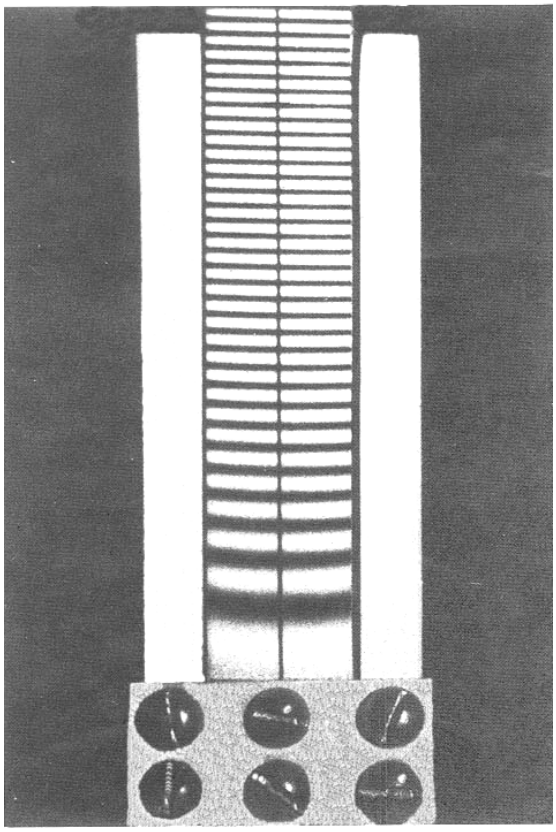
Augusto Ajovalasit

Introduzione alla

ANALISI SPERIMENTALE DELLE TENSIONI

I metodi della Meccanica Sperimentale dei Solidi:
Estensimetri elettrici a resistenza, Fotoelasticità, Moire, Olografia, Speckle
Correlazione immagini (DIC), Effetto termoelastico (TSA), Tensioni residue



In copertina
Interferometria olografica ad esposizione doppia:
frange in una trave di acciaio

Augusto Ajovalasit
Introduzione all'Analisi sperimentale delle tensioni
Dipartimento di Meccanica dell'Università di Palermo
I edizione, aprile 2009

Indice

Presentazione …….. V

1 Estensimetri elettrici a resistenza ……..… 1
1.1 Introduzione …….……. 1
1.1.1 Principio …… 2
1.1.2 Tipo di informazione sperimentale e relazione caratteristica 2
1.1.3 Campi tensionali e materiali esaminabili ……. 3
1.1.4 Altre caratteristiche …….. 3
1.1.5 Simboli principali ed abbreviazioni ……. 3
1.2 I componenti dell'estensimetro installato ……. 4
1.2.1 La griglia estensimetrica ……. 5
1.2.2 Il supporto dell'estensimetro ……... 7
1.2.3 L'adesivo ……. 9
1.2.4 Il protettivo …….…….. 9
1.3 Le caratteristiche dell'estensimetro ……. 10
1.3.1 La resistenza elettrica ……. 11
1.3.2 Fattori di taratura e sensibilità trasversale …….. 11
1.3.3 Coefficiente di temperatura del fattore di taratura ……. 13
1.3.4 La sensibilità alla temperatura …… 14
1.3.5 La resistenza di isolamento … 17
1.3.6 La base di misura …… 18
1.3.7 Livello di alimentazione e deriva …… 18
1.3.8 I criteri di scelta dell'estensimetro …… 19
1.4 Circuiti di misura …… 20
1.4.1 Influenza dei cavi di collegamento al ponte …… 22

1.5 Misura delle deformazioni nel caso delle sollecitazioni semplici. 23
1.5.1 Deformazioni di trazione e flessione…… 23
1.5.2 Deformazioni di torsione e taglio …… 25
1.6 Misura dello stato di deformazione…… 28
1.6.1 Le rosette estensimetriche …….. 28

2 Fotoelasticità …… 33
2.1 Introduzione ……. 33
2.1.1 Principio …… 33
2.1.2 Tipo di informazione sperimentale e relaz. Caratteristica 33
2.1.3 Campi tensionali esaminabili ……. 34
2.1.4 Materiali esaminabili ……..…. 34
2.1.5 Altre caratteristiche …… 34
2.1.6 La luce polarizzata …… 34
2.2 Fotoelasticità piana …… 36
2.2.1 L'effetto fotoelastico …… 36
2.3 I polariscopi ……. 36
2.3.1 Il polariscopio piano ad assi incrociati ……. 36
2.3.2 Il polariscopio circolare …… 38
2.4 Uso della luce bianca …… 39
2.5. Il rilievo manuale e l'elaborazione dei dati fotoelastici …….. 41
2.5.1. Le isocline ……. 41
2.5.2 Il rilievo delle isocromatiche …… 41
2.5.3 L'interpretazione delle isocromatiche …… 42
2.6 Il rilievo automatico dei dati fotoelastici …… 42
2.6.1 Il sistema di acquisizione …… 43
2.6.2 La fotoelasticità RGB …… 43
2.6.3 La fotoelasticità a variazione di fase ……. 44
2.7 Il trasferimento dei risultati dal modello al prototipo …….. 48
2.8 I rivestimenti fotoelastici …… 48
2.8.1 L'effetto fotoelastico nel rivestimento …… 49
2.8.2 Scelta dello spessore ed effetto rinforzante …… 50
2.8.3 Tecniche sperimentali …… 50

3. Metodi del moiré …… 51
3.1 Introduzione …… 51
3.1.1 Principio …….. 51
3.1.2 Tipo di informazione sperimentale e relaz. Caratteristica 52
3.1.3 Campi tensionali esaminabili ……. 53
3.1.4 Materiali esaminabili …… 53

3.1.5 Altre caratteristiche ……. 53
3.2 Il moiré geometrico …… 54
3.2.1 Le griglie …… 54
3.2.2 Griglie allineate aventi passi differenti ……. 54
3.2.3 Griglie inclinate aventi passi uguali …… 56
3.2.4 Frange moiré nel caso di deformazione non omogenea … 57
3.2.5 La determinazione delle deformazioni …… 58
3.2.6 Sovrapposizione delle griglie …… 59
3.3 Moiré ombra …… 60
3.4 Interferometria moiré …….. 61
3.4.1 Generalità ……. 61
3.4.2 Interferometria moiré: spiegazione elementare ……. 61

4 Olografia …… 63
4.1 Introduzione …… 63
4.1.1 Principio …… 63
4.1.2 Tipo di informazione sperimentale e relaz. caratteristica 63
4.1.3 Campi tensionali e materiali esaminabili ……. 64
4.1.4 Altre caratteristiche …….. 64
4.2 Principi fisici dell'olografia …….. 64
4.3 Le equazioni dell'olografia …… 67
4.3.1 Registrazione dell'ologramma …… 67
4.3.2 Ricostruzione dell'ologramma ……. 67
4.4 Disposizioni sperimentali: sorgenti e ricevitori ……..…… 69
4.5 Interferometria olografica ……. 70
4.5.1 Interferometria olografica ad esposizione singola …… 70
4.5.2 Interferometria olografia ad esposizione doppia …… 71
4.5.3 Interferometria olografia a media temporale …… 73
4.6 Determinazione degli spostamenti …… 74
4.6.l – Relazione ritardo – spostamento …… 73
4.6.2 Relazione vettoriale …… 74
4.6.3 Determinazione degli spostamenti nel caso piano …… 77

5 Metodi speckle …… 79
5.1 Introduzione …… 79
5.1.1 Principio …… 79
5.1.2 Tipo di informazione sperimentale …… 79
5.1.3 Caratteristiche …… 81
5.2 L'effetto speckle …… 81
5.2.1 Lo speckle oggettivo …… 81

5.2.2 Lo speckle soggettivo ……. 82
5.3 Interferometria speckle ……. 83
5.3.1 Misura della componente di spostamento fuori del piano .. 83
5.3.2 Misura della componente di spostamento nel piano …….. 86
5.4 Interferometria speckle a variazione di fase …… 86
5.5 Considerazioni sull'interferometria speckle …… 88

6 Tecniche a correlazione di immagini digitali ……. 89
6.1 Introduzione ……. 89
6.2 Il metodo DIC/2D ……. 89
6.2.1 Principio del metodo DIC/2D ……... 89
6.2.2 Spostamenti e deformazioni …….. 90
6.2.3 Correlazione delle immagini (DIC/2D) ……. 92
6.2.4 Prestazioni dei sistemi DIC ed applicazioni…… 94
6.3 Correlazione delle immagini in 3D (cenni)…… . 94

7 Tecniche basate sull'effetto termoelastico …… 97
7.1 Introduzione …… 97
7.1.1 Principio …… 97
7.1.2 Campi tensionali esaminabili ……. 98
7.1.3 Materiali esaminabili …… 98
7.1.4 Altre caratteristiche …… 98
7.2 Tipo di informazione sperimentale e relazioni caratteristiche . 98
7.2.1 Materiali isotropi …… 98
7.2.2 Materiali compositi ……. 99
7.3 La misura della variazione di temperatura …… 100

8 Tensioni residue …… 101
8.1 Introduzione …… 101
8.2 I metodi meccanici …… 102
8.2.1 Il metodo del foro …… 102
8.2.2 Il metodo della cava …… 104
8.3 La tensiometria mediante raggi X …… 104

9 Esercizi …….. 107
10 Bibliografia ……. 115
11 Indice analitico …… 119

Introduzione all'analisi sperimentale delle tensioni

Presentazione

I metodi *dell'Analisi sperimentale delle tensioni* permettono di determinare lo stato di deformazione e di tensione nei componenti e nelle strutture. Sperimentalmente si determinano *spostamenti* o *deformazioni* dai quali si risale alle tensioni. I metodi basati sulla misura degli spostamenti richiedono l'operazione di *derivazione* per il calcolo delle deformazioni (Tabella 1). Per alcuni metodi che operano in campo elastico il legame con la grandezza misurata è usualmente espresso in termini di tensione. E' questo il caso per esempio della fotoelasticità e dei metodi basati sull'effetto termoelastico.

Tabella 1: Dalla misura dello spostamento u (1) o della deformazione ε_x (2) si calcola la tensione σ_x (3)*. (* caso di tensione monoassiale)

u	$\Rightarrow$	$\varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$	$\Rightarrow$	$\sigma_x = E\varepsilon_x$
(1)		(2)		(3)

Tale modo di procedere oggi sembra ovvio, ma il cammino è stato lungo dato che l'osservazione del fenomeno dell'*elasticità* del materiale compare solo nella seconda metà del XVII secolo con *Robert Hooke* che definì gli aspetti quantitativi legati all'elasticità. Infatti Hooke pubblicò nel 1678 il suo

lavoro fondamentale sull'elasticità (*Lectures de potentia restitutiva)* sintetizzabile nella celebre legge "*ut tensio sic vis*" (da leggersi "*ut extensio sic vis*"), cioè "*come è l'estensione* (tensio) *così è la forza* (vis)".

La sperimentazione sulle proprietà meccaniche dei materiali inizia però nella prima meta del secolo XVIII. Progressivamente si sviluppa così l'esigenza di conoscere non solo i carichi di rottura ma anche le proprietà elastiche dei materiali e lo stato di deformazione e di tensione dei componenti e quindi l'esigenza di misurare le deformazioni. Nasce così l'estensimetria e più in generale la *Meccanica sperimentale dei solidi* con i metodi dell'*Analisi sperimentale delle tensioni*

L'Analisi sperimentale delle tensioni comprende:
1. l'estensimetria mediante estensimetri elettrici a resistenza (ER),
2. la *fotomeccanica* che è costituita dai seguenti metodi ottici:
   2.1. fotoelasticità,
   2.2. metodi del moiré (geometrico ed interferometrico),
   2.3. olografia (interferometria olografica),
   2.4. metodi speckle (fotografia speckle e interferometria speckle),
   2.5. metodi a correlazione di immagini digitali (DIC),
3. i metodi basati sull'effetto termoelastico,
4. la tensiometria a raggi X.

Questo volume presenta una breve descrizione dei suddetti metodi di Analisi sperimentale delle tensioni. Esso è principalemente rivolto agli studenti dei corsi di laurea e di laurea specialistica/magistrale al fine di consentire un primo approccio ai metodi sperimentale nell'ambito anche di altri insegnamenti in cui esso può essere inserito come modulo dedicato alla Meccanica sperimentale. Per l'approfondimento si rimanda alla vasta letteratura tecnica su tali metodi ed in particolare ai corsi universitari di Meccanica sperimentale e di Analisi sperimentale delle tensioni.

Scopo del volume è anche quello di rendere familiare all'allievo ingegnere, abituato di solito a ragionare in termini di *tensione*, che è una grandezza non misurabile, *spostamenti* e *deformazioni*, che sono le grandezze misurabili.

Palermo, aprile 2009

Capitolo 1

Estensimetri elettrici a resistenza

1.1 Introduzione

Gli estensimetri elettrici a resistenza trovano largo impiego nella *Meccanica sperimentale dei solidi* non solo per l'analisi delle deformazioni ma anche per la realizzazione di trasduttori per la misura di grandezze meccaniche. Molto ampia è di conseguenza la letteratura tecnica sugli estensimetri. Nella bibliografia si riportano riferimenti di carattere generale relativi a libri [0.1, 0.4, 0.5, 1.1-1.5], norme tecniche [1.6-1.9] e siti internet [1.10-1.15].

Mediante gli estensimetri si misura la deformazione media ε nell'intorno di un punto P in una direzione assegnata θ (Figura 1.1):

$$\varepsilon = \frac{l - l_o}{l_o} \tag{1.1}$$

dove *lo* è la base di misura dell'estensimetro, cioè la distanza sulla quale si misura la variazione di lunghezza l-l_o. La deformazione è una grandezza adimensionale (m/m). Dato che le variazioni di lunghezza sono piccole si usano di solito dei sottomultipli. In campo elastico l'unità più usata è il μm/m ($1\ \mu m/m = 10^{-6}\ m/m$), a titolo di esempio si noti che una sbarra di acciaio soggetta a trazione con una tensione σ= 200 N/mm^2 manifesta una deformazione di circa 1000 μm/m.

In questo capitolo si presenta una rassegna sintetica riguardante gli estensimetri elettrici a resistenza con riferimento ai seguenti aspetti:

1) componenti dell'installazione estensimetrica; 2) principali caratteristiche di funzionamento; 3) circuiti di misura; 4) determinazione dello stato di deformazione e di tensione su materiali isotropi e anisotropi.

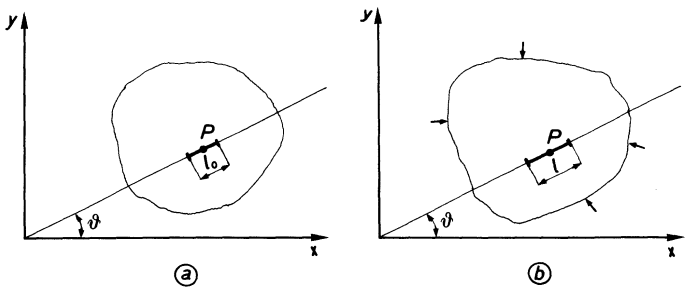


Figura 1.1: Misura della deformazione nell'intorno del punto P nella direzione θ: (a) struttura scarica, (b) struttura carica.

1.1.1 Principio

Gli estensimetri elettrici a resistenza (ER) si basano sulla misura della variazione di resistenza elettrica subita da un conduttore sottoposto a deformazione. La scoperta di tale effetto è accreditata a Lord Kelvin.
In linea di principio (Figura 1.2-a) basta quindi incollare sul componente un filo conduttore e misurare la variazione di resistenza dovuta alla deformazione che il componente deformato trasmette al filo. L'applicazione pratica del suddetto principio di misura si ha solo alla fine degli anni 30 con l'introduzione commerciale degli ER (Figura 1.2-b) la cui invenzione è accreditata agli Americani Simmons e Ruge; invece del singolo filamento si usa una griglia per ottenere un'adeguata resistenza elettrica (120 Ω. al minimo).

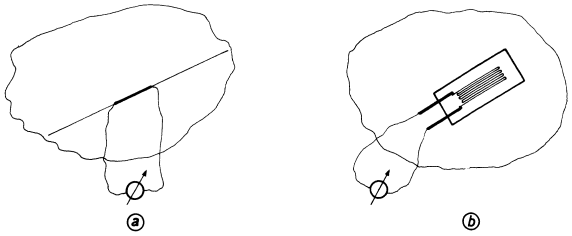


Figura 1.2: La misura delle deformazioni mediante ER: (a) il principio, (b)la pratica.

1.1.2 Tipo di informazione sperimentale e relazione caratteristica

L'estensimetro elettrico a resistenza (ER) consente di determinare la deformazione ε attraverso la misura della variazione di resistenza elettrica

subita dalla griglia dell'ER installato sul componente da analizzare mediante la relazione:

$$\varepsilon = \frac{1}{K}\frac{\Delta R}{R_o} \tag{1.2}$$

dove K è il *fattore di taratura* dell'ER, Ro e ΔR indicano rispettivamente la resistenza iniziale e la variazione di resistenza dell'ER installato.

1.1.3 Campi tensionali e materiali esaminabili

Si tratta di un metodo per punti adatto alla misura di deformazioni elastiche e plastiche su qualsiasi materiale. In genere la misura delle deformazioni nell'intorno di un punto P non si effettua mediante estensimetri singoli disposti secondo le direzioni assegnate, ma mediante le *rosette estensimetriche* (cap. 1.6.1). Con la tecnica degli *estensimetri inglobati* - applicabile a modelli in resina, ai laminati compositi ed al calcestruzzo è possibile l'analisi delle deformazioni all'interno dei solidi.
Gli estensimetri elettrici a resistenza sono in pratica applicabili a qualsiasi materiale. E' solo richiesta una preparazione della superficie in corrispondenza della zona dove viene installato l'estensimetro.

1.1.4 Altre caratteristiche

Si tratta di un metodo adatto alla misura di deformazioni anche alle basse ed alte temperature. La risoluzione tipica, con l'attuale strumentazione (2009), è di 1 μm/m mentre il campo di misura è compreso, a secondo del tipo di estensimetro, tra 5.000 e 50.000 μm/m (fino a 200.000 μm/m con ER speciali) .
L'estensimetria mediante ER è il metodo di AST più diffuso grazie ad una serie di vantaggi quali: (1) il basso costo; (2) l'elevata risoluzione; (3) l'ampio campo di misura; (4) la vasta disponibilità di basi di misura; (5) la possibilità di operare in cantiere ed in ambiente ostile; (6) la possibilità di acquisire ed elaborare in modo automatico i risultati.

1.1.5 Simboli principali ed abbreviazioni

ER	estensimetro elettrico a resistenza
K	fattore di taratura dell'estensimetro
K_l	fattore di taratura longitudinale
K_t	fattore di taratura trasversale
l_o	base di misura dell'estensimetro
P'_e	densità di potenza ammissibile nella griglia dell'estensimetro

R_e	resistenza elettrica dell'estensimetro non installato
R_i	resistenza di isolamento
R_o	resistenza elettrica dell'ER installato ma non deformato
S_t	sensibilità trasversale
β_e	coefficiente di temperatura dell'insieme corpo-ER
β_k	coefficiente di temperatura del fattore di taratura
$\Delta\varepsilon_o$	deriva dell'estensimetro
ε_a	risposta termica (deformazione termica apparente) dell'ER
ε_{ac}	risposta termica (deformazione termica apparente) dei cavi
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}$	deformazioni riferite agli assi principali del materiale (materiali ortotropi)
$\varepsilon_p, \varepsilon_q$	deformazioni principali
$\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$	tensioni riferite agli assi principali del materiale (materiali ortotropi)
σ_p, σ_q	tensioni principali

1.2. I componenti dell'estensimetro installato

Un ER è costituito (Figura 1.3) da una *griglia estensimetrica* disposta su di un *supporto* che viene applicato alla struttura mediante un *adesivo*; un opportuno *protettivo* completa l'installazione.

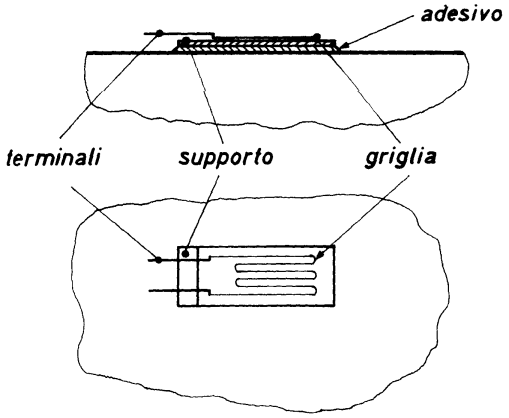


Figura 1.3: I componenti di un estensimetro elettrico a resistenza installato (N.B.: non è indicato il protettivo).

La struttura trasferisce la deformazione, tramite l'adesivo ed il supporto, alla griglia estensimetrica che mediante conduttori terminali viene inserita nel

ponte di Wheatstone per la misura della resistenza. Dalla misura della variazione di resistenza subita dalla griglia si risale quindi alla deformazione mediante la (1.2).
I componenti fondamentali di un estensimetro installato sono pertanto: (1) la griglia estensimetrica, (2) il supporto, (3) l'adesivo, (4) il protettivo. Nel seguito si forniscono notizie essenziali sui componenti dell'ER installato.

1.2.1. La griglia estensimetrica

Sensibilità alla deformazione
La caratteristica più importante della lega estensimetrica che costituisce la griglia è la *sensibilità alla deformazione S*:

$$S = \frac{\Delta R / R}{\varepsilon} \tag{1.3}$$

La sensibilità alla deformazione è cioè il rapporto tra la variazione relativa di resistenza elettrica di un filo di lega estensimetrica e la deformazione assiale ε applicata al filo stesso.
Dal fatto che la resistenza elettrica R di un conduttore di lunghezza l, sezione S e resistività ρ è:

$$R = \rho \frac{l}{S} \tag{1.4}$$

segue che la variazione di resistenza è dovuta alla variazione: (1) delle dimensioni del filo; (2) della resistività stessa del filo. Partendo dalla (1.4) si ricava la sensibilità alla deformazione del filo:

$$\boxed{S = \frac{dR / R}{\varepsilon} = (1 + 2\nu) + \frac{d\rho / \rho}{\varepsilon}} \tag{1.5}$$

La relazione precedente mostra che la sensibilità alla deformazione S è la somma di due effetti:

- l'effetto geometrico (1 + 2 ν) ,
- l'effetto piezoresistivo (dρ/ρ) / ε

L'effetto geometrico è dovuto alla variazione delle dimensioni del filo; il contributo di tale effetto alla sensibilità alla deformazione *S* è mediamente 1,6 (supposto il coefficiente di Poisson ν =0,3). L'effetto piezoresistivo è dovuto alla variazione della resistività con la deformazione. Per le leghe

estensimetriche più usate la sensibilità alla deformazione è circa 2,1 e quindi l'effetto piezoresistivo risulta 0,5.

Una buona lega estensimetrica deve possedere i seguenti requisiti:

- sensibilità alla deformazione elevata e costante entro un largo campo di deformazione;
- resistività elevata in modo da realizzare la resistenza richiesta (120 Ω al minimo) con poche spire e con una piccola base di misura;
- coefficiente di temperatura della resistenza

$$\beta = \frac{\Delta R / R}{\Delta T} \tag{1.6}$$

basso in modo da diminuire l'influenza delle variazioni di temperatura sulla misura delle deformazioni.

La tabella 1.1 mostra le caratteristiche di alcune leghe estensimetriche.

La Costantana è attualmente la lega più usata in quanto possiede i requisiti suddetti nella migliore combinazione. In aggiunta tale lega ha una discreta resistenza a fatica ed è utilizzabile nel campo di temperatura tra -70 e +200 °C. La Costantana si presta bene alla realizzazione di estensimetri autocompensati (vedi cap. 1.3.4.2) per una vasta gamma di materiali strutturali. La deformazione massima misurabile è dell'ordine di 5 cm/m (equivalente a 5% o 50.000 μm/m).

Tabella 1.1 - Caratteristiche di alcune leghe estensimetriche. (S = sensibilità alla deformazione, ρ = resistività, β = coefficiente di temperatura della resistenza)

LEGA	**COMPOSIZIONE** %	**S**	**ρ** μΩcm	**β** μΩ/Ω °C	**Note**
Costantana Advance	Ni45 - Cu55	2,1	49	+ 20	Di uso generale
Karma	Ni74-Cr20-Fe3-Al3	2,1	130	± 20	Per trasduttori e per misure di lunga durata
Platino-Tungsteno	Pt92 - W8	4,5	12	250	Per alte temperature

Anche le leghe Nickel-Cromo trovano ampio impiego. Ad esempio la lega *Karma* ha resistenza a fatica e stabilità migliori rispetto alla Costantana. Anche il campo di temperatura è più ampio (-250÷300°C). La lega Karma

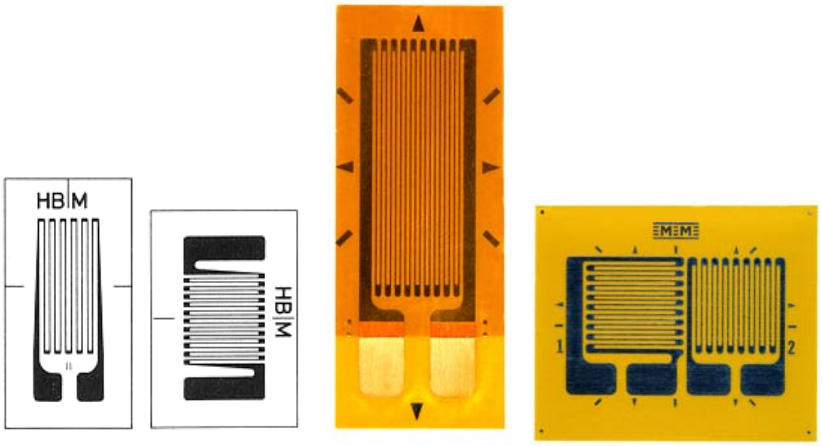
come la Costantana si presta alla realizzazione di ER autocompensati. Il costo più elevato ne consiglia l'impiego, oltre che nella costruzione dei trasduttori, per quelle applicazioni nelle quali sono richieste misure accurate in prove di lunga durata e in condizioni ambientali difficili.
Le leghe Platino-Tungsteno si impiegano negli estensimetri per elevate temperature. Tali leghe hanno un campo di impiego compreso tra -200 e +650 °C e non si prestano alla costruzione di ER autocompensati. La sensibilità alla deformazione è elevata con ridotto campo di linearità (3000 μm/m).

La geometria della griglia
Negli estensimetri a filo, oggi (2009) poco usati, la griglia è costituita da un sottile filo il cui diametro è dell'ordine di 15 μm. La base di misura minima di un ER a filo è di circa 3 mm. Gli estensimetri a filo sono stati in larga misura sostituiti da quelli a lamina nei quali la griglia è costituita da una lamina, di spessore compreso tra 3 e 5 μm, che viene sagomata mediante un procedimento di fotoincisione o di tranciatura (figura 1.4). Gli estensimetri a lamina presentano rispetto a quelli a filo diversi vantaggi tra i quali:

- la sensibilità trasversale più bassa;
- la possibilità di ottenere basi di misura molto piccole (< 1 mm);
- la possibilità di sagomare opportunamente la griglia.

1.2.2. Il supporto dell'estensimetro

Il supporto è quel componente dell'estensimetro su cui è applicata la griglia. Il supporto ha tre funzioni: (1) trasmettere la deformazione della struttura alla griglia; (2) isolare elettricamente la griglia; (3) proteggere la griglia. La scelta del supporto dipende dalle condizioni ambientali di prova. La tabella 1.2 mostra alcuni tipi di supporto con il relativo campo di temperatura di impiego.
Per ER d'impiego generale si usano supporti in resina poliammidica che è stabile, resistente e molto flessibile. Essa inoltre, rinforzata con fibre di vetro, può sopportare temperature dell'ordine di 330 °C.
Per la costruzione di trasduttori o per prove in condizioni ambientali avverse e/o di lunga durata in cui è richiesta una maggiore stabilità si impiegano supporti di resina epossidica, fenolica, epossi-fenolica rinforzati con fibra di vetro. In generale tali supporti sono più stabili di quelli in resina poliammidica ma sono anche più fragili e meno flessibili. Per temperature di



(a) (b) (c) (d)

Figura 1.4: Vari tipi di ER a lamina fotoincisa: [(a), (b) riproduzione per gentile concessione di HBM Italia; (c), (d) riproduzione per gentile concessione di Vishay Intertechnology]

prova superiori ai 300-330 °C si usano gli estensimetri a griglia libera (senza supporto) che vengono collegati alla struttura mediante un cemento ceramico che funge contemporaneamente da supporto e da adesivo. Per prove in ambiente ostile si possono utilizzare estensimetri con supporto secondario in acciaio che viene saldato per punti alla struttura.

Tabella 1.2: Supporti degli estensimetri e limiti indicativi del campo di temperature ammissibili per prove statiche

SUPPORTO	**ΔT** (°C)	**NOTE**
Resina poliammidica	-200 ÷ 200	Di uso generale
Resina epossidica + fibra di vetro	-270 ÷ 230	
Resina fenolica + fibra di vetro	-200 ÷ 300	Per trasduttori e per prove di lunga durata
Resina poliammidica + fibra di vetro	- 200 ÷330	
Cemento ceramico	-200 ÷ 750	Per alte temperature
Piastrina di acciaio	(1)	(1) dipende dal supporto primario

1.2.3. L'adesivo

L'adesivo è il materiale usato per applicare l'estensimetro alla struttura. Esso trasferisce la deformazione della struttura al supporto dell'estensimetro. Il successo di una prova estensimetrica dipende in larga misura dalla scelta e dall'applicazione corretta [1.7, 1.9] dell'ER. Da ciò deriva la necessità della qualificazione degli operatori ER [1.8, 1.14].
La tabella 1.3 indica alcuni adesivi con il relativo campo di temperatura di impiego. Nel seguito si descrivono brevemente le caratteristiche dei vari adesivi di tabella 1.3. Per ulteriori notizie circa la scelta e le modalità di applicazione si rimanda alla letteratura specializzata ed in particolare ai bollettini tecnici delle Case produttrici di ER.

