerazioni epistemologiche sviluppate nelle sezioni precedenti (dalla prospettiva pragmatista al riconoscimento della natura culturale e storica della matematica) trovano un'utile chiave di lettura nella Teoria della Trasposizione Didattica elaborata da Yves Chevallard (1985, 1991). Questa teoria si iscrive all'interno di una prospettiva socio-antropologica dell'epistemologia che concepisce ogni sapere come intrinsecamente legato alle istituzioni sociali che ne garantiscono la produzione, l'uso e la trasmissione (Chevallard, 1989, 2019).

Secondo questa prospettiva, il sistema scolastico costituisce una tra le tante istituzioni in cui si manifesta il *sistema didattico*, ovvero quella relazione ternaria in cui un gruppo di studenti sono guidati da docenti nell'apprendimento di un frammento di conoscenza che costituisce parte di un corpo più esteso o di un'intera disciplina (Chevallard & Sensevy, 2014). Ciò che distingue e connota un sistema sociale come didattico è la presenza dell'*intenzionalità* didattica, ovvero una volontà, non individuale ma sociale, di insegnare qualcosa (Chevallard, 1989). È la società nel suo insieme che, esprimendosi nella propria cultura, deve prima riconoscere un dato corpo di conoscenze come sapere insegnabile (Chevallard, 1989; Winsløw, 2011).

Chevallard osserva come la conoscenza assuma forme diverse a seconda del contesto istituzionale in cui è inserita: può essere creata all'interno di una determinata istituzione (il contesto della ricerca matematica), utilizzata come strumento operativo (nei contesti professionali), oppure costituire l'oggetto specifico di insegnamento (nel contesto scolastico). Nel passaggio da un'istituzione all'altra si verifica quello che l'autore definisce processo di *trasposizione didattica*:

«The process of didactic transposition refers to the transformations an object or a body of knowledge undergoes from the moment it is produced, put into use, selected, and designed to

be taught until it is actually taught in a given educational institution» (Chevallard & Bosch, 2014, p. 170).

La conoscenza subisce trasformazioni dovute alle condizioni di validità e accettazione stabilite dall'autorità del contesto istituzionale di riferimento, sicché un ambiente didattico appropriato deve essere ricostruito ex novo (Chevallard, 1989, 2019). Il sapere scientifico, che nel contesto universitario può essere prodotto e insegnato secondo criteri prevalentemente epistemologici, deve necessariamente essere adattato quando viene trasferito nell'istituzione scolastica. Questo processo non costituisce una mera semplificazione, ma una vera e propria riconfigurazione della conoscenza che tiene conto dei vincoli didattici, cognitivi e istituzionali propri del sistema scolastico (Chevallard, 2019).

Centrale nel processo di trasposizione è l'operazione di decontestualizzazione: il sapere viene separato dalle condizioni storiche, epistemologiche e culturali della sua produzione per essere presentato in forma "pura", organizzata secondo una logica di coerenza interna piuttosto che secondo la logica della sua genesi. Questa decontestualizzazione è seguita da una ricontestualizzazione: il sapere viene inserito in un nuovo contesto (quello scolastico) con proprie finalità, vincoli temporali, modalità di valutazione (Chevallard, 1991).

È proprio in relazione a questa doppia operazione che la dimensione storica della matematica assume particolare rilievo. Come evidenziato nella discussione sulla differenza tra prospettiva sincronica e diacronica, la trasposizione didattica tende a privilegiare visioni sincroniche: la matematica viene presentata come sistema coerente e compiuto, nella sua forma "finale", oscurando i processi storici che hanno condotto alla sua elaborazione. L'integrazione della storia può essere vista come tentativo di **ricontestualizzare** parzialmente il sapere matematico, restituendo agli studenti accesso – almeno parziale – alle condizioni storiche, epistemologiche e culturali della sua produzione.

Tuttavia, questa operazione non è priva di tensioni. Come già evidenziato da Fried (2014) nella discussione sul "tema culturale", la storia stessa subisce una trasposizione didattica quando entra in classe. Il sapere storico prodotto dagli storici della matematica, con i suoi metodi storiografici, la sua attenzione filologica alle fonti, la sua sensibilità agli anacronismi, deve essere a sua volta trasformato per diventare "storia insegnabile". Questa doppia trasposizione (della matematica e della sua storia) genera quella che potremmo chiamare una "tensione trasposizionale": da un lato l'esigenza di fedeltà storica e rigore storiografico, dall'altro i vincoli didattici, temporali e curriculari del contesto scolastico.

La teoria della trasposizione didattica offre dunque una chiave di lettura per comprendere alcune delle problematiche ricorrenti nell'integrazione della storia: il rischio di anacronismo (leggere il passato con le categorie del presente per renderlo più "accessibile"), la tentazione di "monumentalizzare" episodi storici (presentandoli come aneddoti isolati piuttosto che come processi complessi), la difficoltà di conciliare i tempi lunghi dello sviluppo storico con i tempi didattici scanditi dai programmi scolastici, la necessità di mediare tra il valore formativo della prospettiva storica e le pressioni valutative centrate su competenze matematiche "operative".

3.4.2 Prasseologie ed ecologie: storia e matematica

Un concetto che offre una chiave di lettura utile a comprendere le tensioni emerse nella trasposizione didattica della storia della matematica è la nozione di *prasseologia*. Come ricorda Winsløw (2010), questo termine, non nuovo nel campo della ricerca accademica, recupera il senso epistemologico originario che lega insieme *logos*, inteso come discorso razionale, e *praxis*, intesa come azione concreta.

Per la TAD (acronimo per Teoria Antropologica della Didattica), ogni sapere umano si struttura come prasseologia, ovvero come unità che integra una dimensione operativa, *cosa* e *come* si fa, e una dimensione discorsiva, il *perché* si fa in quel modo (Chevallard & Sensevy, 2014; Chevallard, 2019). Questa struttura si applica tanto alla matematica quanto alla sua storia, ma con esiti profondamente diversi. Come evidenziato nel paragrafo precedente, matematica e storia della matematica presentano oggetti di studio e modalità operative inevitabilmente differenti. Dal punto di vista della didattica della matematica, la storia si configura come possibile strumento: una risorsa che può illuminare concetti, motivare tecniche, offrire prospettive alternative, ma sempre in funzione dell'apprendimento di contenuti matematici "attuali". Dal punto di vista della storia, invece, la matematica è un testo, una "sopravvivenza" da leggere e interpretare in rapporto ad altre sopravvivenze culturali, ciascuna da riconoscere nella propria alterità storica e contestuale.

In tal senso, il *blocco prassico (II)* (il *know-how*) e il *blocco logico-teorico (A)* (i *perché*) che articolano la prasseologia, hanno alla base compiti, tecniche, tecnologie e teorie differenti, che si ripercuotono inevitabilmente sul sistema didattico. La prasseologia matematica privilegia compiti di tipo risolutivo (risolvere equazioni, dimostrare teoremi, calcolare), tecniche operative standardizzate,

giustificazioni logico-deduttive, sistematizzazioni teoriche coerenti. La prasseologia storica privilegia invece compiti interpretativi (contestualizzare fonti, ricostruire genealogie concettuali, identificare rotture epistemologiche), tecniche ermeneutiche e filologiche, argomentazioni basate su evidenze documentali, quadri teorici attenti alla contingenza e alla particolarità storica.

Quando la storia della matematica entra in classe, queste due prasseologie (con i loro diversi *logos* e le loro diverse *praxis*) devono coesistere e coordinarsi. Come nota Winsløw (2010), infatti, il rapporto tra le diverse componenti è di tipo *topologico* o, a un più alto livello di complessità, *ecologico*. L'integrazione della storia nell'insegnamento della matematica richiede dunque di costruire un'ecologia didattica in cui prasseologie matematiche e prasseologie storiche possano convivere produttivamente, senza che l'una annulli o distorca l'altra. Questo spiega, da un punto di vista teorico, alcune delle difficoltà pratiche ricorrenti: la tendenza ad anacronismi (prevalenza della prasseologia matematica su quella storica), la marginalizzazione della storia ad aneddoti (riduzione della prasseologia storica a mera decorazione), o viceversa il rischio di perdere il focus matematico in favore di approfondimenti storici eccessivamente specialistici.

Queste considerazioni forniscono il quadro epistemologico e teorico necessario per comprendere come e perché la storia possa essere integrata nell'insegnamento della matematica. La Teoria Antropologica della Didattica evidenzia come il passaggio del sapere dalle istituzioni di produzione (la ricerca matematica, la ricerca storica) alle istituzioni scolastiche implichi trasformazioni strutturali che coinvolgono tanto i contenuti quanto le modalità del loro insegnamento, sicché la storia della matematica, quando entra in classe, subisce una doppia trasposizione: come sapere matematico e come sapere storico. Questo doppio processo genera tensioni specifiche tra rigore storico e accessibilità didattica, tra fedeltà alle fonti e vincoli curriculari, tra prasseologie matematiche e prasseologie storiche.

3.5 Aspetti didattici della HPM

Alla luce della Teoria Antropologica della Didattica, l'integrazione della storia della matematica nei curricula scolastici non costituisce una scelta che dipende esclusivamente dalla volontà del singolo docente. Come evidenziato nel capitolo precedente, molteplici vincoli istituzionali, epistemologici e didattici co-occorrono nel processo di trasposizione: la storia della matematica deve essere selezionata, adattata e ricontestualizzata rispetto agli obiettivi curriculari, alle caratteristiche

degli studenti, ai tempi didattici e alle modalità di valutazione proprie del contesto scolastico.

Le considerazioni epistemologiche sviluppate finora – dalla distinzione tra prospettiva sincronica e diacronica al riconoscimento della diversità tra oggetto matematico e oggetto storico, dalla riflessione sulla natura culturale della disciplina alla tensione tra prasseologie matematiche e storiche – pongono questioni concrete per la pratica didattica. Come può un insegnante integrare efficacemente la storia della matematica nel proprio insegnamento? Quali scelte didattiche favoriscono un uso significativo della prospettiva storica? Quali obiettivi formativi possono essere perseguiti?

3.5.1 Rapporto tra obiettivi e materiali didattici: una necessaria assonanza

Per integrare la storia nell'insegnamento secondo Furinghetti (2004) è necessario considerare attentamente il contesto dell'attività didattica e le conoscenze pregresse degli studenti, identificando il momento opportuno per introdurre la prospettiva storica: la scelta dei supporti didattici deve essere calibrata sia rispetto al contesto della classe (gli alunni, le loro caratteristiche e le loro preconoscenze) sia rispetto agli obiettivi formativi. Rispetto a questi ultimi, le attività possono essere orientate verso l'esplorazione di un problema storico particolare oppure verso il confronto sistematico tra approcci storici e contemporanei, favorendo collegamenti interdisciplinari e riflessioni metadisciplinari (Kool, 1995; Furinghetti, 2004).

In particolare, Furinghetti (1997, 2004) individua due possibili foci per l'uso della storia nell'insegnamento matematico. Il primo consiste nella promozione della matematica come fatto sociale: la storia pone l'accento su aspetti di carattere sociale, presentando la disciplina come fenomeno dotato di una struttura diacronica interna e riflettendo sulla matematica come processo storico-culturale. Il secondo focus concerne invece la riflessione sulla disciplina per la costruzione degli oggetti matematici: la storia favorisce la comprensione e l'interiorizzazione dei concetti. Tale riflessione può essere confinata al caso specifico, su piano strettamente locale, oppure estendersi al piano globale, toccando l'intero metodo di lavoro in diverse situazioni (Furinghetti, 1997).

Matematica e storia della matematica, pur avendo obiettivi comuni nell'ambito dell'educazione matematica, mantengono specificità proprie che devono essere

rispettate. Come evidenziato dalla discussione sulla diversità delle prasseologie, il lavoro storico richiede competenze e modalità operative (ermeneutiche, filologiche, contestualizzanti) diverse da quelle puramente matematiche. Un'integrazione efficace valorizza entrambe le dimensioni senza ridurre la storia a mero strumento illustrativo né perdere il focus sugli obiettivi di apprendimento matematico. In questa prospettiva, Furinghetti (1997, 2004) individua tre principi metodologici fondamentali per l'integrazione della storia nell'insegnamento della matematica:

1. Individuare obiettivi comuni tra apprendimento della matematica e comprensione della sua storia;
2. Sviluppare tali obiettivi valorizzando le specificità dei due ambiti disciplinari;
3. Valutare i risultati alla luce dei modelli di ricerca, con particolare attenzione alle competenze sviluppate e agli atteggiamenti manifestati dagli studenti.

L'integrazione della storia della matematica non costituisce dunque un espediente per animare le lezioni, bensì una strategia didattica sistematica che richiede metodo e coerenza con gli obiettivi disciplinari e con le caratteristiche della classe.

Le indicazioni metodologiche di Furinghetti preparano il terreno per un'analisi più sistematica delle funzioni e degli obiettivi che l'integrazione della storia della matematica può perseguire. Nelle sezioni successive si approfondiranno tali funzioni seguendo la sistematizzazione proposta dalla recente letteratura scientifica internazionale, in particolare dai lavori di Barbin (1997, 2006) e dai contributi sintetizzati da Clark e colleghi (Clark et al., 2016, 2019).

3.5.2 Funzioni della storia della matematica

Barbin (1997, 2006) identifica tre funzioni didattiche complementari della storia della matematica, rispetto alle quali esiste ampio consenso nella letteratura scientifica (Jahnke et al., 2000; Barbin & Tzanakis, 2014; Clark et al., 2016, 2019; Furinghetti, 2020): la funzione vicariante, la funzione di spaesamento e la funzione culturale. Tali funzioni sono strettamente correlate all'uso delle fonti primarie e all'introduzione di una prospettiva storica nell'insegnamento della matematica.

La funzione vicariante, detta anche di sostituzione, consente di avvicinarsi alla matematica come attività in divenire piuttosto che come corpus statico di tecniche e conoscenze definitive. Questa funzione pone l'accento non solo sui prodotti finali ben definiti e organizzati, ma anche sui processi mentali che vi conducono attraverso una vivida attività intellettuale. L'attività didattica centrata sulla

prospettiva storica consente un'analisi più approfondita dei processi matematici, motivando e stimolando la ricerca, comprendendo come nel corso del tempo si siano succedute diverse concezioni fondamentali (quali quelle di numero, funzione, esistenza di un oggetto matematico, rigore, evidenza e dimostrazione) e mostrando come ciò che oggi appare scontato sia in realtà il risultato di lunghi processi di elaborazione concettuale (Barbin, 1997, 2006; Clark et al., 2019).

La funzione di spaesamento, o di riorientamento, emerge quando si considerano concetti e teorie matematiche nel contesto in cui sono stati originariamente concepiti, formulati e applicati. Ciò può generare uno “stupore epistemologico” poiché l'insegnamento tradizionale presenta insiemi, triangoli o funzioni come se esistessero già da sempre, manipolandoli senza interrogarne la costruzione (Barbin, 1997; Clark et al., 2019). La storia mostra invece come tali concetti siano stati inventati seguendo percorsi euristici inediti, mai condotti in solitaria. “Decifrando” e ripercorrendo le matematiche del passato (molto diverse da quelle contemporanee) è possibile discutere e problematizzare conoscenze e procedure date per scontate¹² (Barbin, 1997; Barbin & Tzanakis, 2014). Ciò richiede il confronto con testi originali e fonti storiche accuratamente selezionate, al fine di rendere non familiare ciò che è comunemente considerato tale. In questo modo viene sfidata la percezione di studenti e insegnanti circa la presunta stabilità della conoscenza matematica, facendo accrescere la consapevolezza che la matematica costituisce un'attività intellettuale in costante evoluzione, caratterizzata dall'interazione dialettica tra creatività, sperimentazione e logica (Barbin, 2012; Fried, Guillemette & Jahnke, 2016; Clark et al., 2019). Nickel (2016) descrive questa funzione in termini di “uso straniante” della storia, sottolineando che l'effetto di rendere non familiare il familiare può essere sortito solo se gli studenti hanno fatto esperienze matematicamente significative dotate di alternative genuine. Lo straniamento richiede un reale confronto con l'alterità del passato e non una mera menzione superficiale di approcci storici: è attraverso questo confronto autentico che gli studenti possono rivalutare il valore della matematica contemporanea cogliendone ricchezza, eleganza e utilità rispetto alle formulazioni storiche.

La funzione di comprensione culturale riconosce che la storia della matematica costituisce «una storia dentro la storia» (Barbin, 1997, p. 21, trad. mia),

¹² Ad esempio, il metodo di completamento del quadrato di al-Khwarizmi nella risoluzione delle equazioni di secondo grado, basato su una spiegazione di tipo geometrico e retorico, consente di cogliere il *perché* del funzionamento della ben nota formula $\Delta=b^2-4ac$, e quindi $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

permettendo di apprezzare come lo sviluppo della disciplina e delle sue tecniche avvenga sempre in uno specifico contesto scientifico, tecnologico e sociale (Barbin, 1997; Clark et al., 2019). In questa prospettiva, l'apprendimento della matematica non riguarda soltanto il *problem solving* o la manipolazione di un linguaggio formale, ma anche la presa di coscienza delle dimensioni storico-culturali, sociali ed etiche dell'attività matematica. La disciplina viene così percepita da prospettive inedite, che ne oltrepassano i confini tradizionali di disciplina universale, oggettiva e atemporale, in sintonia con i più recenti sviluppi dell'etnomatematica (Rosa et al., 2016; D'Ambrosio, 2018; Clark et al., 2019).

Queste funzioni generali consentono di articolare obiettivi più specifici in sintonia con le diverse dimensioni dell'educazione matematica. La letteratura scientifica internazionale ha progressivamente sistematizzato tali obiettivi, identificando le ricadute che l'integrazione della storia può avere sull'apprendimento degli studenti, sulla formazione professionale degli insegnanti, sulla dimensione affettivo-motivazionale e sulla valorizzazione culturale della disciplina (Tzanakis et al., 2000; Tzanakis & Thomaidis, 2011; Clark et al., 2019).

3.5.3 Storia come obiettivo e storia come strumento

Sulla base della letteratura prodotta dal 2000 in poi, Jankvist (2009a) ha introdotto una distinzione fondamentale che sintetizza i *perché* (ovvero obiettivi e ragioni) e i *come* (ossia procedure e metodi) dell'integrazione della storia nell'insegnamento.

Nella prospettiva della *History-as-a-tool*, la storia viene considerata come strumento correttivo capace di supportare tanto la sfera affettiva quanto quella cognitiva degli studenti (Jankvist, 2011a, 2011b). Come strumento affettivo, la storia può sostenere la motivazione ad apprendere, suscitando interesse e curiosità per la disciplina e conferendole “un volto umano” capace di ridurre paura e ansia (Russ et al., 1991; Fauvel, 1991; Tzanakis & Thomaidis, 2000; Jankvist, 2011a, 2011b). Come strumento cognitivo, la storia enfatizza aspetti interni alla matematica, ovvero che Jankvist chiama *in-issues*. Concetti, teorie, teoremi e metodi vengono così mostrati da differenti punti di vista e con diverse modalità di rappresentazione a carattere storico (Jahnke, 2001; Jankvist, 2009).

Centrale in questa prospettiva, come riportato da Jankvist (2009) è il concetto di *ostacolo epistemologico*, elaborato da Brousseau nel contesto della didattica francese: si tratta di una difficoltà imprescindibile per il ruolo formativo in un dato

campo conoscitivo, riscontrabile anche nella storia dei concetti stessi di una disciplina. Alcune difficoltà degli studenti possono essere lette alla luce degli ostacoli epistemologici attestati dalla storia del sapere: la storia può favorire non solo l'identificazione di questi ostacoli, ma anche il loro superamento attraverso una riflessione epistemologica sullo sviluppo delle idee, arricchendo la pratica didattica con indizi essenziali per esplorare diverse modalità di accesso alla conoscenza (Jankvist, 2009).

Nella prospettiva della *History-as-a-goal*, invece, la storia viene vista come obiettivo didattico e culturale in sé, offrendo l'occasione di cogliere le forze interne ed esterne che spingono la disciplina a cambiare nel tempo, nello spazio e tra le culture, enfatizzando il ruolo agentico dell'essere umano nel processo evolutivo della disciplina (Tzanakis & Thomaidis, 2000; Fried, 2001; Jankvist, 2011a, 2011b). Questa prospettiva consente di cogliere aspetti metadisciplinari, i cosiddetti *meta-issues*, quali l'evoluzione della disciplina nel corso del tempo, i meccanismi e le forze che spingono i cambiamenti paradigmatici, nonché il ruolo giocato dalla società e dalla cultura in questi processi trasformativi (Jankvist, 2009). In questa prospettiva, l'effetto di potenziare la sfera affettiva e motivazionale è visto fondamentalmente come effetto collaterale positivo piuttosto che come obiettivo primario (Jankvist, 2009c, 2011).

3.5.4 I gradi d'integrazione della storia nel curriculum matematico

Oltre a questa fondamentale dicotomia concettuale, Jankvist (2009a) classifica anche i modi in cui la storia della matematica può essere concretamente utilizzata nei processi di insegnamento e apprendimento, identificando tre gradi diversi d'integrazione della storia: approcci basati sull'illuminazione, approcci basati su moduli e approcci basati sulla storia.

Gli *approcci basati sull'illuminazione* vedono i processi didattici della matematica come integrati da informazioni storiche secondo una logica additiva. Nella loro *forma minimalista*, si tratta di informazioni su fatti isolati o frammenti storici riguardanti nomi, date, opere, eventi importanti, biografie, problemi e domande, raccontati spesso in forma aneddotica o schematica attraverso diagrammi temporali (Tzanakis & Arcavi, 2000; Jankvist, 2009). Nella loro *forma massimalista*, si trovano invece quelli che, come documenta Jankvist (2009), Lindstrøm chiama *epiloghi* o *prologhi storici*: sezioni di testo più ampie in cui viene delineata la storia della matematica con nomi, date, riferimenti a opere originali, aneddoti, problemi e discussioni sulle attribuzioni di priorità e sul progresso dello

sviluppo disciplinare. Nickel (2016) mette in guardia dai rischi di un uso superficiale dell'approccio aneddótico, che può degenerare in quella che chiama "caricatura monumentale", presentando i matematici come eroi dall'intelletto irraggiungibile (Newton, Leibniz, Archimede, Pascal, Cartesio, Einstein, ecc.) e lo sviluppo storico come progresso lineare inevitabile, oppure nell'estremo opposto della "caricatura gioviale", che legge la storia esclusivamente con le lenti del presente, riducendo i matematici a semplici aggiuntori di conoscenza in un percorso cumulativo verso la perfezione (il cosiddetto whiggismo). Questi rischi sottolineano l'importanza di un approccio storico consapevole, che eviti tanto l'agiografia quanto l'anacronismo.

Gli *approcci basati sui moduli* prevedono l'uso di unità didattiche specificamente dedicate alla storia e di *case studies* mirati. Il contenuto e la durata determinano le dimensioni dell'unità didattica, che può assumere un focus ristretto oppure un focus più ampio. I *moduli a focus ristretto* si configurano come piccoli "pacchetti storici" (Tzanakis & Arcavi, 2000) costituiti da raccolte di materiali focalizzati su un argomento specifico intrecciato e calibrato sul curriculum scolastico, sicché si presenta come trattabile in poche sessioni di lezione, "pronti" per essere adoperati dagli insegnanti in classe senza un eccessivo lavoro preparatorio. I *moduli a focus ampio* si configurano invece in veri e propri corsi completi adoperando più cicli di lezioni o adottando libri di testo con approccio storico esteso. Gli sviluppi matematici concettuali e i fatti storici vengono così trattati attraverso lezioni strutturate più lunghe (tra le 10 e le 20 ore) non necessariamente collegate al curriculum scolastico ufficiale (Jankvist, 2009; Clark et al., 2018, 2019).

Gli *approcci basati sulla storia*, infine, prevedono che la storia permei l'intero insegnamento: lo sviluppo storico della matematica definisce l'ordine stesso e il modo in cui gli argomenti matematici vengono presentati nel corso dell'intero anno scolastico o dell'intero percorso formativo (Clark et al., 2018, 2019). A differenza dei moduli didattici, nei quali lo studio della storia costituisce un obiettivo di apprendimento specifico ed esplicito, questi approcci affrontano la dimensione storica in modo più indiretto e pervasivo, facendola diventare il filo rosso che guida l'intera progettazione didattica (Jankvist, 2009).

Il rapporto tra contenuto storico e curriculum matematico può variare significativamente, condizionando gli obiettivi di apprendimento e l'ampiezza di contenuto storico trattato. Clark e colleghi (2019) offrono una lettura complementare agli approcci di Jankvist, identificando tre modalità attraverso cui la storia può essere integrata nel processo didattico.

Una prima modalità consiste nel *fornire informazioni storiche dirette* con l'obiettivo primario di apprendere la storia stessa della matematica. In questo caso, l'enfasi è posta sulla conoscenza storica più che sull'apprendimento della matematica: si includono informazioni fattuali isolate, si organizzano corsi e si adottano libri su questioni specifiche, si inseriscono cenni storici e riferimenti bibliografici. Questa modalità si allinea sostanzialmente con l'approccio basato sull'illuminazione descritto da Jankvist, ponendo la storia come oggetto di conoscenza a sé stante.

Una seconda modalità, di gran lunga più articolata, prevede di *attuare un approccio didattico ispirato alla storia* in cui l'obiettivo principale diventa l'apprendimento della matematica stessa. La storia ispira i processi didattici diventando parte naturale e integrante dell'insegnamento, del materiale didattico associato e dell'apprendimento degli studenti. La prospettiva storica può apparire in modo esplicito oppure operare implicitamente, poiché ciò che conta è l'apprendimento della matematica più che la conoscenza storica in sé. Questa impostazione si caratterizza per una notevole varietà nella forma, nel contenuto e nella metodologia. Si possono adoperare moduli didattici e libri di testo esplicitamente basati sulla storia o implicitamente permeati da elementi storici; si possono progettare progetti di ricerca condotti autonomamente dagli studenti; si possono utilizzare specifici fogli di lavoro basati su documenti originali per introdurre un argomento o una serie di problemi; si possono proporre esercizi, problemi ricreativi e giochi per elaborare un metodo o consolidare un argomento. Altre possibilità includono l'uso di testi originali per introdurre argomenti matematici o l'impiego di "pillole" didattiche basate sulla storia come supporto per l'insegnamento di contenuti specifici, sfruttando strategicamente errori storici, concezioni alternative, cambi di prospettiva, revisione di presupposti impliciti e argomenti intuitivi apparsi nel corso dello sviluppo della disciplina.

Una terza modalità, più ambiziosa sul piano culturale, si *concentra sulla disciplina matematica nel suo contesto socioculturale di sviluppo*, ponendosi l'obiettivo di creare o migliorare quella che Clark e colleghi chiamano "consapevolezza matematica". Con questa espressione si intende la capacità di riconoscere e comprendere le caratteristiche generali della disciplina, considerata sia come corpus di conoscenze che come attività umana, apprezzandone il significato intrinseco, il suo rapporto le altre scienze e i gli altri contesti socioculturali. Questo approccio può concentrarsi su questioni intrinseche all'attività matematica stessa, quali il ruolo svolto da specifici quadri concettuali nello sviluppo di particolari domini matematici; la natura evolutiva della disciplina

sia sul piano del contenuto che della forma, includendo sistemi di notazione, terminologia, metodi computazionali, concetti meta-matematici come assioma, dimostrazione, rigore ed evidenza, modalità di espressione e rappresentazione, nonché dubbi, paradossi, contraddizioni, euristiche, intuizioni, argomenti di impossibilità che, nei processi matematici fondamentali quali generalizzazione, astrazione e formalizzazione, assumono un ruolo chiave.

Nickel (2016) sottolinea l'importanza di un uso consapevole della storia della matematica, mettendo in guardia da quello che definisce “uso puramente positivista” o “caricatura antiquaria”: il rischio è che l'insegnante si riduca a raccogliere meccanicamente curiosità e aneddoti, escludendo di fatto l'indagine matematica vera e propria. In questa degenerazione, la presentazione puramente referenziale e celebrativa di personalità storiche sostituisce il lavoro concreto su specifici contenuti matematici, e la storia diventa decorazione piuttosto che risorsa epistemica. Questa cautela richiama l'importanza di mantenere sempre chiaro l'obiettivo formativo dell'integrazione storica: che si tratti di apprendere matematica, di sviluppare consapevolezza sulla natura della disciplina o di promuovere competenze trasversali, la storia deve sempre essere al servizio di un progetto didattico intenzionale e non ridursi a mera erudizione.

3.5.5 L'approccio ermeneutico e il ruolo delle fonti primarie

L'utilizzo di testi originali costituisce una condizione fondamentale per un'educazione matematica che abbia tra i suoi obiettivi la storia (Fried, 2014). Jahnke (1994), così come Dematte e Furinghetti (2011), sostengono che l'uso di fonti primarie può rappresentare un mezzo privilegiato per introdurre gli studenti all'ermeneutica, consentendo di promuovere contatti con linguaggi, figure, forme di comunicazione e diverse tipologie di situazioni matematiche che rendono vivo il contesto e stimolano la riflessione socioculturale sulle civiltà presenti e passate (Dematte e Furinghetti, 2011; Furinghetti, 2020). Il lavoro diretto sulle fonti consente agli studenti di accostarsi in modo profondo alle radici attorno alle quali si sviluppano i concetti matematici, favorendo così la fedeltà storica rispetto al pensiero dell'autore (Jahnke et al., 2000). Da queste fonti primarie originali possono essere ricavati interessanti problemi adatti a tutti i livelli scolastici, i quali mettono in luce il rapporto tra matematica, storia, cultura e società (Furinghetti, 2020).

Swetz (1995), ad esempio, sostiene che i testi storici dicono molto su come concetti e tecniche matematiche furono concepiti e si evolsero nel mondo antico. I

contenuti incarnano una pedagogia specifica, forme organizzative peculiari e metodi utilizzati per l'insegnamento nelle diverse civiltà. Nelle civiltà babilonese e cinese, ad esempio, l'uso di un discorso didattico strutturato, una sequenza logica di problemi matematici ed esercizi con l'impiego di ausili visivi caratterizzavano un approccio alla disciplina tipico di quelle società in cui la scrittura costituiva prerogativa di una classe sociale specifica, quella degli scribi o dei funzionari, consentendo così di riflettere sulle profonde connessioni tra le pratiche matematiche e le strutture sociali.

Il *principio genetico* (così come già esposto nel corso del capitolo 1) rappresenta la base teorica più ovvia per l'utilizzo delle fonti primarie nell'educazione matematica (Fried, 2014), proprio perché presuppone una corrispondenza tra il percorso di scoperta storica verso un dato argomento moderno e il percorso euristico seguito dagli studenti, suggerendo di presentare i testi uno dopo l'altro in sequenza storica. Tuttavia, l'efficacia di questo approccio è stata messa in discussione da alcuni studi empirici. Michael Glaubitz (2010) ha ottenuto dati deludenti conducendo un esperimento su 175 studenti che utilizzavano l'equazione e la formula quadratica come argomento, lavorando su opere di Al-Khwarizmi: l'approccio genetico sembrò non funzionare, causando confusione negli studenti. Secondo Fried (2014), è necessario considerare attentamente le condizioni del *setting* di insegnamento per giudicare adeguatamente l'efficacia di questo esperimento. Nel caso specifico, i testi venivano semplicemente consegnati agli studenti e poi seguiti da esercizi, problemi e applicazioni convenzionali con metodi tradizionali, senza una vera mediazione didattica che aiutasse gli studenti a navigare la distanza tra il passato e il presente. L'approccio genetico puro, in questo caso, si rivelò insufficiente. Come osserva Nickel (2016), seguire pedissequamente lo sviluppo cronologico della matematica può generare considerevole confusione. Errori, idee sbagliate, regressioni, vicoli ciechi e percorsi tortuosi sono così comuni nello sviluppo storico da richiedere inevitabili adattamenti didattici. Soprattutto nel caso di studenti con una visione insufficientemente ampia della disciplina, la storia può paradossalmente trasformarsi da risorsa in ostacolo alla comprensione, generando più perplessità che chiarimenti. Questo spiega perché il principio genetico, pur teoricamente attraente, richieda sempre un'attenta mediazione pedagogica ed un'accurata operazione di trasposizione didattica.

Più promettente si dimostrò invece l'*approccio ermeneutico* sviluppato da Jahnke (2014), anch'esso sperimentato da Glaubitz (2010). In questo secondo esperimento, veniva insegnata agli studenti l'equazione quadratica e la formula moderna secondo metodi convenzionali e, successivamente, in rapporto ai testi

originali, veniva chiesto loro di interagire con essi in modo creativo attraverso metodi attivanti, come lo scrivere interviste impossibili con Al-Khwarizmi. I testi originali giocavano un ruolo importante anche in questo caso, ma questa volta veniva presa in considerazione la prospettiva personale degli studenti nel leggerli, portando a risultati molto più incoraggianti e in netto contrasto con l'approccio basato sul solo principio genetico (Glaubit, 2010). Si potrebbe ritenere, osserva Fried (2014), che l'approccio ermeneutico adottato da Glaubit stia effettivamente introducendo l'anacronismo nel suo approccio storico, dato che gli studenti apprendono la formula quadratica prima in modo moderno e solo in seguito nella forma storica. Tuttavia, la comprensione storica richiede di vedere il passato in modo incondizionato senza necessariamente dimenticare il presente: è proprio problematizzando la propria posizione rispetto al passato che si adotta una prospettiva autenticamente ermeneutica. Come affermano Jahnke e colleghi (2000):

«In traditional theories of hermeneutics the relation between the historical meaning of a text (the intention of its author) and its meaning for a modern reader is amply reflected and identified as the essential problem of interpretation. In fact, seen under the aspect of method, history of mathematics, like any history, is essentially an hermeneutic effort. If history of mathematics is not to deteriorate into a dead dogma, teachers should have some ideas about the hermeneutic process and the fruitful tension between the meaning of a text in the eyes of its author and the meaning for a modern reader.» (Jahnke et al., 2000 p. 298).

Nell'approccio ermeneutico, dunque, il presente non si trova in una posizione "privilegiata" rispetto al passato, ma possiede conoscenze e consapevolezze matematiche differenti, sicché il passato, in quanto distante e problematico, necessita di essere attivamente interpretato piuttosto che semplicemente riprodotto (Fried, 2014). Questa tensione ermeneutica tra passato e presente (che in realtà caratterizza anche la storiografia whiggista) diventa essa stessa oggetto di riflessione didattica e consente di trasformare il lavoro sulle fonti in un'esperienza intellettualmente ricca e formativa. L'applicazione concreta dell'approccio ermeneutico in classe, quindi, richiede all'insegnante competenze specifiche che vanno oltre la semplice conoscenza storica. Innanzitutto, è necessario saper selezionare e mediare testi che siano storicamente autentici e didatticamente accessibili, operando quella trasposizione che preservi l'alterità del passato senza renderlo incomprensibile. In secondo luogo, l'insegnante deve saper guidare gli studenti nel processo interpretativo: non si tratta di "dare la risposta giusta" su cosa

significhi un testo storico, ma di facilitare l'esplorazione della distanza tra ciò che l'autore intendeva e ciò che il lettore contemporaneo comprende. Questo implica creare spazi didattici in cui gli studenti possano esplicitare le proprie precomprensioni, confrontarle con quelle dei compagni e con il contesto storico ricostruito, riconoscere anacronismi spontanei e riflettere sulle differenze tra prasseologie matematiche del passato e del presente. L'approccio ermeneutico trasforma così la lezione in un laboratorio interpretativo dove la comprensione storica e quella matematica si arricchiscono reciprocamente.

3.5.6 Dal discorso al metadiscorso: il contributo della teoria della Commognizione

L'approccio ermeneutico discusso nella sezione precedente trova un ulteriore approfondimento teorico nella prospettiva proposta da Anna Sfard, che concepisce la matematica come forma specifica di discorso e l'apprendimento come processo di partecipazione progressiva (Sfard, 2008). Questo approccio, che si inserisce nella *discursive turn* caratterizzante le scienze umane contemporanee, offre strumenti concettuali particolarmente efficaci per comprendere il ruolo epistemologico della storia nell'educazione matematica.

All'interno del framework di Sfard, gli oggetti matematici non sono entità preesistenti da scoprire, ma emergono performativamente attraverso l'uso del linguaggio matematico: sono costruiti attraverso le pratiche comunicative che li evocano, li manipolano e li mettono in relazione reciproca.

Un elemento essenziale della teoria riguarda la distinzione tra *routines* e *meta-regole*, dalla cui relazione emerge la struttura normativa del discorso matematico (Sfard, 2008). Le *routines* sono procedure discorsive standardizzate, sequenze di azioni comunicative eseguite in modo relativamente automatico in risposta a determinate configurazioni di oggetti discorsivi. Esse costituiscono il repertorio operativo del matematico, l'insieme delle tecniche consolidate attraverso cui si manipolano simboli, si trasformano espressioni, si derivano conclusioni. Le *meta-regole*, invece, operano a un livello superiore di regolazione discorsiva, determinando le condizioni di applicabilità delle routines: articolano il *come* e il *quando* dell'applicazione di un dato ragionamento, procedura o tecnica (Sfard, 2008). Le meta-regole hanno carattere tacito e situato, dipendendo dallo specifico contesto enunciativo. Esse includono principi metodologici generali, convenzioni sulla forma appropriata delle dimostrazioni, criteri di eleganza e semplicità, assunzioni ontologiche circa la natura degli oggetti matematici.

Un matematico competente non possiede semplicemente un repertorio esteso di routines (e quindi di tecniche), ma ha anche sviluppato una sensibilità meta-cognitiva che gli consente di selezionare le routines appropriate, di valutare strategie alternative, di riconoscere quando un approccio si rivela infruttuoso.

Cruciale per la prospettiva HPM è il riconoscimento che le meta-regole sono contingenti e storicamente determinate piuttosto che necessarie (Sfard, 2008). Ciò che conta come dimostrazione rigorosa nel XVII secolo differisce profondamente da ciò che conta come tale oggi: le convenzioni notazionali, i criteri di accettabilità delle soluzioni, i confini tra geometria e algebra si sono trasformati nel corso del tempo. Questa contingenza storica delle meta-regole apre uno spazio didattico fondamentale: attraverso l'incontro con discorsi matematici del passato, gli studenti possono sperimentare l'esistenza di meta-regole alternative, destabilizzando la percezione delle convenzioni contemporanee come naturali o inevitabili.

6.3.6.1 Il conflitto commognitivo: teoria e funzione didattica

Kjeldsen e Blomhøj (2012) attribuiscono alla storia della matematica un ruolo epistemologico fondamentale all'interno della teoria di Sfard, poiché essa costituisce uno strumento privilegiato, se non indispensabile, per rendere esplicite le regole meta-discorsive del discorso matematico e trasformarle in oggetti di riflessione per gli studenti. Gli autori sostengono che, poiché le regole meta-discorsive sono contingenti e storicamente determinate (Sfard, 2008), esse possono essere investigate al livello oggettuale del discorso storico, contrariamente a quanto accade all'interno del discorso matematico stesso, dove tali regole operano implicitamente governando il quando fare cosa e come farlo (2008, p. 201-202). Attraverso l'analisi di fonti originali e lo studio delle pratiche matematiche del passato, gli studenti possono sperimentare veri e propri *conflitti commognitivi* (Sfard, 2008, p. 256), ossia situazioni in cui differenti interlocutori agiscono secondo meta-regole diverse. In un conflitto commognitivo, gli studenti confrontano le convenzioni discorsive che governavano la matematica di epoche precedenti con quelle dei loro manuali contemporanei, scoprendo che procedure considerate oggi "scorrette" erano perfettamente legittime in altri contesti storici, o viceversa che argomenti oggi richiesti erano assenti o impliciti nel passato. L'esperienza del conflitto commognitivo non si limita a una mera registrazione cognitiva delle differenze tra pratiche discorsive del passato e del presente, ma innesca un processo di destabilizzazione delle certezze meta-discorsive precedentemente date per scontate, costringendo lo studente a tematizzare

esplicitamente ciò che prima operava in modo tacito e automatico nella sua pratica matematica.

Kjeldsen e Blomhøj (2012) documentano come questo processo si manifesti concretamente attraverso l'analisi dei progetti studenteschi basati su testi storici. Gli studenti che lavorano con il testo di Johann Bernoulli del 1691 sulla catenaria (la curva formata da una catena sospesa tra due punti sotto l'azione della gravità) sperimentano una profonda discontinuità tra il loro modo di concepire le equazioni differenziali e le soluzioni matematiche e quello dell'autore seicentesco.

Nel suo trattamento del problema, Bernoulli mescola liberamente quantità infinitesime, ragionamenti geometrici e considerazioni di statica secondo modalità che appaiono agli studenti contemporanei problematiche o addirittura scorrette. Ad esempio, Bernoulli considera un elemento infinitesimo della catena, lo tratta geometricamente come segmento rettilineo, applica considerazioni di equilibrio statico assumendo che le forze agiscano lungo le tangenti, e deriva relazioni differenziali senza esplicitare formalmente i passaggi al limite che oggi considereremmo indispensabili. Gli studenti contemporanei, abituati a una trattazione rigorosa del calcolo differenziale basata su limiti e su una netta separazione tra geometria analitica e fisica, trovano l'approccio di Bernoulli "confuso" o "non rigoroso". Tuttavia, nel contesto del XVII secolo, quando il calcolo infinitesimale era appena stato sviluppato e le convenzioni moderne sulla fondazione rigorosa non erano ancora stabilite, l'approccio di Bernoulli era perfettamente legittimo e rappresentava lo stato dell'arte. Le meta-regole che governavano il suo discorso matematico erano diverse: l'intuizione geometrica e fisica poteva fungere da giustificazione sufficiente, gli infinitesimi erano trattati come quantità piccole ma non nulle senza necessità di formalizzazione via limiti, la mescolanza di geometria, algebra e fisica era vista come sintesi potente piuttosto che come confusione categoriale.

Il conflitto commognitivo emerge quando gli studenti devono confrontare queste meta-regole storiche con quelle contemporanee. Non si tratta semplicemente di "correggere" Bernoulli secondo gli standard moderni (operazione che sarebbe anacronistica) né di accettare acriticamente le sue procedure come equivalenti alle attuali. Si tratta piuttosto di riconoscere che diverse convenzioni meta-discorsive erano operative e che la transizione dalle une alle altre costituisce parte integrante dello sviluppo storico della matematica. Questo riconoscimento è profondamente formativo: gli studenti comprendono che le convenzioni che oggi danno per scontate (la necessità di definire rigorosamente i limiti, di separare matematica pura

e applicata, di esplicitare ogni passaggio inferenziale) sono esse stesse storicamente costruite e soggette a trasformazione.

6.3.6.2 Le implicazioni per la didattica

Data la contingenza delle meta-regole, sottolineano Kjeldsen e Blomhøj (2012), è altamente improbabile che gli studenti autonomamente intraprendano una riflessione meta-discorsiva senza l'innescò fornito dall'incontro con un discorso alternativo, ed è precisamente in questa funzione maieutica che la storia della matematica rivela la sua indispensabilità didattica. Il conflitto commognitivo generato dall'approccio storico crea uno spazio riflessivo nel quale lo studente può confrontare criticamente le meta-regole che governano il testo storico con quelle dei manuali contemporanei e con quelle del proprio discorso matematico personale, costruendo progressivamente una consapevolezza meta-cognitiva delle convenzioni che strutturano la comunicazione matematica e della loro natura storicamente determinata piuttosto che universalmente necessaria.

In questo modo, la storia della matematica non si configura meramente come strumento motivazionale o come repertorio di aneddoti, ma come metodo genuino per l'apprendimento meta-discorsivo, condizione essenziale per lo sviluppo di una competenza matematica autentica. Le meta-regole influenzano profondamente il modo in cui i partecipanti al discorso interpretano i contenuti matematici (Sfard, 2008): diventare consapevoli della loro contingenza significa acquisire una comprensione più profonda non solo della storia della matematica, ma della natura stessa del fare matematica come pratica discorsiva storicamente situata e socialmente negoziata.

La prospettiva di Sfard, così come sviluppata didatticamente da Kjeldsen e Blomhøj, si rivela complementare all'approccio ermeneutico di Jahnke: entrambi riconoscono la distanza tra passato e presente come risorsa epistemica piuttosto che come ostacolo, entrambi valorizzano la tensione interpretativa come occasione di apprendimento profondo, entrambi richiedono una mediazione didattica consapevole che non riduca la storia a mero strumento ma ne riconosca la specificità epistemologica. La nozione di conflitto commognitivo offre inoltre un ponte concettuale con la Teoria Antropologica della Didattica discussa nel capitolo precedente: il confronto tra prasseologie matematiche storiche e contemporanee può essere riletto come confronto tra sistemi di meta-regole storicamente determinati, arricchendo la comprensione teorica dei processi trasposizionali che governano l'integrazione della storia nell'insegnamento.

3.6 Il contributo della HPM alle competenze matematiche

Questa sezione si propone di esaminare tale relazione articolandosi in due momenti complementari. Innanzitutto si chiarirà cosa si intenda per competenza matematica, evidenziandone la natura complessa e multidimensionale che va ben oltre la semplice padronanza di conoscenze e abilità procedurali. Successivamente si analizzeranno i principali framework teorici che hanno cercato di descrivere le componenti della competenza matematica, con particolare attenzione alla dimensione storico-culturale e al ruolo che la consapevolezza epistemologica gioca nel padroneggiare autenticamente la disciplina.

3.6.1 La competenza matematica: un costrutto multidimensionale

Se il termine competenza ha cominciato a comparire nel panorama educativo a partire dagli anni Sessanta del secolo scorso, l'idea di una specifica competenza matematica, strettamente correlata a un ambito disciplinare, è molto più recente (Maracci & Martignone, 2016; Baccaglini-Frank et al., 2018). La competenza matematica emerge dall'esigenza di superare una visione riduttiva della padronanza disciplinare intesa come mera conoscenza di nozioni o applicazione di abilità procedurali. Come sintetizzato da Pellerrey (2004), la competenza si configura come «la capacità di far fronte a un compito o a un insieme di compiti, riuscendo a mettere in moto e a orchestrare le proprie risorse interne, cognitive, affettive e volitive e a utilizzare le risorse esterne disponibili in modo coerente e fecondo» (Pellerrey, 2004, p.12).

Questa definizione evidenzia la natura olistica e multidimensionale della competenza: non si riduce a sapere o saper fare, ma implica la capacità di mobilitare risorse cognitive, affettive e volitive in contesti specifici. Sul piano internazionale, tale complessità si riflette nella pluralità terminologica adottata per indicare la competenza matematica: *mathematical literacy*, *numeracy*, *mastery of mathematics*, *mathematical competence*. Tra questi termini, *mathematical literacy* è stato adottato dal framework PISA per la sua minore ambiguità rispetto ad altre possibili espressioni (Stacey & Turner, 2015).

L'emergere della competenza matematica come costrutto teorico risponde a tre esigenze intrecciate (Baccaglini-Frank et al., 2018): un'esigenza didattica (riflettere sulle difficoltà degli studenti); un'esigenza di politica educativa (ridefinire il senso dell'educazione matematica nel nuovo millennio); e un'esigenza epistemologica (comprendere cosa significhi padroneggiare la matematica). Quest'ultima

dimensione è particolarmente rilevante per l'HPM: se la competenza matematica non si esaurisce nelle conoscenze e abilità tecniche, diventa cruciale interrogarsi su quale visione della disciplina, del suo sviluppo storico e del suo statuto epistemologico debba accompagnare la formazione matematica degli studenti.

La prima definizione sistematica di competenza matematica si deve al ricercatore danese Mogens Niss nell'ambito del progetto KOM (*Kompetencer Og Matematikl ring*, "Competenze e apprendimento della matematica"), promosso dal Ministero dell'Educazione danese a inizio anni 2000 (Niss, 2003). Il KOM nasce dalla necessit  di rispondere al *justification problem*: perch  insegnare matematica a tutti? La risposta di Niss risiede nell'idea che l'educazione matematica debba sviluppare un particolare modo di ragionare, una *forma mentis* applicabile in diversi ambiti della vita. Secondo l'autore, essere competenti in matematica significa possedere una *mathematical literacy*, definita come «l'abilit  di capire, giudicare, fare e usare matematica in una variet  di contesti e situazioni (intra ed extra matematici) in cui la matematica gioca o potrebbe giocare un ruolo» (Niss, 2003, p. 7, trad. mia). La versione attuale del framework KOM (Niss & Højgaard (2019) individua otto competenze matematiche distinte ma interconnesse, organizzate in due domini, come sintetizzato nella figura 2:

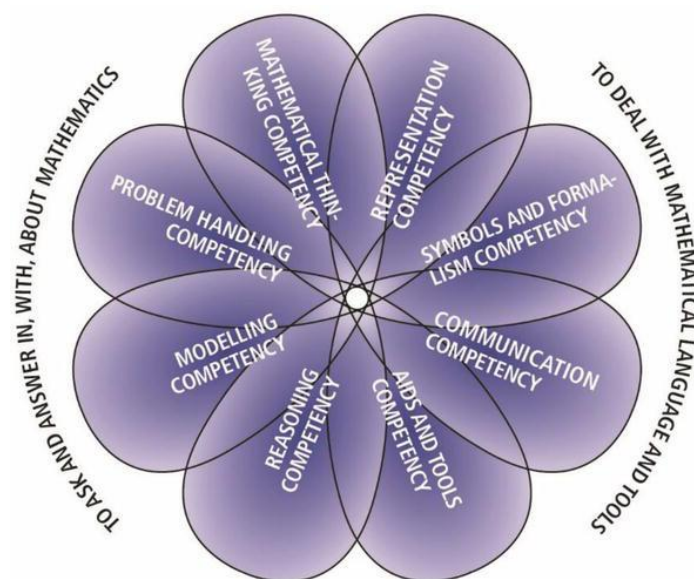


Fig. 2: Rappresentazione visuale delle otto competenze matematiche secondo Niss & Højgaard (2019, p. 19).

La competenza viene così definita operativamente come «insightful readiness to act appropriately in response to all kinds of mathematical challenges pertaining to given situations» (Niss & Højgaard, 2019, p. 12).

A) Porre e rispondere a domande attraverso la matematica: (1) Pensare matematicamente (*mathematical thinking*); (2) Gestire problemi matematici (*problem handling*); (3) Modellizzare (*modelling*); (4) Ragionare matematicamente (*reasoning*);

B) Maneggiare linguaggio, costrutti e strumenti teorici: (5) Rappresentare (*representation*); (6) Usare simboli e formalismo (*symbols and formalism*); (7) Comunicare (*communication*); (8) Gestire ausili e strumenti (*aids and tools*).

Il grado di sviluppo della competenza matematica può essere stabilito sulla base di tre dimensioni di natura eminentemente qualitativa (Niss, 2003; Niss & Højgaard, 2019):

- *Degree of coverage of a competency*, ovvero il grado con cui un individuo ha sviluppato in un dato momento tutti gli aspetti che caratterizzano una determinata competenza.
- *Radius of action of a competency*, ovvero la varietà di contesti e situazioni in cui un individuo può attivare una determinata competenza.
- *Technical level*, ovvero la varietà e il grado di sofisticatezza di concetti, procedure, teorie matematiche che un individuo può mobilitare quando attiva una determinata competenza.

Aspetto cruciale è che il progetto KOM non si limita alle otto competenze operative, ma include esplicitamente una dimensione storico-culturale denominata *Overview and judgement with regard to mathematics as a discipline* ossia la panoramica e il giudizio relativi alla matematica come disciplina, identificati come elementi cardinali per l'individuazione delle relazioni tra la matematica e la natura, la società e la cultura. Questa componente riconosce che la sola padronanza operativa non fornisce agli studenti «a structured and coherent knowledge about and image of mathematics as a discipline» (Niss & Højgaard, 2019, p. 24). Per colmare questa lacuna, il framework identifica tre sottodimensioni essenziali:

1. *L'applicazione della matematica in altri ambiti*: comprendere come la matematica sia utilizzata in attività quotidiane, professionali, sociali e scientifiche attraverso la costruzione di modelli matematici.

2. *Lo sviluppo storico della matematica visto dal punto di vista interno e dal punto di vista socioculturale*: riconoscere che “la matematica si è sviluppata nel corso di numerosi millenni spesso in stretta relazione ad esigenze disciplinari esterne, come all’interno di altre discipline, o a volte in solitudine perseguendo i propri obiettivi conoscitivi interni e servendo i propri bisogni teorici” (Niss, 2003).
3. *La natura della matematica come disciplina*: comprendere le proprietà specifiche della matematica, tra cui le modalità con cui si ottengono e giustificano i risultati.

La dimensione storica emerge quindi come componente costitutiva della competenza matematica, non come aggiunta decorativa. Il framework KOM ha influenzato profondamente il quadro OCSE-PISA, che nella sua prima formulazione (OECD, 2003) definiva la *mathematical literacy* in termini molto simili: «l’abilità individuale di identificare il ruolo che la matematica gioca nel mondo, di operare valutazioni fondate, di utilizzare la matematica e confrontarsi con essa in modi che rispondono alle esigenze della vita di quell’individuo in quanto cittadino che esercita un ruolo costruttivo, impegnato e basato sulla riflessione» (OECD, 2003, p. 24). Nelle successive riformulazioni (OECD, 2013), il framework PISA ha mantenuto questa impostazione pur riducendo le sottocompetenze da otto a sette, accorpando “argomentare” e “pensare e ragionare matematicamente”.

3.6.2 Il contributo della HPM al dibattito sulle competenze

Il progetto danese ha il merito di aver posto in evidenza le diverse componenti della competenza matematica evidenziando esplicitamente il contributo della storia della matematica alla visione globale della disciplina (Niss, 2003; Niss & Højgaard, 2019). Tuttavia, la riflessione sul ruolo didattico della storia nella costruzione delle competenze non si arresta qui. Secondo Jankvist e Kjeldsen (2011), è possibile trattare la storia della matematica in modo rigoroso, superando le insidie dell’anacronismo, sia per potenziare i contenuti del curriculum scolastico (*history-as-a-tool*) sia per esplorare gli scenari tematici e culturali della storia disciplinare (*history-as-a-goal*), attraverso un processo di ancoramento didattico che lega la discussione e la riflessione storica alle conoscenze curriculari squisitamente matematiche, mediante, ove possibile, il confronto con le fonti primarie.

Nei due scenari riportati dagli autori, il processo di ancoramento dei contenuti storici ai contenuti disciplinari ha consentito di lavorare sulle otto competenze evidenziate dal progetto KOM in modo sinergico mentre gli argomenti storici vengono trattati. L’approccio adottato per l’ancoraggio è quello della *microstoria*,

che considera pratiche concrete della matematica moderna come punto di partenza per comprendere gli sviluppi storici della disciplina, offrendo un punto di vista privilegiato per analizzare come la matematica è stata praticata e compresa, come la conoscenza matematica è stata prodotta nel tempo in luoghi, culture e contesti intellettuali differenti (Jankvist & Kjeldsen, 2011).

Questo approccio implica lo studio di episodi concreti della storia della matematica per acquisire approfondimenti su specifiche questioni: perché i matematici del passato hanno posto determinate domande di ricerca? Perché hanno affrontato certi problemi e con quali modalità di risoluzione? Quali tipi di dimostrazioni o argomentazioni hanno fornito e come queste sono state percepite dalla loro comunità matematica? Perché hanno introdotto determinati oggetti matematici, definizioni, aree di ricerca? (Jankvist & Kjeldsen, 2011).

Ciò che emerge dall'argomentazione degli autori è che se, da un lato, la storia è adoperata in quanto strumento (*history-as-tool*), allora l'ancoraggio verte sulle otto competenze matematiche operative del framework KOM; dall'altro, se è adoperata per allargare la visione culturale sulla disciplina (*history-as-goal*), allora l'accento sarà posto sulle tre dimensioni della *overview and judgement with regard to mathematics as a discipline* (Jankvist & Kjeldsen, 2011). In entrambi i casi, la storia della matematica non è un "extra" rispetto alle competenze, ma uno strumento didattico potente per svilupparle. Ricerche successive hanno confermato questa prospettiva: Jankvist (2015), in un contesto di ricerca didattica centrata sull'utilizzo della storia come strumento per sviluppare la panoramica e il giudizio degli studenti delle scuole superiori riguardo allo sviluppo storico, sostiene che l'impatto di questi approcci si evince primariamente nelle opinioni degli studenti e solo successivamente a livello di convinzioni consolidate. Consegne di lavoro centrate sul confronto con materiali didattici e fonti primarie della storia consentirebbero di lavorare sulle immagini della matematica a un livello più ampio (Jankvist, 2015; Niss & Jankvist, 2023).

Thomassen e Jankvist (2023) osservano inoltre come l'interazione tra fonti originali e strumenti digitali possa supportare gli studenti a sviluppare specifiche competenze – nel loro studio, quella di ragionamento matematico – attraverso la distinzione tra *mediazione epistemica* (comprendere i concetti matematici attraverso la fonte storica) e *mediazione pragmatica* (utilizzare strumenti digitali per esplorare i concetti). Lo studio mostra come il lavoro con la sesta proposizione del IV libro degli Elementi di Euclide possa costituire un punto di partenza per la formulazione di argomenti matematici durante il lavoro su GeoGebra. Gli autori

ipotizzano che questa tipologia di lavoro possa essere condotta su ognuna delle otto competenze mediante la mediazione di ambienti d'apprendimento digitali (Thomasen & Jankvist, 2023).

In sintesi, il rapporto tra HPM e competenze matematiche non è di semplice giustapposizione: la storia della matematica non è un “addendum culturale” alla formazione matematica, ma una dimensione costitutiva della competenza stessa, come esplicitamente riconosciuto dal framework KOM.

3.7 HPM e conoscenza degli insegnanti

Dal punto di vista socio-costruttivista, l'insegnante si colloca come colui che predispone esperienze capaci di favorire la costruzione della conoscenza, preparando, mediando e facilitando l'evoluzione cognitiva degli allievi. Il sistema didattico, come mostrato da Chevallard, si articola così come un triangolo in cui docente, allievo e sapere ne costituiscono i vertici (D'Amore, 1999; Baccaglini-Frank, et al., 2018): il processo di insegnamento-apprendimento, in cui s'incontrano le istanze della società personificate dal docente e dal discente, è mediato dal sapere.

Per lungo tempo si è ritenuto che, per un insegnamento efficace, l'insegnante avesse bisogno esclusivamente di conoscere profondamente i contenuti specifici della propria disciplina (Furinghetti, 2000; Fernandez, 2014). Questa concezione, che potremmo definire “contenutista”, assumeva una relazione diretta e relativamente non problematica tra padronanza disciplinare e capacità didattica: chi conosce bene la matematica sa insegnarla. A partire dagli anni Ottanta del secolo scorso, tuttavia, la definizione di quali siano le abilità e le conoscenze che un insegnante deve padroneggiare per poter insegnare efficacemente è diventata questione centrale per la ricerca in didattica della matematica.

Una considerazione generale ancora attuale è che per la pratica dell'insegnamento, oltre alla conoscenza disciplinare, sono necessarie diverse altre tipologie di conoscenze provenienti da fonti differenti che nel complesso costituiscono la base per l'insegnamento (Fernandez, 2014). Questo spostamento di prospettiva riflette il riconoscimento della complessità irriducibile dell'atto didattico e della specificità della conoscenza richiesta per insegnare, che non coincide né si riduce alla conoscenza disciplinare “pura”.

La questione assume particolare rilievo se si considerano gli approcci precedentemente discussi che richiedono all'insegnante non solo di conoscere la matematica e la sua storia, ma di saper orchestrare questa conoscenza in funzione

degli obiettivi d'apprendimento degli studenti. Per lungo tempo si è ritenuto sufficiente che l'insegnante possedesse una solida conoscenza dei contenuti disciplinari (Furinghetti, 2000; Fernandez, 2014); a partire dagli anni Ottanta, tuttavia, la ricerca in didattica della matematica ha progressivamente riconosciuto la complessità e la specificità della conoscenza professionale necessaria per un insegnamento efficace.