Tabella 1.3: Tipi di adesivo e campo indicativo di temperature d'impiego

TIPO	**TRATTAMENTO**	**BASE**	**ΔT** (°C)
Organico	a freddo	cianomonoacrilato	- 200 ÷ +100
		epossidica	- 200 ÷+ 100
	a caldo	epossidica	- 270 ÷+250
		epossifenolica	- 270 ÷ +300
Inorganico	speciale	ceramica	-200÷+750
Saldatura per punti	----	----	dipende dall'ER

Il cianomonoacrilato è un adesivo monocomponente, senza solvente, di largo impiego per prove di routine a temperatura ambiente. Tale adesivo ha la caratteristica di polimerizzare rapidamente sotto leggera pressione in presenza dell'umidità atmosferica che funge da catalizzatore.
Gli adesivi a base epossidica sono attualmente molto diffusi in diverse formulazioni che prevedono sia il trattamento termico a freddo che quello a caldo.
Oltre i 350 °C gli adesivi organici non sono più adatti e bisogna ricorrere a quelli inorganici a base ceramica che sono disponibili in diversi tipi per temperature d'impiego fino a circa 750 °C. L'adesivo ceramico si usa per installare gli ER a griglia libera (con supporto provvisorio).

1.2.4. Il protettivo

Il protettivo ha lo scopo di proteggere l'installazione estensimetrica dagli agenti esterni quali umidità, liquidi, azioni meccaniche, etc. L'umidità in particolare ha un effetto negativo sia sulla resistenza elettrica di isolamento (v. cap.1.3.5) sia sulle caratteristiche elastiche e di resistenza dell'adesivo. La

tabella 1.4 indica alcuni protettivi. Il tipo di protettivo da impiegare dipende dalle condizioni di prova (durata della prova) e dalle condizioni ambientali (umidità, temperatura, etc.). Ad esempio per prove di laboratorio di breve durata in condizioni ambientali normali basta un sottile strato di resina poliuretanica.

Tabella 1.4: Protettivi per ER e campo indicativo di temperature d'impiego

PROTETTIVO	**ΔT** (°C)	**PROTEZIONE DA**
Vernice uretanica	-50+120	umidità, olio, solventi
Resina siliconica	-50+250	umidità, olio, solventi
Resina nitrilica	-250+150	umidità, olio, solventi
Mastice	-50+150	azioni meccaniche, umidità, acqua anche in pressione
Gomma siliconica	-70+250	azioni meccaniche, umidità, acqua

1.3 Le caratteristiche dell'estensimetro

Il comportamento di un estensimetro dipende da un insieme di grandezze caratteristiche che sono riportate nella tabella 1.5. Le prime cinque caratteristiche sono sempre riportate sulla confezione degli ER. La norma OIML [1.6] prescrive che la tolleranza di tali caratteristiche deve essere espressa ad un livello di confidenza del 95%; la tolleranza indicata dal produttore non deve essere cioè inferiore a due volte lo scarto tipo.

Tabella 1.5: Caratteristiche degli estensimetri

N°	**Caratteristica**	**N°**	**Caratteristica**
1	resistenza elettrica	8	tensione di alimenta e deriva
2	fattore di taratura	9	rigidezza ed effetto rinforzante
3	sensibilità trasversa e	10	isteresi meccanica
4	sensibilità alla temperatura	11	deformazione limite
5	coefficiente di temperatura del fattore di taratura	12	scorrimento
6	resistenza di isolamento	13	resistenza a fatica
7	base di misura	14	isteresi termica

Nel seguito si considerano le prime otto caratteristiche di tabella 1.5. Per ciò che riguarda invece la determinazione ed il controllo delle caratteristiche si rimanda alla normativa [1.6, 1.9].

1.3.1. La resistenza elettrica

La *resistenza elettrica* R_e (Ω) dell'ER è la resistenza misurata ai terminali della griglia a temperatura ambiente e con l'estensimetro non installato e non deformato.

Di solito si indica invece con il simbolo R_o la resistenza dell'estensimetro installato ma non deformato. I valori nominali più comuni di R_e sono 120, 350, 700 Ω. Per l'analisi sperimentale delle tensioni su materiali buoni conduttori del calore (metalli) si usano di solito estensimetri da 120 Ω.

L'uso di ER con resistenza più elevata è riservato a quei casi nei quali è necessario ridurre:

1) la generazione di calore per effetto Joule, cioè per prove su materiali cattivi conduttori del calore (v. cap.1.3.7) quali le plastiche;
2) l'influenza della resistenza dei cavi sulla misura, caso tipico è per esempio quello dei trasduttori per i quali si impiegano ER da 350 Ω in su.

1.3.2. Fattori di taratura e sensibilità trasversale

La sensibilità alla deformazione dell'estensimetro non coincide in generale con quella del filo data dalla (1.3). La variazione di resistenza elettrica dell'estensimetro è dovuta infatti: (a) principalmente alla deformazione dei tratti longitudinali che sono sensibili alla deformazione longitudinale ε_l, e in minor misura (b) alla deformazione dei tratti trasversali che sono sensibili alla deformazione trasversale ε_t, cioè:

$$\frac{\Delta R}{R_o} = K_l \varepsilon_l + K_t \varepsilon_t \tag{1.7}$$

dove K_l e K_t indicano rispettivamente il *fattore di taratura longitudinale* ed il *fattore di taratura trasversale* dell'ER.

Dalla relazione precedente si ricava:

$$K_l = \left. \frac{(\Delta R / R_o)_l}{\varepsilon_l} \right|_{\varepsilon_t = 0} \tag{1.8}$$

$$K_t = \left. \frac{(\Delta R / R_o)_t}{\varepsilon_t} \right|_{\varepsilon_l = 0} \tag{1.9}$$

Il fattore di taratura longitudinale K_l è cioè il rapporto tra la variazione relativa di resistenza elettrica dell'estensimetro e la deformazione longitudinale applicata quando quest' ultima sia monoassiale, cioè quando ε_t

= 0 (Fig.1.5-b). Il fattore di taratura trasversale K_t è analogamente il rapporto tra la variazione relativa di resistenza elettrica dell'estensimetro e la deformazione trasversale applicata quando quest' ultima sia monoassiale, cioè quando $\varepsilon_l = 0$ (Fig.1.5-c).

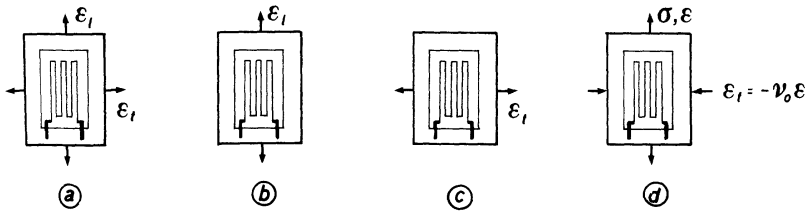


Figura.1.5: Campo di deformazione agente sull'estensimetro nel caso generale (a) e nei casi relativi alle definizioni del fattore di taratura longitudinale (b), del fattore di taratura trasversale (c), del fattore di taratura propriamente detto (d)

I Produttori di ER forniscono, al posto delle suddette caratteristiche, il *fattore di taratura K* e la *sensibilità trasversale* S_t. Il fattore di taratura *K* esprime la sensibilità dell'ER alla tensione monoassiale, cioè

$$K = \left.\frac{\Delta R / R_o}{\varepsilon}\right|_{\varepsilon_t = -\nu_o \varepsilon} \qquad (1.10)$$

Il *fattore di taratura* K dell'ER è cioè il rapporto tra la variazione relativa di resistenza elettrica dell'ER e la deformazione longitudinale della superficie del provino su cui è installato l'estensimetro allorché la superficie stessa del provino è soggetta a tensione longitudinale monoassiale (Figura 1.5d).

Il provino sul quale viene installato l'estensimetro deve avere un coefficiente di Poisson ν_o=0,28 $\pm$0,01 e quindi il campo di deformazione è biassiale con $\varepsilon_t = -\nu_o \varepsilon$. Di solito si usa un provino di acciaio (ν_o=0,28÷0,29).

La cosiddetta *sensibilità trasversale* dell'ER è data dal rapporto tra il fattore di taratura trasversale K_t ed il fattore di taratura longitudinale K_l, cioè:

$$S_t = \frac{K_t}{K_l} \qquad (1.11)$$

Si può dimostrare che sussiste la seguente relazione tra fattori di taratura e sensibilità trasversale:

$$K = K_l(1 - \nu_o S_t) \tag{1.12}$$

Un ER ideale deve essere insensibile alla deformazione trasversale, deve cioè avere K_t=S_t=0; in tali condizioni $K = K_l$. In pratica il fattore di taratura trasversale K_t, pur essendo piccolo rispetto a quello longitudinale K_l, è diverso da zero e quindi risulta $K \neq K_l$.

Dato che gli estensimetri installati non sono recuperabili, la determinazione sperimentale del fattore di taratura K viene effettuata utilizzando un campione di estensimetri che fornisce media $\overline{K}$ e scarto tipo s. Sulle confezioni di ER viene indicato il valor medio $\overline{K}$ e la tolleranza relativa percentuale ad un livello di confidenza del 95%. Tale tolleranza è in genere compresa tra 0,5 e 1%. L'incertezza di una misura estensimetrica non può essere inferiore a quella del fattore di taratura [1](Esercizio 1.1, cap.9).

Il fattore di taratura K, fornito dal produttore di ER, viene utilizzato per risalire alla deformazione incognita ε dalla misura della variazione relativa di resistenza; infatti in base alla (1.10) si ha:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{1}{K}\frac{\Delta R}{R_o}} \tag{1.12}$$

Nel caso di un campo bidimensionale di deformazione diverso da quello di taratura (tensione monoassiale in provino di acciaio), l'uso della (1.12) introduce un errore che nella maggioranza dei casi pratici è trascurabile. In ogni caso l'errore e la relativa correzione possono essere calcolati nota che sia la sensibilità trasversale S_t che di solito è espressa in forma percentuale, cioè:

$$S_t\% = 100\, K_t / K_l \tag{1.13}$$

La sensibilità traversale degli ER a lamina è in genere compresa tra $\pm$1% con valori tipici compresi nel campo $\pm$0.5%. Le formule di correzione della sensibilità trasversale sono reperibili nella letteratura tecnica [1.5, 1.9].

1.3.3 Coefficiente di temperatura del fattore di taratura

Il fattore di taratura degli ER è in generale funzione della temperatura di prova. In prima approssimazione la legge di variazione è di tipo lineare, cioè:

$$K_T = K(1 + \beta_K \Delta T) \tag{1.14}$$

dove:

K_T è il fattore di taratura alla temperatura di prova T;

K è il fattore di taratura alla temperatura di riferimento (23 °C);

ΔT è la differenza tra la temperatura di prova e quella di riferimento;

---

[1] Esercizio 1.1, cap. 9

β_K è il *coefficiente di temperatura del fattore di taratura* che è il rapporto tra la variazione relativa del fattore di taratura e la corrispondente variazione di temperatura.

Per gli estensimetri in Costantana K_T aumenta con la temperatura, β_K è quindi positivo e vale circa 100 ppm/°C mentre per la lega Karma $\beta_K \cong -100\,\text{ppm/°C}$.

I produttori di ER forniscono, oltre il fattore di taratura alla temperatura di riferimento, anche il coefficiente di temperatura β_K. La conoscenza di β_K consente ove necessario di calcolare il fattore di taratura relativo alla temperatura di prova. Dato che il valore di β_K è molto piccolo per le leghe più comuni (Costantana, Karma), la suddetta correzione è necessaria solo per temperature di prova molto discoste ($|\Delta T| > 50\ °C$) da quella di riferimento.

1.3.4 La sensibilità alla temperatura

Un estensimetro installato su di un componente soggetto a una variazione uniforme di temperatura ΔT e libero di espandersi, manifesta una variazione di resistenza che dipende:

1) dal coefficiente di temperatura β della resistenza del materiale di griglia;

2) dalla differenza dei coefficienti di dilatazione termica lineare della struttura (α_S) e della griglia estensimetrica (α_e).

La *risposta termica* dell'ER, detta anche *deformazione termica apparente*, associata alla suddetta variazione di resistenza risulta:

$$\varepsilon_a = \frac{\beta_e}{K}\Delta T \tag{1.15}$$

dove

$$\beta_e = \beta + K(\alpha_s - \alpha_e) \tag{1.16}$$

è il *coefficiente di temperatura dell'insieme estensimetro-struttura*

La risposta termica dell'ER ε_a fornita dalla (1.15) può essere *compensata*, *eliminata* o *corretta* rispettivamente mediante:

- l'impiego degli estensimetri compensatori (ER passivi o *dummy gauges*);
- l'impiego degli estensimetri autocompensati;
- la misura della variazione di temperatura ΔT.

1.3.4.1 Impiego degli estensimetri compensatori

L'estensimetro compensatore è un estensimetro uguale a quello attivo che misura cioè la deformazione dovuta alle forze applicate. Esso deve essere soggetto solamente alle stesse variazioni di temperatura dell'estensimetro attivo; a tal fine viene installato su di una zona scarica della struttura o su di un provino dello stesso materiale della struttura. L'estensimetro compensatore misura quindi solo la risposta termica dell'ER che è uguale a quella dell'ER attivo, cioè:

$$\varepsilon_{\text{comp}} = \varepsilon_a \tag{1.17}$$

L'ER attivo misura invece la deformazione imposta ε e la risposta termica ε_a, cioè:

$$\varepsilon_{\text{attivo}} = \varepsilon + \varepsilon_a \tag{1.18}$$

E' quindi possibile eliminare -per semplice differenza tra le (1.18) e (1.17)- la risposta termica dell'ER, inserendo in modo opportuno i due estensimetri nel ponte di Wheatstone (collegamento a mezzo ponte, vedi cap. 1.4)

Affinché la compensazione sia efficace devono realizzarsi le seguenti condizioni:

1) gli ER, attivo e compensatore, devono essere non solo dello stesso tipo ma anche della stessa partita di produzione;
2) i due ER devono avere nel corso della prova temperature identiche;
3) le condizioni di installazione devono essere identiche per ciò che riguarda il materiale (possibilmente anche per il raggio di curvatura della superficie) e per la direzione di installazione nel caso di un materiale composito (cap.1.3.4.4);
4) le eventuali resistenze (cavi) in serie ai due ER, attivo e compensatore, devono essere uguali.

1.3.4.2 Impiego degli estensimetri autocompensati

L'estensimetro autocompensato è un estensimetro la cui risposta termica è nulla (Esercizio 1.2, cap.9). Ciò si realizza combinando in modo opportuno le caratteristiche α_e e β in modo tale che il coefficiente di temperatura dell'insieme estensimetro-struttura, fornito dalla (1.16), risulti nullo per un dato materiale avente coefficiente di dilatazione termica lineare α_s.[2]

[2] Esercizio 1.2, cap. 9

Ogni ER autocompensato è caratterizzato dal *coefficiente di compensazione termica nominale* (CCT) espresso in (μm/m)/°C (o STC espresso in (μm/m)/°F secondo la letteratura anglosassone).

Il CCT corrisponde al valore del coefficiente di dilatazione termica lineare relativo al materiale per il quale l'ER risulta autocompensato.

Gli ER più diffusi sono quelli auto compensati per acciaio (α_s = 11 ppm/°C) e alluminio (α_s = 23 ppm/°C).
Si noti che la compensazione della risposta termica dell'ER non è completa a tutte le temperature dato che β, α_e, α_s e quindi β_e variano con la temperatura. Ove necessario la deformazione misurata ε' può essere corretta mediante la relazione:

$$\varepsilon = \varepsilon' - \varepsilon_a \tag{1.19}$$

L'andamento della ε_a è fornito dal produttore di ER in forma grafica o in forma numerica più adatta all'elaborazione automatica dei risultati.
Si noti infine che le due tecniche (ER compensatore ed ER autocompensato) possono essere impiegate congiuntamente al fine di ottenere una migliore compensazione della risposta termica dell'ER.

1.3.4.3 Correzione mediante la misura della temperatura

Tale tecnica si usa quando le precedenti non sono applicabili. In tali casi si misura la temperatura in corrispondenza del punto di prova, si calcola la deformazione apparente nota che sia la legge ε_a =f(T) e si corregge infine la deformazione misurata ε' mediante la relazione (1.19). Se necessario inoltre si tiene conto della variazione del fattore di taratura con la temperatura.

1.3.4.4 Compensazione sui materiali compositi

La compensazione della risposta termica degli ER installati sui materiali compositi è più complessa. E' noto infatti che nei suddetti materiali il coefficiente di dilatazione termica lineare varia con la direzione.
Il metodo dell'estensimetro compensatore è attualmente la tecnica più usata per la compensazione della risposta termica dell'ER nelle prove su materiali compositi. In aggiunta alle precauzioni normalmente adottate per le misure su materiali isotropi gli ER -attivo e compensatore- devono essere installati con lo stesso orientamento rispetto alle direzioni principali del materiale. Un errore di orientamento produce infatti una risposta termica residua dovuta

alla dipendenza del coefficiente di dilatazione termica lineare dalla direzione.
La tecnica dell'ER compensatore comune per un gruppo di ER attivi non è quindi applicabile; bisogna invece impiegare un ER compensatore per ogni direzione di misura.
Nel caso di misure su laminati l'ER compensatore deve essere disposto su di uno spezzone di laminato identico a quello sul quale è installato l'ER attivo [1.5].

1.3.5 La resistenza di isolamento

La *resistenza di isolamento Ri* (MΩ) è la resistenza elettrica tra la griglia dell'ER e il materiale, elettricamente conduttore, su cui l'ER è installato.

Una elevata resistenza di isolamento è un indice della bontà dell'installazione estensimetrica per ciò che riguarda:

- la presa dell'adesivo;
- l'assenza di umidità, di solventi e di contaminanti.

Inoltre una elevata resistenza di isolamento:

- riduce la deformazione apparente dovuta all'eventuale variazione della resistenza di isolamento stessa;
- rende trascurabile l'attenuazione della deformazione misurata dovuta alla resistenza di isolamento *Ri*.

E' necessario quindi che la resistenza di isolamento sia elevata. Pertanto bisogna sempre provvedere ad una adeguata protezione dell'ER dall'umidità e dagli altri agenti. E' buona pratica controllare la resistenza di isolamento nel corso dell'installazione estensimetrica. Anche la resistenza di isolamento dei cavi di collegamento dell'ER al ponte deve essere elevata rispetto a quella dell'ER. E' opportuno quindi proteggere dall'umidità i terminali dei cavi e controllare la resistenza di isolamento dell'installazione cablata.
Per misure di precisione (p.es. trasduttori) la resistenza di isolamento deve essere superiore a 10.000 MΩ; per prove di routine a temperatura ambiente la resistenza di isolamento non deve essere inferiore a 1000 MΩ, anche se talvolta sono tollerate resistenze più basse. La tabella 1.6 riporta i valori tipici della resistenza di isolamento secondo le norme UNI.
Nel caso dei materiali compositi elettricamente isolanti, come per gli isotropi isolanti, la misura della resistenza di isolamento non è significativa.

Tabelle 1.6: Valori tipici minimi della resistenza di isolamento secondo la norma UNI 10478-3

Condizioni di prova	Ri [MΩ]
Buone in laboratorio	10.000
Usuali in ambiente chiuso	2000
Usuali in ambiente aperto	500

1.3.6 La base di misura

La *base di misura lo* (mm) coincide con la lunghezza della griglia che partecipa alla misura della deformazione.

Convenzionalmente la base di misura degli ER con griglia a filo continuo comprende anche i raccordi trasversali, mentre quella degli ER a lamina li esclude.

L'ER misura la deformazione media lungo la base di misura *lo*. Tale deformazione non coincide in generale con la deformazione effettiva che si ha nel punto medio della base stessa.

In presenza di campi di deformazione variabili con legge non lineare ed in particolare nelle zone di concentrazione di tensione bisogna usare estensimetri a base corta (lo<3 mm). In presenza di campi di deformazione uniformi o lineari si impiegano estensimetri a base media (lo=3÷20 mm); tipicamente si impiegano ER aventi base di misura di circa 6 mm. Infine per la misura di deformazioni medie in materiali non omogenei (per es. cemento) la base di misura lo deve essere grande rispetto alle dimensioni dei "grani". Si impiegano pertanto estensimetri a base lunga (lo=50÷150 mm).

1.3.7 Livello di alimentazione e deriva

Durante la misura l'ER è soggetto ad una tensione *Ve* ed è attraversato da una corrente *I*. Il calore che si produce per l'*effetto Joule* viene dissipato principalmente per conduzione; ciò richiede evidentemente un innalzamento della temperatura dell'ER. Tale innalzamento di temperatura dipende per dato tipo di griglia essenzialmente :

1) dal calore da dissipare, cioè da *Ve* e da *Ro*;
2) dalle dimensioni della griglia;
3) dalle caratteristiche (capacità e conducibilità termica) della struttura.

Il suddetto innalzamento di temperatura può produrre una deformazione apparente detta *deriva*.

Precisamente si definisce *deriva* $\Delta\varepsilon_O$ (μm/m) la variazione della deformazione indicata nel tempo da una installazione estensimetrica non deformata.

La deriva $\Delta\varepsilon_O$ è nulla se il livello di alimentazione del ponte estensimetrico non supera un certo valore limite.
Il livello di alimentazione consentito per una data installazione estensimetrica si può determinare in base alla conoscenza della densità di potenza ammissibile P_e':

$$P_e' = P_e / A_e \tag{1.20}$$

dove Ae è l'area della griglia estensimetrica.
La tabella 1.7 mostra, per alcuni materiali, la densità di potenza P_e' ammissibile nel caso di ER a lamina installati in superficie e impiegati in prove statiche. Impiegando il ponte di Wheatstone, la tensione di alimentazione *V* del ponte risulta:

$$V = 2\sqrt{P_e' A_e R_e} \tag{1.21}$$

I ponti commerciali sono in genere alimentati a tensione costante (in c.c. o in c.a.) tra 0,5 e 5 V. Se la tensione dell'apparecchiatura disponibile risulta troppo elevata bisogna scegliere un ER con griglia più grande oppure un ER con resistenza più elevata (350 o 700 Ω invece di 120 Ω).[3]

Tabella 1.7: Densità di potenza ammissibile *P'e* negli estensimetri a lamina

MATERIALE	**P'e** (W/mm^2)	**NOTE**
alluminio, rame	0.008 - 0.016	provini spessi
acciaio	0,003 - 0,008	provini spessi
resine rinforzate	0,0003 - 0,0008	es.: vetroresina
resine non rinforzate	0,00003 - 0,00008	es.: resine acriliche

1.3.8 I criteri di scelta dell'estensimetro

I criteri di scelta dell'ER sono basati sulle condizioni ambientali (temperatura, umidità, campo magnetico, etc.) e di prova (valore e tipo della deformazione, durata della prova, materiale della struttura) [1.5, 1.9]. In commercio esiste una grande varietà di ER diversi per caratteristiche e prestazioni. Al fine di selezionare l'ER più adatto per una specifica applicazione bisogna effettuare:

[3] L'esercizio 1.3 (cap. 9) mostra un'applicazione della (1.21).

1) la scelta della griglia (lega estensimetrica, base di misura, resistenza elettrica, coefficiente di compensazione termica, configurazione, etc.) che dipende dalle condizioni ambientali e di prova;
2) la scelta del supporto che dipende essenzialmente dalla temperatura di prova;
3) la scelta dell'adesivo che dipende essenzialmente dalla temperatura di prova, dalla compatibilità tra supporto e materiale della struttura.
4) la scelta del protettivo che dipende essenzialmente dalle condizioni ambientali (umidità, liquidi, etc.) e dalla durata della prova.

Per prove di routine si utilizzano ER con griglia in costantana e supporto poliammidico, installati con cianomonoacrilato.

1.3.8.1. Installazione e prove preliminari

Per le modalità di installazione si rimanda alle norme tecniche [1.9] e alla letteratura tecnica specializzata. Dopo l'installazione si effettuano una serie di prove preliminari tendenti a verificare la correttezza delle procedure di installazione dell'ER ed in particolare la bontà di presa dell'adesivo. Tali controlli si basano sui seguenti punti: 1) esame visivo dell'installazione; 2) misura della resistenza dell'ER; 3) misura della resistenza di isolamento; 4) misura del segnale (*prova della gomma*).

1.4 CIRCUITI DI MISURA

Usualmente la variazione di resistenza dell'ER viene misurata mediante il ponte di Wheatstone. Si consideri (Figura 1.6) il ponte di Wheatstone alimentato con una tensione costante (cioè indipendente dalle variazioni di resistenza) *V* agente ai capi della *diagonale di alimentazione* del ponte AC. E' noto che la tensione di sbilanciamento *E*, misurata ai capi della *diagonale di misura* BD con uno strumento di impedenza infinita, risulta:

$$E = V\frac{R_1R_3 - R_2R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \tag{1.22}$$

La tensione *E* si annulla ed il ponte in tali condizioni si dice *bilanciato* quando:

$$R_1R_3 = R_2R_4 \tag{1.23}$$

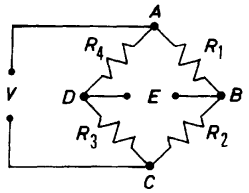


Figura 1.6: Schema del ponte di Wheatstone a deviazione

Se ora le resistenze R_1, R_2, R_3, R_4, subiscono rispettivamente le variazioni ΔR_1, ΔR_2, ΔR_3, ΔR_4, il ponte si sbilancia.
Se le quattro resistenze sono costituite da ER aventi la stessa resistenza e lo stesso fattore di taratura K si ottiene:

$$\boxed{E = \frac{VK}{4}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4)} \qquad (1.24)$$

che si può anche scrivere:

$$E = \frac{VK}{4}\varepsilon_T \qquad (1.25)$$

con

$$\boxed{\varepsilon_T = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4} \qquad (1.26)$$

La (1.26) mostra che:

> le deformazioni relative ad estensimetri posti su lati <u>adiacenti</u> del ponte si <u>sottraggono</u>, mentre le deformazioni relative ad estensimetri posti su lati <u>opposti</u> si <u>sommano</u>.

Tale proprietà del ponte è molto usata in estensimetria per combinare opportunamente le deformazioni dei singoli ER al fine di compensare le deformazioni spurie e per aumentare il segnale di misura.
I quattro lati del ponte possono essere in tutto o in parte occupati da ER. A secondo del numero di estensimetri si hanno i seguenti collegamenti:

1) <u>collegamento a quarto di ponte</u> - un solo estensimetro collegato, i lati rimanenti sono occupati da resistenze fisse, la (1.26) fornisce $\varepsilon_T = \varepsilon_1$, tale collegamento si usa solo con ER autocompensati e nelle prove dinamiche;
2) <u>collegamento a mezzo ponte</u> - due estensimetri disposti su lati adiacenti del ponte, i rimanenti lati sono occupati da resistenze fisse, la (1.26) fornisce $\varepsilon_T = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, in l'analisi sperimentale delle tensioni tale collegamento si usa principalmente per compensare la deformazione termica apparente con la tecnica dell'ER compensatore;
3) <u>collegamento a ponte completo</u> - quattro estensimetri disposti sui quattro lati del ponte, tale collegamento si usa di solito per la costruzione

di trasduttori, la deformazione termica apparente degli ER risulta compensata.

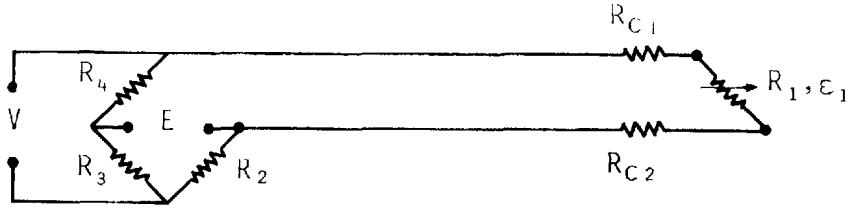
1.4.1. Influenza dei cavi di collegamento al ponte

I cavi che collegano gli ER al ponte influenzano la misura della deformazione se la loro resistenza non è trascurabile rispetto a quella degli estensimetri. Di conseguenza conviene, come regola generale, usare cavi corti di opportuna sezione. Ove ciò non sia possibile bisogna considerare l'influenza della resistenza dei cavi che si palesa essenzialmente con:

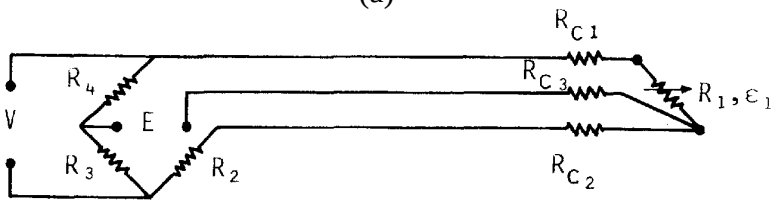
1) la deformazione termica apparente ε_{ac} dovuta alla variazione di temperatura dei cavi;

2) l'attenuazione del segnale di misura.

Nel caso di collegamento a quarto di ponte, la deformazione termica apparente dei cavi si compensa con il noto *collegamento a terzo filo* (figura 1.7b).



(a)



(b)

Figura 1.7: Collegamento a quarto di ponte a due fili (a) [da non usare] e a tre fili (b)

L'attenuazione può essere corretta nota che sia la resistenza dei cavi; così nel caso di un collegamento a quarto di ponte la deformazione effettiva ε risulta:

$$\varepsilon = \varepsilon' \frac{R_o + R_{Tc}}{R_o} \tag{1.27}$$

dove ε' è la deformazione misurata, R_{Tc} è la resistenza totale dei cavi in serie all'ER ed *Ro* è la resistenza dell'ER stesso[4]. Per ulteriori dettagli si rimanda alla letteratura ed in particolare alla già citata normaUNI.

1.5 La misura della deformazione nel caso delle sollecitazioni semplici

Nel seguito si considerano alcune disposizioni estensimetriche tipiche per la misura delle deformazioni nelle travi soggette a trazione, flessione, torsione e taglio. Per talune disposizioni estensimetriche si considera l'influenza delle eventuali sollecitazioni spurie e della deformazione termica apparente. In questa trattazione si ritiene nullo l'errore di allineamento dell'ER.