Questa sezione esamina i principali framework teorici che hanno cercato di descrivere e categorizzare la conoscenza professionale dell'insegnante, con particolare attenzione alla dimensione storico-epistemologica. Vengono analizzati i contributi di Shulman sulla distinzione tra *Subject Matter Knowledge* e *Pedagogical Content Knowledge*, l'elaborazione successiva di Ball e colleghi sul *Mathematical Knowledge for Teaching*, le evidenze empiriche sulla conoscenza storica degli insegnanti e le proposte teoriche emerse nella letteratura per integrare la dimensione storica nei framework esistenti.

3.7.1 Il contributo seminale di Shulman: SMK e PCK

Il contributo fondamentale di Lee Shulman (1986, 1987) ha fornito un framework teorico che ha profondamente influenzato la ricerca sulla conoscenza degli insegnanti e che continua a costituire punto di riferimento imprescindibile. Shulman introduce una distinzione cruciale tra la conoscenza del contenuto disciplinare (*Subject Matter Knowledge*, SMK) e la conoscenza pedagogica del contenuto (*Pedagogical Content Knowledge*, PCK), articolando così la complessità della base conoscitiva necessaria per l'insegnamento.

La *Subject Matter Knowledge* rappresenta la conoscenza approfondita della disciplina che si insegna. Per un insegnante di matematica, corrisponde alla padronanza dei concetti, delle procedure, delle strutture e dei metodi propri della disciplina matematica. Shulman (1986) distingue tre componenti della SMK: la conoscenza del contenuto in sé (*content knowledge*), che include fatti, concetti, principi e relazioni all'interno della disciplina; la conoscenza delle strutture sostanziali della disciplina (*substantive structures*), che riguarda i paradigmi esplicativi e le teorie organizzative attraverso cui la disciplina struttura e valida la conoscenza; e la conoscenza delle strutture sintattiche (*syntactic structures*), che concerne i modi attraverso cui si stabilisce la validità delle affermazioni, i canoni di evidenza e i criteri di verifica specifici della disciplina (Shulman, 1986, 1987). Nel caso della matematica, un insegnante con solida SMK comprende non solo “come” si fa matematica, ma anche “perché” funziona, riconosce le connessioni

profonde tra argomenti apparentemente distanti, e possiede una visione d'insieme della disciplina che va oltre la frammentazione in singoli topic.

Tuttavia, Shulman (1986, 1987) osserva che possedere una solida SMK, pur essendo condizione necessaria, non è sufficiente per un insegnamento efficace. Questa osservazione nasce dalla constatazione empirica che esperti disciplinari (matematici di professione, ad esempio) non sono automaticamente insegnanti efficaci, e che la transizione dall'expertise disciplinare all'insegnamento richiede lo sviluppo di forme di conoscenza qualitativamente diverse. È qui che interviene il concetto di *Pedagogical Content Knowledge*, quella forma speciale di conoscenza che, secondo Shulman (1987), distingue l'esperto disciplinare dall'insegnante esperto.

«Within the category of pedagogical content knowledge I include, for the most regularly taught topics in one's subject area, the most useful forms of representation of those ideas, the most powerful analogies, illustrations, examples, explanations, and demonstrations—in a word, the ways of representing and formulating the subject that make it comprehensible to others. Since there are no single most powerful forms of representation, the teacher must have at hand a veritable armamentarium of alternative forms of representation, some of which derive from research whereas others originate in the wisdom of practice».
(Shulman, 1986, p. 9).

Nonostante la rilevanza che riveste tale costrutto teorico, la comunità scientifica fatica a raggiungere un consenso generale su cosa effettivamente sia la *Pedagogical Content Knowledge*, sicché ciascuna ricerca propone modelli e concetti diversi talvolta contrastanti pur rifacendosi allo stesso autore di riferimento (Shulman, 1986, 1987; Fernandez, 2014).

3.7.2 L'elaborazione di Ball: la *Mathematical Knowledge for Teaching*

Deborah Ball e colleghi (Ball, Thames & Phelps, 2008; Hill, Ball & Schilling, 2008; Hoover et al., 2016) hanno sviluppato e raffinato il framework di Shulman specificatamente per l'insegnamento della matematica, introducendo il costrutto di *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT). Il MKT rappresenta la conoscenza matematica che gli insegnanti utilizzano nel loro lavoro quotidiano di insegnamento

e costituisce uno sviluppo sistematico e empiricamente fondato delle intuizioni originarie di Shulman.

L'elaborazione del framework MKT nasce da un'osservazione empirica: la conoscenza matematica richiesta per insegnare efficacemente differisce in modi sottili ma significativi dalla conoscenza matematica "standard" che adulti istruiti possiedono. Ball e colleghi hanno condotto estensive ricerche basate sull'analisi del lavoro concreto degli insegnanti, identificando situazioni ricorrenti che richiedono forme specifiche di conoscenza matematica (Ball, Thames & Phelps, 2008). Ad esempio, valutare se una definizione non convenzionale proposta da uno studente è matematicamente corretta, scegliere tra diverse rappresentazioni di una frazione quale sia più appropriata per introdurre un concetto, analizzare la natura di un errore comune nella sottrazione con prestito, modificare un problema per renderlo più semplice o più complesso mantenendone la struttura matematica. Questi compiti, tipici dell'insegnamento, richiedono una conoscenza matematica che va oltre il semplice "saper fare" e che non è tipicamente richiesta in altri contesti professionali.

Implementando il lavoro di Shulman (1987), Ball e colleghi individuano una *Mathematical Knowledge for Teaching* specifica, delineando una visione dettagliata in cui le due componenti di Shulman si configurano domini ulteriormente sezionabili in altre aree conoscitive (cfr. figura 3) (Ball, Thames & Phelps, 2008): *Common Content Knowledge*, *Specialized Content Knowledge* e *Horizon Content Knowledge* per il primo dominio; e *Knowledge of Content and Students*, *Knowledge of Content and Teaching* e *Knowledge of Content and Curriculum* per il secondo dominio.

Nell'ambito della letteratura sulla *History and Pedagogy of Mathematics* il modello di Ball e colleghi è stato adoperato per due ricerche esplorative (Clark, 2012; Fenaroli, Furinghetti & Somaglia, 2014) ed è stato soggetto ad alcune analisi di carattere teorico (Mosvold, Jakobsen & Jankvist, 2014; Jankvist et al., 2015). L'intento degli autori non è adattare la storia della matematica al modello della *Mathematical Knowledge for Teaching* né tantomeno apportare sostanziali modifiche allo stesso, quanto piuttosto contribuire alla discussione sulle diverse dimensioni del costrutto le quali presentano secondo gli autori dei confini più sfumati di quanto non presentato nella schematizzazione grafica del gruppo di ricerca di Ball (Mosvold, Jakobsen & Jankvist, 2014). Da questo punto di vista, la storia della matematica costituisce un repertorio di idee per l'insegnamento: molti dei problemi storici includono contesti autentici e interessanti e si configurano come

bagaglio conoscitivo ricco di esempi applicativi di idee, nozioni e metodi matematici capaci di supportare l'apprendimento degli studenti (Mosvold, Jakobsen & Jankvist, 2014; Jankvist et al., 2015).

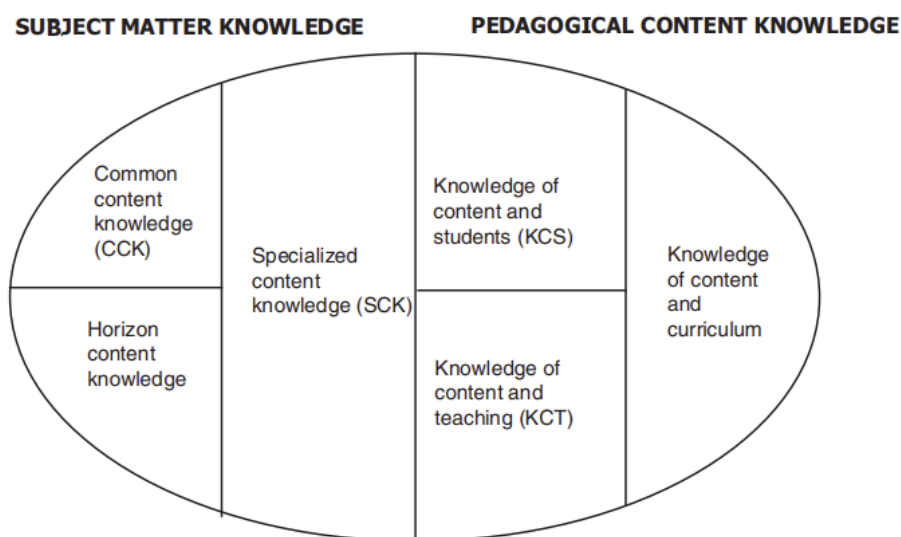


Figura 3: Modello *Mathematical Knowledge for Teaching* (Ball, Thames & Phelps, 2008)

Verrà presentata analiticamente ogni dimensione del modello MKT, riconnettendo già in questa sede le analisi di Ball e colleghi con la lettura effettuata dai ricercatori danesi nell'ambito dell'educazione alla storia della matematica (Mosvold, Jakobsen & Jankvist, 2014; Jankvist et al., 2015).

Common Content Knowledge (CCK). La CCK costituisce il set di conoscenze e abilità matematiche condivise con setting di lavoro diversi dall'insegnamento (Ball, Thames & Phelps, 2008). Rispetto alla dimensione storica, la storia della matematica costituisce un sapere a sé stante che acquisisce valore culturale e storiografico. In questo senso, la storia della matematica rientra nella CCK come parte della MKT: essa costituisce un contesto autentico nel quale alcuni concetti matematici emergono anche in relazione alle loro attuali applicazioni (Mosvold, Jakobsen & Jankvist, 2014). Rispetto alla formazione dei docenti, il confronto con fonti primarie può potenziare non soltanto la loro CCK, ma può anche favorire l'acquisizione di consapevolezza dei concetti matematici a un livello meta. Ad esempio, la moltiplicazione tra due numeri negativi ha costituito storicamente un importante ostacolo epistemologico, spesso incontrato anche da alcuni studenti (Mosvold, Jakobsen & Jankvist, 2014). La conoscenza sullo sviluppo storico di specifici concetti matematici e dei contesti entro cui questi si sono sviluppati può

supportare i docenti nel guidare gli studenti nel loro percorso d'apprendimento (Mosvold, Jakobsen & Jankvist, 2014).

Specialized Content Knowledge (SCK). La SCK costituisce la conoscenza e l'abilità matematica unica per l'insegnamento (Ball, Thames & Phelps, 2008). Questa tipologia di conoscenza consente ai docenti di impegnarsi attivamente in compiti quali valutare accuratamente le modalità di rappresentazione delle idee matematiche, fornire spiegazioni matematiche per regole comuni e procedure, comprendere ed esaminare metodi di risoluzione inusuali, cogliere la natura degli errori come occasioni d'apprendimento (Hill, Ball & Schilling, 2008). Secondo Mosvold, Jakobsen e Jankvist (2014), la storia della disciplina costituisce un bagaglio di esempi per la SCK, come nel caso del metodo di Al-Khwarizmi, poiché costituiscono conoscenze che possono supportare i docenti nel trovare nuove soluzioni capaci di aiutare i loro studenti nel processo d'apprendimento (Mosvold, Jakobsen & Jankvist, 2014, p. 53). Tuttavia, l'uso della storia per fini educativi non deve essere acritico poiché esso può cedere facilmente alle insidie dell'anacronismo (Fried, 2001, 2007). Il grado di tolleranza nella precisione nell'uso delle informazioni storiche varia a seconda che la storia sia usata come strumento (*history-as-tool*) oppure come obiettivo in sé (*history-as-goal*) (Jankvist, 2009). Ad esempio, le fonti originali sul metodo di risoluzione del quadrato proposte da Al-Khwarizmi sono più procedurali e in linea con l'approccio argomentativo tipico della matematica medievale, portando i docenti a dover interpretare i testi storici adottando un linguaggio moderno che porta a vedere la rappresentazione del quadrato al di là del lavoro di Al-Khwarizmi (Mosvold, Jakobsen & Jankvist, 2014). Più recentemente, Pansell (2023) ha proposto una categorizzazione operativa di cosa gli insegnanti dovrebbero conoscere della storia, identificando quattro livelli: una consapevolezza storica generale (*broad historical awareness*) che include conoscenza panoramica dei principali sviluppi; conoscenza di episodi storici specifici (*knowledge of specific historical episodes*) rilevanti per i contenuti insegnati; conoscenza del contesto storico (*knowledge of historical context*) in cui tali episodi si collocano; e familiarità con fonti originali (*knowledge of original sources*). Questa categorizzazione, pur essendo intuitiva, offre una checklist utile per auto-valutazione e per progettazione di percorsi formativi.

Horizon Content Knowledge (HCK). La HCK indica quel gruppo di conoscenze prospettiche e ulteriori che il docente può avere sia rispetto alle matematiche elementari tipiche dei gradi d'istruzione inferiori sia rispetto a quelle più complesse tipiche dei gradi d'istruzione superiori, osservando globalmente l'intero percorso di apprendimento della matematica e contribuendo ad aiutare i docenti a orientare gli

studenti nella navigazione nella complessa ecologia epistemica della matematica (Ball & Bass, 2003; Ball, Thames & Phelps, 2008). Jakobsen e colleghi (2012) offrono una definizione più operativa della HCK, indicando con essa un insieme di conoscenze che forniscono orientamento e familiarità con la disciplina, contribuendo all'insegnamento e fornendo ai docenti un'idea di come il contenuto insegnato si colloca e si collega al contesto disciplinare più ampio. Questo bagaglio conoscitivo include consapevolezza degli orientamenti e dei valori disciplinari fondamentali e delle principali strutture epistemologiche, nonché le conoscenze dei metodi e degli strumenti conoscitivi della matematica, la tipologia di conoscenza perseguita, la provenienza delle idee e i criteri di validità della conoscenza (Jakobsen et al., 2012). Secondo Smestad, Jankvist e Clark (2014), la HCK costituisce quel dominio della MKT che più può beneficiare degli studi sulla storia della matematica, anche se motivare i futuri docenti ad apprendere contenuti avanzati che vanno oltre il proprio curriculum costituisce una sfida complessa, poiché i benefici che ne derivano non sono visibili in modo diretto e immediato (Mosvold, Jakobsen & Jankvist, 2014). Tuttavia, diversi studi (Hoover et al., 2016) mostrano come la HCK possa avere effetti positivi sugli studenti anche attraverso l'uso di esempi storici (Mosvold, Jakobsen & Jankvist, 2014).

Knowledge of Content and Students (KCS). La KCS riguarda come la conoscenza dei contenuti matematici si relaziona alla conoscenza degli studenti, su come pensano, conoscono e apprendono la disciplina (Hill et al., 2008). I docenti devono essere in grado di anticipare il pensiero e le difficoltà degli studenti, scegliere gli esempi più adeguati, predisporre le attività più interessanti e motivanti, nonché ascoltare e interpretare il pensiero emergente e incompleto degli studenti (Ball, Thames & Phelps, 2008). La storia della matematica può influenzare le capacità dei docenti rispetto a come gli studenti pensano, conoscono e apprendono la matematica. Uno studio condotto in una scuola superiore danese ha offerto agli studenti la possibilità di confrontarsi con concetti di funzione alternativi ma storicamente rilevanti (Eulero e Dirichlet) relazionandoli con quelli del già familiare libro di testo (Kjeldsen & Petersen, 2012). L'obiettivo dello studio è stato portare gli studenti a prendere consapevolezza delle meta-regole del discorso matematico attraverso il conflitto commognitivo (Sfard, 2008). Kjeldsen e Petersen (2012) hanno analizzato l'interazione degli studenti nel corso delle attività didattiche scoprendo come la percezione e le azioni degli studenti erano guidate da meta-regole diverse da quelle presenti nella comunità matematica di oggi. Il parallelismo tra ostacolo epistemologico che emerge nella storia della disciplina e ostacolo epistemologico che emerge nel corso del processo d'apprendimento degli studenti porta a considerare la conoscenza della storia della matematica come

conoscenza rilevante per l'insegnamento in quanto repertorio potenziale per arricchire la comprensione da parte degli insegnanti circa le diverse concezioni e malintesi degli studenti, offrendo informazioni sulle motivazioni per cui tali concezioni sono state rifiutate o abbandonate (Mosvold, Jakobsen & Jankvist, 2014).

Knowledge of Content and Teaching (KCT). La KCT riguarda come la conoscenza del contenuto dialoga con la capacità didattica del docente di progettare consegne di lavoro che si esplicitino nel mettere in sequenza argomenti, esempi ed esercizi esemplificativi, valutandone vantaggi e svantaggi didattici per insegnare un'idea specifica; compiti che richiedono un'integrazione dialettica tra matematica e pedagogia (Ball, Thames & Phelps, 2008; Hoover et al., 2016). L'ordine di presentazione di un dato argomento matematico, così come viene usualmente presentato nei libri di testo, si discosta significativamente dall'ordine di comparsa dello stesso argomento nello sviluppo storico della disciplina: la presentazione sincronica (attuale) di un dato argomento non coincide con la presentazione che segue lo sviluppo diacronico dello stesso concetto (Fried, 2007). I moderni testi di matematica partono da esempi, assiomi e definizioni, proseguono con dimostrazioni, affermazioni, teoremi e infine collegano gli argomenti con possibili campi d'applicazione. Tuttavia, come commentano Smestad, Jankvist e Clark (2014), lo sviluppo anche solo di un sottocampo della matematica vede il sistema assiomatico costituire l'ultimo traguardo del processo di ricerca. Diverse sperimentazioni su corsi condotti in ambito universitario in cui l'apprendimento è avvenuto attraverso il confronto con le fonti storiche primarie (Hoover et al., 2016) hanno portato gli studenti ad essere più disponibili ad accettare i costrutti insegnati, in quanto proprietà e concetti costituivano la naturale conseguenza del lavoro svolto in aula (Smestad, Jankvist & Clark, 2014).

Knowledge of Content and Curriculum (KCC). La KCC riguarda come la conoscenza dei contenuti è strettamente correlata alle dinamiche istituzionali di ogni Stato che definisce i curricula d'insegnamento di ogni ordine scolastico (Ball, Thames & Phelps, 2008). Questa categoria può essere ulteriormente distinta in conoscenza del curriculum verticale e laterale. Rispetto alla letteratura sulla History and Pedagogy of Mathematics, Fauvel e van Maanen (2000) avevano posto la questione se e come la storia della matematica debba essere inclusa nei materiali curriculari. Mosvold, Jakobsen e Jankvist (2014) ritengono che la conoscenza dei libri di testo storici (nel caso della geometria, ad esempio, gli *Elementi* di Euclide e i relativi commenti di Proclo, e gli sviluppi contemporanei di Peletier, Arnould, Lacroix e Hoüel) con la consapevolezza circa le considerazioni dietro alle scelte

effettuate dagli autori possa contribuire alla KCC, sicché la conoscenza dei contenuti e del curriculum da parte degli insegnanti si correla ai materiali del curriculum. Ad esempio, Barbin (2007), conducendo uno studio sul concetto di “semplicità” nei libri di testo di geometria sia storici che scolastici del contesto francese, sostiene che tale nozione vada stabilita prima di affrontare l’insegnamento della geometria poiché l’intento dei libri di testo è spesso dare introduzioni didattiche concrete, adeguate e coerenti insieme a definizioni matematiche corrette, tralasciando tuttavia come questi due aspetti non coincidano col significato conferito a un certo concetto o oggetto. Il significato di un angolo, ad esempio, può emergere soltanto dalle relazioni tra angoli e altre nozioni geometriche come il triangolo e il cerchio (Barbin, 2007).

3.8 Integrare la storia della matematica: due possibili paradigmi pedagogici

Le riflessioni sviluppate nel corso di questo capitolo sull’integrazione della storia della matematica nell’insegnamento possono essere ricondotte ai due paradigmi pedagogici individuati da Chevallard (2019), che offrono una prospettiva utile per comprendere le diverse modalità attraverso cui la dimensione storica viene integrata nella didattica della matematica.

Il *paradigma della visita delle opere*, radicato nella concezione transcendentista secondo cui lo studio di una conoscenza possiede valore formativo intrinseco, trova corrispondenza in alcuni approcci alla storia della matematica discussi in questo capitolo. L’uso di aneddoti biografici isolati, la presentazione di risultati storici come monumenti da contemplare senza interrogarne la genesi, e l’inserimento di box storici nei manuali come elementi decorativi scollegati dal percorso didattico costituiscono manifestazioni di questo paradigma. Gli approcci basati sull’illuminazione, nella loro forma minimalista, rischiano di ricadere in questa logica quando si limitano a fornire informazioni fattuali su nomi, date ed eventi senza interrogazione sul perché e sul come (Jankvist, 2009). La caricatura monumentale identificata da Nickel (2016), che presenta i matematici come eroi e lo sviluppo storico come progresso lineare inevitabile, rappresenta una degenerazione di questo paradigma in cui l’intersoggettività costitutiva degli argomenti matematici viene completamente elisa.

Il *paradigma di interrogazione del mondo*, radicato nella concezione inerentista secondo cui la conoscenza deve essere studiata in virtù delle sue applicazioni e della sua capacità di fornire risorse operative, trova invece corrispondenza negli approcci

metodologicamente più consapevoli. L'organizzazione dell'attività didattica attorno a *questiones* genuine – problemi storici che motivano l'introduzione di concetti, ostacoli epistemologici che hanno richiesto ristrutturazioni concettuali, controversie che hanno generato sviluppi teorici – permette di incontrare i contenuti storici non come monumenti inerti ma come risposte elaborate a specifiche esigenze conoscitive.

La funzione vicariante identificata da Barbin (1997, 2006), che consente di avvicinarsi alla matematica come attività in divenire, si iscrive in questo paradigma: attraverso l'analisi dei processi che hanno condotto ai risultati matematici, gli studenti comprendono che i concetti sono stati costruiti per rispondere a problemi specifici. La funzione di spaesamento, che rende non familiare ciò che è dato per scontato mostrando alternative storiche, costituisce un dispositivo per generare interrogazione epistemologica. L'approccio ermeneutico sviluppato da Jahnke (2000, 2014) si configura come manifestazione sofisticata del paradigma di interrogazione: il lavoro su fonti primarie diventa processo interpretativo attivo in cui la tensione tra passato e presente diventa oggetto di riflessione didattica. Il conflitto commognitivo (Sfard, 2008; Kjeldsen & Blomhøj, 2011) costituisce un ulteriore dispositivo paradigmatico: gli studenti sperimentano attivamente la tensione tra meta-regole storiche e contemporanee, riconoscendo la contingenza storica delle convenzioni discorsive.

La distinzione tra *history-as-tool* e *history-as-goal* (Jankvist, 2009) può essere riletta attraverso questi paradigmi: in entrambi i casi, l'approccio è coerente col paradigma di interrogazione se l'attività è organizzata attorno a domande genuine che richiedono indagine attiva, piuttosto che presentazione informativa di risultati predeterminati. La topogenesi della conoscenza costituisce criterio ulteriore di distinzione: nel paradigma della visita delle opere gli studenti ricevono passivamente informazioni storiche; nel paradigma di interrogazione diventano co-produttori attraverso processi interpretativi attivi, discussioni collettive, confronto tra interpretazioni.

Gli approcci didattici discussi (illuminazione, moduli, storia come filo conduttore) possono essere implementati secondo l'uno o l'altro paradigma. Anche approcci apparentemente minimalisti possono essere coerenti col paradigma di interrogazione se utilizzati come innesco per indagine epistemologica piuttosto che come decorazione culturale. Similmente, moduli storici estesi possono degenerare in erudizione antiquaria (Nickel, 2016) oppure costituire laboratori di interrogazione epistemologica se strutturati attorno a problemi autentici.

Capitolo 4

La systemic review con PRISMA

4.1 Metodologia

4.1.1 Le precedenti review sull'efficacia dell'HPM

Le revisioni sistematiche sull'integrazione della storia della matematica nell'educazione sono limitate a due contributi principali (Bütüner, 2015a; Baki & Bütüner, 2018), nessuno dei quali ha seguito le linee guida PRISMA. Questi studi testimoniano la crescente attenzione della ricerca internazionale su questo tema.

In particolare, lo studio del 2015 è una metanalisi a effetti fissi condotta su tutte le pubblicazioni scientifiche che valutassero l'impatto dell'uso della storia della matematica sull'atteggiamento degli studenti verso la matematica, combinando i risultati di sei studi sperimentali condotti tra il 2000 e il 2014, selezionati da database come lo YÖK national thesis center (database nazionale della Turchia), Proquest dissertation e Google Scholar. Le ricerche sono state effettuate utilizzando parole chiave come "history of mathematics", "ancient", "attitude", "mathematics", "student" e "history". Non viene menzionato l'uso di specifici operatori booleani. Sono stati trovati 53 studi applicati, condotti tra il 2000 e il 2014. Tra i 53 studi trovati, 47 non sono stati inclusi nell'analisi. La ragione principale per lo scarto è che non rispettavano i criteri necessari, o in termini di metodologia, o perché mancavano di dati statistici sufficienti per calcolare l'effetto di dimensione. Ad esempio, due studi sono stati esclusi specificamente per la mancanza di dati statistici necessari al calcolo dell'effetto di dimensione, e altri tre sono stati esclusi a causa della data di pubblicazione (erano precedenti al 2000). Sono stati inclusi 6 studi, che hanno fornito un totale di 14 dimensioni dell'effetto standardizzate per la metanalisi.

L'obiettivo era delineare il quadro complessivo dell'influenza dell'uso della storia della matematica sull'atteggiamento degli studenti verso la disciplina, fornendo una sintesi quantitativa rigorosa della letteratura disponibile. L'analisi ha

incluso 14 dimensioni dell'effetto standardizzate, estratte da 6 studi primari per un campione complessivo di 364 partecipanti, e ha determinato una dimensione media dell'effetto di Cohen $d = 0.095$ in favore del gruppo sperimentale esposto alla storia della matematica. Questo valore è classificato da Cohen et al. (2000) come un effetto di livello basso ma positivo, tuttavia l'autore, richiamando Thalheimer e Cook (2002), ritiene sia un valore trascurabile, talché pur evidenziando un atteggiamento leggermente più favorevole verso la matematica negli studenti esposti alla storia della matematica rispetto al gruppo di controllo, l'entità di tale cambiamento risulta sostanzialmente irrilevante dal punto di vista pratico. La validità della conclusione cui è giunto l'autore sembra essere confermata dall'applicazione di una serie di rigorose analisi statistiche¹³. Bütüner (2015a) ritiene che l'esiguità dell'effetto osservato sia ipoteticamente attribuibile a molteplici fattori, tra cui la natura e la qualità delle attività didattiche implementate, le modalità specifiche di utilizzo della storia della matematica, il livello di preparazione e competenza degli insegnanti nell'integrazione di contenuti storici, nonché le caratteristiche dei campioni esaminati. Un fattore contestuale emergente è che molti studenti coinvolti negli studi erano impegnati nella preparazione di esami standardizzati (nazionali o centrali), determinando contesti in cui l'enfasi sulla risoluzione di problemi di routine può indurre a percepire la storia della matematica come un elemento superfluo o addirittura confusivo piuttosto che come strumento di chiarificazione concettuale. In tal senso, i risultati cui giunge l'autore sembrano suggerire la necessità di ulteriori ricerche su tutti quei moderatori che influiscono sull'efficacia della storia della matematica, al fine di identificare le condizioni ottimali per la sua integrazione curricolare e massimizzarne l'impatto formativo, in particolare rendimento, fiducia e autoefficacia degli studenti in matematica.

Il secondo studio è una meta-sintesi condotta da Baki e Bütüner (2018) in cui è stato adottato un approccio sistematico per l'identificazione e la selezione degli

¹³ L'applicazione del modello a effetto fisso è stata giustificata dai test di eterogeneità: la statistica Q (15.592) non ha superato il valore critico di chi quadrato (22.362) con 13 gradi di libertà, mentre l'indice I^2 pari al 16.622% ha indicato un livello di eterogeneità trascurabile tra gli studi inclusi, confermando l'omogeneità della distribuzione delle dimensioni dell'effetto. Particolare attenzione è stata dedicata alla verifica dell'assenza di distorsione di pubblicazione (publication bias), minaccia potenziale alla validità di ogni sintesi meta-analitica. Il funnel plot ha rivelato una distribuzione simmetrica degli studi, mentre l'Orwin's Fail Safe N ha calcolato che sarebbero necessari 119 studi aggiuntivi con effetto nullo per ridurre l'effetto medio complessivo sotto la soglia di 0.1. Inoltre, l'Egger's regression test ha escluso la presenza di asimmetria significativa ($p = 0.634$), supportando ulteriormente l'assenza di bias. L'affidabilità del protocollo di codifica è stata garantita da un coefficiente Kappa di Cohen pari a 1.00, indicativo di un accordo perfetto tra i codificatori.

studi sull'uso della storia della matematica nell'educazione matematica. La ricerca bibliografica è stata effettuata interrogando sette database e motori di ricerca: Google Scholar, Tübitak Ulakbim Dergipark (database turco di riviste indicizzate i cui articoli sono sottoposti a revisione paritaria), YÖK National Thesis Center, Ebsco, Eric, Springer, ScienceDirect, Taylor-Francis e Proquest Dissertations Theses Global. Le parole chiave utilizzate per la ricerca, concordate tra il secondo autore e un ricercatore esperto in storia della matematica, includevano i termini "history of mathematics", "ancient", "learning", "mathematics", "achievement", "history" e "attitude".

Gli autori non riportano quanti studi sono stati inizialmente individuati utilizzando tali parole chiave; tuttavia, il protocollo prevedeva che gli abstract venissero esaminati separatamente dai due autori, escludendo gli studi non conformi ai criteri prestabiliti. Qualora l'abstract non fornisse informazioni sufficienti per una decisione, veniva consultato il testo integrale. Le eventuali divergenze di valutazione tra i due revisori venivano risolte ricorrendo all'opinione di un terzo ricercatore, con decisione finale basata sul criterio di maggioranza. I criteri di inclusione richiedevano che gli studi trattassero specificamente della storia della matematica, che i dati fossero stati raccolti da studenti, insegnanti in formazione, accademici o attraverso l'analisi di libri di testo, e che fossero redatti in lingua turca o inglese. Inoltre, era richiesto che gli studi presentassero una struttura completa e chiara, includendo le sezioni relative alla problematica di ricerca, al campione o gruppo di studio, agli strumenti di raccolta dati, all'analisi dei dati, ai risultati e alle conclusioni. Erano ammesse esclusivamente tesi e articoli di rivista; nel caso in cui uno stesso studio fosse stato pubblicato simultaneamente in entrambe le forme, veniva data priorità alla tesi per evitare la duplicazione dei dati. I criteri di esclusione riguardavano gli studi il cui testo completo non fosse accessibile, quelli che non soddisfacevano i requisiti di inclusione, nonché gli atti di conferenze, congressi o simposi, la cui inclusione era problematica a causa delle difficoltà nel reperimento delle pubblicazioni integrali. Il processo di selezione ha condotto all'inclusione finale di 52 lavori pubblicati tra il 2000 e il 2015, distribuiti tra 32 paper in rivista scientifica, 13 tesi di master e 7 tesi di dottorato, selezionati.

L'analisi ha rivelato una predominanza di disegni sperimentali e studi di caso condotti prevalentemente con insegnanti in formazione, utilizzando principalmente questionari e interviste semi-strutturate. La storia della matematica emerge come strumento funzionale (*History-as-a-tool*) piuttosto che come obiettivo in sé (*History-as-a-goal*), impiegata principalmente per indagare gli effetti sul rendimento, sugli atteggiamenti e sulle credenze epistemologiche. Tuttavia, i

risultati sull'efficacia si rivelano profondamente eterogenei: mentre alcuni studi documentano incrementi nel rendimento matematico e nello sviluppo di atteggiamenti positivi, con studenti che riconoscono la matematica come prodotto culturale e umano, altri non riscontrano effetti notevoli o addirittura evidenziano percezioni negative, specialmente quando il contenuto storico appare sconnesso dalla matematica contemporanea.

La meta-sintesi ha inoltre identificato lacune marcate nella preparazione degli insegnanti, che manifestano rendimenti inadeguati nei test di conoscenza della storia della matematica, con una correlazione tra livello di conoscenza storica e orientamento filosofico (semi-sperimentalista vs assolutista). Gli ostacoli principali all'implementazione includono l'inadeguatezza delle competenze docenti, la carenza di risorse e tempo, nonché la percezione della storia della matematica come elemento non correlato alle valutazioni standardizzate. Importanti differenze emergono tra il contesto turco, caratterizzato dall'uso prevalente di "frammenti storici minori" (biografie, sistemi numerici antichi) e dall'assenza di problemi storici, e quello internazionale, che presenta una maggiore diversificazione metodologica con frequente ricorso a problemi storici, fonti primarie e pacchetti didattici strutturati, suggerendo approcci più sofisticati all'integrazione della prospettiva storica nell'insegnamento matematico.

4.1.2 Il disegno dello studio

Il presente studio rappresenta il primo tentativo di applicare sistematicamente le linee guida PRISMA (Preferred Reporting Items for Systematic Reviews and Meta-Analyses) nella versione aggiornata al 2020 (Page et al., 2021) alla letteratura empirica sull'integrazione della storia della matematica nei contesti educativi. Questa scelta metodologica risponde alla necessità, emersa dall'analisi degli studi precedenti, di adottare approcci standardizzati e trasparenti per l'identificazione, la valutazione e la sintesi della letteratura. Altro bisogno che emerge dal confronto con i due studi citati è la necessità di considerare gli studi successivi al biennio 2014-2015. Inoltre, considerando il ruolo programmatico delle Indicazioni Nazionali, in particolare dei Licei, attualmente in vigore nel contesto istituzionale della scuola italiana, e quindi lo stato attuale della ricerca nel campo della *History and Pedagogy of Mathematics*, si è cercato di dare risposta alla domanda guida della ricerca: *“Può un curriculum orientato alla storia della matematica avere ricadute positive sui risultati d'apprendimento degli studenti?”*. Al fine di dare risposta a questa domanda, si è scesi ulteriormente nei seguenti particolari:

RQ1) Quali caratteristiche metodologiche ha la ricerca empirica su HoM con i docenti e con gli studenti?

RQ2) Quali benefici si riscontrano nell'integrazione della HoM sui docenti e sugli studenti?

RQ3) Esiste un modello didattico che trasversalmente emerge dalla ricerca scientifica?

La ricerca è stata condotta su tre database elettronici specializzati nel campo della ricerca didattica e della matematica in particolare, ovvero: ERIC (Education Resources Information Center), EBSCO, zbMATH e, nella speranza di convogliare studi di carattere psicologico, anche APA. La scelta di questi database è stata motivata dalla loro copertura complementare della letteratura educativa e matematica. Nel corso della ricerca il database APA, tuttavia, è stato poi escluso in quanto i risultati dei criteri di selezione applicati non hanno prodotto alcun risultato degno di nota: nel processo di reporting, pertanto, questo database non è stato più citato.

In tutti i database è stata utilizzata una stessa stringa di ricerca, di volta in volta adattata alle specificità di ciascun database, utilizzando la seguente struttura:

Tabella 1: Parole chiave della stringa di ricerca adoperata

Termini riferiti alla storia della matematica		Termini riferiti ai contesti educativi	
<i>"history of mathematics"</i>	AND	<i>"education" OR "teaching" OR "didactics"</i>	

La stringa *"history of mathematics" AND ("education" OR "teaching" OR "didactics")* non è stata accompagnata da filtri relativi alla lingua di pubblicazione o alla tipologia di documento al fine di massimizzare la sensibilità della ricerca.

La ricerca è stata eseguita a cavallo tra il 2024 e il 2025. In un primo momento sono stati inclusi tutti gli studi a partire dal 1970, con successiva applicazione di criteri temporali più restrittivi nelle fasi di screening. Per la gestione bibliografica degli articoli è stato utilizzato il software Zotero.

4.1.3 Criteri di eleggibilità e di esclusione

Sulla base dei quesiti di ricerca, sono stati stabiliti criteri di inclusione specifici per garantire la pertinenza degli studi selezionati (Tabella 2). Al fine di inclusione, gli articoli dovevano soddisfare tutti i criteri predeterminati.

Tabella 2: Criteri di eleggibilità e criteri di esclusione

Criterio di eleggibilità	Criterio di esclusione
1 <i>Disegno di ricerca prettamente empirico</i> : che sia quantitativo, qualitativo o utilizzasse metodi misti;	Contributi esclusivamente teorici, concettuali e review di letteratura; Proposte epistemologiche di lezioni con integrazione di storia della matematica prive di disegno di ricerca empirico; Ricerche e analisi condotte sui libri di testo privi di una componente empirica esplicitamente riferita ai docenti o agli studenti;
2 <i>Focus sui contesti educativi</i> , includendo formazione iniziale degli insegnanti, sviluppo professionale dei docenti in servizio, e implementazioni didattiche con studenti di ogni ordine e grado;	<i>Focus non educativi</i> ;
3 Pubblicati dal 2014 al 2024	Studi pubblicati antecedenti al 2014
4 Esplicita presenza di riferimenti alla storia della matematica (History of Mathematics) nel titolo o nell'abstract	Assenza di riferimenti alla History of Mathematics nell'educazione scolastica o universitaria;
5 Piena accessibilità del testo	Pubblicazioni non altrimenti accessibili;

6	Qualità metodologica adeguata;	Studi con qualità metodologica insufficiente;
----------	--------------------------------	---

Si è ritenuto che tali criteri consentissero di selezionare tutta la letteratura scientifica internazionale in merito agli effetti della storia della matematica sull'educazione matematica stessa consentendo di rispondere al quesito di cui sopra. Studi di calibro prettamente teorico, concettuale, review sistematiche di letteratura nazionale, proposte di lezioni non testate con metodi scientifici, ricerche condotte su libri di testo o ricerche non accessibili (in quanto a pagamento) sono stati esclusi dalla ricerca.

4.1.4 Il processo di raccolta e selezione degli studi

Aderendo alle linee guida PRISMA per lo svolgimento delle sintesi di ricerca, il processo di selezione è stato articolato in più fasi sequenziali che ne consentono la riproducibilità (cfr.: tabella 3).

Tabella 3: fasi di selezione dei paper

Fase 1	Identificazione dei record
Fase 2	Rimozione dei duplicati con Zotero
Fase 3	Screening preliminare basato su data di pubblicazione, titolo e keyword
Fase 4	Reperibilità e screening tematico
Fase 5	Valutazione del testo completo sulla base dei criteri di eleggibilità
Fase 6	Applicazione del criterio temporale finale

La prima fase è stata di identificazione dei record presenti nei database selezionati: ERIC (2882), EBSCO (784) e zbMATH (1478), per un totale di 5145 record. Tutti i record sono stati così caricati sul software di gestione bibliografica

Zotero. Successivamente, quale seconda fase, sono stati identificati e rimossi i paper duplicati sfruttando la funzione automatica del software: 437 record sono stati eliminati, portando a 4708 record.

Si è proceduto, così, con la terza fase, consistente in un primo screening preliminare basato su criteri di selezione specifici, quali la data di pubblicazione (articoli anteriori al 1970, ovvero 142 record) e lettura del titolo e keywords, sicché gli articoli che tematicamente non fossero riconducibili alla storia della matematica nell'educazione o nella didattica sono stati scartati (1765 record). In questa fase sono stati individuati e rimossi altri 32 duplicati sfuggiti alla funzione di rilevazione automatica. Tutti i duplicati non sono stati semplicemente rimossi, ma si è proceduto a segnarne la duplice provenienza (lo stesso paper, ad esempio, presente su EBSCO ed ERIC).

Nella quarta fase si è verificata la reperibilità di tutti i paper utilizzando i canali bibliotecari dell'Università di Palermo, consentendo così l'accesso a piattaforme come JSTOR, Elsevier, Springer ecc. Pertanto, 126 articoli sono stati esclusi per irreperibilità. La lettura dell'abstract congiunta con parte dell'articolo è stata una procedura applicata a tutti gli articoli fin qui esaminati, quindi è stato possibile, congiuntamente, effettuare un vero e proprio screening tematico, escludendo 1937 articoli che, pur presentando nel titolo o tra le keywords riferimenti alla storia della matematica, trattavano argomenti che esulavano dagli obiettivi della ricerca.

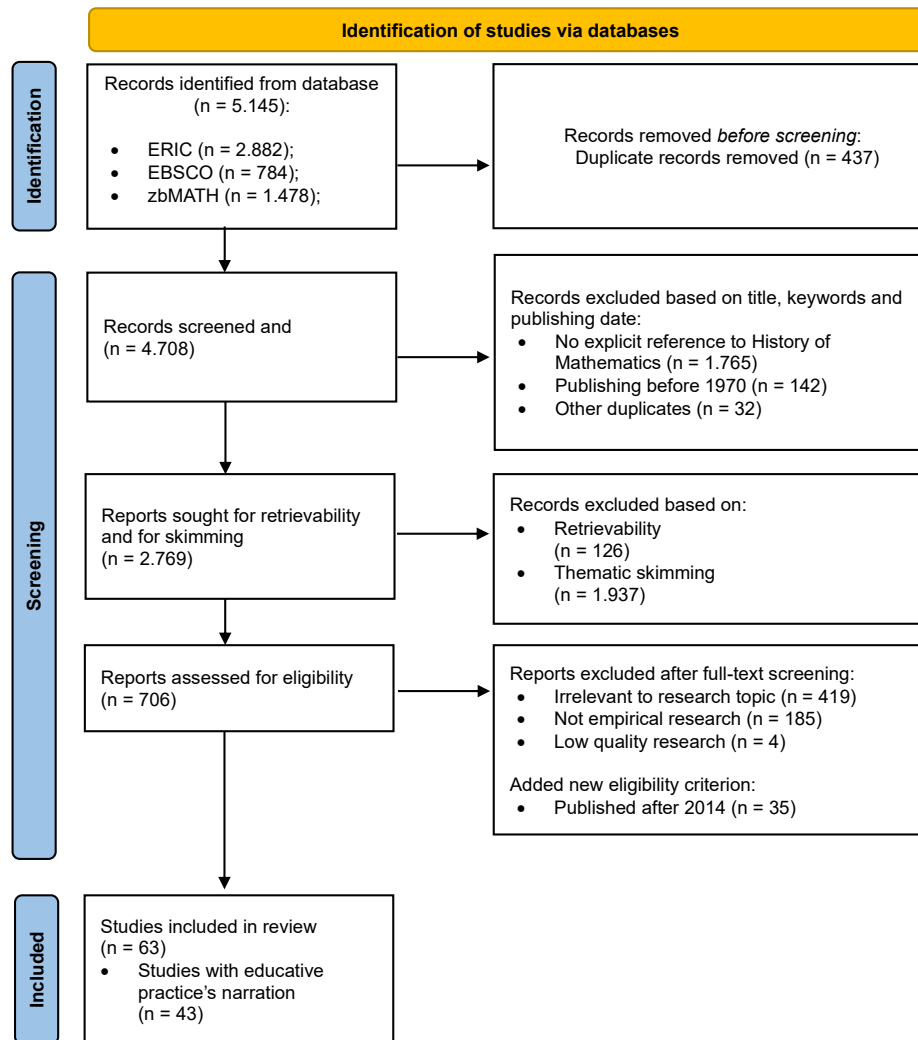
Un processo, questo, che di fatto ha anticipato la successiva quinta fase, in cui, a seguito di una lettura attenta dell'intero paper, ai 706 rimasti sono stati applicati per intero i criteri di eleggibilità precedentemente determinati: altri 419 paper sono stati giudicati irrilevanti per gli scopi della ricerca¹⁴, 185 paper, invece, sono stati esclusi poiché non costituivano studi empirici¹⁵ (qualitativi, quantitativi o misti). In questa fase, inoltre è stato applicato il *Mixed Methods Appraisal Tool* (Hong et al., 2018) al fine di valutare la qualità metodologica dei paper secondo le modalità descritte nel successivo paragrafo. Solo 4 articoli sono stati esclusi sulla base di questo criterio.

¹⁴ Tali articoli sono stati esclusi poiché il focus non era prettamente educativo, bensì epistemologico, legato, ad esempio, alla storiografia o alla storia dell'educazione matematica, oppure alla storia dell'educazione sulla storia della matematica; riflessioni legate quindi alle politiche educative di paesi esteri, come gli USA.

¹⁵ Tra questi, 5 erano analisi dei libri di testo scolastici utilizzati in contesti nazionali esteri (Francia); 4 erano review sistematiche centrate sulla letteratura nazionale (Portoghese, Brasiliana o Turca).

Infine, nell'ultima fase, al fine di circoscrivere temporalmente la ricerca, è stato applicato un ulteriore criterio temporale definitivo, volto ad allineare la ricerca con i bisogni della letteratura scientifica internazionale, includendovi esclusivamente studi pubblicati tra il 2014 e il 2024. Sicché altri 35 paper sono stati esclusi, giungendo a un totale di 63 paper inclusi nella review. Quest'ultimo criterio consente di collocare lo studio in continuità con le review di Bütüner (2015a) e Baki e Bütüner (2018), raccogliendo di fatto paper non processati da altre sintesi o metanalisi. L'intero workflow è sintetizzato secondo il seguente diagramma di flusso PRISMA (cfr.: Figura 4).

Figura 4: Diagramma del flusso di lavoro seguito per la ricerca sistematica



4.1.2.1 La valutazione della qualità metodologica dei paper

Al fine di valutare la qualità metodologica degli articoli selezionati, nonché per ridurre il rischio di bias, le linee guida PRISMA suggeriscono di applicare delle scale volte a valutare la qualità metodologica dei paper, nonché per ridurre al contempo il rischio di bias nel processo di selezione (Page, et al., 2021). Esistono certamente strumenti sofisticati che consentono di valutare nel dettaglio la qualità degli studi qualitativi, come la *Qualitative Studies Checklist* del *Critical Appraisal Skill Program* (CASP), o quantitativi, come il *Medical Education Research Study Quality Instrument* (MERSQI) di Reed, Cook e colleghi (Reed et al., 2007; Cook

& Reed, 2015). Si tratta di strumenti, tuttavia, molto specifici e perciò poco flessibili a una valutazione congiunta di studi eterogenei appartenenti a tradizioni di ricerca diverse (qualitativi, quantitativi e misti). Nella selezione di uno strumento che consentisse di far fronte all'eterogeneità degli studi rintracciati, la scelta è ricaduta sul *Mixed Methods Appraisal Tool* (MMAT) di Hong e colleghi (2018), uno strumento originariamente elaborato nel 2006 proprio nel contesto di revisione della letteratura scientifica secondo criteri di valutazione della qualità. Nel corso del suo sviluppo è stato sottoposto a due studi di affidabilità (Pace et al., 2012; Souto et al., 2015; Hong et al., 2018). Tale strumento è stato preso in considerazione in modo preponderante rispetto ad altri strumenti, giudicandone positivamente la flessibilità anche alla luce dell'eterogeneità delle ricerche incluse nello studio. In una prima fase si è cercato di rispondere alle due domande di screening, ovvero:

S1. Le domande di ricerca sono chiare?

S2. I dati raccolti consentono di rispondere alle domande di ricerca?

Nonostante non presentassero domande di ricerca esplicite, alcuni studi sono stati comunque inclusi in quanto le domande erano desumibili e derivabili dagli scopi stessi della ricerca. Soddisfatto questo criterio si è proceduto con l'inclusione dello studio nel database interno Zotero. Durante la fase di lettura integrale del paper, è stata applicata invece la lista di 5 item corrispondenti al disegno di ricerca utilizzato nello studio analizzato: *qualitativo, quantitativo randomizzato con gruppo di controllo, quantitativo non randomizzato, quantitativo descrittivo e metodi misti*. A ciascuna risposta è stato dato un valore (Sì = 1 e No = 0), pertanto è stato possibile attribuire un punteggio da 0 a 5 a ciascuna dimensione dello studio, calcolandone la media qualora fossero presenti aspetti di ricerca qualitativa, quantitativa e quindi mista. Studi che non hanno soddisfatto le domande di screening o con qualità dal valore inferiore a 3 sono stati giudicati non idonei e quindi esclusi dalla review. Come precedentemente indicato, soltanto quattro studi non hanno soddisfatto questi requisiti.

4.1.5 Raccolta ed estrazione dati

Seguendo le indicazioni di Higgins e colleghi (2019), per il processo di estrazione dei dati da ciascun articolo è necessario seguire una procedura standard. I dati sono costituiti da informazioni esplicitamente presenti o derivati dallo studio e includono dettagli su metodi, partecipanti, setting, contesto, tipologia di interventi, outcome, risultati, pubblicazioni e ricercatori. È stato quindi necessario

articolare ciascuno di questi fattori seguendo specifici criteri concernenti popolazione, intervento, elemento di comparazione e outcome. Rispetto alle indicazioni di Higgins e colleghi, tuttavia, questi criteri sono stati definiti in modo generale, seguendo lo schema seguente (tabella 4).

Tabella 4: Criteri PICO

Popolazione	• <i>Docenti di ogni ordine e grado scolastico;</i> • <i>Studenti di ogni ordine e grado scolastico e universitari;</i>
Intervento	• <i>Attività didattica basata sulla storia della matematica;</i>
Comparazione	• <i>Effetti degli interventi basati sulla HoM sulla popolazione;</i>
Outcome	• <i>Cambiamenti nelle Immagini e percezioni della matematica;</i> • <i>Miglioramento delle prestazioni scolastiche;</i> • <i>Dimensioni a carattere psicologico (autoefficacia, motivazione, cognizione);</i> • <i>Incremento (osservato o percepito) delle competenze professionali dei docenti;</i>

La ragione sottostante all'adozione di tali criteri è dettata dal fatto che, a differenza di contesti di ricerca di ambito bio-medico, ingegneristico o psicologico, la ricerca educativa è generalmente molto più frammentata, specialmente se riferita al ruolo della HoM nell'Insegnamento, dove si articolano una varietà di paradigmi e stili di ricerca capaci di produrre risultati diversi e contrastanti tra loro. Criteri di selezione rigidi sono in genere identificati per lo svolgimento di metanalisi di tipo quantitativo, dove i dati rilevati devono possedere un certo grado di omogeneità in termini di popolazione, intervento e outcome misurato (pur nella trasversalità di strumenti utilizzati nelle misurazioni) così da rendere necessaria una chiara definizione di criteri PICO. Si tratta di approcci di sintesi che coinvolgono prevalentemente review di ricerca condotte in ambito biomedico, centrate, ad esempio, sugli effetti di un farmaco o uno stesso specifico intervento medico: una stessa sostanza (o interventi standardizzati) che può produrre effetti diversi (Outcome) su fasce diverse di popolazione, sicché è possibile isolare certe variabili

per procedere a delle comparazioni su dimensioni specifiche. Poiché l'obiettivo di tale review insiste su approcci di tipo descrittivi, esplorativi e di sintesi, come dichiarato a monte nel paragrafo 1.2, l'identificazione di criteri rigidi avrebbe compromesso la qualità stessa della review; pertanto, i criteri non potevano che essere ampi considerando che l'obiettivo della ricerca è comprendere gli effetti delle attività didattiche basate sulla HoM su docenti e studenti.

Proprio a tale scopo, in conformità con le linee guida di Higgins e colleghi (2019), è stato creato un modulo elettronico per la raccolta dati strutturato sulla base degli obiettivi e dei criteri formulati per la ricerca. Tale modulo è stato costruito attraverso l'applicazione Moduli di Google, di modo tale da poter generare velocemente un database in formato foglio di calcolo .xlsx così da consentire l'analisi e la sintesi dei dati attraverso Excel e la codifica analitica attraverso l'uso del software MAXQDA, una delle piattaforme CAQDAS (Computer-Assisted Qualitative Data Analysis Software) più complete per l'analisi qualitativa dei dati. La scheda è strutturata come riportato nella tabella 5 che segue:

Tabella 5: scheda di estrazione dati

Sezione	Contenuto
Informazioni bibliografiche	• Riferimento bibliografico completo • Riferimento bibliografico sintetico • Fonte database interno: <i>ERIC</i>; <i>ERIC + EBSCO</i>; <i>zbMATH</i> • Anno di pubblicazione • Giornale • Paese • Grado di istruzione coinvolto: <i>Scuola primaria</i>; <i>Scuola secondaria di I grado</i>; <i>Scuola secondaria di II grado</i>; <i>Università e centri di formazione superiore</i>; <i>Altro</i>;
Domande di screening	<i>S1. Le domande di ricerca sono chiare?</i> <i>S2. I dati raccolti consentono di rispondere alle domande di ricerca?</i>
Disegno di ricerca	• Scopo della ricerca • Domande o ipotesi di ricerca • Approccio o metodo utilizzato • Framework teorico di riferimento

	• Strumenti utilizzati: <i>Interviste; Osservazioni; Questionari; Test standardizzati; Analisi documentale; Altro;</i> • Note
Caratteristiche del campione	• Tipologia di partecipanti: <i>Studenti di scuola; Studenti universitari; Formazione docenti; Docenti;</i> • Grandezza del campione • Caratteristiche • Gruppo di controllo: <i>Sì/No</i> • Caratteristiche del gruppo di controllo
Scheda studio QNT	• La ricerca prevede dati quantitativi? <i>Sì/No</i> • Variabili principali • Statistiche utilizzate (descrittive e inferenziali) • Design sperimentale: <i>Gruppo di confronto; Ripetizione; Randomizzazione; Altro;</i>
Qualità Metodologica QNT	5 item per tipologia di studio: • Studio clinico randomizzato • Studio non randomizzato • Studio quantitativo descrittivo
Scheda QLT	• La ricerca prevede dati qualitativi? <i>Sì/No</i> • Temi emergenti • Riflessioni degli autori
Qualità Metodologica QLT	5 item
Qualità Metodologica MXD	5 item
Scheda sintesi dei risultati conseguiti	• Risultati chiave • Limitazioni dichiarate
Scheda di analisi della sperimentazione didattica	• Lo studio tratta di una pratica didattica? <i>Sì/No</i> • Finalità educativa • Obiettivi didattici • Temi matematici trattati • Temi di storia della matematica trattati • Timing: (in ore) • Numero di fasi di lavoro

-
- Setting di apprendimento: *Classe; Online; Laboratorio; Altro;*
 - Lavoro di gruppo: *Sì/No/ND*
 - Dimensione gruppi: *Piccolo gruppo/Grande gruppo/Altro: (n)*
 - Risorse e materiali didattici utilizzati:
 - Risorse, fonti e materiali storici utilizzati:
 - Formazione e ruolo del docente: *Nessuna formazione iniziale prevista; breve formazione iniziale; Coaching e/o affiancamento durante l'intervento; Intervento implementato dal ricercatore;*
 - Note
-

La scheda alterna domande a risposta aperta a domande strutturate a risposta chiusa, di modo tale da facilitare il processo di raccolta dati riducendo al minimo la possibilità di errore umano. Inoltre, la sezione di analisi della pratica didattica è ispirata alla checklist TIDieR (Template for Intervention Description and Replication) di Hoffmann e colleghi (2018), uno strumento di 12 item nato con l'obiettivo di migliorare la completezza e la trasparenza del reporting degli interventi di tipo sanitario (includendovi aspetti quali la razionalità teorica, i materiali e le procedure utilizzate, le caratteristiche degli erogatori, le modalità e i contesti di implementazione, ecc.) che, pur originariamente elaborata per gli interventi in ambito sanitario, possiede una logica sottostante basata sulla chiarezza e la riproducibilità, consentendone in parte la trasferibilità nella ricerca educativa. In tal senso, le sezioni del TIDieR sono state operativizzate in modo diverso considerando la natura degli interventi e articolando con maggior dettaglio il *Perché*, il *Che cosa*, il *Quando e Quanto* (corrispondenti agli item 2, 3, 4, 6 e 8). Le specificità del *Come* sono state ricostruite attraverso il processo di codifica che ha interessato nel dettaglio gli studi con descrizioni (anche minime) di pratiche didattiche utilizzate nelle sperimentazioni.

4.1.6 Sintesi dei dati

I dati estratti attraverso il modulo elettronico sono stati analizzati utilizzando un approccio di metasintesi qualitativa (Sandelowski & Barroso, 2007), integrato con analisi descrittive quantitative per caratteristiche metodologiche e distribuzione degli studi. Considerata l'ampia eterogeneità che caratterizza gli studi individuati dal punto di vista metodologico (qualitativi, quantitativi, misti), non è stato

possibile prevedere una metanalisi quantitativa per gruppi ristretti di studi: gli studi appartenenti alla tradizione quantitativa inclusi nella review divergono tra loro per scopi, variabili, popolazione, metodi e interventi, rendendo tale strada impraticabile. Pertanto, la sintesi è stata condotta attraverso un approccio narrativo-tematico secondo le linee guida proposte da Popay e colleghi (Popay, et al., 2006), un approccio in linea con gli obiettivi della ricerca. L'approccio alla metasintesi non ha seguito uno stampo di tipo interpretativo, volta perciò a costruire nuovi costrutti teorici attraverso una lettura trasformativa dei dati primari, presentandosi, pertanto, come studio descrittivo ed esplorativo (Sandelowski & Barroso, 2007) finalizzato a mappare sistematicamente e sintetizzare descrittivamente i benefici e le pratiche didattiche emergenti dalla letteratura empirica sulla storia della matematica: i temi identificati rappresentano così delle configurazioni ricorrenti e pattern sistematici emersi dall'analisi delle co-occorrenze tra codici, e non delle nuove teorie né nuovi modelli didattici. In tal senso, l'intento è stato duplice: da un lato, fornire una panoramica sistematica delle caratteristiche degli studi inclusi; dall'altro, identificare pattern trasversali negli outcome dell'integrazione della storia della matematica. I risultati rappresentano una mappatura *evidence-based* della knowledge base nel campo HPM, offrendo un framework preliminare che organizza la conoscenza esistente e genera ipotesi empiricamente fondate per future ricerche.

Questo specifico posizionamento epistemologico orienta le scelte del processo analitico, articolato in diverse fasi sequenziali: analisi descrittiva delle caratteristiche metodologiche e delle finalità degli studi (sulla base dei dati raccolti sul file Excel), la codifica sistematica degli outcome e l'analisi tematica per l'identificazione di pattern interpretativi trasversali, svolte attraverso l'ausilio del già citato software CAQDAS, ovvero MAXQDA. La sezione si conclude con considerazioni sull'affidabilità e il rigore metodologico adottato.

4.1.6.1 Processo di analisi descrittiva

I dati bibliografici, metodologici e contestuali estratti dal modulo elettronico (paese di conduzione della ricerca, anno di pubblicazione, target formativo e disegno di ricerca) sono stati analizzati attraverso statistiche descrittive utilizzando Microsoft Excel 365. Per ciascuna variabile sono state calcolate frequenze assolute e percentuali, al fine di caratterizzare la knowledge base empirica in termini di distribuzione temporale, geografica, metodologica e contestuale degli studi condotti nella decade 2014-2024, consentendo di colmare una lacuna nella letteratura scientifica odierna. Inoltre, al fine di una più efficace visualizzazione e

interpretazione dei dati sono state generate delle tabelle pivot volte a incrociare i dati degli studi inclusi nella revisione, offrendo così una panoramica d'insieme dell'ecologia di tutta quella ricerca accademica che si è concentrata nell'ultima decade di ricerca nel campo dell'implementazione dell'HoM nel campo della didattica.

4.1.6.2 Lo sviluppo del sistema di codifica

Come precedentemente accennato, la codifica dei dati è stata condotta con l'ausilio del software MAXQDA 2022, che ha consentito di gestire il corpus di dati testuali raccolti articolando un processo sistematico e rigoroso, facilitando l'identificazione di pattern attraverso strumenti di interrogazione e visualizzazione delle co-occorrenze (funzione di *Esplorazione delle relazioni fra i codici* e funzione *MAXMaps* del software), consentendo di rintracciare rapporti di significatività trasversale tra le ricerche. Lo sviluppo del sistema di codifica ha seguito un approccio misto deduttivo-induttivo (Fereday & Muir-Cochrane, 2006; Braun & Clarke, 2006): i codici emergenti dalla letteratura scientifica esaminata sono stati integrati in macro-categorizzazioni il più possibile teoricamente fondate. Questo approccio ibrido è riconosciuto nella letteratura metodologica come particolarmente appropriato per metasintesi qualitative, poiché è in grado di bilanciare rigore teorico e sensibilità ai dati empirici (Sandelowski & Barroso, 2007).