1.5.1 Deformazioni di trazione e di flessione

Il provino è soggetta allo sforzo normale *N*, che produce la deformazione assiale $\varepsilon = \varepsilon_n$, e a momento flettente M_f che produce, supponendo la sezione simmetrica rispetto all'asse neutro, le deformazioni assiali $\pm\ \varepsilon_f$ dove il segno superiore si riferisce al contorno teso e l'inferiore a quello compresso. La limitazione di sezione simmetrica non è necessaria per la disposizione 1 di tabella 1.8. Si suppone inoltre che la temperatura vari nel corso della prova. L'eventuale momento torcente spurio non influenza la misura dato che esso non produce di solito deformazioni nelle direzioni assiale e trasversale.

La disposizione 1 di tabella 1.8 (1 estensimetro attivo parallelo all'asse del provino, collegamento a 1/4 di ponte) misura sia la deformazione di trazione sia quella di flessione sia la deformazione termica apparente. Essa si può quindi utilizzare solo con ER autocompensati.

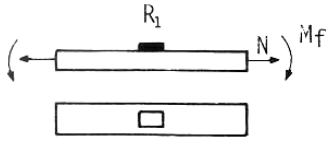
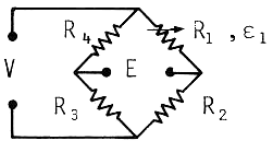
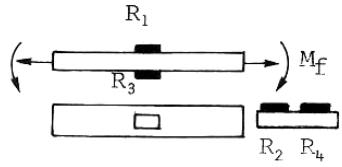
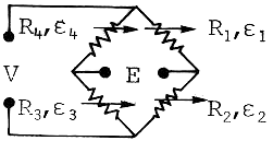
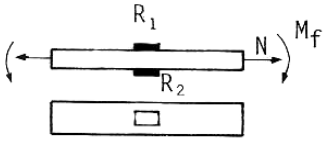
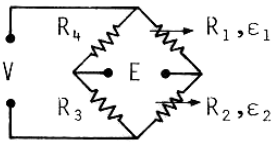
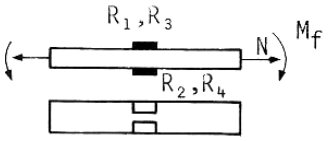
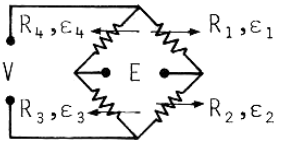
Si può utilizzare per misurare la sola deformazione di trazione solo se il momento flettente è nullo; tale condizione si verifica raramente dato che nelle prove di trazione è quasi sempre presente un momento flettente spurio. Si può invece utilizzare per determinare la deformazione di flessione dato che l'eventuale sforzo normale spurio produce in genere deformazioni di piccola entità.

La disposizione 2 di tabella 1.8 (2 estensimetri attivi paralleli all'asse del provino, disposti su facce opposte e collegati su lati opposti del ponte; 2

[4] L'esercizio 1.4 (cap. 9) mostra un'applicazione della (1.27)

estensimetri compensatori posti su di un provino ausiliario - collegamento a ponte completo) misura la sola deformazione di trazione anche in presenza di momento flettente spurio e di ER non autocompensati. (I dettagli sono riportati nell'esercizio 1.5, cap.9).
La disposizione 3 di tabella 1.8 (2 estensimetri attivi paralleli all'asse del provino, disposti su facce opposte e collegati su lati adiacenti del ponte – collegamento a mezzo ponte) misura la sola deformazione di flessione mentre le deformazioni spurie, termica e di trazione, sono compensate.

Tabella 1.8: Disposizioni estensimetriche per la misura di deformazioni di trazione e flessione

N	Disposizione	Deformazione misurata
1	 	$\varepsilon_T = \varepsilon_n + \varepsilon_f + \varepsilon_a$
2	 	$\varepsilon_T = 2\varepsilon_n$[5]
3	 	$\varepsilon_T = 2\varepsilon_f$
4	 	$\varepsilon_T = 4\varepsilon_f$

La disposizione 4 di tabella 1.8 (4 estensimetri attivi paralleli all'asse del provino e collegati in modo che gli ER sulla stessa faccia siano inseriti su lati

[5] Si veda l'esercizio 1.5, cap. 9

opposti del ponte – collegamento a ponte completo) misura la sola deformazione di flessione (segnale doppio rispetto alla disposizione precedente) mentre le deformazioni spurie sono compensate.

1.5.1.1. Separazione delle deformazioni

Nel caso di componenti soggetti contemporaneamente a sforzo normale e flessione è possibile determinare separatamente le relative deformazioni. Nel seguito si considera l'impiego di ER autocompensati su un provino simmetrico rispetto all'asse neutro in modo da avere deformazioni di flessione opposte,

I due ER (Figura 1.8), disposti parallelamente all'asse della trave sulle facce inferiore (i) e superiore (s), sono inseriti successivamente sul lato 1 del ponte (mediante un *commutatore*). Si misurano così successivamente le deformazioni ε_i e ε_s da cui si ricavano le deformazioni dovute allo sforzo normale e al momento flettente:

$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_i + \varepsilon_s}{2} \tag{1.28}$$

$$\varepsilon_f = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_s}{2} \tag{1.29}$$

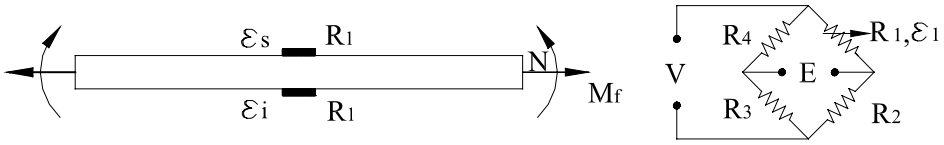


Figura 1.8: Determinazione delle deformazioni dovute allo sforzo normale e alla flessione: i due ER vengono inseriti successivamente nel lato 1 del ponte

1.5.2 Deformazioni di torsione e taglio

1.5.2.1 Torsione

Si consideri un albero, avente sezione circolare, soggetto a momento torcente. E' noto che le deformazioni principali sono dirette secondo le eliche inclinate a $\pm 45°$ rispetto all'asse dell'albero ed assumono i seguenti valori:

$$\varepsilon_\tau = \varepsilon_{+45} = -\varepsilon_{-45} = \gamma / 2 \tag{1.30}$$

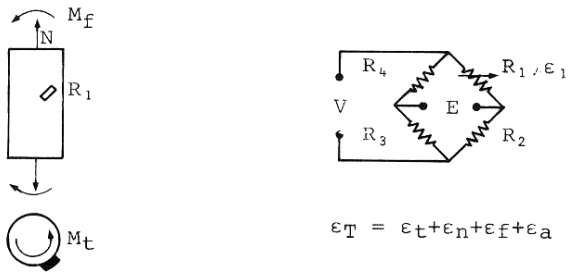
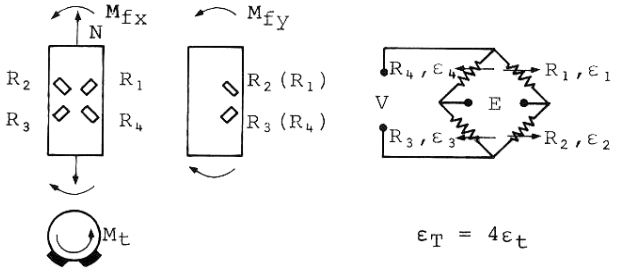
dove γ è lo scorrimento mutuo. Pertanto anche gli ER si dispongono lungo eliche inclinate a $\pm 45°$ rispetto all'asse dell'albero.

Determinato lo scorrimento mutuo γ si possono calcolare la tensione tangenziale e il momento torcente mediante le note formule:

$$\tau = G\gamma\,, \quad M_t = J_p G\frac{\gamma}{r} \qquad (1.31),\ (1.32)$$

dove J_p è il momento di inerzia polare, G è il modulo di elasticità trasversale ed r è il raggio dell'albero.
Nel seguito si suppone che la temperatura vari nel corso della prova e che siano presenti uno sforzo normale N ed un momento flettente spurio M_f di componenti M_{fx} ed M_{fy}.
La disposizione 1 di tabella 1.9 (1 estensimetro attivo inclinato a +45° rispetto all'asse dell'albero ed inserito nel primo lato del ponte collegamento a 1/4 di ponte) misura la deformazione di torsione e tutte le deformazioni spurie (sia di trazione e di flessione sia la deformazione termica apparente). Essa non può quindi essere utilizzata.

Tabella 1.9:Disposizioni estensimetriche per la misura di deformazioni di torsione

N	Disposizione estensimetrica e deformazione misurata
1	
2	

La disposizione 2 di tabella 1.9 (4 estensimetri attivi, 2 a + 45° e 2 a - 45°, collegati in modo che gli estensimetri disposti lungo la stessa elica siano inseriti su lati opposti del ponte - collegamento a ponte completo) misura la sola deformazione di torsione mentre tutte le deformazioni spurie sono compensate.

1.5.2.2 Taglio

Si consideri una trave incastrata ad un estremo e soggetta all'altro estremo ad un carico T che produce flessione e taglio (Figura 1.9). In corrispondenza dell'asse neutro si ha solo taglio e le deformazioni principali, che sono dirette secondo le direzioni inclinate a $\pm 45°$ rispetto all'asse della trave, assumono i valori dati dalla (1.30).
Utilizzando ER disposti a $\pm 45°$ rispetto all'asse della trave è quindi possibile determinare, mediante la (1.30) lo scorrimento mutuo e quinti la tensione tangenziale mediante la (1.31) e il carico T, supponendo il rapporto altezza/larghezza (h/b)≥2, mediante la nota formula:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2}\frac{T}{A} \tag{1.33}$$

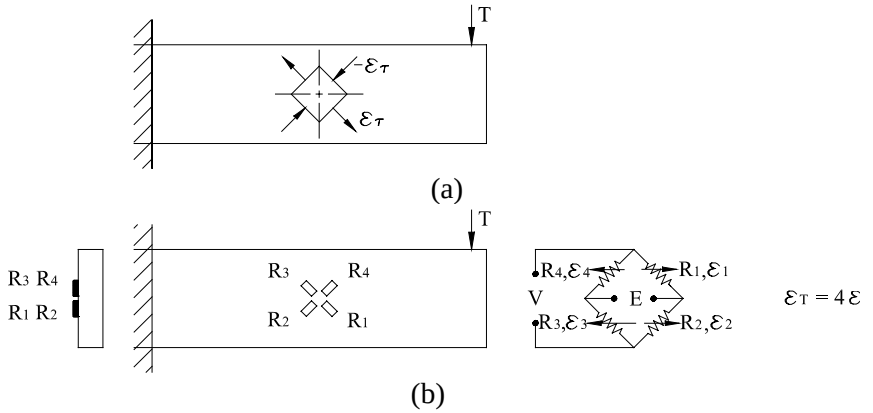


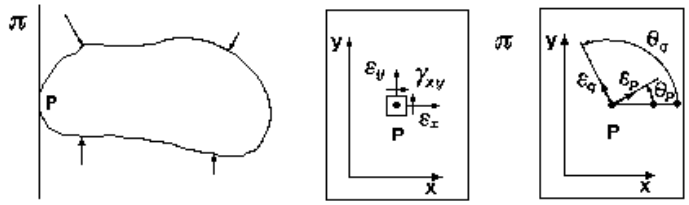
Figura 1.9: Deformazioni di taglio (a), disposizione estensimetriche per la determinazione delle deformazioni dovute al taglio (b)

Nel seguito si fa la seguente ipotesi: ER, anche non autocompensati, disposti in prossimità dell'asse neutro. La disposizione di figura 1.9b (4 estensimetri attivi, 2 a + 45° e 2 a - 45°, collegati in modo che gli estensimetri disposti lungo la stessa direzione siano inseriti su lati opposti del ponte - collegamento a ponte completo) misura la deformazione di taglio $\varepsilon_T = 4\varepsilon_\tau$

mentre la deformazione termica apparente è compensata. La misura non dipende dal punto di applicazione del carico[6].

1.6 Misura dello stato di deformazione

La determinazione dello stato di deformazione non dipende dal materiale a condizione che sia valida l'ipotesi di omogeneità (a livello macromeccanico) in corrispondenza della rosetta estensimetrica. La determinazione dello stato di tensione dipende invece dalla particolare legge costitutiva del materiale.
Si consideri (Fig.1.10-a) un corpo soggetto ad un sistema di forze esterne. All'interno lo stato di deformazione è tridimensionale ed è quindi definito da sei componenti di deformazione. Invece nel generico punto P posto in superficie e libero da forze esterne, il campo di deformazione nel piano tangente π alla superficie in P è definito dalle sole tre componenti della deformazione ε_x, ε_y, γ_{xy} (Figura 1.10b) ovvero dalle deformazioni principali ε_p, ε_q e dal loro orientamento θ dove θ (θ_p per ε_p, θ_q per ε_q) è l'angolo che individua l'orientamento della croce delle deformazioni principali misurato positivamente in verso antiorario a partire dall'asse *x* (Figura 1.10c).



(a) (b) (c)

Figura 1.10: Campo di deformazione in un punto P, libero da forze esterne, disposto sulla superficie di un corpo tridimensionale

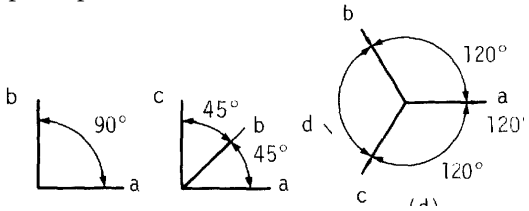
1.6.1. Le rosette estensimetriche

In genere la misura delle deformazioni nell'intorno di un punto P non si effettua mediante estensimetri singoli disposti secondo le direzioni assegnate θ_a, θ_b e θ_c, ma mediante le *rosette estensimetriche*.
La rosetta estensimetrica è l'insieme di più griglie estensimetriche, elettricamente indipendenti, disposte su di un unico supporto ed

[6] un'altra disposizione indipendente dal punto di applicazione del carico è riportata nell'esercizio 1.6, cap. 9

opportunamente orientate tra di loro. I tipi comunemente impiegati sono i seguenti:

1) rosetta rettangolare a due griglie a 90 gradi tra di loro (Fig. 1.11.a) - tale rosetta si usa quando è noto l'orientamento delle deformazioni principali, in tal caso le griglie si dispongono secondo le direzioni delle deformazioni principali stesse;



(a) (b) (c)

Figura 1.11: Le rosette: rettangolari a due (a) e tre (b) griglie; equiangola (c)

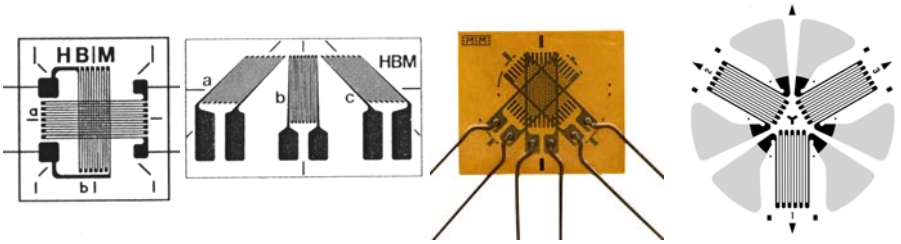
2) rosetta rettangolare a tre griglie a 45 gradi tra di loro (Fig. 1.11.b) - di uso generale quando l'orientamento delle deformazioni principali è incognito;
4) rosetta equiangola a tre griglie a 120 gradi tra di loro (Fig. 1.11.c) - di uso generale quando l'orientamento delle deformazioni principali è incognito.

Le griglie di una rosetta possono essere sovrapposte o affiancate. Le rosette a griglie sovrapposte sono preferibili quando le deformazioni nel piano di misura variano rapidamente; quelle a griglie affiancate sono invece preferibili quando le deformazioni variano rapidamente in direzione ortogonale al piano di misura. Le singole griglie della rosetta sono, come già detto elettricamente indipendenti, e vengono inserite successivamente nel ponte mediante un *commutatore*.

La figura 1.12 mostra alcuni tipi di rosette commerciali sia del tipo rettangolare a due e tre griglie sovrapposte e separate, sia del tipo equiangolo.

1.6.1.1 Le formule risolutive delle rosette

La Tabella 1.10 mostra le formule che forniscolo le deformazioni principali ed il loro orientamento in funzione delle deformazioni $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$ misurate dalle tre griglie di una rosetta rettangolare o equiangola.



(a) (b) (c) (d)

Figura 1.12: Alcuni tipi di rosette estensimetriche: rettangolare a due griglie sovrapposte (a), rettangolare a tre griglie separate (b) e sovrapposte (c), equiangola a tre griglie separate (d). [(a)-(b) riproduzione per gentile concessione di HBM Italia, [(c)-(d) riproduzione per gentile concessione di Vishay Intertechnology]

Evidentemente le formule risolutive di Tabella 1.10, che forniscono le deformazioni principali ε_p ed ε_q ed il loro orientamento in funzione delle deformazioni misurate dalle griglie della rosetta, non dipendono dal materiale, essendo derivate dalle formule di trasformazione dello stato di deformazione. Esse sono quindi le stesse sia per i materiali isotropi sia per quelli anisotropi. Le condizioni per applicare le formule sono che il materiale sia omogeneo (a livello macromeccanico) in corrispondenza della rosetta e che le deformazioni siano *piccole* (indicativamente minori di 10000 μm/m).

Tabella 1.10: Formule relative alle rosette estensimetriche piane

Tipo di rosetta Orientamento griglie*	Deformazioni principali angolo principale
Rettangolare 3 griglie a/b/c 0°/45°/90°	$\varepsilon_{p,q} = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2 + \left[2\varepsilon_b - (\varepsilon_a + \varepsilon_c)\right]^2}$ (1.34) $\tan 2\theta = \frac{2\varepsilon_b - (\varepsilon_a + \varepsilon_c)}{\varepsilon_a - \varepsilon_c}$ (1.35)
Equiangola 3 griglie a/b/c 0/120°/240°	$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} \pm \sqrt{\left[\varepsilon_a - (\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c)/3\right]^2 + (\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2/3}$ (1.36) $\tan 2\theta = \sqrt{3}\frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_b)}{2\varepsilon_a - (\varepsilon_b + \varepsilon_c)}$ (1.37)

*angoli in verso antiorario a partire dalla griglia *a* (0°)

Identificazione dell'angolo principale

Le relazioni (1.35) e (1.37) forniscono due valori dell'angolo principale che differiscono di 90°. L'identificazione dell'angolo θ_p, che la deformazione principale maggiore forma con la griglia *a* misurato positivamente in verso antiorario, può essere facilmente effettuata considerando i segni del numeratore (S) e del denominatore (C) dalle (1.35) e (1.37), si ha così:

$$\theta_p = \frac{1}{2} arc\tan\frac{S}{C} + n90° \qquad (1.38)$$

scegliendo $n= 0$ per $C \geq 0$, $n= 1$ per $C<0$ e $S \geq 0$, $n=-1$ per $C<0$ e $S \leq 0$[7].

1.6.1.2. Il calcolo delle tensioni

Materiali isotropi - Per i materiali isotropi sollecitati in campo elastico lineare le tensioni principali σ_p e σ_q ($\sigma_p \geq \sigma_q$) si calcolano mediante la legge di Hooke che , essendo nulla la terza tensione principale, fornisce:

$$\sigma_p = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_p + \nu\varepsilon_q), \quad \sigma_q = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_q + \nu\varepsilon_p) \qquad (1.39), (1.40)$$

Sempre per materiali isotropi l'orientamento delle tensioni principali coincide con quello delle deformazioni principali.

Materiali anisotropi - Per i materiali anisotropi ed in particolare per i compositi le direzioni delle deformazioni principali non coincidono in generale con quelle delle tensioni principali. Per i suddetti materiali inoltre il calcolo delle tensioni deve essere effettuato utilizzando le relazioni costitutive appropriate.

In questo capitolo si considera in particolare la determinazione delle deformazioni e delle tensioni in una lamina elastica, omogenea ed ortotropa soggetta a stato piano di tensione. Scopo dell'analisi è quello di determinare le deformazioni (ε_1, ε_2, γ_{12}) e le tensioni (σ_1, σ_2, τ_{12}) nel riferimento principale del materiale dato che i criteri di resistenza dei materiali anisotropi si basano sulla limitazione delle suddette grandezze.

I dati sono: 1) le deformazioni misurate; 2) l'angolo θ_1 misurato positivamente in verso antiorario dalla griglia *a* (figura 1.13) all'asse principale 1 della lamina; 3) le costanti elastiche della lamina E_1, E_2, ν_{12}, G_{12} ($\nu_{21} = \nu_{12} E_2/E_1$). Nel caso generale bisogna effettuare tre misure mediante una rosetta estensimetrica a tre griglie.

---

[7] L'esercizio 1.7 (cap. 9) mostra un'applicazione della (1.38).

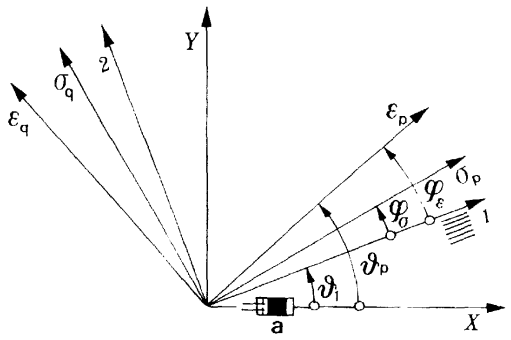


Figura 1.13: Rosetta rettangolare od equiangola con griglia "a" diretta secondo l'asse *x*: θ_1 = angolo dell'asse 1 rispetto all'asse *x*; θ_p = angolo della deformazione principale ε_p rispetto a *x*; φ_σ = angolo della tensione principale

Nel seguito si riporta una possibile procedura di calcolo.

1. Calcolare le deformazioni principali ε_p, ε_q e l'orientamento θ_p di ε_p rispetto alla griglia *a* impiegando le usuali formule delle rosette, cioè eq. (1.34) e (1.35) per la rosetta rettangolare ed eq. (1.36) e (1.37) per la rosetta equiangola.

2. Determinare (Figura 1.13) l'angolo φ_ε che la deformazione principale ε_p forma rispetto alla direzione principale 1 del materiale:

$$\varphi_\varepsilon = \theta_p - \theta_1 \tag{1.41}$$

σ_p rispetto all'asse *1*; φ_ε = angolo della deformazione principale ε_p rispetto all'asse *1* (angoli misurati positivamente in verso antiorario).

3. Calcolare le deformazioni nel riferimento principale della lamina mediante l'equazione di trasformazione [1.3, 1.5]:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{bmatrix} = \left[T(-\varphi_\varepsilon)\right] \begin{bmatrix} \varepsilon_p \\ \varepsilon_q \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2-n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_p \\ \varepsilon_q \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.42}$$

con $\left[T(-\varphi_\varepsilon)\right]$ = *matrice di trasformazione* [1.3, 1.5], $m = \cos(-\varphi_\varepsilon)$, $n = \sin(-\varphi_\varepsilon)$, essendo $-\varphi_\varepsilon$ l'angolo dal vecchio riferimento (*p*,*q*) al nuovo riferimento (*1*,*2*).

4. Calcolare le tensioni nel riferimento principale della lamina mediante le note relazioni:

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}(\varepsilon_1 + \nu_{21}\varepsilon_2),\ \sigma_2 = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}(\varepsilon_2 + \nu_{12}\varepsilon_1) \tag{1.43), (1.44}$$

$$\tau_{12} = G_{12}\gamma_{12} \tag{1.45}$$

Capitolo 2

Fotoelasticità

2.1 Introduzione

2.1.1 Principio

La fotoelasticità si basa sul fenomeno della *birifrangenza accidentale meccanica* cioè sulla dipendenza degli indici di rifrazione di taluni materiali (p.es. resine epossidiche, vetro) dallo stato di tensione. Tale fenomeno noto dal 1815 (Brewster) ha trovato applicazione pratica a partire dal 1900 (Mesnager). Nella bibliografia si riportano riferimenti relativi a libri [0.1-0.6, 2.1-2.6], norme tecniche [2.7-2.10] e siti [2.11-2.14].

2.1.2 Tipo di informazione sperimentale e relazione caratteristica

La fotoelasticità consente di determinare le *isocromatiche* che sono il luogo dei punti in cui è costante la differenza delle tensioni principali $\sigma_1 - \sigma_2$ e le *isocline* che sono il luogo dei punti in cui è costante l'orientamento θ delle tensioni principali. In particolare si determinano *come risultato diretto dell'esperienza*:

- il *ritardo* o *ordine di frangia*, δ (relativo alle isocromatiche), dalla misura di δ si determina la differenza delle tensioni principali per mezzo della relazione:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = F\delta \tag{2.1}$$

dove F è la costante di frangia che dipende dalla lunghezza d'onda λ della sorgente utilizzata durante la taratura[1];

[1] esercizio 2.1, cap. 9

- il *parametro* θ dell'isoclina che fornisce l'orientamento delle tensioni principali rispetto ad un asse di riferimento.

2.1.3 Campi tensionali esaminabili

La fotoelasticità si utilizza con i seguenti metodi a *campo intero*:

1. fotoelasticità piana (a trasmissione) adatta all'analisi degli stati piani di tensione in campo elastico lineare mediante modelli in materiale birifrangente;
2. fotoelasticità tridimensionale che con il *metodo del congelamento delle tensioni* consente l'analisi di stati tridimensionali di tensione in campo elastico lineare impiegando modelli in materiale birifrangente (per tale tecnica si rimanda alla bibliografia);
3. tecnica dei rivestimenti birifrangenti (a riflessione) che consente di determinare lo stato di deformazione alla superficie di componenti in materiale non birifrangente (acciaio, alluminio, etc.).

2.1.4 Materiali esaminabili

Per la fotoelasticità piana e tridimensionale, il materiale del modello deve essere birifrangente; analogamente nella tecnica dei rivestimenti birifrangenti, il materiale del rivestimento deve essere birifrangente, mentre il materiale della struttura può essere qualsiasi purché sia possibile l'incollaggio del rivestimento fotoelastico. La fotoelasticità si presta bene al controllo delle tensioni residue nei manufatti in materiale birifrangente [2.7-2.10].

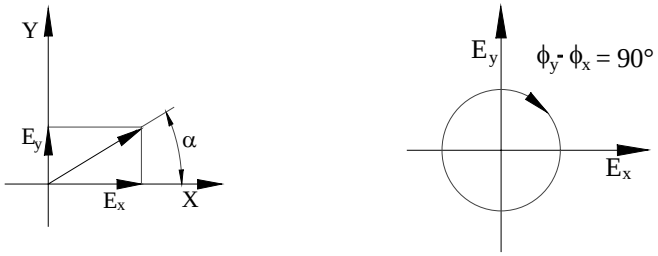
2.1.5 Altre caratteristiche

La fotoelasticità è una tecnica da laboratorio, che si presta bene anche in ambiente industriale. La tecnica non pone requisiti particolari per ciò che riguarda le condizioni ambientali (vibrazioni, etc.). La risoluzione tipica è di 0,02 ordini di frangia corrispondenti a circa 5 μm/m. Alla fotoelasticità sono applicabili svariati metodi di elaborazione automatica delle immagini.

2.1.6 La luce polarizzata

È noto che la luce è costituita da un campo elettromagnetico che giace in un piano ortogonale (x,y) a quello di propagazione della luce (z); si solito si fa riferimento al solo campo elettrico. Nella luce ordinaria la giacitura del campo elettrico varia casualmente nel *tempo* e nello *spazio*. Nella luce *polarizzata* (che è quella che interessa la fotoelasticità) la giacitura del vettore campo elettrico $\underline{E}$ è costante (luce *piana*) o varia con una legge

definita (luce *circolare* o *ellittica*). La luce polarizzata piana è caratterizzata dal fatto che il piano di vibrazione del campo elettrico, avente componenti E_x, E_y, ha una giacitura costante, cioè (Figura 2.1a) $\tan\alpha = E_y / E_x = \text{cost.}$ La luce polarizzata circolarmente è caratterizzata dal fatto che il vettore campo elettrico, per dato z, descrive una circonferenza (Fig.2.1b). Tale tipo di luce polarizzata si ha quando le ampiezze delle due componenti (E_x, E_y) dirette secondo gli assi x e x sono uguali ($A_x = A_y = A$) e sono sfasate di 90° ($\phi_y - \phi_x = \pm 90°$).



(a) (b)

Figura 2.1: Luce polarizzata: (a) piana (α=cost.). (b) circolare *destra*

La luce polarizzata ellitticamente è caratterizzata dal fatto che il vettore campo elettrico descrive un'ellisse con semiassi diretti secondo gli assi x, y o più in generale con semiassi inclinati rispetto al sistema x,y.
La luce polarizzata piana si ottiene utilizzando *il polarizzatore piano* che è un elemento ottico avente un asse preferenziale di trasmissione, che lascia passare cioè solo le componenti del campo dirette secondo il suddetto asse di trasmissione.
La luce polarizzata circolarmente si ottiene utilizzando *il polarizzatore circolare*, che è costituito da un polarizzatore piano e da *una lastra quarto d'onda* con gli assi a $\pm$45 rispetto all'asse del polarizzatore.

NOTA – lastra quarto d'onda
La *lastra quarto d'onda* è un elemento ottico, detto anche *ritardatore ottico* di 90°, con due assi preferenziali di trasmissione tra di loro ortogonali. Essa: (1) divide il campo luminoso, polarizzato piano, in due componenti polarizzate linearmente secondo i due assi denominati *asse lento* ed *asse veloce*; (2) ritarda una componente rispetto all'altra di 90° (= ad un quarto di lunghezza d'onda).

2.2 Fotoelasticità piana

La fotoelasticità piana studia le lastre piane soggette a stato piano di tensione. In questo caso il campo tensionale nell'intorno di un punto è definito dalle seguenti componenti cartesiane di tensione: $\sigma_{x,}\ \sigma_y, \tau_{xy}$, ovvero dalle due tensioni principali σ_1 e σ_2 e dall'angolo θ che individua il loro orientamento rispetto ad un asse di riferimento.

2.2.1. L'effetto fotoelastico

Un campo luminoso polarizzato piano incidente normalmente su di un modello fotoelastico soggetto a stato piano di tensione subisce le seguenti trasformazioni:

- il campo incidente si scinde in due campi (E_1, E_2) polarizzati linearmente secondo due direzioni ortogonali che coincidono con le direzioni delle tensioni principali σ_1 e σ_2;
- le velocità di propagazione v_1 e v_2 di propagazione dei due campi all'interno del modello e quindi i relativi indici di rifrazione n_1 e n_2 dipendono dalle tensioni principali σ_1 e σ_2.