Procedendo dal generale al particolare, sono stati articolati due livelli progressivi di categorizzazione. Il primo livello consiste in una distinzione di target: sono stati separati gli studi aventi per partecipanti gli studenti da quelli aventi per partecipanti i docenti. Questa distinzione riflette una biforcazione del sistema di codifica e quindi di analisi tematica, ed è stata adottata per due ragioni fondamentali. Dal punto di vista teorico, la letteratura sulla HPM evidenzia che l'integrazione della storia persegue finalità diverse a seconda del target: nel caso degli studenti, la storia è tipicamente utilizzata per migliorare apprendimento, motivazione e comprensione della natura della matematica (*history as tool*) o più raramente come specifico obiettivo pedagogico (*history as a goal*) (Jankvist, 2009); nel caso dei docenti in formazione (o in rari casi in servizio), invece, l'obiettivo è strettamente correlato allo sviluppo di competenze professionali specifiche, come l'approfondimento di conoscenze disciplinari, lo sviluppo della *Pedagogical Content Knowledge* (Shulman, 1986, 1987) e consapevolezza epistemologica che informi le scelte didattiche, ovvero tutte quelle sfumature di conoscenze riconducibili ai costrutti della *Mathematical Knowledge for Teaching* (Ball,

Thames & Phelps, 2008). Dal conseguente punto di vista empirico, infatti, l'analisi preliminare del corpus di studi ha rivelato che finalità, metodi, e outcome differiscono sostanzialmente tra i due target: mentre gli studi con studenti tendono a misurare outcome di apprendimento (cognitivi, affettivi, attitudinali), quelli con docenti si focalizzano su sviluppo delle competenze professionali riconducibili all'insegnamento (conoscenze per l'insegnamento, credenze pedagogiche, intenzioni di integrazione della storia della matematica).

All'interno dei due gruppi di studi, il secondo livello di analisi ha riguardato l'identificazione delle categorie descrittive del processo formativo (in termini di metodologia, attività svolte e approcci alla HoM) e di outcome che ne deriva, consentendo così di strutturare i possibili effetti dovuti all'integrazione della storia della matematica. All'approccio induttivo si è affiancato costantemente un approccio deduttivo, volto a rintracciare (e in alcuni casi anche semplicemente richiamare, in quanto già parte del bagaglio culturale di chi effettua l'analisi) framework teorici consolidati nella letteratura educativa della matematica (Fereday & Muir-Cochrane, 2006; Braun & Clarke, 2006).

Va precisato che non tutti gli studi raccolti e inclusi nella review presentavano una qualche descrizione di attività didattiche: per tale ragione, a partire dalla domanda di screening presente nella scheda elettronica, si è proceduto a selezionare gli studi che presentassero una qualche descrizione dell'attività didattica sperimentata. Va precisato che, per il cluster degli studenti, l'analisi approfondita delle pratiche didattiche è stata limitata agli studi condotti in contesti geografico-culturali comparabili (Europa, area mediterranea e Nord America, per un totale di 14 studi), al fine di ridurre l'eterogeneità legata a sistemi educativi e tradizioni didattiche profondamente diverse. Gli studi condotti in altri contesti (come Ghana, Sudafrica, Vietnam, Brasile, Singapore) sono stati inclusi nell'analisi degli outcome ma non nella codifica dettagliata delle attività didattiche. Per il cluster dei docenti, data la natura più universale della formazione iniziale e l'obiettivo comune di sviluppo professionale, non è stata applicata questa restrizione geografica.

Il *codebook* completo risultante da questo processo di analisi, con le definizioni specifiche di ciascun codice, è disponibile in Appendice D. Di seguito si presenta in forma narrativa il sistema di codifica per ciascun segmento di popolazione degli studi: studenti e docenti.

4.1.6.3 Il sistema dei codici: studi con studenti

Per gli studi con target studenti, i macro-codici identificati nell'area della pratica didattica sono:

1. *Ruolo della HoM*: l'obiettivo cui tendeva, in modo più o meno esplicito, l'attività didattica utilizzata in sede di sperimentazione o narrazione. In questa sede si è deciso di utilizzare la classificazione di Jankvist (2009) tra (a) *History-as-a-goal* e (b) *History-as-a-tool*: tale distinzione è stata assai menzionata in letteratura e si è configurata come quella più calzante per distinguere anche il grado di profondità con cui la Storia è stata trattata nelle attività.
2. *Attività proposte*: in questa sezione si è prediletto un approccio prevalentemente induttivo bottom-up, limitandosi a individuare la tipologia di lavoro compiuto dagli studenti, quali materiali sono stati adoperati, setting organizzativi privilegiati, ecc. Sono stati perciò individuati numerosi sottocodici: (a) Attività esplorativo-manipolative; (b) Algoritmi risolutivi provenienti dalla storia; (c) Lavoro di gruppo; (d) Discussione di gruppo o in plenaria; (e) Uso delle TIC (in particolare, l'uso di GeoGebra); (f) Uso di problemi storici; (g) Esercizi standard, spesso decontestualizzati; (h) Uso di attività strutturate basate sulla HoM (in particolare attraverso Worksheet specificamente costruite dai ricercatori); (i) Menzioni ad attività ludiche (spesso superficialmente raccontate senza scendere nei dettagli); (j) Attività di scoperta guidata dal docente; (k) Uso di lezioni tradizionali dirette di tipo introduttivo; (l) Lettura delle fonti, spesso in forma estratto antologico; (m) Uso dello storytelling e della narrazione; (n) Attività di confronto tra la matematica antica e quella moderna. Come specificato nel paragrafo 1.6.5, alcuni di questi codici sono stati esclusi poiché menzionati o usati soltanto meno di 2 volte.
3. *Metodologia emergente*: differentemente a quanto accaduto per i paper relativi alla formazione dei docenti, considerando l'alto livello di sperimentaltà e l'eterogeneità degli obiettivi di ricerca, non è facile individuare delle metodologie didattiche "esplicite": spesso la struttura della ricerca ricalca metodologie didattiche di tipo *task-based*. Sulla base delle attività svolte con gli studenti è stato possibile dedurre effettivamente un solo codice relativo a questa dimensione: l'uso dell'attività laboratoriale.

Mentre i macro-codici individuati per l'area degli outcome sono:

1. *Dimensioni cognitive*: Processi mentali, abilità intellettuali e competenze di pensiero matematico. Questa categoria è strutturata sulla base del framework delle competenze matematiche di Niss e Højgaard (2011, 2019), che identifica otto competenze fondamentali, tra cui il pensiero matematico, il ragionamento, il problem-solving, e la modellazione. Gli outcome codificati in questa

categoria includono sviluppo di strategie cognitive, abilità di ragionamento, capacità di problem-solving, calcolo mentale, e deduzione logica. Si distingue dal codice “Conoscenze e competenze disciplinari” per il focus sui processi cognitivi e di pensiero.

2. *Dimensioni psicologiche dell'apprendimento*: dimensioni emotive, motivazionali e di autopercezione che influenzano l'esperienza di apprendimento della matematica. Questa categoria si basa sul framework di DeBellis e Goldin (2006) sul dominio affettivo dell'istruzione matematica, il quale fornisce una struttura tetradica comprendente emozioni, atteggiamenti, credenze e valori. Gli outcome codificati includono: (a) Ansia da matematica (Zan & Martino, 2007; Zakaria & Nordin, 2008); (b) Clima di classe e piacevolezza dell'esperienza didattica; e (c) Interesse e motivazione verso la matematica, la sua storia e cultura.
3. *Visione epistemologica*: Comprensione della natura della matematica come forma di conoscenza, inclusa la sua genesi storica, fallibilità, dimensione culturale, ed evoluzione concettuale. Questa categoria si basa sulla teoria delle *epistemological beliefs* (Schommer, 1990; Hofer & Pintrich, 1997) e sulla filosofia della matematica (Ernest, 1991).
4. *Risultati scolastici*: Performance misurata attraverso strumenti di valutazione formale (test, voti, prove standardizzate). Categoria mantenuta separata dalle dimensioni cognitive per permettere l'identificazione di eventuali *misalignment* tra sviluppo di competenze cognitive e performance in contesti valutativi standardizzati.
5. *Conoscenze e competenze disciplinari*: Padronanza di contenuti matematici specifici e capacità di applicarli, includendo comprensione concettuale profonda, conoscenza procedurale, e connessioni tra concetti. Si tratta di una dimensione strettamente correlata agli obiettivi dei curricula scolastici, alle conoscenze trasmesse e al grado di profondità di comprensione. Non si è proceduta per una codifica analitica delle conoscenze prese in esame (a causa dell'eccessiva eterogeneità).
6. *Atteggiamenti, credenze ed opinioni*: Posizioni valutative e percezioni soggettive, raccolti spesso con specifici *feedback form*, riguardo alla matematica, alla sua storia, all'apprendimento matematico, e alle attività didattiche basate sulla storia, spesso mutate a seguito dell'attività didattica sperimentata dai ricercatori. È infatti ampiamente riconosciuto che qualcosa riconducibile agli “atteggiamenti”, riconducibili alle dimensioni di *risposta emotiva, credenze e comportamenti* riferiti a un oggetto specifico, giochi un

ruolo cruciale nei processi di apprendimento della matematica (Neale, 1969; Hart, 1989; Zan & Martino, 2007; Belbase, 2013).

4.1.6.4 Il sistema dei codici: gli studi con i docenti

Per gli studi con target docenti, i macro-codici identificati per l'area della pratica didattica sono:

1. *Ruolo della HoM*: ossia la centralità che la storia della matematica assume nell'intervento in qualità di strumento (as-a-tool) oppure in qualità di obiettivo a sé stante (as-a-goal). L'ispirazione a Jankvist (2009) è più che evidente nella strutturazione dei sottocodici: (a) HoM come obiettivo; (b) HoM come strumento cognitivo; (c) HoM come strumento motivazionale. Tuttavia, la specificità della formazione dei docenti ha portato all'emersione di un'altra sfumatura della HoM, più specifica e strettamente correlata allo sviluppo della professionalità e delle conoscenze in ambito didattico e pedagogico: (d) HoM come strumento di sviluppo professionale del docente. Si tratta di un uso specifico della storia della matematica finalizzata all'arricchimento delle conoscenze pedagogiche dei docenti, in sintonia con i costrutti teorici della *Pedagogical Content Knowledge* (Shulman, 1986, 1987) e della *Mathematical Knowledge for Teaching* (Ball, et al., 2008).
2. *Attività proposte* nella pratica didattica, come (a) uso delle TIC (in particolare Software di Geometria Dinamica, come GeoGebra); (b) Lezioni frontali (spesso a carattere introduttivo); (c) Lavoro di gruppo; (d) Lettura di testi o problemi matematici specificamente storici; (e) Discussione di gruppo; (f) Scrittura di elaborati, schede, progetti, o lesson plan; (g) Uso della scrittura riflessiva; (h) Analisi di materiale didattico fornito dal docente (piani didattici, curricula, libri di testo scolastici, paper e studi nell'ambito della HPM, ecc.);
3. *Metodologia didattica*: ovvero il quadro teorico soggiacente che articola principi, strategie e procedure utilizzate per pianificare e attuare efficacemente il processo d'insegnamento-apprendimento. Questa categoria, strettamente correlata e inevitabilmente in parte sovrapposta ad alcuni codici della precedente, ha portato all'individuazione dei seguenti codici: (a) Problem-based Learning; (b) Pratiche riflessive; (c) Collaborative learning; (d) Inquiry-Based Learning. Oltre a queste metodologie, non esplicitamente dichiarate ma emergenti dalle fasi di attuazione delle attività descritte, sono stati individuati altri due codici particolarmente interessanti per l'analisi circa le pratiche didattiche per la formazione docente: (e) Experiencial Learning e (f) Ciclicità delle attività, che dalla teoria conducevano alla formulazione di pratica didattica, commentata in sede formativa o implementata in classe o tirocinio.

Mentre per quelli relativi all'area degli outcome sono:

1. *Conoscenze e competenze disciplinari*: Padronanza dei contenuti matematici, inclusa la *Mathematical Knowledge for Teaching* (Ball et al., 2008), quali la conoscenza comune, specializzata e all'orizzonte matematico, con particolare attenzione alla comprensione della genesi storica dei concetti.
2. *Competenze pedagogiche e didattiche*: Conoscenze e abilità relative all'insegnamento della matematica, strutturate secondo il framework di *Pedagogical Content Knowledge* (Shulman, 1986, 1987; Ball et al., 2008). Include conoscenza delle difficoltà degli studenti, strategie didattiche, rappresentazioni efficaci, progettazione di attività, e capacità di integrare la storia della matematica nella pratica.
3. *Visione epistemologica*: Comprensione della natura della matematica come disciplina, del suo sviluppo storico, della sua dimensione culturale, e del ruolo della storia nell'educazione matematica. Diversamente dagli studenti, nei docenti questa dimensione si manifesta come consapevolezza meta-didattica che informa le scelte pedagogiche.
4. *Atteggiamenti, credenze e opinioni*: Posizioni valutative, credenze pedagogiche, e intenzioni rispetto all'uso della storia della matematica nell'insegnamento, alla matematica e al suo apprendimento, e ai percorsi formativi sulla storia della matematica. Anche qui, come nel caso degli studenti, si sono fatte due importanti distinzioni tra: (a) Atteggiamenti, credenze e opinioni sulla storia della matematica e la sua integrazione didattica; e (b) Atteggiamenti, credenze e opinioni sulla matematica, la sua storia e i suoi processi di apprendimento. Si tratta, nello specifico, di outcome diversi cui sono pervenuti i diversi contesti destinati alla formazione o all'aggiornamento dei docenti.
5. *Dimensioni psicologiche dell'apprendimento*: aspetti motivazionali e di autopercezione professionale, articolate in: (a) sviluppo del sé professionale (*agency*, autoregolazione, autoefficacia); (b) motivazione e interesse verso la storia della matematica e la sua integrazione didattica (Bandura, 1997; Priestley et al., 2015).

4.1.6.5 Alcune precisazioni sul processo di codifica

Nel corso del processo di codifica, ciascun studio è stato trattato come unità di analisi a sé stante: gli outcome sono stati codificati una sola volta per studio, indipendentemente dal numero di menzioni nel testo. Questa scelta metodologica risponde all'obiettivo della metasintesi di determinare quali outcome significativi sono presenti nel corpus di studi. Inoltre, piuttosto che quantificare la frequenza delle menzioni all'interno dei singoli articoli, è stato previsto di indicarne la direzione prevalente. Tuttavia, poiché gli studi con direzione negativa o irrisoria

erano esigui, si è deciso di trascurare questa modalità segnando esclusivamente gli outcome con direzionalità positiva. Questa modalità di lavoro ha permesso di individuare le co-occorrenze trasversali utili alla successiva analisi tematica.

Inoltre, poiché i codici sono stati inizialmente induttivamente ricavati dai dati e successivamente raggruppati a partire da framework teorici più ampi, non è stato necessario effettuare un processo di codifica pilota su un campione ristretto di studi. Tuttavia, il processo di codifica ha richiesto un andare e ritornare sugli studi via via codificati e analizzati per rivederne le categorie utilizzate, spesso attraverso una rilettura dettagliata dei paper esaminati, garantendo così esaustività e mutua esclusività, ovvero assenza di sovrapposizioni concettuali tra i sottocodici. Ad esempio, nel corso del processo di codifica è emersa la necessità di distinguere “Achievement” da “Conoscenze e competenze disciplinari” per gli studenti, così come tra quest’ultima e le “Dimensioni cognitive”: alcuni studi riportavano miglioramenti nella comprensione concettuale senza adoperare test di profitto standardizzati (come De Vittori, Louaked & Visentin, 2024; Sahin & Danaci, 2022; Karatas-Aydin & Isiksal-Bostan, 2022, Florio, 2022, ecc); altri invece distinguevano chiaramente tra i processi di pensiero e i risultati d’apprendimento (Matos & Kònya, 2021). La scelta di mantenere alcune categorie (ad esempio, visione epistemologica) comuni a entrambi i target, pur con operazionalizzazioni diverse, permette analisi comparative sulla presenza e direzione degli outcome epistemologici attraverso diverse popolazioni.

Inoltre, durante la codifica sono emersi alcuni codici con frequenza molto bassa ($n \leq 2$ studi). Per questi codici è stata adottata una strategia differenziata basata sulla rilevanza teorica:

- *Codici teoricamente significativi*, nonostante la bassa frequenza, sono stati mantenuti come categorie distinte per due ragioni: (a) documentare la presenza, seppur marginale, di outcome o attività rilevanti nella letteratura; (b) identificare divari che meritano attenzione in ricerche future. Ad esempio, il codice “Ansia” ($n=2$) è stato mantenuto separato poiché l’ansia è riconosciuta come barriera all’apprendimento matematico (Zan & Martino, 2007; Zakaria & Nordin, 2008), e la sua sottorappresentazione negli studi sulla HoM costituisce un’area critica di indagine futura.
- *Codici concettualmente affini* con basse frequenze individuali sono stati accorpati in macrocategorie più parsimoniose. Ad esempio, i codici “Agency” ($n=1$), “Autoregolazione” ($n=1$) e “Autoefficacia” ($n=1$), relativi ai docenti, sono stati unificati nella categoria “Sviluppo del sé professionale”,

riconoscendo che questi costrutti condividono un focus comune sulla percezione delle proprie capacità professionali e sulla disposizione ad agire nella prassi didattica (Priestley et al., 2015).

- *Codici menzionati soltanto una volta*, non concettualmente affini ad altri né teoricamente significativi nelle loro sottodimensioni, poiché non costituiscono elementi di trasversalità, sono stati esclusi dal processo di analisi tematica successiva. In particolare, i codici di questo tipo provenivano dal sistema d'analisi delle pratiche didattiche. Nel caso delle attività riguardanti gli studenti sono stati esclusi i codici *Dialogo e mediazione del docente*, *Scoperta guidata*, *Attività ludiche*, *Attività di confronto tra la matematica antica e quella moderna* e *Uso dello storytelling e narrazione* (rispettivamente $n \leq 2$); nel caso delle attività concernenti la formazione dei docenti, invece, sono stati esclusi *Uso delle TIC* e *Implementazione dell'attività progettata in aula*.

Questa strategia ha permesso di bilanciare granularità concettuale e parsimonia analitica, evitando sia la frammentazione eccessiva del sistema di codici sia la perdita di informazioni teoricamente rilevanti.

Infine, durante l'intero processo di codifica sono state redatte note per documentare riflessioni interpretative, ambiguità incontrate, decisioni relative a casi borderline e pattern emergenti. Questo ha consentito non soltanto di tracciare il processo decisionale, ma anche catturare l'insight che emergevano dalla lettura comparativa degli studi, informando successivamente l'analisi tematica.

4.1.7 L'analisi tematica

Completata la codifica sistematica, è stata condotta un'analisi tematica seguendo il framework di Braun e Clarke (2006) per identificare pattern interpretativi trasversali. L'obiettivo era superare la mera descrizione delle frequenze dei codici per sviluppare osservazioni interpretative che evidenziassero le convergenze e le relazioni tra le dimensioni codificate.

Pertanto, sono state create matrici di co-occorrenza tra codici utilizzando gli strumenti analitici di MAXQDA, per identificare quali codici si presentassero insieme negli stessi studi. Ad esempio, è stata esaminata la frequenza con cui il codice "Visione Epistemologica" co-occorreva specifiche attività o modelli didattici, rivelando pattern di associazione significativi. Parallelamente, sono state esportate matrici documento-codice in formato Excel per condurre analisi di *cross-tabulation*.

I pattern identificati sono stati approfonditi attraverso analisi qualitativa comparativa. Per ciascun pattern promettente, sono stati riletti sistematicamente i segmenti testuali codificati insieme a note analitiche redatte durante la codifica. Questo processo ha permesso di verificare se le associazioni numeriche corrispondessero a relazioni concettuali e di comprendere i meccanismi sottostanti. Ad esempio, la co-occorrenza frequente tra “Visione Epistemologica” e “Discussione di gruppo o in plenaria” negli studi con studenti ha portato a interrogare i paper con maggiore profondità per comprendere *come* gli autori descrivevano questa relazione: emergeva che il cambiamento nella percezione della matematica facilitava non soltanto l’engagement affettivo degli studenti, ma che questo era correlato ad effetti riconducibili allo spaesamento epistemologico di Barbin (1997).

I temi candidati, frutto delle co-occorrenze tra i vari codici, sono stati sottoposti a un processo di revisione iterativa volta a verificarne: la coerenza interna, sicché gli studi raggruppati condividessero effettivamente le caratteristiche che ne giustificano l’aggregazione; la distinzione esterna, distinguendo tra loro i temi emergenti, evitando forme di sovrapposizione (fase prevista che in realtà non ha riscontrato problematicità specifiche, poiché gli studi sono stati adeguatamente distinti in fase preliminare); ed evidenza empirica, verificando che ciascun tema fosse supportato da evidenze convergenti da vari studi e non da osservazioni isolate (questo aspetto è stato gestito considerando co-occorrenze che coincidessero con almeno la metà degli studi evidenziati).

4.1.7.1 Affidabilità e rigore

Al fine di garantire affidabilità e ridurre il rischio di bias nel processo analitico, sono state adottate diverse strategie metodologiche coerenti con la natura esplorativa-aggregativa della metasintesi. Queste strategie, già menzionate nei paragrafi precedenti, vengono qui ribadite nella loro logica metodologica. Tutte le decisioni metodologiche significative (criteri di inclusione/esclusione degli studi, sviluppo e raffinamento del sistema di codici, accorpamento di codici a bassa frequenza, identificazione dei temi) sono state documentate attraverso il codebook completo, le matrici di co-occorrenza generate da MAXQDA, la registrazione sistematica delle operazioni nel software di analisi e le tabelle di sintesi del processo decisionale presentate in questo capitolo.

L’utilizzo di software dedicati (Zotero per la gestione bibliografica, MAXQDA per la codifica qualitativa, Excel per le analisi descrittive) ha garantito la sistematicità del lavoro, riducendo anche la possibilità di errore. In particolare,

MAXQDA ha consentito la gestione strutturata dei dati testuali e la documentazione automatica di tutte le operazioni di codifica.

L'analisi tematica ha integrato molteplici fonti di evidenza: analisi quantitative di co-occorrenza (matrici MAXQDA), analisi qualitativa dei segmenti testuali codificati, confronto con framework teorici consolidati nella letteratura HPM e educativa (Jankvist, 2009; Ball et al., 2008; Shulman, 1986, 1987; Niss & Højgaard, 2011, 2019), e memo analitici riflessivi. Questa triangolazione metodologica rafforza la credibilità delle interpretazioni sviluppate, che si presentano ancorate ai testi originali analizzati. Ogni pattern identificato è supportato da evidenze convergenti provenienti da più studi, con citazioni rappresentative dai segmenti codificati. I temi identificati sono stati considerati sistematici quando supportati da almeno il 50% degli studi considerati nel cluster di riferimento degli studenti (con frequenza minima $F=2$ per la scuola primaria, $F=4$ per la secondaria di I grado ed $F=3$ per la secondaria di II grado) e 30% degli studi considerati nel cluster di riferimento dei docenti, garantendo che le sintesi riflettessero configurazioni ricorrenti empiricamente fondate. Tuttavia, va riconosciuto che la loro identificazione e denominazione riflette necessariamente le scelte interpretative del ricercatore, pur essendo sistematicamente ancorate ai dati testuali e ai framework teorici consolidati.

Va riconosciuto che l'assenza di una doppia codifica indipendente rappresenta una limitazione dello studio. Tuttavia, data la natura esplorativa-descrittiva della metasintesi e i vincoli di risorse, si è optato per strategie alternative di controllo della qualità (documentazione sistematica, triangolazione, ricontrollo campionario e discussione con supervisori). Questa strategia mantiene la coerenza con l'obiettivo dello studio: identificare pattern ricorrenti e configurazioni empiricamente fondate nella letteratura, piuttosto che sviluppare costrutti teorici complessi che richiederebbero interpretazioni di secondo ordine.

I temi presentati vanno così intesi come sintesi descrittive fondate su evidenze empiriche di pattern sistematici nella letteratura, che offrono un framework preliminare per l'organizzazione della conoscenza esistente e generano ipotesi per future ricerche empiriche. La loro validità risiede nella trasparenza del processo analitico, nel grounding sistematico nei dati primari, e nella convergenza con framework teorici consolidati, piuttosto che in procedure di validazione formale tipiche di studi qualitativi primari o metasintesi interpretative.

4.2 Risultati delle analisi e discussioni

4.2.1 Caratteristiche generali degli studi inclusi

La maggior parte dei contributi selezionati proviene dal database ERIC, da cui, sulla base dei criteri di eleggibilità, sono stati selezionati 26 studi, pari al 41,3% del totale. EBSCO ha fornito 21 studi, pari al 33,3%, rappresentando la seconda fonte più rilevante. Da zbMath sono stati selezionati alla fine soltanto due studi, di cui un paper costituiva la riproposizione di uno stesso studio pubblicato nello stesso anno in un'altra rivista (Jankvist, 2014a, 2014b): si è deciso di trattare entrambi i paper come una singola unità di analisi. Infine, una quota considerevole di articoli (15 studi, corrispondenti al 23,8%) è risultata indicizzata in entrambi i database EBSCO ed ERIC: questa sovrapposizione testimonia come alcune pubblicazioni rilevanti per il tema di ricerca siano presenti in più repository scientifici. Ne consegue un totale di 63 studi.

Gli studi inclusi nella revisione sistematica, visionabili nella tabella sinottica che segue (Tabella 6), presentano una notevole varietà di provenienze geografiche, disegni metodologici e tipologie di partecipanti coinvolti, nonché pratica didattica effettivamente narrata.

Tabella 6: Tabella sinottica degli studi inclusi esaminati

<i>Paper</i>	<i>Paese</i>	<i>Approccio di ricerca</i>	<i>Studio</i>				<i>Qualità studio</i>	<i>Tipologia di partecipanti</i>	<i>Campione N</i>
			<i>QNT</i>	<i>QLT</i>	<i>Pratica didattica</i>				
<i>De Vittori, Louaked, & Visentin, 2024</i>	Francia	Disegno quasi-sperimentale	✓		✓		4	Studenti di scuola	106
<i>Dilek & Fadime, 2024</i>	Turchia	Case-study singoli		✓	✓		5	Formazione docenti	24
<i>Panaoura, 2024</i>	Cipro	Studio quantitativo longitudinale	✓				4	Studenti universitari	48
<i>Papadopoulos, 2024</i>	Grecia	Case-study singoli		✓	✓		3	Formazione docenti	252
<i>Filiz & Gür, 2023</i>	Turchia	Fenomenologia	✓	✓	✓		5	Studenti di scuola	60

<i>Igün, Dastan, & Altintas, 2023</i>	Turchia	Metodi misti	✓	✓	✓	4,3	Studenti di scuola	30
<i>Rizos e Gkrekas, 2023</i>	Grecia	Case-study singoli		✓	✓	5	Studenti universitari	27
<i>Arthur, et al. 2022</i>	Ghana	Studio quantitativo descrittivo-correlazionale	✓			5	Studenti di scuola	394
<i>Demattè & Furinghetti, 2022</i>	Italia	Ricerca-azione		✓	✓	5	Studenti di scuola	22
<i>de Varent, & Décamp 2022</i>	Francia	Disegno quasi-sperimentale		✓		5	Studenti di scuola	32
<i>Florio, 2022</i>	Italia	Ricerca-azione		✓	✓	5	Studenti universitari	48
<i>Karatas-Aydin & Isiksal-Bostan, 2022</i>	Turchia	Studio qualitativo descrittivo		✓		5	Studenti di scuola	30
<i>Moyon, 2022</i>	Francia	Studio quantitativo trasversale	✓			3	Docenti	646
<i>Şahin & Danaci, 2022</i>	Turchia	Ricerca-azione	✓	✓	✓	4,6	Studenti di scuola	19
<i>De Vittori, 2021</i>	Francia	Disegno quasi-sperimentale	✓		✓	3	Studenti di scuola	29
<i>Gençkaya & Tan-Şişman, 2021</i>	Turchia	Fenomenologia		✓		5	Docenti	34
<i>Hidiroğlu, 2021</i>	Turchia	Studio qualitativo descrittivo		✓		5	Formazione docenti	16
<i>Lu, Leung & Li, 2021</i>	Cina	Case-study singolo		✓		5	Docenti	1
<i>Madrid, et al., 2021</i>	Spagna	Studio qualitativo descrittivo		✓	✓	5	Formazione docenti	158

<i>Martins, et al., 2021</i>	Portogallo	Metodi misti	✓	✓	✓	4,3	Formazione docenti	12
<i>Matos & Kónya, 2021</i>	Ungheria	Disegno quasi-sperimentale	✓			5	Studenti di scuola	44
<i>Meadows & Caniglia, 2021</i>	USA	Case-study singoli		✓		5	Formazione docenti	12
<i>Mersin & Durmus, 2021</i>	Turchia	Metodi misti	✓	✓		5	Formazione docenti	40
<i>Moustapha-Corrêa, et al., 2021</i>	Brasile	Studio design-based		✓	✓	5	Formazione docenti	12
<i>Sevinc & Ay, 2021</i>	Turchia	Case-study singoli		✓	✓	5	Studenti di scuola	29
<i>Bütüner, 2020</i>	Turchia	Case-study singoli		✓	✓	5	Formazione docenti	40
<i>Bütüner & Baki, 2020</i>	Turchia	Ricerca-azione	✓	✓	✓	5	Studenti di scuola	24
<i>Escalona Reyes, Peña Garzón, & Rojas Velázquez, 2020</i>	Colombia	Studio qualitativo descrittivo		✓		5	Studenti di scuola e Studenti universitari	385
<i>Esteve, 2020</i>	Spagna	Case-study singoli		✓	✓	3	Studenti universitari	ND ¹⁶
<i>Jankvist, Clark, & Mosvold, 2020</i>	Danimarca	Case-study singoli		✓	✓	5	Formazione docenti	3
<i>Kapofu, & Kapofu, 2020</i>	Sudafrica	Case-study singoli		✓		5	Studenti di scuola	30
<i>Kusumawati, et al., 2020</i>	Indonesia	Studio quantitativo trasversale	✓			3	Formazione docenti	305
<i>Pjanić, 2020</i>	Bosnia ed Erzegovina	Case-study singoli		✓	✓	5	Formazione docenti	5
<i>Başıbüyük & Şahin, 2019</i>	Turchia	Case-study singoli		✓		5	Docenti	21

¹⁶ ND: Non Dichiarato

<i>Maffia, 2019</i>	Italia	Case-study singoli	✓	✓		5	Studenti di scuola	23
<i>Tong, et al., 2019</i>	Vietnam	Case-study singoli	✓	✓		4,6	Studenti di scuola	44
<i>White, et al., 2019</i>	USA	Metodi misti	✓	✓	✓	4,6	Formazione docenti	60
<i>Baki & Gürsoy, 2018</i>	Turchia	Survey qualitativa		✓		5	Studenti universitari	6
<i>Bütüner, 2018</i>	Turchia	Metodi misti	✓	✓		5	Docenti	32
<i>Sampaio & Batista, 2018</i>	Brasile	Studio design-based	✓	✓		4,6	Studenti di scuola	23
<i>Zengin, 2018</i>	Turchia	Studio qualitativo descrittivo		✓	✓	5	Formazione docenti	23
<i>Abah, 2017</i>	Nigeria	Ricerca-azione		✓		5	Studenti universitari	78
<i>Dias, Araujo & Ota, 2017</i>	Brasile	Metodi misti	✓	✓	✓	5	Studenti di scuola	107
<i>Guillemette, 2017</i>	Canada	Fenomenologia		✓	✓	5	Formazione docenti	6
<i>Bütüner, 2016</i>	Turchia	Disegno quasi-sperimentale	✓	✓	✓	4,6	Studenti di scuola	27
<i>Ersoy & Öksüz, 2016</i>	Turchia	Disegno quasi-sperimentale	✓		✓	4	Studenti di scuola	26
<i>Youchu, 2016</i>	Cina	Case-study singoli		✓	✓	5	Formazione docenti	10
<i>Biber, İspir & Ay, 2015</i>	Turchia	Metodi misti	✓	✓	✓	4,3	Formazione docenti	22
<i>Bütüner, 2015b</i>	Turchia	Ricerca-azione		✓	✓	5	Studenti di scuola	24
<i>Gilmullin, 2015</i>	Russia	Disegno sperimentale	✓		✓	4	Formazione docenti	24
<i>Lim & Chapman, 2015</i>	Singapore	Disegno quasi-sperimentale	✓	✓		4,6	Studenti di scuola	51
<i>Alpaslan, Işıksal, & Haser, 2014</i>	Turchia	Studio quantitativo trasversale	✓			4	Studenti universitari	1593

Bishop, et al., 2014	USA	Studio qualitativo descrittivo	✓			5	Studenti di scuola	48
Despeaux, 2014	USA	Case-study singoli	✓	✓		3	Formazione docenti	ND
Fenaroli, Furinghetti & Somaglia, 2014	Italia	Case-study singoli	✓	✓		5	Formazione docenti	20
Galante, 2014	USA	Case-study multipli	✓			5	Formazione docenti	9
Goodwin, et al., 2014	USA	Studio quantitativo descrittivo-correlazionale	✓			4	Docenti	4663
Jankvist, 2014a e 2014b	Danimarca	Case-study singoli	✓	✓		5	Studenti di scuola	27
Loats, White, & Rubino, 2014	USA	Case-study singoli	✓	✓		5	Formazione docenti	3
Panagiotou, 2014	Grecia	Case-study singoli	✓	✓		5	Studenti di scuola	18
Povey, 2014	Regno Unito	Fenomenologia	✓			5	Formazione docenti	4
Villota, 2014	Colombia	Case-study multipli	✓			5	Docenti	10
Weldeana & Abraham, 2014	Etiopia	Disegno quasi-sperimentale	✓	✓	✓	4,6	Formazione docenti	63

In termini di contributi bibliografici, quasi tutti i contributi provengono da articoli in rivista scientifica, fatta eccezione per un solo contributo di Sevinc & Ay (2021), proveniente dal proceeding del Gruppo internazionale per la psicologia dell'educazione matematica. La tabella che segue (Tabella 7) elenca le riviste da cui provengono gli studi. Qui preme sottolineare le riviste da cui sono state selezionate la maggior parte degli articoli esaminati: l'*International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, da cui sono stati selezionati 5 studi (Bütüner, 2016; Zengin, 2018; White, et al., 2019; Maffia, 2019; Şahin & Danaci, 2022); *Science & Education*, da cui ne sono stati estratti 4 (Povey, 2014;

Panagiotou, 2014; Fenaroli, Furinghetti & Somaglia, 2014; Alpaslan, Işıksal, & Haser, 2014); *Universal Journal of Educational Research* e *ZDM–Mathematics Education*, da cui sono stati selezionati 3 articoli ciascuno (Bütüner, 2015b; Tong, et al., 2019; Kusumawati, et al., 2020; . Moyon, 2022; Demattè & Furinghetti, 2022; De Varent, & Décamp 2022).

Tabella 7: Frequenze e percentuali di tipologia di pubblicazione

<i>Tipo di pubblicazione</i>	<i>Conteggio</i>	<i>%</i>
<i>Capitolo</i>	1	1,59%
<i>Rivista</i>	63	98,41%
<i>Acta Didactica Napocensia</i>	2	3,17%
<i>Annales Mathematicae et Informaticae</i>	1	1,59%
<i>Atti della 13th International Conference Mobile Learning</i>	1	1,59%
<i>Education Sciences</i>	1	1,59%
<i>Educational Policy Analysis and Strategic Research</i>	1	1,59%
<i>Educational Studies in Mathematics</i>	3	4,76%
<i>Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education</i>	1	1,59%
<i>EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education</i>	2	3,17%
<i>European Journal of Science and Mathematics Education</i>	1	1,59%
<i>For the Learning of Mathematics</i>	1	1,59%
<i>İlköğretim Online</i>	2	3,17%
<i>Innovations in Teaching</i>	1	1,59%
<i>Inovacije u nastavi</i>	1	1,59%
<i>International Education Studies</i>	1	1,59%
<i>International Electronic Journal of Mathematics Education</i>	2	3,17%
<i>International Journal of Curriculum and Instruction</i>	1	1,59%
<i>International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology (IJEMST)</i>	2	3,17%
<i>International Journal of Mathematical Education in Science and Technology</i>	5	7,94%
<i>International Journal of Science and Mathematics Education</i>	1	1,59%

<i>Journal for Research in Mathematics Education</i>	1	1,59%
<i>Journal of Education and Training Studies</i>	1	1,59%
<i>Journal of Mathematics Teacher Education</i>	2	3,17%
<i>Journal of Pedagogical Research</i>	2	3,17%
<i>Mathematics</i>	2	3,17%
<i>Millenium</i>	1	1,59%
<i>Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science and Mathematics Education</i>	1	1,59%
<i>Philosophy of Mathematics Education Journal</i>	1	1,59%
<i>PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies</i>	2	3,17%
<i>Psycho-Educational Research Reviews</i>	1	1,59%
<i>REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education</i>	2	3,17%
<i>Revista Brasileira de História da Matemática</i>	1	1,59%
<i>Revista Didasc@lia: Didáctica y Educación</i>	1	1,59%
<i>SAGE Open</i>	1	1,59%
<i>Science & Education</i>	4	6,35%
<i>The Journal of Mathematical Behavior</i>	2	3,17%
<i>Universal Journal of Educational Research</i>	3	4,76%
<i>Waikato Journal of Education</i>	1	1,59%
<i>ZDM–Mathematics Education</i>	3	4,76%

La tabella 8 e il grafico 1 mostrano la distribuzione dei paper dal punto di vista geografico: emerge una forte rappresentanza della Turchia, che con 20 studi totali costituisce il contesto nazionale più indagato. Seguono la Francia e gli Stati Uniti con diversi contributi ciascuno, mentre Italia, Grecia e Brasile offrono un apporto significativo con 3-4 studi per paese. La rassegna include anche ricerche provenienti da contesti geografici meno rappresentati nella letteratura internazionale, come Cipro, Ghana, Nigeria, Etiopia, Sudafrica, Indonesia, Vietnam, Cina, Ungheria, Bosnia-Erzegovina e Russia, garantendo così una prospettiva internazionale ampia e diversificata. Danimarca, USA e Francia, da cui generalmente provengono la maggior parte dei contributi accademici nell'ambito della HPM, costituiscono insieme 13 paper, ovvero il 20,6% dei contributi esaminati. Pur escludendo la Turchia dal conteggio (31,7%), la maggior parte dei contributi proviene dall'area Europea (33,3%).

Tabella 8: distribuzione contributo scientifico per area geografica

<i>Paese</i>	<i>Conteggio</i>	<i>%</i>
<i>Europa</i>	41	65,0%
<i>Turchia</i>	20	31,7%
<i>Bosnia ed Erzegovina</i>	1	1,6%
<i>Cipro</i>	1	1,6%
<i>Danimarca</i>	2	3,2%
<i>Francia</i>	4	6,3%
<i>Grecia</i>	3	4,8%
<i>Italia</i>	4	6,3%
<i>Portogallo</i>	1	1,6%
<i>Regno Unito</i>	1	1,6%
<i>Russia</i>	1	1,6%
<i>Spagna</i>	2	3,2%
<i>Ungheria</i>	1	1,6%
<i>America Nord</i>	8	12,7%
<i>Canada</i>	1	1,6%
<i>USA</i>	7	11,1%
<i>America Sud</i>	5	8,0%
<i>Brasile</i>	3	4,8%
<i>Colombia</i>	2	3,2%
<i>Asia</i>	5	8,0%
<i>Cina</i>	2	3,2%
<i>Indonesia</i>	1	1,6%
<i>Singapore</i>	1	1,6%
<i>Vietnam</i>	1	1,6%
<i>Africa</i>	4	6,4%
<i>Etiopia</i>	1	1,6%
<i>Ghana</i>	1	1,6%
<i>Nigeria</i>	1	1,6%
<i>Sudafrica</i>	1	1,6%
<i>Totale complessivo</i>	63	100%

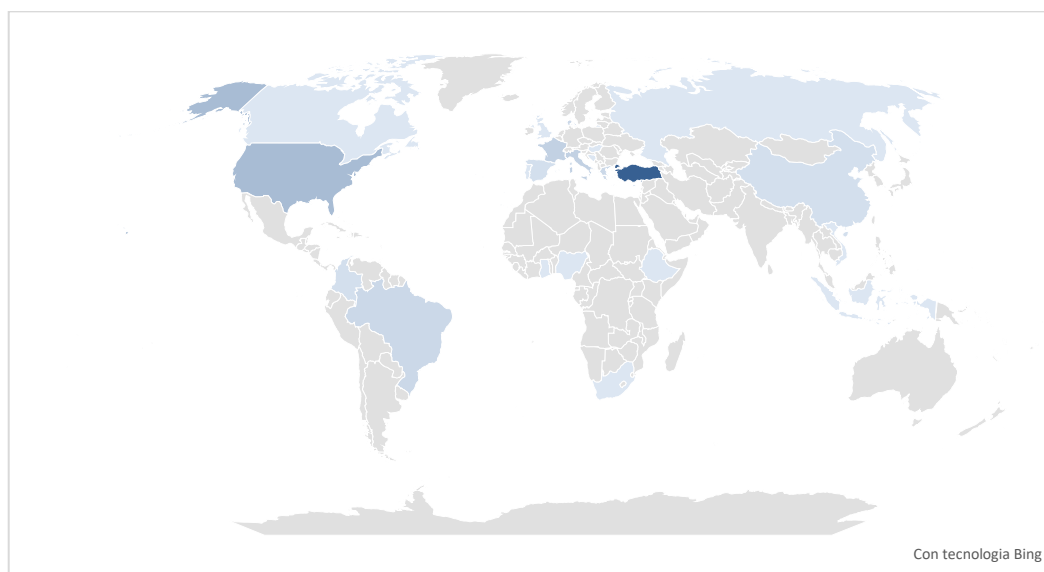


Grafico 1: Mappa della distribuzione geografica dei paper selezionati.

Per quanto riguarda i disegni di ricerca, sintetizzati nella tabella che segue (tabella 9) prevale l'approccio qualitativo: 37 studi (corrispondenti al 58,7%) presentano un disegno di ricerca qualitativo mentre 11 (pari al 17,5%) adottano un disegno di ricerca appartenente alla tradizione quantitativa. Tuttavia, va segnalato che ben 15 studi (il 23,8%) raccolgono dati sia di tipo qualitativo che quantitativo. Tra gli studi di tipo quantitativo, gli studi di Goodwin e colleghi (2014), diretto ai docenti di matematica americani, e di Alpaslan e colleghi (Alpaslan, Işıksal, & Haser, 2014), che coinvolge studenti universitari, presentano i campioni più grandi, rispettivamente $C = 4663$ e $C = 1593$. Gli altri, invece spaziano tra le 24 e le 646 unità, con una media di 180 partecipanti. I campioni descritti negli studi qualitativi presentano numeri contenuti, con una media di 20 partecipanti; fatta eccezione per gli studi di Papadopoulos (2024) e Madrid e colleghi (2021) che, nel contesto della formazione docenti, coinvolgono rispettivamente 252 e 158 partecipanti; nonché Abah (2017) che nel contesto universitario nigeriano coinvolge nella sua ricerca 78 studenti.

I case-study rappresentano il metodo più frequentemente adottato (20 studi, equivalenti al 31,7%), seguiti dai disegni quasi-sperimentali (8, ovvero il 12,7%), da approcci di ricerca misti (7 studi, pari a 11,1%) e dalla ricerca-azione (6 studi, 9,5%). Sono inoltre presenti studi con approcci fenomenologici (4 studi, quindi 6,3%), studi design-based (disegni di ricerca su progetto e disegni basati sull'ingegneria didattica, pari a 2 studi totali) e studi descrittivi sia quantitativi che qualitativi.

Sebbene i metodi dichiaratamente misti siano soltanto 7, è interessante notare come numerosi altri studi appartenenti a tradizioni di ricerca specifiche cerchino di offrire visioni più complete integrando strumenti di raccolta dati tipici della tradizione opposta. Gli studi con disegni quasi-sperimentali, ad esempio, pur mantenendo un impianto prevalentemente quantitativo, incorporano spesso elementi qualitativi per arricchire l'interpretazione dei risultati. Weldeana e Abraham (2014) hanno integrato la scrittura riflessiva basata su nove attività di problem-solving tratte dalla storia della matematica, mentre Lim e Chapman (2015) hanno affiancato osservazioni e note di campo alla componente sperimentale. Similmente, Bütüner (2016) ha utilizzato un modulo di raccolta opinioni che prevedeva la raccolta di dati non strutturati, permettendo di catturare percezioni e riflessioni dei partecipanti. Anche studi a impianto qualitativo hanno mostrato l'esigenza di triangolare i dati attraverso elementi quantitativi. Filiz e Gür (2023), pur adottando un approccio fenomenologico, hanno utilizzato i risultati scolastici degli studenti come termine di paragone. Tong et al. (2019), in un case-study singolo, si sono avvalsi delle percentuali di successo scolastico per valutare l'efficacia dell'intervento didattico implementato. Sampaio e Batista (2018), in uno studio design-based, hanno triangolato interviste, osservazioni di campo e analisi documentale per garantire maggiore robustezza ai risultati. Particolarmente interessanti risultano gli studi di ricerca-azione, che per loro natura tendono a integrare strumenti diversificati. Şahin e Danacı (2022) hanno combinato interviste, questionari, test standardizzati e analisi documentale, mentre Bütüner e Baki (2020) hanno utilizzato interviste, questionari, analisi documentale e moduli di opinione scritta, quest'ultimi classificati per visione epistemologica in modo da consentirne una quantificazione sistematica.

Tabella 9: Frequenze e percentuali degli approcci di ricerca e metodologia adottati

Approccio di ricerca	Conteggio	%
<i>Qualitativi</i>	<i>37</i>	<i>58,7%</i>
<i>Quantitativi</i>	<i>11</i>	<i>17,5%</i>
<i>Metodi misti</i>	<i>15</i>	<i>23,8%</i>
Metodologia		
<i>Case-study multipli</i>	2	3,2%
<i>Case-study singoli</i>	20	31,7%
<i>Disegno quasi-sperimentale</i>	8	12,7%
<i>Disegno sperimentale</i>	1	1,6%
<i>Fenomenologia</i>	4	6,3%

<i>Metodi misti</i>	7	11,1%
<i>Ricerca-azione</i>	6	9,5%
<i>Studio design-based</i>	2	3,2%
<i>Studio qualitativo descrittivo</i>	6	9,5%
<i>Studio quantitativo descrittivo-correlazionale</i>	2	3,2%
<i>Studio quantitativo longitudinale</i>	1	1,6%
<i>Studio quantitativo trasversale</i>	3	4,8%
<i>Survey qualitativa</i>	1	1,6%
<i>Totale complessivo</i>	63	100%

La qualità metodologica è stata valutata mediante il MMAT secondo le procedure descritte nel paragrafo 1.4.1; per i dettagli analitici si rimanda all'Appendice B. In generale, la qualità degli studi risulta complessivamente elevata: la maggioranza assoluta ottiene una valutazione più che accettabile, pari a 4 o 5, mentre gli studi che presentano disegni misti si attestano su valutazioni con decimali (4,3 - 4,6) comunque ottimali. Solo pochi studi presentano una valutazione sufficiente (3), rientrando comunque a pieno nei criteri di eleggibilità della revisione.

Per quanto concerne i partecipanti coinvolti negli studi esaminati, come mostrato dal grafico 2, gli articoli si distribuiscono in modo perfettamente bilanciato tra i due target di riferimento: studenti (31 studi, equivalenti al 49,21%) e docenti (31 studi, corrispondenti al 49,21%). Tra gli studi concernenti gli studenti, la scuola secondaria di II grado rappresenta il contesto più indagato, con 10 studi (15,87%), di cui 8 narrano o descrivono l'attività didattica sperimentata: 3 in contesti europei, 5 in altri; segue la scuola secondaria di primo grado, con un totale di 7 studi (11,11%), 6 condotti in Turchia e 1 in Francia¹⁷, che nel complesso descrivono la sperimentazione dell'attività didattica, e dalla scuola primaria con soli 6 studi (9,52%), di cui soltanto 4 con descrizione dell'attività didattica sperimentata. Complessivamente, dunque, gli studenti di scuola (dai 6 ai 19 anni circa) sono coinvolti in 23 ricerche, equivalenti al 36,51% del totale, di cui 14 (22,22%) condotti nel contesto geografico-culturale europeo o nord-americano. Nel corpus con target docenti, invece, la pratica didattica sperimentata è narrata in 18 studi (ovvero il 28,6% del totale).

¹⁷ Una concentrazione geografica che, come discusso nel paragrafo 2.5.2, rappresenta una limitazione della sintesi

A questi si aggiungono gli studenti universitari (Bachelor e Master) con 7 studi (11,1%), che esplorano come la dimensione storica possa arricchire la formazione accademica in matematica. Il fatto che la maggior parte degli studi sia concentrata nella scuola secondaria di II grado suggerisce come questo livello sia ritenuto particolarmente adatto per approfondimenti storico-epistemologici più sofisticati.

Per quanto riguarda i docenti, emerge una netta prevalenza della formazione iniziale degli insegnanti (pre-service teachers), oggetto di 24 studi (38% del totale), rispetto ai docenti già in servizio, indagati in 7 ricerche (10,8%). Questo dato suggerisce un particolare interesse della comunità scientifica nell'integrare la storia della matematica fin dai percorsi formativi universitari, preparando i futuri insegnanti a utilizzare questa risorsa didattica.

Un singolo studio, quello di Escalona Reyes et al. (2020), adotta un approccio trasversale coinvolgendo simultaneamente studenti di scuola, studenti universitari e docenti, offrendo così una prospettiva comparativa sulle diverse modalità di interazione con la storia della matematica nei vari livelli del sistema educativo.

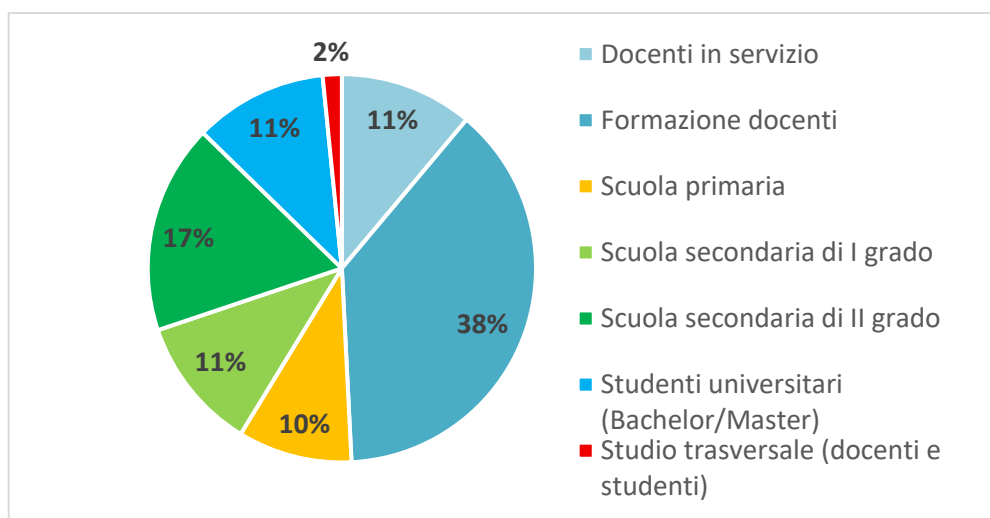


Grafico 2: Percentuale di pubblicazioni per tipologia di popolazione coinvolta

La distribuzione temporale degli studi inclusi nella revisione, come più volte ribadito, copre il periodo 2014-2024, con una produttività variabile che, come mostrato dalla tabella 10, mostra due momenti di particolare concentrazione: il 2014 e il biennio 2021-2022.

Il 2014 rappresenta l'anno con il maggior numero di pubblicazioni (12 studi, corrispondenti al 19,0% del totale). Il periodo a cavallo tra il 2015 e il 2020 mostra una produzione più contenuta e stabile, con una media di 4-5 studi per anno. Il biennio 2021-2022 costituisce il periodo di maggiore produttività scientifica con 18 studi complessivi (27,7% del totale): il 2021 presenta una concentrazione di 11 studi (16,9%), di cui 8 focalizzati su docenti e formazione docenti, mentre il 2022 conta 7 studi con prevalenza di ricerche su studenti (6 studi). Gli anni 2023-2024 mostrano un calo nella produzione (7 studi complessivi, 10,8%).

Tabella 10: Pubblicazioni distribuite per annualità

<i>Anno e Grado d'istruzione coinvolto</i>	<i>Conteggio</i>	<i>%</i>
2014	12	19,0%
<i>Docenti</i>	7	11,1%
<i>Studenti</i>	5	7,9%
<i>Scuola primaria</i>	1	1,6%
<i>Scuola secondaria di II grado</i>	2	3,2%
<i>Università e centri di formazione superiore</i>	2	3,2%
2015	4	6,3%
<i>Docenti</i>	1	1,6%
<i>Studenti</i>	3	4,8%
<i>Scuola secondaria di I grado</i>	1	1,6%
<i>Scuola secondaria di II grado</i>	1	1,6%
<i>Università e centri di formazione superiore</i>	1	1,6%
2016	3	4,8%
<i>Docenti</i>	1	1,6%
<i>Studenti</i>	2	3,2%
<i>Scuola primaria</i>	1	1,6%
<i>Scuola secondaria di I grado</i>	1	1,6%
2017	3	4,8%
<i>Docenti</i>	1	1,6%
<i>Studenti</i>	2	3,2%
<i>Scuola secondaria di II grado</i>	1	1,6%
<i>Università e centri di formazione superiore</i>	1	1,6%
2018	4	6,3%
<i>Docenti</i>	2	3,2%
<i>Studenti</i>	2	3,2%
<i>Scuola secondaria di II grado</i>	1	1,6%

<i>Università e centri di formazione superiore</i>	1	1,6%
2019	4	6,3%
<i>Docenti</i>	2	3,2%
<i>Studenti</i>	2	3,2%
<i>Scuola primaria</i>	1	1,6%
<i>Scuola secondaria di II grado</i>	1	1,6%
2020	8	12,7%
<i>Docenti</i>	4	6,3%
<i>Studenti</i>	4	6,3%
<i>Scuola secondaria di I grado</i>	1	1,6%
<i>Scuola secondaria di I grado, II grado e Centri di formazione superiore</i>	1	1,6%
<i>Scuola secondaria di II grado</i>	1	1,6%
<i>Università e centri di formazione superiore</i>	1	1,6%
2021	11	17,5%
<i>Docenti</i>	8	12,7%
<i>Studenti</i>	3	4,8%
<i>Scuola primaria</i>	1	1,6%
<i>Scuola secondaria di I grado</i>	1	1,6%
<i>Scuola secondaria di II grado</i>	1	1,6%
2022	7	11,1%
<i>Docenti</i>	1	1,6%
<i>Studenti</i>	6	9,5%
<i>Scuola primaria</i>	1	1,6%
<i>Scuola secondaria di I grado</i>	1	1,6%
<i>Scuola secondaria di II grado</i>	3	4,8%
<i>Università e centri di formazione superiore</i>	1	1,6%
2023	3	4,8%
<i>Studenti</i>	3	4,8%
<i>Scuola primaria</i>	1	1,6%
<i>Scuola secondaria di I grado</i>	1	1,6%
<i>Università e centri di formazione superiore</i>	1	1,6%
2024	4	6,3%
<i>Docenti</i>	1	1,6%
<i>Studenti</i>	3	4,8%
<i>Scuola secondaria di I grado</i>	1	1,6%
<i>Università e centri di formazione superiore</i>	2	3,2%
Totale complessivo	63	100,0%

4.2.2 Framework teorici

Dopo aver delineato le caratteristiche generali degli studi inclusi nella revisione, è necessario esaminare i fondamenti teorici che guidano la ricerca sull'integrazione della HoM. L'analisi sistematica dei framework teorici emersi dalla letteratura esaminata ha rivelato più di 25 riferimenti teorici citati e presi come punti di ancoraggio per operativizzare le ricerche o per spiegare i meccanismi descritti nei processi di apprendimento. Per ragioni meramente espositive, tali costrutti sono stati organizzati in 5 gruppi, consentendo una più agevole visione d'insieme nella tabella 11. È bene precisare che i vari paper spesso citano framework multipli, mentre pochi altri non ne citano nessuno di specifico, conducendo ricerche a carattere esplorativo. Inoltre, molti framework provengono già dall'ambito della didattica della matematica e sono già stati esposti nei capitoli precedenti. Per tale ragione, ci si è limitati a poche e semplici righe di presentazione.

In generale, questa categorizzazione evidenzia come la ricerca sull'integrazione della HoM nella didattica della matematica si configuri come un campo intrinsecamente interdisciplinare, dove ciascun framework teorico contribuisce a illuminare aspetti specifici di un fenomeno educativo complesso e multidimensionale.

Tabella 11: Tabella riassuntiva dei framework teorici citati

Framework Teorici citati in letteratura	N	%
Gruppo 1: Competenze e Alfabetizzazione Matematica	6	9,5%
<i>Alfabetizzazione Matematica (PISA Framework)</i>	1	1,6%
<i>Competenze matematiche (Niss and Højgaard, 2011, 2019)</i>	1	1,6%
<i>Modellizzazione matematica (Blum & Leiß, 2007)</i>	1	1,6%
<i>Models-and-Modeling Perspective (Lesh et al., 2000; Doerr & Lesh, 2003; Lesh & Zawojewski, 2007)</i>	1	1,6%
<i>Calcolo mentale (Heirdsfield & Cooper, 2002)</i>	1	1,6%
<i>Problem solving (Schoenfeld, 1985)</i>	1	1,6%
Gruppo 2: Fondamenti Epistemologici e Modelli HPM	52	82,5%
<i>Tradizione di ricerca dell'HPM</i>	46	73,0%
<i>Conoscenza Storica (Collingwood & Collingwood, 1994)</i>	1	1,6%
<i>Ermeneutica e spaesamento epistemologico (Gadamer, 2006; Barbin, 1997, 2006)</i>	2	3,2%

<i>Modello di apprendimento HTTM (History/Theory/Technology/Modeling) (Hidiroğlu & Özkan Hidiroğlu, 2016)</i>	1	1,6%
<i>Modello 4S (Agterberg et al., 2022)</i>	1	1,6%
<i>Valori Cognitivi della Scienza (Lacey, 1998)</i>	1	1,6%
Gruppo 3: Domini Affettivi	2	3,2%
<i>Dominio affettivo dell'istruzione matematica (DeBellis & Goldin, 2006)</i>	2	3,2%
Gruppo 4: Teorie dell'Apprendimento e Processi Cognitivi	10	15,9%
<i>Teoria Socio-Culturale (Vygotsky, 1991; Radford, 1997)</i>	2	3,2%
<i>Ostacolo Epistemologico (Brousseau, 1997)</i>	1	1,6%
<i>Commognizione (Sfard, 2008)</i>	1	1,6%
<i>Teoria della Mediazione Semiotica (Radford, 2003a, 2003b; Bartolini Bussi & Mariotti, 2008)</i>	1	1,6%
<i>Modello di argomentazione di Toulmin (2003)</i>	1	1,6%
<i>Teoria Cognitiva (Piaget, 1973, 1981, Bruner, 1977)</i>	2	3,2%
<i>Teoria dell'apprendimento attivo (Jardine, 1997; Huntley & Flores, 2011)</i>	1	1,59%
<i>Teoria dell'Apprendimento Esperienziale (Kolb, Boyatzis, & Mainemelis, 2000)</i>	1	1,59%
Gruppo 5: Conoscenze Professionali e Credenze dei Docenti	11	17,5%
<i>Autoregolazione nell'insegnamento-apprendimento (Zimmermann, 2002)</i>	1	1,6%
<i>MKT (Ball et al., 2008) o MKTT (Zopf, 2010)</i>	4	6,3%
<i>SMK e PCK (Shulman, 1986, 1987)</i>	2	3,2%
<i>Teacher agency (Priestley, Biesta, & Robinson, 2015)</i>	1	1,6%
<i>Teacher's Mathematic and Methodological Culture (Zhokhov, 2007)</i>	1	1,6%
<i>Teoria delle credenze dei docenti (Ernest, 1989, 1991, 2014; Thompson, 1991; Handal, 2003)</i>	2	3,2%

Gruppo 1: Competenze e Alfabetizzazione Matematica – Questo gruppo comprende i framework che definiscono le competenze matematiche target dell'educazione matematica contemporanea, fornendo gli obiettivi di apprendimento che possono essere supportati attraverso l'integrazione della HoM. L'alfabetizzazione matematica del framework PISA definisce la capacità di formulare, impiegare e interpretare la matematica in svariati contesti, enfatizzando

la comprensione del ruolo che la matematica gioca nel mondo. Le competenze matematiche di Niss e Højgaard (2011, 2019), come già detto nei capitoli precedenti, articolano otto competenze chiave, tra cui il pensiero matematico, la risoluzione di problemi, la modellizzazione, il ragionamento, la rappresentazione, l'uso di simboli e formalismi, la comunicazione e l'uso di strumenti, fornendo una tassonomia completa delle abilità matematiche. Altri costrutti teorici citati articolano nei dettagli proprio alcune di queste competenze, come il costrutto della modellizzazione matematica di Blum e Leiß (2007), che descrive il processo ciclico di traduzione tra mondo reale e matematico; o la Models-and-Modeling Perspective (Lesh et al., 2000; Doerr & Lesh, 2003) che estende questo concetto vedendo gli studenti come costruttori attivi di modelli matematici per interpretare situazioni complesse. Il problem solving di Schoenfeld (1985) identifica quattro dimensioni cruciali: risorse cognitive, euristiche, controllo metacognitivo e sistemi di credenze, tutti aspetti che possono essere arricchiti attraverso esempi storici. Il calcolo mentale (Heirdsfield & Cooper, 2002) si riferisce alle strategie flessibili di calcolo senza supporti esterni, un'abilità che può essere sviluppata studiando metodi di calcolo storici.