I due campi luminosi, a causa della diversa velocità di propagazione, all'uscita dal modello risultano sfasati nel senso che, quando il campo più lento esce dal modello, il campo più veloce ha già percorso nell'aria uno spazio Δ, detto *ritardo spaziale*, dato da:

$$\Delta = Cd\left(\sigma_1 - \sigma_2\right) \tag{2.2}$$

In fotoelasticità si considera di solito il *ritardo spaziale relativo* alla lunghezza d'onda λ della luce utilizzata ($\delta=\Delta/\lambda$) che pertanto risulta:

$$\boxed{\delta = \frac{Cd}{\lambda}\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)} \tag{2.3}$$

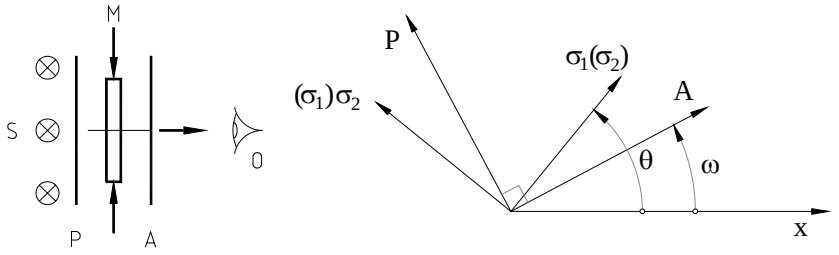
La (2.3) è la *relazione fondamentale della fotoelasticità*. Noti la costante C (mediante operazione di taratura), lo spessore d e la lunghezza d'onda della luce λ, dalla misura del ritardo δ si risale alla differenza delle tensioni principali $\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)$. A tal fine il modello deve essere osservato in una apparecchiatura denominata *polariscopio*.

2.3 I polariscopi

2.3.1 Il polariscopio piano ad assi incrociati

Il polariscopio piano ad assi incrociati è costituito da una sorgente di luce (che per ora si considera monocromatica) e da due polarizzatori lineari con

assi di trasmissione ortogonali (Figura 2.2). Il polarizzatore posto vicino all'osservatore è di solito chiamato *analizzatore*. Il modello fotoelastico viene inserito tra i due polarizzatori.



(a) (b)

Figura 2.2: Polariscopio piano ad assi incrociati: (a) schema, (b) orientamento generico delle tensioni principali (θ) e del polariscopio (ω) rispetto all'asse x di riferimento. (M=modello, P,A=polarizzatori, O=osservatore, S=sorgente).

L'intensità luminosa del campo emergente dall'analizzatore a modello carico risulta:

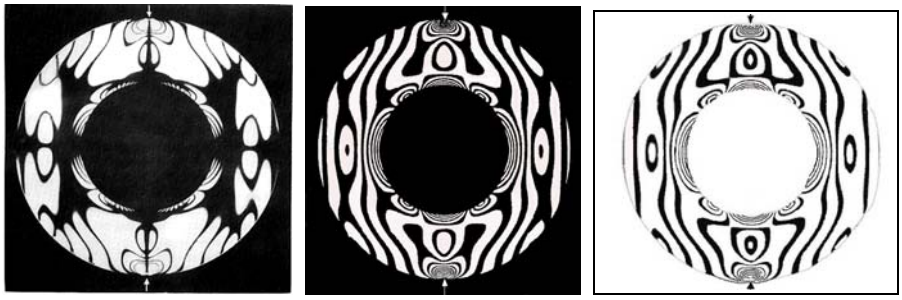
$$\boxed{I=A^2\sin^2 2(\theta-\omega)\sin^2\pi\delta} \qquad (2.4)$$

dove A è l'ampiezza del campo incidente, δ è il ritardo relativo, θ e ω sono (Fig. 2.2b) gli angoli che definiscono rispettivamente l'orientamento della croce delle tensioni principali e dell'analizzatore rispetto all'asse di riferimento x.
La relazione (2.4) mostra che l'intensità luminosa risulta nulla nei punti del modello nei quali:

$$\delta = n \qquad (n = 0,1,2....) \quad \theta = \omega \qquad (2.5), (2.6)$$

Il modello appare cioè solcato da un insieme di frange nere corrispondenti alle condizioni di estinzione sopra riportate.
Le frange corrispondenti alla condizione (2.5) sono il luogo dei punti nei quali il ritardo δ è costante ed uguale all'intero n (0-1-2-3….) che si chiama *ordine di frangia*; tali frange per la relazione fondamentale della fotoelasticità (2.3) sono anche il luogo dei punti nei quali è costante la differenza delle tensioni principali; esse sono cioè le isocromatiche.
Le frange corrispondenti alla condizione (2.6) sono il luogo dei punti nei quali l'orientamento delle tensioni principali θ è costante ed uguale

all'inclinazione dell'analizzatore rispetto all'asse di riferimento; tali frange corrispondono quindi alle isocline di *parametro* $\theta = \omega$. Ruotando il polariscopio (mantenedo i due polarizzatori ad assi incrociati) è possibile osservare le isocline di parametro $\theta = \omega$ variabile tra 0° e 90° . La figura (2.3a) mostra un esempio di frange osservate al polariscopio piano ad assi incrociati[2].



(a) (b) (c)

Figura 2.3: Isocromatiche e isocline osservate al polariscopio piano ad assi incrociati (a); isocromatiche rilevate al polariscopio circolare a campo scuro (b) e a campo chiaro (c)

2.3.2 Il polariscopio circolare

La presenza delle isocline (frange larghe in figura 2.3a) disturba in generale il rilievo delle isocromatiche. Per rimuovere le isocline si utilizza il *polariscopio circolare*. La figura 2.4 mostra lo schema del polariscopio circolare a campo scuro. Gli assi dei polarizzatori sono tra di loro ortogonali e così pure gli assi delle lastre quarto d'onda. Il modello è inserito tra le due lastre quarto d'onda.

L'intensità luminosa del campo emergente dall'analizzatore risulta:

$$I = A^2 \sin^2 \pi\delta \qquad (2.7)$$

In questo caso l'intensità luminosa dipende esclusivamente dal ritardo δ. La condizione di estinzione corrisponde alla (2.5). In tale polariscopio si osservano quindi solamente le isocromatiche di ordine intero dette anche *a campo scuro* (Figura 2.3b).

Se si ruota di 90° l'analizzatore disponendolo parallelo al polarizzatore si ottiene il *polariscopio circolare a campo chiaro* la cui intensità luminosa emergente dall'analizzatore risulta:

---

[2] Per la numerazione delle isocromatiche si veda lo'esercizio 2.2, cap. 9

$$I = A^2 \cos^2 \pi\delta \qquad (2.8)$$

Anche in questo caso l'intensità luminosa dipende esclusivamente dal ritardo δ. In questo caso la condizione di estinzione risulta:

$$\delta = \frac{2n+1}{2} \qquad \text{(con } n \text{ intero)} \qquad (2.9)$$

In tale polariscopio si osservano quindi le isocromatiche di *ordine intermedio* (0,5-1,5-2,5…) dette anche a *campo chiaro* (Figura 2.3c).

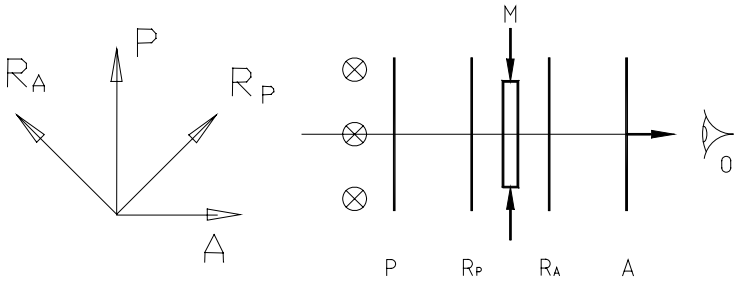


Figura 2.4: Schema del polariscopio circolare a campo scuro (M: modello fotoelastico, P, A : polarizzatori, R_P, R_A: lastre quarto d'onda);

2.4. Uso della luce bianca

La luce bianca comprende le varie radiazioni dello spettro del visibile, cioè con lunghezze d'onda da λ =400 nm (violetto) a λ=700 nm (rosso). Se si usa come sorgente del polariscopio la luce bianca (normali lampade ad incandescenza) si ha che:

- le isocline appaiono sempre nere (come quando si usa luce monocromatica) dato che la relativa condizione di estinzione (2.6) non dipende dalla lunghezza d'onda della luce;
- le isocromatiche appaiono colorate perché, per dato ritardo assoluto Δ, il ritardo relativo δ=Δ/λ, dal quale dipende la condizione di estinzione, varia con la lunghezza d'onda.

Per spiegare la formazione delle isocromatiche in luce bianca si consideri un modello fotoelastico nel polariscopio circolare a campo scuro. Nei punti del modello dove $(\sigma_1 - \sigma_2) = 0$ si ha, in base alle (2.2) e (2.3), Δ = δ = 0 (ordine 0) qualunque sia λ, cioè tutti i colori vengono estinti, di conseguenza la frangia di ordine 0 appare nera sia in luce monocromatica sia in luce policromatica.

Nei punti in cui il ritardo assoluto è diverso da 0 si estinguono i colori aventi lunghezza d'onda:

$$\lambda = \frac{\Delta}{\delta} = \frac{\Delta}{n}, \ (\text{n} = 1,2,3....) \tag{2.10}$$

Il colore osservato è il *complementare del colore estinto* (luce bianca – colore estinto). Così ad esempio per Δ=400 nm si estingue, per n=1, il violetto, il colore osservato (complementare del violetto) è il giallo. La tabella 2.1 mostra la sequenza dei colori estinti e dei colori osservati all'aumentare del ritardo Δ fino a 700 nm (*colori del primo ordine*). La tabella mostra altresì il ritardo δ riferito ad una lunghezza d'onda di riferimento λ_o.

All'aumentare del ritardo si hanno estinzioni multiple [ad esempio per Δ=1600 si estinguono il violetto del 4° ordine (400 nm) ed il verde del 3° ordine (533 nm)]. A causa delle estinzioni multiple i colori degli ordini superiori a tre sono sempre più deboli e per ordini superiori a 5 non si distinguono più i colori.

Tabella 2.1 – Isocromatiche in luce bianca: successione dei colori del *primo ordine*

Ritardo Δ (nm)	Colori estinti	Colori osservati	Ritardo relativo $\Delta/\lambda o$ (λo=589 nm)
0	Tutti	Nero	0
<400	Nessuno	Luce bianca	<400/589
400	Violetto (n=1)	Giallo	0,68
450	Blu (n=1)	Arancione	0,76
550	Verde (n=1)	Rosso	0,93
589	Giallo (n=1)	Violetto	1
650	Arancione (n=1)	Blu	1,1
700	Rosso (n=1)	Verde	1,19

La luce bianca si usa in fotoelasticità classica per:

- numerare le isocromatiche: identificata la frangia di ordine 0 (l'unica ad apparire nera in luce bianca) si stabilisce il verso degli ordini crescenti in base alla successione dei colori;
- stimare il ritardo Δ in base al colore osservato utilizzando la tabella 2.1.

2.5. Il rilievo manuale e l'elaborazione dei dati fotoelastici

2.5.1. Le isocline

Le isocline, come già detto, si rilevano al polariscopio piano ad assi incrociati. A tal fine si ruota il polariscopio rilevando le isocline ogni 5° (o 10°). Si usa luce bianca al fine di meglio distinguere le isocline dalle isocromatiche. Il parametro dell'isoclina (Figura 2.5) rappresenta l'angolo che la più vicina delle tensioni principali forma con l'asse x. Dalle isocline si ottengono le *isostatiche* che sono le traiettorie delle tensioni principali.

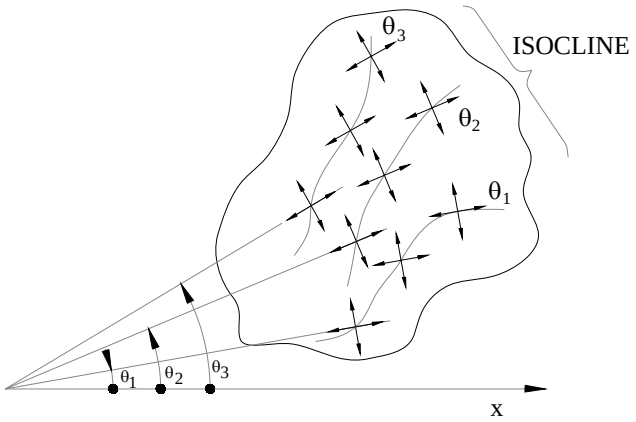


Figura 2.5: Isocline e parametro delle isocline

2.5.2. Il rilievo delle isocromatiche

Il rilievo delle isocromatiche, come già detto, si esegue al polariscopio circolare. Di solito si usa luce monocromatica gialla con λ=589 nm (lampada a vapori di sodio) o verde con λ=546 nm (lampada a vapori di mercurio più filtro). Determinato l'ordine di frangia, si calcola la differenza delle tensioni principali mediante la (2.1) dove F si determina mediante taratura.

2.5.3. L'interpretazione delle isocromatiche

Le isocromatiche forniscono in ogni punto del modello la differenza delle tensioni principali $\sigma_1 - \sigma_2$. In particolare ai contorni liberi da forze esterne (escludendo quindi i punti di applicazione dei carichi) la tensione σ_n

ortogonale al contorno è nulla è quindi si ricava subito la tensione σ_t tangente al contorno, si ha cioè:

- se il contorno è teso $\sigma_n = \sigma_2 = 0, \sigma_t = \sigma_1 = Fn$ (2.11)
- se il contorno è compresso $\sigma_n = \sigma_1 = 0, \sigma_t = \sigma_2 = -Fn$ (2.12)

NOTA
Come si vede la fotoelasticità consente di determinare immediatamente le tensioni ai contorni; è quindi possibile determinare i *fattori di concentrazione delle tensioni* mediante formule del tipo:

$$\alpha_K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{nom}} = \frac{n_{\max}}{n_{nom}} \quad (2.13)$$

dove n_{max} ed n_{nom} indicano rispettivamente gli ordini di frangia corrispondenti rispettivamente alle tensioni massima e nominale.

All'interno si conosce solo la differenza delle tensioni principali, o ciò che è lo stesso la tensione tangenziale massima nel piano x,y del modello:

$$\tau_{12} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2 \quad (2.14)$$

Tale tensione è un parametro caratteristico dello stato di cimento del materiale *solo se le tensioni principali sono discordi*. In generale quindi è necessario conoscere i valori delle singole tensioni principali all'interno del modello fotoelastico applicando a tal fine i *metodi di separazione delle tensioni*. La separazione delle tensioni non è necessaria quando la fotoelasticità viene utilizzata quale metodo di controllo per la validazione dei risultati numerici; in tal caso è infatti più semplice paragonare la differenza delle tensioni principali, determinata numericamente, con quella rilevata sperimentalmente dalle isocromatiche.

2.6 Il rilievo automatico dei dati fotoelastici

L'avvento delle tecniche di acquisizione ed elaborazione automatica delle immagini ha dato luogo allo sviluppo dei metodi della *fotoelasticità digitale*. Nel seguito dopo una breve descrizione del sistema di acquisizione, si considerano la *fotoelasticità RGB* e la *fotoelasticità a variazione di fase.*

2.6.1 Il sistema di acquisizione

Un sistema di acquisizione ed elaborazione automatica dei dati fotoelastici si basa sull'interfacciamento di un polariscopio classico con un calcolatore

mediante l'impiego di una telecamera e di un digitalizzatore. In particolare si notano i seguenti componenti (Figura 2.6): un polariscopio classico con sorgente di luce monocromatica o bianca, una telecamera monocromatica o a colori (RGB), un digitalizzatore, un personal computer.

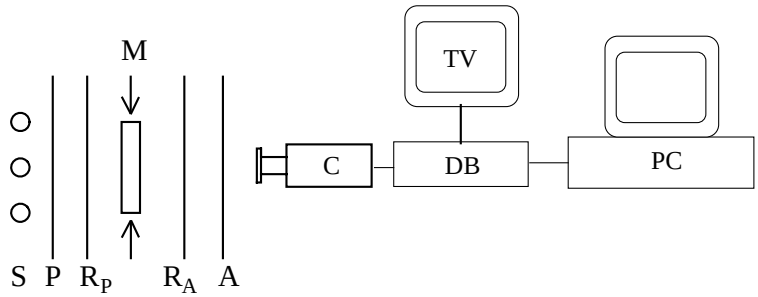


Figura 2.6: Sistema di acquisizione per la fotoelasticità digitale

L'immagine, emergente dal polariscopio, è acquisita dalla telecamera e digitalizzata in un numero elevato di elementi (almeno 512x512) rettangolari o quadrati chiamati *pixel* (*picture element*). Ad ogni pixel è assegnato un *livello di grigio* (corrispondente all'intensità luminosa acquisita dalla telecamera) compreso tra 0 e Z_{max} (=255 in genere).

2.6.2 La fotoelasticità RGB

La fotoelasticità RGB consente la determinazione del ritardo δ, mentre le isocline devono essere determinate con un metodo differente.
Il modello è posto in un polariscopio circolare classico, in genere a campo scuro (Figura 2.4). Le isocromatiche sono acquisite in luce bianca mediante una telecamera RGB che scompone l'immagine nei tre *colori primari* rosso, verde e blu (i cui livelli sono indicati con i simboli *R*, *G* e *B* in figura 2.7). A causa della nota attenuazione dei colori delle isocromatiche in luce bianca è possibile determinare, con lampade ad incandescenza, ritardi per ordini inferiori al 4°. Con le lampade a fluorescenza del tipo a risparmio energetico, a spettro discreto, si raggiungono ordini più elevati (almeno 12).

2.6.2.1. Procedura di taratura

La procedura di taratura consiste nell'acquisire i livelli R, G e B lungo la sezione trasversale di un provino soggetto a flessione. Si ottiene così una tabella di taratura, analoga alla carta dei colori riportata nelle Tabella 2.1 (cap.2.4), nella quale ad ogni ritardo Δ (o δ per data lunghezza d'onda di riferimento λo) è associato una terna di valori R, G e B.

2.6.2.2. Ricerca del ritardo

Durante l'analisi del modello fotoelastico si rilevano i livelli R_m, G_m e B_m nei punti ove il ritardo è incognito. Ogni terna R_m, G_m e B_m è quindi paragonata con le terne R_i, G_i e B_i memorizzate nella tabella di taratura. Il ritardo incognito è quello corrispondente ai valori R_i, G_i e B_i che minimizzano una funzione errore definita, per esempio, come

$$E_i = \left(R_i - R_m\right)^2 + \left(G_i - G_m\right)^2 + \left(B_i - B_m\right)^2 \qquad (2.15)$$

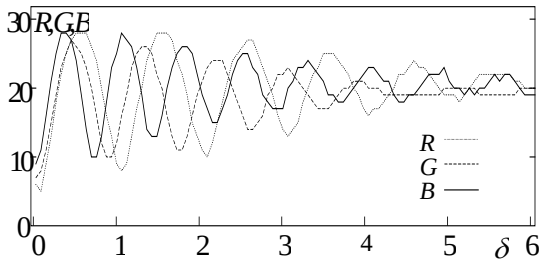


Figura 2.7: Livelli *R*, *G* e *B*, rilevati con lampada ad incandescenza, in funzione del ritardo δ (per λo = 589 nm).

2.6.3 La fotoelasticità a variazione di fase

La fotoelasticità a variazione di fase si basa sull'acquisizione di almeno quattro immagini con opportune disposizioni angolari degli elementi ottici del polariscopio. Essa consente di determinare contemporaneamente sia il parametro dell'isoclina sia il ritardo. I metodi riportati nel seguito si riferiscono invece alla determinazione delle sole isocline o del solo ritardo.

2.6.3.1 Determinazione del solo parametro dell'isoclina

Le isocline si determinano al polariscopio piano ad assi incrociati la cui intensità luminosa, fornita dalla (2.4), può essere generalizzata come:

$$I_i = I_f + I_o \sin^2 2(\theta - \omega_i) \sin^2 \pi\delta, \ (i = 1,2,...) \qquad (2.16)$$

dove I_f è la cosiddetta *intensità di fondo* e $I_0 = A^2$ [v. equazione (2.4)].

La (2.16) mostra che le incognite sono quattro (I_f, I_o, θ e δ) delle quali quella di interesse è il parametro dell'isoclina θ, di conseguenza bisogna effettuare almeno quattro acquisizioni. A tal fine si ruota il polariscopio piano ad assi incrociati e si effettuano quattro acquisizioni (I_1, I_2, I_3, I_4) in corrispondenza

ai valori di ω indicati in tabella 2.2 insieme alle intensità desunte dalla (2.16).

Tabella 2.2: Rilievo delle isocline con il metodo a variazione di fase: inclinazione del polariscopio e relative equazioni

ω	Equazione	
0°	$I_1 = I_f + I_o \sin^2 2(\theta - \omega_1) \sin^2 \pi\delta$	(2.17)
45°	$I_2 = I_f + I_o \sin^2 2(\theta - \omega_2) \sin^2 \pi\delta$	(2.18)
22,5°	$I_3 = I_f + I_o \sin^2 2(\theta - \omega_3) \sin^2 \pi\delta$	(2.19)
67,5°	$I_4 = I_f + I_o \sin^2 2(\theta - \omega_4) \sin^2 \pi\delta$	(2.20)

Dalle (2.17)-(2.20) si ottiene

$$I_2 - I_1 = I_o \sin^2 \pi\delta \cos 4(\theta - \omega_1) \qquad (2.21)$$

$$I_4 - I_3 = I_o \sin^2 \pi\delta \sin 4(\theta - \omega_1) \qquad (2.22)$$

Si ottiene così il parametro dell'isoclina nei punti nei quali $\sin\pi\delta \neq 0$:

$$\boxed{\theta = \frac{1}{4} arc\tan \frac{I_4 - I_3}{I_2 - I_1}} \qquad (2.23)$$

Data la periodicità della funzione tangente la (2.23) fornisce un angolo compreso tra $\pm$45°. Per ottenere l'usuale parametro dell'isoclina basta sommare 90° ai valori negativi.

2.6.3.2 Determinazione del solo ritardo δ

Si consideri un modello con un asse di simmetria disposto nel polariscopio come previsto dal *metodo di compensazione di Tardy* (Figura 2.8). L'intensità luminosa emergente, considerando anche l'intensità di fondo, risulta

$$I_i = I_f + \frac{I_o}{2}\left[1 - \cos(2\pi\delta - 2\beta_{Ai})\right], \ (\mathrm{i} = 1,2....) \qquad (2.24)$$

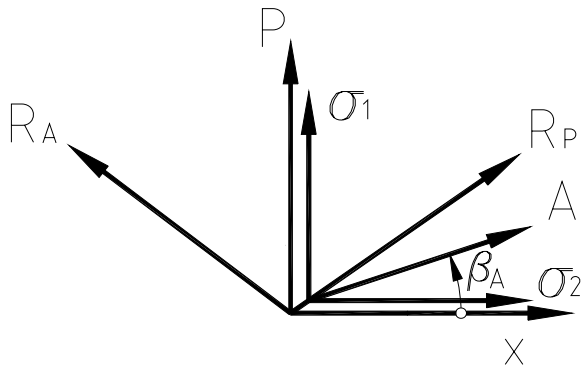


Figura 2.8: Disposizione degli elementi ottici per l'applicazione del metodo a variazione di fase ad un asse di simmetria (disposizione di Tardy).

La (2.24) mostra che le incognite sono tre (I_f, I_o, e δ) delle quali quella di interesse è il ritardo δ; di conseguenza bisogna effettuare almeno tre acquisizioni ruotando il solo analizzatore. Il metodo descritto nel seguito si basa su quattro acquisizioni (I_1, I_2, I_3, I_4) effettuate in corrispondenza ai valori di β_A riportati in tabella 2.3 insieme alle intensità desunte dalla (2.24).

Tabella 2.3: Rilevo del solo ritardo δ con il metodo a variazione di fase: inclinazione dell'analizzatoree relative equazioni.

β_A	Equazione		β_A	Equazione	
0°	$I_1 = I_f + \frac{I_o}{2}(1-\cos 2\pi\delta)$	(2.25)	45°	$I_2 = I_f + \frac{I_o}{2}(1-\sin 2\pi\delta)$	(2.26)
90°	$I_3 = I_f + \frac{I_o}{2}(1+\cos 2\pi\delta)$	(2.27)	-45	$I_4 = I_f + \frac{I_o}{2}(1+\sin 2\pi\delta)$	(2.28)

Dalle (2.25)-(2.28) si ricava per differenza:

$$I_4 - I_2 = I_o \sin 2\pi\delta \qquad (2.29)$$

$$I_3 - I_1 = I_o \cos 2\pi\delta \qquad (2.30)$$

da cui

$$\tan 2\pi\delta = \frac{I_4 - I_2}{I_3 - I_1} \tag{2.31}$$

Si ottiene così:

$$\delta = \frac{1}{2\pi} arc\tan \frac{I_4 - I_2}{I_3 - I_1} \tag{2.32}$$

Data la periodicità della funzione tangente la (2.32) fornisce il *ritardo frazionario* δ nel campo ±0,5 ordini (Figura 2.9, linea a tratti). Per determinare il ritardo effettivo si ricorre a procedure di *identificazione (unwrapping)* basate sull'eliminazione dei salti che si verificano nel passaggio da +0,5 a –0,5; si ottiene così il ritardo effettivo (Figura 2.9, linea continua).

2.6.3.3 Caratteristiche del metodo

I risultati sperimentali mostrano che, come per la fotoelasticità RGB, l'influenza del gradiente delle frange risulta trascurabile per gradienti fino a 0,1 ordini/pixel. Nella letteratura è citata un'incertezza di 0,02-0,05 ordini di frangia per le isocromatiche e di 2° per le isocline.

Il metodo richiede almeno quattro acquisizioni e quindi non può essere impiegato per l'analisi di campi tensionali variabili nel tempo.

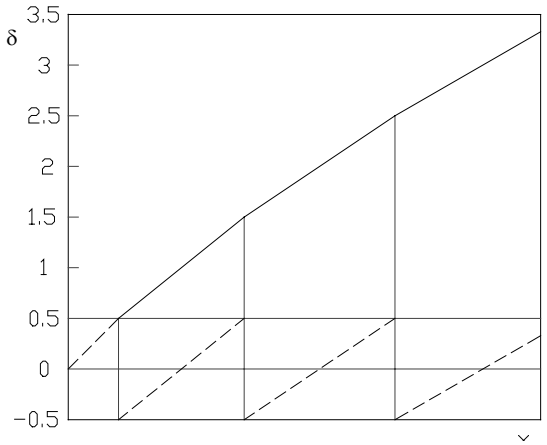


Figura 2.9: Ritardo frazionario (-----) e ritardo effettivo(——) ottenuto applicando al ritardo frazionario la procedura di *identificazione* (*unwrapping*) basata sull'eliminazione dei salti subiti dal ritardo frazionario.

2.7. Il trasferimento dei risultati dal modello al prototipo

Il fotoelasticità le prove sono effettuate su un *modello* che differisce dalla struttura reale (*prototipo*). Per trasferire i risultati ottenuti su ul modello al prototipo occorre determinare:

- le condizioni di similitudine tra modello e prototipo,
- le formule di trasferimento dei risultati,

Per materiali elastici, omogenei e isotropi, e strutture a comportamento lineare (tensioni proporzionali ai carichi) soggette a forze applicate ai contorni devono essere soddisfatte le seguenti condizioni:

- similitudine geometrica tra modello e prototipo,
- similitudine dei carichi tra modello e prototipo,
- uguaglianza, in generale, dei coefficienti di Poisson.

Nota sull'influenza del coefficiente di Poisson - In generale è richiesta anche l'eguaglianza dei coefficienti di Poisson di modello e prototipo: $\nu_m = \nu_p$.

Tale condizione non è però necessaria in molti casi pratici. L'analisi mostra infatti che nel caso di corpi *a connessione semplice* le tensioni non dipendono dal coefficiente di Poisson a condizione che le forze di massa siano nulle, costanti (es. forza di gravità) o derivanti da un potenziale armonico (un esempio importante di forza di massa non derivante da un potenziale armonico è la forza centrifuga). Nel caso di corpi a *connessione multipla,* in aggiunta alle condizioni precedenti, è necessario che anche la risultante delle forze esterne agenti su ogni contorno sia nulla.

Soddisfatte le condizioni di similitudine le tensioni si trasferiscono al prototipo mediante una delle seguenti relazioni dove *P* indica un carico, *l* indica una dimensione e i pedici *p* ed *m* si riferiscono rispettivamente al prototipo e al modello:

$$\sigma_p = \sigma_m \left(\frac{l_m}{l_p}\right)^2 \frac{P_p}{P_m} \quad \sigma_p = \sigma_m \frac{l_m}{l_p}\frac{d_m}{d_p}\frac{P_p}{P_m} \qquad (2.33), (2.34).$$

La relazione (2.34) si usa quando (caso usuale di modelli bidimensionali) lo spessore *d* non è in scala con le altre dimensioni nel piano del modello

2.8 I rivestimenti fotoelastici

La tecnica dei rivestimenti fotoelastici consente di determinare le tensioni alla superficie di componenti bi e tridimensionali in qualsiasi materiale. A tal

fine (Figura 2.10) una lamina fotoelastica di piccolo spessore viene collegata alla struttura mediante un collante riflettente.

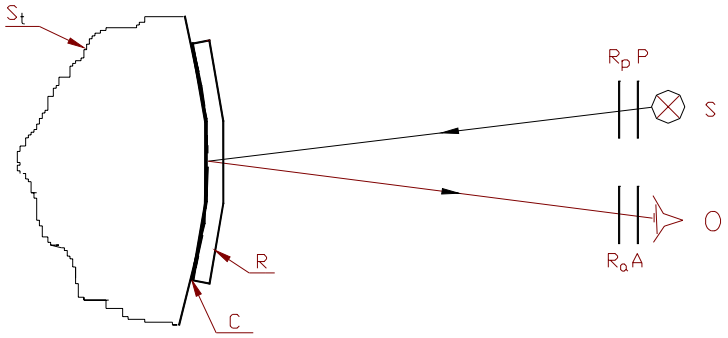


Figura 2.10: Polariscopio a riflessione (C=collante riflettente, P,A=polarizzatori, R=rivestimento birifrangente, O=osservatore, Ra,Rp=lastre quarto d'onda, S=sorgente, St=struttura)

L'osservazione della lamina al polariscopio a riflessione consente di determinare le isocromatiche e le isocline dalle quali si risale allo stato di deformazione e di tensione alla superficie della struttura.

2.8.1 L'effetto fotoelastico nel rivestimento

La struttura trasferisce lo stato di deformazione superficiale alla lamina. Le deformazioni all'interfaccia struttura – lamina coincidono, inoltre se la lamina è sufficientemente sottile tali deformazioni non variano nello spessore della lamina stessa. Essendo le deformazioni un invariante per struttura e lamina la legge dell'effetto fotoelastico si esprime in funzione della differenza delle deformazioni principali:

$$\boxed{\delta = \frac{K 2d}{\lambda}\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)} \tag{2.35}$$

dove K è la costante fotoelastica riferita alle deformazioni e d è lo spessore del rivestimento.
Nota la differenza delle deformazioni principali si ricava la differenza delle tensioni principali nella struttura, in materiale isotropo, mediante la legge di Hooke, scritta in forma di differenza, dove il pedice s si riferisce all struttura:

$$\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)_s = \frac{E_s}{1+\nu_s}\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right) \tag{2.36}$$

2.8.2 Scelta dello spessore ed effetto rinforzante

Lo spessore del rivestimento è in genere compreso tra 0,5 e 3 mm. All'aumentare dello spessore del rivestimento aumenta il numero di frange, per contro la deformazione non si mantiene costante nello spessore della lamina. La scelta dello spessore nasce quindi dall'esigenza di avere un ritardo apprezzabile con deformazioni costanti nello spessore.
Inoltre all'aumentare dello spessore aumenta *l'effetto rinforzante* del rivestimento che altera il campo di deformazione rendendo le deformazioni misurate in presenza del rivestimento diverse da quelle che si hanno in assenza del rivestimento. Tal effetto dipende dal campo tensionale e dalle caratteristiche elastiche e geometriche della struttura e del rivestimento. Per minimizzare l'effetto rinforzante basta scegliere lo spessore convenientemente piccolo; in taluni casi è possibile applicare dei coefficienti correttivi.

2.8.3 Tecniche sperimentali

Il rilievo dei dati fotoelastici, isocline ed isocromatiche, si effettua con le note tecniche della fotoelasticità bidimensionale utilizzando però il polariscopio a riflessione; in particolare si utilizza il polariscopio piano ad assi incrociati per il rilievo delle isocline ed il polariscopio circolare per il rilievo delle isocromatiche. Dato il piccolo spessore del rivestimento si ha un numero ridotto di isocromatiche e si fa quindi uso dei metodi di compensazione e dell'osservazione in luce bianca; si utilizzano altresì i metodi della fotoelasticità digitale (v. cap.2.6).

NOTE

Capitolo 3

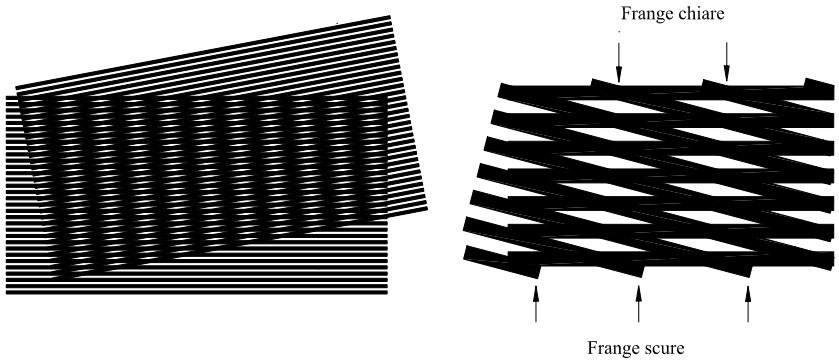
Metodi del moiré

3.1 Introduzione

3.1.1 Principio

Tali metodi si basano sull'effetto moiré che si verifica quando si sovrappongono due griglie. Si formano così le *frange moiré* che nel caso di griglie a bassa frequenza sono dovute alla semplice *interferenza meccanica* (*occlusione)* tra le linee delle due griglie (Figura 3.1).

In particolare nei punti in cui le linee opache di una griglia si sovrappongono alle linee trasparenti dell'altra griglia si forma una frangia moiré *scura*, invece nei punti in cui le linee opache delle due griglie coincidono si forma una frangia moiré *chiara* (Figura 3.1b).



(a) (b)

Figura 3.1: Frange moiré nel caso di griglie aventi lo stesso passo ma formanti un angolo diverso da 0° (a), formazione delle frange (b)

Tali frange sono unicamente legate al campo degli spostamenti di una griglia rispetto all'altra. Nel caso di griglie ad elevata frequenza (*moiré interferometrico*) la formazione delle frange moiré si basa sui fenomeni di interferenza e di diffrazione dei campi luminosi.
In genere una griglia è solidale con il componente da analizzare e si deforma con esso (GM - *griglia del modello*) mentre l'altra griglia, non deformandosi, funge da riferimento (GR - *griglia di riferimento*).
Numerosi sono i testi dedicati ai metodi del moiré[3.1-3.5] in aggiunta ai riferimenti generali [0.1-0.6].

3.1.2 Tipo di informazione sperimentale e relazioni caratteristiche

In generale i metodi del moiré sono metodi a campo intero adatti, a secondo del tipo, al rilievo degli spostamenti, delle rotazioni e della forma dei componenti. Si hanno così i seguenti tipi di moiré:

- *moiré geometrico* piano (a bassa sensibilità) che fornisce le componenti *u* e *v* dello spostamento nel piano;
- *moiré interferometrico* (ad alta sensibilità) che fornisce le componenti *u* e *v* dello spostamento nel piano;
- *moiré per riflessione* che fornisce le componenti φ_x e φ_y della rotazione nelle piastre inflesse (rese speculari);
- *moiré ombra* (o a proiezione) che fornisce le linee di livello del componente analizzato rispetto alla griglia di riferimento.

Nel moiré piano (geometrico o interferometrico) le frange moiré sono il luogo dei punti a componente di spostamento costante in direzione ortogonale alle linee della griglia di riferimento (*isotetiche*). Tali frange forniscono le componenti u e v dello spostamento per mezzo delle relazioni:

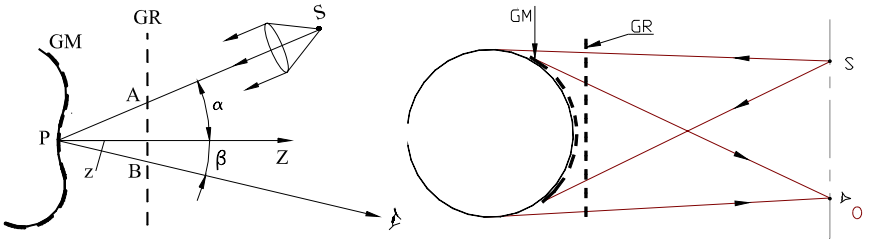
$$u = pN_x, \quad v = pN_y \qquad (3.1), (3.2)$$

dove *p* è il passo della griglia di riferimento ed N_x, N_y sono gli ordini delle frange moiré determinate, di solito in due esperienze diverse, con griglia di riferimento ortogonale rispettivamente all'asse *x* e all'asse *y*.
Nel moiré a riflessione per piastre inflesse le frange nascono dalla sovrapposizione fotografica tra la griglia di riferimento che è l'immagine riflessa dalla piastra indeformata di GR e la griglia del modello (GM) che è l'immagine riflessa dalla piastra deformata (sempre di GR) sotto l'azione del carico.
Nel moiré ombra le frange moiré sono dovute all'interferenza meccanica tra la griglia di riferimento e la sua ombra (griglia del modello) proiettata sul componente da analizzare (figura 3.2). Soddisfatte alcune condizioni relative alla geometria del sistema di illuminazione e di osservazione le frange moiré

sono le linee di livello del componente rispetto alla griglia di riferimento. La distanza z dalla griglia di riferimento risulta:

$$z = KpN \qquad (3.3)$$

dove K è un costante che dipende dalla disposizione sperimentale, p è il passo della griglia di riferimento, N è l'ordine di frangia.



(a) (b)

Figura 3.2: Moiré ombra: schemi con sorgente ed osservatore all'infinito (a) e a distanza finita (b)

3.1.3 Campi tensionali esaminabili

I metodi del moiré sono applicabili in campo elastico (compatibilmente con la sensibilità richiesta) e plastico. In particolare il moiré geometrico piano è adatto al rilievo di spostamenti in campo elastico su materiali a basso modulo di Young (Plexiglass, etc) e di spostamenti in campo plastico su materiali metallici. Il moirè interferometrico consente il rilievo degli spostamenti in campo elastico sui materiali ad elevato modulo di Young.

3.1.4 Materiali esaminabili

Il metodo del moiré piano è applicabile a materiali trasparenti (analisi a trasmissione) ed opachi (analisi a riflessione) su componenti con superficie di analisi, avente una buona finitura superficiale. Nel caso del moiré a riflessione per piastre inflesse è richiesta una finitura speculare. Infine nel caso del moiré ombra è opportuno l'uso di una vernice bianca sul componente.

3.1.5 Altre caratteristiche

Il metodo del moiré è una tecnica da laboratorio anche se non mancano disposizioni sperimentali adatte all'uso in ambiente industriale. La frequenza tipica delle griglie moiré è di circa 20-40 linee/mm e di 1000-2000 linee/mm (limite teorico $2/\lambda$) per il moiré piano rispettivamente geometrico ed interferometrico. La sensibilità tipica (spostamento/ordine di frangia) è

dell'ordine di 0,5/25/100 μm rispettivamente per il moiré interferometrico, geometrico ed ombra. In genere la stabilità meccanica deve essere tale da avere vibrazioni piccole rispetto al passo della griglia. Ai metodi del moiré sono applicabili svariati metodi di elaborazione automatica delle immagini quali il metodo della trasformata di Fourier e il metodo a variazione di fase.

3.2. Il moiré geometrico

3.2.1 Le griglie

Una *griglia moiré* (*grating*) è costituita in genere da un insieme di linee rette parallele nere (o opache) separate da linee bianche (o trasparenti) di uguale spessore. Una griglia è definita dal *passo p* che è la distanza tra due punti corrispondenti della griglia (p.es. distanza tra due linee nere). L'inverso del passo *F=1/p* è la *frequenza* (spaziale) della griglia; l'usuale frequenza delle griglie riguardanti il moiré geometrico è compresa tra 1 e 40 linee/mm a secondo del valore della deformazione da misurare. Di solito la direzione ortogonale alle linee della griglia si chiama *direzione principale.*

3.2.2 Griglie allineate aventi passi differenti

Le due griglie sono allineate ($\theta=0$) ma hanno passi differenti ($p_{GM} = p'$, $p_{GR} = p$). Questo caso si verifica nel caso di un provino soggetto a sforzo normale di trazione o di compressione. Inizialmente la griglia del modello e la griglia di riferimento hanno lo stesso passo, cioè:

$$p_{GM} = p_{GR} = p \tag{3.4}$$

Dopo l'applicazione del carico, la griglia del modello si deforma e di conseguenza il passo diviene:

$$p_{GM} = p' \tag{3.5}$$

In tal caso si formano frange moirè (Figura 3.3) parallele alle linee delle due griglie ed equidistanti aventi distanza *d* (passo delle frange moiré). Si ha che:

- le frange moiré sono il luogo dei punti che subiscono uguale componente di spostamento lungo la direzione principale della griglia di riferimento;
- la componente di spostamento è data dalle (3.1) e (3.2) rispettivamente per griglia diretta secondo gli assi y e x.

Si può dimostrare che il passo *p'* della griglia deformata è legato al passo *p* indeformato e alla distanza d delle frange moiré dalla seguente relazione:

$$p' = \frac{d}{d \mp p} p \tag{3.6}$$

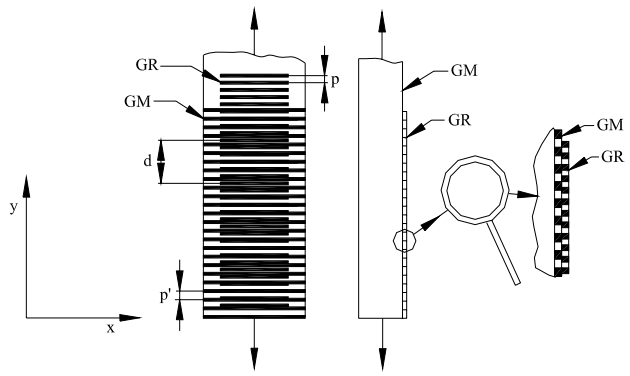


Figura 3.3: Frange moiré nel caso di griglie allineate aventi passi differenti (trazione o compressione semplice).

dove i segni superiore e inferiore si riferiscono rispettivamente alla trazione e alla compressione.
La deformazione subita dal provino risulta tenendo conto della (3.6):

$$\varepsilon = \frac{p' - p}{p}, \text{ cioè } \varepsilon = \pm\frac{p}{d \mp p} \qquad (3.7)\ (3.8)$$

che per il caso usuale di $p << d$ diviene

$$\boxed{\varepsilon \cong \pm\, p/d} \qquad (3.9)$$

La (3.9) è la formula usuale del moiré che consente il calcolo della deformazione noto il passo p dell griglia di riferimento e misurata la distanza d tra le frange moiré[1].

Deformazioni lagrangiane ed euleriane
La deformazione ε fornita dalla (3.7) riferisce la variazione di lunghezza alla lunghezza iniziale p. Nella definizione *euleriana* invece la variazione di lunghezza viene riferita alla lunghezza finale, cioè:

$$\varepsilon^E = \frac{p' - p}{p'} \qquad (3.10)$$

che utilizzando la (3.6) diviene:

$$\boxed{\varepsilon^E = \pm\frac{p}{d}} \qquad (3.11)$$

[1] Per un esempio si veda l'esercizio 3.1, cap. 9

La (3.11) mostra che la classica formula del moiré, già ricavata come approssimazione [eq.(3.9)] della deformazione lagrangiana, fornisce in modo rigoroso la deformazione euleriana. Questa conclusione è generale cioè:

il metodo moiré fornisce sempre deformazioni di tipo euleriano dato che in generale le frange moiré si determinano sul corpo deformato cioè in un riferimento euleriano.

3.2.3 Griglie inclinate aventi passi uguali

Le due griglie hanno passi uguali ($p_{GM} = p_{GR} = p$) ma sono inclinate ($\theta \neq 0$). Questo caso interessa l'analisi delle deformazioni in un provino soggetto a sforzo di taglio. Inizialmente le due griglie sono allineate. Dopo l'applicazione del carico, la griglia del modello ruota di un angolo θ. In tal caso si formano frange moirè (Figura 3.4) che, come si vedrà nel seguito, sono all'incirca ortogonali alle linee della griglia di riferimento. Tali frange solo altresì equidistanti con distanza *d* (passo delle frange moiré).

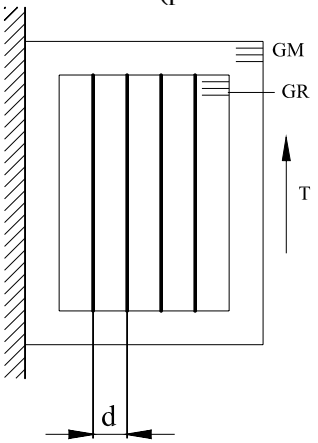


Figura 3.4: Frange moiré nel caso di semplice rotazione

Considerando le le due griglie riportate in figura 3.5 è facile verificare che:

1. le frange moiré chiare sono dirette secondo le diagonali minori dei rombi formati dalle linee delle due griglie (figura 3.5-a);
2. l'angolo ϕ che le frange moiré formano rispetto alle linee della griglia di riferimento risulta $\phi = 90° + \theta/2$ (3.12)
   dove θ è l'angolo di rotazione tra le due griglie, di conseguenza per

θ piccolo le frange moiré sono all'incirca ortogonali alle linee della griglia di riferimento;

3. sempre per θ piccolo si può dimostrare che si ha $\theta = \frac{p}{d}$ (3.13)
4. le frange moiré sono sempre il luogo dei punti che subiscono uguale componente di spostamento in direzione ortogonale alle linee della griglia di riferimento,
5. la componente dello spostamento si ricava sempre utilizzando le relazioni (3.1) e (3.2).

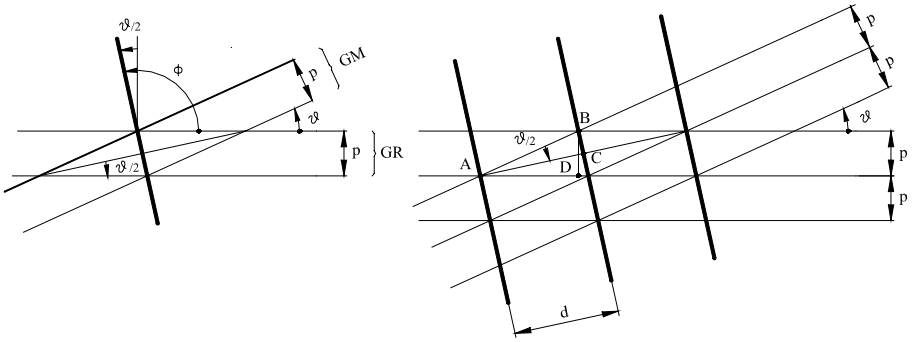


Figura 3.5:Formazione delle frange moiré nel caso di semplice rotazione

3.2.4 Frange moiré nel caso di deformazione non omogenea

Nel caso generale la deformazione non è *omogenea* cioè il passo e la rotazione della griglia del modello variano da punto a punto. Ciò significa che la griglia del modello, inizialmente rettilinea e coincidente con quella di riferimento, si trasforma in una griglia costituita da linee curve (Figura 3.6).
Anche le frange moiré sono in generale curve ed in particolare le frange moiré chiare sono dirette, al solito, secondo le diagonali minori dei quadrilateri formati dalle linee delle due griglie. Anche nel caso generale si ha che:

1. le frange moiré sono sempre il luogo dei punti che subiscono uguale componente di spostamento in direzione ortogonale alle linee della griglia di riferimento,
2. la componente dello spostamento si ricava sempre utilizzando le relazioni (3.1) e (3.2).

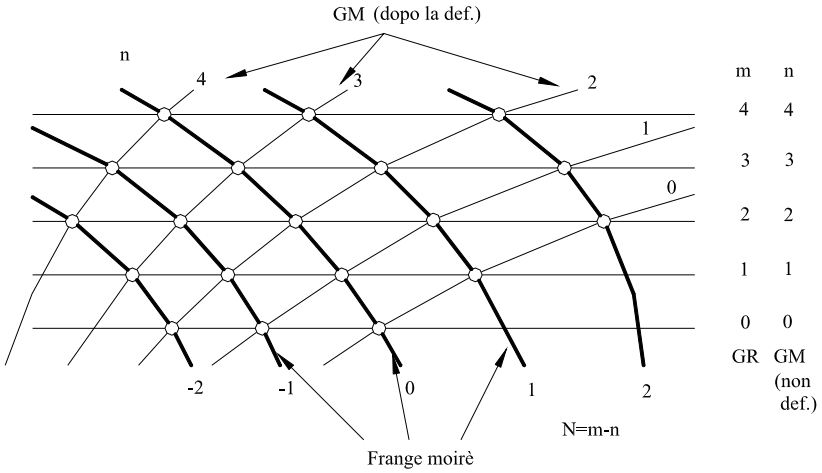


Figura 3.6: Formazione dell frange moiré nel caso generale di deformazione non omogenea

3.2.5 La determinazione delle deformazioni

Si consideri un corpo soggetto a stato piano di tensione (Figura 3.7) sul quale viene applicata in modo opportuno la griglia del modello, con linee dirette secondo l'asse delle y e si ponga a contatto una griglia uguale detta griglia di riferimento. Caricando il modello si ottengono le frange moiré che in questo caso sono le linee *u = costante*. Si ripeta l'esperienza applicando ora su di un modello identico una griglia parallela all'asse delle x: si ottengono così le frange moiré *v= costante*.

Le frange suddette, che sono il luogo dei punti a componente di spostamento costante in direzione ortogonale alle linee della griglia di riferimento, sono chiamate *isotetiche*.

Tali frange forniscono le componenti *u* e v dello spostamento per mezzo delle relazioni (3.1) e (3.2).

Il metodo moiré, in questo caso denominato *moiré piano*, consente di determinare con due esperienze il campo degli spostamenti nel piano sul quale è applicata la griglia del modello. Noti gli spostamenti si determinano le deformazioni utilizzando le note relazioni deformazioni-spostamenti che nel caso di deformazioni piccole sono date dalle seguenti relazioni:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial x},\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (3.13)\text{-}(3.15)$$

che tenendo conto delle (3.1), (3.2) forniscono:

$$\varepsilon_x = p\frac{\partial N_x}{\partial x},\quad \varepsilon_y = p\frac{\partial N_y}{\partial y},\quad \gamma_{xy} = p\left(\frac{\partial N_x}{\partial y} + \frac{\partial N_y}{\partial x}\right) \qquad \text{(3.16)-(3.18)}$$

Per determinare il campo delle deformazioni è quindi necessaria un'operazione di *derivazione numerica* in modo da determinare le quattro derivate dell'ordine di frangia che compaiono nelle relazioni (3.16)-(3.18).
Nel caso di grandi deformazioni e di grandi rotazioni bisogna utilizzare le relazioni (*euleriane*)appropriate. In ogni caso però nel calcolo delle deformazioni intervengono le stesse quattro derivate presenti nelle relazioni (3.16)-(3.18).

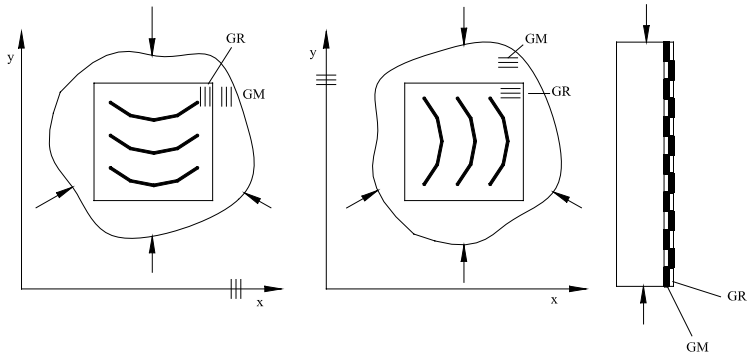


Figura 3.7: Determinazione delle isotetiche (frange moiré)

3.2.6 Sovrapposizione delle griglie

Le due griglie, del modello GM e di riferimento GR, sono sovrapposte mediante uno dei seguenti metodi (Figura 3.8): sovrapposizione meccanica, sovrapposizione ottica, sovrapposizione fotografica.
Nella sovrapposizione meccanica (Figura 3.8-a) le due griglie sono a contatto eventualmente con l'interposizione di un sottile strato di olio. Si tratta del metodo più semplice che non risente delle vibrazioni ambientali.
Nella sovrapposizione ottica (Figura 3.8-b) si usa una macchina fotografica di grande formato che porta incisa sul vetro smerigliato la GR. La macchina viene disposta in modo da ottenere un'immagine a scala 1:1 del modello e della relativa GM. Sul vetro smerigliato si ha quindi la sovrapposizione ottica della GR con l'immagine di GM. E' così possibile realizzare in modo semplice variazioni di passo e rotazioni; per contro il sistema è sensibile agli spostamenti relativi tra provino e macchina fotografica.
Nella sovrapposizione fotografica (Figura 3.8-c) il modello sul quale è impressa la griglia viene ripreso due volte prima e dopo l'applicazione del

carico. Si registrano così la griglia indeformata che funge da GR e la griglia deformata che funge da GM. Tale disposizione si usa per esempio nella tecnica moire per piastre inflesse.

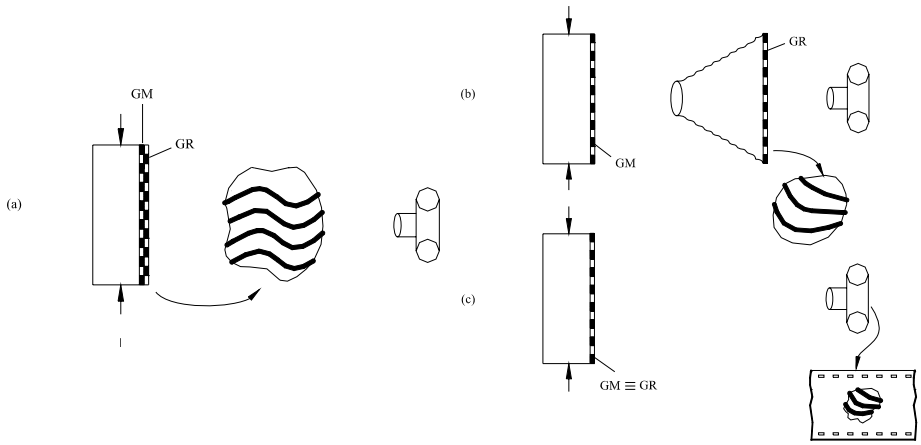


Figura 3.8: Metodi di sovrapposizione delle griglie: (a) sovrapposizione meccanica, (b) sovrapposizione ottica, (c) sovrapposizione fotografica.

3.3 Moiré ombra

Nel moiré ombra le frange moiré sono dovute all'interferenza meccanica tra la griglia di riferimento e la sua ombra (griglia del modello) proiettata sul componente da analizzare (Figura 3.2). Di solito si usano griglie aventi frequenza *F=10-20* linee/mm. Con un'opportuna disposizione del set up sperimentale, le frange sono le *linee di livello* che individuano la forma del corpo. Rilevando quindi le linee di livello prima e dopo l'applicazione del carico è possibile ottenere anche la componente dello spostamento *fuori del piano w*. Come variante la griglia può essere proiettata sul corpo; si parla allora di *moiré a proiezione*.

Illuminazione ed osservazione in luce parallela

In questo caso (Figura 3.2a) l'illuminazione è in luce parallela mentre l'osservatore è all'infinito. In tali condizioni l'angolo α che la direzione di illuminazione forma con la normale alla griglia è costante per tutti i punti del corpo, così pure costante è l'angolo β che la direzione di osservazione forma con la suddetta normale. Le frange moiré sono dovute all'interferenza

meccanica tra la griglia di riferimento e la griglia del modello (ombra della griglia di riferimento). La relazione tra distanza *z* e ordine di frangia *N* risulta:

$$\boxed{z = \frac{p}{\tan\alpha + \tan\beta} N} \qquad (3.19)$$

La (3.19) conferma, come detto, che in questo caso le frange moiré sono le linee di livello della superficie del corpo rispetto alla griglia di riferimento.
Una relazione analoga si ricava nel caso di sorgente ed osservatore al finito purchè su di un piano parallelo alla griglia di riferimento (figura 3.3b)

3.4. Interferometria moirè

3.4.1 Generalità

La sensibilità del moirè geometrico, come già detto, è bassa dato che si basa sull'impiego di griglie a bassa frequenza. L'interferometria moirè si basa invece sull'impiego di griglie di elevata frequenza. L'impiego di griglie di riferimento (*griglie virtuali*) aventi frequenza dell'ordine di 2000 linee /mm è abbastanza comune in tale tecnica. La semplice interpretazione geometrica del meccanismo di formazione delle frange [basato sull'interferenza meccanica (occlusione) delle linee delle griglie del modello e di riferimento] è però incompleta. L'interferometria moirè si basa sull'impiego della *luce coerente* e richiede la conoscenza dei concetti riguardanti l'*interferenza* ottica e la *diffrazione* ottica. L'interpretazione delle frange è però la stessa di quella relativa al moiré geometrico.

3.4.2 Interferometria moirè: spiegazione elementare

La disposizione sperimentale tipica dell'interferometria moirè è riportata in figura 3.9 Sul provino è riportata la griglia del modello avente passo $p_m = 1/F_m$ dove F_m è la frequenza. Il provino è illuminato da due fasci piani di luce coerente disposti simmetricamente rispetto alla normale al provino, cioè con inclinazioni $+\alpha$ e $-\alpha$.
I due fasci interferiscono otticamente tra di loro: all'intersezione con il provino si forma un sistema di frange di interferenza (parallele all'asse y) che costituisce la *griglia virtuale di riferimento* avente frequenza :

$$F = \frac{1}{p} = \frac{2}{\lambda}\sin\alpha \qquad (3.20)$$

L'angolo α viene scelto in modo tale che la griglia di riferimento abbia frequenza doppia di quella relativa alla griglia del modello: $F=2F_m$. Le due griglie, come nel moirè geometrico, danno luogo ad un sistema di frange moirè che può essere ripreso mediante un opportuno sistema ottico (macchina fotografica, telecamera). Nel caso specifico, essendo $F=2F_m$, le frange moirè corrispondono a quelle del moirè geometrico con *una moltiplicazione 2x* (si dimostra infatti che per raddoppiare il numero di frange basta raddoppiare la frequenza di una sola delle due griglie).

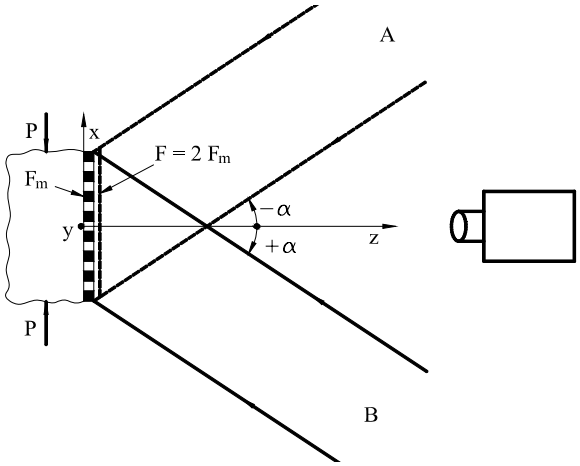


Figura 3.9: Schema della disposizione sperimentale per l'interferometria moirè.

Gli spostamenti sono dati dalla (3.1) essendo *p* il passo della griglia virtuale di riferimento. Ripetendo l'esperienza ruotando il provino di 90° si ottiene la componente di spostamento *v* mediante la (3.2).
Pur essendo la spiegazione elementare i risultati sono corretti. Per un'interpretazione più aderente alla realtà bisogna però utilizzare i concetti di interferenza e diffrazione [2.6, 3.4].