Gruppo 2: Fondamenti Epistemologici e Modelli HPM – La tradizione di ricerca HPM (History and Pedagogy of Mathematics) costituisce il nucleo centrale dell'intero corpus teorico. Questa tradizione, consolidatasi attraverso le conferenze ICME e la rivista Educational Studies in Mathematics, ha sviluppato propri paradigmi metodologici, distinguendo tra approcci genetici, storici-culturali ed evolutivi all'integrazione della storia. La dicotomia “history as a tool” versus “history as a goal” (Jankvist, 2009) rappresenta una delle concettualizzazioni centrali: la storia come mezzo per migliorare l'apprendimento matematico o come fine educativo in sé. Tale tradizione di ricerca ha prodotto diversi framework teorici specificatamente orientati alla concettualizzazione dell'integrazione storica nell'insegnamento matematico. Il Modello 4S (Agterberg et al., 2022) propone quattro livelli di integrazione della HoM basati sulla domanda cognitiva: Speck (aneddoti isolati), String (sequenze narrative), Story (narrazioni complete) e Stream (immersione storica profonda). Il modello HTTM (Hıdıroğlu & Özkan Hıdıroğlu, 2016) integra quattro dimensioni - History, Theory, Technology, e Modeling - per creare esperienze di apprendimento multidimensionali che collegano lo sviluppo storico dei concetti con la loro comprensione teorica e applicazione tecnologica moderna. Lo spaesamento epistemologico (Barbin, 2006) descrive il disorientamento produttivo che gli studenti sperimentano quando incontrano modi di pensare matematici storicamente diversi, un'esperienza che può promuovere la flessibilità cognitiva e l'empatia intellettuale. L'ermeneutica (Gadamer, 2006;

Barbin, 1997) fornisce il framework interpretativo per comprendere i testi matematici storici nel loro contesto, riconoscendo la distanza temporale e culturale come risorsa per l'interpretazione piuttosto che come ostacolo. La conoscenza storica (Collingwood & Collingwood, 1994) enfatizza la natura ricostruttiva e interpretativa della comprensione storica, mentre i valori cognitivi della scienza (Lacey, 1998) identificano i criteri epistemici (come precisione, coerenza, semplicità) che guidano lo sviluppo della matematica attraverso la storia.

Gruppo 3: Domini Affettivi – Questo gruppo raccoglie un solo framework citato in letteratura che, nella sua specificità (e in coerenza con la struttura di codifica adoperata), si è ritenuto opportuno considerarlo come gruppo a sé stante: il framework di DeBellis e Goldin (2006) sul dominio affettivo dell'istruzione matematica fornisce una struttura tetradica comprendente emozioni (risposte affettive immediate), atteggiamenti (orientamenti affettivi più stabili), credenze (concezioni sulla matematica e su se stessi come learner) e valori (priorità etiche ed estetiche profonde).

Gruppo 4: Teorie dell'Apprendimento e Processi Cognitivi – Questo gruppo rappresenta il sostrato teorico proveniente dall'ambito della didattica generale, dalla psicologia dell'educazione e dalla didattica della matematica, includendovi studi, teorie e costrutti che, sebbene siano da ritenersi dei classici per le rispettive tradizioni di ricerca, essi consentono di far luce sui meccanismi attraverso cui avviene l'apprendimento in presenza dell'integrazione della HoM. La teoria socio-culturale (Vygotsky, 1991; Radford, 1997) concettualizza l'apprendimento come processo mediato culturalmente, dove gli strumenti storici e i sistemi simbolici del passato possono fungere da artefatti culturali per la mediazione dell'apprendimento. Il concetto vygotiskiano di Zona di Sviluppo Prossimale trova nella storia esempi di scaffolding naturale attraverso l'evoluzione dei concetti. L'ostacolo epistemologico (Brousseau, 1997) identifica concezioni che, pur essendo state utili in certi contesti, possono impedire l'apprendimento di nuovi concetti. La storia mostra come questi ostacoli siano stati superati nel tempo, offrendo strategie per il loro superamento didattico. La commognizione (Sfard, 2008) vede il pensiero matematico come forma di comunicazione, rendendo i testi storici esempi di diversi “discorsi matematici” che arricchiscono il repertorio comunicativo degli studenti. La teoria della mediazione semiotica (Radford, 2003a, 2003b; Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) analizza come segni, gesti e artefatti (inclusi quelli storici) medino la costruzione del significato matematico. Il modello di argomentazione di Toulmin (2003), applicato alla matematica, fornisce una struttura per analizzare come le dimostrazioni e gli argomenti matematici si siano evoluti storicamente. La teoria

cognitiva di Piaget (1973, 1981) e Bruner (1977) costituiscono un sottogruppo a sé stante, fornendo le basi per comprendere gli stadi di sviluppo e le modalità di rappresentazione (enattiva, iconica, simbolica) che la storia della matematica può esemplificare. La teoria dell'apprendimento attivo (Jardine, 1997; Huntley & Flores, 2011) e la teoria dell'apprendimento esperienziale (Kolb et al., 2000) sottolineano come il coinvolgimento attivo con materiali storici e la riflessione su esperienze matematiche del passato possano promuovere un apprendimento profondo.

Gruppo 5: Conoscenze Professionali e Credenze dei Docenti – Questo gruppo aggrega i framework che descrivono le competenze e le disposizioni necessarie ai docenti per integrare efficacemente la HoM. I costrutti di SMK e PCK di Shulman (1986, 1987) rappresentano i costrutti fondativi: Subject Matter Knowledge (conoscenza disciplinare profonda, inclusa quella storica) e Pedagogical Content Knowledge (sapere come insegnare specifici contenuti, incluso l'uso didattico della storia). Il Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) (Ball et al., 2008) estende il lavoro di Shulman identificando domini specifici: Common Content Knowledge (CCK), Specialized Content Knowledge (SCK), Knowledge of Content and Students (KCS), e Knowledge of Content and Teaching (KCT). Per l'integrazione della HoM, è particolarmente rilevante l'Horizon Content Knowledge, che include la consapevolezza dello sviluppo storico dei concetti. Il MKTT (Zopf, 2010) specifica ulteriormente queste competenze per i formatori di insegnanti. La Teacher's Mathematical and Methodological Culture (Zhokhov, 2007) integra conoscenza matematica, consapevolezza storica e repertorio metodologico in una visione olistica della professionalità docente. La teoria delle credenze dei docenti (Ernest, 1989, 1991, 2014; Thompson, 1991; Handal, 2003) distingue tra visioni strumentaliste, platoniste e problem-solving della matematica, ciascuna delle quali implica diversi approcci all'uso della storia: come collezione di tecniche, come scoperta di verità eterne, o come attività umana creativa. La teacher agency (Priestley et al., 2015) descrive la capacità dei docenti di agire intenzionalmente, mediando tra le proprie convinzioni sull'importanza della HoM e i vincoli curriculari e istituzionali. L'autoregolazione nell'insegnamento-apprendimento (Zimmermann, 2002) riguarda la capacità metacognitiva dei docenti di pianificare, monitorare e riflettere sull'integrazione della HoM nella propria pratica. Questi due costrutti costituiscono un sottogruppo a sé stante, strettamente correlato ai contributi della psicologia dell'educazione.

In sintesi, l'analisi dei framework teorici rivela come la ricerca sull'integrazione della HoM si configuri come un campo intrinsecamente

interdisciplinare, dove convergono prospettive epistemologiche (Gruppo 2), teorie dell'apprendimento (Gruppo 4) e modelli specifici delle competenze matematiche (Gruppo 1) e professionali docenti (Gruppo 5). La forte prevalenza della tradizione HPM (73% degli studi) testimonia la solidità del paradigma disciplinare, mentre la presenza trasversale di framework affettivi (Gruppo 3) e cognitivi (Gruppo 4) sottolinea l'attenzione della ricerca agli aspetti motivazionali e processuali dell'apprendimento. Come emergerà dall'analisi della distribuzione dei codici, questi framework non costituiscono solo riferimenti teorici astratti, ma informano concretamente le scelte metodologiche e interpretative degli studi esaminati.

4.2.3 La distribuzione dei codici

Alla luce dei framework teorici appena descritti, che costituiscono la lente interpretativa attraverso cui gli studi operazionalizzano i loro disegni di ricerca, è ora possibile procedere all'analisi della distribuzione empirica dei codici identificati. In questa sezione verranno presentati i risultati della distribuzione dei codici più ricorrenti nei due cluster di partecipanti individuati, suddividendo l'analisi su due livelli: da un lato docenti e studenti; e dall'altro, pratica didattica e outcome. Nei prossimi paragrafi verranno discusse le co-occorrenze e gli insight che scaturiscono da questi dati. Infine, le tabelle E ed F in appendice consentono di visionare la matrice con presenza/assenza di ciascun codice per paper analizzato.

4.2.3.1 La distribuzione dei codici negli studi sui docenti

L'analisi della distribuzione dei codici relativi al cluster dei docenti rivela dei pattern particolarmente significativi che delineano le tendenze dominanti nella ricerca sulla formazione dei docenti all'uso didattico della storia della matematica, come mostrato nella tabella 12, in cui sono riportate le percentuali di copertura di un dato codice nel corpus di paper considerati (31 studi su docenti, di cui 15 con pratiche di formazione). Questi risultati verranno discussi e commentati nei paragrafi successivi.

Tabella 12: codici per paper del cluster docenti

<i>Dimensione</i>	<i>Paper citato</i>	<i>N</i>	<i>%</i>
<i>Ruolo della HoM nella pratica didattica</i>			
<i>HoM as a professional tool</i>	Moustapha-Corrêa, et al., 2021; Madrid, et al., 2021; Martins, et al., 2021; Pjanić, 2020; Jankvist, Clark, &	8	25,0%

	Mosvold, 2020; White, et al., 2019; Guillemette, 2017; Youchu, 2016;		
<i>HoM as a motivational tool</i>	Madrid, et al., 2021; Bütüner, 2020; Zengin, 2018; Loats, White, & Rubino, 2014;	4	12,5%
<i>HoM as a cognitive tool</i>	Dilek & Fadime, 2024; Madrid, et al., 2021; Martins, et al., 2021; Bütüner, 2020; Zengin, 2018; Youchu, 2016;	6	18,8%
<i>HoM as a goal</i>	Dilek & Fadime, 2024; Moustapha-Corrêa, et al., 2021; Jankvist, Clark, & Mosvold, 2020; Guillemette, 2017; Weldeana & Abraham, 2014; Despeaux, 2014	6	18,8%
<i>Attività Didattiche</i>			
<i>Uso delle TIC</i>	Jankvist, Clark, & Mosvold, 2020; Zengin, 2018;	2	6,3%
<i>Ricerche (bibliografiche o online)</i>	Martins, et al., 2021; Despeaux, 2014	2	6,3%
<i>Lavoro di gruppo</i>	Dilek & Fadime, 2024; Moustapha-Corrêa, et al., 2021; Martins, et al., 2021; Jankvist, Clark, & Mosvold, 2020; White, et al., 2019; Zengin, 2018; Guillemette, 2017; Weldeana & Abraham, 2014; Loats, White, & Rubino, 2014; Despeaux, 2014	10	31,3%
<i>Lettura testi o problemi storici</i>	Moustapha-Corrêa, et al., 2021; Madrid, et al., 2021; Jankvist, Clark, & Mosvold, 2020; Bütüner, 2020; White, et al., 2019; Zengin, 2018; Guillemette, 2017;	7	21,9%
<i>Discussione di gruppo o in plenaria</i>	Dilek & Fadime, 2024; Moustapha-Corrêa, et al., 2021; Martins, et al., 2021; Pjanić, 2020; Jankvist, Clark, & Mosvold, 2020; White, et al., 2019; Zengin, 2018; Guillemette, 2017; Youchu, 2016; Weldeana & Abraham, 2014; Loats, White, & Rubino, 2014; Despeaux, 2014	12	37,5%
<i>Produzione di artefatti didattici</i>	Dilek & Fadime, 2024; Moustapha-Corrêa, et al., 2021; Martins, et al., 2021; Jankvist, Clark, & Mosvold,	7	21,9%

	2020; Youchu, 2016; Loats, White, & Rubino, 2014; Despeaux, 2014		
<i>Scrittura riflessiva</i>	Dilek & Fadime, 2024; Moustapha-Corrêa, et al., 2021; Madrid, et al., 2021; Martins, et al., 2021; Weldeana & Abraham, 2014	5	15,6%
<i>Studio e analisi del materiale di approfondimento</i>	Dilek & Fadime, 2024; Madrid, et al., 2021; Martins, et al., 2021; Pjanić, 2020; Jankvist, Clark, & Mosvold, 2020; Bütüner, 2020; White, et al., 2019; Youchu, 2016; Weldeana & Abraham, 2014;	9	28,1%
<i>Lezioni frontali</i>	Dilek & Fadime, 2024; Madrid, et al., 2021; Pjanić, 2020; White, et al., 2019; Zengin, 2018; Guillemette, 2017; Youchu, 2016; Weldeana & Abraham, 2014;	8	25,0%
<i>Metodologia emergente</i>			
<i>Problem-based Learning</i>	Pjanić, 2020; Bütüner, 2020; Zengin, 2018; Weldeana & Abraham, 2014; Loats, White, & Rubino, 2014;	5	15,6%
<i>Ciclo progettazione-formazione-riprogettazione</i>	Dilek & Fadime, 2024; Moustapha-Corrêa, et al., 2021; Martins, et al., 2021; Jankvist, Clark, & Mosvold, 2020; White, et al., 2019; Guillemette, 2017; Youchu, 2016;	7	21,9%
<i>Esprienza diretta</i>	Dilek & Fadime, 2024 ; Moustapha-Corrêa, et al., 2021 ; Martins, et al., 2021; Pjanić, 2020; Bütüner, 2020; White, et al., 2019 Zengin, 2018; Guillemette, 2017 ; Loats, White, & Rubino, 2014	9	28,1%
<i>Reflective Practice</i>	Dilek & Fadime, 2024; Moustapha-Corrêa, et al., 2021; Madrid, et al., 2021; Guillemette, 2017; Youchu, 2016; Weldeana & Abraham, 2014	6	18,8%
<i>Apprendimento collaborativo</i>	Dilek & Fadime, 2024 ; Moustapha-Corrêa, et al., 2021 ; Martins, et al., 2021 ; Pjanić, 2020 ; Jankvist, Clark, & Mosvold, 2020 ; White, et al., 2019; Zengin, 2018; Guillemette, 2017	8	25,0%

<i>Inquiry-Based Learning</i>	Martins, et al., 2021; Jankvist, Clark, & Mosvold, 2020 ; Despeaux, 2014	3	9,4%
<i>Benefici Docenti HoM</i>			
<i>Conoscenze e competenze disciplinari</i>	Moustapha-Corrêa, et al., 2021; Mersin & Durmus, 2021; Bütüner, 2020; Zengin, 2018; Youchu, 2016; Weldeana & Abraham, 2014; Povey, 2014; Galante, 2014; Fenaroli, Furinghetti & Somaglia, 2014; Despeaux, 2014	10	31,3%
<i>V.E. Docenti</i>	Moustapha-Corrêa, et al., 2021 ; Mersin & Durmus, 2021 ; Madrid, et al., 2021 ; Martins, et al., 2021 ; Pjanić, 2020; Jankvist, Clark, & Mosvold, 2020 ; Guillemette, 2017 ; Youchu, 2016; Weldeana & Abraham, 2014; Povey, 2014; Loats, White, & Rubino, 2014; Goodwin, et al., 2014; Galante, 2014; Fenaroli, Furinghetti & Somaglia, 2014	14	43,8%
<i>Atteggiamenti, credenze e opinioni Docenti</i>			
<i>su HoM e sua integrazione didattica</i>	Dilek & Fadime, 2024; Gençkaya & Tan-Şişman, 2021; Martins, et al., 2021 ; Kusumawati, et al., 2020; Villota, 2014; Loats, White, & Rubino, 2014;	6	18,8
<i>su M, HoM e Apprendimento</i>	Gençkaya & Tan-Şişman, 2021; Mersin & Durmus, 2021 ; Lu, Leung & Li, 2021 ; Hidiroğlu, 2021 ; Başibüyük & Şahin, 2019 ; Weldeana & Abraham, 2014; Goodwin, et al., 2014; Fenaroli, Furinghetti & Somaglia, 2014	8	25,0
<i>Competenze pedagogiche e didattiche</i>	Dilek & Fadime, 2024; Gençkaya & Tan-Şişman, 2021; Moustapha-Corrêa, et al., 2021; Meadows & Caniglia, 2021; Madrid, et al., 2021; Lu, Leung & Li, 2021; Pjanić, 2020; Jankvist, Clark, & Mosvold, 2020; Bütüner, 2020; Zengin, 2018; Youchu, 2016; Gilmullin, 2015; Weldeana & Abraham, 2014; Villota, 2014; Povey,	18	56,3%

	2014; Loats, White, & Rubino, 2014; Galante, 2014; Fenaroli, Furinghetti & Somaglia, 2014		
<i>Dimensioni psicologiche dell'apprendimento</i>			
<i>Dimensione professionale</i>	Panaoura 2024; Lu, Leung & Li, 2021 ; Kusumawati,et al., 2020;	3	9,4%
<i>Motivazione e interesse</i>	Mersin & Durmus, 2021; Lu, Leung & Li, 2021 ; Kusumawati,et al., 2020 ;	5	15,6%

L'esame dei macro-codici relativi al ruolo della HoM nella pratica didattica mostra come, tra gli usi più significativi della HoM nella formazione dei docenti, la storia si configura come strumento di accrescimento delle competenze professionali, dato che si riscontra nel 25% degli studi, dato accompagnato da un equamente frequente 18,8% di HoM come strumento cognitivo e come obiettivo a sé stante.

In merito alle attività didattiche, quelle più ricorrenti e utilizzate concernono il Lavoro di gruppo per il 31,3%; le discussioni in gruppo o plenaria (a seguito di una data attività) per il 37,5%; a cui seguono rispettivamente l'analisi di specifico materiale di studio fornito dal docente formatore e l'uso di lezioni frontali, per 28,1% e il 25% dei paper esaminati. Solo nel 22% è praticata la lettura di testi storici o di problemi basati sulla storia della matematica.

Le metodologie adottate in questo cluster, rispetto a quello degli studenti, possiedono un grado di chiarezza maggiore, consentendo una codifica induttiva più articolata. I dati più interessanti, in tal senso, sono la forte frequenza di metodologie ispirate all'apprendimento collaborativo (25,0%) e all'uso dell'esperienza diretta (28,1%), che coinvolge la sfera del *fare matematica* attraverso esercizi, problemi, letture dirette, nonché sperimentazioni anche a carattere riflessivo relative al senso di spaesamento epistemologico che l'uso della HoM può provocare (cfr.: Dilek & Fadime, 2024 ; Moustapha-Corrêa, et al., 2021 ; Martins, et al., 2021; Pjanić, 2020; Bütüner, 2020; White, et al., 2019 Zengin, 2018; Guillemette, 2017 ; Loats, White, & Rubino, 2014). Infine, si è riscontrato come nel 22% dei casi, l'attività formativa conducesse alla strutturazione di un piano didattico (anche breve) integrato con la HoM che potesse essere portato in classe a conclusione del ciclo formativo (cfr.: Dilek & Fadime, 2024; Moustapha-Corrêa, et al., 2021; Martins, et al., 2021;

Jankvist, Clark, & Mosvold, 2020; White, et al., 2019; Guillemette, 2017; Youchu, 2016).

Tra gli outcome si registra una marcata presenza di codici relativi all'incremento delle competenze pedagogiche e didattiche (56,3% degli studi analizzati) e mutamenti nella visione epistemologica dei docenti (nel 43,8%), nonché negli Atteggiamenti, credenze e opinioni concernenti la natura della matematica nonché l'uso didattico della sua storia (nel 40,6%). Poco registrate sono le dimensioni a carattere psicoaffettivo cui la formazione sulla HoM potrebbe incidere in termini di accrescimento della dimensione professionale del sé nonché motivazione e interesse per la disciplina (presenti rispettivamente nel 9,4% e nel 15,6% degli studi esaminati).

4.2.3.2 La distribuzione dei codici negli studi sugli studenti

L'analisi sistematica della distribuzione dei codici nel corpus di studi focalizzati sugli studenti (31 studi con studenti di cui 15 con pratiche didattiche diversamente distribuite in tutti gli ordini scolastici) rivela configurazioni distintive che delineano le priorità e le tendenze dominanti nella ricerca sull'integrazione della storia della matematica nell'apprendimento studentesco.

Diversamente dal cluster dei docenti, qui la linea di ricerca è più concentrata sugli aspetti di tipo sperimentale, individuando gli effetti della HoM nell'insegnamento, ma trascurando in parte la possibilità di poter documentare nel dettaglio pratiche didattiche capaci di sortire un particolare effetto. Si avrà modo di commentare questo aspetto nel paragrafo sulle discussioni.

Tabella 13: Codici per paper del cluster studenti

<i>Dimensione</i>	<i>Paper citato</i>	<i>N</i>	<i>%</i>
Ruolo della HoM			
<i>HoM as a tool</i>	Rizos e Gkrekas, 2023; Igün, Dastan, & Altintas, 2023; Filiz & Gür, 2023; Şahin & Danaci, 2022; Florio, 2022; Demattè & Furinghetti, 2022; Sevinc & Ay, 2021; De Vittori, 2021; Bütüner & Baki, 2020; Maffia, 2019; Bütüner, 2016; Ersoy & Öksüz, 2016; Bütüner, 2015b; Panagiotou, 2014; Jankvist, 2014a, 2014b	15	57,7%

<i>HoM as a goal</i>	Filiz & Gür, 2023; Sevinc & Ay, 2021; De Vittori, 2021; Bütüner & Baki, 2020; Ersoy & Öksüz, 2016; Panagiotou, 2014; Jankvist, 2014a, 2014b	7	26,9%
Attività didattiche			
<i>Attività esplorativo-manipolative</i>	Bütüner & Baki, 2020; Bütüner, 2016; Ersoy & Öksüz, 2016; Bütüner, 2015b; Panagiotou, 2014	5	19,2%
<i>Ruolo docente come mediatore e facilitatore</i>	Filiz & Gür, 2023; Şahin & Danaci, 2022; Demattè & Furinghetti, 2022; Sevinc & Ay, 2021; Maffia, 2019; Jankvist, 2014a, 2014b	6	23,1%
<i>Algoritmi risolutivi dalla storia</i>	Filiz & Gür, 2023; Şahin & Danaci, 2022; De Vittori, 2021; Bütüner & Baki, 2020.	4	15,4%
<i>Discussione di gruppo o in plenaria</i>	Igün, Dastan, & Altintas, 2023; Sevinc & Ay, 2021; Maffia, 2019; Panagiotou, 2014; Jankvist, 2014a, 2014b	5	19,2%
<i>TIC</i>	Rizos e Gkrekas, 2023; Karatas-Aydin & Isiksal-Bostan, 2022; Florio, 2022; Kapofu, & Kapofu, 2020; Panagiotou, 2014	5	19,2%
<i>Lavoro di gruppo</i>	Rizos e Gkrekas, 2023; Igün, Dastan, & Altintas, 2023; Sevinc & Ay, 2021; Bütüner & Baki, 2020; Maffia, 2019; Bütüner, 2016; Ersoy & Öksüz, 2016; Bütüner, 2015b; Panagiotou, 2014; Jankvist, 2014a, 2014b	10	38,5%
<i>Uso di problemi storici</i>	Rizos e Gkrekas, 2023; Demattè & Furinghetti, 2022; Sevinc & Ay, 2021; Ersoy & Öksüz, 2016	4	15,4%
<i>Esercizi standard (decontestualizzati)</i>	De Vittori, Louaked, & Visentin 2024; Filiz & Gür, 2023; De Vittori, 2021	3	11,5%
<i>Attività strutturate</i>	Rizos e Gkrekas, 2023; Igün, Dastan, & Altintas, 2023; Filiz & Gür, 2023; Şahin & Danaci, 2022; Demattè & Furinghetti, 2022; De Vittori, 2021; Bütüner & Baki, 2020; Maffia, 2019; Bütüner, 2016; Ersoy	13	50,0%

	& Öksüz, 2016; Bütüner, 2015b; Panagiotou, 2014; Jankvist, 2014a, 2014b		
<i>Lezione introduttiva</i>	De Vittori, Louaked, & Visentin 2024; Filiz & Gür, 2023; Şahin & Danaci, 2022; Florio, 2022; Sevinc & Ay, 2021; De Vittori, 2021	6	23,1%
<i>Lettura delle fonti</i>	De Vittori, Louaked, & Visentin 2024; Rizos e Gkrekas, 2023; Florio, 2022; Maffia, 2019; Panagiotou, 2014; Jankvist, 2014a, 2014b	6	23,1%
Metodologie emergenti			
<i>Attività laboratoriale</i>	Bütüner & Baki, 2020; Bütüner, 2016; Ersoy & Öksüz, 2016; Bütüner, 2015b; Panagiotou, 2014	5	19,2%
Benefici Studenti HoM			
<i>Atteggiamenti, credenze e opinioni Studenti</i>	Filiz & Gür, 2023 ; Şahin & Danaci, 2022 ; Arthur, et al. 2022 ; Kapofu, & Kapofu, 2020; Sampaio & Batista, 2018; Bütüner, 2016; Lim & Chapman, 2015; Bütüner, 2015b	9	34,6%
<i>V.E. Studenti</i>	Rizos e Gkrekas, 2023; Şahin & Danaci, 2022; Karatas-Aydin & Isiksal-Bostan, 2022; Demattè & Furinghetti, 2022 ; de Varent, & Décamp 2022 ; Arthur, et al. 2022 Sevinc & Ay, 2021 ; Kapofu, & Kapofu, 2020; Bütüner & Baki, 2020; Tong, Loc, Uyen, & Y, 2019; Sampaio & Batista, 2018; Bütüner, 2016; Lim & Chapman, 2015; Bütüner, 2015b; Panagiotou, 2014; Jankvist, 2014a, 2014b	17	65,4%
<i>Achievement</i>	Filiz & Gür, 2023; Matos & Kónya, 2021; Bütüner, 2016; Ersoy & Öksüz, 2016; Lim & Chapman, 2015	5	19,2%

<i>Conoscenze e competenze disciplinari</i>	De Vittori, Louaked, & Visentin 2024; Şahin & Danaci, 2022; Karatas-Aydin & Isiksal-Bostan, 2022; Florio, 2022; Demattè & Furinghetti, 2022; Sevinc & Ay, 2021; Matos & Kónya, 2021; Tong, Loc, Uyen, & Y, 2019; Sampaio & Batista, 2018; Lim & Chapman, 2015; Panagiotou, 2014	11	42,3%
Dimensioni psicologiche dell'apprendimento			
<i>Motivazione e interesse</i>	De Vittori, Louaked, & Visentin 2024; Rizos e Gkrekas, 2023; Igün, Dastan, & Altintas, 2023; Filiz & Gür, 2023; Şahin & Danaci, 2022; Karatas-Aydin & Isiksal-Bostan, 2022; Florio, 2022; Demattè & Furinghetti, 2022; de Varent, & Décamp 2022 ; Sevinc & Ay, 2021; Matos & Kónya, 2021; De Vittori, 2021; Bütüner & Baki, 2020; Tong, Loc, Uyen, & Y, 2019; Maffia, 2019; Sampaio & Batista, 2018; Bütüner, 2016; Ersoy & Öksüz, 2016; Lim & Chapman, 2015; Bütüner, 2015b; Panagiotou, 2014; Jankvist, 2014a; Bishop, et al., 2014	23	88,5%
<i>Clima di classe e piacevolezza</i>	Filiz & Gür, 2023; Kapofu, & Kapofu, 2020; Bütüner & Baki, 2020; Bütüner, 2016; Lim & Chapman, 2015	5	19,2%
<i>Ansia</i>	Igün, Dastan, & Altintas, 2023; Kapofu, & Kapofu, 2020	2	7,7%

Per quanto concerne gli usi della HoM nelle pratiche didattiche descritte, prevale certamente un orientamento verso un suo uso di tipo strumentale (pari al 57,7%) a discapito di usi legati alla storia come obiettivo in sé (26,9%), confermando l'orientamento strumentale dominante teorizzato da Jankvist (2009): l'uso della storia come obiettivo in sé non compare mai da solo nel contesto delle sperimentazioni scolastiche, ma costituisce un obiettivo secondario rispetto agli aspetti curricolari e disciplinari (Cfr.: Filiz & Gür, 2023; Sevinc & Ay, 2021; De

Vittori, 2021; Bütüner & Baki, 2020; Esteve, 2020; Ersoy & Öksüz, 2016; Panagiotou, 2014; Jankvist, 2014a). In effetti, l'alta incidenza di outcome cognitivi (42,3%) è coerente con un uso strumentale della HoM prevalentemente orientato al potenziamento concettuale degli studenti (cfr.: Rizos e Gkrekas, 2023; Şahin & Danaci, 2022; Florio, 2022; Dematté e Furinghetti, 2022; Sevinc & Ay, 2021; De Vittori, 2021; Esteve, 2020; Bütüner, 2015b; Panagiotou, 2014), sebbene non sia possibile stabilire con certezza la direzionalità causale tra finalità dichiarate dagli autori e outcome effettivamente osservati.

Le pratiche didattiche risultano molto varie, registrando una presenza incisiva di attività strutturate nella metà degli studi esaminati, con un utilizzo massiccio di schede di lavoro generalmente strutturate in occasione dell'attività sperimentale, con una presenza massiccia dell'attività validatrice dei ricercatori. Le altre attività più frequentemente utilizzate prevedono il lavoro di gruppo (38,5%), l'uso di lezione diretta a carattere introduttivo (cfr.: De Vittori, Louaked, & Visentin 2024; Filiz & Gür, 2023; Şahin & Danaci, 2022; Florio, 2022; Sevinc & Ay, 2021; De Vittori, 2021) o, in altri casi, la lettura di fonti originali brevi in forma antologizzata (De Vittori, Louaked, & Visentin 2024; Rizos e Gkrekas, 2023; Florio, 2022; Maffia, 2019; Panagiotou, 2014; Jankvist, 2014a), per un'incidenza pari al 23% l'uno. Degne di nota sono l'uso di attività di tipo esplorativo-manipolative, in cui attraverso l'uso di oggetti come cubi, regoli o modellini di legno, si evidenzia una concezione d'uso della HoM in classe come vera e propria attività laboratoriale (19,2%) (cfr.: Bütüner & Baki, 2020; Bütüner, 2016; Ersoy & Öksüz, 2016; Bütüner, 2015b; Panagiotou, 2014).

La visione epistemologica degli studenti mostra come uno degli outcome più indagati (65,4%): è riconosciuto il potenziale trasformativo della storia nel modificare le concezioni studentesche sulla natura della matematica. Il dato più notevole che emerge dall'analisi, tuttavia, riguarda predominanza delle dimensioni psicologiche dell'apprendimento, con particolare riguardo alla motivazione e l'interesse che presentano un'altra frequenza: nella quasi totalità degli studi esaminati (92,3%), attraverso l'uso della HoM si osserva un incremento della motivazione degli studenti allo studio della matematica e un crescente interesse per le sue questioni interne ed esterne. Un altro aspetto rilevante dal punto di vista psicodinamico è la presenza significativa di studi (19,2%) che riportano un clima di classe positivo e un generale senso di piacevolezza verso le attività svolte (Filiz & Gür, 2023; Kapofu, & Kapofu, 2020; Bütüner & Baki, 2020; Bütüner, 2016; Lim & Chapman, 2015). Un aspetto, questo, non necessariamente registrato con

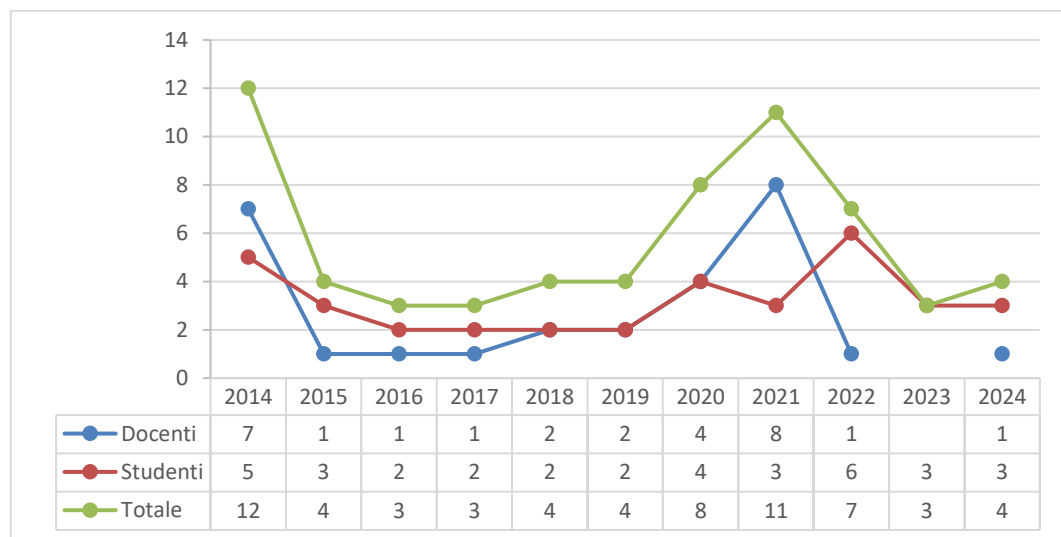
strumenti quantitativi ma riportato attraverso le osservazioni e le narrazioni dei ricercatori.

4.3 Discussioni

4.3.1 Picchi editoriali ed incidenza pandemica nella pubblicazione accademica

Come riportato nel grafico 3, il trend temporale delle pubblicazioni concernenti la HPM e, più in generale, gli usi della HoM per la formazione e l'educazione, riflette un andamento strettamente correlato agli andamenti dell'ecologia editoriale accademica.

Grafico 3: Trend temporale delle pubblicazioni



Il 2014, infatti, rappresenta l'anno con il maggior numero di pubblicazioni (12 studi, corrispondenti al 19,0% del totale). Questa concentrazione è in larga parte attribuibile alla pubblicazione di due numeri speciali tematici, esplicitamente dedicati all'integrazione della HoM nell'educazione matematica: *Science & Education* (Springer, Issue 1) con il titolo “*History, Philosophy and Mathematics Education*” e *PRIMUS* con “*Use of History of Mathematics to Enhance Undergraduate Mathematics Instruction*”, che insieme raccolgono 6 dei 12 studi inclusi nella revisione. I rimanenti 7 studi, dispersi in riviste diverse, testimoniano comunque un interesse diffuso per il tema in quell'anno, configurando il 2014 come un momento particolarmente proficuo nella ricerca.

Il periodo a cavallo tra il 2015 e il 2020 mostra una produzione più contenuta e stabile, con una media di 4-5 studi per anno, riflettendo presumibilmente l'andamento normale delle pubblicazioni scientifiche sul tema. È un periodo caratterizzato dall'assenza di numeri speciali dedicati e sembra riflette una fase di sviluppo organico della ricerca sul tema, con un picco produttivo nel 2020, caratterizzato da 8 studi equamente distribuiti tra docenti e studenti.

Il biennio 2021-2022 costituisce il periodo di maggiore produttività scientifica con 18 studi complessivi (27,7% del totale), in linea con il picco documentato nelle pubblicazioni accademiche a livello globale durante questo periodo (Rousseau, Garcia-Zorita & Sanz-Casado, 2023; Whitaker, et al., 2025). Il 2021 presenta una concentrazione di 11 studi (16,9%), di cui 8 focalizzati su docenti e formazione docenti, mentre il 2022 conta 7 studi con prevalenza di ricerche su studenti (6 studi). Questa concentrazione temporale appare coerente con le dinamiche dell'editoria accademica durante la pandemia: la ricerca educativa ha registrato i tassi di crescita più elevati tra tutti i campi scientifici nel periodo COVID-19, con un incremento di 2,5 volte nelle pubblicazioni dal 2020 al 2021 (Cretu & Ho, 2023; Nane et al., 2023), mentre l'educazione matematica nello specifico ha mostrato una crescita del 56% nelle principali riviste del settore tra il 2020 e il 2022 (Hasumi & Chiu, 2022). Tuttavia, nel caso specifico della letteratura scientifica sulla HoM, mentre il caso del 2021 rientra organicamente nella potenziale influenza della più ampia oscillazione editoriale pandemica, occorre considerare l'influenza di scelte editoriali nel 2022: metà degli studi inclusi su studenti (3 su 6) proviene dalla special issue di *ZDM - Mathematics Education* dal titolo "*Exploring the significance of the history of mathematics in mathematics education*". Il biennio successivo (2023-2024) mostra un calo nella produzione editoriale (7 studi complessivi, 10,8%), dato che sembra assestarsi con la media annuale delle pubblicazioni che caratterizzavano il precedente periodo.

In tal senso, le maggiori concentrazioni in singoli anni sono da interpretare in termini di influenza di numeri speciali delle riviste scientifiche dedicate al tema: nel 2014, quasi la metà degli studi proviene da numeri speciali; nel 2022, oltre all'incidenza pandemica, si riscontra la special issue di *ZDM*, che contribuisce con 3 dei 7 studi totali dell'anno. La presenza di tali numeri speciali testimonia il riconoscimento diffuso della rilevanza che caratterizza lo sforzo d'integrazione della HoM come area di ricerca consolidata nell'educazione matematica.

4.3.1.1 La copertura dei gradi scolastici: criticità e gap in letteratura

In merito ai gradi di scuola coinvolti, sembra che la scuola primaria costituisca il contesto meno indagato, mostrando, da un lato, un potenziale gap nella letteratura scientifica di settore e riflettendo potenzialmente una possibile idea diffusa di inadeguatezza della HoM come strumento didattico da applicare con bambini di fascia 6-12. Tuttavia, questi sei studi mostrano che la storia della matematica può essere efficacemente integrata anche nella scuola primaria. Bishop et al. (2014) esplorano come l'analisi storica possa supportare il ragionamento sui numeri interi nei bambini, mentre Ersoy e Öksüz (2016) dimostrano empiricamente gli effetti positivi dell'approccio storico su alunni di quarta elementare. Maffia (2019) si concentra sull'uso di fonti primarie storiche, evidenziando il ruolo cruciale delle azioni dell'insegnante nel mediare questi materiali. De Vittori (2021) approfondisce il ruolo dell'immaginazione come ponte tra contenuto storico e apprendimento matematico, mentre Karatas-Aydin e Isiksal-Bostan (2022) raccolgono le prospettive di studenti gifted sull'integrazione di video storici nelle lezioni. Infine, Filiz e Gür (2023) forniscono esempi concreti di metodi storici di moltiplicazione applicabili in classe. Il filo rosso che unisce queste ricerche è la dimostrazione che, contrariamente a possibili pregiudizi, l'approccio storico non solo è applicabile anche con bambini della scuola primaria, ma può rappresentare un potente strumento per rendere la matematica più accessibile, notevole e coinvolgente, stimolando al contempo immaginazione, pensiero critico e comprensione profonda dei concetti matematici.

Anche il contesto della scuola secondaria di I grado presenta un numero di pubblicazioni analogo, con sperimentazioni condotte quasi esclusivamente in Turchia (İgün, Dastan, & Altintas, 2023; Şahin & Danaci, 2022; Sevinc & Ay, 2021; Bütüner & Baki, 2020; Bütüner, 2016, Bütüner, 2015b). Si tratta di studi che, nel complesso, indagano il valore aggiunto della HoM come attività capace di potenziare le abilità degli studenti più svantaggiati in matematica (De Vittori, Louaked, & Visentin, 2024), utilizzando la HoM come strumento e indagandone gli effetti su ansia disciplinare (İgün, Dastan, & Altintas, 2023), abilità di calcolo mentale (Şahin & Danaci, 2022), di sense making dei concetti matematici più complessi e astratti, come il concetto di numero intero (Sevinc & Ay, 2021), a volte adoperando strumenti concreti (Bütüner, 2015b, 2016; Bütüner & Baki, 2020). Più indagato, invece, il contesto scolastico liceale, con un totale di dieci studi dedicati, sebbene soltanto 5 sono effettivamente riferiti a un contesto culturale europeo (Jankvist, 2014a, 2014b; Panagiotou, 2014; Matos & Kónya, 2021; De Varent, & Décamp 2022; Demattè & Furinghetti, 2022).

La marcata concentrazione geografica degli studi sulla scuola secondaria di I grado in contesto turco nelle pratiche didattiche raccolte, nonostante costituisce un contributo importante alla ricerca, potrebbe riflettere tuttavia l'influenza di particolari tradizioni di ricerca locali, oltre che specificità curriculari del sistema educativo turco. In tal senso, è necessario esplorare come approcci didattici analoghi si configurino in altri contesti culturali e educativi. Certamente, la grande concentrazione di studi d'area turca potrebbe costituire anche un effetto sbilanciato della ricerca fin qui condotta con metodo PRISMA: sarebbe stato necessario, probabilmente, ricercare altri paper da altre fonti, ad esempio attraverso uno *snowball process* in cui, per ogni paper incluso, effettuare un secondo screening della bibliografia al fine di individuare ulteriori paper e ricerche che soddisfacessero i criteri di eleggibilità.

4.3.1.2 Dimensioni psicologiche degli studenti scarsamente indagate

Nel merito delle dimensioni indagate, invece, nonostante l'incremento della motivazione, l'interesse e la curiosità riportata in quasi tutti gli studi, si riscontra come le dimensioni psicologiche dell'apprendimento siano sostanziale sottodimensionamento, come testimoniato, d'altronde, dalla scarsa citazione di framework legati a questa dimensione, citando soltanto il costrutto di DeBellis e Goldin (2006) nei due studi turchi sull'ansia (İgün, Dastan, & Altintas, 2023; Kapofu, & Kapofu, 2020).

Inoltre, nonostante l'alta incidenza sull'uso di attività basate sul lavoro di gruppo, nessuno studio esaminato indaga la possibilità che i benefici e gli incrementi registrati negli studi siano effettivamente riconducibili alle attività basate sulla HoM, e non invece alle dinamiche di gruppo che si instaurano in aula. Ulteriori studi che indagano l'influenza della HoM nelle pratiche didattiche dovrebbero adeguatamente tenere in considerazione questi aspetti come potenziali (seppur benefiche) variabili intervenienti, al fine di valutare adeguatamente l'efficacia degli interventi.

4.3.2 Analisi tematica del cluster studenti

Nel corpus delle attività concernenti le pratiche didattiche condotte nel contesto scolastico non è possibile ricavare un unico modello didattico-formativo emergente; troppa è l'eterogeneità che caratterizza i paper in termini di obiettivi, metodi di ricerca, di popolazione esaminata, in quanto proveniente da gradi scolastici differenti. Ci si limiterà a descrivere le poche e deboli convergenze per ciascuna fascia scolastica esaminata, pur nella debolezza e nell'esiguità delle fonti

esaminate, descrivendo per ciascuna fascia le co-occorrenze più frequenti, per poi condurre un discorso unificatore sui processi educativi attivati dalla storia della disciplina.

4.3.2.1 Scuola primaria

Gli studi dedicati alla scuola primaria sono particolarmente esigui, soltanto 4 articoli (Ersoy & Öksüz, 2016; Maffia, 2019; De Vittori, 2021; Filiz & Gür, 2023). Nonostante l'esiguità numerica degli studi dedicati alla scuola primaria, si è cercato di rintracciare delle co-occorrenze impostando su MAXQDA una frequenza di almeno 2 co-occorrenze ($F \geq 2$). Il grafico 4 visualizza le interconnessioni emerse.

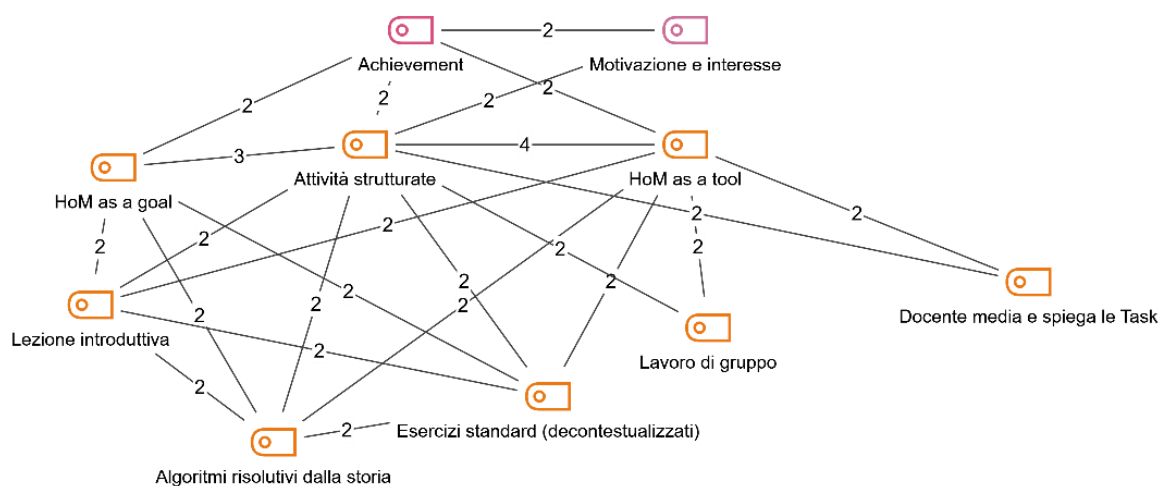


Grafico 4: Co-occorrenze nel corpus di pratiche relative alla scuola primaria

L'esame delle pratiche rivela una struttura ricorrente che si articola attraverso lezioni introduttive di contestualizzazione storico-culturale (Filiz & Gür, 2023; De Vittori, 2021). Questa fase preliminare non si presenta come mera cornice narrativa, ma come momento fondativo che permette agli studenti di situare cognitivamente le attività successive all'interno di coordinate spazio-temporali concrete. Nello specifico, Filiz e Gür (2023) strutturano questa fase attraverso la presentazione di civiltà antiche e dei loro specifici algoritmi computazionali, come il metodo di moltiplicazione di Ascalon, quello di Gelosia e, infine, i bastoncini di Nepero; mentre De Vittori (2021) enfatizza il ruolo dell'immaginazione come ponte cognitivo-affettivo tra il presente degli studenti e il passato matematico, teorizzando come questa facoltà permetta di superare la distanza temporale e culturale rendendo il contenuto storico cognitivamente accessibile.

Un elemento trasversale emerso dall'analisi riguarda l'utilizzo sistematico di schede didattiche strutturate come dispositivo pedagogico principale. Lungi dal rappresentare un approccio meramente trasmissivo, queste risorse rappresentano forme di scaffold cognitivi complessi che integrano spiegazioni calibrate sul livello cognitivo degli studenti, consegne progressive che guidano l'esplorazione e compiti specifici orientati a obiettivi di apprendimento definiti, legati nella totalità dei casi a una visione della storia come strumento cognitivo e motivazionale. Particolarmente innovativo risulta l'approccio di Maffia (2019), che teorizza l'uso delle fonti storiche primarie nella scuola primaria focalizzandosi sui gesti semiotici compiuti dal docente. Lo studio evidenzia come il docente debba orchestrare una complessa mediazione semiotica multi-registro, traducendo e trasponendo il contenuto storico attraverso diversi sistemi di rappresentazione (verbale, iconico, simbolico, manipolativo) per renderlo accessibile alla struttura cognitiva degli alunni. Questa orchestrazione semiotica, allineandosi con la teoria della mediazione semiotica di Radford (2003a) e Bartolini Bussi & Marotti (2008), si caratterizza come competenza professionale specifica che va oltre la semplice conoscenza del contenuto storico.

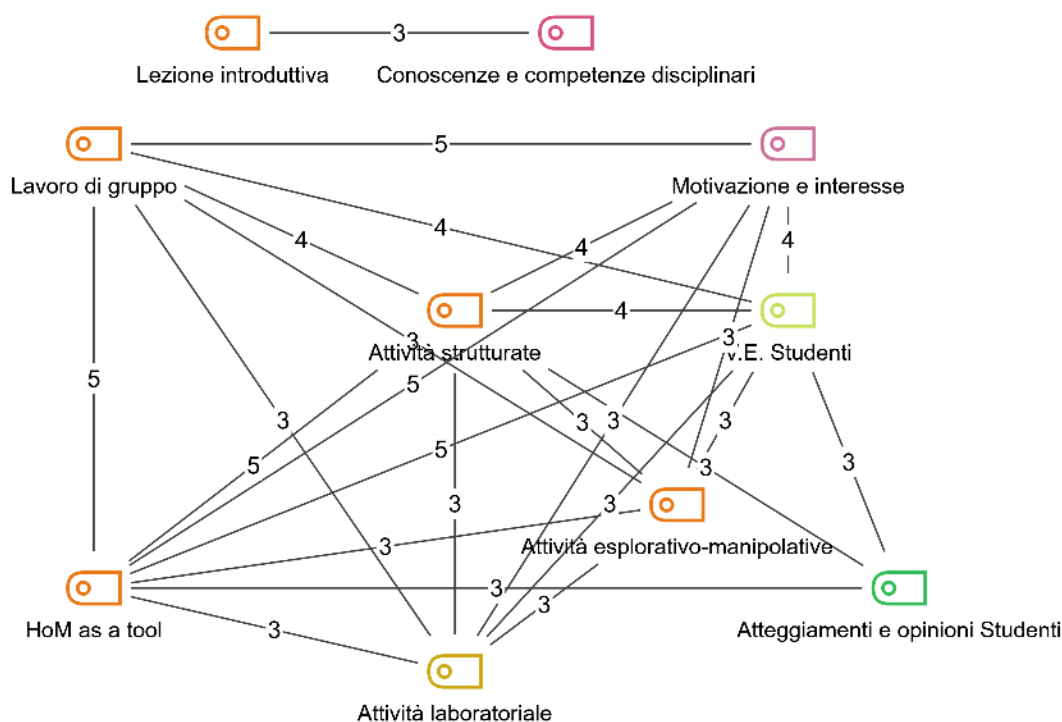
Emerge, quindi, con chiarezza come il ruolo del docente tenda a riconfigurarsi da trasmettitore di conoscenze a mediatore e scaffolder del processo di apprendimento (Ersoy & Öksüz, 2016; Maffia, 2019). Questa trasformazione del ruolo docente si allinea con le teorizzazioni vygotskiane sulla zona di sviluppo prossimale, dove la storia della matematica fornisce gli strumenti culturali che, opportunamente mediati, permettono agli studenti di accedere a livelli di comprensione altrimenti inaccessibili. Il docente diventa così orchestratore di quello che potremmo definire un "dialogo trans-temporale" tra il pensiero matematico del passato e le strutture cognitive in sviluppo degli studenti.

Gli studi convergono nell'identificare outcome positivi su multiple dimensioni, in particolare la motivazione e l'interesse e i risultati scolastici, misurati negli studi di Filiz e Gür (2023) e di Ersoy e Öksüz (2016) con prove di profitto standardizzate. Considerabile è il contributo di De Vittori (2021) che, attraverso il costrutto dell'immaginazione, offre una teorizzazione su come la storia possa fungere da mediatore non solo cognitivo ma anche affettivo-immaginario, permettendo agli studenti di "abitare" mentalmente contesti matematici diversi e sviluppare così una comprensione più profonda e incarnata dei concetti, offrendo quindi una più profonda visione epistemologica della disciplina matematica già nella fascia dai 10 agli 11 anni.

4.3.2.2 Scuola secondaria di I grado

Sebbene il numero di paper concernenti pratiche didattiche della scuola secondaria di I grado sia maggiore rispetto a quello della scuola primaria, contando un totale di 7 studi, questo gruppo, fatta eccezione per lo studio di De Vittori, Louaked, e Visentin (2024), è purtroppo riferito per la quasi totalità al contesto prettamente turco (İgün, Dastan, & Altintas, 2023; Şahin & Danaci, 2022; Sevinc & Ay, 2021; Bütüner & Baki, 2020; Bütüner, 2016, 2015b), rendendo i risultati di sintesi specificamente legati al contesto culturale e istituzionale di riferimento. Su MAXQDA è stata utilizzata ricercata una frequenza più alta ($F \geq 3$).

Grafico 5: Co-occorrenze nel corpus di pratiche relative alla scuola secondaria di I grado



Similmente a quanto avvenuto nel contesto della scuola primaria, anche qui le attività descritte prevedono nella totalità dei casi l'uso di schede strutturate, con consegne e attività specifiche provenienti dalla storia della matematica, come attività concernenti algoritmi risolutivi di civiltà antiche (egizi, babilonesi, greci, cinesi, ecc.), oppure problemi di derivazione storica (come il problema di Diofanto) da svolgere anche in piccoli gruppi (cfr.: De Vittori, Louaked, & Visentin, 2024; Şahin & Danaci, 2022; Sevinc & Ay, 2021). Questa convergenza metodologica

suggerisce il riconoscimento condiviso della necessità di una mediazione didattica attenta nella trasposizione del contenuto storico per questa fascia d'età. Le attività strutturate si presentano non come semplici esercizi, ma come dispositivi di mediazione complessi che integrano consegne calibrate sul livello cognitivo degli studenti, riferimenti storici contestualizzati, percorsi di scoperta guidata e opportunità di lavoro in piccoli gruppi.

Notevole risulta l'approccio sistematico proposto da Bütüner in una serie di studi correlati (2015b, 2016, 2020). Questa linea di ricerca introduce un elemento innovativo attraverso l'implementazione di attività laboratoriali con manipolativi, specificamente oggetti e modelli geometrici in legno, come il tronco di piramide a base quadrata o moduli numerici tridimensionali (Bütüner, 2015b, 2016; Bütüner & Baki, 2020). Tale approccio si fonda su una concettualizzazione dell'apprendimento matematico come processo embodied, dove la manipolazione concreta di oggetti storicamente ispirati permette di superare l'astrazione prematura dei concetti geometrici, fornire un ancoraggio sensoriale concreto che consente di cercare, sperimentare e sforzarsi a trovare forme di ragionamento e argomentazione, riportate poi sulle schede di lavoro strutturate. Questo approccio si allinea con le teorizzazioni dell'embodied cognition (Lakoff & Núñez, 2000) e suggerisce che la storia della matematica possa fungere non solo da contesto narrativo ma da mediatore materiale dell'apprendimento.

In contrasto con l'approccio manipolativo, gli studi di De Vittori et al. (2024), Şahin e Danaci (2022), e Sevinc e Ay (2021) adottano configurazioni didattiche più tradizionali che incorporano lezioni introduttive frontali, aumentando significativamente il ruolo di mediazione diretta del docente. Questa scelta metodologica rappresenta un modello dove il docente assume un ruolo più centrale nella contestualizzazione storica, la narrazione storica precede e inquadra l'attività degli studenti, sicché la mediazione verbale-simbolica prevale su quella manipolativa. Le attività prevedono l'uso di worksheet con attività di manipolazione e scoperta di sistemi di numerazione diversi, come quello cinese medievale.

Questi studi hanno effettivamente riscontrato dei cambiamenti generalmente positivi nella visione epistemologica degli studenti e nei loro atteggiamenti nei riguardi della matematica e della loro motivazione all'apprendimento, incrementando l'engagement e l'interesse. Tuttavia, nello studio di De Vittori, Louaked e Visentin (2024) è esplicitato come l'efficacia dell'intervento sia blanda

e irrisoria, in linea con i risultati delle metanalisi sul tema: «The analysis of the data does not show any overall benefit for the students» (p. 121).

Si può cautamente affermare che da questi studi emergono due possibili strutture didattiche contrapposte: da un lato la struttura di tipo esperienziale e manipolativa di Bütüner, le cui radici possono essere ricercate, traslando in modo meramente analogico dal contesto turco a quello italiano, nell'opera di Emma Castelnuovo (Castelnuovo, 1963). Qui la storia della matematica si costituisce uno sfondo integratore o paratesto per attività concrete di tipo laboratoriale. Dall'altro, la struttura didattica di tipo narrativo-contestuale, su cui si basano gli studi di De Vittori, di Şahin e di Sevinc (De Vittori, Louaked e Visentin, 2024; Şahin & Danaci, 2022; Sevinc & Ay, 2021), privilegia la comprensione storica come cornice di senso per l'attività matematica. De Vittori, in particolare, considera l'uso delle fonti storiche come strumento per rivalutare le proprie conoscenze matematiche, incoraggiando gli studenti a modificare sia le proprie concezioni che quelle derivate dal passato (De Vittori, 2018; De Vittori, Louaked e Visentin, 2024).

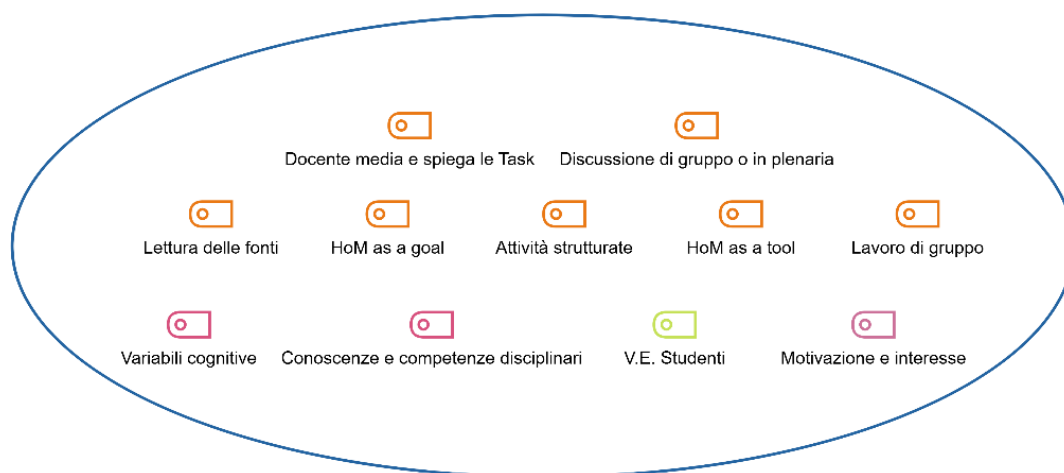
Queste due possibili strutture, con i loro diversi outcome, suggeriscono che l'efficacia dell'integrazione storica possa essere fortemente mediata da diversi fattori, come la coerenza tra approccio pedagogico e obiettivi di apprendimento, la preparazione specifica dei docenti nell'orchestrare attività storico-matematiche e l'allineamento con le epistemologie didattiche prevalenti nel contesto educativo.