Capitolo 4

Olografia

4.1 Introduzione

4.1.1 Principio

L'olografia è un metodo di registrazione e di ricostruzione dei campi luminosi basato sui fenomeni di interferenza e di diffrazione della luce. Per mezzo dell'interferometria olografica è possibile paragonare due stati diversi, deformato e non deformato, di un solido.
L'olografia, inventata da Dennis Gabor nel 1948, si è sviluppata a partire dagli anni '60 dopo l'invenzione del laser. Numerosi sono i testi dedicati all'olografia e all'interferometria olografica [4.1-4.7] in aggiunta ai riferimenti generali [0.1-0.6].

4.1.2 Tipo di informazione sperimentale e relazioni caratteristiche

L'interferometria olografica (I.O.) consente il rilievo del campo degli spostamenti attraverso l'analisi delle frange di interferenza che si osservano in fase di *ricostruzione* dell'*ologramma*. Infatti si ha la formazione di frange scure (interferenza distruttiva) nei punti in cui *la variazione di cammino ottico* Δ soddisfa la relazione:

$$\Delta = N\lambda \tag{4.1}$$

dove N è l'ordine di frangia che assume i seguenti valori rispettivamente per I.O. ad *esposizione semplice*, *doppia* e *a media temporale*:

$$N = n,\ \ \mathrm{N} = \frac{2\mathrm{n}+1}{2},\ \ N \approx \frac{2n+1}{2} + 0{,}25\ \ (\text{n intero}) \quad (4.2)\text{-}(4.4)$$

Noto l'ordine di frangia è possibile ricavare il campo degli spostamenti.

4.1.3 Campi tensionali e materiali esaminabili

Le frange di interferenza dipendono dalle tre componenti di spostamento (*u, v, w*). La sensibilità alla componente fuori del piano è più elevata di quella alle componenti nel piano (*u, v*). L'I.O. è quindi particolarmente adatta alla misura degli spostamenti *fuori del piano w*.
Data l'elevata sensibilità l'I.O. è adatta al rilievo degli spostamenti in campo elastico. Non esistono particolari limitazioni sui materiali e sulla loro finitura. E' opportuno l'uso di una vernice bianca opaca sul componente da analizzare.

4.1.4 Altre caratteristiche

L'interferometria olografica è una tecnica a campo intero tipica da laboratorio. La stabilità meccanica deve essere elevata essendo consentiti spostamenti spuri piccoli rispetto alla lunghezza d'onda della luce impiegata. La sensibilità tipica (spostamento/ordine di frangia) è dell'ordine di 0,5 μm.
All'interferometria olografica sono applicabili in fase di *ricostruzione* svariati metodi di elaborazione automatica. In fase di *registrazione* (per la descrizione dell'olografia si veda il cap. 4.2) invece l'olografia è fortemente limitata dal procedimento fotografico necessario a registrare l'ologramma. Lo sviluppo dell'*olografia digitale* con la registrazione dell'ologramma su CCD (*Charged Coupled Device*) invece che su lastre fotografiche potrebbe dare nuovo impulso all'interferometria olografica [4.7].

4.2 Principi fisici dell'olografia

Un modo semplice per introdurre l'olografia è quello di considerare la differenza con la *fotografia*. Si consideri un oggetto (Figura 4.1-a) illuminato da un campo luminoso *monocromatico*. La luce riflessa in modo diffuso dall'oggetto è caratterizzata dall'*ampiezza* e dalla *fase*. Una lastra fotografica *L* (Fig. 4.1-a), che riceve il campo proveniente dall'oggetto, risulterà esposta in modo abbastanza uniforme. Le informazioni di ampiezza e di fase del campo originario proveniente dall'oggetto sono quindi perdute.

Fotografia - Se si interpone tra oggetto e lastra (Figura 4.1-b) uno schermo con un piccolo foro (macchina fotografica a *foro stenopeico*) o meglio un obiettivo fotografico si realizza il classico procedimento fotografico, si registra cioè sulla lastra l'immagine dell'oggetto. La fotografia è una registrazione parziale del campo luminoso proveniente dall'oggetto dato che le emulsioni fotografiche, come tutti gli altri ricevitori ottici, sono sensibili solo all'intensità luminosa che è proporzionale al quadrato dell'ampiezza e quindi l'informazione di fase viene perduta.

Olografia - Per mezzo dell'olografia è invece possibile registrare le informazioni sia di ampiezza sia di fase della luce proveniente da un oggetto.

Registrazione dell'ologramma – In tale fase il campo luminoso proveniente da una sorgente di luce *coerente* (di solito un laser) viene diviso (Figura 4.1-c) per mezzo di un semispecchio in due campi: il *campo di riferimento* E_r, che arriva direttamente sulla lastra fotografica, ed il *campo oggetto* E_o, che illumina l'oggetto ed è da questo riflesso sulla lastra. In corrispondenza della lastra i due campi, se sono soddisfatti i requisiti di coerenza, *interferiscono otticamente* dando luogo ad un sistema di microscopiche frange di interferenza che contiene le informazioni di ampiezza e di fase della luce proveniente dall'oggetto. La lastra, dopo il normale sviluppo fotografico, costituisce l'*ologramma* che contiene in forma codificata (sistema di frange di interferenza) tutte le informazioni del campo luminoso proveniente dall'oggetto.

Ricostruzione dell'ologramma – In questa fase l'ologramma, rimesso nella posizione iniziale e illuminato con il solo campo di riferimento (detto ora *campo di ricostruzione*), si comporta come un *reticolo di diffrazione*; il campo di riferimento subisce cioè il fenomeno della diffrazione (Figura 4.1-d). Una parte di tale luce diffratta è una *replica* del campo originario E_o proveniente dall'oggetto.

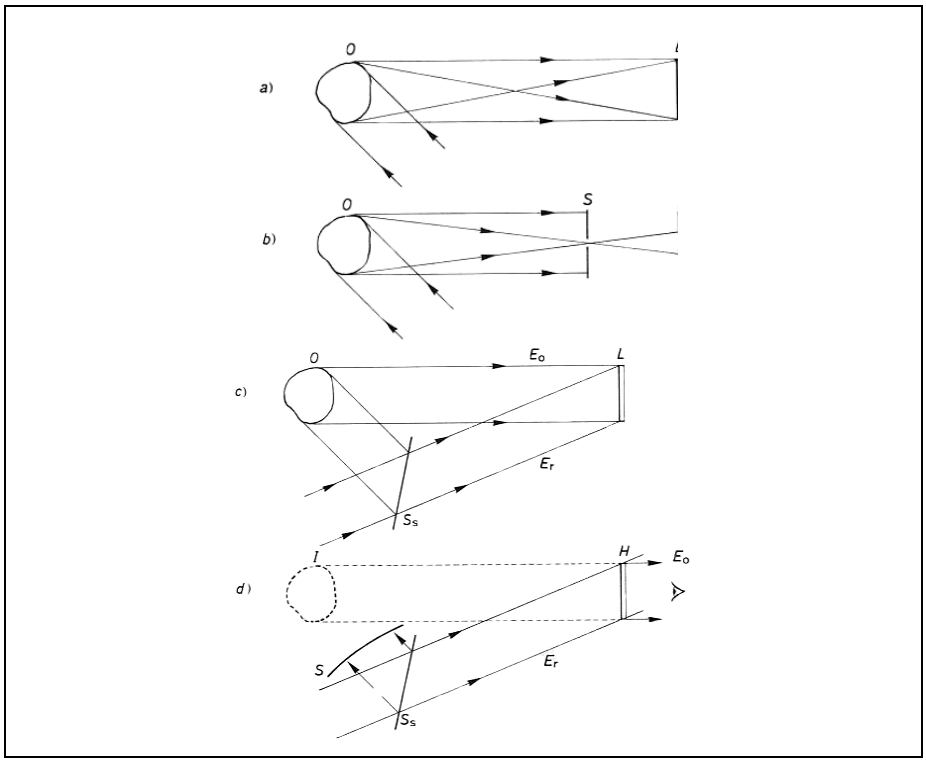


Figura 4.1: Paragone tra fotografia e olografia: (a) esposizione diretta di una lastra fotografica, (b) fotografia, (c)-(d) olografia (c = registrazione dell'ologramma, d = ricostruzione dell'ologramma)

Lo schema di cui alla figura 4.1-c,d si riferisce alla tecnica di illuminazione con fascio di riferimento "fuori asse", formante cioè un certo angolo con il campo oggetto. L'osservatore posto dietro l'ologramma percepisce una replica del campo oggetto, che impropriamente viene chiamato *immagine primaria* dell'oggetto (*virtuale* in figura 4.1-d), non distinguibile dal campo oggetto originario.
L'ologramma si comporta come una "finestra" attraverso la quale l'osservatore può vedere l'immagine ricostruita sotto diverse angolazioni proprio come se osservasse l'immagine diretta (Figura 4.2).

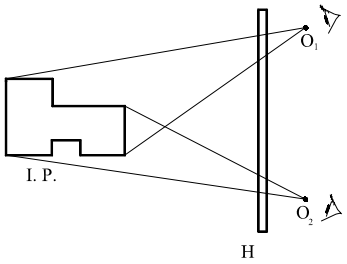


Figura 4.2: Effetti tridimensionali dell'immagine ricostruita da un ologramma (H): spostando il punto di vista da O_1 a O_2 varia l'immagine percepita (I.P.= immagine primaria ricostruita)

4.3. Le equazioni dell'olografia

4.3.1 Registrazione dell'ologramma

Durante la fase di registrazione dell'ologramma (Figura 4.3-a) arrivano sulla lastra fotografica i campi, oggetto E_o e di riferimento E_r, che si suppongono monocromatici e coerenti. L'intensità luminosa I sulla lastra dipende dai due campi oggetto e di riferimento, cioè indicando con* il complesso coniugato dei campi:

$$I = E_r E_r^* + E_o E_o^* + E_r^* E_o + E_r E_o^* \tag{4.5}$$

che può anche scriversi:

$$\boxed{I = A_r^2 + A_o^2 + 2A_r A_o \cos(\phi_o - \phi_r)} \tag{4.6}$$

La relazione (4.6) mostra che l'intensità luminosa è data dalla somma di tre termini: (1) il primo è l'intensità del solo campo di riferimento, (2) il secondo è l'intensità del solo campo oggetto, (3) il terzo è il termine responsabile della formazione delle frange di interferenza che dipendono dallo sfasamento tra campo oggetto e campo di riferimento $\phi_o - \phi_r$. Si noti come l'ologramma contenga informazioni relative sia all'ampiezza sia alla fase del campo oggetto come anticipato nel capitolo precedente.

4.3.2 Ricostruzione dell'ologramma

Dopo lo sviluppo fotografico l'ologramma, ricollocato nella posizione iniziale, viene illuminato con il solo campo di riferimento. Per ottenere il campo emergente si usa la *funzione di trasmissione di ampiezza*

dell'ologramma definita come il rapporto tra il campo emergente ed il campo incidente sull'ologramma, cioè:

$$T_a = \frac{\text{Campo emergente}}{\text{Campo incidente}} = \frac{E_e}{E_i} \tag{4.7}$$

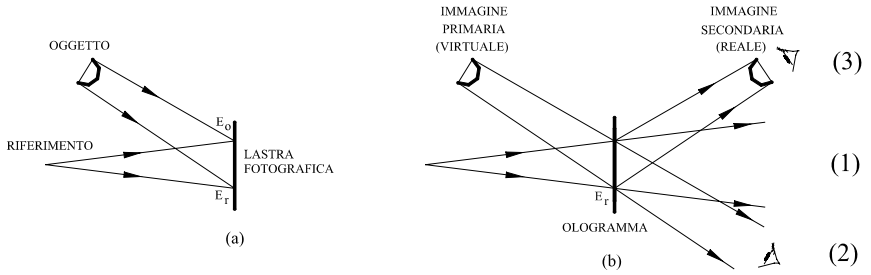


Figura 4.3: Olografia: (a) registrazione, (b) ricostruzione dell'ologramma

Per una lastra fotografica la trasmissione di ampiezza T_a è, entro certi limiti di *esposizione* (e cioè di intensità I per dato tempo di esposizione), una funzione lineare dell'intensità I cioè:

$$T_a = T_o - KI \tag{4.8}$$

dove T_0 e K sono due costanti.
Il campo emergente dall'ologramma risulta, in base alle (4.5), (4.7), (4.8):

$$E = \left[T_o - K\left(A_o^2 + A_r^2\right)\right]E_r - KA_r^2 E_o - KE_r^2 E_o^* \tag{4.9}$$

che si può anche scrivere

$$\boxed{\begin{array}{c} E = AE_r + BE_o + CE_o^* \\ (1) \quad (2) \quad (3) \end{array}} \tag{4.10}$$

Il campo emergente dall'ologramma in fase di ricostruzione (Figura 4.3-b) è costituito dai tre componenti espressi dai termini (1), (2) e (3) della relazione (4.10).
Il primo termine (1), a parte il fattore A, è quella parte del campo di riferimento che passa non diffratta attraverso l'ologramma: si tratta del campo avente *ordine 0 di diffrazione*.

Il secondo termine (2), a parte il fattore *B*, è una replica del campo E_o proveniente dall'oggetto. Esso costituisce la cosiddetta *immagine primaria* (virtuale in figura 4.3-b) dell'oggetto: si tratta del campo avente *ordine +1 di diffrazione*.
Il terzo termine (3), a parte il fattore *C*, è il campo coniugato del campo oggetto. Esso costituisce la cosiddetta *immagine secondaria* (reale in figura 3-b) dell'oggetto: si tratta del campo avente *ordine -1 di diffrazione.* I tre campi emergenti dall'ologramma, grazie alla tecnica di illuminazione con campo di riferimento *fuori asse* rispetto al campo oggetto sono separati spazialmente. Ponendosi ad un'adeguata distanza dall'ologramma è quindi agevole osservare l'immagine primaria ricostruita senza il disturbo prodotto dai rimanenti campi.

4.4 Disposizioni sperimentali - sorgenti – ricevitori

La figura 4.4 mostra una disposizione sperimentale per esperienze di olografia: la luce proveniente dal laser viene divisa per mezzo di un semispecchio in due fasci che mediante alcuni specchi vengono diretti sulla lastra (fascio di riferimento) e sull'oggetto (fascio oggetto).

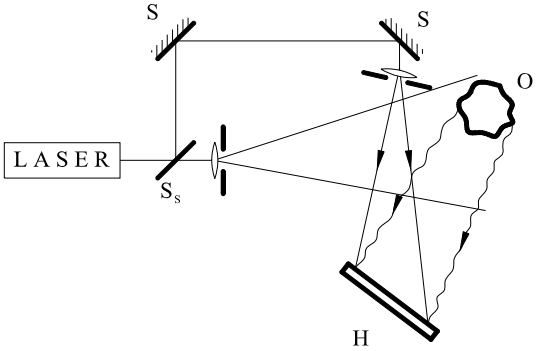


Figura 4.4: Disposizione sperimentale per olografia H= ologramma, O= oggetto; S=specchio, Ss= semispecchio
La sorgente deve essere tale da formare frange di interferenza deve essere cioè *coerente*. La sorgente che possiede elevati requisiti di coerenza è il

laser. Per le applicazioni usuali si sceglie un laser He-Ne (luce rossa con λ=632,8 nm) con potenza dell'ordine di 20-30 mW. Per potenze più elevate si sceglie un laser ad Argon (luce verde con λ=514,5 nm) con potenza tipica dell'ordine di alcuni W.
Come ricevitore, cioè come mezzo sul quale registrare l'ologramma, si utilizza di solito la lastra fotografica anche se sono disponibili altri tipi di ricevitori quali quelli termoplastici. La caratteristica più importante del ricevitore è la risoluzione che deve essere dell'ordine di 1000-3000 linee/mm. In olografia digitale si utilizzano i CCD che hanno una risoluzione nettamente inferiore.

4.5. Interferometria olografica

L' interferometria olografica (I.O.) consente il rilievo del campo degli spostamenti subiti dal componente a seguito dell'applicazione del carico.
Le tecniche fondamentali sono le seguenti: I.O. ad esposizione singola (in tempo reale), I.O. ad esposizione doppia (a frange congelate), I.O. a media temporale (per l'analisi delle vibrazioni).

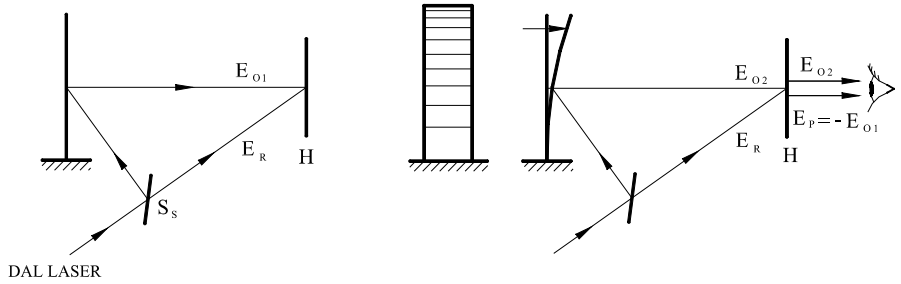
4.5.1 Interferometria olografica ad esposizione singola

Con tale tecnica si registra l'ologramma dell'oggetto nello stato 1, per esempio non deformato (Figura 4.5-a). In fase di ricostruzione l'ologramma viene ricollocato *esattamente* nella posizione iniziale. Se ora si bloccano alternativamente il campo oggetto e il campo di riferimento, l'osservatore, posto dietro l'ologramma, vede rispettivamente l'immagine primaria ricostruita e l'immagine diretta proveniente dall'oggetto. In presenza di entrambi i campi le due immagini si sovrappongono. Se ora l'oggetto passa dallo stato 1 (indeformato) allo stato 2 (deformato) il campo diretto, proveniente dall'oggetto deformato, interferisce con il campo ricostruito (relativo all'oggetto indeformato); si forma così (in corrispondenza dell'oggetto) un sistema di frange di interferenza che dipende dagli spostamenti subiti dall'oggetto stesso nel passare dalla configurazione indeformata a quella deformata (Figura 4.5-b).
Tale tecnica è detta anche in tempo reale in quanto le frange sono osservabili mentre si carica l'oggetto.

L'intensità luminosa I relativa alle frange di interferenza osservate in fase di ricostruzione risulta:

$$\boxed{I = 4A_o^2 \sin^2 \frac{\pi\Delta}{\lambda}} \qquad (4.11)$$

essendo Δ il ritardo (*variazione di cammino ottico* subita dal campo oggetto nel passare dallo stato indeformato a quello deformato). La condizione di interferenza distruttiva (frange scure) è data dalle (4.1) e (4.2). Nel caso dell'interferometria olografica in tempo reale si osservano quindi le frange di *ordine intero*. Il procedimento è molto delicato perché bisogna riposizionare esattamente l'ologramma al fine di evitare l'introduzione di *frange iniziali*.



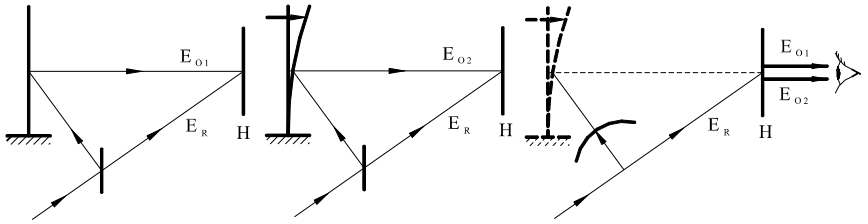
(a) (b)

Figura 4.5: Interferometria olografica in tempo reale: (a) registrazione dell'ologramma, (b) ricostruzione ed osservazione delle frange di interferenza

4.5.2. Interferometria olografica ad esposizione doppia

Con tale tecnica si registra l'ologramma dell'oggetto nello stato 1, per esempio non deformato (Figura 4.6-a). Si carica quindi l'oggetto e si registra, sulla stessa lastra l'ologramma dell'oggetto nello stato 2 (deformato, fig. 4.6-b). In fase di ricostruzione l'ologramma viene ricollocato nella posizione iniziale senza particolari precauzioni dato che uno spostamento dell'ologramma, agendo in eguale modo sulle due immagini ricostruite, non introduce frange di fondo. In tale fase si elimina il campo oggetto e l'oggetto stesso può essere rimosso, mentre si illumina

l'ologramma con il fascio di riferimento (Figura 4.6-c). L'ologramma ricostruisce i campi luminosi relativi all'oggetto scarico e all'oggetto carico.



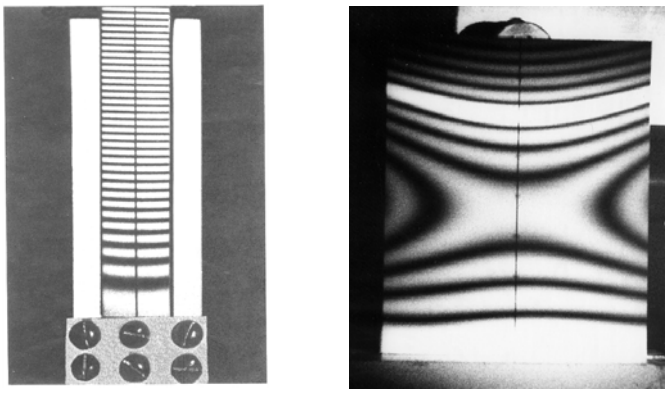
(a) (b) (c)

Figura 4.6: Interferometria olografica ad esposizione doppia: (a), (b) registrazione dell'ologramma, (c) ricostruzione dell'ologramma

Tali campi interferiscono dando luogo, in corrispondenza dell'oggetto, ad un sistema di frange d'interferenza che dipende dagli spostamenti subiti dall'oggetto nel passare dalla configurazione indeformata a quella deformata. Evidentemente in fase di ricostruzione non è possibile alterare le frange e pertanto la tecnica viene anche detta a *frange congelate*. La figura 4.7a mostra un tipico esempio di frange ottenute con tale tecnica.
L'intensità luminosa *I* relativa alle frange di interferenza osservate in fase di ricostruzione risulta ora:

$$\boxed{I = 4A_o^2 \cos^2 \frac{\pi\Delta}{\lambda}} \qquad (4.12)$$

essendo al solito Δ il ritardo (*variazione di cammino ottico* subita dal campo oggetto nel passare dallo sto indeformato a quello deformato).
La condizione di interferenza distruttiva (frange scure) è data dalle (4.1) e (4.3)
Nel caso dell'interferometria olografica ad esposizione doppia si osservano cioè le frange di *ordine intermedio*. Il procedimento è molto semplice perché non è necessario riposizionare esattamente la lastra in fase di ricostruzione; per contro non è possibile cambiare il numero di frange in fase di ricostruzione.



(a) (b)

Figura 4.7: (a) Interferometria olografica ad esposizione doppia: frange in una trave di acciaio incastrata in basso e deflessa in alto; (b) Interferometria olografica a media temporale: forma di vibrazione (0,1) in una lastra di acciaio, incastrata alla base, vibrante a 380 Hz.[1]

4.5.3 Interferometria olografica a media temporale

Con tale tecnica si registra l'ologramma dell'oggetto vibrante con la condizione che il tempo di esposizione della lastra sia grande rispetto al periodo della vibrazione (Figura 4.8-a). In fase di ricostruzione l'ologramma viene ricollocato nella posizione iniziale senza particolari precauzioni. In tale fase si elimina il campo oggetto e l'oggetto stesso può essere rimosso, mentre si illumina l'ologramma con il fascio di riferimento (Figura 4.8-b). L'intensità luminosa dell'immagine primaria ricostruita è retta dalla funzione di Bessel di ordine 0, cioè:

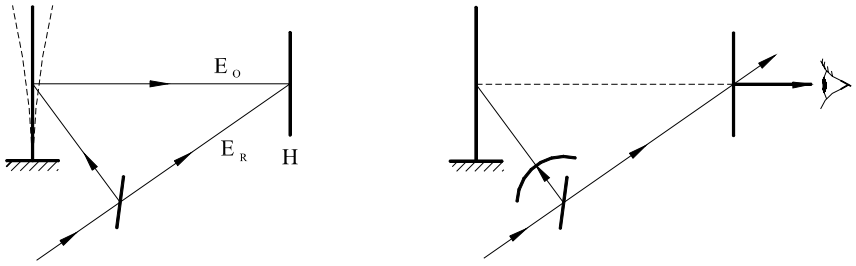
$$I = I_o J_o{}^2 \frac{\pi\Delta}{\lambda} \tag{4.13}$$

La dipendenza dell'intensità luminosa dalla funzione di Bessel di ordine 0 influenza: (1) la numerazione delle frange; (2) la luminosità delle frange chiare.

---

[1] Per la numerazione delle frange si vedano gli esercizi 4.1 e 4.2, cap. 9

In particolare la condizione di interferenza è data dalle (4.1) e (4.4), mentre la luminosità delle frange chiare diminuisce a causa della vibrazione.
La figura 4.7b mostra un esempio di forma di vibrazione rilevata mediante l'interferometria olografia a media temporale: sono chiaramente riconoscibili sia la *linea nodale* (massimo chiaro in alto) sia la diminuzione di luminosità delle frange chiare all'aumentare dell'ordine di frangia.



(a) (b)

Figura 4.8: Interferometria olografica a media temporale: (a) registrazione dell'ologramma, (b) ricostruzione dell'ologramma

4.6 Determinazione degli spostamenti

4.6.l – Relazione ritardo - spostamento

Indicando con P e P_1 le posizioni assunte dal generico punto del corpo prima e dopo l'applicazione dei carichi, S ed O le posizioni della sorgente e dell'osservatore, la variazione di cammino Δ risulta (Figura 4.9):

$$\Delta = (SP_1 + P_1O) - (SP + PO) \tag{4.14}$$

che si può anche scrivere:

$$\Delta = (SP_1 - SP) + (P_1O - PO) \tag{4.15}$$

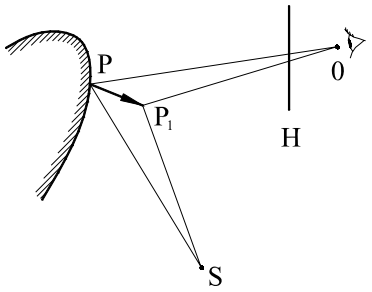


Figura 4.9: Determinazione del ritardo spaziale in generale

Dato che lo spostamento PP_1 è piccolo rispetto alle distanze dalla sorgente e dall'osservatore i raggi SP ed SP_1 si possono considerare paralleli, e così pure i raggi PO e P_1O (Figura 4.10).
In tali condizioni e considerando il *caso piano*, cioè direzione di illuminazione, direzione di osservazione e direzione dello spostamento giacenti nello stesso piano la (4.15) diviene:

$$\Delta = d\cos\theta_1 + d\cos\theta_2 \tag{4.16}$$

essendo d lo spostamento e θ_1, θ_2 gli angoli che lo spostamento forma con le direzioni di illuminazione e di osservazione.
La relazione (4.16) si può anche scrivere

$$\Delta = 2d\cos\varphi\cos\theta \tag{4.17}$$

dove (Figura 4.10) φ è l'angolo (incognito) che la direzione dello spostamento d forma con la bisettrice dell'angolo formato dalle direzioni di illuminazione e di osservazione e θ è il semiangolo (noto) formato dalle due direzioni suddette,
Dalla (4.17) e dalla (4.1) si ha:

$$\boxed{d\cos\varphi = \frac{1}{\cos\theta}\frac{\lambda}{2}N} \tag{4.18}$$

La relazione (4.18) consente di determinare, misurato l'ordine di frangia N, la componente $d\cos\varphi$ dello spostamento lungo la bisettrice dell'angolo (2θ) formato dalle direzioni di illuminazione e di osservazione (Figura 4.10)[2].

[2] Per il calcolo dello spostamento si veda l'esercizio 4.3, cap. 9

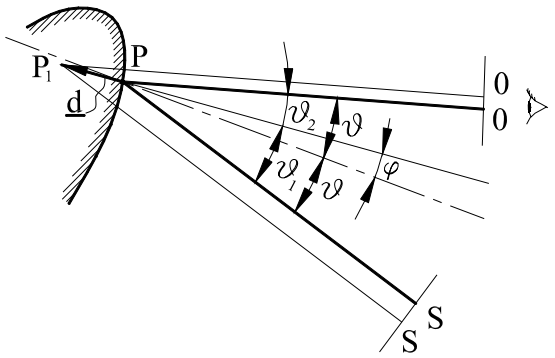


Figura 4.10: Relazione tra spostamento d e ritardo Δ: caso piano, spostamenti piccoli rispetto alle distanze

4.6.2 Relazione vettoriale

Il ritardo spaziale Δ, dato dalla (4.16) può essere espresso in forma vettoriale. Infatti indicando con $\underline{d}$ il vettore spostamento e con $\underline{k_0}$ e $\underline{k_1}$ i vettori unitari (*versori*) delle direzioni di illuminazione e di osservazione, diretti nel verso di propagazione della luce si possono scrivere i seguenti prodotti scalari (Figura 4.11):

$$\underline{k}_1 \cdot \underline{d} = d\cos\theta_2 \qquad \underline{k}_0 \cdot \underline{d} = -d\cos\theta_1 \qquad (4.19), (4.20)$$

Di conseguenza la (4.16) si può anche scrivere come:

$$\Delta = \left(\underline{k}_1 - \underline{k}_0\right)\cdot \underline{d} \qquad (4.21)$$

ovvero:

$$\Delta = \underline{s}\cdot\underline{d} \qquad (4.22)$$

con

$$\underline{s} = \underline{k}_1 - \underline{k}_0 \qquad (4.23)$$

Il vettore $\underline{s}$, detto *vettore di sensibilità*, è diretto secondo la bisettrice dell'angolo formato dalle direzioni di illuminazione e di osservazione; il modulo di $\underline{s}$ risulta (Figura 4.11):

$$s = 2\cos\theta\,. \qquad (4.24)$$

In base alle (4.1), (4.21) e (4.22) si ha:

$$\boxed{\Delta = \left(\underline{k}_1 - \underline{k}_0\right)\cdot \underline{d} = \underline{s}\cdot\underline{d} = N\lambda} \qquad (4.25)$$

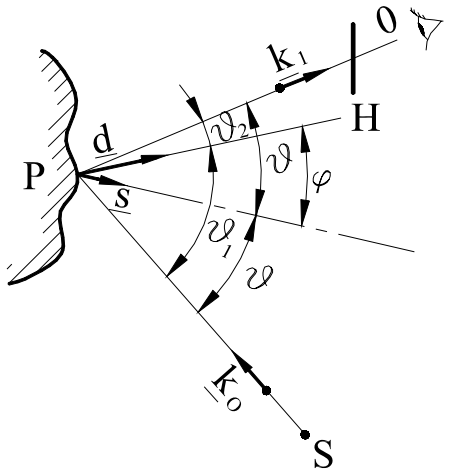


Figura 4.11: Relazione vettoriale tra ritardo Δ e spostamento $\underline{d}$

Di conseguenza si può anche dire che l'interferometria olografica consente di determinare la componente dello spostamento lungo il vettore di sensibilità.