4.3.2.3 Scuola secondaria di II grado

L'analisi delle pratiche didattiche implementate nella scuola secondaria superiore registra 8 studi codificati, rivela un quadro caratterizzato da importanti disparità geografiche e, paradossalmente, da notevoli convergenze metodologiche che meritano un'analisi critica approfondita. Il dato più problematico che emerge dall'analisi riguarda la distribuzione geografica degli studi: solo 3 su 8 (37,5%) provengono dal contesto europeo (Demattè & Furinghetti, 2022; Panagiotou, 2014; Jankvist, 2014a, 2014b), mentre i restanti si distribuiscono tra contesti asiatici, africani e sudamericani. Questa dispersione geografica, più marcata rispetto ai livelli scolastici precedenti, pone sfide metodologiche sostanziali per la sintesi della ricerca. Per mitigare questa limitazione, è stata adottata una strategia di triangolazione metodologica attraverso l'esame dettagliato degli studi inizialmente esclusi dalla codifica sistematica (Kapofu & Kapofu, 2020; Tong et al., 2019; Sampaio & Batista, 2018; Dias, Araujo & Ota, 2017; Lim & Chapman, 2015). Si tratta di dati non riportati su MAXQDA, dove le 3 co-occorrenze sono state

osservate visualmente con il grafico seguente: tutti i codici si interconnettevano tra di loro con $F \geq 2$, tale da richiedere una maggiore cura nell'esposizione grafica.

Grafico 6: Co-occorrenze nel corpus di pratiche relative alla scuola secondaria di II grado



Nonostante l'eterogeneità geografica, gli studi convergono nell'identificare trasformazioni positive su dimensioni multiple cooccorrenti che potrebbero rinforzarsi reciprocamente: la trasformazione della visione epistemologica verso una dimensione processuale della disciplina potrebbe facilitare la comprensione concettuale e, a sua volta, alimentare la motivazione, creando circoli virtuosi d'apprendimento storicamente situato. Chiaramente, non si tratta di concatenazioni basate su logiche di causa-effetto, bensì di semplici co-occorrenze: nei casi esaminati si è registrata la loro compresenza.

In linea di massima, la lettura trasversale e l'analisi dei codici cooccorrenti rivela una struttura ricorsiva della metodologia didattica adottata nelle sperimentazioni la cui articolazione presenta le seguenti caratteristiche:

1. Attività strutturate mediante schede di lavoro progettate, intese come dispositivi di mediazione didattica complessi che integrano estratti di fonti storiche opportunamente contestualizzati, consegne progressivamente graduate che guidano l'esplorazione critica e spazi per la riflessione metacognitiva (cfr.: Demattè & Furinghetti, 2022; Panagiotou, 2014; Jankvist, 2014a, 2014b). Attività di elaborazione che trattassero esplicitamente le meta-questioni della disciplina, così

come le discussioni plenarie del prodotto, consentono di creare occasioni di socializzare e negoziare le interpretazioni (Jankvist, 2014a, 2014b). Nel caso specifico di Panagiotou (2014), queste si sono presentati come brevi saggi di approfondimento basati su una breve introduzione agli “Elementi” di Euclide e la sua importanza nella storia della matematica, presentando poi i suoi primi tre postulati; seguono estratti di letture, approfondimenti liberi condotti dagli studenti e attività di scrittura basate su quei contenuti, strettamente legati alle questioni interne della matematica classica: attività che prevedono la risoluzione di problemi storici, la parafrasi di un testo matematico in un linguaggio moderno e spiegare i passaggi di una dimostrazione matematica giustificandone alcuni passaggi.

2. Lettura e analisi di fonti primarie: l’engagement diretto con estratti di testi storici di matematica si presenta come elemento centrale, costituendo un dialogo tra passato e presente attraverso il quale gli studenti si confrontano con i problemi reali¹⁸; un approccio, questo, che si radica nell’ermeneutica (Gadamer, 2006; Barbin, 1997), dove la comprensione richiede ricostruzione interpretativa del contesto originario. Il testo originale può essere integrato o con commenti esplicativi del docente, che interrompe la lettura e media registri semiotici diversi (cfr. al riguardo i risultati di Maffia, 2019) o con note e illustrazioni interne all’estratto antologico che, tuttavia, non ne alterano l’autenticità (Jankvist, 2014a, 2014b).

3. Dimensione collettivamente strutturata: il lavoro di gruppo non definisce una modalità organizzativa accessoria, ma costituisce un elemento cardine del processo di costruzione del significato: gruppi di studenti lavorano sui testi, confrontandosi con le diversità linguistiche e logiche della matematica del passato, mentre il docente gira per la classe rispondendo alle domande (Jankvist, 2014a, 2014b). Nel caso di Jankvist (2014a, 2014b) l’approccio adottato da docente è quello di uno scaffold vertendo verso una lettura guidata (Barnett et al., 2014), offrendo un modo sensato di gestire le barriere linguistiche di accesso alle fonti originali. Il testo è integrato o con commenti esplicativi del docente o con note e illustrazioni che non alterano il testo originale. In altri casi, il lavoro di gruppo, che si è configurato come vero e proprio *collaborative learning*, è consistito nello sviluppo di una applicazione web concernente l’approfondimento di alcune tematiche legate alla storia della matematica e l’influenza di civiltà antiche (Dias, Araujo & Ota, 2017).

¹⁸ La realtà dei problemi storici, come quelli tratti dall’*Abacus* nella sperimentazione di Dematté e Furinghetti (2022), non sono da intendere come “reali” nel senso di riferiti a situazioni autentiche della vita quotidiana, bensì perché espressioni di vite e pensieri autentici del passato.

4. Mediazione docente come orchestrazione: il ruolo del docente si presenta non come trasmettitore ma come orchestratore di esperienze cognitive, facilitando il dialogo tra studenti e fonti storiche, mediando le difficoltà interpretative, guidando la riflessione critica. Nel caso di Jankvist (2014a, 2014b) l'approccio adottato da docente è quello di uno scaffolder vertendo verso una lettura guidata (Barnett et al., 2014), offrendo un modo sensato di gestire le barriere linguistiche di accesso alle fonti originali. Nel caso del lavoro di Lim e Chapman (2015), il lavoro di mediazione concerneva anche l'uso di lezioni dirette e tradizionali durante le quali venivano introdotte le biografie di alcuni eminenti matematici, algoritmi risolutivi storicamente adoperati e confronti tra il linguaggio antico e moderno.

Adottando un punto di vista trasversale ai diversi livelli scolastici, queste analisi mostrano delle convergenze parziali sul piano metodologico, legate soprattutto all'uso di schede strutturate, alle attività di gruppo e al ruolo di mediazione docente.

4.3.4 Analisi tematica del cluster docenti

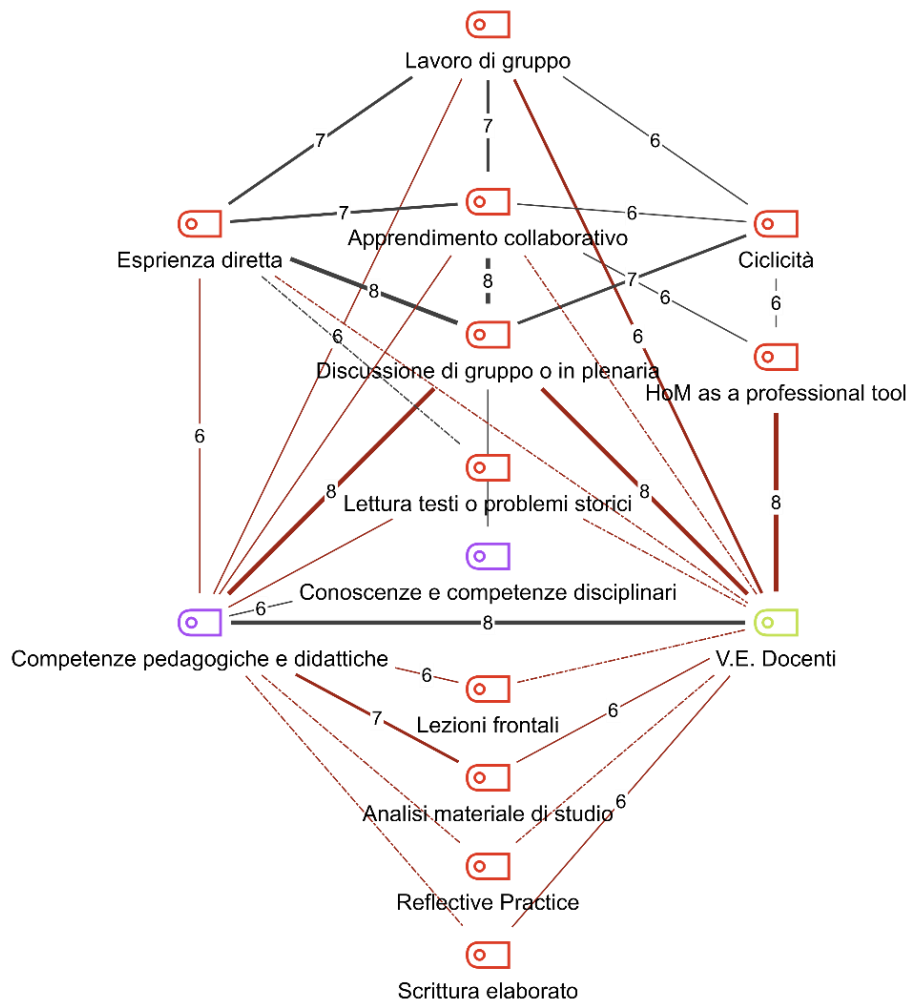
Nel corpus delle attività concernenti le pratiche didattiche condotte nel contesto della formazione docenti è stato possibile ricavare un modello formativo integrato emergente dalla letteratura scientifica: nonostante l'eterogeneità di obiettivi e fini che caratterizzano gli studi, è possibile ricostruire un modello ricorrente, seppur considerato limitatamente come frutti di un'aggregazione di dati provenienti da contesti nazionali diversi. In questo senso, a seguito della descrizione delle co-occorrenze più rilevanti emerse, si esporrà il percorso euristico che ha condotto alla formulazione di questo modello di struttura didattica che concerne prettamente la formazione docenti e che trova piena analogia con i pochi studi condotti in ambito prettamente universitario (Abah, 2017; Esteve, 2020; Florio, 2022; Rizos e Gkrekas, 2023). I risultati, più solidi, sono dovuti quindi a un corpus maggiore di articoli e pratiche esaminate: 18 paper su 31 presentano infatti pratiche relative alla formazione dei docenti. Si tratta di un cluster evidentemente meno segmentato rispetto al ben più frammentato gruppo di paper relativi alle sperimentazioni didattiche della HoM nei contesti scolastici.

4.3.4.1 Commenti all'analisi tematica: insight e ipotesi

Queste co-occorrenze sono state visualizzate su MAXQDA adottando una visualizzazione di frequenza pari a 6 ($F \geq 6$) come riportato nel grafico 7: lo spessore delle linee indica il grado di frequenza delle co-occorrenze che legano metodologie didattiche adottate con i benefici registrati dagli studi: frequenze pari

a 5 ($F = 5$) sono state ricavate confrontando la stessa mappa e interconnettendo soltanto quelle pratiche e attività che legavano con altre dimensioni d'effetto (come l'Esperienza diretta, apprendimento collaborativo, lettura di testi o problemi storici, lezioni frontali e uso di pratiche riflessive in relazione all'outcome di miglioramento e cambiamento della visione epistemologica dei docenti; mentre solo lezioni frontali e uso di pratiche riflessive sono state aggiunte in relazione all'outcome sul miglioramento delle competenze didattiche). Le co-occorrenze tra codici relativi alla pratica didattica e codici relativi agli outcome sono invece evidenziate in rosso.

Grafico 7: Diagramma delle co-occorrenze *relative alla formazione dei docenti*



Il diagramma risultante offre un interessante insight sulle tipologie di pratiche che si possono condurre nel contesto formativo dei docenti, individuando

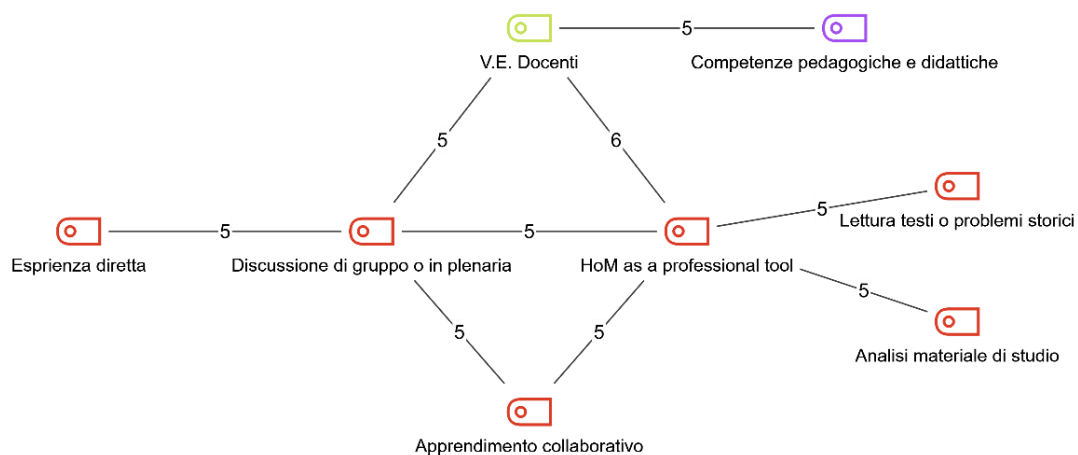
metodologie e pratiche che potrebbero incrementare più di una dimensione alla volta. Tra queste la discussione in plenaria o in macrogruppo costituisce una delle strategie più ricorrenti nella formazione dei docenti ($F = 8$), capace di incrementare la percezione delle competenze didattiche dei docenti e cambiare la visione epistemologica verso la propria disciplina. Sulle stesse dimensioni vale la pena menzionare l'analisi del materiale di studio ($F = 7$ e $F = 6$).

I cluster principali, così, concernono l'uso della HoM come strumento professionale legato all'attività di docenza: le attività descritte, infatti, fanno spesso riferimento all'idea che la storia costituisca uno strumento specificamente didattico, se non addirittura uno strumento valutativo-diagnostico (cfr.: Papadopoulos, 2024). Tra le attività didattiche prevalenti figurano l'analisi di materiale didattico, spesso in forma di libri o articoli concernenti la storia della matematica o l'alveo di ricerca della HPM. Il modello didattico prevalente rientra nel campo dell'apprendimento collaborativo, in cui, a seguito della lettura approfondita di testi o di presentazioni di problemi storici (Jankvist, Clark, & Mosvold, 2020; Zengin, 2018; White, et al., 2019; Guillemette, 2017; Moustapha-Corrêa, et al., 2021), si procede con dei lavori di gruppo, costituiti da elaborati didattici (schede di lavoro, lesson plan, portfolio ecc.) vengono discussi in plenaria o in gruppo (Dilek & Fadime, 2024; Moustapha-Corrêa, et al., 2021; Martins, et al., 2021; Jankvist, Clark, & Mosvold, 2020; Youchu, 2016; Loats, White, & Rubino, 2014; Despeaux, 2014), contribuendo a incrementare le conoscenze e competenze disciplinari (Martins, et al., 2021; Youchu, 2016; Despeaux, 2014), cambiare la visione epistemologica dei docenti (Moustapha-Corrêa, et al., 2021; Martins, et al., 2021; Jankvist, Clark, & Mosvold, 2020; Youchu, 2016; Loats, White, & Rubino, 2014) e incentivando una più positiva predisposizione verso l'integrazione della HoM nella didattica (Dilek & Fadime, 2024; Martins, et al., 2021; Loats, White, & Rubino, 2014). Questi aspetti sembrano contribuire a quella ciclicità dell'insegnamento professionale, volto a costruire competenze da applicare nel campo della professionalità del docente (Dilek & Fadime, 2024; Loats, White, & Rubino, 2014; Weldeana & Abraham, 2014; Zengin, 2018; Moustapha-Corrêa, et al., 2021; Jankvist, Clark, & Mosvold, 2020). Più volte sembra essere reputato necessario adottare un approccio legato alla lezione frontale (Zengin, 2018; Youchu, 2016; Weldeana & Abraham, 2014; Pjanić, 2020; White, et al., 2019; Guillemette, 2017; Dilek & Fadime, 2024; Madrid, et al., 2021).

4.3.4.2 Triangolazione delle co-occorrenze del diagramma

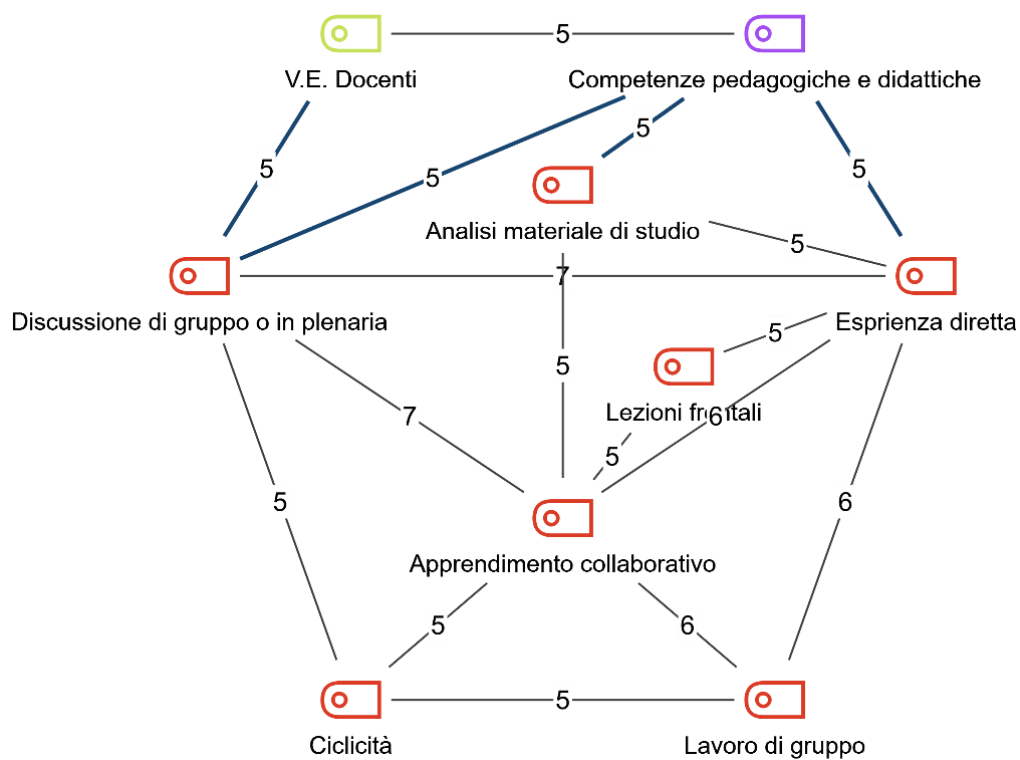
Per rafforzare gli elementi emersi dalle evidenze della letteratura scientifica, si è proceduto con la triangolazione delle co-occorrenze del diagramma seguendo due momenti: nel primo sono stati rimossi dall'analisi le ricerche condotte in Turchia e in aree non europee; in un secondo momento sono stati esclusi soltanto quelle d'area culturale extraeuropea. Questa operazione ha consentito di validare l'osservazione, permettendo di osservare le co-occorrenze senza che venissero invalidate da possibili sbalzi.

Grafico 8: Mappa co-occorrenze codici: escluse ricerche non europee e turchie



Il primo grafico mostra la mappa delle co-occorrenze escludendo studi d'area turca e non europea, adottando $F \geq 5$ su un corpus eterogeneo di 9 studi (Papadopoulos, 2024; Madrid, et al., 2021; Martins, et al., 2021; Pjanić, 2020; Jankvist, Clark, & Mosvold, 2020; White, et al., 2019; Guillemette, 2017; Gilmullin, 2015; Loats, White, & Rubino, 2014; Fenaroli, Furinghetti & Somaglia, 2014; Despeaux, 2014). Nonostante l'alto numero di studi, l'unica co-occorrenza forte che emerge riguarda il rapporto tra discussione di gruppo e mutamenti nella visione epistemologica dei docenti: tale pratica non è riconducibile meccanicamente ai modelli di apprendimento collaborativo. In linea di massima, prevale la visione della storia della matematica come strumento di sviluppo professionale, rafforzando l'idea della sua centralità. Assenti sono le altre interconnessioni notevoli, suggerendo l'incidenza dei contributi d'altre aree geografiche.

Grafico 9: Mappa co-occorrenze codici: escluse ricerche non europee



Attraverso l'inclusione degli studi condotti in Turchia (Dilek & Fadime, 2024; Bütüner, 2020; Zengin, 2018; Biber, İspir & Ay, 2015) si manifestano importanti contributi e influenze precedentemente discusse: in particolare si rafforza la connessione tra lavoro di gruppo, discussione di gruppo o in plenaria con il codice relativo all'apprendimento collaborativo, il quale, tuttavia, non trova connessione

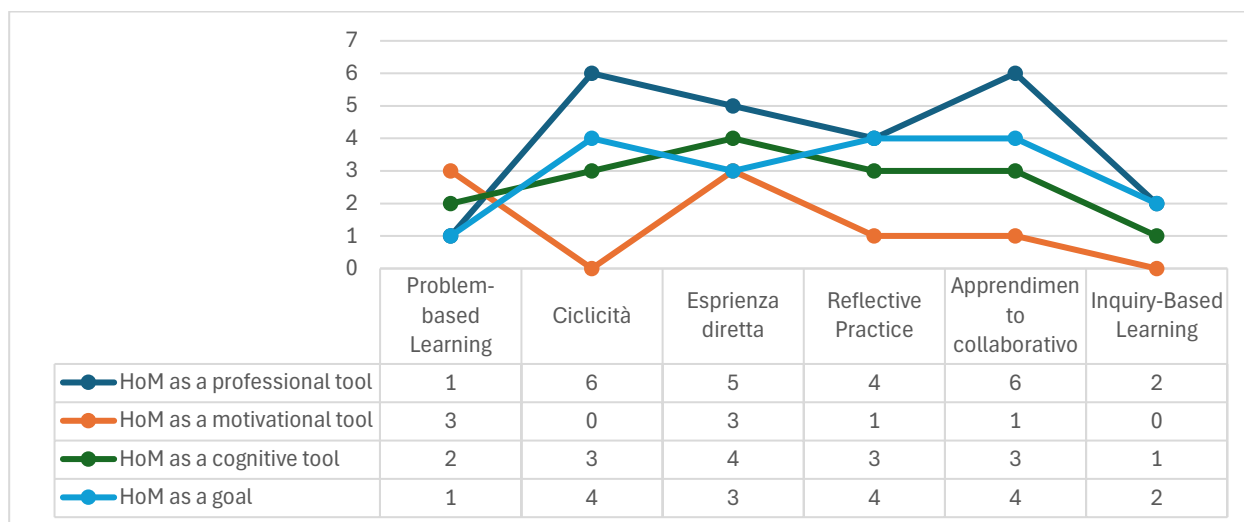
diretta con nessuno dei due principali benefici nella HoM sullo sviluppo del docente: la visione epistemologica dei docenti sembra subire mutamente negli stessi 5 studi d'area occidentale (Guillemette, 2017; Jankvist, Clark & Mosvold, 2020; Loats, White & Rubino, 2014; Martins et al., 2021; Pjanić, 2020). Inedita è la co-occorrenza tra l'incremento delle competenze pedagogiche e didattiche con rispettivamente la discussione di gruppo o in plenaria (Dilek & Fadime, 2024; Bütüner, 2020; Jankvist, Clark & Mosvold, 2020; Pjanić, 2020; Zengin, 2018), l'analisi del materiale di studio (Dilek & Fadime, 2024; Bütüner, 2020; Jankvist, Clark & Mosvold, 2020; Martins et al., 2021; Pjanić, 2020;) e l'esperienza diretta (Dilek & Fadime, 2024; Bütüner, 2020; Loats, White & Rubino, 2014; Pjanić, 2020; Zengin, 2018).

L'integrazione degli ultimi 3 studi internazionali (Moustapha-Corrêa, et al., 2021; Youchu, 2016; Weldeana & Abraham, 2014) rispettivamente condotti in Brasile, Cina ed Etiopia, configurano il disegno attuale.

4.3.4.3 Triangolazione delle co-occorrenze: la storia della matematica come strumento professionale

Nel tentativo di triangolare le co-occorrenze si è cercato anche di rafforzare la visione della HoM come strumento di potenziamento delle competenze didattiche del docente con le metodologie che sono emerse dalla lettura dei paper e quindi dal processo di codifica. Nel grafico che segue è possibile osservare le specifiche co-occorrenza tra quattro differenti approcci all'integrazione della *History of Mathematics* (HoM) e le sei strategie didattiche ricorrenti nella letteratura analizzata. Ogni linea corrisponde a una specifica modalità di impiego della HoM (come strumento professionale, motivazionale, cognitivo o come obiettivo) e mostra il numero di studi in cui tale approccio è stato associato a ciascuna delle seguenti pratiche pedagogiche: *Problem-Based Learning*, *Ciclicità*, *Esperienza diretta*, *Reflective Practice*, *Apprendimento collaborativo* e *Inquiry-Based Learning*.

Grafico 10: Co-occorrenze tra Metodologia e Ruolo d'uso della HoM



È interessante notare come l'elemento della *ciclicità* della formazione cooccorra sempre con approcci formativi che vedono la HoM come strumento cognitivo, professionale o come obiettivo a sé stante. Inoltre, la visione HoM come strumento motivazionale è strettamente legata a pratiche didattiche di tipo sia di tipo esperienziale che problem-based: tra l'altro, si tratta di due approcci parzialmente sovrapponibili ed effettivamente compresenti in più paper (cfr.: Pjanić, 2020; Bütüner, 2020; Zengin, 2018; Loats, White, & Rubino, 2014). Inoltre, la visione della HoM come specifico obiettivo didattico sembra essere maggiormente riportata in studi la ricerca fa ampio uso di pratiche riflessive o modalità didattiche basate sui principi dell'apprendimento collaborativo. Infine, le potenzialità dell'inquiry-based learning sembrano essere sottostimate e poco ricercate in letteratura, probabilmente per ragioni temporali: tali pratiche didattiche, infatti, richiedono un timing particolarmente elevato, coincidente con la durata di corsi per interi semestri (cfr.: Despeaux, 2014; Jankvist, Clark & Mosvold, 2020; Martins, et al., 2021).

Tra gli outcome la marcata predominanza delle competenze pedagogiche e didattiche (presente nel 56,3% degli studi analizzati), la visione epistemologica dei docenti (nel 43,8%), e Atteggiamenti, credenze e opinioni (nel 40,6%) sembra suggerire come la ricerca si orienti primariamente verso lo sviluppo di quella che Ball et al. (2008) definiscono *Mathematical Knowledge for Teaching*, con particolare enfasi sulla capacità di trasposizione didattica dei contenuti storico-matematici. Tale prevalenza riflette una concettualizzazione della formazione docente che supera la mera trasmissione di contenuti storici per focalizzarsi sulla costruzione di competenze operative di integrazione curriculare (cfr.: Youchu,

2016; Jankvist, Clark & Mosvold, 2020; Papadopoulos, 2024). Ciò richiede, effettivamente, un approccio trasformativo focalizzato alle concezioni epistemologiche dei docenti sulla natura della matematica (da disciplina statica e atemporale a costruzione storico-culturale dinamica) quale prerequisito fondamentale per un'integrazione autentica della dimensione storica nell'insegnamento (Furinghetti, 2007; Jankvist, 2009): Atteggiamenti, credenze e opinioni (40,6%), che completano la triade degli outcome maggiormente studiati, infatti, significativamente articolano in modo diverso posizioni relative alla HoM come strumento didattico (18,8%) e concezioni più ampie relative alla natura della matematica e il suo apprendimento (25%). In tal senso, inquadrare gli usi della HoM come strumento di promozione e incremento delle diverse dimensioni della MKT mantiene una propria validità trasversale che differenzia, al contempo, gli usi strumentali della HoM nel contesto formativo dei docenti dal loro effettivo uso nel contesto prettamente scolastico (cfr.: Youchu, 2016; Jankvist, Clark & Mosvold, 2020; Papadopoulos, 2024).

Queste analisi, che identificano pattern ricorrenti, consentono di identificare una struttura didattica trasversale che sarà identificata e commentata nelle conclusioni.

4.4 Commenti conclusivi alla review sistematica: i limiti della ricerca e i gap in letteratura

La presente revisione sistematica, pur adottando un approccio metodologicamente rigoroso basato sulle linee guida PRISMA 2020, presenta alcune limitazioni che meritano esplicitazione critica e che, al contempo, ne circoscrivono la portata interpretativa. In primo luogo, il processo di selezione e codifica, condotto da un singolo ricercatore, introduce un potenziale elemento di soggettività interpretativa che, sebbene mitigato attraverso strategie di documentazione sistematica e triangolazione metodologica, non raggiunge il livello di validazione formale garantito da procedure di doppia codifica indipendente. In secondo luogo, la strategia di ricerca, pur sistematica, si è limitata a tre database disciplinari (ERIC, EBSCO, zbMATH) senza ricorrere a procedure di *snowballing* o *backward* o *forward citation tracking*, che avrebbero potuto ampliare il già ampio corpus includendo studi rilevanti non intercettati dalla stringa di ricerca. Questa scelta, pur pragmatica, è stata motivata dalla necessità di mantenere uniformità nei criteri di selezione e garanzia di qualità, privilegiando letteratura *peer-reviewed* indicizzata in database disciplinari riconosciuti. Tale approccio, sebbene possa aver

escluso contributi significativi provenienti da contesti linguistici non anglofoni o da pubblicazioni in riviste non indicizzate, ha consentito di bilanciare ampiezza e profondità analitica, privilegiando l'analisi sistematica del corpus selezionato rispetto all'espansione quantitativa delle fonti. In terzo luogo, la definizione operativa di "pratica didattica descritta" ha mantenuto un grado di flessibilità che, se da un lato ha permesso l'inclusione di studi con diversi livelli di dettaglio metodologico, dall'altro ha generato un corpus eterogeneo la cui sintesi ha richiesto costanti operazioni di interpretazione e contestualizzazione. Infine, l'ampia eterogeneità metodologica, contestuale e geografica degli studi inclusi, pur rappresentando un punto di forza in termini di rappresentatività, ha reso problematica l'identificazione di pattern trasversali univoci, specialmente per il cluster degli studenti, dove la segmentazione per gradi scolastici e contesti nazionali ha impedito l'identificazione di una struttura didattica trasversale unitaria.

Al di là dei limiti metodologici, l'analisi ha evidenziato lacune significative nella letteratura scientifica internazionale che delineano aree prioritarie per future ricerche. Il gap più evidente riguarda la marcata sottorappresentazione della scuola primaria (6 studi, pari al 9,5% del totale), suggerendo una persistente concezione implicita della storia della matematica come risorsa didattica adeguata solo a partire dalla scuola secondaria. Gli studi esaminati, tuttavia, mostrano che approcci storicamente informati possano essere efficacemente adattati anche alla fascia 6-11 anni, aprendo interessanti prospettive per ricerche future in questo segmento educativo. Analogamente problematica risulta la concentrazione geografica degli studi sulla scuola secondaria di primo grado in contesto turco (6 su 7 studi), che, pur costituendo un contributo rilevante, solleva interrogativi sulla trasferibilità dei risultati ad altri sistemi educativi e tradizioni curriculari. La presenza di un solo studio europeo (De Vittori, Louaked & Visentin, 2024) in questo segmento, con tutte le criticità del caso (inefficacia dell'intervento proposto, effetto della pandemia sulla sperimentazione, ecc.), costituisce una lacuna significativa che limita la possibilità di confronti interculturali e comparazioni metodologiche.

Un secondo gap sostanziale concerne le dimensioni psicologiche riferite al dominio affettivo dell'apprendimento matematico storicamente situato. Nonostante la quasi totalità degli studi riporti incrementi nella motivazione e nell'interesse dei formandi (88,5%), variabili emotive critiche (come l'ansia matematica) risultano drammaticamente sottostudiate (2 studi, 6,5%), rivelando una disattenzione verso aspetti che la ricerca riconosce come barriere significative all'apprendimento matematico (Zan & Martino, 2007; Zakaria & Nordin, 2008; Belbase, 2013). Questa lacuna è ulteriormente evidenziata dalla scarsissima presenza di framework

teorici del dominio affettivo (Gruppo 3: 3,2%), limitati al solo costrutto di DeBellis e Goldin (2006), suggerendo come la ricerca HPM privilegi dimensioni epistemologiche e cognitive trascurando la complessità emotiva dell'esperienza di apprendimento, come già osservato da Jankvist (2011): la necessità di integrare i contributi della HPM con i framework teorici della didattica della matematica. Inoltre, correlato a questo nodo, emerge trasversalmente come la prevalenza di attività di gruppo negli studi (38,5% per studenti, 31,3% per docenti) non sia accompagnata da disegni sperimentali che controllino adeguatamente gli effetti delle dinamiche di gruppo. Nessuno degli studi esaminati distingue sistematicamente tra effetti attribuibili agli interventi integrati con la HoM in sé e benefici derivanti dall'interazione sociale strutturata (lavoro di gruppo o collaborative learning), impedendo di cogliere la portata dell'efficacia e rintracciare relazioni causali tra intervento integrato con la HoM e gli outcome osservati. In tal senso, dalla review emerge la necessità di ricerche con controllo più rigoroso delle variabili intervenienti.

In merito allo specifico contesto della formazione docente, in nessuno degli studi esaminati i materiali didattici storicamente informati sono stati autonomamente prodotti dai docenti: worksheet, schede, sequenze didattiche e più in generale le attività strutturate sono elaborate da ricercatori accademici esterni. Questa dipendenza strutturale da expertise esterne testimonia come la storia della matematica non costituisca ancora parte integrante del Mathematical Knowledge for Teaching dei docenti, rimanendo invece un sapere specialistico accessibile solo attraverso collaborazioni con storici della matematica o ricercatori HPM. Questa separazione tra teoria e pratica rappresenta un ostacolo sistemico che impedisce tanto l'integrazione sostenibile della HoM nell'insegnamento quotidiano quanto qualsiasi prospettiva di riforma curricolare, la quale richiederebbe competenze professionali diffuse e politiche educative istituzionali di supporto.

Infine, merita attenzione la problematicità dei risultati relativi ai risultati scolastici. Solo 5 studi su 31 (16%) documentano miglioramenti significativi nei risultati di apprendimento misurati attraverso prove standardizzate, mentre gli studi che confrontano direttamente gruppi sperimentali e di controllo riportano effetti nulli o trascurabili (De Vittori, Louaked & Visentin, 2024; Lim & Chapman, 2015), in linea con i risultati della metanalisi di Bütüner (2015a). Questa dissonanza tra l'entusiasmo qualitativo riportato (motivazione, engagement, trasformazione epistemologica) e l'assenza di miglioramenti quantificabili nelle performance solleva interrogativi fondamentali sulla natura stessa dei benefici dell'integrazione storica. Se la storia non migliora direttamente i risultati ai test standardizzati, ma

trasforma profondamente il modo in cui studenti e docenti concepiscono la matematica e il suo apprendimento, occorre forse riconsiderare quali outcome valutare e quali strumenti adottare. Il concetto di *dépaysement épistémologique* suggerisce che la storia possa operare una ristrutturazione profonda delle concezioni matematiche che non si traduce immediatamente in performance migliorata ai test convenzionali. Questa ipotesi richiederebbe ricerche longitudinali che traccino gli effetti della storia oltre l'immediato post-test, indagando se i cambiamenti epistemologici profondi si traducano in benefici a lungo termine attualmente non catturati dai disegni sperimentali brevi prevalenti nella letteratura.

Capitolo 5

Conclusioni

Questa ricerca ha preso le mosse da un paradosso apparente che caratterizza la letteratura scientifica sull'integrazione della storia della matematica nell'educazione. Da un lato, gli studi empirici documentano sistematicamente come l'esposizione a contenuti storici incrementi l'interesse, la motivazione e l'*engagement* degli studenti, trasformando il loro rapporto emotivo e cognitivo con la disciplina e modificando le loro concezioni epistemologiche sulla natura della matematica (Clark, 2012; Siu, 2006; Tzanakis et al., 2000). Dall'altro, le metanalisi che aggregano i risultati degli studi sperimentali controllati mostrano *effect size* modesti o statisticamente non significativi su misure standardizzate di profitto, sollevando interrogativi circa l'opportunità di investire tempo curricolare nell'integrazione storica (Bütüner, 2015a; Huntley & Flores, 2010; Lim & Chapman, 2015).

La tesi centrale è che tale contraddizione sia apparente anziché reale, e che derivi da un fraintendimento categoriale fondamentale: l'integrazione della storia della matematica nell'educazione costituisce una questione fondamentale pedagogica in quanto costituisce una scelta che coinvolge i fini educativi, la concezione della matematica da trasmettere, e il modello antropologico di persona "matematicamente formata" che si intende promuovere. Questa distinzione, radicata nella tradizione delle scienze dell'educazione, illumina la natura degli effetti osservati: se la storia della matematica opera sul piano pedagogico della formazione della persona piuttosto che sul piano didattico dell'acquisizione di competenze tecniche, allora la presenza di effetti significativi su dimensioni quali concezioni epistemologiche, atteggiamenti e identità matematica, accompagnata da effetti modesti sui risultati ai test standardizzati, ne costituisce una conferma anziché una contraddizione. La storia non è un mezzo più o meno efficiente per raggiungere fini didattici esterni ad essa, ma è parte costitutiva del fine stesso dell'educazione matematica, che non si esaurisce nella padronanza procedurale ma include la formazione di una cultura matematica consapevole (Fried, Guillemette & Jahnke, 2016).

Riconoscere questa distinzione porta a collocare gli aspetti metodologici o strumentali dell'uso della storia discussi nel capitolo 6 dentro una cornice interpretativa più ampia. La scelta di presentare la matematica come prodotto finito anziché come processo storico non è né neutra né tecnica, ma riflette una concezione pedagogica circa la natura della conoscenza matematica (come sistema di verità atemporali o come costruzione culturale storicamente situata) e circa il tipo di rapporto con il sapere che si intende promuovere negli studenti: come esecutori di algoritmi o come partecipanti a una più ampia (e se si vuole millenaria) tradizione intellettuale. L'integrazione della storia, in questa prospettiva, non costituisce un'aggiunta di contenuti a una struttura altrimenti immutata, bensì la trasformazione radicale della natura stessa di ciò che viene insegnato e appreso.

5.1 Le risposte alle domande della review

La revisione sistematica della letteratura condotta secondo le linee guida PRISMA 2020 ha permesso di verificare empiricamente se gli effetti documentati dalla ricerca siano coerenti con la natura pedagogica dell'integrazione storica qui sostenuta. La domanda di ricerca è stata deliberatamente formulata “al contrario” rispetto alla tesi: “Può un curriculum orientato alla storia della matematica avere ricadute positive sui risultati d'apprendimento degli studenti?” L'intento non era stabilire “se la storia funzioni” in termini di efficacia didattica comparata, ma verificare quali tipi di effetti emergessero e su quali dimensioni.

5.1.1 Quali caratteristiche metodologiche possiede la ricerca empirica sulla storia della matematica con docenti e con studenti?

Come documentato nel capitolo precedente, è la ricerca qualitativa a far da padrona nella ricerca sull'HPM. Molti degli studi si sono infatti concentrati nell'indagare l'efficacia degli interventi didattici esplorandone gli effetti con strumenti che spaziano dall'analisi documentale alle osservazioni sistematiche fino all'uso di report scritti dai partecipanti della ricerca. Strumenti che presentano un alto grado di intrusività in sede sperimentale e che sono facilmente suscettibili a bias nelle modalità di risposta: è tendenza comune ai partecipanti delle ricerche far corrispondere le proprie risposte alle aspettative del ricercatore, inficiando la qualità della ricerca.

La tradizione quantitativa pura, d'altro canto, tende ad assumere la portata di studi trasversali volti a offrire una misura del fenomeno in termini di diffusione o frequenza d'uso, offrendo delle fotografie statiche di una condizione, quella dello

stato attuale relativo all'uso della storia della matematica nell'istruzione scolastica, che presenta caratteri di trasversalità tale per cui le ragioni d'usi/non uso della storia possono definirsi a buon titolo come transnazionali, definendo un quadro che, malgrado gli sforzi, risulta immutato da più di un ventennio.

L'uso dei metodi misti, d'altro canto, coincidente con un quarto degli studi esaminati, consentirebbe di colmare, attraverso processi di triangolazione le lacune dei due approcci di ricerca. Tuttavia, considerando la natura formativa ed ermeneutica che caratterizza gli usi della HoM nell'educazione scolastica, è la componente qualitativa a costituire la dimensione più rilevanti.

Futuri sforzi di ricerca italiana potrebbero offrire un valido contributo a questo campo. Esiste effettivamente una tradizione di ricerca consolidata che potrebbe contribuire a meglio indagare le relazioni tra la componente affettiva e quella formativa (legata, ad esempio, agli effetti delle dinamiche di gruppo) per meglio testare la portata dei processi formativi. Anche ricerche a carattere longitudinale, magari adottando il modello di ricerca basato su serie temporali interrotte, può costituire una valida strategia sostenibile, capace di far cogliere la significatività e la permanenza degli apprendimenti di matematica vissuti attraverso esperienze formative basate sulla storia, l'ermeneutica e il dialogo, secondo una ben nota matrice di origine costruttivista.

5.1.2 Quali benefici si riscontrano nell'integrazione della storia della matematica nei docenti e negli studenti?

In merito ai benefici riscontrati dall'integrazione della HoM, la review conferma il pattern atteso: la ricerca documenta effetti significativi su dimensioni quali atteggiamenti verso la matematica, motivazione, *engagement*, percezione della disciplina come impresa umana e culturale, sviluppo di concezioni epistemologiche più mature circa la natura evolutiva della conoscenza matematica. Parallelamente, gli effetti su misure standardizzate di profitto matematico (quando presenti) risultano tendenzialmente modesti, spesso statisticamente non significativi, e comunque eterogenei tra studi diversi, suggerendo forte dipendenza da fattori contestuali e implementativi. Questa asimmetria non costituisce un fallimento dell'integrazione storica, ma una conferma della sua natura: essa opera efficacemente sul piano pedagogico della formazione, trasformando qualità come la concezione della disciplina, il rapporto affettivo e identitario con essa, la comprensione della sua natura culturale e storica. Non opera invece (o lo fa

presumibilmente solo indirettamente) sul piano dell'incremento di performance su competenze tecniche misurate attraverso prove standardizzate.

L'efficacia dell'integrazione storica appare fortemente mediata dalla qualità dell'implementazione, dalla formazione degli insegnanti, dalla coerenza tra approccio storico e modalità valutative. Si può immaginare che anche la durata e l'intensità dell'intervento giochino un ruolo chiave. Questa forte dipendenza da fattori contestuali suggerisce che la storia della matematica non costituisce un "metodo" standardizzabile e meccanicamente replicabile. Il fatto che alcuni studi documentino effetti positivi anche su misure di profitto mentre altri no non invalida la tesi pedagogica ma la rafforza: quando l'integrazione storica è implementata in modo coerente con una visione pedagogica complessiva, trasformando non solo i contenuti ma anche le modalità didattiche e valutative, allora essa può produrre effetti positivi anche su dimensioni misurabili; quando invece è implementata come "aggiunta" superficiale a un impianto didattico e valutativo tradizionale focalizzato su competenze procedurali, gli effetti rimangono confinati alle dimensioni affettive e motivazionali senza tradursi in incrementi di performance.

5.1.3 Esiste un modello didattico trasversalmente emergente dalla ricerca scientifica?

L'analisi delle co-occorrenze ha consentito di individuare le convergenze metodologiche nel corpus di studi esaminato, permettendo di identificare una struttura ricorrente che costituisce quello che possiamo considerare come una vera e propria struttura didattica integrata per la formazione docenti di matematica, a patto che si considera la HoM come parte della MKT (Mosvold, Jakobsen & Jankvist, 2014). Tale struttura di sintesi prevede l'alternarsi di diversi momenti la cui presenza/assenza dipende dagli obiettivi specifici cui tende l'attività formativa.

1) Progettazione: questa fase iniziale si caratterizza come momento fondativo essenziale per il formatore dei docenti, caratterizzato da due componenti principali: (a) la selezione focalizzata del contenuto storico-matematico, caratterizzato dall'identificazione di topic, problemi e fonti primarie che funzionino da nuclei tematici dell'intervento formativo; (b) la scelta dell'orientamento cui dare al percorso: nel caso dell'uso della HoM come strumento professionale, ciò implica anche un lavoro di selezione di possibili framework teorici di riferimento a carattere didattico che possono risultare in sintonia con i costrutti fondamentali della tradizioni di ricerca dell'HPM (come la teoria dei registri semiotici di Duval (2017), la commognizione di Sfard (2008) o la TSD di Brousseau (Brousseau & Warfield,

2014). Si tratta di approcci che generalmente rientrano nell'alveo delle prospettive educative di stampo costruzionista o socio-costruzionista.

2) Immersione nel materiale storico con modalità di engagement: si tratta di individuare le modalità di incontro e presentazione con la dimensione storica. Nella letteratura esaminata ciò avviene utilizzando le seguenti modalità: (a) engagement diretto con fonti primarie, adottando un approccio di tipo ermeneutico con un doppio movimento di traduzione-interpretazione. L'approccio ZIZO (Zoom-In e Zoom-Out) prevede in particolare l'alternarsi di diversi movimenti (immersione con studio intensivo di estratti; contestualizzazione socio-culturale e ritorno riflessivo sulla fonte con apprezzamento valutativo); (b) problem-solving storicamente situato, caratterizzato dall'uso di problemi storici catalizzatori cognitivi o di algoritmi risolutivi tipici di antiche civiltà, consentendo un'immersione operativa nella matematica del passato; (c) in alcuni casi l'incontro con la storia avviene direttamente nella forma mediata con framework strutturati o con materiali didattici già esistenti (Dilek & Fadime, 2024; White et al. 2019).

3) Elaborazione e produzione di artefatti: si tratta di una fase operativa centrale in cui ai docenti è richiesto o di lavorare in solitaria o di lavorare in gruppo nella produzione di artefatti didattici, come lesson plans, teaching plans e sequenze didattiche; si tratta di un momento di sintesi operativa dove la conoscenza storica si traduce in progettazione didattica. La dimensione collaborativa del lavoro, spesso in piccoli gruppi, emerso come modalità privilegiata, si presenta come un approccio pedagogicamente fondato, capace di articolare comunità di pratiche in miniatura dove la negoziazione di significati avviene attraverso la co-costruzione di interpretazioni e soluzioni.

4) Autoriflessione critica: si osserva come il dialogo costituisca un processo stratificato capace di operare su più livelli interconnessi: (a) il livello individuale ha previsto nelle ricerche un grado di strutturazione maggiore, attraverso pratiche di scrittura riflessiva guidata o l'uso di diari di apprendimento attraverso cui i docenti esplicitano e analizzano le proprie scelte di progettazione didattica, rispondono a prompt specifici e orientano l'attenzione verso la consapevolezza dei "perché" e dei "come" dell'integrazione storica; (b) il livello epistemologico è teso alla riflessione sulla natura della matematica, attraverso dibattiti su temi fondamentali (scoperta vs. invenzione), teso a cogliere le meta-issues che caratterizzano la disciplina matematica.

5) Condivisione e negoziazione collettiva: presente in molti degli studi analizzati, questa fase si configura come momento cruciale di socializzazione della conoscenza attraverso presentazioni formali, discussioni plenarie o un *peer feedback* strutturato. La centralità di questa fase evidenzia il riconoscimento del carattere sociale della costruzione della conoscenza professionale docente.

6) (Ri)progettazione informata ed eventuale implementazione: questo costituisce il momento culmine del processo che caratterizza quella circolarità che interconnette dinamicamente teoria e pratica. Può essere eseguendo veri e propri cicli di riprogettazione basati su una progettazione iniziale, successiva esposizione storica, riflessione e riprogettazione (cfr.: Youchu, 2016).

L'emergere trasversale di questa struttura, pur nelle variazioni contestuali, suggerisce l'esistenza di invarianti metodologiche che potrebbero costituire la base per la progettazione di interventi formativi *evidence-based* nel campo dell'integrazione storico-didattica della matematica.

5.1.3.1 Implicazioni per la formazione dei docenti

Inoltre, va osservato come quasi tutte le ricerche condotte su studenti fin qui esaminate hanno previsto l'uso di specifici fogli di lavoro la cui strutturazione è avvenuta da parte di ricercatori esterni provenienti prevalentemente dall'ambito accademico. Come notano Demattè e Furinghetti (2022) senza l'interazione tra educatori (ricercatori e insegnanti) e storici della matematica, non vi possono essere attività didattiche basate sull'uso della storia. Si può effettivamente osservare che questa condizione è vera trasversalmente in tutti i contesti scolastici fino adesso esaminati nei diversi contesti nazionali da cui proviene la letteratura di settore.

Ne consegue una osservazione centrale: la separazione che a monte riscontrano Demattè e Furinghetti (2022) tra teoria e pratica, tra storici della disciplina ed educatori della matematica, rivela *in nuce* come la storia della matematica, pur costituendo una risorsa didattica, non fa ancora parte integrante del bagaglio culturale dei docenti di ogni ordine e grado. Nessuno dei worksheet presentati o accennati nelle ricerche fin qui esaminate, infatti, sono effettivamente frutto della libera produzione dei docenti. Si tratta, in fin dei conti, di una questione strettamente correlata alla formazione dei docenti, dalle conoscenze dei contenuti e alle conseguenti conoscenze pedagogiche e didattiche, nonché, nel caso specifico della matematica, di inquadrare la HoM come parte integrante della *Mathematical Knowledge for Teaching* teorizzata da Ball e colleghi (2008) e sviluppata, con una

logica che ammicca alla Teoria Antropologica della Didattica (Chevallard, 2019), anche in riferimento alla storia della matematica (Pansell, 2023).

Le riflessioni emerse dall'analisi delle pratiche didattiche rivolte agli studenti evidenziano la centralità del ruolo docente e della sua preparazione nell'orchestrare efficacemente l'integrazione storica.

5.2 Riflessioni sull'integrazione della HoM nel contesto scolastico: contraddizioni ed emergenze alla luce del concetto di *dépaysement épistémologique*

L'analisi su studenti, diviso per livelli scolastici, ha evidenziato invece un panorama più complesso, caratterizzato da outcome eterogenei che accompagnano la varietà di approcci adottati nelle sperimentazioni. Questi aspetti offrono intuizioni utili per articolare una riflessione sull'integrazione della HoM nel contesto scolastico, riflettendo sui possibili meccanismi attraverso cui la storia trasforma l'esperienza di apprendimento e sui fattori che ne mediano l'efficacia.

5.2.1 Contraddizioni empiriche e fattori mediatori

Negli studi di De Vittori, Louaked e Visentin (2024) e di Matos e Kónya (2021) è emerso che l'integrazione della HoM non ha benefici significativi sui risultati scolastici rispetto alle attività regolari, presentando miglioramenti trascurabili, in linea con i risultati della metanalisi di Bütüner (2015a). I risultati di questa metasintesi sembrano effettivamente delineare un quadro che coincide con i risultati del ricercatore turco: cinque studi rivelano un miglioramento nelle dimensioni dei risultati scolastici (Filiz & Gür, 2023; Matos & Kónya, 2021; Bütüner, 2016; Ersoy & Öksüz, 2016; Lim & Chapman, 2015) e soltanto due ne rivelano un miglioramento nella dimensione dell'ansia (Igün, Dastan, & Altintas, 2023; Kapofu, & Kapofu, 2020); quest'ultima contraddetta dalla ricerca di Lim e Chapman (2015) dove l'uso della storia della matematica non ha sortito effetti nel confronto tra il gruppo sperimentale e il gruppo di controllo. Maggiore convergenza si riscontra negli aspetti legati alla visione epistemologica della disciplina (cfr.: tabelle in Appendice G)

Si può ragionevolmente affermare, in piena sintonia con le osservazioni di Bütüner (2015a), che questa condizione è potenzialmente attribuibile a molteplici fattori, tra cui:

(a) la qualità delle attività didattiche implementate, che consentirebbe di esperire uno stato di *dépaysement épistémologique* (Barbin, 1997) attraverso attività che richiedono una partecipazione che coinvolge la sfera cognitiva, affettiva e comunicativa, in linea con il framework della *commognitione* di Sfard (2008).

(b) le modalità specifiche di utilizzo della storia della matematica: in attività con un grado di strutturazione maggiore e, al contempo, fortemente imperniate in task tradizionali potrebbero contribuire a un effetto più blando della HoM (cfr.: Lim e Chapman, 2015; De Vittori, Louaked & Visentin, 2024).

(c) il livello di preparazione e competenza degli insegnanti nell'integrazione di contenuti storici: in molte ricerche trasversali condotte in diversi contesti nazionali, i docenti mostrano di non percepire adeguata familiarità con la storia della disciplina tale da permetterne loro un'adeguata integrazione nel contesto scolastico (cfr.: Alpaslan, İşıksal, & Haser, 2014; Goodwin et al., 2014; Bütüner, 2018; Escalona Rayes, et al., 2020; Kusumawati et al., 2020; Moyon, 2022).

(d) le caratteristiche dei campioni esaminati: i contesti sono tra loro molto eterogenei, coinvolgendo studenti da caratteristiche cognitive elevate (gifted) (cfr.: Karatas-Aydin, & Isıksal-Bostan, 2022), studenti in condizioni socioeconomiche elevate o che vivono in grandi città (cfr.: Bütüner, 2016; Ersoy & Öksüz, 2016; Filiz & Gür, 2023; De Vittori, Louaked & Visentin, 2024), fino ai contesti più rurali (cfr.: Şahin & Danaci, 2022).

Altro fattore risultante è che alcuni studenti coinvolti negli studi erano impegnati nella preparazione di esami standardizzati, spesso di carattere nazionale o centrale, determinando contesti in cui l'enfasi sulla risoluzione di problemi di routine è intervenuto negativamente sulla percezione della HoM come un elemento superfluo o confusivo piuttosto che come strumento di chiarificazione concettuale (Lim e Chapman, 2015; Başibüyük & Şahin, 2019).

5.2.2 Il *dépaysement épistémologique* come meccanismo interpretativo

Tuttavia, i benefici sono trasversalmente considerati positivi in letteratura, talché dai processi didattici incentrati sulla HoM emerge una questione cruciale: quali sono i meccanismi attraverso cui questa prospettiva trasforma l'esperienza di apprendimento? Una possibile interpretazione, in linea il punto di vista adottato, è che la HoM possa funzionare come dispositivo capace di innescare una condizione di *spaesamento epistemologico* (cfr.: De Vittori, Louaked & Visentin, 2024)

creando una situazione didattica radicalmente diversa dalle prassi cui sono usualmente abituati gli studenti. In questa cornice capace potenzialmente di azzerare le autopercezioni relative al rapporto tra il sé e la matematica, gli studenti potrebbero trovarsi posti su uno stesso piano indipendentemente dalle loro precedenti competenze e precomprensioni, configurando un “contratto didattico atipico” capace di annullare le preesistenti gerarchie del sapere in quanto si verrebbe a perdere familiarità con le metaregole che legittimano le pratiche matematiche scolastiche (cfr.: Sfard, 2008).

Il contributo di Barbin (1997), il quale introduce il concetto di *dépaysement épistémologique*, risulta perciò cruciale nell’esplicitare lo stato di disorientamento culturale che si osserva dal confronto diretto con i testi del passato, quando li affrontiamo senza filtri ermeneutici moderni. Secondo questa prospettiva, lo studente, nella lettura e confronto con un testo storico-matematico originale, anche in forma antologica, si ritrova a dover ricostruire e comprendere il ragionamento matematico nel suo contesto originario. Attraverso il confronto tra l’antico e il moderno permette di evidenziare come ciò che consideriamo banale sia in realtà inusuale e straniante: il turbamento cognitivo costituirebbe parte integrante del processo educativo attivato (cfr.: Lim & Chapman, 2015; Demattè & Furinghetti, 2022; De Verent & Décamp, 2022; De Vittori, Louaked & Visentin, 2024). In questo movimento di spiazzamento si articolano significati inediti, conferendo alla matematica una dimensione storica e un volto umano così da consentire agli studenti di porsi di fronte alle proprie assunzioni matematiche. Lo straniamento epistemologico assume così caratteri affettivi, rappresentando una rottura, un momento in cui ciò che è stato acquisito cessa di essere trasparente (De Vittori, Louaked & Visentin, 2024). In questo senso, sembra che la HoM non abbia un effetto di facilitazione dell’apprendimento; al contrario, potrebbe renderlo più complesso e cognitivamente sovraccaricante.

Tuttavia, se analizziamo i risultati riguardanti effetti psicologici derivanti dall’implementazione di pratiche didattiche con l’HoM (motivazione, ansia, visione epistemologica e percezione della disciplina) emerge un quadro più complesso e interessante: è stato già discusso come ricerche come quella di Ilgün, Dastan e Altintas (2023) mostrano un miglioramento delle percezioni e una riduzione dell’ansia; altre, come Lim e Chapman (2015), riportano esiti contraddittori. Si può ipotizzare come la differenza cruciale non risieda negli effetti della HoM in sé stessa, ma nella veste didattica con cui viene presentata e nella struttura pedagogica adottata. La HoM non produce automaticamente gli effetti desiderati sulla motivazione e l’ansia, bensì potrebbe essere il modo in cui è incarnata

didatticamente (il grado di autenticità storica, la libertà interpretativa concessa agli studenti, la consapevolezza epistemologica dell'insegnante) a determinare gli effetti derivanti da un uso consapevole e positivo dello spaesamento auspicato dal docente. La storia può creare scenari epistemologici e d'apprendimento stranianti, spaesanti, in modo da permettere agli studenti di prendere distanza dalle routine di classe. La storia, in tal senso, conferisce nuove vesti alla disciplina creando situazioni didattiche inedite capaci di azzerare le autoconvinzioni di efficacia circa la disciplina, permettendo il manifestarsi di comportamenti specificamente matematici senza necessariamente sortire gli effetti delle passate esperienze di apprendimento degli studenti (cfr.: Demattè & Furinghetti, 2022; De Vittori, Louaked & Visentin, 2024). È forse, questo, l'elemento di maggiore novità ed efficacia didattica che sorge dall'uso della storia della matematica nell'educazione della disciplina. Questi processi, desunti come ipotesi dalle ricerche analizzate, se adeguatamente operativizzati, potrebbero spiegare meglio le contraddizioni di efficacia o non efficacia di un dato intervento didattico basato sulla HoM.

5.2.3 Implicazioni per la formazione degli studenti

Queste dinamiche caratterizzano certamente il processo di confronto con le fonti primarie. Tuttavia, come notano Fried, Guillemette e Jahnke (2016) la storia della matematica, sganciando la disciplina dal contesto dell'utilità tecnico-strumentale, può consentire al docente di creare un contesto relazionale non valutativo che gli permetta di entrare in un rapporto più profondo con gli studenti. Attraverso un rapporto empatico mediato dalla disciplina storica, costituita da (per usare dei termini provenienti dalla TAD di Chevallard, 2019) *gesti didattici* che passino dal confronto con le fonti primarie, possibile cogliere come gli studenti prendano coscienza delle proprie percezioni, dei propri modi di rappresentarsi agli oggetti matematici in base al contesto, alla cultura e alle esperienze matematiche precedentemente vissute.