La relazione vettoriale (4.25) consente di determinare gli spostamenti una volta rilevati gli ordini di frangia. Essa è applicabile oltre che all'interferometria olografica anche all'*interferometria speckle.*

4.7 Determinazione degli spostamenti nel caso piano

Nel caso piano lo spostamento $\underline{d}$ e le direzioni di illuminazione e di osservazione giacciono nello stesso piano che si indica come piano x,z (Figura 4.12) e quindi si ha

$$\underline{d} = \underline{i}u + \underline{k}w \tag{4.26}$$

essendo $\underline{i}$ e $\underline{k}$ i versori degli assi x e z e u,w le componenti incognite dello spostamento.

Supponendo di effettuare due osservazioni secondo due direzioni complanari (Figura 4.12) aventi versori k_1, k_2, si ha dalla (4.25):

$$\Delta_1 = \left(\underline{k}_1 - \underline{k}_0\right) \cdot \underline{d} = \underline{s}_1 \cdot \underline{d} = N_1 \lambda \tag{4.27}$$

$$\Delta_2 = \left(\underline{k}_2 - \underline{k}_0\right) \cdot \underline{d} = \underline{s}_2 \cdot \underline{d} = N_2 \lambda \tag{4.28}$$

dove si suppone che sia possibile la *numerazione assoluta* i cui ordini sono: N_1, N_2.
Utilizzando le (4.27) e (4.28) si ottiene , tenendo conto della (4.26):

$$s_{1x}u + s_{1z}w = N_1\lambda \tag{4.29}$$

$$s_{2x}u + s_{2z}w = N_2\lambda \tag{4.30}$$

dove le uniche incognite sono le componenti *u,w* dello spostamento essendo noti sia gli ordini di frangia N_1, N_2 sia le componenti (s_{1x}, s_{1z}, s_{2x}, s_{2z}) dei vettori di sensibilità.

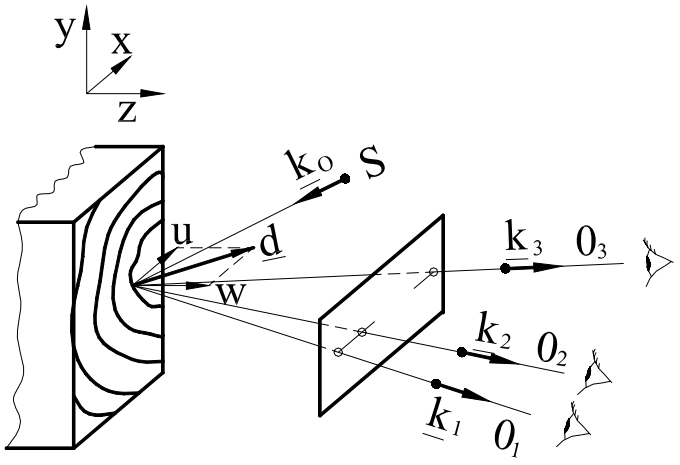


Figura 4.12: Determinazione degli spostamenti nel caso piano

NOTA sulla sensibilità – In generale la sensibilità alla componente di spostamento *fuori dal piano w* è notevolmente più elevata di quella relativa alle componenti dello spostamento nel *piano u,v*.
L'interferometria olografica è quindi particolarmente adatta alla misura di spostamenti fuori del piano e poco adatta alla misura di spostamenti nel piano.
La trattazione relativa al caso piano si estende facilmente al caso tridimensionale nel quale si hanno tre componenti di spostamento: due nel piano (*u,v*) ed una fuori dal piano (*w*).

Capitolo 5

Metodi speckle

5.1 Introduzione

5.1.1 Principio

L'*effetto speckle* si manifesta quando una superficie diffondente viene illuminata con una sorgente di luce coerente. In tali condizione la superficie illuminata appare *granulosa* (Figura 5.1). Tale granulosità, che è dovuta all' *auto-interferenza* della luce diffusa dall'oggetto, viene appunto denominata con il termine anglosassone *speckle*. In aggiunta ai riferimenti generali [0.1-0.6] si segnalano alcuni riferimenti a libri [5.1-5.3] e siti [5.4-5.7].

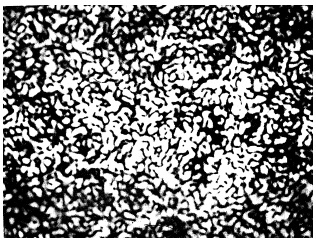


Figura 5.1: Granulosità (*effetto speckle*) caratteristica della illuminazione in luce coerente

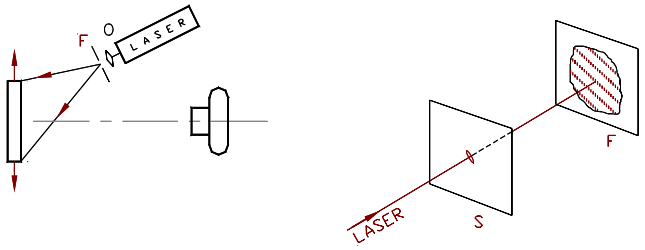
5.1.2 Tipo di informazione sperimentale

In generale i metodi speckle sono adatti, secondo il set up utilizzato, al rilievo degli spostamenti, delle rotazioni e delle deformazioni. Si citano in particolare i seguenti metodi:

- la *fotografia speckle* (Figura 5.2) adatta alla misura di spostamenti nel piano;

- l'*interferometria speckle* (Figura 5.3) adatta alla misura gli spostamenti nel piano o fuori dal piano in dipendenza della disposizione sperimentale adottata.
- l'*interferometria speckle tipo "shearing"* (denominata anche *shearography)* adatta alla misura delle componenti della rotazione (φ_x e φ_y) e delle deformazioni.

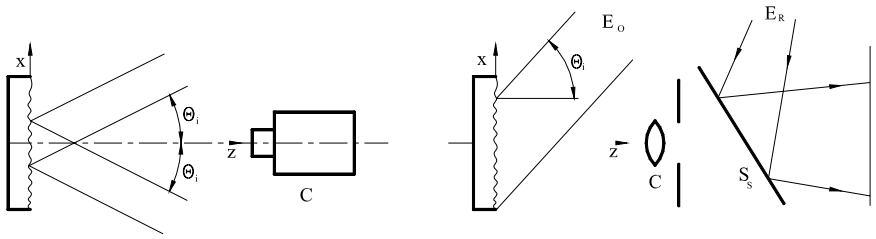
La fotografia speckle, che nella versione più semplice consente un'analisi per punti, è adatta alla misura degli spostamenti nel piano. Il componente, illuminato in luce coerente, viene fotografato due volte, prima e dopo l'applicazione del carico. Lo spostamento nel piano subito dal generico punto P deve essere sufficientemente grande rispetto alle dimensioni degli speckle. La coppia di speckle relativi allo stesso punto dell'oggetto fornisce lo spostamento che nel metodo per punti viene evidenziato dalle frange di Young che si ottengono illuminando il fotogramma (*specklegramma*) con il fascio laser (figura 5.2b).



(a) (b)

Figura 5.2: Fotografia speckle. (a) Registrazione sullo stesso fotogramma delle immagini del provino indeformato e deformato, (b) osservazione: le frange di Young (F) ottenute illuminando il fotogramma (specklegramma S) consentono di determinare lo spostamento in modulo e direzione.

L'interferometria speckle utilizza la variazione di fase subita dagli speckle nel passare dalla configurazione indeformata a quella deformata. In tal caso lo spostamento da analizzare deve essere piccolo rispetto alla dimensione degli speckle. Tale tecnica consente sia l'analisi degli spostamenti nel piano impiegando due fasci di illuminazione simmetrici (figura 5.3a), sia l'analisi degli spostamenti fuori del piano utilizzando un fascio di riferimento (figura 5.3b).



(a) (b)

Figura 5.3: Interferometria speckle: (a) disposizione a due fasci di illuminazione simmetrici per la misura delle componenti dello spostamento nel piano, (b) disposizione con fascio di riferimento per la misura della componente di spostamento fuori dal piano.
(C=camera, Eo=campo oggetto, Er=campo di riferimento, Ss=semispecchio)

5.1.3 Caratteristiche

L'entità dello spostamento minimo misurabile (sensibilità) con l'interferometria speckle è dell'ordine di 0,5 μm con campo di misura di circa 15 μm. Per la fotografia speckle sensibilità e campo di misura sono rispettivamente dell'ordine di 5 e 50 μm.
Per ciò che riguarda i materiali esaminabili non esistono particolari limitazioni sui materiali e sulla loro finitura che non deve essere però speculare. E' opportuno l'uso di una vernice bianca opaca sul componente.
Le dimensioni degli speckle sono tali che l'acquisizione si può effettuare mediante una telecamera. Si tratta di tecniche da laboratorio con prospettive di impiego anche in ambiente industriale. Sono disponibili interferometri speckle commerciali.
All'interferometria speckle sono applicate ordinariamente le tecniche di acquisizione ed elaborazione automatica delle immagini.

5.2 L'effetto speckle

L'effetto speckle è dovuto all'interferenza della luce riflessa da un oggetto diffondente (cioè non speculare) illuminato con una sorgente di luce coerente, tipicamente un laser. In particolare si distinguono due tipi di speckle: *speckle oggettivo* e *speckle soggettivo.*

5.2.1 Lo speckle oggettivo

Lo *speckle oggettivo* è quello che si forma senza l'ausilio di un sistema ottico su di uno schermo posto di fronte all'oggetto (Figura 5.4). Il generico

punto dello schermo posto di fronte all'oggetto riceve luce da tutti i punti dell'oggetto compresi tra i punti estremi P_1 e P_2. Considerando solo la luce riflessa dai punti estremi P_1 e P_2,, si ha interferenza costruttiva se lo sfasamento è uguale ad un multiplo intero di lunghezze d'onda e quindi nel punto Q_1 si forma uno speckle chiaro; se invece tale sfasamento è uguale ad un multiplo dispari di semi-lunghezze d'onda allora si ha interferenza distruttiva e quindi si ha la formazione di uno speckle scuro.

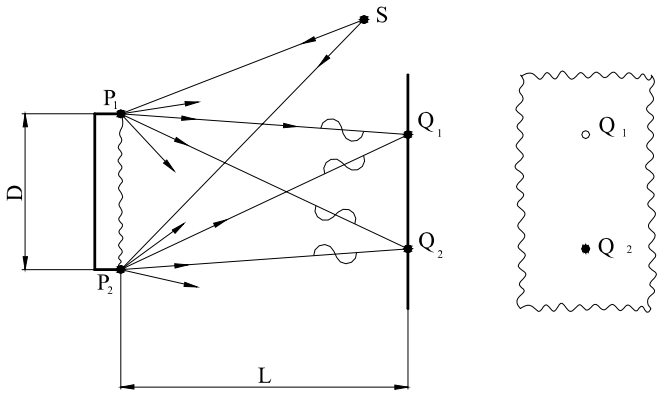


Figura 5.4: Formazione dello speckle oggettivo: in Q_1 i campi sono in fase e quindi si ha uno speckle chiaro, in Q_2 i campi sono in opposizione di fase e quindi lo speckle è scuro.

Si può dimostrare che il diametro medio dello speckle oggettivo risulta:

$$S_o = 1{,}22\frac{L}{D}\lambda \tag{5.1}$$

dove D è il diametro dell'oggetto, L è la distanza tra oggetto e schermo, λ è la lunghezza d'onda della luce.

5.2.2 Lo speckle soggettivo

Lo *speckle soggettivo* (Figura 5.5) è quello che si forma quando si riprende un oggetto diffondente, illuminato con una sorgente di luce coerente, con l'ausilio di un sistema ottico (macchina fotografica, telecamera, occhio). Anche in questo caso si manifesta l'effetto speckle che, nel piano immagine, ha una dimensione $(S_s)_i$ data sempre dalla (5.1) dove però D indica il diametro della lente ed L indica la distanza tra la lente ed il piano immagine, mentre sull'oggetto la dimensione dello speckle risulta

$$(S_s)_o = \frac{(S_s)_i}{M} = 1{,}22\frac{1+M}{M}\frac{F}{D} \tag{5.2}$$

essendo M l' *ingrandimento* della lente.
La (5.2) indica che per aumentare la dimensione tipica dello speckle basta diminuire il diametro della lente (diminuire l'apertura dell'obiettivo).

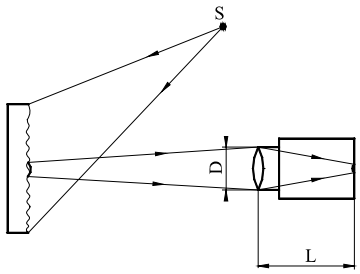


Figura 5.5: Formazione dello speckle soggettivo

5.3. Interferometria speckle

L'interferometria speckle utilizza la variazione di fase subita dagli speckle nel passare dalla configurazione indeformata a quella deformata. A tal fine si fa interferire il campo speckle proveniente dall'oggetto con un campo di riferimento (Figura 5.3b), proprio come in interferometria olografica, o con un secondo campo speckle (Figura 5.3a). A differenza dell'interferometria olografica, dove l'angolo tra fascio oggetto e fascio di riferimento è grande, nell'interferometria speckle il campo di riferimento è allineato con il campo speckle proveniente dall'oggetto; di conseguenza non si formano le frange ad elevata frequenza caratteristiche dell'ologramma.
La variazione di cammino ottico Δ è legata allo spostamento dalla relazione vettoriale (4.25) determinata nel capitolo dedicato all'interferometria olografica.

5.3.1 Misura della componente di spostamento fuori del piano

La figura 5.3b mostra lo schema tipico per il rilievo della componente di spostamento fuori dal piano. L'oggetto è illuminato da una sorgente di luce monocromatica coerente. La direzione di illuminazione forma l'angolo θ_i con la normale (asse *z*) all'oggetto che è osservato sempre secondo l'asse *z*. In tale schema (molto simile a quello dell'olografia) si realizza l'interferenza tra il campo oggetto E_o ed il campo di riferimento E_r che arriva, diretto secondo l'asse *z*, direttamente sul CCD della telecamera.

Si effettua una doppia acquisizione, a struttura scarica e a struttura carica, e quindi si combinano le due intensità, ad esempio per sottrazione.

1^ acquisizione a struttura scarica.
L'intensità di tale campo, che viene registrata sul CCD della telecamera, risulta

$$I_1 = I_0 + I_r + 2A_0A_r\cos\left(\varphi_0^s - \varphi_r\right) \tag{5.3}$$

2^ acquisizione a struttura carica.
L'intensità di tale campo risulta

$$I_2 = I_0 + I_r + 2A_0A_r\cos\left(\varphi_0^c - \varphi_r\right) \tag{5.4}$$

Eseguendo la differenza tra le due intensità relative alle condizioni di struttura scarica e carica si ha:

$$I_1 - I_2 = 2A_0A_r\left[\cos\varphi - \cos\left(\varphi + \Delta\varphi\right)\right] \tag{5.5}$$

dove si è posto:

$$\varphi = \varphi_0^s - \varphi_r\,,\ \Delta\varphi = \varphi_0^c - \varphi_0^s \qquad \text{(5.6), (5.7)}$$

Dalla (5.5) si ricava che la condizione di interferenza distruttiva $I_1 - I_2 = 0$ risulta:

$$\Delta = n\lambda \ \text{(n=1,2,3…)} \tag{5.8}$$

dato che:

$$\Delta\varphi = 2\pi\Delta/\lambda \tag{5.9}$$

L'intensità luminosa varia quindi ciclicamente dando luogo alle cosiddette *frange di correlazione*.

Relazione tra ritardo e spostamento
Come si è detto si utilizza la relazione (4.25) valida anche per l'interferometria olografica che si usa nella forma contenente il vettore sensibilità $\underline{s}$, cioè:

$$\Delta = \underline{s}\cdot\underline{d} = s_xd_x + s_zd_z \tag{5.9}$$

dove (Figura 5.6) si ha:

$$s_x = \left(2\cos\theta\right)\sin\theta \quad s_z = \left(2\cos\theta\right)\cos\theta \qquad \text{(5.10) (5.11)}$$

$$d_x = u \qquad d_z = w \qquad \text{(5.12) (5.13)}$$

essendo $\left(2\cos\theta\right)$ il modulo del vettore $\underline{s}$ [vedi equazione (4.24)] ed *u*, *w* le componenti dello spostamento nel piano (asse *x*) e fuori dal piano (asse *z*).
Tenendo conto delle (5.10)-(5.13), la (5.9) diviene ponendo $\theta_i = 2\theta$:

$$\Delta = w(1+\cos\theta_i) + u\sin\theta_i \tag{5.14}$$

Se l'angolo di incidenza $\theta_i = 2\theta$ è piccolo il termine contenete la componente

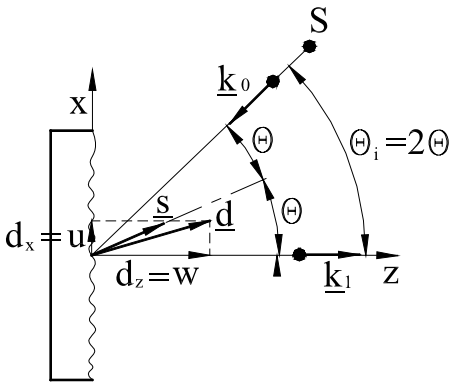


Figura 5.6: Geometria per il rilievo della componente di spostamento w fuori dal piano con una sola direzione di illuminazione: S = sorgente, O = osservatore (Il raggio di riferimento non è mostrato).

nel piano *u* può essere trascurato rispetto a quello contenente la componente dello spostamento fuori dal piano *w* , si ottiene così tenendo conto della (5.8):

$$w = \frac{\lambda}{1+\cos\theta_i} n \tag{5.15}$$

A titolo di esempio la figura 5.7 mostra le frange di correlazione, dovute ad una rotazione fuori dal piano, determinate con la tecnica descritta sopra.

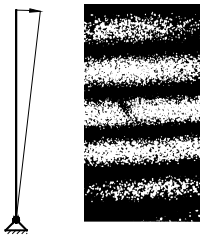


Figura 5.7: Frange di correlazione ottenute con il set up di figura 5.3b: in questo caso le frange sono il luogo dei punti in cui è costante la componente di spostamento fuori dal piano *w*

5.3.2 Misura della componente di spostamento nel piano

In questo caso si usano due fasci simmetrici (Figura 5.3a) incidenti sul modello e si effettua sempre una doppia acquisizione a struttura scarica e carica.

In corrispondenza del CCD della telecamera si hanno due campi speckle (E_{o1} ed E_{o2}) tra di loro paralleli che interferiscono dando luogo alle intensità luminose I_1 e I_2 la cui differenza vale:

$$I_1 - I_2 = 2A_{01}A_{02}\left[\cos\varphi - \cos(\varphi + \Delta\varphi)\right] \qquad (5.16)$$

dove, indicando con *s* e c le fasi a modello scarico e carico, si è posto:

$$\varphi = \varphi_{01}^{s} - \varphi_{02}^{s} \qquad (5.17)$$

$$\Delta\varphi = \left(\varphi_{01}^{c} - \varphi_{01}^{s}\right) - \left(\varphi_{02}^{c} - \varphi_{02}^{s}\right) = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\Delta_1 - \Delta_2\right) \qquad (5.18)$$

La relazione di interferenza distruttiva della (5.16) risulta:

$$\Delta = \Delta_1 - \Delta_2 = n\lambda \ \text{ con n} = 1,2,... \qquad (5.19)$$

Utilizzando al solito la relazione (4.25) si ottiene con passaggi che si omettono:

$$u = \lambda n_x / 2\sin\theta_i \qquad (5.20)$$

Ripetendo l'esperienza con il provino ruotato di 90° si ottiene analogamente l'altra componente dello spostamento nel piano (*v* secondo l'asse *y*):

$$v = \lambda n_y / 2\sin\theta_i \qquad (5.21)$$

5.4 Interferometria speckle a variazione di fase

Indipendentemente dalla particolare tecnica di interferometria speckle utilizzata, l'intensità luminosa sul CCD della telecamera è retta da un'equazione del tipo:

$$\boxed{I = I_o + VI_o\cos\varphi} \qquad (5.22)$$

dove *V* è il cosiddetto *contrasto delle frange*

La (5.22) mostra che le incognite sono tre (I_o, *V* e φ) delle quali quella di interesse è la fase φ, di conseguenza bisogna effettuare almeno tre acquisizioni introducendo uno sfasamento in uno dei due fasci che interferiscono. Pertanto la (5.22) diviene:

$$I_i = I_0 + VI_0\cos(\varphi + \alpha_i) \qquad (5.23)$$

dove α_i è lo sfasamento introdotto.

Utilizzando, ad esempio, quattro acquisizioni, di intensità I_1, I_2, I_3, I_4, sfasate di 90° l'una rispetto all'altra cioè con $\alpha_1 = 0°$, $\alpha_2 = 90°$, $\alpha_3 = 180°$, $\alpha_4 = 270°$, la (5.23) fornisce la fase φ che, essendo variabile tra 0° e 360° per la periodicità della funzione *tangente*, è denominata fase *frazionaria* (o con termine anglosassone *wrapped*) ed indicata con il simbolo φ_f:

$$\varphi_f = \arctan\left[(I_4 - I_2)/(I_1 - I_3)\right] \qquad (5.24)$$

Si passa quindi dalla fase frazionaria alla fase totale utilizzando la procedura di identificazione (*unwrapping)*, tipica dei metodi a variazione di fase, basata sull'eliminazione dei salti che subisce la fase frazionaria.

Il metodo a variazione di fase in interferometria speckle

Nel caso dell'interferometria speckle si può operare nel modo indicato nel seguito.

1^ acquisizione ad oggetto scarico. Si acquisiscono quattro immagini sfasate di 90° l'una rispetto all'altra cioè: I_1, I_2, I_3, I_4.

2^ acquisizione ad oggetto carico. Idem, cioè: I_1', I_2', I_3', I_4'.

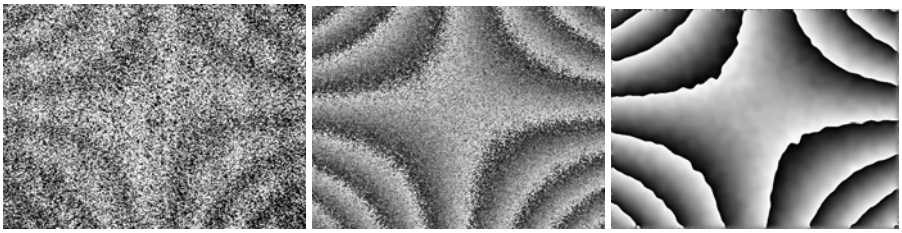
Calcolo della fase frazionaria relativa all'oggetto scarico. Si usa la formula (5.24) che fornisce φ_f.

Calcolo della fase frazionaria relativa all'oggetto carico. Idem $\varphi_f' = \varphi_f + \Delta\varphi_f$.

Calcolo della differenza di fase frazionaria dovuta al carico: $\Delta\varphi_f = \varphi_f' - \varphi_f$; la figura 5.8b mostra un esempio di mappa di fase frazionaria (modulo 2π) relativa alla componente di spostamento orizzontale (*u*) in un provino soggetto a flessione pura. La mappa si presenta sotto forme di frange che per distinguerle da quelle ottenute con in procedimento di sottrazione diretto di due immagini (*frange di correlazione*, figura 5.8a) sono di solito denominate *frange di fase*; la figura 5.8c mostra le frange di fase dopo il filtraggio.

Calcolo della differenza di fase totale. Si usano a tal fine opportuni procedimenti di identificazione (unwrapping). Si ottiene così la variazione totale della fase: $\Delta\varphi = 2\pi n$, dove n è l'ordine di frangia.

Calcolo della grandezza di interesse: a secondo della disposizione sperimentale utilizzata si utilizzano le formule appropriate, per esempio la (5.15) per gli spostamenti fuori dal piano w e le (5.20)-(5.21) per quelli nel piano.



(a) (b) (c)

Figura 5.8: Frange di correlazione (a) e frange di fase, modulo 2π, prima (b) e dopo (c) il filtraggio relative alla componente di spostamento orizzontale (u) in un provino soggetto a flessione pura

5.5 Considerazioni sull'interferometria speckle

Le frange che si ottengono con l'interferometria speckle sono di qualità inferiore rispetto a quella ottenibile con le altre tecniche interferometriche. Al contrario però dell'interferometria moiré l'oggetto da esaminare non richiede una particolare preparazione (trasferimento di una griglia), mentre rispetto all'interferometria olografica l'interferometria speckle consente di: (1) utilizzare disposizioni sperimentali sensibili solo ad alcune componenti di spostamento, (2) evitare il lento procedimento fotografico.
Grazie a queste caratteristiche positive l'interferometria speckle si è sviluppata notevolmente dando luogo a diversi sistemi commerciali [5.4-5.7].

Capitolo 6

Tecniche a correlazione di immagini digitali

6.1 Introduzione

I metodi basati sulla *correlazione di immagini digitali* (DIC = *Digital image correlation*) consentono di determinare spostamenti e deformazioni mediante il confronto delle immagini del componente in studio, acquisite prima e dopo l'applicazione dei carichi.

Le tecniche a correlazione di immagini possono essere applicate al caso piano (DIC/2D) per la misura degli spostamenti e delle deformazioni nel piano, e al caso generale tridimensionale (DIC/3D). In bibliografia si riportano i riferimenti a libri [0.4-0.6, 6.1], norme tecniche[6.2], siti [6.3-6.8].

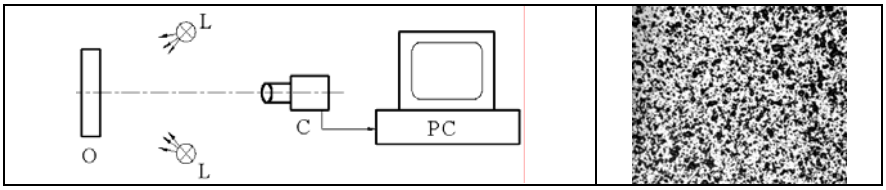
6.2. Il metodo DIC/2D

6.2.1 Principio del metodo DIC/2D

La figura 6.1 mostra uno schema sperimentale per la DIC/2D. L'oggetto piano è illuminato con luce bianca. La superficie dell'oggetto presenta una distribuzione random (Figura 6.1b) di punti neri su fondo bianco (del tipo *speckle*) ottenuta per esempio spruzzando opportunamente della vernice nera sulla superficie dell'oggetto dipinta in bianco. Le immagini sono acquisite mediante una telecamera con l'asse ortogonale al piano dell'oggetto.

La telecamera acquisisce l'immagine dell'oggetto indeformato (*immagine di riferimento*) e quella dell'oggetto deformato (*immagine*

deformata). Le due immagini digitalizzate vengono opportunamente paragonate al fine di determinare il campo degli spostamenti e le deformazioni. Nel paragonare la sub-immagine di riferimento con quella deformata si tiene conto sia degli spostamenti rigidi sia delle deformazioni.



(a) (b)

Figura 6.1: (a) Schema di un dispositivo sperimentale per la tecnica DIC/2D, (b) esempio di superficie con distribuzione random di zone nere. (C= telecamera, L= lampade, O = oggetto, PC= personal computer)

6.2.2 Spostamenti e deformazioni

Prima di analizzare la correlazione delle immagini si richiamano alcune nozioni della *meccanica del continuo.*

L'analisi di seguito riportata non considera la componente di spostamento *w* fuori dal piano di misura. Tale analisi è inoltre concisa per motivi di spazio; per approfondimenti si rimanda quindi ai testi sulla meccanica del continuo.

Si consideri (Figura 6.2a) nel corpo indeformato un elemento rettilineo infinitesimo PQ le cui componenti nel piano siano dx e dy. Nel corpo deformato il segmento PQ si trasforma nel segmento P*Q* di componenti dx* e dy*. Indicando con u_P e v_P le componenti dello spostamento del punto P e con u_Q e v_Q quelle relative al punto Q, si hanno le seguenti relazioni:

$$u_Q = u_P + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \quad v_Q = v_P + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy \qquad (6.1), (6.2)$$

Le componenti dx* e dy* sono legate alle componenti indeformate dx e dy dalle seguenti relazioni:

$$dx^* = dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \quad dy^* = dy + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy \quad (6.3), (6.4)$$

Le deformazioni dipendono dalle quattro derivate degli spostamenti, cioè:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (6.5)$$

Nel caso di *piccole deformazioni e piccole rotazioni* si hanno le note formule:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (6.5)\text{-}(6.7)$$

Per le formule generali relative al caso di grandi deformazioni e grandi rotazioni si rimanda ai testi sulla meccanica del continuo.