Il docente, mediando il testo, osservando le reazioni degli studenti ed ascoltandone i pensieri, può contribuire attivamente alla costruzione di una consapevolezza circa le proprie idee di individualità e confronto costruttivo con l'alterità, favorendo la crescita personale e lo sviluppo della propria personalità non in un contesto competitivo basato sulla performance, bensì sul rapporto dialogico con il prossimo: il gruppo presente, il docente e il testo storico, nonché l'immaginario collettivo che interessa le visioni epistemologiche della matematica come disciplina, e quindi i significati insiti nel *fare matematica*.

In tal senso, come afferma Fried (2007), la storia della matematica crea un movimento verso l'autocoscienza di sé come creatura che fa matematica, come *essere matematico*, sostenendo la crescita personale e lo sviluppo degli studenti secondo modalità che esulano da una visione dell'educazione come "addestramento tecnico":

«[Education], in general, is directed towards the whole human being, and, accordingly, mathematics education, as opposed to, say, professional mathematical training, ought to contribute to students' growing into whole human beings» (Fried, 2007, p. 219).

La storia della matematica diventa, da questa specifica prospettiva fenomenologica ed ermeneutica, come spazio capace di favorire il dialogo con l'altro e con i prodotti concettuali e storici di chi ci ha preceduto (Radford, Furinghetti & Katz, 2007), permettendo di prendere le distanze dalle proprie convinzioni implicite della disciplina e favorendo, al contempo, dentro un contesto "spaesante" e "straniante", nuovi modi di *essere-nella-matematica*.

La storia della matematica opera così su un piano che trascende la didattica per collocarsi in quello della pedagogia, trasformando gli studenti non in esecutori più abili di procedure o calcolatori più acuti e celeri, quanto in soggetti consapevoli della propria partecipazione a una tradizione intellettuale condivisa. È qui, nella formazione della persona matematicamente formata, che la storia realizza il suo fine autentico.

Bibliografia

- Abah, J. A. (2017). Viewing basic math through the lens of history: Undergraduates' reflective learning in a history-augmented mathematics classroom. *Waikato Journal of Education*, 22(4), 33–48.
- Agterberg, F., Oostdam, R., & Janssen, F. (2022). From speck to story: Relating history of mathematics to the cognitive demand level of tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 109(2), 299–320.
- Alpaslan, M., Işıksal, M., & Haser, Ç. (2014). Pre-service mathematics teachers' knowledge of history of mathematics and their attitudes and beliefs towards using history of mathematics in mathematics education. *Science & Education*, 23(1), 159–183
- Arthur, Y. D., Appiah, S. K., Amo-Asante, K., & Asare, B. (2022). Modeling Student's Interest in Mathematics: Role of History of Mathematics, Peer-Assisted Learning, and Student's Perception. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(10), 1-10.
- Avital, S. (1995). History of Mathematics Can Help Improve Instruction and Learning. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson & V. Katz (eds.), *Learn from the Masters*, The Mathematical Association of America, pp. 3–12.
- Baccaglini-Frank, A. E., Di Martino, P., Natalini, R., & Rosolini G. (2018). *Didattica della matematica*. Mondadori università.
- Baki, A., & Bütüner, S. O. (2018). A meta-synthesis of the studies using history of mathematics in mathematics education. *Hacettepe University Journal of Education*, 33(4), 824-845.
- Baki, A., & Gürsoy, K. (2018). Does using history of mathematics make sense? The views of teacher candidates. *Journal of Pedagogical Research*, 2(2), 78-90
- Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis & E. Simmt (Eds.), *Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3–14), Canadian Mathematics Education Study Group.

- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control*. Freeman.
- Barbin, É. (1997). Histoire des Mathématiques: Pourquoi? Comment? *Bulletin de l'Association Mathématiques du Québec*, 37(1), 20–25
- Barbin, É. (2006). Apport de l'histoire des mathématiques et de l'histoire des sciences dans l'enseignement. *Tréma*, 26(1), 20–28.
- Barbin, É. (2007). On the argument of simplicity in Elements and schoolbooks of Geometry. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 225–242
- Barbin, É. (Ed.). (2012). *Les mathématiques éclairées par l'histoire: Des arpenteurs aux ingénieurs*. Vuibert.
- Barbin, É., Bagni, G. T., Grugnetti, L., Kronfellner, M., Lakoma, E., & Menghini, M. (2000). Integrating history: research perspectives. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study, New ICMI Study Series*, vol. 6 (pp. 63–90). Kluwer.
- Barbin, É. & Tzanakis, C. (2014). History of mathematics and education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 255–260). Springer
- Barnett, J. H., Lodder, J. & Pengelley, D. (2014) The pedagogy of primary historical sources in mathematics: classroom practice meets theoretical frameworks. *Science & Education* 23(1), 7-27
- Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 746-783). Routledge.
- Başibüyük, K., & Şahin, Ö. (2019). Mathematics Teachers' Opinion about the History of Mathematics. *Acta Didactica Napocensia*, 12(2), 117-132.
- Beberman, M. (1958). *An emerging program of secondary school mathematics*. Harvard University Press.
- Behnke, H., Choquet, G., & Dieudonné, J. (1960). *Lectures on modern teaching of geometry and related topics: held at the ICMI-seminar in Aarhus, May 30 to June 2, 1960*. Mathematical Institute, University of Aarhus.
- Belbase, S. (2013). Images, Anxieties, and Attitudes toward Mathematics. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 1(4), 230-237.

- Bernardes, A., & Roque, T. (2018). History of matrices: Commognitive conflicts and reflections on metadiscursive rules. In K. M. Clark, T. H. Kjeldsen, S. Schorcht, & C. Tzanakis (Eds.). *Mathematics, education and history. ICME-13 Monographs*. Springer.
- Biber, B. T., İspir, O. A., & Ay, Z. S. (2015). An alternative teaching method for teaching history of mathematics: Creative drama. *İlköğretim Online*, 14(4), 1384-1405
- Bishop, A. J. (1995). Mathematics education between technology and ethnomathematics: should it be common? Does it make sense?, *Proceedings of CIEAEM* 45, 53-62.
- Bishop, J. P., Lamb, L. L., Philipp, R. A., Whitacre, I., Schappelle, B. P., & Lewis, M. L. (2014). Obstacles and affordances for integer reasoning: An analysis of children's thinking and the history of mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(1), 19-61
- Bloor, D. (1982). *Sociologie de la logique ou les limites de l'épistémologie*. Pandore.
- Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems. *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics*, 222-231.
- Bourbaki, N. (1949). Foundations of mathematics for the working mathematician. *The Journal of Symbolic Logic*, 14(1), 1-8.
- Bourbaki, N. (1950). The architecture of mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 57(4), 221-232.
- Branford, B. (1908). *A Study of Mathematical Education*. Clarendon Press.
- Brann, E. T. H. (1979). *Paradoxes of Education in a Republic*. Chicago University Press.
- Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, 3(2), 77-101. <https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa>
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Publishers.
- Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990*. Springer Netherlands.
- Brousseau, G., & Warfield, V. (2014). Didactic Situations in Mathematics Education. In S., Lerman, *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer.
- Brown, S. I. (1996). Towards humanistic mathematics education. In *International Handbook of Mathematics Education: Part 1* (pp. 1289-1321). Springer Netherlands.

- Bruner, J (1977). *Il processo educativo: Dopo Dewey*. Armando Editore.
- Bruni, E. M. (2005). *Greco e latino: le lingue classiche nella scuola italiana (1860-2005)*. Armando Editore.
- Burn, B. (1999). Integration, a genetic approach. *Nordisk Matematikk Didaktikk*, 7(1), 7–27.
- Burn, B. (2005). The vice: Some historical inspired and proof-generated steps to limits of sequences. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 269–295.
- Butterfield, H. (1931/1951). *The Whig Interpretation of History*. Charles Scribner's Sons.
- Bütüner, S. O. (2015a). Impact of Using History of Mathematics on Students' Mathematics Attitude: A Meta-Analysis Study. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 3(4), 337-349.
- Bütüner, S. O. (2015b). Using history of mathematics to teach volume formula of frustum pyramids: Dissection method. *Universal Journal of Educational Research*, 3(12), 1034-1048
- Bütüner, S. Ö. (2016). The use of concrete learning objects taken from the history of mathematics in mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(8), 1156-1178
- Bütüner, S. Ö. (2018). Secondary School Mathematics Teachers' Knowledge Levels and Use of History of Mathematics. *Journal of Education and Training Studies*, 6(1), 11-26.
- Bütüner, S. Ö. (2020). An evaluation of activities based on the use of the history of mathematics as a tool. *Journal of Pedagogical Research*, 4(2), 139-164.
- Bütüner, S.O. & Baki, A. (2020). The use of history of mathematics in the mathematics classroom: An action study. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology (IJEMST)*, 8(2), 92-117
- Cajori, F. (1894). *A history of mathematics*. Macmillan.
- Cambi, F. (2003). *Manuale di storia della pedagogia*. Laterza.
- Castelnuovo, E. (1946). Un metodo attivo nell'insegnamento della Geometria intuitiva, *Periodico di Matematiche*, 26(3), 129- 140.
- Castelnuovo, E. (1953). L'insegnamento della matematica della scuola media, *Il Centro, Bollettino bimestrale del Centro Didattico Nazionale*, 5(1), 11-19.
- Castelnuovo, E. (1957). L'insegnamento della matematica nella scuola preelementare ed elementare, *Scuola e città*, 3, 93-98.

- Castelnuovo, E. (1963). *Didattica della matematica*. La Nuova Italia.
- Castelnuovo, E. (1965). Belgio: matematica d'avanguardia. *Riforma della Scuola*. XI(5-6), 3-19.
- Castelnuovo, G. (1907). Il valore didattico della matematica e della fisica. *Rivista di Scienza* 1, 329–337.
- Castelnuovo, G. (1909). *Atti del IV Congresso internazionale dei matematici: Roma, 6-11 Aprile 1908*; Tipografia della Real Accademia dei Lincei.
- Castelnuovo, G. (1914). Discours de M. G. Castelnuovo, Publications du Comité central. Compte Rendu de la Conférence internationale de l'enseignement mathématique, Paris, 1-4 avril 1914, *L'Enseignement mathématique*, 16, 188-191.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1989). On didactic transposition theory: Some introductory notes. *Proceedings of the international symposium on selected domains of research and development in mathematics education*, 51–62
- Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique – Du savoir savant au savoir enseigné*. La pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73–112
- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de los didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221–266.
- Chevallard, Y. (2019). Introducing the anthropological theory of the didactic: An attempt at a principled approach. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 12, 71-114.
- Chevallard, Y., & Bosch, M. (2014). Didactic transposition in mathematics education. In *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 170-174). Springer.
- Chevallard, Y., & Sensevy, G. (2014). Anthropological Approaches in Mathematics Education, French Perspectives. In S., Lerman, *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer.
- Chiosso, G. (2012). *Novecento pedagogico. Profilo delle teorie educative contemporanee*. (Nuova ed.). La Scuola.
- Ciarrapico, L. (2002). L'insegnamento della matematica dal passato recente all'attualità. *Archimede-Rivista di Matematiche Pure e Applicate*, 54(3), 123-129.

- Ciarrapico, L., & Berni, M. (2017). *I curricoli di matematica, gli ordinamenti scolastici e le riforme dal 1940 al 2015*. Unione Matematica Italiana.
- Clark, K. M. (2012). History of mathematics: Illuminating understanding of school mathematics concepts for prospective mathematics teachers. *Educational studies in Mathematics*, 81, 67-84.
- Clark, K. M. (2014). History of Mathematics in Mathematics Teacher Education. In M. R. Matthews (eds.), *International Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching*, Springer Netherlands.
- Clark, K. M. (2019). History and pedagogy of mathematics in mathematics education: History of the field, the potential of current examples, and directions for the future. *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. ERME.
- Clark, K. M., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S., & Tzanakis, C. (2018). Introduction: Integrating history and epistemology of mathematics in mathematics education. *Mathematics, education and history: towards a harmonious partnership* (pp. 1-23). Springer.
- Clark, K. M., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S., & Tzanakis, C. (2019). History of mathematics in mathematics education—An overview. *Mathematica didactica*, 42(1), 3-28.
- Clark, K., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S., Tzanakis, C., & Wang, X. (2016). History of mathematics in mathematics education: Recent developments. In L. Radford, F. Furinghetti, & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting – HPM 2016* (pp. 135–179). IREM de Montpellier.
- Cohen, J., Welkowitz, J., & Ewen, R. B. (2000). *Introductory statistics for the behavioral science*. Harcourt Brace College Publishers.
- Collingwood, R. G., & Collingwood, R. (1994). *The idea of history* (Rev. ed.). Oxford University Press.
- Corry, L. (1989). Linearity and Reflexivity in the Growth of Mathematical Knowledge. *Science in Context*, 3(2), pp 409-440
- Cretu, D. M., & Ho, Y. S. (2023). The impact of COVID-19 on educational research: A bibliometric analysis. *Sustainability*, 15(6), 5219.
- Critical Appraisal Skills Programme (2024). *CASP qualitative checklist*, <https://casp-uk.net/casp-checklists/CASP-checklist-qualitative-2024.pdf> (ultimo accesso febbraio 2025).
- Csordas, T. J. (2002). *Body, meaning, healing*. Palgrave Macmillan.
- D'Ambrósio, U. (2006). *Ethnomathematics: Link between traditions and modernity*. Brill.

- D'Ambrosio, U. (2018). The program Ethnomathematics: Cognitive, anthropological, historic and socio-cultural bases. *PNA*, 12(4), 229–247.
- D'Ambrosio, U., & Rosa, M. (2017). Ethnomathematics and its pedagogical action in mathematics education. In M. Rosa, L. Shirley, M. E. Gavarrete, W. V. Alangui, *Ethnomathematics and its diverse approaches for mathematics education* (pp. 285-305). Springer International Publishing.
- D'Amico, N. (2010). *Storia e storie della scuola italiana. Dalle origini ai giorni nostri*. Zanichelli.
- D'Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Pitagora editrice.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Sbaragli, S. (2017). Sulla natura degli oggetti matematici, in relazione con la didattica della matematica. *La Matematica e la sua Didattica*, 25(2), 119-162.
- Dauben, J. W. (2002). United States. In J. W. Dauben and C. J. Scriba (eds.) *Writing the History of Mathematics: Its Historical Development* (pp. 263–285). Birkhäuser Verlag.
- De Finetti, B. (1965). Programmi e criteri per l'insegnamento della matematica alla luce delle diverse esigenze. *Periodico di Matematiche*, 43, 119–143
- De Varent, C., & Décamp, N. (2022). Impact of a sequence on the history of ancient mathematics informed by student experiences and teacher practices. *ZDM–Mathematics Education*, 54(7), 1553-1567.
- De Vittori, T. (2021). On the Role of Imagination in the Use of History in Mathematics Education. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 16(3), em0660.
- De Vittori, T., Louaked, G., & Visentin, M.P. (2024). Assessing the added value of a history-based activity for students with low mathematics skills. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 12(1), 112-127. <https://doi.org/10.30935/scimath/13868>
- DeBellis, V. A., & Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: A representational perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 63(2), 131-147.
- Decreto del Presidente della Repubblica 31 luglio 1981, n. 725. (1981). *Ristrutturazione degli istituti tecnici commerciali e per geometri*. Gazzetta Ufficiale della Repubblica Italiana, supplemento ordinario n. 310.

- Decreto Legislativo Luogotenenziale 25 maggio 1945, n. 459. (1945). *Norme transitorie per le scuole medie classiche, scientifiche, magistrali e di istituti tecnici*. Gazzetta Ufficiale della Repubblica Italiana, n. 64.
- Decreto Ministeriale 9 febbraio 1979, n. 268. (1979). *Programmi di insegnamento della scuola media*. Gazzetta Ufficiale della Repubblica Italiana, supplemento ordinario n. 50.
- Della Vecchia, G. (2023). La crisi dei fondamenti. *Periodico di Matematica*, 5(2), pp. 67-88.
- Demattè, A., & Furinghetti, F. (2011). History, figures, and narratives in mathematics teaching, MAA series. In V. Katz, C. Tzanakis, (eds.). *Recent developments on introducing a historical dimension in mathematics education* (pp. 103–112). Mathematical Association of America.
- Demattè, A., & Furinghetti, F. (2022). Today's students engaging with Abacus problems. *ZDM–Mathematics Education*, 54(7), 1521-1536.
- Despeaux, S. E. (2014). Collective research projects in the history of mathematics classroom. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 24(8), 684-697.
- Dias, E. J., Araujo Jr., C. F., & Ota, M. A. (2017). Tablets and applications to tell mathematics' history in high school. *Proceedings of the 13th International Conference Mobile Learning* (pp. 11-17). IADIS Press.
- Dieudonné, J. A. (1970). The work of Nicholas Bourbaki. *The American Mathematical Monthly*, 77(2), 134-145.
- Dieudonné, J. A. (1978). Evoluzione e progresso della matematica. In, Israel, G. (2013). *Il bourbakismo. Saggio sull'ideologia di una delle ultime scuole scientifiche con un'antologia di testi*. Edizione Amazon-Kindle.
- Dilek, G.Y. & Fadime, U. (2024). Investigating How Prospective Mathematics Teachers Prepare History Integrated Lesson Plans with Assessing Historical Elements in Mathematics Textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 22(2), 307–331
- Doerr, H. M., & Lesh, R. (2003). *Beyond constructivism: A models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Donoghue, E. F. (2006). The Education of Mathematics Teachers in the United States: David Eugene Smith, Early Twentieth-Century Pioneer. *Paedagogica Historica*, 42(4–5), 559–573.

- Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking. The registers of semiotic representations*. Springer International Publishing.
- Elton, G. R. (1967). *The Practice of History*. Collins.
- Enriques, F. (1921). L'insegnamento dinamico, *Periodico di Matematiche*, 4(1), pp. 6-16.
- Ernest, P. (1989). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: A model. *Journal of Education for Teaching*, 15(1), 13-33.
- Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. Falmer Press.
- Ernest, P. (2014). What is mathematics, and why learn it? In P. Andrews & T. Rowland (Eds.), *Masterclass in mathematics education: International perspectives on teaching and learning* (pp. 3-14). Bloomsbury.
- Ersoy, E., & Öksüz, C. (2016). Effect of using history of mathematics on elementary 4th grade students. *İlköğretim Online*, 15(2), 408-420.
- Escalona Reyes, M., Peña Garzón, L. G., & Rojas Velázquez, O. J. (2020). Potencialidades educativas de la historia en la educación matemática. *Revista Didasc@lia: Didáctica y Educación*, 11(1), 24–33.
- Escobar Villota, N. (2014). Elementos históricos para la enseñanza de la función logarítmica en la educación básica. *Revista Brasileira de História da Matemática*, 14(29), 83–115.
- Esteve, M. R. M. (2020). The algebraization of mathematics: Using original sources for learning mathematics. *Інновації у наставі*, 33(1), 21–35.
- Fasanelli, F., & Fauvel, J. (2006). History of the International Study Group on the relations between the history and pedagogy of mathematics: the first 25 years 1976–2000. In F. Furinghetti, S. Kaisjer, & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of HPM 2004 & ESU 4* (pp. x–xxviii). Iraklion, University of Crete, Greece
- Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 11(2), 3–6.
- Fauvel, J. (1995). Revisiting the History of Logarithms. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson, and V. Katz (eds.). *Learn from the Masters* (pp. 39–48). The Mathematical Association of America.
- Fauvel, J. van Maanen, J. (2000). *History in Mathematics Education: The ICMI Study*. Kluwer Academic Publishers.
- Fehr, H. F. (1961). The significance of this report. In OEEC, *New thinking in school mathematics* (pp. 207–210). OEEC

- Fenaroli, G., Furinghetti, F., & Somaglia, A. (2014). Rethinking mathematical concepts with the lens of the history of mathematics: An experiment with prospective secondary teachers. *Science & Education*, 23(1), 185-203.
- Fereday, J., & Muir-Cochrane, E. (2006). Demonstrating rigor using thematic analysis. *International Journal of Qualitative Methods*, 5(1), 80-92.
- Fernandez, C. (2014). Knowledge Base for Teaching and Pedagogical Content Knowledge (PCK): Some Useful Models and Implications for Teachers' training. *Problems of Education in the 21st Century*, 60(1), 79-100.
- Fey, J. T., & Graeber, A. O. (2003). From the new math to the Agenda for Action. In G. M. A. Stanic & J. Kilpatrick (Eds.), *A history of school mathematics* (pp. 521–558). National Council of Teachers of Mathematics.
- Filiz, A., & Gür, H. (2023). Examples of the Use of Mathematics History in Mathematics Teaching: Ascalon Multiplication Method, Gelosia Multiplication Method and Napier's Rods Method. *Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science and Mathematics Education*, 17(2), 878-908.
- Florio, E. (2022). The Parabola: Section of a Cone or Locus of Points of a Plane? Tips for Teaching of Geometry from Some Writings by Mydorge and Wallis. *Mathematics*, 10(6), 974; <https://doi.org/10.3390/math10060974>
- Franceschini, G. (2022). Didattica per l'educazione o didattica per l'istruzione? Il dilemma dell'educazione contemporanea. *Studi Sulla Formazione*, 25, 199-209.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. D. Reidel Publishing.
- Freudenthal, H. (1979). New math or new education? *Prospects: Quarterly Review of Education*, 9(3), 321–331.
- Fried, M. N. (2001). Can mathematics education and history of mathematics coexist?. *Science & Education*, 10(4), 391-408.
- Fried, M. N. (2007). Didactics and history of mathematics: Knowledge and self-knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 203–223.
- Fried, M. N. (2008). History of Mathematics in Mathematics Education: A Saussurean Perspective. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 5(2), 185–198.
- Fried, M. N. (2014). History of Mathematics in Mathematics Education. In M. R. Matthews (eds.), *International Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching*, Springer Netherlands.
- Fried, M. N. (2018). Ways of relating to the mathematics of the past. *Journal of Humanistic Mathematics*, 8(1), 3-23.

- Fried, M. N., Guillemette, D., & Jahnke, H. N. (2016). Theoretical and/or conceptual frameworks for integrating history in mathematics education. In L. Radford, F. Furinghetti, & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting – HPM 2016* (pp. 211–230). IREM de Montpellier.
- Furinghetti, F. (1997). History of mathematics, mathematics education, school practice: case studies linking different domains. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 55–61
- Furinghetti, F. (2000). The history of mathematics as a coupling link between secondary and university teaching. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 43-51.13. Glaubitz (2010)
- Furinghetti, F. (2004). History and mathematics education: A look around the world with particular reference to Italy. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 3(1-2), 1-20.
- Furinghetti, F. (2006). Due giornali ponte tra ricerca e scuola: la Rivista di Peano e il Bollettino di Loria. In Giacardi, L. (ed.). *Da Casati a Gentile. Momenti di Storia dell’Insegnamento Secondario della Matematica in Italia*. Lumières Internationales.
- Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in mathematics*, 66(2), 131-143.
- Furinghetti, F. (2015). Matematici e insegnamento della matematica a livello pre-universitario: Enrico Bompiani terzo presidente della CIIM La Matematica nella Società e nella Cultura. *Rivista dell’Unione Matematica Italiana*, 1(8), p. 75–109.
- Furinghetti, F. (2019). Challenges, hopes, actions, and tensions in the early years of the International Commission on the Teaching of Mathematics. In *National Subcommissions of ICMI and their Role in the Reform of Mathematics Education* (pp. 1-34). Springer International Publishing.
- Furinghetti, F. (2020). Rethinking history and epistemology in mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(6), 967-994.
- Furinghetti, F., & Menghini, M. (2023a). The Royaumont Seminar as a booster of communication and internationalization in the world of mathematics education. In D. De Bock (Ed.), *Modern Mathematics: An International Movement?* (pp. 55-78). Springer International Publishing.
- Furinghetti, F., & Menghini, M. (2023b). Modern Mathematics in Italy: A difficult challenge between rooted tradition and need for innovation. In D. De Bock (Ed.), *Modern mathematics: An international movement?* (pp. 147-168). Springer International Publishing.

- Furinghetti, F., & Radford, L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: rethinking phylogenesis and ontogenesis. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 631–654). Erlbaum.
- Furinghetti, F., & Radford, L. (2008). Contrasts and Oblique Connections between Historical Conceptual Developments and Classroom Learning in Mathematics. In L. English (ed). *Handbook of International Research in Mathematics Education, 2nd Edition* (pp. 626–655). Erlbaum
- Furinghetti, F., Menghini, M., Arzarello, F., & Giacardi, L. (2008). ICMI Renaissance: The emergence of new issues in mathematics education. In M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, & F. Arzarello (Eds.), *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education* (pp. 131–147). Istituto della Enciclopedia Italiana.
- Gabrielli, G. (2017). La rivoluzione dei consumi vista attraverso i problemi scolastici elementari. *Rivista di Storia dell'Educazione*, 4(2), p. 167-186.
- Gadamer, H.G. (2006). *Truth and method* (2nd rev. ed.). Continuum. (Pubblicato nel 1960)
- Galante, D. (2014). The Use of the History of Mathematics in the Teaching Pre-service Mathematics Teachers. *REDIMAT-Journal of Research in Mathematics Education*, 3(2), 110-120.
- Gasca, A.M. (2013). Riflessi della crisi nell'istruzione nei libri di testo: i manuali di matematica. In *Teste e testi: cosa c'è in gioco oggi quando parliamo di "libri di testo"*. Atti del Convegno Nazionale Federazione Gilda Unams, Padova 17 novembre 2011, Padova, Gilda degli Insegnanti, pp. 43-64.
- Gelmi, O. (2019). Pedagogia e didattica delle scuole nuove nei programmi nazionali della scuola elementare italiana del 1945. *CQIA Rivista Formazione Lavoro Persona*, 10(4), 1-17
- Gençkaya, Ş., & Tan-Şişman, G. (2021). The use of the history of mathematics in teaching-learning process: The perspectives of faculty members and teachers. *Psycho-Educational Research Reviews*, 10(2), 241-257.
- Genovesi, G. (2010). *Storia della scuola in Italia dal Settecento a oggi*. Laterza.
- Giacardi, L. (1999), Matematica e humanitas scientifica. Il progetto di rinnovamento della scuola di Giovanni Vailati. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 8(3), 317-352.
- Giacardi, L. (2006), L'insegnamento della matematica in Italia dall'Unità all'avvento del Fascismo. In Giacardi, L. (ed.). *Da Casati a Gentile. Momenti di Storia*

dell’Insegnamento Secondario della Matematica in Italia. Lumières Internationales.

- Giacardi, L. (2009). The Italian contribution to the International Commission on Mathematical Instruction from its founding to the 1950s. In Bjarnadóttir, K., Furinghetti, F., and Schubring, G. (eds), *Dig where you stand. Proceedings of the Conference on On-going Research in the History of Mathematics Education (Garðabær, Iceland, June 21–23, 2009)*, 47–64. University of Iceland, Reykjavik.
- Gilmullin, M. F. (2015). The Experiment Check of the Efficiency of the Historical Component Formation in Teacher’s Mathematical Methodological Culture. *International Education Studies*, 8(4), 218
- Gliozzi, M. (1932). Giuseppe Peano (27 agosto 1858 – 20 aprile 1932), *Archeion*, 14, pp. 254–255.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325– 355.
- Goodwin, D., Bowman, R., Wease, K., Keys, J., Fullwood, J., & Mowery, K. (2014). Exploring the relationship between teachers’ images of mathematics and their mathematics history knowledge. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 28.
- Gould, S. J. (1977). *Ontogeny and phylogeny*. Belknap Press of Harvard University Press
- Grattan-Guinness, I. (2004). The Mathematics of the Past: Distinguishing its History from Our Heritage. *Historia Mathematica*, 31, 163–185
- Grugnetti, L., & Rogers, L. (2000). Philosophical, Multicultural and Interdisciplinary Issues. In J. Fauvel and J. van Maanen (eds.), *History in Mathematics Education: The ICMI Study* (pp. 39–62). Kluwer Academic Publishers.
- Guerraggio, A. (2015). Scienza e società: storia e protagonisti della matematica italiana del’900. *PRISTEM/STORIA*, 2015(39-40), 57-74.
- Guerraggio, A. & Nastasi, P. (2005). *Matematica in camicia nera. Il regime degli scienziati*. Mondadori.
- Guillemette, D. (2017). History of mathematics in secondary school teachers’ training: towards a nonviolent mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 96(3), 349–365
- Guillemette, D. (2023). The Exploration of Inaugural Understandings in the History of Mathematics and Its Potential for Didactic and Pedagogical Reflection. In *The Role of the History of Mathematics in the Teaching/Learning Process: A CIEAEM Sourcebook* (pp. 17-32). Springer International Publishing.

- Gulikers, I. & Blom, K. (2001). 'A Historical Angle', a Survey of Recent Literature on the Use and Value of History in Geometrical Education. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 223–258.
- Haeckel, E. (1912). *The evolution of man*. London: Watts, & Co. (Original work published 1874)
- Handal, B. (2003). Teachers' mathematical beliefs: A review. *The Mathematics Educator*, 13(2), 47-57.
- Hart, L. (1989). Describing the Affective Domain: Saying What We Mean. In McLeod & Adams (Eds.) *Affect and Mathematical Problem Solving* (pp.37-45). Springer Verlag.
- Hasumi, T., & Chiu, M. S. (2022). Online mathematics education as bio-eco-techno process: bibliometric analysis using co-authorship and bibliographic coupling. *Scientometrics*, 127(8), 4631-4654.
- Heirdsfield, A. M., & Cooper, T. J. (2002). Flexibility and inflexibility in accurate mental addition and subtraction: Two case studies. *The Journal of Mathematical Behavior*, 21(1), 57-74.
- Heppel, G. (1893). *Nineteenth general report of the Association for the Improvement of Geometrical Teaching*. W. J. Robinson, 19-33.
- Hıdıroğlu, C. N. (2021). Secondary/High School Mathematics Teachers' and Mathematics Teacher Candidates' Opinions about HTTM (History/Theory/Technology/Modeling) Learning Process. *Acta Didactica Napocensia*, 14(2), 346-.
- Hıdıroğlu, Ç. N., & Özkan Hıdıroğlu, Y. (2016). Modelling processes of 4th-year middle school students and the difficulties encountered. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 16(5), 1715-1740.
- Higgins, J. P. T., Thomas, J., Chandler, J., Cumpston, M., Li, T., Page M.J., Welch V.A., (2019). *Cochrane handbook for systematic reviews of interventions*. Cochrane Collaboration and John Wiley & Sons Ltd.
- Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for research in mathematics education*, 39(4), 372-400.
- Hitchcock, G. (1992). The "great entertainment" dramatising the birth and the development of mathematical concepts. *For the Learning of Mathematics*, 12(1), 21-27.

- Hofer, B. K., & Pintrich, P. R. (1997). The development of epistemological theories: Beliefs about knowledge and knowing and their relation to learning. *Review of Educational Research*, 67(1), 88-140. <https://doi.org/10.3102/00346543067001088>
- Hoffmann, T. C., Glasziou, P. P., Boutron, I., Milne, R., Perera, R., Moher, D., Altman, D.G., Barbour, V., Macdonald, H., Johnston, M., Lamb, S.E., Dixon-Woods, M., McCulloch, P., Wyatt, J.C., Chan, A. & Michie, S. (2018). Migliorare il reporting degli interventi sanitari: la checklist TIDieR (Template for Intervention Description and Replication). *Evidence*, 10(9). DOI:[10.4470/E1000189](https://doi.org/10.4470/E1000189)
- Hong, Q. N., Fàbregues, S., Bartlett, G., Boardman, F., Cargo, M., Dagenais, P., Gagnong, M.P., Griffithsd, F., Nicolauh, B., O'Cathaini, A., Rousseauj, M.C., Vedela, I., & Pluye, P. (2018). The Mixed Methods Appraisal Tool (MMAT) version 2018 for information professionals and researchers. *Education for information*, 34(4), 285-291.
- Hoover, M., Mosvold, R., Ball, D. L., & Lai, Y. (2016). Making progress on mathematical knowledge for teaching. *The Mathematics Enthusiast*, 13(1), 3-34.
- Huntley, M. A., & Flores, A. (2010). A history of mathematics course to develop prospective secondary mathematics teachers' knowledge for teaching. *PRIMUS*, 21(6), 564-584.
- Ilgün, S., Dastan, Z., & Altintas, E. (2023). The Impact of Using Model-Based Activities Based on the History of Mathematics in Geometry Instruction on Students' Geometry Anxiety. *Educational Policy Analysis and Strategic Research*, 18(4), 292-309.
- Israel, G. (2013). *Il bourbakismo. Saggio sull'ideologia di una delle ultime scuole scientifiche con un'antologia di testi*. Edizione Amazon-Kindle.
- Jahnke, H. N. (1994). The historical dimension of mathematical understanding: objectifying the subjective. In J. P. daPonte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Lisboa (Vol. I, pp. 139-156). Departamento de Educação, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- Jahnke, H. N. (2001). Cantor's cardinal and ordinal infinities: An epistemological and didactic view. *Educational Studies in Mathematics*, 48(2/3), 175-197.
- Jahnke, H. N. (2014). History in mathematics education. A hermeneutic approach. In *Mathematics & mathematics education: Searching for common ground* (pp. 75-88). Springer Netherlands.
- Jahnke, H. N., Arcavi, A., Barbin, E., Bekken, O., Furinghetti, F., El Idrissi, A., da Silva, C. M. S., & Weeks, C. (2000). The use of original sources in the mathematics

- classroom. In J. Fauvel & J. Van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI Study* (pp. 291–328). Kluwer Academic Publishers.
- Jahnke, H. N., Jankvist, U. T., & Kjeldsen, T. H. (2022). Three past mathematicians' views on history in mathematics teaching and learning: Poincaré, Klein, and Freudenthal. *ZDM–Mathematics Education*, 54(7), 1421–1433.
- Jakobsen, A., Thames, M. H., Ribeiro, C. M., & Delaney, S. (2012). Using practice to define and distinguish horizon content knowledge. In *Preproceedings of the 12th International Congress on Mathematics Education, 8th–15th July, 2012* (pp. 4635–4644). Seoul, South Korea.
- Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the 'Whys' and 'Hows' of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 235–261. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9174-9>
- Jankvist, U. T. (2011a). An implementation of two historical teaching modules: Outcomes and perspectives. In E. Barbin, M. Kronfellner, & C. Tzanakis (Eds.), *History and epistemology in mathematics education: Proceedings of the 6th European Summer University* (pp. 139–152). Holzhausen Publishing.
- Jankvist, U. T. (2011b). History, application, philosophy (haph) modules in mathematics education. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference on the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol 1* (p. 323). PME. 20.
- Jankvist, U. T. (2014a). A historical teaching module on 'the unreasonable effectiveness of mathematics': Boolean algebra and Shannon circuits. *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics*, 29(2), 120–133.
- Jankvist, U. T. (2014b). The use of original sources and its potential relation to the recruitment problem. *For the Learning of Mathematics*, 34(3), 8–13
- Jankvist, U. T. (2015). Changing students' images of "mathematics as a discipline." *Journal of Mathematical Behavior*, 38, 41–56. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.02.002>
- Jankvist, U. T., & Kjeldsen, T. H. (2011). New avenues for history in mathematics education: Mathematical competencies and anchoring. *Science & education*, 20(9), 831–862.
- Jankvist, U. T., Clark, K. M., & Mosvold, R. (2020). Developing mathematical knowledge for teaching teachers: Potentials of history of mathematics in teacher educator training. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 23(4), 311–332.
- Jardine, R. (1997). Active learning mathematics history. *PRIMUS*, 7(2), 115–122.

- Kapofu, L. K., & Kapofu, W. (2020). "This Maths is better than that Maths" – Exploring Learner Perceptions on the Integration of History of Mathematics in Teaching the Theorem of Pythagoras: A Case Study. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(3), em0604
- Karatas-Aydin, F. I., & Isiksal-Bostan, M. (2022). Through their eyes: Gifted students' views on integrating history of mathematics embedded videos into mathematics classrooms. *SAGE Open*, 12(2), 21582440221099518.
- Katz, V. J., Dorier, J., Bekken, O., & Sierpiska, A. (2000). The Role of Historical Analysis in Predicting and Interpreting Students' Difficulties in Mathematics. In J. Fauvel and J. van Maanen (Eds). *History in Mathematics Education: The ICMI Study* (pp. 149–154). Kluwer Academic Publishers
- Kaygin, B., Balçin, B., Yildiz, C., Arslan, S. (2011). The Effect of Teaching the Subject of Fibonacci Numbers and Golden Ratio through the History of Mathematics. *Procedia Social and Behavioral Sciences* 15, 961–965.
- Khalaf, O. (2019). Censura e controceusura. I testi didattici inglesi nella scuola secondaria tra ideologia fascista e defascistizzazione". In Vicentini, A. & Lombardini, H. E. (Eds.), *Lingue seconde e istituzioni. Un approccio storiografico*, Quaderni del CIRSIL 13, CLUEB, 209-224.
- Kilpatrick, J. (2012). The new math as an international phenomenon. *ZDM Mathematics Education*, 44(4), 563-571.
- Kjeldsen, T. H., & Blomhøj, M. (2012). Beyond motivation: history as a method for learning meta-discursive rules in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 80(3), 327-349.
- Kjeldsen, T. H., & Petersen, P. H. (2012). History and the learning of mathematics: Detecting students' meta-discursive rules. *Proceedings of ICME 12: The 12th International Congress on Mathematical Education*.
- Klein, F. (1896). The arithmetizing of mathematics. An address delivered at the public meeting of the Royal Academy of Sciences of Göttingen, November 2, 1895 (I. Maddison, Trans.). *Bulletin of the American Mathematical Society*, 2(2), 241–249.
- Klein, F. (1939). *Elementary mathematics from an advanced standpoint: Part I: Arithmetic, algebra, analysis. Part II: Geometry* (E. R. Hedrick & C. A. Noble, Trans.). Dover Publications.
- Kleiner, I. (1993), Functions: Historical and Pedagogical Aspects, *Science & Education* 2, 183–209.
- Kolb, D. A., Boyatzis, R. E., & Mainemelis, C. (2000). Experiential learning theory: Previous research and new directions. In R. J. Sternberg & L. F. Zhang (Eds.),

- Perspectives on cognitive, learning, and thinking styles* (pp. 227-247). Lawrence Erlbaum.
- Kool, M. (1995). Using historical arithmetic books in teaching mathematics to low-attainers. *Proceedings of the First European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education*, 215-226.
- Kragh, H. (1987). *An Introduction to the Historiography of Science*. Cambridge University Press.
- Kronfeller, M. (2000). Duplication of the Cube. In J. Fauvel and J. van Maanen (eds.) *History in Mathematics Education: The ICMI Study* (pp. 265–269). Kluwer Academic Publishers.
- Kronfeller, M. (2002). A genetic approach to axiomatics. In I. Vakalis, D. Hughes-Hallett, C. Kourouniotis, D. Quinney, & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of ICTM2* (p. 51). Wiley.
- Kusumawati, I. B., Fachrudin, A. D., Kohar, A. W., & Widadah, S. (2020). History of mathematics for teaching mathematics: The case of Indonesian prospective teachers' beliefs and attitudes. *Universal Journal of Educational Research*, 8(6), 2305-2314.
- Lacey, H. (1998). *Is science value free? Values and scientific understanding*. Routledge.
- Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from*. Basic Books.
- Leder, G., Pehkonen, E., & Törner, G. (Eds.) (2002). *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* Kluwer.
- Legge 15 luglio 1877, n. 3961. (1877). *Legge sul rendere obbligatoria l'istruzione elementare* [Legge Coppino]. *Gazzetta Ufficiale del Regno d'Italia*, n. 173.
- Legge 31 dicembre 1962, n. 1859. (1962). *Istituzione e ordinamento della scuola media statale*. *Gazzetta Ufficiale della Repubblica Italiana*, n. 27.
- Lesh, R. A., & Doerr, H. M. (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Routledge.
- Lesh, R., & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763-804). Information Age Publishing.
- Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. In R. Lesh & A. Kelly (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 591-645). Lawrence Erlbaum.

- Lim, S. Y., & Chapman, E. (2015). Effects of using history as a tool to teach mathematics on students' attitudes, anxiety, motivation and achievement in grade 11 classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 90(2), 189–212.
- Loats, J., White, D., & Rubino, C. (2014). History of Mathematics: Three Activities to Use with Undergraduate Students and In-service Teachers. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 24(8), 698–709.
- Lu, X., Leung, F. K. S., & Li, N. (2021). Teacher agency for integrating history into teaching mathematics in a performance-driven context: A case study of a beginning teacher in China. *Educational Studies in Mathematics*, 106(1), 25–44.
- Luciano, E. (2006). Aritmetica e storia nei libri di testo della Scuola di Peano. In Giacardi, L. (ed.). *Da Casati a Gentile. Momenti di Storia dell'Insegnamento Secondario della Matematica in Italia*. Lumières Internationales, Lugano.
- Luciano, E. (2012). Peano and his school between Leibniz and Couturat: The influence in mathematics and in international language. In *New Essays on Leibniz Reception: In Science and Philosophy of Science 1800-2000* (pp. 41–64). Basel: Springer Basel.
- Luciano, E. (2014). Matematica e ideologia. Momenti di storia dell'insegnamento nel ventennio fascista. *Atti-Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, 172, 235–275.
- Luciano, E. (2023). Giornali matematici, politica e propaganda: il caso italiano fra le due guerre, in Gispert, H., Nabonnand, P., & Peiffer, J. (eds.), *De l'histoire des journaux mathématiques à l'histoire de la circulation mathématique*, ISTE.
- Luciano, E., & Alice, T. (2012). Federigo Enriques e l'impegno nella scuola. In *Conferenze e Seminari 2011-2012 dell'Associazione Subalpina Mathesis* (Vol. 1, pp. 185–207). Kim Williams Books.
- Luciano, E. & Roero, C.S. (2008). *Giuseppe Peano Matematico e Maestro*. Dipartimento di Matematica, Università di Torino.
- Madrid, M. J., Maz-Machado, A., Almaraz-Menéndez, F., & León-Mantero, C. (2021). Comparison between a modern-day multiplication method and two historical ones by trainee teachers. *Mathematics*, 9(4), 349.
- Maffia, A. (2019). Exploiting the potential of primary historical sources in primary school: a focus on teacher's actions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(3), 354–368.
- Manin, Y. I. (1991). Mathematics as metaphor. In I. Satake (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vol. 2, pp. 1665–1671). Springer-Verlag.

- Maracci, M. & Martignone, F. (2016). Mathematical competences: struggling for a definition. In C. Csikos, A., Rausch & J., Szitányi (eds.). *Proceedings of PME 40*, Szeged, pp. 259-266.
- Marafioti, G. (1967). *L'istruzione nel reame di Napoli durante il decennio dei Napoleonidi, 1806-1815: con particolare riferimento alle province della Calabria citeriore e ulteriore*, Pellegrini.
- Marchisotto, E. A. C. (1992). Mathematics as a Humanistic Discipline. *Humanistic Mathematics Network Journal*, 1(7), 9.
- Martins, A. P., Clain, T. C., Costa, C., Pinto, H., Ribeiro, A., Gomes, H., Menezes, L. (2021). Conceções e práticas de professores sobre a história no ensino da matemática num contexto de formação. *Millenium*, 2 (ed spec. n. 9). pp. 249-259
- Mashaal, M. (2006). *Bourbaki. A Secret Society of Mathematicians*. American Mathematical Society.
- Matos, Z., & Kónya, E. (2021). Teaching numeral systems based on history in high school. *Annales Mathematicae et Informaticae* 54, 195-204.
- McLeod, D. B. (1994). Research on Affect and Mathematics Learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 637–647.
- Meadows, M. & Caniglia J. (2021). That was then...This is now: Utilizing the history of mathematics and dynamic geometry software. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology*, 9(2), 198-212.
- Menghini, M. (2016). History of mathematics education—Italy. In *Encyclopedia of Life Support Systems (EOLSS)*. UNESCO-EOLSS.
- Mersin, N., & Durmus, S. (2021). Effects of the Enriched History of Mathematics Course on Prospective Mathematics Teachers. *International Journal of Curriculum and Instruction*, 13(1), 635-668.
- Ministero della Pubblica Istruzione. (1985). *Progetto per l'introduzione dell'informatica nella scuola secondaria superiore* [Piano Nazionale per l'Informatica - PNI]. Circolare Ministeriale n. 272.
- Ministero della Pubblica Istruzione. (1991). Piani di studio della scuola secondaria superiore e programmi dei primi due anni: Le proposte della Commissione Brocca. In *Studi e documenti degli annali della Pubblica Istruzione*, 56. Le Monnier.
- MIUR (2010a). Indicazioni Nazionali per i Licei. D.P.R. 15 marzo 2010, n. 89. Roma: Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca.
- MIUR (2010b). Linee Guida per gli Istituti Tecnici e Professionali. D.P.R. 15 marzo 2010, n. 88. Roma: Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca.

- Moon, B. (1986). *The 'new maths' curriculum controversy: An international story*. Falmer.
- Morandi, M. (2014). *La scuola secondaria in Italia. Ordinamento e programmi dal 1859 ad oggi*. Franco Angeli.
- Morin, U. (1965). Interpretazione di un progetto di matematica per il biennio liceale. *Archimede*, 17, 57–68.
- Mosvold, R., Jakobsen, A., & Jankvist, U. T. (2014). How mathematical knowledge for teaching may profit from the study of history of mathematics. *Science & education*, 23, 47-60.
- Moustapha-Corrêa, B., Bernardes, A., Giraldo, V., Biza, I., & Nardi, E. (2021). Problematizing mathematics and its pedagogy through teacher engagement with history-focused and classroom situation-specific tasks. *The Journal of Mathematical Behavior*, 61, 100840.
- Moyon, M. (2022). Desire of teachers and realities in textbooks: dealing with history of mathematics in the new French curriculum and its impact on teacher training. *ZDM–Mathematics Education*, 54(7), 1613-1630.
- Nane, G. F., Robinson-Garcia, N., van Schalkwyk, F., & Torres-Salinas, D. (2023). COVID-19 and the scientific publishing system: growth, open access and scientific fields. *Scientometrics*, 128(1), 345-362.
- Neale, D. (1969). The role of attitudes in learning mathematics. *The Arithmetic teacher*, Dec. 1969, 631- 641.
- Ness, H. (1993). Mathematics; an Integral Part of Our Culture. In A. M. White (ed.), *Essays in Humanistic Mathematics*, The Mathematical Association of America, pp. 49– 52
- Nicholls, J.G., Cobb, P., Wood, T., Yackel, E. & Patashnick, M. (1990), Assessing students' theories of success in mathematics: Individual and classroom differences, *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 109-122.
- Nickel, G. (2016). Nicht nur nach den reifen Früchten greifen: Mathematikgeschichte im schulunterricht. *Siegener Beiträge zur Philosophie und Geschichte und Philosophie der Mathematik (SieB)*, 7, 51-67.
- Niss, M. (1994). Mathematics in society. In R. Biehler, R.W. Scholz, R.Strässer, B.Winkelmann (eds). *Didactics of mathematics as a scientific discipline*, pp. 367-378.
- Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In A. Gagatsis, & S. Papastavridis (Eds.), *3rd Mediterranean conference on mathematical education* (pp. 115–124). Hellenic Mathematical Society and Cyprus Mathematical Society.

- Niss, M., & Højgaard, T. (2011). *Competencies and mathematical learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark* (English translation of Danish original). Roskilde University.
- Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational studies in mathematics*, 102(1), 9-28.
- Niss, M., & Jankvist, U. T. (2023). On the mathematical competencies framework and its potentials for connecting with other theoretical perspectives. In *Mathematical competencies in the digital era* (pp. 15-38). Springer International Publishing.
- Noddings, N. (1990). Constructivism in mathematics education. In R. B. Davis, C. A. Maher, & N. Noddings (Eds.), *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics, Journal for Research in Mathematics Education Monograph*, 4 (pp. 7-18).
- Noddings, N. (1993). *Educating for Intelligent Belief or Unbelief*, Teachers College Press.
- Oakeshott, M. (1933). *Experience and Its Modes*. Cambridge University Press.
- Oakeshott, M. (1999). *On History and Other Essays*. Liberty Fund, Inc.
- OECD. (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. PISA, OECD Publishing.
- OECD. (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. PISA, OECD Publishing.
- Pace, R., Pluye, P., Bartlett, G., Macaulay, A. C., Salsberg, J., Jagosh, J., et al. (2012). Testing the reliability and efficiency of the pilot Mixed Methods Appraisal Tool (MMAT) for systematic mixed studies review. *International Journal of Nursing Studies*, 49(1), 47-53.
- Page, M.J., McKenzie, J.E., Bossuyt, P.M., Boutron, I., Hoffmann, T.C., Mulrow, C.D., Shamseer, L., Tetzlaff, J.M., Akl, E.A., Brennan, S.E., Chou, R., Glanville, J., Grimshaw, J.M., Hróbjartsson, A., Lalu, M.J., Li, T., Loder, E.W., Mayo-Wilson, E., McDonald, S., McGuinness, L.A., Stewart, L.A., Thomas, J., Tricco, A.C., Welch, V.A., Whiting, P., & Moher, D. (2021). The PRISMA 2020 Statement: An Updated Guideline for Reporting Systematic Reviews. *BMJ*, 372, 71.
- Panagiotou, E. N. (2014). A Voyage of Mathematical and Cultural Awareness for Students of Upper Secondary School. *Science & Education*, 23, 79–123
- Panaoura, R. (2024), Prospective Teachers' Self-Regulation: The History of Mathematics as a Tool for Perseverance. *Education Sciences*, 14(12), 1335; <https://doi.org/10.3390/educsci14121335>

- Pansell, A. (2023). Mathematical knowledge for teaching as a didactic praxeology. *Frontiers in Education*, 8, 1-14.
- Papadopoulos, I. (2024). Use of mathematical problems rooted in primary historical sources to reveal preservice teachers' mathematical content knowledge. *The Journal of Mathematical Behavior*, 76.
- Paumier, A. S., & Aubin, D. (2016). Polycephalic Euclid? Collective practices in Bourbaki's history of mathematics. In *Historiography of Mathematics in the 19th and 20th Centuries* (pp. 185-218). Springer International Publishing.
- Pellerey, M. (1989). *Oltre gli insiemi*. Tecnodid
- Pellerey, M. (2004). *Le competenze individuali e il portfolio*. La Nuova Italia.
- Pepe, L. (2006). Insegnamenti matematici e libri elementari nella prima metà dell'Ottocento. Modelli francesi ed esperienze italiane. In Giacardi, L. (ed.). *Da Casati a Gentile. Momenti di Storia dell'Insegnamento Secondario della Matematica in Italia*. Lumières Internationales.
- Percival, I. (2001). An artefactual approach to ancient arithmetic. *For the Learning of Mathematics*, 21(3), 16-21.
- Perkins, P. (1991). Using History to Enrich Mathematics Lessons in a Girls' School. *For the Learning of Mathematics*, 11(2), 9-10.
- Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Information Age.
- Piaget, J., & Di Stefano, G. (1981). *L'equilibratura delle strutture cognitive: problema centrale dello sviluppo*. Boringhieri.
- Piaget, J., & Mennillo, A. (1973). *La nascita dell'intelligenza nel bambino*. La Nuova Italia.
- Pjanić, K. H. (2020). Use of Abu'l-Wafa's problem to foster pedagogical knowledge of prospective mathematics teachers. *Inovacije u nastavi*, 33(1), 89-96.
- Poincaré, H. (1899). La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement. *L'Enseignement Mathématique*, 1, 157-162.
- Popay, J., Roberts, H., Sowden, A., Petticrew, M., Arai, L., Rodgers, M., Britten, N., Roen, K., & Duffy, S. (2006). *Guidance on the conduct of narrative synthesis in systematic reviews: A product from the ESRC methods programme*. Lancaster University.

- Povey, H. (2014). 'Walking in a Foreign and Unknown Landscape': Studying the History of Mathematics in Initial Teacher Education. *Science & Education*, 23, 143–157
- Priestley, M., Biesta, G., & Robinson, S. (2015). *Teacher agency: An ecological approach*. Bloomsbury Academic.
- Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology, and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26-33.
- Radford, L. (2003a). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.
- Radford, L. (2003b). On the epistemological limits of language. Mathematical knowledge and social practice in the Renaissance. *Educational Studies in Mathematics*, 52(2), 123–150
- Radford, L., & Puig, L. (2007). Syntax and Meaning as Sensuous, Visual, Historical Forms of Algebraic Thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 145–164.
- Radford, L., Furinghetti, F., & Katz, V. (2007). Introduction: The topos of meaning or the encounter between past and present. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 107-110.
- Ralston, A. (2004). Research mathematicians and mathematics education: a critique, *Notices of AMS*, 51(4), 403-411.
- Regio Decreto 13 novembre 1859, n. 3725. (1859). *Legge sull'istruzione pubblica nel Regno* [Legge Casati]. *Gazzetta Ufficiale del Regno d'Italia*, n. 250.
- Rickey, V. F. (1996). The Necessity of History in Teaching Mathematics. In R. Caliger (ed.). *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching* (pp. 251–256). Mathematics Association of America.
- Ricky, V. F. (1995). My Favorite Ways of Using History in Teaching Calculus. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson & V. Katz (eds.), *Learn from the Masters*. The Mathematical Association of America, pp. 123–134.
- Rizos, I. e Gkrekas, N. (2023). Incorporating history of mathematics in open-ended problem solving: An empirical study. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 19(3), em2242. <https://doi.org/10.29333/ejmste/13025>
- Rosa, M., D'Ambrosio, U., Orey, D. C., Shirley, L., Alangui, W. V., Palhares, P., & Gavarrete, M. E. (2016). *Current and future perspectives of ethnomathematics as a program*. Springer Nature.

- Rousseau, R., Garcia-Zorita, C., & Sanz-Casado, E. (2023). Publications during COVID-19 times: An unexpected overall increase. *Journal of Informetrics*, 17(4), 101461.
- Russ, S., Ransom, P., Perkins, P., Arcavi, A., Barbin, E., Brown, G., & Fowler, D. (1991). The experience of history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 11(2), 7-16.
- Şahin, Ö., & Danaci, D. (2022). Investigating the effect of history-of-mathematics activities on middle-grade students' mental computation and opinions: An action research. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(9), 2281-2318.
- Sampaio, H.R. & Batista, I.L. (2018). Mathematics history and cognitive values on a didactic sequence: Teaching trigonometry. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, 7(3), 311-332.
- Sandelowski, M., & Barroso, J. (2007). *Handbook for synthesizing qualitative research*. Springer.
- Saussure, F. (1974). *Cours de Linguistique Générale*. C. Bally and Albert Sechehaye (eds.). Payot.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.
- Schommer, M. (1990). Effects of beliefs about the nature of knowledge on comprehension. *Journal of Educational Psychology*, 82(3), 498-504. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.82.3.498>
- Schubring, G. (2007). Ontogeny and phylogeny—categories for cognitive development. In F. Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings HPM2004 & ESU4* (revised edition, pp. 329–339). Uppsala Universitet
- Schubring, G. (2011). Conceptions for Relating the Evolution of Mathematical Concepts to Mathematics Learning—Epistemology, History, and Semiotics Interacting. *Educational Studies in Mathematics*, 77(1), 79–104
- Scott, J. (2009). Life, the Universe, and Everything: an Undiscovered Work of Benchara Branford. *Journal of the History of the Behavioral Sciences*, 45(2), 181–187.
- Semeraro, A. (1998). *Il sistema scolastico italiano*, Carocci.
- Sevinc, S., & Ay, B. (2021). Integration of Mathematics History into Model-Eliciting Activities for Making Sense of Negative Integers. In Olanoff, D., Johnson, K., & Spitzer, S., *Proceedings of the forty-third annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Philadelphia.

- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-31
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Siu, M.-K. (1995). Mathematical thinking and history of mathematics. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson, V. & Katz (Eds.), *Learn from the Masters* (pp. 279-282). Mathematical Association of America.
- Skemp, R. R. (1978). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 26(3), 9–15. <https://doi.org/10.5951/mtms.12.2.0088>
- Skott, J. (2001). The emerging practices of a novice teacher: The role of his school mathematics images. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 4, 3–28.
- Skrivanos, C., & Zhang, Q. (2013). Humanistic mathematics network newsletter: A bibliographic Report. *Journal of Humanistic Mathematics*, 3(1), 33-61.
- Smith, D. E. (1904). *The teaching of elementary mathematics*. The Macmillan Company
- Souto, R. Q., Khanassov, V., Hong, Q. N., Bush, P. L., Vedel, I., & Pluye, P. (2015). Systematic mixed studies reviews: Updating results on the reliability and efficiency of the Mixed Methods Appraisal Tool. *International Journal of Nursing Studies*, 52(1), 500-501.
- Spadafora G. (1997), *Interpretazioni pedagogiche Deweyane in America e in Italia*, Università di Catania.
- Stacey, K., & Turner, R. (Eds.). (2014). *Assessing mathematical literacy: The PISA experience*. Springer.
- Swetz, F. J. (1995). To know and to teach: mathematical pedagogy from a historical context. *Educational Studies in Mathematics*, 29, 73-88.
- Thalheimer, W., & Cook, S. (2002). How to calculate effect sizes from published research articles: A simplified methodology. *Work-Learning Research*, 1(9), 1-9.
- Thomaidis, Y. & Tzanakis, C. (2007). The Notion of Historical ‘Parallelism’ Revisited: Historical Evolution and Students’ Conceptions of the Order Relation on the Number Line. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 165–183.
- Thompson, A. G. (1991). The development of teachers’ conceptions of mathematics teaching. In R. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th annual meeting of the North*

- American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 8-14). PME-NA.
- Thomsen, M., & Jankvist, U. T. (2023). Geometrical reasoning in the intersection between historical original sources and the dynamic geometry environment GeoGebra. In *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (No. 16). ERME.
- Toeplitz, O. (1927). Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 36, 88–100.
- Toeplitz, O. (1963). *The calculus, a genetic approach*. The University of Chicago Press.
- Togliatti, E. G. (1963). L'insegnamento della matematica. In *Atti del Convegno: Insegnamenti scientifici e insegnamenti umanistici nella funzione formativa della scuola secondaria. Roma, 8–10 maggio 1962*. Accademia Nazionale dei Lincei
- Tomasi, L. (2012). La matematica nella scuola secondaria di II grado, dalle sperimentazioni degli anni Ottanta al riordino del 2010. *Annali online della Didattica e della Formazione Docente*, 4(4), 203-227.
- Tomasi, L., & Demattè, A. (2025). “Modern Mathematics” in Italy. In *History and Epistemology in Mathematics Education: Trends, Practices, Future Developments* (pp. 501-512). Springer Nature Switzerland.
- Tong, D. H., Loc, N. P., Uyen, B. P., & Y, T. T. (2019). Integrating the History of Mathematics into Mathematics Education: A Case Study of Teaching the Quadratic Equations. *Universal Journal of Educational Research*, 7(11), 2454-2462.
- Tossavainen, T., & Pehkonen, E. (2013). Three kinds of mathematics: scientific mathematics, school mathematics and didactical mathematics. *Far East Journal of Mathematical Education*, 11(1), 27.
- Toulmin, S. (2003). *The uses of argument* (Updated ed.). Cambridge University Press.
- Troy, E., Vasco, C. (2000). Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues. In *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 39-62). Springer Netherlands.
- Tymoczko, T. (1994). Humanistic and utilitarian aspects of mathematics. In D. F. Robitaille, D. H. Wheeler, & C. Kieran (Eds.), *Selected lectures from the 7th International Congress on Mathematical Education* (pp. 327-339). Les Presses de l'Université Laval.

- Tzanakis, C., & Thomaidis, Y. (2000). Integrating the close historical development of mathematics and physics in mathematics education: Some methodological and epistemological remarks. *For the Learning of Mathematics*, 20(1), 44–55.
- Tzanakis, C., & Thomaidis, Y. (2011). Classifying the arguments and methods to integrate history, in mathematics education: An example. In E. Barbin, M. Kronfellner, & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the 6th European summer university on the history and epistemology in mathematics education* (pp. 127-136). Holzhausen Verlag.
- Tzanakis, C., Arcavi, A., de Sá, C. C., Isoda, M., Lit, C.-K., Niss, M., de Carvalho, J. P., Rodriguez, M., & Siu, M. K. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study*, New ICMI Study Series, vol. 6 (pp. 201–240). Kluwe
- UMI - Commissione Italiana per l’Insegnamento della Matematica (2001). *Matematica 2001*. Unione Matematica Italiana.
- UMI - Commissione Italiana per l’Insegnamento della Matematica (2003). *Matematica 2003*. Unione Matematica Italiana.
- UMI - Commissione Italiana per l’Insegnamento della Matematica (2004). *Matematica 2004*. Unione Matematica Italiana.
- Van Amerom, B. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 63-75.
- Villa, M. (1962). Il discorso del Prof. Villa. *Bollettino della Unione Matematica Italiana*, s. 3, 17, 200–207.
- Vita, V. (1986). *I programmi di matematica per le scuole secondarie dall’unità d’Italia al 1986. Rilettura storico-critica*. Pitagora Editrice.
- Vygotsky, L. S. (1991). *Pensiero e linguaggio* [Thought and language] (L. Mecacci, Ed. & Trans.). Laterza.
- Washburne, C.W. (1957), *Filosofia vivente dell’educazione*. Monnier.
- Washburne, C.W. (1960), *Winnetka, storia e significato di un esperimento pedagogico*. La Nuova Italia.
- Washburne, C.W. (1970), La riorganizzazione dell’istruzione in Italia. *Scuola e città*, 6-7 luglio, pp. 273-277.
- Weldeana, H. N., & Abraham, S. T. (2014). The effect of an historical perspective on prospective teachers’ beliefs in learning mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17(4), 303–330

- Whitaker, M., Rodrigues, S., Cooke, G., Virlon, B., Donnelly, C. A., Ward, H., Elliot, P., & Chadeau-Hyam, M. (2025). How COVID-19 affected academic publishing: a 3-year study of 17 million research papers. *International Journal of Epidemiology*, 54(3), dyaf058.
- White, A. (1976). A New Paradigm for the mathematics classroom. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 7(2), 243-246.
- White, A. (1987). Mathematics as a Humanistic Discipline. In *The International Encyclopedia of Education*. Pergamon.
- White, D., Carruth, N., Eastes, J., Klyve, D., Otero, D., & Scoville, N. A. (2019). Using Primary Source Projects to teach undergraduate mathematics content: analysis of instructor implementation and perceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(7), 987-998.
- White, S. F. (1991). *Progressive Renaissance: America and the Reconstruction of Italian Education, 1943-1962*. Taylor & Francis.
- Winsløw, C. (2011). Anthropological theory of didactic phenomena: Some examples and principles of its use in the study of mathematics education. *Un Panorama de TAD, CRM Docume*, 117, 138.
- Wittgenstein, L. (1967), *Ricerche filosofiche*. Einaudi.
- Youchu, H. (2016). A qualitative study on the development of pre-service teachers' mathematical knowledge for teaching in a history-based course. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 12(9), 2599-2616
- Zakaria, E., & Nordin, N. M. (2008). The effects of mathematics anxiety on matriculation students as related to motivation and achievement. *Eurasia Journal of Mathematics Science and Technology Education*, 4(1), 27–30.
- Zan, R., & Martino, P. D. (2007). Attitudes towards mathematics: overcoming positive/negative dichotomy. *The Montana Mathematics Enthusiasts Monograph*, 3, 157–168
- Zengin, Y. (2018). Incorporating the dynamic mathematics software GeoGebra into a history of mathematics course. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(7), 1083-1098.
- Zhokhov, V. I. (2007). Universal learning activities as the basis for forming the teacher's mathematical and methodological culture. *Mathematics in School*, 7, 56-60.
- Zimmerman, B. J. (2002). Becoming a self-regulated learner: An overview. *Theory into Practice*, 41(2), 64-70.

Zopf, D. (2010). *Mathematical knowledge for teaching teachers: The mathematical work of and knowledge entailed by teacher education* (Unpublished doctoral dissertation). University of Michigan.

Appendici

Appendice A: Tabella sinottica degli studi esaminati

<i>Paper</i>	<i>Databas e</i>	<i>Paese</i>	<i>Approccio ricerca</i>	<i>Studio</i>	<i>MMAT</i>	<i>Partecipa nti</i>	<i>C</i>	<i>Fini della ricerca N. Obiettivi</i>
<i>De Vittori, Louaked, & Visentin, 2024</i>	ERIC	Francia	Disegno quasi- sperimentale	QNT Attività didattica	4	Studenti di scuola	106	Determinare se gli studenti traggano beneficio dall'uso della storia della matematica in classe <i>1. La storia della matematica aiuta gli studenti che hanno ottenuto scarsi risultati nei test di matematica a migliorare le loro competenze?</i>
<i>Dilek & Fadime, 2024</i>	EBSCO + ERIC	Turchia	Case-study singoli	QLT Attività didattica	5	Formazio ne docenti	24	Esaminare il potenziale ruolo dei problemi matematici basati su fonti storiche primarie come strumenti diagnostici per la didattica. <i>1. Esplora il ruolo dei problemi matematici basati su fonti storiche primarie come strumento diagnostico per valutare la comprensione dei futuri insegnanti riguardo ai concetti di area e volume</i>
<i>Panaoura, 2024</i>	EBSCO	Cipro	Studio quantitativo longitudinale	QNT	4	Studenti universitar i	48	Esaminare l'impatto dell'apprendimento della conoscenza della storia della matematica sulla disposizione dei partecipanti ad autoregolare il proprio comportamento didattico al fine di reagire in modo fluido e flessibile alle difficoltà incontrate durante l'apprendimento della matematica o durante l'insegnamento della matematica. <i>1. Indagare l'effetto del miglioramento dell'autoregolazione dei futuri docenti; 2. Esaminare l'impatto dell'apprendimento della storia della matematica sulla disposizione dei</i>

<i>Paper</i>	<i>Databas e</i>	<i>Paese</i>	<i>Approccio ricerca</i>	<i>Studio</i>	<i>MMAT</i>	<i>Partecipa nti</i>	<i>C</i>	<i>Fini della ricerca N. Obiettivi</i>
								<i>partecipanti ad autoregolare il loro comportamento di insegnamento;</i>
<i>Papadopoulos , 2024</i>	EBSCO	Grecia	Case-study singoli	QLT Attività didattica	3	Formazio ne docenti	252	Esaminare come i docenti in formazione valutano la storia della matematica presente nelle risorse curriculari (libri di testo. e come la integrano nei propri lesson plan attraverso una valutazione della presenza e della qualità degli elementi storici presenti nei libri di testo di matematica. <i>1. Sulla base delle dimensioni del modello 4S (formato, dimensione, posizione, contenuto, funzione e livello di richiesta cognitiva., in che modo i docenti in formazione valutano la qualità dei libri di testo di matematica?</i> <i>2. In che modo i docenti in formazione riflettono le proprie valutazioni nella progettazione dei lesson plan integrati con la storia della matematica utilizzando le dimensioni del modello 4S?</i> <i>3. In che misura i docenti in formazione preparano lesson plan integrati con la storia della matematica in base a specifici aspetti pedagogici (anticipazione del pensiero degli studenti, identificazione degli spunti didattici e definizione degli obiettivi di apprendimento.?</i>
<i>Filiz & Gür, 2023</i>	EBSCO	Turchia	Fenomenolog ia	QNT QLT	5	Studenti di scuola	60	Esaminare le strategie degli studenti universitari su problemi aperti

<i>Paper</i>	<i>Databas e</i>	<i>Paese</i>	<i>Approccio ricerca</i>	<i>Studio</i>	<i>MMAT</i>	<i>Partecipa nti</i>	<i>C</i>	<i>Fini della ricerca N. Obiettivi</i>
				Attività didattica				1. La storia della matematica possa essere integrata nel suo insegnamento? 2. In che modo?
<i>Igün, Dastan, & Altintas, 2023</i>	ERIC	Turchia	Metodi misti	QNT QLT Attività didattica	4,3	Studenti di scuola	30	Lo scopo di questo studio è esaminare l'impatto delle attività di modellazione matematica, basate sulla storia della matematica, sull'ansia degli studenti nell'insegnamento della geometria. 1. L'insegnamento della geometria attraverso attività di modellazione basate sulla storia ha un effetto sulla riduzione dell'ansia degli studenti nei confronti della geometria? 2. L'insegnamento della geometria attraverso attività di modellazione basate sulla storia ha un effetto sulle opinioni degli studenti sulla geometria?
<i>Rizos e Gkrekas, 2023</i>	EBSCO	Grecia	Case-study singoli	QLT Attività didattica	5	Studenti universitar i	27	Determinare l'effetto di metodi risolutivi che hanno avuto luogo nella storia della matematica, sul rendimento degli studenti di scuola primaria. 1. Metodi di moltiplicazione della storia della matematica hanno effetti sul rendimento scolastico degli studenti?
<i>Arthur, et al. 2022</i>	EBSCO	Ghana	Studio quantitativo descrittivo- correlazional e	QNT	5	Studenti di scuola	394	Indagare l'effetto delle attività di storia della matematica sullo sviluppo del calcolo mentale degli studenti delle scuole medie e determinare le opinioni degli studenti sulla storia della matematica

<i>Paper</i>	<i>Databas e</i>	<i>Paese</i>	<i>Approccio ricerca</i>	<i>Studio</i>	<i>MMAT</i>	<i>Partecipa nti</i>	<i>C</i>	<i>Fini della ricerca N. Obiettivi</i>
								1. In che modo le attività basate sulla HoM influenzano lo sviluppo dell'MC degli studenti delle scuole medie? 2. Quali sono le opinioni degli studenti delle scuole medie e dell'insegnante ricercatore sulle attività HoM?
<i>Demattè & Furinghetti, 2022</i>	ERIC	Italia	Ricerca-azione	QLT	5	Studenti di scuola	22	Esaminare le intenzioni e le pratiche degli insegnanti riguardo agli argomenti trattati nell'HoM 1. acquisire una conoscenza più precisa degli insegnanti di matematica 2. caratterizzare meglio il loro rapporto con l'HoM 3. comprendere meglio le loro pratiche professionali.
<i>de Varent, & Décamp 2022</i>	EBSCO + ERIC	Francia	Disegno quasi-sperimentale	QLT Attività didattica	5	Studenti di scuola	32	Esaminare le opinioni di studenti gifted circa l'integrazione di video sulla storia della matematica durante le lezioni. 1. Quali sono le opinioni degli studenti "gifted" sull'integrazione di video sulla storia della matematica nelle lezioni di matematica?
<i>Florio, 2022</i>	EBSCO	Italia	Ricerca-azione	QLT Attività didattica	5	Studenti universitari	48	Comprendere se il percorso proposto dalla parabola come sezione di un cono alla curva piana (e viceversa, possa suscitare potenziale interesse tra gli studenti 1. Il percorso didattico suscita interesse tra gli studenti?

<i>Paper</i>	<i>Databas e</i>	<i>Paese</i>	<i>Approccio ricerca</i>	<i>Studio</i>	<i>MMAT</i>	<i>Partecipa nti</i>	<i>C</i>	<i>Fini della ricerca N. Obiettivi</i>
<i>Karatas-Aydin & Isiksal- Bostan, 2022</i>	EBSCO + ERIC	Turchia	Studio qualitativo descrittivo	QLT	5	Studenti di scuola	30	Esplorare l'efficacia della HoM nel miglioramento della risoluzione di problemi e nella comprensione della relazione tra aritmetica e algebra <i>1. Quali strategie implementano gli studenti nell'insolito contesto delle fonti storiche?</i> <i>2. In che modo la storia influenza l'esperienza degli studenti?</i>
<i>Moyon, 2022</i>	ERIC	Francia	Studio quantitativo trasversale	QNT	3	Docenti	646	Valutato l'impatto di sessioni di HoM “as-a- objective” <i>1. Quali scelte di progettazione ha compiuto l'insegnante nella costruzione del compito e quali elementi emergono nel suo discorso durante la sessione? In che modo queste scelte e questi elementi possono essere messi in relazione con vincoli professionali?</i> <i>2. In che misura i risultati della sessione possono essere spiegati attraverso la RQI, in particolare rispetto agli aspetti della Natura della Scienza (NoS. e alla relazione degli studenti con i contenuti storici?)</i>
<i>Şahin & Danaci, 2022</i>	ERIC	Turchia	Ricerca- azione	QNT QLT Attività didattica	4,6	Studenti di scuola	19	Accertare l'effetto mediato della percezione degli studenti nel rapporto tra la storia della matematica, l'apprendimento assistito dai pari e l'interesse degli studenti per la matematica

<i>Paper</i>	<i>Databas e</i>	<i>Paese</i>	<i>Approccio ricerca</i>	<i>Studio</i>	<i>MMAT</i>	<i>Partecipa nti</i>	<i>C</i>	<i>Fini della ricerca N. Obiettivi</i>
								1. La storia della matematica ha un effetto positivo diretto sull'interesse degli studenti per la matematica? 2. L'apprendimento assistito dai pari ha un effetto positivo diretto sull'interesse degli studenti per la matematica? 3. La percezione degli studenti verso la matematica media la relazione tra la storia della matematica e l'interesse degli studenti per la matematica? 4. La percezione degli studenti verso la matematica media la relazione tra l'apprendimento assistito dai pari e l'interesse degli studenti per la matematica?
De Vittori, 2021	ERIC	Francia	Disegno quasi- sperimentale	QNT Attività didattica	3	Studenti di scuola	29	Indagare le opinioni di docenti universitari e di scuola secondaria di I grado riguardo all'uso della storia della matematica nel processo di apprendimento-insegnamento della matematica. 1. Quali sono le opinioni dei docenti universitari (faculty members. sull'uso della storia della matematica nel processo di apprendimento e insegnamento? 2. Quali sono le opinioni degli insegnanti di matematica (scuola. sull'uso della storia della matematica nel processo di apprendimento e insegnamento?

<i>Paper</i>	<i>Databas e</i>	<i>Paese</i>	<i>Approccio ricerca</i>	<i>Studio</i>	<i>MMAT</i>	<i>Partecipa nti</i>	<i>C</i>	<i>Fini della ricerca N. Obiettivi</i>
<i>Gençkaya & Tan-Şişman, 2021</i>	ERIC	Turchia	Fenomenolog ia	QLT	5	Docenti	34	Esplorare la comprensione degli studenti di prima secondaria di I grado dei numeri interi negativi mentre erano coinvolti in piccoli gruppi con attività elicитanti di modellazione matematica integrate con la HoM (mathematics history integrated model-eliciting activities.. <i>1. Quali sono le comprensioni degli studenti di prima secondaria di I grado relativa ai numeri negativi durante attività elicитanti di modellazione matematica integrate con la HoM?</i>
<i>Hidiroğlu, 2021</i>	ERIC	Turchia	Studio qualitativo descrittivo	QLT	5	Formazio ne docenti	16	Esplorare la congettura secondo cui il coinvolgimento degli insegnanti in attività che presentano pratiche matematiche del passato (compiti incentrati sulla storia. e delle attuali classi di matematica (mathtasks. possa promuovere la problematizzazione della matematica e della sua pedagogia da parte degli insegnanti. <i>1. Il coinvolgimento degli insegnanti in attività che presentano pratiche matematiche del passato (compiti incentrati sulla storia. e delle attuali classi di matematica (mathtasks. possa promuovere la problematizzazione della matematica e della sua pedagogia?</i>

<i>Paper</i>	<i>Databas e</i>	<i>Paese</i>	<i>Approccio ricerca</i>	<i>Studio</i>	<i>MMAT</i>	<i>Partecipa nti</i>	<i>C</i>	<i>Fini della ricerca N. Obiettivi</i>
<i>Lu, Leung & Li, 2021</i>	EBSCO + ERIC	Cina	Case-study singolo	QLT	5	Docenti	1	Analizzare come la conoscenza della storia della matematica e le convinzioni dei docenti di scuola primaria in merito al suo utilizzo nell'insegnamento siano cambiate dopo una lezione dedicata, valutando in che misura tale conoscenza influenzi i loro atteggiamenti e le loro convinzioni didattiche. <i>1. Quali sono i punteggi dei candidati insegnanti di matematica della scuola primaria per il pre-test e il post-test di KTHM (Knowledge Test of History of Mathematics. e ABHME (Attitudes and Beliefs towards the Use of History of Mathematics in Mathematics Education.?).</i> <i>2. Esiste una differenza significativa tra i punteggi del pre-test e del post-test KTHM dei candidati insegnanti di matematica della scuola primaria?.</i> <i>3. Esiste una differenza significativa tra i punteggi del pre-test e del post-test ABHME dei candidati insegnanti di matematica della scuola primaria?.</i> <i>4. Esiste una relazione significativa tra i punteggi del post-test di KTHM e ABHME dei candidati insegnanti di matematica della scuola primaria?.</i> <i>5. I punteggi del post-test KTHM dei candidati insegnanti di matematica della scuola primaria sono un predittore significativo dei punteggi del post-test ABHME?.</i>

<i>Paper</i>	<i>Databas e</i>	<i>Paese</i>	<i>Approccio ricerca</i>	<i>Studio</i>	<i>MMAT</i>	<i>Partecipa nti</i>	<i>C</i>	<i>Fini della ricerca N. Obiettivi</i>
								6. Quali sono le opinioni dei candidati insegnanti di matematica della scuola primaria sulla storia della matematica arricchita?
<i>Madrid, et al., 2021</i>	EBSCO	Spagna	Studio qualitativo descrittivo	QLT Attività didattica	5	Formazio ne docenti	158	Esplorare se e in che misura le costruzioni geometriche che utilizzano il Software di Geometria Dinamica (DGS. insieme all'incorporazione della storia della matematica (HoM. incoraggiano la comprensione delle dimostrazioni da parte degli insegnanti in formazione. 1. Quali sono le visioni degli insegnanti di matematica in formazione sull'insegnamento delle costruzioni? 2. Quali sono le visioni degli insegnanti di matematica in formazione sull'insegnamento delle costruzioni attraverso documenti storici? 3. Il quadro di Toulmin è un dispositivo utile nella preparazione degli insegnanti in formazione nell'insegnamento della dimostrazione? 4. In che modo l'uso del software di geometria dinamica con la storia della matematica influenza la connessione tra costruzioni e lo sviluppo della comprensione della dimostrazione?
<i>Martins, et al., 2021</i>	EBSCO	Portogall o	Metodi misti	QNT QLT	4,3	Formazio ne docenti	12	Contribuire al dibattito in evoluzione sull'integrazione della storia della matematica nell'istruzione pubblica, focalizzando

<i>Paper</i>	<i>Databas e</i>	<i>Paese</i>	<i>Approccio ricerca</i>	<i>Studio</i>	<i>MMAT</i>	<i>Partecipa nti</i>	<i>C</i>	<i>Fini della ricerca N. Obiettivi</i>
				Attività didattica				l'insegnamento dei sistemi numerici attraverso una prospettiva storica, presentando i risultati di un'indagine condotta su tale approccio. 1. L'uso della storia della matematica come strumento aiuta a fissare il programma di studi nella memoria a lungo termine?
<i>Matos & Kónya, 2021</i>	EBSCO	Ungheria	Disegno quasi- sperimentale	QNT	5	Studenti di scuola	44	Identificare e classificare le differenze tra due metodi di moltiplicazione storici o insoliti e un metodo moderno, così come percepiti dai tirocinanti insegnanti, al fine di determinare se queste differenze variano per tipo e percentuale in base al livello di conoscenza matematica richiesto <i>1. La storia della matematica può essere utilizzata in classe per rivelare differenze nel valore dell'attuale metodo di moltiplicazione rispetto a quelli dell'antichità all'interno dei corsi di formazione per insegnanti a diversi livelli?</i>
<i>Meadows & Caniglia, 2021</i>	ERIC	USA	Case-study singoli	QLT	5	Formazio ne docenti	12	Conoscere le concezioni dei docenti di matematica in formazione alla luce dell'impatto di un corso di formazione sull'utilizzo della Storia della Matematica nell'insegnamento. <i>1. Quali sono le concezioni e le pratiche dei professori di Matematica partecipanti alla formazione sull'utilizzo della Storia della Matematica?</i>

<i>Paper</i>	<i>Databas e</i>	<i>Paese</i>	<i>Approccio ricerca</i>	<i>Studio</i>	<i>MMAT</i>	<i>Partecipa nti</i>	<i>C</i>	<i>Fini della ricerca N. Obiettivi</i>
								2. Qual è l'impatto della formazione sulle concezioni e sulle pratiche dei docenti partecipanti?
<i>Mersin & Durmus, 2021</i>	ERIC	Turchia	Metodi misti	QNT QLT	5	Formazio ne docenti	40	Indagare come l'agency di un insegnante venga messo in atto e raggiunto nell'integrare la storia nella didattica della matematica. 1. Come ha messo in atto Doris l'agire nell'integrare la storia nella didattica della matematica nel contesto di insegnamento orientato agli esami? 2. Come ha raggiunto Doris il suo agire di insegnante nel confrontarsi con la tensione tra l'implementazione dell'integrazione della storia nella didattica della matematica e la pratica didattica dominante?
<i>Moustapha-Corrêa, et al., 2021</i>	EBSCO	Brasile	Studio design-based	QLT Attività didattica	5	Formazio ne docenti	12	Indagare le opinioni degli insegnanti di matematica della scuola secondaria di I e II grado e dei candidati insegnanti di matematica che hanno ricevuto formazione sul processo di apprendimento HTTM e hanno sperimentato attività HTTM in classe, riguardo al processo di apprendimento HTTM 1. Quali sono le opinioni degli insegnanti di matematica della scuola secondaria di I e II grado e dei candidati insegnanti di matematica riguardo al processo di apprendimento HTTM?

<i>Paper</i>	<i>Databas e</i>	<i>Paese</i>	<i>Approccio ricerca</i>	<i>Studio</i>	<i>MMAT</i>	<i>Partecipa nti</i>	<i>C</i>	<i>Fini della ricerca N. Obiettivi</i>
								<i>1.1 Su quali aspetti/caratteristiche dell'HTTM gli insegnanti e i candidati insegnanti hanno espresso le loro opinioni?</i> <i>1.2 Come hanno espresso le loro opinioni riguardo a questi aspetti/caratteristiche (vantaggi, svantaggi e suggerimenti. relativi al processo di apprendimento HTTM?)</i>
<i>Sevinc & Ay, 2021</i>	ERIC	Turchia	Case-study singoli	QLT Attività didattica	5	Studenti di scuola	29	Esaminare il ruolo dell'immaginazione in un'attività didattica che utilizza la storia della matematica <i>1. Esiste un ponte tra immaginazione e cognizione all'interno della prospettiva HPM (History and Pedagogy of Mathematics., come identificato nell'apprendimento delle scienze?</i> <i>2. La storia della matematica può risuonare con l'immaginazione creativa, facilitando l'apprendimento?</i>
<i>Bütüner, 2020</i>	EBSCO	Turchia	Case-study singoli	QLT Attività didattica	5	Formazione docenti	40	Esaminare se l'uso di un episodio della storia della matematica (il problema di Abu'l-Wafa. possa promuovere la conoscenza dei contenuti disciplinari e la conoscenza dei contenuti pedagogici in un gruppo di futuri insegnanti di matematica <i>1. I futuri insegnanti percepiranno diverse connessioni tra i concetti?</i> <i>2. Forniranno soluzioni e prove multiple?</i>

<i>Paper</i>	<i>Databas e</i>	<i>Paese</i>	<i>Approccio ricerca</i>	<i>Studio</i>	<i>MMAT</i>	<i>Partecipa nti</i>	<i>C</i>	<i>Fini della ricerca N. Obiettivi</i>
								3. Come creeranno situazioni didattiche che includano il problema dato? 4. A quale punto nel percorso di apprendimento della geometria? 5. In che modo coinvolgere gli alunni nella risoluzione di questo problema?
<i>Bütüner & Baki, 2020</i>	ERIC	Turchia	Ricerca- azione	QNT QLT Attività didattica	5	Studenti di scuola	24	Esaminare gli atteggiamenti e le credenze pedagogiche dei futuri insegnanti di matematica indonesiani sull'uso della Storia della Matematica (HoM. nell'insegnamento della matematica, analizzando il quadro generale per comprendere il contributo dei programmi di formazione degli insegnanti indonesiani alla loro preparazione pedagogica. 1. La partecipazione a un corso di Storia della Matematica (HoM. influenza gli atteggiamenti e le credenze dei futuri insegnanti riguardo all'uso della HoM nell'insegnamento?
<i>Escalona Reyes, Peña Garzón, & Rojas Velázquez, 2020</i>	EBSCO	Colombi a	Studio qualitativo descrittivo	QLT	5	Studenti di scuola e Studenti universitar i	385	esplorare l'influenza della storia della matematica (HOM. sulle percezioni delle studentesse dell'undicesimo anno (IV anno Secondaria II Grado. riguardo al Teorema di Pitagora in particolare e alla matematica in generale

<i>Paper</i>	<i>Databas e</i>	<i>Paese</i>	<i>Approccio ricerca</i>	<i>Studio</i>	<i>MMAT</i>	<i>Partecipa nti</i>	<i>C</i>	<i>Fini della ricerca N. Obiettivi</i>
								<i>1. Quali sono le percezioni degli studenti sulle lezioni del Teorema di Pitagora dopo l'integrazione della Storia della Matematica?</i>
<i>Esteve, 2020</i>	EBSCO	Spagna	Case-study singoli	QLT Attività didattica	3	Studenti universitar i	ND	Esaminare lo sviluppo della conoscenza matematica per la formazione degli insegnanti (MKTT. negli studenti futuri formatori, dimostrando che l'uso della storia della matematica possa essere un modo possibile per sviluppare tale conoscenza <i>1. In che modo l'uso della storia della matematica e della letteratura educativa sull'uso della storia della matematica nell'educazione matematica potrebbe contribuire allo sviluppo della conoscenza matematica per la formazione degli insegnanti (MKTT. negli studenti futuri formatori?)</i>
<i>Jankvist, Clark, & Mosvold, 2020</i>	EBSCO + ERIC	Danimar ca	Case-study singoli	QLT Attività didattica	5	Formazio ne docenti	3	Analizzare i risultati dell'implementazione di un'attività storica in un corso di storia della matematica per la laurea in matematica <i>1. Gli studenti ottengo una migliore comprensione del ruolo della relazione tra algebra e geometria nello sviluppo della matematica, aiutandoli a migliorare la loro formazione matematica, attraverso l'uso della HoM?</i>

<i>Paper</i>	<i>Databas e</i>	<i>Paese</i>	<i>Approccio ricerca</i>	<i>Studio</i>	<i>MMAT</i>	<i>Partecipa nti</i>	<i>C</i>	<i>Fini della ricerca N. Obiettivi</i>
<i>Kapofu, & Kapofu, 2020</i>	ERIC	Sudafric a	Case-study singoli	QLT Attività didattica	5	Studenti di scuola	30	Analizzare l'uso della storia della matematica nei processi di insegnamento e apprendimento attuali <i>1. Qual è lo stato attuale dell'uso della HoM nell'insegnamento?</i>
<i>Kusumawati, et al., 2020</i>	EBSCO	Indonesi a	Studio quantitativo trasversale	QNT	3	Formazio ne docenti	305	Approfondire le convinzioni degli studenti sulla matematica rivelando aspetti divertenti, interessanti e utili della disciplina, arricchendo l'ambiente didattico con attività legate alla HoM. <i>1. In che modo gli ambienti di apprendimento arricchiti con attività di HoM influenzano le convinzioni degli studenti sulla matematica?</i> <i>1.1 Contribuiscono a far apprendere la natura dinamica e in sviluppo della matematica e ad approfondire la percezione delle persone brave in matematica?</i> <i>1.2 Contribuiscono a far apprendere come e perché la matematica è emersa?</i> <i>2. Le attività sono state efficaci nel mostrare il lato interessante e divertente della matematica?</i>
<i>Pjanić, 2020</i>	EBSCO	Bosnia ed Erzegovi na	Case-study singoli	QLT Attività didattica	5	Formazio ne docenti	5	rivelare se l'uso della HoM come strumento, tramite le attività proposte, potesse prevenire l'emergere dei problemi e degli ostacoli citati in letteratura: docenti di scuola primaria in formazione hanno perciò valutato attività didattiche basate sulla HoM.

<i>Paper</i>	<i>Databas e</i>	<i>Paese</i>	<i>Approccio ricerca</i>	<i>Studio</i>	<i>MMAT</i>	<i>Partecipa nti</i>	<i>C</i>	<i>Fini della ricerca N. Obiettivi</i>
								<i>1. L'uso in classe delle 12 attività proposte e valutate può condurre all'emergere degli ostacoli nell'uso della HoM citati in letteratura e perché?</i>
<i>Başibüyük & Şahin, 2019</i>	ERIC	Turchia	Case-study singoli	QLT	5	Docenti	21	Comprendere meglio come i docenti usano i Primary Source Projects (PSP. in classe e in che modo, secondo la percezione del docente, l'uso dei PSP influenza l'apprendimento degli studenti e le pratiche di insegnamento. <i>1. Implementazione dei PSP: Come vengono implementati i PSP? Quali modifiche hanno apportato i docenti e quali sfide hanno percepito?</i> <i>2. Cambiamenti nelle tendenze didattiche dei docenti: In che modo l'implementazione dei PSP cambia la percezione dei docenti riguardo ai propri comportamenti e tendenze didattiche, rispetto al loro insegnamento tipico?</i> <i>3. Percezione dell'impatto dei PSP da parte dei docenti: Come descrivono i docenti la percezione delle conoscenze matematiche e storiche dei loro studenti, e le loro prospettive e atteggiamenti verso la materia?</i>
<i>Maffia, 2019</i>	ERIC	Italia	Case-study singoli	QLT Attività didattica	5	Studenti di scuola	23	Valutare la fattibilità e l'efficacia dell'incorporazione della storia della matematica nell'insegnamento di un argomento specifico (equazioni di secondo grado. nel contesto vietnamita

<i>Paper</i>	<i>Databas e</i>	<i>Paese</i>	<i>Approccio ricerca</i>	<i>Studio</i>	<i>MMAT</i>	<i>Partecipa nti</i>	<i>C</i>	<i>Fini della ricerca N. Obiettivi</i>
								<i>1. L'integrazione della storia della matematica nell'insegnamento crea entusiasmo negli studenti durante il processo di apprendimento e rende l'atmosfera in classe più vivace?</i>
<i>Tong, et al., 2019</i>	EBSCO	Vietnam	Case-study singoli	QNT QLT Attività didattica	4,6	Studenti di scuola	44	Analizzare i contributi della storia della matematica e della storia dell'educazione matematica per la formazione iniziale degli insegnanti <i>Riportare un'esperienza di inserimento della storia nella formazione degli insegnanti di matematica</i>
<i>White, et al., 2019</i>	ERIC	USA	Metodi misti	QNT QLT Attività didattica	4,6	Formazio ne docenti	60	Indagare il ruolo dell'insegnante nel presentare un testo storico e nell'orchestrare il lavoro degli alunni, in particolare nel processo di mediazione semiotica durante una discussione collettiva <i>1. Mentre orchestra una discussione matematica su un testo storico, un'insegnante di scuola primaria mette in atto gli stessi schemi comportamentali documentati in letteratura per gli insegnanti di matematica della scuola secondaria?</i>
<i>Baki & Gürsoy, 2018</i>	ERIC	Turchia	Survey qualitativa	QLT	5	Studenti universitar i	6	Determinare le opinioni degli insegnanti di matematica della scuola secondaria riguardo alla storia della matematica <i>1. Quali sono le opinioni degli insegnanti di matematica della scuola secondaria in merito alla storia della matematica?</i>

<i>Paper</i>	<i>Databas e</i>	<i>Paese</i>	<i>Approccio ricerca</i>	<i>Studio</i>	<i>MMAT</i>	<i>Partecipa nti</i>	<i>C</i>	<i>Fini della ricerca N. Obiettivi</i>
<i>Bütüner, 2018</i>	ERIC	Turchia	Metodi misti	QNT QLT	5	Docenti	32	Indagare le opinioni dei futuri insegnanti sul corso di storia della matematica in cui è stato utilizzato GeoGebra, per rendere i corsi di HoM più efficaci ed efficienti <i>1. Quali sono le opinioni dei futuri insegnanti di matematica sul corso di storia della matematica in cui è stato incorporato GeoGebra?</i>
<i>Sampaio & Batista, 2018</i>	ERIC	Brasile	Studio design-based	QNT QLT Attività didattica	4,6	Studenti di scuola	23	Valutare l'efficacia di un approccio storico-filosofico nell'insegnamento della trigonometria <i>1. Progettare una sequenza didattica per portare gli studenti a comprendere l'importanza di questa scienza, motivandoli all'apprendimento</i>
<i>Zengin, 2018</i>	ERIC	Turchia	Studio qualitativo descrittivo	QLT Attività didattica	5	Formazione docenti	23	Analizzare l'interazione tra elementi storici e l'apprendimento contemporaneo degli studenti utilizzando il modello cKc di Balacheff. <i>1. Come può un modello preso dalla didattica della matematica essere utile per identificare e analizzare i momenti chiave in cui le attività in classe fondono storia e matematica?</i>
<i>Abah, 2017</i>	EBSCO + ERIC	Nigeria	Ricerca-azione	QLT Attività didattica	5	Studenti universitari	78	Descrivere l'uso che gli insegnanti di matematica della scuola secondaria fanno della storia della matematica nelle loro lezioni e i loro livelli di conoscenza in questo campo <i>1. In che misura gli insegnanti di matematica utilizzano la storia della matematica nelle loro lezioni?</i>

<i>Paper</i>	<i>Databas e</i>	<i>Paese</i>	<i>Approccio ricerca</i>	<i>Studio</i>	<i>MMAT</i>	<i>Partecipa nti</i>	<i>C</i>	<i>Fini della ricerca N. Obiettivi</i>
								<i>2. Qual è il livello di conoscenza della storia della matematica degli insegnanti?</i>
<i>Dias, Araujo & Ota, 2017</i>	ERIC	Brasile	Metodi misti	QNT QLT Attività didattica	5	Studenti di scuola	107	Determinare le opinioni dei futuri insegnanti sull'uso della storia della matematica (HoM. nell'insegnamento della matematica, colmando una lacuna nella letteratura scientifica locale. <i>1. Quali sono le opinioni dei futuri insegnanti sull'uso della storia della matematica nell'insegnamento della matematica?</i>
<i>Guillemette, 2017</i>	EBSCO	Canada	Fenomenologia	QLT Attività didattica	5	Formazio ne docenti	6	Descrivere il <i>dépaysement épistémologique</i> (disorientamento epistemologico. vissuto da futuri insegnanti di matematica nel contesto di attività formative in cui viene utilizzata la storia della matematica attraverso la lettura di testi storici. <i>1. Come vivono i docenti in formazione il disorientamento epistemologico vissuto attraverso la lettura dei testi storici di matematica?</i>
<i>Bütüner, 2016</i>	ERIC	Turchia	Disegno quasi- sperimentale	QNT QLT Attività didattica	4,6	Studenti di scuola	27	Analizzare la motivazione e l'apprendimento degli studenti utilizzando i tablet in classe <i>1. Un lavoro interdisciplinare che coinvolge diverse aree del sapere e l'uso di tecnologie mobili può suscitare la curiosità degli studenti delle scuole superiori per la matematica e renderla significativa?</i>

<i>Paper</i>	<i>Databas e</i>	<i>Paese</i>	<i>Approccio ricerca</i>	<i>Studio</i>	<i>MMAT</i>	<i>Partecipa nti</i>	<i>C</i>	<i>Fini della ricerca N. Obiettivi</i>
								2. I concetti primitivi della matematica possono favorire la continuità degli studi della matematica attuale? 3. Quale sarebbe il vero contributo di un progetto in cui un gruppo di docenti e studenti costruisce applicazioni che favoriscono lo sviluppo del pensiero storico e culturale nell'insegnamento della matematica con l'uso del tablet?
<i>Ersoy & Öksüz, 2016</i>	EBSCO	Turchia	Disegno quasi- sperimentale	QNT Attività didattica	4	Studenti di scuola	26	Determinare le riflessioni degli studenti universitari del primo anno quando vengono introdotti frammenti storici (Fibonacci tiling, procedure fang cheng, ricorsioni meru prastara. in un corso di matematica di base. 1. Quali sono le nuove concezioni della sequenza degli studenti del primo anno dopo aver esaminato il lavoro di Fibonacci? 2. Quali sono le riflessioni degli studenti del primo anno sull'algebra delle matrici dopo l'esposizione alle procedure fang cheng dei Nove Capitoli sull'Arte Matematica? 3. Quali sono le comprensioni degli studenti del primo anno sulle combinazioni e sui coefficienti binomiali dopo aver praticato la ricorsione del Meru prastara?

<i>Paper</i>	<i>Databas e</i>	<i>Paese</i>	<i>Approccio ricerca</i>	<i>Studio</i>	<i>MMAT</i>	<i>Partecipa nti</i>	<i>C</i>	<i>Fini della ricerca N. Obiettivi</i>
<i>Youchu, 2016</i>	EBSCO + ERIC	Cina	Case-study singoli	QLT Attività didattica	5	Formazio ne docenti	10	Indagare come i futuri insegnanti di matematica cinesi sviluppino le loro conoscenze per l'insegnamento all'interno di un corso sulla storia della matematica <i>1. In che modo e in che misura cambiano le conoscenze matematiche per l'insegnamento dei futuri insegnanti dopo aver seguito un corso basato sulla storia?</i> <i>2. Se i futuri insegnanti hanno mostrato un cambiamento nelle loro conoscenze matematiche per l'insegnamento, come erano correlati i loro cambiamenti, se del caso, al contenuto del corso?</i>
<i>Biber, İspir & Ay, 2015</i>	EBSCO + ERIC	Turchia	Metodi misti	QNT QLT Attività didattica	4,3	Formazio ne docenti	22	Rivelare gli effetti dell'insegnamento con oggetti di apprendimento concreti presi dalla storia della matematica sul rendimento degli studenti. <i>1. Qual è l'effetto dell'istruzione che utilizza oggetti di apprendimento concreti dalla storia della matematica sul rendimento degli studenti?</i> <i>2. Quali sono le opinioni degli studenti riguardo a queste pratiche?</i>
<i>Bütüner, 2015b</i>	ERIC	Turchia	Ricerca- azione	QLT Attività didattica	5	Studenti di scuola	24	Indagare gli effetti dell'insegnamento dell'argomento dei numeri decimali attraverso l'uso della storia della matematica sul rendimento scolastico, sulla ritenzione delle conoscenze e sul livello di motivazione degli studenti di quarta elementare

<i>Paper</i>	<i>Databas e</i>	<i>Paese</i>	<i>Approccio ricerca</i>	<i>Studio</i>	<i>MMAT</i>	<i>Partecipa nti</i>	<i>C</i>	<i>Fini della ricerca N. Obiettivi</i>
								<i>1. Quali sono gli effetti della storia della matematica sul rendimento scolastico e sull'apprendimento dei numeri decimali?</i>
<i>Gilmullin, 2015</i>	EBSCO + ERIC	Russia	Disegno sperimentale	QNT Attività didattica	4	Formazio ne docenti	24	Indagare gli effetti dell'utilizzo della HoM sul rendimento, l'atteggiamento, l'ansia e la motivazione degli studenti nel breve e lungo termine. <i>1. Il rendimento e l'affettività in matematica differiscono tra gli studenti che hanno frequentato lezioni basate sulla HoM come strumento e quelli che hanno frequentato lezioni senza HoM, una volta controllate le differenze nei pre-test?</i> <i>2. Se ci sono state differenze, sono durate per almeno un anno?</i> <i>3. Se ci sono state differenze, quali sono state le possibili ragioni?</i>
<i>Lim & Chapman, 2015</i>	EBSCO + ERIC	Singapor e	Disegno quasi- sperimentale	QNT QLT Attività didattica	4,6	Studenti di scuola	51	Descrivere un metodo dell'autore per insegnare la storia della matematica, finalizzato a formare le qualità professionali degli insegnanti di matematica <i>1. La formazione della componente storica della cultura metodologica matematica degli studenti (HCMC. durante il corso di storia della matematica sarà efficace se:</i> <i>1.1 gli studenti sono motivati dalla necessità di sviluppare qualità professionali;</i>

<i>Paper</i>	<i>Databas e</i>	<i>Paese</i>	<i>Approccio ricerca</i>	<i>Studio</i>	<i>MMAT</i>	<i>Partecipa nti</i>	<i>C</i>	<i>Fini della ricerca N. Obiettivi</i>
								1.2 sono disponibili condizioni e mezzi per utilizzare il potenziale della storia della matematica; 1.3 i meccanismi formativi includono situazioni di addestramento per lo sviluppo professionale (TSPD). e compiti storici-metodologici (THMT).
<i>Alpaslan, Işksal, & Haser, 2014</i>	EBSCO + ERIC	Turchia	Studio quantitativo trasversale	QNT	4	Studenti universitari	1593	Far dedurre agli studenti le formule del volume dei tronchi di piramide utilizzando un metodo storico
<i>Bishop, et al., 2014</i>	EBSCO + ERIC	USA	Studio qualitativo descrittivo	QLT	5	Studenti di scuola	48	Indagare l'influenza dell'insegnamento della Storia della Matematica con il metodo del "creative drama" sugli apprendimenti, i sentimenti, i pensieri e le opinioni dei futuri insegnanti durante il periodo del corso. 1. Qual è l'effetto del corso di Storia della Matematica, tenuto con il metodo del "creative drama", sull'apprendimento dei futuri insegnanti? 2. Qual è l'effetto del corso sui sentimenti e i pensieri dei futuri insegnanti? 3. Quali sono le opinioni generali dei futuri insegnanti di matematica sul corso? 4. Come valutano i futuri insegnanti di matematica il corso dal punto di vista dell'approccio costruttivista?
<i>Despeaux, 2014</i>	ERIC	USA	Case-study singoli	QLT Attività didattica	3	Formazione docenti	ND	Esaminare gli effetti di un metodo di insegnamento basato sulla storia nel modificare le convinzioni dei docenti in formazione

<i>Paper</i>	<i>Databas e</i>	<i>Paese</i>	<i>Approccio ricerca</i>	<i>Studio</i>	<i>MMAT</i>	<i>Partecipa nti</i>	<i>C</i>	<i>Fini della ricerca N. Obiettivi</i>
								sull'apprendimento della matematica, passando da posizioni ostacolanti dell'apprendimento a posizioni facilitanti. <i>1. In che modo il "programma di intervento basato sulla storia" influirebbe sulle convinzioni dei futuri insegnanti riguardo alla natura, all'insegnamento e all'apprendimento della matematica?</i> <i>2. Quali lezioni si potrebbero apprendere dal programma per sfidare le credenze tradizionali e promuovere lo sviluppo di quelle progressiste?</i> <i>3. Quale sarebbe l'impatto del conflitto cognitivo nello sfidare le credenze tradizionali per trasformarle in credenze progressiste?</i>
<i>Fenaroli, Furinghetti & Somaglia, 2014</i>	EBSCO + ERIC	Italia	Case-study singoli	QLT Attività didattica	5	Formazio ne docenti	20	Fornire elementi dalla prospettiva della Storia della Matematica per migliorare l'insegnamento della funzione logaritmica nelle classi 8° e 9° dell'Istruzione di Base <i>1. In quali condizioni concettuali e metodologiche la Storia della Matematica può essere utilizzata dal docente nella progettazione di strategie didattiche per il miglioramento dell'insegnamento della funzione logaritmica nell'Istruzione di Base?</i>
<i>Galante, 2014</i>	EBSCO	USA	Case-study multipli	QLT	5	Formazio ne docenti	9	Dimostrare che gli studenti in formazione iniziale per l'insegnamento traggono beneficio dallo sviluppo della consapevolezza e del coinvolgimento nella storia della matematica,

<i>Paper</i>	<i>Databas e</i>	<i>Paese</i>	<i>Approccio ricerca</i>	<i>Studio</i>	<i>MMAT</i>	<i>Partecipa nti</i>	<i>C</i>	<i>Fini della ricerca N. Obiettivi</i>
								comprendendo meglio i benefici e analizzando le i punti di vista, le intenzioni e le pratiche dei formatori di insegnanti di matematica di un'università del Regno Unito <i>1. Cosa può offrirci lo studio della storia della matematica con gli studenti in formazione iniziale?</i>
<i>Goodwin, et al., 2014</i>	EBSCO	USA	Studio quantitativo descrittivo-correlazionale	QNT	4	Docenti	4663	Migliorare l'immagine della matematica tra gli studenti, in particolare riguardo all'insegnamento delle sezioni coniche <i>1. Qual è l'impatto della HoM sull'apprendimento e sulla capacità di risoluzione dei problemi degli studenti?</i> <i>2. Gli studenti comprendono attraverso la HoM l'evoluzione degli strumenti matematici apprezzando il ruolo della loro rappresentazione nella storia delle idee?</i>
<i>Jankvist, 2014a e 2014b</i>	zbMath + EBSCO	Danimarca	Case-study singoli	QLT Attività didattica	5	Studenti di scuola	27	Fornire analisi approfondite su tre attività da utilizzare nei corsi di Storia della Matematica <i>1. Quali tipi di attività possono integrare le componenti matematiche di un corso di storia della matematica?</i> <i>2. In che modo gli studenti beneficiano di questi tipi di attività in un corso di storia della matematica?</i>
<i>Loats, White, & Rubino, 2014</i>	ERIC	USA	Case-study singoli	QLT Attività didattica	5	Formazione docenti	3	Verificare se l'uso di fonti originali possa avere un effetto sul problema del reclutamento di studenti in questo campo

<i>Paper</i>	<i>Databas e</i>	<i>Paese</i>	<i>Approccio ricerca</i>	<i>Studio</i>	<i>MMAT</i>	<i>Partecipa nti</i>	<i>C</i>	<i>Fini della ricerca N. Obiettivi</i>
								1. I due moduli hanno fornito una visione diversa di cosa sia la matematica, di come nasca e a cosa serva? 2. I due moduli ti hanno incoraggiato a studiare o a occuparti di matematica (e/o scienze naturali. dopo la scuola secondaria superiore? 3. Indipendentemente dalla risposta alla domanda 2, ritieni che i due moduli ti abbiano fornito una base più consapevole su cui scegliere o non scegliere la matematica (e/o le scienze naturali. come parte della tua futura istruzione?
<i>Panagiotou, 2014</i>	EBSCO + ERIC	Grecia	Case-study singoli	QLT Attività didattica	5	Studenti di scuola	18	Descrivere la progettazione e l'implementazione di un modulo didattico storico (chiamato HAPh-module. che integra elementi di storia (OJ2., applicazione (OJ1. e filosofia (OJ3. della matematica, verificando se e come sia possibile progettare moduli didattici per la scuola secondaria di secondo grado che, attraverso l'uso di fonti originali, tengano conto simultaneamente di queste tre dimensioni. 1. Come è possibile progettare moduli didattici a livello di scuola secondaria superiore che, attraverso l'uso di fonti originali, tengano conto simultaneamente dei tre tipi di "overview and judgement": l'applicazione della matematica (OJ1),

<i>Paper</i>	<i>Databas e</i>	<i>Paese</i>	<i>Approccio ricerca</i>	<i>Studio</i>	<i>MMAT</i>	<i>Partecipa nti</i>	<i>C</i>	<i>Fini della ricerca N. Obiettivi</i>
								<i>il suo sviluppo storico (OJ2) e la sua natura come disciplina (OJ3)?</i>
<i>Povey, 2014</i>	EBSCO + ERIC	Regno Unito	Fenomenolog ia	QLT	5	Formazio ne docenti	4	Esplorare la relazione tra la percezione che gli insegnanti hanno della matematica e la loro conoscenza della storia della matematica. <i>1. Qual è la percezione che gli insegnanti hanno della matematica?</i> <i>2. Cosa fanno gli insegnanti sulla storia della matematica?</i> <i>3. Qual è la relazione tra la percezione che gli insegnanti hanno della matematica e la loro conoscenza della storia della matematica?</i>
<i>Villota, 2014</i>	zbMath	Colombi a	Case-study multipli	QLT	5	Docenti	10	Misurare le conoscenze dei contenuti matematici e le conoscenze dei contenuti pedagogici dei futuri insegnanti di matematica a fini di accreditamento, attraverso diari di riflessione elettronici basati su presentazioni sulla storia della matematica <i>1. Ci sono prove che l'uso della storia della matematica nell'insegnamento possa rafforzare la conoscenza dei contenuti matematici dei futuri insegnanti di matematica?</i> <i>2. Ci sono prove che l'uso della storia della matematica nell'insegnamento possa rafforzare la conoscenza dei contenuti pedagogici dei futuri insegnanti di matematica?</i>

<i>Paper</i>	<i>Databas e</i>	<i>Paese</i>	<i>Approccio ricerca</i>	<i>Studio</i>	<i>MMAT</i>	<i>Partecipa nti</i>	<i>C</i>	<i>Fini della ricerca N. Obiettivi</i>
<i>Weldeana & Abraham, 2014</i>	ERIC	Etiopia	Disegno quasi- sperimentale	QNT QLT Attività didattica	4,6	Formazio ne docenti	63	Presentare le linee principali di un corso post-laurea sulla storia della matematica per futuri insegnanti di scuola secondaria di secondo grado integrando gli obiettivi storici con quelli educativi del programma di formazione <i>1. Può un corso di HoM per futuri docenti scolastici stimolare la riflessione sulle difficoltà legate a concetti matematici chiave e mettere in discussione le convinzioni preesistenti attraverso l'uso di fonti originali?</i>

Appendice B: Tabella valutazione qualità degli studi con MMAT

<i>Paper</i>	<i>QL T</i>	<i>QNT-N- R</i>	<i>QNT- D</i>	<i>MIXE D</i>	<i>Media</i>
<i>Alpaslan, Işıksal, & Haser, 2014</i>			4		4
<i>Bishop, et al., 2014</i>	5				5
<i>Despeaux, 2014</i>	3				3
<i>Fenaroli, Furinghetti & Somaglia, 2014</i>	5				5
<i>Galante, 2014</i>	5				5
<i>Goodwin, et al., 2014</i>			4		4
<i>Jankvist, 2014a</i>	5				5
<i>Jankvist, 2014b</i>	5				5
<i>Loats, White, & Rubino, 2014</i>	5				5
<i>Panagiotou, 2014</i>	5				5
<i>Povey, 2014</i>	5				5
<i>Villota, 2014</i>	5				5
<i>Weldeana & Abraham, 2014</i>	5		4	5	4,6
<i>Biber, İspir & Ay, 2015</i>	5	3		5	4,3
<i>Bütünler, 2015b</i>	5				5
<i>Gilmullin, 2015</i>		4			4
<i>Lim & Chapman, 2015</i>	5	4		5	4,6
<i>Bütünler, 2016</i>	5	4		5	4,6
<i>Youchu, 2016</i>	5				5
<i>Ersoy & Öksüz, 2016</i>		4			4
<i>Abah, 2017</i>	5				5
<i>Dias, Araujo & Ota, 2017</i>	5				5
<i>Guillemette, 2017</i>	5				5
<i>Baki & Gürsoy, 2018</i>	5				5
<i>Bütünler, 2018</i>	5		5		5
<i>de Vittori, 2018</i>	5				5
<i>Sampaio & Batista, 2018</i>	5		4	5	4,6
<i>Zengin, 2018</i>	5				5
<i>Başıbüyük & Şahin, 2019</i>	5				5
<i>Maffia, 2019</i>	5				5
<i>Tong, et al., 2019</i>	5		4	5	4,6
<i>White, et al., 2019</i>	5		4	5	4,6
<i>Bütünler & Baki, 2020</i>	5		4	5	5
<i>Bütünler, 2020</i>	5				5
<i>Escalona, et al., 2020</i>	5				5

<i>Esteve, 2020</i>	3			3
<i>Jankvist, Clark, & Mosvold, 2020</i>	5			5
<i>Kapofu, & Kapofu, 2020</i>	5			5
<i>Kusumawati, et al., 2020</i>		3		3
<i>Pjanić, 2020</i>	5			5
<i>De Vittori, 2021</i>		3		3
<i>Gençkaya & Tan-Şişman, 2021</i>	5			5
<i>Hidiroğlu, 2021</i>	5			5
<i>Lu, Leung & Li, 2021</i>	5			5
<i>Madrid, et al., 2021</i>	5			5
<i>Martins, et al., 2021</i>	5	3	5	4,3
<i>Matos & Kónya, 2021</i>		5		5
<i>Meadows & Caniglia, 2021</i>	5			5
<i>Mersin & Durmus, 2021</i>	5	5	5	5
<i>Moustapha-Corrêa, et al., 2021</i>	5			5
<i>Sevinc & Ay, 2021</i>	5			5
<i>Arthur, et al. 2022</i>		5		5
<i>de Varent, & Décamp 2022</i>	4		5	5
<i>Demattè & Furinghetti, 2022</i>	5			5
<i>Florio, 2022</i>	5			5
<i>Karatas-Aydin & Isiksal-Bostan, 2022</i>	5			5
<i>Moyon, 2022</i>		3		3
<i>Şahin & Danaci, 2022</i>	5	4	5	4,6
<i>Filiz & Gür, 2023</i>	4	3	5	4
<i>Igün, Dastan, & Altintas, 2023</i>	5	4	4	4,3
<i>Rizos e Gkrekas, 2023</i>	5			5
<i>De Vittori, Louaked, & Visentin, 2024</i>		4		4
<i>Dilek & Fadime, 2024</i>	5			5
<i>Panaoura, 2024</i>		4		4
<i>Papadopoulos, 2024</i>	3			3

Appendice C: Tabella sinottica sulle attività sperimentate

Paper	Paese	Tipologia di partecipanti	Grado di istruzione coinvolto	Finalità	Obiettivi specifici
De Vittori, Louaked, & Visentin, 2024	Francia	Studenti di scuola	Scuola secondaria di I grado	Incoraggiare gli studenti a riflettere sui sistemi di numerazione attraverso il confronto con la HoM (antico sistema di numerazione cinese medievale).	Approfondire la comprensione del sistema numerico moderno
Papadopoulos, 2024	Grecia	Formazione docenti	Università e centri di formazione superiore	Migliorare nei futuri docenti la consapevolezza e l'uso della HoM come strumento didattico e motivazionale, mostrando il carattere evolutivo della matematica.	ND
Dilek & Fadime, 2024	Turchia	Formazione docenti	Università e centri di formazione superiore	Sviluppare nei docenti di matematica la capacità di valutare criticamente la qualità della HoM nei libri di testo e di integrarla efficacemente nelle lezioni.	- Valutare la presenza e qualità degli elementi storici nei libri di testo di matematica; - Progettare lesson plans che integrino la HoM in modo didatticamente appropriato; - Riflettere criticamente sulle proprie scelte didattiche relative all'uso della HoM; - Anticipare il pensiero degli studenti e identificare prompt didattici e task appropriati;
Rizos e Gkrekas, 2023	Grecia	Studenti universitari	Università e centri di formazione superiore	Offrire agli studenti l'opportunità di affrontare problemi aperti sviluppando le proprie strategie.	- Comprendere che un problema può avere diverse soluzioni senza che nessuna di esse sia unica o "più appropriata"; - Perdere parzialmente la certezza che "la matematica porta sempre a risultati certi";
Igün, Dastan, & Altintas, 2023	Turchia	Studenti di scuola	Scuola secondaria di I grado	Evidenziare le fasi storico-evolutive di alcuni concetti geometrici rimarcando i loro effetti sul mondo odierno e le applicazioni nella nostra vita quotidiana.	In conformità con gli obiettivi del Ministero dell'Istruzione Nazionale (Turchia): - Esplorare le proprietà degli angoli adiacenti, complementari, supplementari e al vertice; - Risolvere problemi correlati. - Costruire triangoli in base ai loro angoli e lati, classificare i triangoli creati in base alle proprietà dei loro

Paper	Paese	Tipologia di partecipanti	Grado di istruzione coinvolto	Finalità	Obiettivi specifici
					lati e angoli. - Determinare le diagonali, gli angoli interni ed esterni dei poligoni; - Calcolare la somma degli angoli interni ed esterni. - Esplorano la somma degli angoli interni. - Determinare il rapporto tra la circonferenza di un cerchio: diametro come costante π .
Filiz & Gür, 2023	Turchia	Studenti di scuola	Scuola primaria	Insegnare algoritmi di moltiplicazione attraverso metodi tratti dalla storia della matematica	Apprendere le operazioni fondamentali
Şahin & Danaci, 2022	Turchia	Studenti di scuola	Scuola secondaria di I grado	Implementare le capacità di calcolo mentale degli studenti	ND
Florio, 2022	Italia	Studenti universitari	Università e centri di formazione superiore	Superare la percezione della parabola come concetto “astratto” privo di connessioni con la realtà, causa difficoltà di comprensione sia negli studenti che negli insegnanti.	- Scoprire e realizzare la transizione da una parabola considerata come curva in un piano alla stessa parabola considerata su un cono (di cui è sezione) e viceversa. - Evidenziare come la costruzione di coniche per punti abbia permesso la creazione di lenti e specchi, rappresentando un’applicazione pratica della geometria rilevante per la fisica e l’astronomia. - Costruire un ambiente in cui insegnanti e studenti possano esplorare diversi registri semiotici attraverso i quali la matematica si esprime.
Demattè & Furinghetti, 2022	Italia	Studenti di scuola	Scuola secondaria di II grado	Sviluppare competenze matematiche	- Conoscere esempi di situazioni narrative presentate nei trattati Abbacus. - Affrontare concetti matematici noti nel nuovo contesto di fonti storiche. - Esercitarsi nella risoluzione di problemi, affrontando domande per le quali non si conoscono in anticipo i concetti e le procedure matematiche da utilizzare (problem solving).

Paper	Paese	Tipologia di partecipanti	Grado di istruzione coinvolto	Finalità	Obiettivi specifici
Sevinc & Ay, 2021	Turchia	Studenti di scuola	Scuola secondaria di I grado	Comprendere i numeri interi	- Comprendere perché i numeri interi negativi erano necessari in matematica, - Identificare i numeri interi positivi e negativi e - Usare i numeri interi negativi in contesti di vita reale.
Moustapha-Corrêa, et al., 2021	Brasile	Formazione docenti	Università e centri di formazione superiore	Promuovere la problematizzazione delle concezioni degli insegnanti in servizio sulla matematica e la sua pedagogia attraverso il coinvolgimento con attività che presentano sia pratiche basate sulla HoM e situazioni della classe di oggi.	- Comprendere cos'è una funzione e come questo oggetto matematico è cambiato nel tempo; - Problematizzare le metaregole che governano il discorso matematico e come cambiano nel tempo;
Madrid, et al., 2021	Spagna	Formazione docenti	Università e centri di formazione superiore	Utilizzare la HoM in classe per rivelare differenze nel valore del metodo di moltiplicazione attuale rispetto a quelli dell'antichità, all'interno di corsi di formazione insegnanti a diversi livelli.	- Identificare e classificare le differenze tra due metodi di moltiplicazione inusuali/storici (Egiziano e contadini russi) e uno moderno rivelate dagli insegnanti in formazione; - Sperimentare metodi diversi da quelli usualmente sperimentati; - Stimolare discussioni su idee matematiche raramente rivisitate; - Sensibilizzare i docenti alle possibili difficoltà degli studenti nel comprendere concetti matematici; - Presentare situazioni che permettano di comprendere la razionalità sottostante a ciò che insegneranno;
Martins, et al., 2021	Portogallo	Formazione docenti	Università e centri di formazione superiore	Sviluppare nei docenti in servizio (di scuola secondaria inferiore e superiore in Portogallo) la capacità di utilizzare la HoM come risorsa didattica efficace, attraverso la conoscenza, gestione ed esplorazione dei temi trasversali nei documenti curriculari portoghesi.	- Conoscere le concezioni e pratiche dei docenti sull'utilizzo della HOM all'inizio della formazione; - Comprendere l'impatto della formazione sulle concezioni e pratiche dei docenti partecipanti; - Promuovere il lavoro collaborativo tra docenti e la condivisione di esperienze didattiche; - Favorire l'elaborazione e risoluzione di compiti matematici che integrino la HOM; - Promuovere l'articolazione curricolare e discutere modalità di valutazione degli studenti;

Paper	Paese	Tipologia di partecipanti	Grado di istruzione coinvolto	Finalità	Obiettivi specifici
De Vittori, 2021	Francia	Studenti di scuola	Scuola primaria	Collegare il sistema di numerazione in base 60, come quello usato per la misurazione del tempo, con il nostro sistema ore/minuti/secondi.	Effettuare raggruppamenti di unità, sessanta e sessanta al quadrato usando la scrittura cuneiforme babilonese.
Pjanić, 2020	Bosnia ed Erzegovina	Formazione docenti	Università e centri di formazione superiore	Sviluppare la conoscenza dei contenuti matematici (SCK) e la conoscenza pedagogica dei contenuti (PCK) dei futuri insegnanti di matematica attraverso l'uso di episodi dalla Storia della Matematica.	- Comprendere quando e come utilizzare il problema di Abu'l-Wafa nel curriculum di geometria; - Discutere la questione della conoscenza procedurale vs concettuale; - Riflettere sul ruolo della dimostrazione e argomentazione nelle lezioni di matematica;
Kapofu, & Kapofu 2020	Sudafrica	Studenti di scuola	Scuola secondaria di II grado	Aumentare la motivazione, la fiducia e la prontezza nell'affrontare compiti impegnativi;	Promuovere l'interesse e la partecipazione attiva delle studentesse, contrastando il calo di iscritti e i risultati negativi in matematica.
Jankvist, Clark, & Mosvold, 2020	Danimarca	Formazione docenti	Università e centri di formazione superiore	Sviluppare la Mathematical Knowledge for Teaching Teachers (MKTT) in futuri formatori di insegnanti di matematica attraverso un corso breve sulla storia della matematica nell'educazione matematica.	ND
Esteve, 2020	Spagna	Studenti universitari	Università e centri di formazione superiore	Chiarire idee matematiche relative alle relazioni tra algebra e geometria attraverso l'analisi di fonti storiche originali.	- conoscere le fonti originali della matematica; - riconoscere i cambiamenti significativi nella disciplina; - mostrare le relazioni socio-culturali della matematica; - incoraggiare la riflessione sullo sviluppo del pensiero matematico.
Bütüner & Baki, 2020.	Turchia	Studenti di scuola	Scuola secondaria di I grado	Riconoscere la natura dinamica e in sviluppo della matematica, approfondendo le storie dei matematici e mostrando come e perché la matematica è emersa.	- Apprendere diversi metodi di soluzione (es. moltiplicazione a gabbia, radice quadrata babilonese); - Scoprire regole e relazioni matematiche (es. teorema di Pitagora, somma di numeri interi consecutivi); - Comprendere l'evoluzione delle notazioni (es. espressioni algebriche); - Collegare la matematica a problemi pratici (es. calcolo del volume, ragionamento proporzionale).

Paper	Paese	Tipologia di partecipanti	Grado di istruzione coinvolto	Finalità	Obiettivi specifici
Bütüner, 2020	Turchia	Formazione docenti	Università e centri di formazione superiore	Usare la storia della matematica (HoM) come strumento per migliorare la conoscenza degli studenti sui concetti matematici e la loro motivazione all'apprendimento	- eseguire moltiplicazioni con numeri interi; - costruire il teorema di Pitagora; - comprendere l'importanza delle unità di misura standard; - risolvere problemi di similitudine; - costruire la formula per il volume di piramidi tronche; - derivare le formule per la somma di numeri interi consecutivi e per la somma dei quadrati di numeri interi;
White, et al., 2019	USA	Formazione docenti	Università e centri di formazione superiore	Integrare l'uso di Primary Source Projects (PSPs) nell'insegnamento della matematica universitaria per promuovere l'apprendimento attivo attraverso fonti storiche originali, sviluppando una comprensione più profonda dei concetti matematici e dei processi di pensiero dei matematici storici.	- Insegnare contenuti matematici fondamentali attraverso fonti storiche primarie anziché libri di testo standard; - Promuovere l'engagement attivo degli studenti attraverso la lettura e l'analisi di testi originali; - Sviluppare la capacità di comprendere l'evoluzione storica dei concetti matematici; - Favorire la riflessione critica sul processo di sviluppo del pensiero matematico; - Facilitare la transizione dei docenti verso pratiche di inquiry-based learning;
Tong, Loc, Uyen, & Y, 2019.	Vietnam	Studenti di scuola	Scuola secondaria di II grado	Creare interesse ed entusiasmo negli studenti per l'apprendimento della matematica	Far conoscere agli studenti metodi alternativi per la risoluzione delle equazioni di secondo grado basate sulla HoM;
Maffia, 2019	Italia	Studenti di scuola	Scuola primaria	Utilizzare una fonte storica primaria per introdurre il concetto di numero primo attraverso la sinergia tra il testo storico e le conoscenze pregresse degli studenti (rappresentazione rettangolare della moltiplicazione)	- Costruire la definizione di numero primo attraverso l'analisi di una fonte storica; - Sollecitare l'uso della rappresentazione rettangolare della moltiplicazione come strumento interpretativo del testo storico;
Zengin, 2018	Turchia	Formazione docenti	Università e centri di formazione superiore	Fornire ai futuri insegnanti un ambiente di apprendimento dinamico e interattivo per esplorare problemi, teoremi e dimostrazioni storiche	- Costruire dinamicamente concetti, teoremi e problemi storici usando GeoGebra; - Visualizzare e concretizzare concetti matematici astratti attraverso rappresentazioni dinamiche; - Sviluppare comprensione concettuale dei problemi storici

Paper	Paese	Tipologia di partecipanti	Grado di istruzione coinvolto	Finalità	Obiettivi specifici
					attraverso la costruzione attiva; - Esplorare lo sviluppo storico dei concetti matematici in ambiente dinamico; - Preparare i futuri docenti a integrare HoM e TIC nella propria pratica didattica;
Sampaio & Batista, 2018.	Brasile	Studenti di scuola	Scuola secondaria di II grado	Motivarli all'apprendimento della trigonometria attraverso un approccio storico integrato con l'individuazione dei valori cognitivi	
Guillemette, 2017	Canada	Formazione docenti	Università e centri di formazione superiore	Indurre un dépaysement épistémologique (disorientamento epistemologico) nei futuri insegnanti	- Offrire uno sguardo critico sugli aspetti sociali, storici e culturali della disciplina (HoM as Goal) - Sperimentare il dépaysement épistémologique attraverso la lettura di testi storici originali; - Decostruire le concezioni comuni e precostituite sulla natura della matematica; - Sviluppare empatia verso gli autori matematici storici e, per estensione, verso i futuri studenti; - Comprendere la matematica come attività culturalmente situata e storicamente determinata; - Riconoscere l'importanza di intuizione, creatività e libertà di pensiero nel fare matematica Sviluppare sensibilità verso le difficoltà degli studenti come esperienza di alterità; - Promuovere apertura verso ragionamenti marginali e non conformisti; - Riflettere sulla propria epistemologia della matematica e dell'educazione matematica
Dias, Araujo & Ota, 2017	Brasile	Studenti di scuola	Scuola secondaria di II grado	Incrementare la motivazione ad apprendere attraverso l'uso delle tecnologie in relazione alla HoM	Investigare le origini, le culture, le religioni, l'economia, la struttura sociale e, principalmente, i contributi matematici sviluppati da cinque antiche civiltà (Babilonese, Cinese, Greca, Egiziana e Indiana)

Paper	Paese	Tipologia di partecipanti	Grado di istruzione coinvolto	Finalità	Obiettivi specifici
Abah, 2017	Nigeria	Studenti universitari	Università e centri di formazione superiore	Stimolare la curiosità e sostenere l'interesse degli studenti per la matematica	- Facilitare il calcolo e il richiamo delle procedure matematiche - Stabilire relazioni significative tra idee astratte e applicazioni pratiche nel mondo reale.
Youchu, 2016	Cina	Formazione docenti	Università e centri di formazione superiore	Sviluppare le conoscenze matematiche enfatizzando il valore educativo della HoM	- Sviluppare una sensibilità storica - Incoraggiare l'integrazione del background storico dei concetti matematici
Bütüner, 2016	Turchia	Studenti di scuola	Scuola secondaria di I grado	Scoprire regole e formule matematiche collegando le conoscenze esistenti a nuove informazioni.	Scoprire le regole utilizzate per trovare la somma di numeri interi positivi consecutivi, di numeri triangolari e di numeri quadrati.
Ersoy & Öksüz, 2016	Turchia	Studenti di scuola	Scuola primaria	Migliorare il rendimento accademico, la ritenzione delle conoscenze e la motivazione degli studenti.	- mettere in relazione le frazioni con i numeri decimali partendo da un problema storico; - comprendere le posizioni decimali attraverso la storia del sistema decimale; - capire l'importanza dello zero nei numeri decimali attraverso la sua evoluzione storica; - posizionare i numeri decimali su una linea numerica; - confrontare e ordinare i numeri decimali; - conoscere il matematico Takiyüddin; - comprendere l'uso dei decimali nella vita quotidiana e nelle osservazioni astronomiche;
Lim & Chapman, 2015	Singapore	Studenti di scuola	Scuola secondaria di II grado	Arricchire l'insegnamento e migliorare i risultati di apprendimento degli studenti sia nel rendimento sia nella sfera affettiva (atteggiamento, ansia, motivazione).	ND
Gilmullin, 2015	Russia	Docenti	Università e centri di formazione superiore	Formare le qualità professionali dei futuri insegnanti di matematica attraverso lo studio della storia della matematica	- Fornire una base informativa sui fatti storici e le regolarità dello sviluppo del pensiero matematico - Sviluppare abilità nell'usare le conoscenze storiche per risolvere problemi professionali - Creare una motivazione stabile a usare la storia come

Paper	Paese	Tipologia di partecipanti	Grado di istruzione coinvolto	Finalità	Obiettivi specifici
					strumento professionale e a comprendere il dialogo tra culture diverse.
Bütüner, 2015b	Turchia	Studenti di scuola	Scuola secondaria di I grado	Rendere gli studenti partecipanti attivi nel processo di apprendimento,	Dedurre tramite il “metodo della dissezione”, le formule del volume dei tronchi di piramide a base quadrata e rettangolare Comprendere la dimensione storica della matematica: dalle stesse necessità quotidiane possono scaturire diverse soluzioni
Biber, İspir & Ay, 2015	Turchia	Formazione docenti	Università e centri di formazione superiore	Offrire un metodo di insegnamento alternativo ed efficace per il corso di Storia della Matematica, superando i pregiudizi negativi degli studenti e rendendo l'apprendimento più coinvolgente, motivante e permanente	- Riconoscere che la matematica ha più di una definizione e poter rispondere alla domanda “Cos’è la matematica?” in modi diversi. - Avere conoscenza del processo di sviluppo dell’aritmetica. - Poter fornire esempi dei sistemi numerici utilizzati nello sviluppo della matematica. - Essere consapevoli che la costante matematica Pi (π) è il rapporto tra la circonferenza di un cerchio e il suo diametro. - Conoscere lo sviluppo storico della costante Pi (π). - Avere conoscenza del processo di sviluppo dell’algebra. - Poter fornire esempi di operazioni aritmetiche utilizzate dalle civiltà nei primi periodi della matematica. - Avere conoscenza dello sviluppo storico della geometria.
Weldeana & Abraham, 2014	Etiopia	Formazione docenti	Università e centri di formazione superiore	Migliorare le credenze dei futuri insegnanti sulla matematica e sul suo processo d’insegnamento-apprendimento	- comprendere lo sviluppo storico di alcune idee matematiche; - esplorare le applicazioni dei problemi matematici nella vita reale; - valutare le proprie credenze e pensieri sui problemi della matematica

Paper	Paese	Tipologia di partecipanti	Grado di istruzione coinvolto	Finalità	Obiettivi specifici
Panagiotou, 2014	Grecia	Studenti di scuola	Scuola secondaria di II grado	Migliorare l'immagine della matematica e approfondire la comprensione delle sezioni coniche, collegando aspetti epistemologici e disciplinari	- discutere la motivazione e i fenomeni che hanno portato alla creazione delle sezioni coniche; - spiegare le ragioni dei loro nomi (parabola, iperbole, ellisse); - giustificare la loro duplice caratterizzazione come luoghi geometrici e come intersezioni di un cono con un piano.
Loats, White, & Rubino, 2014	USA	Formazione docenti	Università e centri di formazione superiore	Integrare i contenuti matematici tradizionali dei corsi di storia della matematica, incoraggiando gli studenti a diventare critici e consapevoli verso la storia, vista come impresa umana.	- Ricercare argomenti storici su Internet e valutare la validità delle informazioni. - Sviluppare un senso informale dell'evoluzione storica dei vari filoni della matematica. - Articolare e comunicare accuratamente la matematica e la sua storia in forma scritta e orale. - Sviluppare un apprezzamento della matematica come impresa culturale e umana. - Generare curiosità per la matematica e la sua storia. - Saper lavorare in modo indipendente e con gli altri per imparare la matematica.
Jankvist, 2014a	Danimarca	Studenti di scuola	Scuola secondaria di II grado	Fornire agli studenti un'immagine più veritiera della matematica come disciplina scientifica, mostrando la matematica "in fieri" attraverso lo studio di fonti originali, in contrapposizione alla presentazione statica dei libri di testo	ND
Jankvist, 2014b	Danimarca	Studenti di scuola	Scuola secondaria di II grado	Sviluppare negli studenti le competenze di "overview and judgement" (OJ).	- Capacità di avere una visione d'insieme e di giudizio sulla matematica in relazione a: - OJ1) le sue applicazioni; - OJ2) il suo sviluppo storico; - OJ3) la sua natura come disciplina;
Fenaroli, Furinghetti &	Italia	Formazione docenti	Università e centri di	Promuovere la riflessione dei futuri insegnanti sui concetti matematici che insegneranno	- Arricchire la formazione professionale favorendo flessibilità e consapevolezza

Paper	Paese	Tipologia di partecipanti	Grado di istruzione coinvolto	Finalità	Obiettivi specifici
Somaglia, 2014			formazione superiore		
Despeaux, 2014	USA	Formazione docenti	Università e centri di formazione superiore	Coinvolgere gli studenti con le fonti primarie e aiutarli a trovare argomenti di ricerca per i loro elaborati finali	- Confrontarsi con le fonti primarie - Affrontare la matematica contenuta nelle fonti primarie - Completare una ricerca approfondita sulle fonti secondarie - Costruire argomentazioni storiche solide

Appendice D: Codebook

PARTE 1: SISTEMA CODICI - CLUSTER STUDENTI

1. PRATICA DIDATTICA

1.1 Ruolo della HoM

1.1.1 HoM come strumento

Definizione:

La storia della matematica è utilizzata strumentalmente per raggiungere obiettivi di apprendimento matematico (comprensione concettuale, motivazione, engagement) piuttosto che come contenuto disciplinare autonomo da apprendere.

Indicatori di presenza:

- Gli obiettivi dichiarati concernono specificamente l'apprendimento di contenuti matematici, non conoscenza storica;
- La storia costituisce un contesto o uno strumento per facilitare la comprensione dei concetti matematici;
- Gli outcome misurati concernono conoscenze, competenze e atteggiamenti specificamente rivolti alla matematica e non alle conoscenze storiche
- Dichiarazioni esplicite tipo "history was used to enhance understanding of..."

1.1.2 HoM come obiettivo

Definizione:

La storia della matematica costituisce contenuto disciplinare da apprendere in sé, con obiettivi espliciti di acquisizione di conoscenze storiche o implicitamente correlati alla comprensione dell'evoluzione dei concetti per cogliere le *meta-issues*, ovvero questioni metariflessive della disciplina che concernono la sua evoluzione o consapevolezza del contesto culturale entro cui si sviluppa il pensiero matematico.

Indicatori di presenza:

- Gli obiettivi dichiarati includono "comprendere l'evoluzione storica di...", "conoscere i matematici...";
- Focus sullo sviluppo della consapevolezza storica, mostrando la matematica come scienza dinamica, umana, interdisciplinare, euristica;

- Tempo dedicato esplicitamente all'insegnamento di contenuti storici;
- Attività centrate sull'approfondimento storico (ricerche biografiche, timeline storiche);

1.2 Attività didattiche

1.2.1 Lezione introduttiva

Definizione:

Momenti di presentazione diretta, spesso tramite lezione frontale, volta a contestualizzare storicamente, culturalmente o concettualmente le attività successive, fornendo un frame di riferimento.

Indicatori di presenza:

- Docente presenta il contesto storico prima dell'attività
- Funzione di cornice per attività successive

1.2.2 Lettura delle fonti

Definizione:

Engagement diretto con testi matematici storici originali (o traduzioni) in forma estesa o estratti antologici, richiedendo interpretazione testuale.

Indicatori di presenza:

- Lettura di estratti da fonti primarie (Euclide, Fibonacci, Papiro...)
- Analisi/interpretazione di linguaggio matematico storico
- Confronto tra versione originale e moderna

1.2.3 Attività esplorativo-manipolative

Definizione:

Attività hands-on che coinvolgono manipolazione concreta di oggetti (materiali strutturati, manipolativi geometrici, strumenti di misurazione storici) per esplorare concetti matematici.

Indicatori di presenza:

- Uso di manipolativi fisici (regoli, cubi, abaco, strumenti geometrici)
- Costruzione di modelli concreti ispirati a metodi storici
- Esplorazione tattile-visiva di rappresentazioni matematiche
- Verbi come "manipolare", "costruire", "esplorare fisicamente"

1.2.4 Ruolo docente mediatore e facilitatore

Definizione:

Il docente assume ruolo attivo di mediazione semiotica, scaffolding e spiegazione durante lo svolgimento delle attività, traducendo tra registri semiotici diversi e guidando l'interpretazione.

Indicatori di presenza:

- Descrizioni di interventi esplicativi del docente durante l'attività
- Riferimenti a "scaffolding", "mediazione", "facilitazione"
- Docente che traduce/interpreta fonti storiche per gli studenti
- Gesti semiotici e orchestrazioni documentate

1.2.5 Attività strutturate con *worksheet*

Definizione:

Task didattiche progettate attraverso schede di lavoro, fogli di attività o sequenze guidate con consegne progressive, domande strutturate e spazi per risposte/elaborazioni.

Indicatori di presenza:

- Menzioni di "worksheet", "schede di lavoro", "activity sheets" che articolano contenuti insieme storia e matematica.
- Consegne progressive e graduate
- Task con struttura predefinita riportate nelle appendici degli studi esaminati

1.2.6 Uso di problemi storici

Definizione:

Utilizzo di problemi matematici autentici tratti da fonti storiche (papiri, trattati, manoscritti) come task didattiche, mantenendo il contesto narrativo originale.

Indicatori di presenza:

- Riferimenti a problemi nominati (problema di Diofanto, Papiro di Rhind...)
- Problemi presentati nel loro contesto storico narrativo
- Fonte storica del problema citata
- Problemi che mantengono formulazione/contesto originale;

Criteri di distinzione:

- *Algoritmi storici*: qui il focus è su problema da risolvere, non sulla procedura.
- *Esercizi standard*: qui i problemi mantengono un contesto storico-narrativo, non sono decontestualizzati

1.2.7 Esercizi standard decontestualizzati

Definizione:

Esercizi matematici tradizionali privi di contestualizzazione storica, utilizzati come complemento o confronto con attività storicamente informate.

Indicatori di presenza:

- Esercizi di routine senza narrazione storica
- Problemi in forma moderna

1.2.8 Algoritmi risolutivi tratti dalla storia**Definizione:**

Utilizzo di procedure di calcolo, metodi risolutivi o algoritmi provenienti da tradizioni matematiche storiche (es. moltiplicazione egizia, metodo di Eratostene, algoritmi babilonesi) come attività didattica.

Indicatori di presenza:

- Riferimenti espliciti a algoritmi storici nominati (Ascalon, Gelosia, metodo cinese...)
- Studenti applicano procedure di calcolo antiche
- Confronto tra metodi storici e moderni
- Esercitazioni con tecniche computazionali del passato

1.2.9 Lavoro di gruppo**Definizione:**

Attività svolte in configurazioni di 2 o più studenti che lavorano insieme su compiti condivisi, indipendentemente dal grado di interdipendenza o strutturazione collaborativa.

Indicatori di presenza:

- Riferimenti a "gruppi", "coppie", "teamwork"
- Specificazione di dimensioni gruppi (2-3 studenti, 4-5...)
- Attività assegnate a gruppi piuttosto che individualmente;

1.2.10 Discussione di gruppo o in plenaria**Definizione:**

Momenti strutturati di dialogo collettivo (piccolo gruppo o classe intera) per condividere interpretazioni, negoziare significati, confrontare soluzioni o riflettere su attività svolte.

Indicatori di presenza:

- Riferimenti a "discussione", "debate", "condivisione plenaria"
- Momenti di confronto tra gruppi

- Presentazione e discussione di lavori/soluzioni
- Negoziazione collettiva di interpretazioni;

1.2.11 TIC

Definizione:

Utilizzo di software, applicazioni digitali o piattaforme tecnologiche come strumenti didattici (software di geometria dinamica, simulazioni, risorse online).

Indicatori di presenza:

- Menzioni esplicite di software (GeoGebra, Cabri, Desmos, ecc.)
- Uso di app, tablet, computer, smartphone
- Piattaforme online per condivisione/collaborazione (Google Classroom, MTeams, ecc.)

1.3 Metodologia emergente: attività laboratoriale

Definizione:

Approccio didattico caratterizzato da ambiente/configurazione laboratoriale dove apprendimento avviene attraverso esperienza diretta, manipolazione, sperimentazione e costruzione attiva.

Indicatori di presenza:

- Enfasi su learning by doing
- Spazi attrezzati per sperimentazione
- Costruzione/manipolazione come modalità prevalente

2 OUTCOME E BENEFICI

2.1 Cambiamenti nella visione epistemologica

Definizione:

Comprensione della natura della matematica come forma di conoscenza, inclusa la sua genesi storica, fallibilità, dimensione culturale, evoluzione concettuale e carattere di costruzione umana.

Indicatori di presenza:

- Riconoscimento della matematica come prodotto culturale umano
- Percezione di fallibilità e provvisorietà della matematica
- Consapevolezza del contesto socio-culturale dello sviluppo matematico
- Cambiamenti da visione platonica e assolutista verso una visione processuale, culturale e fallibilista

2.2 Cambiamenti negli atteggiamenti e nelle opinioni sulla matematica

Definizione:

Posizioni valutative, percezioni soggettive e giudizi degli studenti riguardo alla matematica, alla sua storia, all'apprendimento matematico, o alle specifiche attività/materiali didattici proposti.

Indicatori di presenza:

- Espressioni di giudizi valutativi ("mi è piaciuto", "utile", "interessante")
- Questionari di gradimento/opinioni
- Feedback su percezioni della matematica o delle attività
- Cambiamenti nelle convinzioni dichiarate

2.3 Incremento delle conoscenze e delle competenze disciplinari

Definizione:

Padronanza di contenuti matematici specifici e capacità di applicarli, includendo comprensione concettuale profonda, conoscenza procedurale, connessioni tra concetti, valutate prevalentemente con metodi qualitativi.

Indicatori di presenza:

- Evidenze qualitative (racconti, riflessioni o osservazioni dei docenti e dei ricercatori) relative alla comprensione concettuale
- Capacità di stabilire connessioni tra concetti e padronanza procedurale senza test standardizzati
- Documentazione di argomentazioni matematiche più articolate
- Analisi della produzione degli studenti

2.4 Miglioramento dei risultati scolastici

Definizione:

Performance accademica misurata attraverso strumenti di valutazione formale come test standardizzati, voti, prove di profitto o esami, che quantificano il rendimento scolastico.

Indicatori di presenza:

- Punteggi a test pre/post
- Voti scolastici
- "Academic achievement", "test scores"
- Prove standardizzate con confronto sperimentale/controllo
- Dati quantitativi di performance

2.5 Dimensioni e processi cognitivi

Definizione:

Processi mentali, abilità intellettuali e competenze di pensiero matematico, includendo strategie cognitive, ragionamento, problem-solving, calcolo mentale, deduzione logica e flessibilità nel pensiero.

Indicatori di presenza:

- Sviluppo di strategie cognitive documentato
- Miglioramenti in ragionamento/argomentazione matematica
- Capacità di problem-solving articolate
- Processi di pensiero più sofisticati osservati
- Riferimenti a "cognitive skills", "reasoning abilities"

2.6 Dimensioni psicologiche dell'apprendimento

2.6.1 Miglioramento del clima di classe e piacevolezza

Definizione:

Percezioni collettive del gruppo-classe riguardo all'atmosfera relazionale, al benessere durante le attività e al gradimento dell'esperienza didattica.

Indicatori di presenza:

- Osservazioni su divertimento e miglioramento del clima di classe
- Feedback su piacevolezza e gradimento delle attività
- Relazioni positive tra pari durante attività

2.6.2 Incremento di motivazione e interesse

Definizione:

Incremento documentato di interesse, curiosità, engagement, volontà di impegnarsi nello studio della matematica, o orientamento positivo verso la disciplina e le sue questioni

Indicatori di presenza:

- Maggiore engagement osservato
- Curiosità verso approfondimenti
- Atteggiamenti proattivi verso apprendimento matematico
- Osservazioni dei ricercatori sull'incremento dell'interesse degli studenti

2.6.3 Riduzione dell'ansia

Definizione:

Sentimenti di tensione, apprensione, paura o disagio emotivo specificamente associati alla matematica, che interferiscono con la performance e vengono misurati come outcome dell'intervento.

Indicatori di presenza:

- Misurazione esplicita tramite scale validate (MARS, sMARS)
- Riduzione di "mathematics anxiety" documentata
- Riferimenti a tensione/paura verso matematica
- Confronto pre/post su livelli di ansia

PARTE 2: SISTEMA CODICI - CLUSTER DOCENTI

3 PRATICA DIDATTICA

3.1 Ruolo della HoM

3.1.1 HoM come strumento professionale

Definizione:

La storia è utilizzata specificamente per sviluppare competenze professionali docenti (PCK, MKT, capacità di trasposizione didattica, anticipazione difficoltà studenti), non solo per arricchimento culturale o disciplinare.

Indicatori di presenza:

- Obiettivi espliciti di sviluppo professionale
- Focus su "come insegnare usando la storia"
- Elaborazione di lesson plans, materiali didattici
- Riflessione su strategie di integrazione curriculare
- Collegamento con framework PCK/MKT

3.1.2 HoM come strumento motivazionale

Definizione:

La storia è utilizzata per incrementare motivazione, interesse e disposizioni affettive positive dei docenti verso la matematica e il suo insegnamento.

Indicatori di presenza:

- Obiettivi dichiarati di "inspiring teachers"
- Focus su engagement emotivo dei docenti
- Esperienze volte a rinnovare passione per la matematica
- Dimensione affettiva esplicita

3.1.3 HoM come strumento cognitivo

Definizione:

La storia è utilizzata per approfondire la comprensione disciplinare dei docenti sui contenuti matematici, la genesi dei concetti, le connessioni interne alla disciplina.

Indicatori di presenza:

- Obiettivi di approfondimento matematico
- Studio dell'evoluzione concettuale
- Comprensione di fondamenti epistemici dei concetti

3.1.4 HoM come obiettivo

Definizione:

La storia costituisce obiettivo d'apprendimento in sé, approfondendo le conoscenze storiche, la consapevolezza epistemologica e la comprensione del contesto culturale che influenza lo sviluppo della disciplina.

Indicatori di presenza:

- Storia come parte del curriculum formativo
- Valutazione delle conoscenze storiche acquisite
- Obiettivi di "cultural literacy" storico-matematica

3.2 Attività didattiche

3.2.1 Lezioni frontali

Definizione:

Momenti, spesso a carattere introduttivo e anticipatorio, di presentazione diretta dei contenuti (storici, didattici, teorici) da parte del formatore ai docenti in formazione.

Indicatori di presenza:

- Riferimenti a presentazioni del docente, lezioni dirette;
- Approccio trasmissivo-espositivo volto a introdurre contenuti, contesti, possibili usi e situazioni

3.2.2 Studio e analisi del materiale di approfondimento

Definizione:

Esame critico di materiali didattici, articoli di ricerca HPM, curricula, libri di testo, paper scientifici forniti dal formatore come oggetti di studio e discussione.

Indicatori di presenza:

- Lettura e analisi di articoli di ricerca dalla HPM
- Studio dei programmi nazionali
- Analisi di libri di testo per identificare usi della storia
- Esame dei materiali didattici esistenti forniti dal docente che già integrano la HoM

3.2.3 Ricerche (bibliografiche o online)

Definizione:

Attività in cui i docenti in formazione cercano autonomamente materiali, risorse e fonti (storiche, didattiche, bibliografiche) pertinenti a

specifici obiettivi formativi, sviluppando capacità di reperimento e selezione critica.

Indicatori di presenza:

- Assegnazione di task di ricerca di fonti storiche
- Ricerca autonoma di materiali didattici/articoli
- Esplorazione di database, archivi, biblioteche
- Selezione critica di materiali da utilizzare

3.2.4 Lettura testi o problemi storici

Definizione:

Engagement diretto dei docenti in formazione con testi matematici storici originali (o traduzioni) o risoluzione di problemi autentici tratti da fonti storiche, sia per comprendere i contenuti matematici che per sperimentare in prima persona attività potenzialmente utilizzabili con gli studenti.

Indicatori di presenza:

- Lettura di estratti da fonti primarie (Euclide, Fibonacci, Al-Khwarizmi, ecc.)
- Risoluzione di problemi storici (Papiro di Rhind, problema di Diofanto, ecc.)
- Analisi/interpretazione di linguaggio matematico storico
- Confronto tra formulazioni antiche e moderne

3.2.5 Lavoro di gruppo

Definizione:

Attività svolte in configurazioni di 2 o più docenti che lavorano insieme su compiti condivisi, indipendentemente dal grado di interdipendenza o strutturazione collaborativa.

Indicatori di presenza:

- Riferimenti a "gruppi", "coppie", "teamwork"
- Specificazione di dimensioni gruppi: coppia, piccoli gruppi, o numeri specifici (2-3-4)
- Attività assegnate a gruppi

3.2.6 Discussione di gruppo o in plenaria

Definizione:

Momenti strutturati di dialogo collettivo (piccolo gruppo o classe intera) per condividere interpretazioni, negoziare significati, confrontare soluzioni o riflettere su attività svolte.

Indicatori di presenza:

- Riferimenti a "discussione", "debate", "condivisione plenaria"
- Momenti di confronto tra gruppi di docenti
- Presentazione e discussione di lavori, progetti e soluzioni
- Negoziazione collettiva di interpretazioni

3.2.7 Produzione di artefatti didattici**Definizione:**

Produzione scritta di lesson plans, teaching plans, unità didattiche, progetti, portfolio capaci di integrare la dimensione storica.

Indicatori di presenza:

- Richiesta di progettare lesson plans
- Elaborazione di sequenze didattiche
- Portfolio riflessivi

3.2.8 Uso della scrittura riflessiva**Definizione:**

Pratiche di scrittura strutturata (diari, journal, risposte a prompt) volte a esplicitare e analizzare riflessioni metacognitive, scelte didattiche, processi di apprendimento professionale.

Indicatori di presenza:

- Riferimenti a "Reflective journals" o "learning diaries"
- Prompt guidati per riflessione scritta
- Documentazione del pensiero riflessivo
- Analisi delle proprie convinzioni e scelte didattiche

3.3 Metodologia emergente**3.3.1 Problem-based Learning****Definizione:**

Approccio didattico centrato su problemi autentici e complessi come catalizzatori dell'apprendimento, dove i docenti in formazione costruiscono conoscenze attraverso risoluzione di situazioni-problema.

Indicatori di presenza:

- Problemi autentici come punto di partenza
- Apprendimento auto-diretto guidato dall'esplorazione problema
- Ciclo basato su: presentazione del problema → ricerca → soluzione → riflessione

3.3.2 Ciclo progettazione-formazione-riprogettazione

Definizione:

Specifica struttura formativa *emergente* tesa a connettere la formazione con la pratica didattica attraverso cicli che connettono insieme teoria e prassi progettuale articolando le seguenti tappe: teoria, riflessione, progettazione, riflessione e riprogettazione. È la presenza di quest'ultima tappa a indicare la presenza del codice;

Indicatori di presenza:

- Alternanza esplicita teoria-pratica
- Alla progettazione iniziale segue una riprogettazione

3.3.3 Esperienza diretta

Definizione:

Apprendimento attraverso esperienza diretta (fare matematica con la storia, sperimentare in prima persona attività didattiche, vivere processi che poi proporranno agli studenti).

Indicatori di presenza:

- Docenti "fanno" attività come se fossero studenti
- Learning by doing
- Esperienza personale come base per riflessione

3.3.4 Reflective Practice

Definizione:

Metodologia, spesso utilizzata come approccio di ricerca ma che presenta inevitabilmente delle ricadute sull'apprendimento (in quanto costituisce anche un metodo di formazione), centrata sulla riflessione sull'esperienza formativa, sulle proprie convinzioni, scelte didattiche e processi di apprendimento.

Indicatori di presenza:

- Riflessione guidata strutturata
- Analisi critica delle proprie pratiche e convinzioni
- Sviluppo di consapevolezza sulla natura della matematica e dell'apprendimento

3.3.5 Apprendimento collaborativo

Definizione:

Metodologia didattica strutturata dove l'apprendimento avviene attraverso interdipendenza positiva, responsabilità individuale e di gruppo, con l'altro come risorsa essenziale per raggiungere obiettivi condivisi

Indicatori di presenza:

- Interdipendenza positiva tra membri del gruppo
- Responsabilità individuale E di gruppo
- Obiettivi comuni che richiedono contributi di tutti

4 OUTCOME E BENEFICI

4.1 Cambiamenti nella visione epistemologica

Definizione:

Comprensione della natura della matematica come disciplina, del suo sviluppo storico, dimensione culturale, e ruolo della storia nell'educazione matematica. Include la visione filosofica sull'educazione matematica che influenza le scelte didattiche.

Indicatori di presenza:

- Cambiamenti da visione assolutista a fallibilista
- Riconoscimento dimensione culturale/storica
- Consapevolezza del ruolo della storia nell'insegnamento
- Concezioni sulla natura della conoscenza matematica

4.2 Atteggiamenti e opinioni

4.2.1 Su HoM e sua integrazione didattica

Definizione:

Posizioni valutative, intenzioni e credenze specificamente riguardanti l'utilità, la fattibilità e il valore dell'integrazione della storia della matematica nella pratica didattica.

Indicatori di presenza:

- Opinioni su utilità didattica della storia
- Intenzioni di usare storia in futuro
- Percezioni di fattibilità dell'integrazione
- Atteggiamenti verso HoM come risorsa didattica

4.2.2 Su HOM e apprendimento

Definizione:

Concezioni e credenze più ampie sulla natura della matematica, il suo apprendimento, e il ruolo della dimensione storica nella comprensione matematica.

Indicatori di presenza:

- Credenze sul come si apprende matematica

- Concezioni sul ruolo della storia nell'apprendimento
- Visioni sulla matematica come disciplina
- Teorie implicite sull'insegnamento

4.3 Aumento profondità delle conoscenze disciplinari

Definizione:

Padronanza dei contenuti matematici includendo Common Content Knowledge, Specialized Content Knowledge e Horizon Knowledge, con particolare attenzione alla comprensione della genesi storica dei concetti.

Indicatori di presenza:

- Approfondimento di contenuti matematici
- Comprensione dell'evoluzione storica dei concetti
- Connessioni matematiche più profonde documentate

4.4 Competenze pedagogiche e didattiche

Definizione:

Conoscenze e abilità relative all'insegnamento della matematica, includendo Knowledge of Content and Students, Knowledge of Content and Teaching, capacità di trasposizione didattica, progettazione di attività e integrazione della storia nella pratica.

Indicatori di presenza:

- Sviluppo di capacità di progettazione didattica
- Comprensione delle difficoltà studentesche
- Repertorio di strategie didattiche ampliato
- Capacità di adattare contenuti storici a contesti didattici

4.5 Dimensioni psicologiche dell'apprendimento

4.5.1 Motivazione e Interesse

Definizione:

Incremento documentato di motivazione, interesse o curiosità verso la storia della matematica, il suo uso didattico, o verso la matematica stessa come disciplina da insegnare.

Indicatori di presenza:

- Maggiore interesse verso storia documentato
- Motivazione a integrare HoM nella pratica
- Entusiasmo rinnovato per insegnamento matematica

4.5.2 Dimensioni professionali del Sé

Definizione:

Dimensioni motivazionali e di autopercezione professionale, includendo autoefficacia (credenze nelle proprie capacità), agency (capacità di agire intenzionalmente), e autoregolazione (metacognizione della pratica).

Indicatori di presenza:

- Aumentata autoefficacia percepita
- Maggiore senso di agency professionale
- Capacità di autoregolare la pratica
- Disposizione ad agire innovativamente

Appendice E: Matrice Studio/Codice - Studenti

E.1: Studenti: attività didattica

Paper	HoM as Tool	HoM as Goal	Attività esplorativo- manipolative	Docente mediatore	Algoritmi dalla storia	Discussione	TIC	Lavoro di gruppo	Problemi storici	Esercizi standard	Worksheet	Lezione introduttiva	Lettura delle fonti	Metodologia laboratoriale
De Vittori, Louaked, & Visentin 2024	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0
Panaoura, 2024	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Rizos e Gkrekas, 2023	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0
Igün, Dastan, & Altintas, 2023	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
Filiz & Gür, 2023	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0
Şahin & Danaci, 2022	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
Karatas-Aydin & Isiksal- Bostan, 2022	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Demattè & Furinghetti, 2022	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
de Varent, & Décamp 2022	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Florio, 2022	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0
Arthur, et al. 2022	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Sevinc & Ay, 2021	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0

Paper	HoM as Tool	HoM as Goal	Attività esplorativo- manipolative	Docente mediatore	Algoritmi dalla storia	Discussione	TIC	Lavoro di gruppo	Problemi storici	Esercizi standard	Worksheet	Lezione introduttiva	Lettura delle fonti	Metodologia laboratoriale
Matos & Könya, 2021	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
De Vittori, 2021	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0
Kapofu & Kapofu, 2020	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Esteve, 2020	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
Escalona, et al., 2020	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Bütüner & Baki, 2020.	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
Tong, Loc, Uyen, & Y, 2019.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Maffia, 2019	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0
Sampaio & Batista, 2018	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Baki & Gürsoy, 2018	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Dias, Araujo & Ota, 2017	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Abah, 2017	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Bütüner, 2016	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
Ersoy & Öksüz, 2016	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1
Lim & Chapman, 2015	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Bütüner, 2015b	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
Panagiotou, 2014	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1

Paper	HoM as Tool	HoM as Goal	Attività esplorativo- manipolative	Docente mediatore	Algoritmi dalla storia	Discussione	TIC	Lavoro di gruppo	Problemi storici	Esercizi standard	Worksheet	Lezione introduttiva	Lettura delle fonti	Metodologia laboratoriale
Jankvist, 2014a, 2014b	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0
Bishop, et al., 2014	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Alpaslan, Işıksal, & Haser, 2014	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

E.2: Studenti: Outcome e benefici

Paper	Clima di classe e piacevolezza	Motivazione e interesse	Diminuzione Ansia	Dimensioni e variabili cognitive	Cambiamento di atteggiamenti e opinioni sulla matematica	Cambiamento della visione epistemologica	Incremento dei risultati scolastici	Incremento nelle conoscenze e competenze disciplinari
De Vittori, Louaked, & Visentin 2024	0	0	0	1	0	0	0	1
Panaoura, 2024	0	0	0	0	0	0	0	0
Rizos e Gkrekas, 2023	0	0	0	1	1	1	0	0
Igün, Dastan, & Altintas, 2023	0	1	1	0	0	0	0	0
Filiz & Gür, 2023	1	1	0	0	1	0	1	0
Şahin & Danaci, 2022	0	0	0	1	1	1	0	1
Karatas-Aydin & Isiksal-Bostan, 2022	0	1	0	0	0	1	0	1
Demattè & Furinghetti, 2022	0	1	0	1	0	1	0	1
de Varent, & Décamp 2022	0	1	0	0	0	1	0	0
Florio, 2022	0	1	0	1	0	0	0	1
Arthur, et al. 2022	0	0	0	0	1	1	0	0
Sevinc & Ay, 2021	0	1	0	0	0	1	0	1
Matos & Kónya, 2021	0	0	0	1	0	0	0	1
De Vittori, 2021	0	0	0	1	0	0	0	0

Kapofu & Kapofu, 2020	1	1	1	0	1	1	0	0
Esteve, 2020	0	0	0	1	0	1	0	1
Escalona Reyes, et al., 2020	0	0	0	0	0	0	0	0
Bütüner & Baki, 2020.	1	1	0	0	0	1	0	0
Tong, Loc, Uyen, & Y, 2019.	0	1	0	1	0	1	0	1
Maffia, 2019	0	0	0	0	0	0	0	0
Sampaio & Batista, 2018	0	0	0	0	1	1	0	1
Baki & Gürsoy, 2018	1	1	0	0	1	1	0	1
Dias, Araujo & Ota, 2017	0	1	0	0	1	1	0	0
Abah, 2017	0	1	0	0	0	1	0	1
Bütüner, 2016	1	1	0	0	1	1	1	0
Ersoy & Öksüz, 2016	0	1	0	0	0	0	1	0
Lim & Chapman, 2015	1	0	0	0	1	1	1	1
Bütüner, 2015b	0	1	0	1	1	1	0	0
Panagiotou, 2014	0	1	0	1	0	1	0	1
Jankvist, 2014a, 2014b	0	1	0	0	0	1	0	0
Bishop, et al., 2014	0	0	0	1	0	0	0	0
Alpaslan, Işıksal, & Haser, 2014	0	0	0	0	0	0	0	0

Appendice F: Matrice Studio/Codice - Docenti

F.1: Attività didattica

Paper	HoM as Tool			HoM as Goal	Attività didattica							Metodologia emergente					
	prof.	motiv.	Cogn.		Ricerca di materiale	Lavoro di gruppo	Lettura testi o problemi storici	Discussione di gruppo	Scrittura artefatti did.	Scrittura Refl.	Analisi materiale did.	Lezioni frontali	PBL	Ciclicità	Exp. diretta	Refl. Practice	App. Collab.
Papadopoulos, 2024	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Dilek & Fadime, 2024	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
Moyon, 2022	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Gençkaya & Tan-Şişman, 2021	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Moustapha-Corrêa, et al., 2021	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
Mersin & Durmus, 2021	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Meadows & Caniglia, 2021	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Madrid, et al., 2021	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0
Martins, et al., 2021	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
Lu, Leung & Li, 2021	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Hidiroğlu, 2021	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Paper	HoM as Tool			HoM as Goal	Attività didattica							Metodologia emergente					
	prof.	motiv.	Cogn.		Ricerca di materiale	Lavoro di gruppo	Lettura testi o problemi storici	Discussione di gruppo	Scrittura artefatti did.	Scrittura Refl.	Analisi materiale did.	Lezioni frontali	PBL	Ciclicità	Exp. diretta	Refl. Practice	App. Collab.
Pjanić, 2020	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1
Kusumawati,et al., 2020	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Jankvist, Clark, & Mosvold, 2020	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1
Bütüner, 2020	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
White, et al., 2019	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1
Başbüyük & Şahin, 2019	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Zengin, 2018	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1
Bütüner, 2018	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Guillemette, 2017	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1
Yochu, 2016	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0
Gilmullin, 2015	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Biber, İspir & Ay, 2015	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Weldeana & Abraham, 2014	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0
Villota, 2014	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Povey, 2014	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Loats, White, & Rubino, 2014	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0

Paper	HoM as Tool			HoM as Goal	Attività didattica							Metodologia emergente					
	prof.	motiv.	Cogn.		Ricerca di materiale	Lavoro di gruppo	Lettura testi o problemi storici	Discussione di gruppo	Scrittura artefatti did.	Scrittura Refl.	Analisi materiale did.	Lezioni frontali	PBL	Ciclicità	Exp. diretta	Refl. Practice	App. Collab.
Goodwin, et al., 2014	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Galante, 2014	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Fenaroli, Furinghetti & Somaglia, 2014	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Despeaux, 2014	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

F.2: Outcome e benefici

Paper	Conoscenze e competenze disciplinari	Visione epistemologica	Opinioni e atteggiamenti		Competenze pedagogiche e didattiche	Dimensioni psicologiche	
			Su HOM e sua integrazione didattica	Su HOM e apprendimento		Motivazione e Interesse	Dimensioni professionali del Sè
Papadopoulos, 2024	1	1	0	0	0	0	0
Dilek & Fadime, 2024	0	0	1	0	1	0	0
Moyon, 2022	0	0	0	0	0	0	0
Gençkaya & Tan-Şişman, 2021	0	0	1	1	1	0	0
Moustapha-Corrêa, et al., 2021	1	1	0	0	1	0	0
Mersin & Durmus, 2021	1	1	0	1	0	1	0
Meadows & Caniglia, 2021	0	0	0	0	1	0	0
Madrid, et al., 2021	0	1	0	0	1	0	0
Martins, et al., 2021	0	1	1	0	0	0	0
Lu, Leung & Li, 2021	0	0	0	1	1	0	1
Hidiroğlu, 2021	0	0	0	1	0	0	0
Pjanić, 2020	0	1	0	0	1	0	0
Kusumawati,et al., 2020	0	0	1	0	0	0	1
Jankvist, Clark, & Mosvold, 2020	0	1	0	0	1	0	0
Bütüner, 2020	1	0	0	0	1	1	0
White, et al., 2019	0	0	0	0	0	0	0
Başıbüyük & Şahin, 2019	0	0	0	1	0	0	0
Zengin, 2018	1	0	0	0	1	1	0
Bütüner, 2018	0	0	0	0	0	0	0
Guillemette, 2017	0	1	0	0	0	1	0

Paper	Conoscenze e competenze disciplinari	Visione epistemologica	Opinioni e atteggiamenti		Competenze pedagogiche e didattiche	Dimensioni psicologiche	
			Su HOM e sua integrazione didattica	Su HOM e apprendimento		Motivazione e Interesse	Dimensioni professionali del Sè
Yochu, 2016	1	1	0	0	1	0	0
Gilmullin, 2015	0	0	0	0	1	0	0
Biber, İspir & Ay, 2015	0	0	0	0	0	0	0
Weldeana & Abraham, 2014	1	1	0	1	1	0	0
Villota, 2014	0	0	1	0	1	0	0
Povey, 2014	1	1	0	0	1	1	0
Loats, White, & Rubino, 2014	0	1	1	0	1	0	0
Goodwin, et al., 2014	0	1	0	1	0	0	0
Galante, 2014	1	1	0	0	1	0	0
Fenaroli, Furinghetti & Somaglia, 2014	1	1	0	1	1	0	0
Despeaux, 2014	1	0	0	0	0	0	0

Appendice G: Tabella delle co-occorrenze dei codici – Studenti

G.1.1: Studenti Scuola Primaria

Sistema di codici	HoM as tool	HoM as goal	Attività esplorativo- manipolative	Docente mediatore	Algoritmi dalla storia	Discussione	Lavoro di gruppo	Uso di problemi storici	Esercizi standard	Worksheet	Lezione introduttiva	Lettura fonti
HoM as a tool	0	3	1	2	2	1	2	1	2	4	2	1
HoM as a goal	3	0	1	1	2	0	1	1	2	3	2	0
Attività esplorativo- manipolative	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0
Docente mediatore	2	1	0	0	1	1	1	0	1	2	1	1
Algoritmi dalla storia	2	2	0	1	0	0	0	0	2	2	2	0
Discussione	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1
Lavoro di gruppo	2	1	1	1	0	1	0	1	0	2	0	1
Uso di problemi storici	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
Esercizi standard	2	2	0	1	2	0	0	0	0	2	2	0
Worksheet	4	3	1	2	2	1	2	1	2	0	2	1
Lezione introduttiva	2	2	0	1	2	0	0	0	2	2	0	0
Lettura fonti	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0
Clima di classe e piacevolezza	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0
Motivazione e interesse	2	2	1	1	1	0	1	1	1	2	1	0
Variabili cognitive	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0
Atteggiamenti e opinioni Studenti	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0
Achievement	2	2	1	1	1	0	1	1	1	2	1	0

G.1.2: Studenti Scuola Primaria

Sistema di codici	Clima di classe e piacevolezza	Motivazione e interesse	Variabili cognitive	Atteggiamenti e opinioni Studenti	Achievement
HoM as a tool	1	2	1	1	2
HoM as a goal	1	2	1	1	2
Attività esplorativo-manipolative	0	1	0	0	1
Docente mediatore	1	1	0	1	1
Algoritmi dalla storia	1	1	1	1	1
Discussione	0	0	0	0	0
Lavoro di gruppo	0	1	0	0	1
Uso di problemi storici	0	1	0	0	1
Esercizi standard	1	1	1	1	1
Worksheet	1	2	1	1	2
Lezione introduttiva	1	1	1	1	1
Lettura delle fonti	0	0	0	0	0
Clima di classe e piacevolezza	0	1	0	1	1
Motivazione e interesse	1	0	0	1	2
Variabili cognitive	0	0	0	0	0
Atteggiamenti e opinioni Studenti	1	1	0	0	1
Achievement	1	2	0	1	0

G.2.1: Studenti Scuola Secondaria di I Grado

Sistema di codici	HoM as tool	HoM as goal	Attività esplorativo- manipolative	Docente mediatore	Algoritmi dalla storia	Discussione	Lavoro di gruppo	Uso di problemi storici	Worksheet	Attività strutturate	Lezione introduttiva	Lettura fonti
HoM as tool	0	2	3	2	2	2	5	1	0	5	2	0
HoM as goal	2	0	1	1	1	1	2	1	0	1	1	0
Attività esplorativo- manipolative	3	1	0	0	1	0	3	0	0	3	0	0
Docente mediatore	2	1	0	0	1	1	1	1	0	1	2	0
Algoritmi risolutivi dalla storia	2	1	1	1	0	0	1	0	0	2	1	0
Discussione di gruppo o in plenaria	2	1	0	1	0	0	2	1	0	1	1	0
Lavoro di gruppo	5	2	3	1	1	2	0	1	0	4	1	0
Uso di problemi storici	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0
Worksheet	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Attività strutturate	5	1	3	1	2	1	4	0	0	0	1	0
Lezione introduttiva	2	1	0	2	1	1	1	1	1	1	0	1
Lettura delle fonti	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
Clima di classe e piacevolezza	2	1	2	0	1	0	2	0	0	2	0	0
Motivazione e interesse	5	2	3	1	1	2	5	1	0	4	1	0
Ansia	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
Variabili cognitive	2	0	1	1	1	0	1	0	1	2	2	1
Atteggiamenti e opinioni Studenti	3	0	2	1	1	0	2	0	0	3	1	0
V.E. Studenti	5	2	3	2	2	1	4	1	0	4	2	0
Achievement	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
Conoscenze e competenze disciplinari	2	1	0	2	1	1	1	1	1	1	3	1

G.2.2: Studenti Scuola Secondaria di I Grado

Sistema di codici	Clima di classe e piacevolezza	Motivazione e interesse	Ansia	Variabili cognitive	Atteggiamenti e opinioni Studenti	V.E. Studenti	Achievement	Conoscenze e competenze disciplinari
HoM as tool	2	5	1	2	3	5	1	2
HoM as goal	1	2	0	0	0	2	0	1
Attività esplorativo-manipolative	2	3	0	1	2	3	1	0
Docente mediatore	1	2	1	0	0	1	0	0
Algoritmi risolutivi dalla storia	1	1	0	1	1	2	0	1
Discussione di gruppo o in plenaria	0	2	1	0	0	1	0	1
Lavoro di gruppo	2	5	1	1	2	4	1	1
Uso di problemi storici	0	1	0	0	0	1	0	1
Worksheet	0	0	0	1	0	0	0	1
Attività strutturate	2	4	1	2	3	4	1	1
Lezione introduttiva	0	1	0	2	1	2	0	3
Lettura delle fonti	0	0	0	1	0	0	0	1
Clima di classe e piacevolezza	0	2	0	0	1	2	1	0
Motivazione e interesse	2	0	1	1	2	4	1	1
Ansia	0	1	0	0	0	0	0	0
Variabili cognitive	0	1	0	0	2	2	0	2
Atteggiamenti e opinioni Studenti	1	2	0	2	0	3	1	1
V.E. Studenti	2	4	0	2	3	0	1	2
Achievement	1	1	0	0	1	1	0	0
Conoscenze e competenze disciplinari	0	1	0	2	1	2	0	0

G.3: Studenti Scuola Secondaria di II Grado

Sistema di codici	HoM as tool	HoM as goal	Attività esplorativo-manipolative	Docente mediatore	Discussione	TIC	Lavoro di gruppo	Uso di problemi storici	Attività strutturate	Lettura fonti	Motivazione e interesse	Variabili cognitive	V.E.	Conoscenze e competenze disciplinari
HoM as a tool	0	2	1	2	2	1	2	1	3	2	3	2	3	2
HoM as a goal	2	0	1	1	2	1	2	0	2	2	2	1	2	1
Attività esplorativo-manipolative	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
Docente mediatore	2	1	0	0	1	0	1	1	2	1	2	1	2	1
Discussione di gruppo o in plenaria	2	2	1	1	0	1	2	0	2	2	2	1	2	1
TIC	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
Lavoro di gruppo	2	2	1	1	2	1	0	0	2	2	2	1	2	1
Uso di problemi storici	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1
Attività strutturate	3	2	1	2	2	1	2	1	0	2	3	2	3	2
Lettura fonti	2	2	1	1	2	1	2	0	2	0	2	1	2	1
Motivazione e interesse	3	2	1	2	2	1	2	1	3	2	0	2	3	2
Variabili cognitive	2	1	1	1	1	1	1	1	2	1	2	0	2	2
V.E.	3	2	1	2	2	1	2	1	3	2	3	2	0	2
Conoscenze e competenze disciplinari	2	1	1	1	1	1	1	1	2	1	2	2	2	0

Appendice H: Tabella delle co-occorrenze dei codici – Docenti

H.1: Docenti

Sistema dei codici	HoM as Tool				HoM as Goal	Attività didattica							Metodologia				
	Prof.	Motiv.	Cogn.	Ricerca di materiale		Lavoro di gruppo	Lettura testi o problemi storici	Discussione di gruppo	Scrittura artefatti did.	Scrittura Refl.	Analisi materiale did.	Lezioni frontali	PBL	Ciclicità	Exp. diretta	Refl. Practice	App. Collab .
HoM as a professional tool	0	1	3	3	2	5	6	7	5	3	6	5	1	6	5	4	6
HoM as a motivational tool	1	0	3	0	0	2	3	2	1	1	2	2	3	0	3	1	1
HoM as a cognitive tool	3	3	0	1	1	3	3	4	3	3	5	4	2	3	4	3	3
HoM as a goal	3	0	1	0	1	6	3	6	4	3	3	3	1	4	3	4	4
Ricerca di materiale	2	0	1	1	0	2	1	2	3	1	1	0	0	1	1	0	1
Lavoro di gruppo	5	2	3	6	2	0	5	10	6	4	5	5	3	6	7	4	7
Lettura testi o problemi storici	6	3	3	3	1	5	0	5	3	2	4	4	2	4	5	3	5
Discussione di gruppo o in plenaria	7	2	4	6	2	10	5	0	7	4	7	7	4	7	8	5	8
Scrittura elaborato	5	1	3	4	3	6	3	7	0	3	4	2	1	5	4	3	4
Scrittura riflessiva	3	1	3	3	1	4	2	4	3	0	4	3	1	3	3	4	3

Sistema dei codici	HoM as Tool				Attività didattica								Metodologia				
	Prof.	Motiv.	Cogn.	HoM as Goal	Ricerca di materiale	Lavoro di gruppo	Lettura testi o problemi storici	Discussione di gruppo	Scrittura artefatti did.	Scrittura Refl.	Analisi materiale did.	Lezioni frontali	PBL	Ciclicità	Exp. diretta	Refl. Practice	App. Collab.
Analisi materiale di studio	6	2	5	3	1	5	4	7	4	4	0	6	3	5	5	4	5
Lezioni frontali	5	2	4	3	0	5	4	7	2	3	6	0	3	4	5	5	5
Problem-based Learning	1	3	2	1	0	3	2	4	1	1	3	3	0	0	4	1	2
Ciclicità	6	0	3	4	1	6	4	7	5	3	5	4	0	0	5	4	6
Esperienza diretta	5	3	4	3	1	7	5	8	4	3	5	5	4	5	0	3	7
Reflective Practice	4	1	3	4	0	4	3	5	3	4	4	5	1	4	3	0	3
Apprendimento collaborativo	6	1	3	4	1	7	5	8	4	3	5	5	2	6	7	3	0
Conoscenze e competenze disciplinari	3	2	3	3	2	4	4	5	4	2	3	3	3	2	3	3	2
Visione Epistemologica	8	2	3	4	2	6	5	8	6	4	6	5	3	5	5	5	5
Opinioni e atteggi. su HOM e sua integrazione didattica	1	1	2	1	1	3	0	3	3	2	2	1	1	2	3	1	2

Sistema dei codici	HoM as Tool				Attività didattica									Metodologia			
	Prof.	Motiv.	Cogn.	HoM as Goal	Ricerca di materiale	Lavoro di gruppo	Lettura testi o problemi storici	Discussione di gruppo	Scrittura artefatti did.	Scrittura Refl.	Analisi materiale did.	Lezioni frontali	PBL	Ciclicità	Exp. diretta	Refl. Practice	App. Collab .
Opinioni e atteggi. su HOM e apprendimento	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0
Competenze pedagogiche e didattiche	5	4	5	4	0	6	5	8	5	4	7	6	5	4	6	5	5
Motivazione e Interesse	1	2	2	1	0	2	3	2	0	0	1	2	2	1	3	1	2
Dimensioni professionali del Sé	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

H.2: Docenti

Sistema dei codici	Conoscenze e competenze disciplinari	Visione Epistemologica	Opinioni e atteggiamenti su HoM e sua integrazione didattica	Opinioni e atteggiamenti su HOM e apprendimento	Competenze pedagogiche e didattiche	Motivazione e Interesse
HoM as a professional tool	3	8	1	0	5	1
HoM as a motivational tool	2	2	1	0	4	2
HoM as a cognitive tool	3	3	2	0	5	2
HoM as a goal	3	4	1	1	4	1
Ricerca di materiale	2	2	1	0	0	0
Lavoro di gruppo	4	6	3	1	6	2
Lettura testi o problemi storici	4	5	0	0	5	3
Discussione di gruppo o in plenaria	5	8	3	1	8	2
Scrittura elaborato	4	6	3	0	5	0
Scrittura riflessiva	2	4	2	1	4	0
Analisi materiale di studio	3	6	2	1	7	1
Lezioni frontali	3	5	1	1	6	2

Sistema dei codici	Conoscenze e competenze disciplinari	Visione Epistemologica	Opinioni e atteggiamenti su HoM e sua integrazione didattica	Opinioni e atteggiamenti su HOM e apprendimento	Competenze pedagogiche e didattiche	Motivazione e Interesse
Problem-based Learning	3	3	1	1	5	2
Ciclicità	2	5	2	0	4	1
Esprienza diretta	3	5	3	0	6	3
Reflective Practice	3	5	1	1	5	1
Apprendimento collaborativo	2	5	2	0	5	2
Conoscenze e competenze disciplinari	0	5	0	2	6	2
Visione Epistemologica	5	0	2	2	8	1
Su HOM e sua integrazione didattica	0	2	0	0	2	0
Su HOM e apprendimento	2	2	0	0	2	0
Competenze pedagogiche e didattiche	6	8	2	2	0	2
Motivazione e Interesse	2	1	0	0	2	0
Dimensioni professionali del Sè	0	0	0	0	0	0