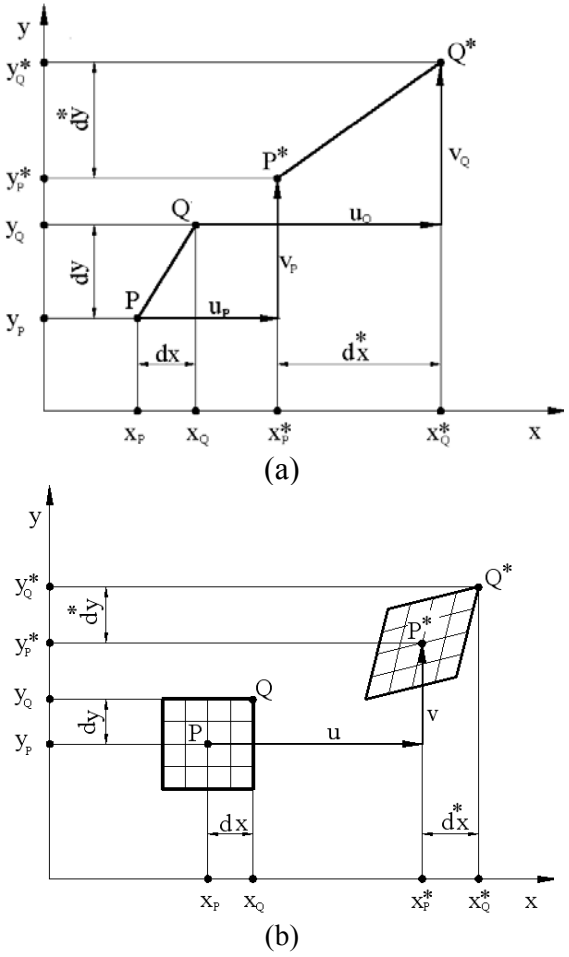


Figura 6.2: (a) Spostamenti subiti da un elemento lineare: da PQ nel corpo indeformato a P*Q* nel corpo deformato; (b) Spostamento e deformazione della generica sub-immagine dalla configurazione indeformata centrata in P a quella deformata centrata in P*.

6.2.3 Correlazione delle immagini (2D)

L'analisi seguente presuppone: (1) l'acquisizione dell'immagine di riferimento e dell'immagine deformata utilizzando una telecamera, (2) la digitalizzazione delle suddette immagini, (3) la rappresentazione continua, mediante opportuni metodi di interpolazione, delle suddette immagini digitali la cui intensità luminosa (dopo l'interpolazione) è nel seguito indicata con *I*.

Si consideri nell'immagine di riferimento una sub-immagine centrata nel punto *P(x,y)* e si indichi con *Q(x+dx, y+dy)* il generico punto della sub-immagine (Figura 6.2b). Le intensità luminose,come sopra definite, nei punti *P* e *Q* dell'immagine di riferimento sono:

$$I(P) = I(x_P, y_P), \quad I(Q) = I(x_Q, y_Q) = I(x_P + dx, y_P + dy) \quad (6.8), (6.9)$$

Analogamente le intensità luminose dei corrispondenti punti *P** e *Q** dell'immagine deformata risultano:

$$I^*(P^*) = I^*(x_P^*, y_P^*), I^*(Q^*) = I^*(x_Q^*, y_Q^*) = I^*(x_P^* + dx^*, y_P^* + dy^*) \quad (6.10)(6.11)$$

dove

$$x^* = x + u, \; y^* = y + u \quad (6.12), (6.13)$$

e dove le componenti *dx** e *dy** sono legate alle componenti *dx* e *dy* dalle (6.3) e (6.4). Supponendo che la deformazione non alteri il valore dell'intensità luminosa deve aversi:

$$\boxed{I^*(Q^*) = I(Q)} \quad (6.14)$$

Si tratta quindi di trovare nell'immagine deformata quella *sub-immagine deformata* la cui distribuzione di intensità luminosa corrisponde a quella della *sub-immagine di riferimento* in accordo alla (6.14).

Si ipotizza la sub-immagine tanto piccola da considerare costanti le derivate degli spostamenti; di conseguenza le deformazione della sub-immagine sono costanti.

Premesso che le coordinate di Q* dipendono dalle componenti di spostamento del punto P e dalle loro derivate rispetto a x e y, cioè dalle grandezze:

$$u_P, v_P, \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_P, \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_P, \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_P \quad (6.15)$$

si tratta di determinare per ogni sub-immagine le sei grandezze definite dalla (6.15) in modo tale che risulti soddisfatta la stessa (6.14) che esprime l'uguaglianza delle intensità luminosa delle due sub immagini (deformata e non deformata).

Naturalmente a causa degli inevitabili errori la (6.14) non sarà soddisfatta completamente; per ottenere la correlazione tra sub-immagine di riferimento e sub-immagine deformata bisogna pertanto minimizzare, per ogni sub-immagine centrata in P, una funzione errore definita per esempio come:

$$E_P = \sum_i \left[I^*\left(Q_i^*\right) - I\left(Q_i\right) \right]^2 \tag{6.16}$$

dove *i* indica il generico punto della sub-immagine centrata in P.
Più spesso si considera il *coefficiente di correlazione normalizzato* definito come:

$$C_P = \frac{\sum_i I^*\left(Q_i^*\right) I\left(Q_i\right)}{\left(\sum_i I^*\left(Q_i^*\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_i I\left(Q_i\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \tag{6.17}$$

Il coefficiente di correlazione varia tra 1 (correlazione completa) e 0 (correlazione nulla); esso, essendo normalizzato, è poco sensibile alle variazioni di intensità luminosa. La funzione da minimizzare risulta pertanto:

$$E_P = 1 - C_P \tag{6.18}$$

La funzione E_p, data dalla (6.18), varia tra 0 (correlazione completa) e 1 (correlazione nulla). I valori della (6.15) che minimizzano la funzione errore data dalla (6.16) o dalla (6.18) forniscono la migliore stima degli spostamenti e delle relative derivate in corrispondenza del punto P.
Nella letteratura tecnica [0.5, 6.1] sono disponibili diversi metodi iterativi per il calcolo della funzione di correlazione, quali: il metodo delle approssimazioni successive (coarse –fine search), il metodo di Newton – Raphson, il metodo di Levenberg – Marquardt.
Di seguito si accenna al primo di tali metodi cioè al *metodo delle approssimazioni successive*, che è più intuitivo, mentre si rimanda alla bibliografia per gli altri metodi ed in particolare per il metodo di Newton – Raphson che è molto utilizzato. Nel metodo delle approssimazioni successive (Figura 6.3) si ricerca inizialmente la correlazione tra sub-immagine deformata e sub-immagine di riferimento considerando (Figura 6.3a) la sola traslazione rigida (u,v). Successivamente si considera (Figura 6.3b) l'effetto delle estensioni ($\partial u/\partial x, \partial v/\partial y$) e si ricerca la correlazione tra le sub-immagini tenendo conto sia della traslazione rigida sia delle estensioni. Infine si ricerca (Figura 6.3c) la correlazione delle sub-immagini tenendo sia della traslazione rigida che delle estensioni ($\partial u/\partial x, \partial v/\partial y$) e dello scorrimento mutuo ($\partial u/\partial y, \partial v/\partial x$). In corrispondenza della correlazione massima [cioè del minimo della funzione errore data dalla

(6.16) o dalla (6.18)] si ottengono i valori degli spostamenti e delle deformazioni subiti dal punto *P*.

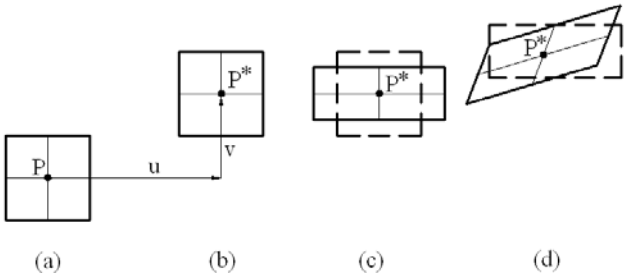


Figura 6.3: Metodo delle approssimazioni successive: (a) sub-immagine di riferimento, (b) sub-immagine traslata rigidamente, (c) sub-immagine deformata per effetto delle sole estensioni, (d) sub-immagine deformata anche per effetto degli scorrimenti mutui.

6.2.4 Prestazioni dei sistemi DIC ed applicazioni

Le prestazioni dipendono, per ciò che riguarda l'*hardware*, dai componenti utilizzati e dal set up sperimentale. Di seguito si riportano alcuni indici da considerarsi come indicativi delle prestazioni dei sistemi DIC[1].

L'area di misura varia da qualche mm^2 fino a superfici dell'ordine del m^2

La risoluzione è dell'ordine di:

- 0.1 - 0.01 pixel, tipicamente 0.02 pixel, per lo spostamento;
- 100-200 μm/m (corrispondente a 0.01-0.02 cm/m cioè 0.01%-0.02%) per le deformazioni.

La deformazione massima è dell'ordine di 100 cm/m (cioè 100%) e anche di più.

In commercio esistono svariate apparecchiature e software per i metodi a correlazione di immagini digitali operanti sia in campo piano (DIC/2D) sia in campo tridimensionale(DIC/3D) [6.3-6.6]. Le applicazioni della DIC sono innumerevoli; si consulti, per esempio il Rif. [6.1].

6.3 Correlazione delle immagini in 3D (cenni)

Nel caso tridimensionale si utilizzano due telecamere in modo da osservare l'oggetto da due direzioni differenti (figura 6.4 *a sin.*); si ottiene così una visione binoculare simile a quella umana. Bisogna rilevare infatti che una sola telecamera non consente di determinare le coordinate spaziali (X,Y,Z)

[1] Dati caratteristici di alcuni sistemi commerciali (2009)

di un punto, *P*, perché ad un determinato punto nel piano immagine (P_i) corrispondono infinite posizioni del punto nello spazio (tutti i punti che si trovano sulla retta che unisce il punto P_i al centro della lente). L'uso di due telecamere consente invece di eliminare tale ambiguità (Figura 6.4 *a destra*).

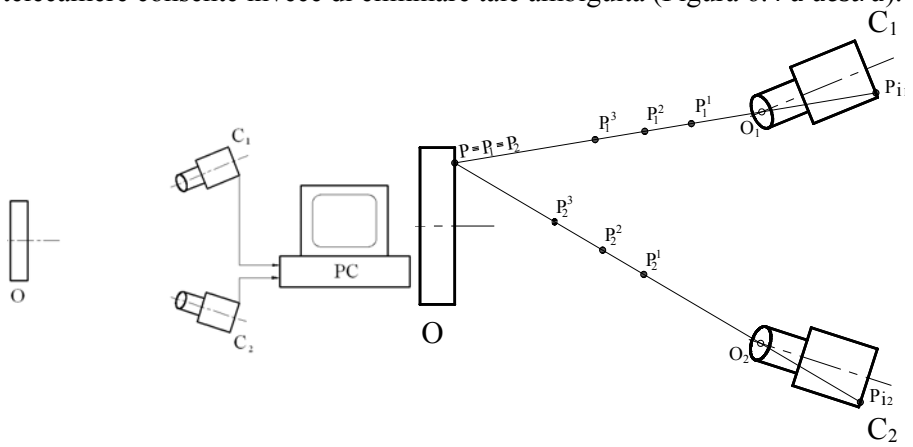


Figura 6.4 - (*a sinistra*) Schema del set up sperimentale per la DIC/3D (O=oggetto, C_1 - C_2 =telecamere, PC= personal computer); (*a destra*) L'uso di due telecamere consente di determinare la posizione del punto *P* le cui immagini sono P_{i1} e P_{i2}

La tecnica DIC/3D può essere applicata anche a superfici non piane che subiscono spostamenti *fuori dal piano*. La tecnica DIC/3D dà informazioni riguardanti sia la forma del corpo sia il campo di spostamenti in tre dimensioni (*u, v, w*). A tal fine dopo l'acquisizione, per mezzo delle telecamere C_1 e C_2, delle immagini a corpo indeformato (I_1, I_2) e deformato (I_1', I_2') si procede alla determinazione della forma e del campo degli spostamenti. Nel seguito si indicano con: SI_1 la sub immagine acquisita dalla telecamera C_1 al tempo t_1 (stato indeformato), SI_2 la sub immagine acquisita dalla telecamera C_2 al tempo t_1 (stato indeformato), SI_1' la sub immagine acquisita dalla telecamera C_1 al tempo t_2. (stato deformato), SI_2' la sub immagine acquisita dalla telecamera C_2 al tempo t_2 (stato deformato). Sinteticamente (Figura 6.5) si può seguire la seguente procedura:

1. si considera una sub immagine SI_1 (con centro in Ps_1 - punto nel piano del sensore);

2. si ricercano quindi , utilizzando i procedimenti di correlazione descritti per la DIC/2D, le corrispondenti sub immagini SI_2 (con centro in Ps_2), $SI_1^{'}$ (con centro in $P_{s1}^{'}$) e $SI_2^{'}$ (con centro in $P_{s2}^{'}$);
3. si determinano così il punto P (di coordinate X,Y,Z) del corpo indeformato e il corrispondente punto $P^{'}$ (di coordinate X',Y',Z') del corpo deformato;
4. ripetendo la procedura per le altre sub immagini si determina sia la forma del corpo deformato sia quella del corpo deformato;
5. si determina infine il campo degli spostamenti (u, v, w) dalle posizione di punti $P^{'}$ e P relative al corpo deformato e indeformato.

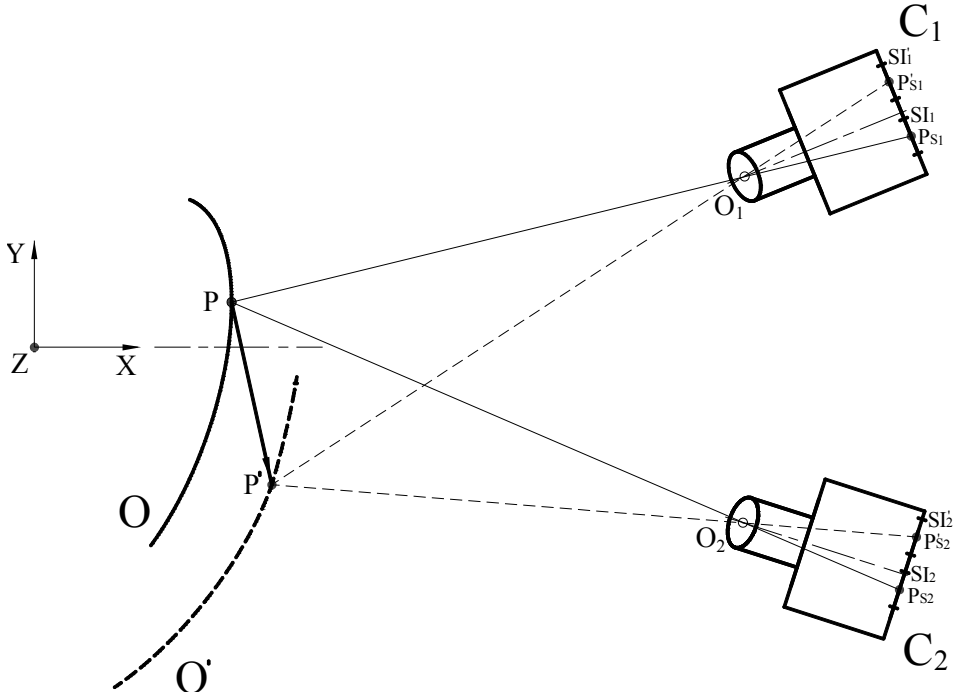


Figura 6.5– Determinazione della forma e del campo degli spostamenti (O = corpo indeformato, O' = corpo deformato): SI_1 (con centro in Ps_1), SI_2 (con centro in Ps_2), $SI_1^{'}$ (con centro in $P_{s1}^{'}$) e $SI_2^{'}$ (con centro in $P_{s2}^{'}$) sono sub immagini relative al punto P indeformato e P' deformato.

Capitolo 7

Tecniche basate sull'effetto termoelastico

7.1 Introduzione

7.1.1 Principio

L'*effetto termoelastico* consiste nella variazione reversibile di temperatura che accompagna la deformazione elastica di un solido. Tale effetto dipende dalla variazione di volume del solido ed è quindi analogo all'effetto che si verifica nei gas che notoriamente si raffreddano o si riscaldano nel caso rispettivamente di espansione o compressione in condizioni adiabatiche. In modo analogo un corpo solido manifesta a causa dell'effetto termoelastico:

- una diminuzione di temperatura ($\Delta T<0$) nel caso di trazione pura,
- un aumento di temperatura ($\Delta T>0$) nel caso di compressione pura,
- una variazione di temperatura nulla ($\Delta T=0$) caso di torsione pura.

Diversamente dai gas però le variazioni di temperatura sono molto piccole essendo dell'ordine dei centesimi di Kelvin. La variazione di temperatura, come nei gas, dipende dal tipo di trasformazione: essa è massima nel caso di trasformazione *adiabatica* che si realizza caricando velocemente il corpo solido (ad esempio con carichi dinamici, ciclici, ecc.).
La variazione di temperatura associata all'effetto termoelastico (Weber 1830, Lord Kelvin 1853) è stata osservata anche mediante il rilievo dell'emissione nell'infrarosso (1967). I primi sistemi commerciali appaiono all'inizio degli anni 80. In aggiunta al riferimento generale [0.5], si rimanda ai riferimenti specifici riportati in bibliografia [7.1, 7.2].

7.1.2 Campi tensionali esaminabili

I metodi basati sull'effetto termoelastico sono metodi a campo intero [l'acquisizione è effettuata per punti: in modo seriale nei sistemi con un solo sensore, ed in parallelo neir sistemi a matrice di sensori (FPA – *Focal Plane Array*)] che forniscono, per i materiali isotropi, la somma delle tensioni principali in corrispondenza della superficie del componente sollecitato in campo elastico lineare. Per ottenere le singole tensioni principali è possibile impiegare, in taluni casi procedimenti, di *separazione delle tensioni*.

7.1.3 Materiali esaminabili

I metodi basati sull'effetto termoelastico sono applicabili ai materiali omogenei, isotropi, con comportamento elastico lineare. La legge dell'effetto termoelastico è stata estesa ai materiali compositi. Non ci sono limitazioni particolari sulla finitura superficiale. E' opportuno l'uso di una vernice nera per migliorare l'emissione nell'infrarosso.

7.1.4 Altre caratteristiche

Si tratta di una tecnica potenzialmente destinata all'impiego in ambiente industriale, anche se attualmente è principalmente usata in laboratorio.
Gli attuali sistemi commerciali si basano sull'effetto termoelastico rilevato mediante termografia all'infrarosso. Caratteristiche peculiari di tali sistemi sono: (1) l'elevata risoluzione; (2) il carico ciclico al fine di rendere il processo adiabatico; (3) l'eliminazione delle variazioni spurie di temperatura attraverso la correlazione del segnale di misura con quello di carico (sistemi *lock-in*). I sistemi che usano un unico sensore hanno un tempo di acquisizione piuttosto elevato (anche di ore). La risoluzione è come per la fotoelasticità e l'estensimetria elevata (5 μm/m). Il costo delle apparecchiature è attualmente (2009) abbastanza elevato.

7.2 Tipo di informazione sperimentale e relazioni caratteristiche

La variazione di temperatura che accompagna l'effetto termoelastico dipende dalla variazione di volume e quindi dallo stato di deformazione del corpo solido. Utilizzando la relazione costitutiva del materiale la variazione di temperatura può essere messa in relazione con lo stato di tensione.

7.2.1 Materiali isotropi

Nel caso di materiali isotropi è possibile determinare la somma delle tensioni principali attraverso la misura della variazione di temperatura che accompagna la deformazione elastica adiabatica del solido. Precisamente,

per (1) solido omogeneo e isotropo deformato in campo elastico lineare, (2) sollecitazione in condizioni adiabatiche, (3) costanti elastiche indipendenti dalla temperatura, la variazione di temperatura ΔT dovuta all'effetto termoelastico dipende dalla variazione della somma delle tensioni principali, cioè essendo nulla in superficie la tensione principale σ_3:

$$\boxed{\Delta T = -KT\Delta(\sigma_1 + \sigma_2)} \text{ con } K = \alpha/\rho c_p \qquad (7.1),(7.2)$$

dove T è la temperatura media assoluta del corpo, K è la *costante termoelastica*, α è il coefficiente di dilatazione termica lineare, c_p è il calore specifico a pressione costante e ρ èla densità. Dato che il coefficiente α è in genere positivo la (7.1) conferma che uno sforzo normale produce raffreddamento o riscaldamento secondo che si tratti di trazione o compressione mentre una sollecitazione di torsione ($\sigma_2 = -\sigma_1$) non provoca variazioni di temperatura. La tabella 7.1 riporta, per alcuni materiali, i valori indicativi di K unitamente alle variazioni di temperatura che si manifestano in conseguenza dell'effetto termoelastico.

Tabella 7.1: Risposta termoelastica, alla temperatura $T=297$ K, per alcuni materiali sollecitati a trazione semplice: la colonna (4) mostra la variazione di temperatura per il materiale sollecitato al limite di proporzionalità, le colonne (5) e (6) mostrano le variazioni di tensione e di deformazione che provocano una variazione di temperatura di 0,001 K

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Materiale**:**	σ_P	K	$\Delta\sigma=\sigma_p$	ΔT=0.001 K	ΔT=0.001 K
	[N/mm^2]	[mm^2/N]	ΔT [°K]	$\Delta\sigma$ [N/mm^2]	$\Delta\varepsilon$ [μm/m]
Acciaio	400	$3.5\cdot10^{-6}$	0.4	1	5
Alluminio	140	$8.8\cdot10^{-6}$	0.4	0.4	6
Resine epossidiche	40	$62\cdot10^{-6}$	0.7	0.05	18

7.2.2 Materiali compositi

Nel caso di un materiale composito la relazione (7.1) non è più valida. Sotto le altre ipotesi sopra considerate (cap. 7.2.1) una lamina omogenea (a livello macromeccanico) e ortotropa subisce una variazione di temperatura dovuta all'effetto termoelastico che è legata alle tensioni dalla seguente relazione (valida a rigore in assenza di strato superficiale in pura resina):

$$\boxed{\Delta T = -\frac{T}{\rho c_p}(\alpha_L \Delta\sigma_L + \alpha_T \Delta\sigma_T)} \tag{7.3}$$

dove i pedici *L* e *T* si riferiscono alle direzioni principali del materale.

7.3 La misura della varazione di temperatura

La misura della piccola variazione di temperatura dovuta all'effetto termoelastico viene effettuata mediante *termografi differenziali* ad elevata risoluzione. Tali termografi, dotati di sensori fotovoltaici ad elevata risoluzione, rilevano il flusso fotonico di energia relativo ad una certa banda di lunghezze d'onda nel campo dell'infrarosso [ad esempio: sensori Indio-Antimonio (InSb) e sensori Cadmio-Mercurio-Tellurio (CMT) attivi rispettivamente nei seguenti campi di lunghezze d'onda: 2-5 μm e 8-12 μm]; in particolare la variazione del flusso fotonico di energia $\Delta\Phi$ è legato alla variazione di temperatura ΔT dovuta all'effetto termoelastico da una relazione delo tipo:

$$\Delta\Phi = f(T, e, \Delta\lambda)\Delta T \tag{7.4}$$

dove la funzione *f* dipende dalla temperatura media assoluta *T* del corpo, dal coefficiente di *emissività e* della superficie del corpo e dalla banda $\Delta\lambda$ di lunghezze d'onda in cui è attivo il sensore. Per un dato set up sperimentale *f* assume un valore costante determinabile mediante taratura del sistema. Dalla variazione di temperatura determinata mediante la (7.4) si risale nel caso dei materiali isotropi alla somma delle tensioni mediante la (7.1).

Negli ultimi anni i termografi ad unico sensore (come il sistema SPATE) sono stati praticamente sostituiti dai sistemi a matrice di sensori [7.3, 7.4], capaci di completare la misura a campo intero in minor tempo (in genere non oltre 30 secondi), con una risoluzione geometrica migliore. Al fine di realizzare le condizioni adiabatiche il solido viene sollecitato ciclicamente ad una frequenza opportuna la cui scelta dipende dalla conduzione del calore nel materiale costituente il solido e dalla dispersione del calore nell'ambiente circostante. Indicativamente il campo di frequenze è compreso tra 1 Hz e 30 Hz. La misura delle piccole variazioni di temperatura dovute all'effetto termoelastico risente di varie grandezze di influenza (segnali spuri di temperatura). I segnali spuri aventi frequenze diverse da quelle del carico vengono eliminati mediante opportuni filtri. Senza entrare nei dettagli si può dire che la correlazione in frequenza, tra il segnale di misura è quello di carico consente di eliminare i disturbi aventi frequenza diversa da quella del carico e che la correlazione in fase consente di stimare la condizione di adiabaticità.

Capitolo 8

Tensioni residue

8.1 Introduzione

Le tensioni residue (TR) sono quelle tensioni che si manifestano in assenza di forze esterne nei componenti che si trovano a temperatura uniforme. Le tensioni residue costituiscono evidentemente un sistema equilibrato, cioè la forza risultante ed il momento risultante sono nulli.

In esercizio le TR si compongono con le tensioni dovute alle forze agenti e di conseguenza influenzano il comportamento del materiale per ciò che riguarda sia la stabilità strutturale e dimensionale sia la resistenza alla fatica e alla frattura.

I metodi di analisi sperimentale delle tensioni residue si dividono in *distruttivi*, *semidistruttivi* e *non distruttivi* a secondo del grado di danneggiamento che l'applicazione del metodo provoca nei componenti analizzati. I metodi meccanici si basano sulla misura delle deformazioni prodotte dal rilassamento, parziale o totale, che le tensioni residue subiscono a seguito di una modifica della geometria del componente sede di TR. Tali metodi sono quindi semidistruttivi o distruttivi a secondo del tipo di modifica apportata.

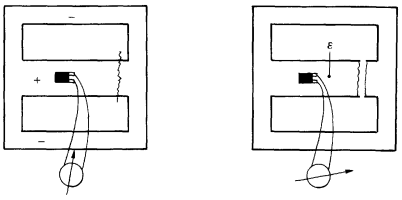
I metodi basati sulla diffrazione dei raggi X o dei neutroni misurano la deformazione del reticolo cristallino. Essi sono non distruttivi ma limitati (raggi X) alla superficie. Gli altri metodi (ultrasuoni, metodi magnetici, fotoelasticità) si basano sulla misura di varie grandezze fisiche legate alle tensioni residue e sono non distruttivi. In particolare la fotoelasticità è particolarmente adatta al controllo non distruttivo delle tensioni residue nei manufatti in materiale birifrangente, quale vetro e materie plastiche [2.7-2.10].

8.2 I metodi meccanici

I metodi meccanici si basano sulla misura delle deformazioni prodotte dalla ridistribuzione (rilassamento parziale o totale) che le tensioni residue subiscono allorquando si produce una opportuna modifica nella geometria (foro, cava, taglio, rimozione di materiale, etc.) del componente in studio.
Nelle tecniche attuali le deformazioni sono misurate mediante estensimetri elettrici a resistenza anche se non mancano esempi di impiego di metodi ottici. Dalla misura delle deformazioni si risale quindi alle tensioni residue. Il calcolo è possibile, nelle usuali ipotesi di rilassamento elastico delle tensioni, se è nota, per la particolare variazione di geometria prodotta nel componente, la relazione tra deformazioni misurate e TR. Nel caso di rilassamento totale delle tensioni la suddetta relazione si riduce al legame deformazione-tensione con il segno cambiato per tener conto del fatto che la lettura iniziale viene effettuata sotto carico. Così ad esempio nel caso semplice di un componente (Figura 8.1) il cui elemento centrale è soggetto a TR di trazione l'esecuzione di un taglio provoca il rilassamento totale delle TR e quindi risulta:

$$\sigma_r = -E\varepsilon \tag{8.1}$$

dove ε è la deformazione (di compressione) misurata dall'ER a seguito del taglio.



(a) (b)

Figura 8.1: Principio dei metodi meccanici di analisi delle tensioni residue: il taglio dell'elemento centrale teso (a) provoca l'annullamento delle TR e la conseguente deformazione negativa (b).

8.2.Il Metodo del foro

Il metodo del foro (o della rosetta forata) si basa (Figura 8.2a) sulla:

1. applicazione di una rosetta estensimetrica a tre griglie radiali;
2. esecuzione di un foro passante o di profondità uguale circa al raggio medio della griglia, centrato sulla rosetta;
3. misura delle deformazioni prodotte dal rilassamento delle tensioni residue;

4. calcolo delle tensioni residue mediante l'elaborazione delle deformazioni misurate.

Le rosette estensimetriche realizzate per il metodo del foro prevedono, a secondo dei modelli, un diametro ed una profondità del foro variabili tra 0,75 e 6 mm. Sul metodo del foro, che è stato standardizzato dall'ASTM nel 1981 [8.1], esiste un'ampia letteratura tecnica [1.5, 8.2].
Per applicare il metodo bisogna conoscere la relazione tra la deformazione misurata e le tensioni residue.

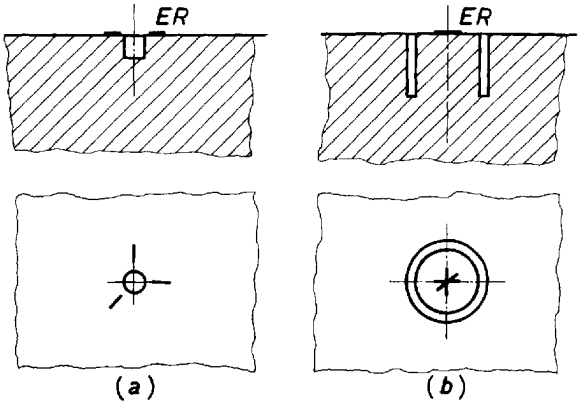


Figura 8.2: Metodi meccanici semidistruttivi di analisi delle tensioni residue: (a) metodo del foro, (b) metodo della cava (ER = rosetta estensimetrica).

Il metodo del foro per tensioni costanti nello spessore
Nelle usuali ipotesi di (1) materiale isotropo, (2) foro centrato sulla rosetta, (3) rilassamento elastico delle tensioni e (4) tensioni costanti lungo la profondità del foro la relazione tra la deformazione rilassata a seguito della foratura e le tensioni residue originarie è del tipo:

$$\boxed{\varepsilon_i = \frac{A_o}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{B_o}{E}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\alpha_i} \qquad (8.2)$$

dove Ao e Bo sono le *costanti di taratura* (negative) della rosetta.
Per la rosetta rettangolare a tre griglie a/b/c orientate a 0°/45° (o 225°)/90° rispetto all'asse della griglia *a* il sistema di equazioni che si ottiene dalla (8.2) fornisce le tensioni principali σ_1 e σ_2 ed il loro orientamento γ rispetto all'asse della griglia *a*:

$$\sigma_{1,2} = \frac{E}{4A_o}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) \mp \frac{E}{4B_o}\sqrt{(\varepsilon_c - \varepsilon_a)^2 + (\varepsilon_a - 2\varepsilon_b + \varepsilon_c)^2} \qquad (8.3)$$

$$\tan 2\gamma = \frac{\sin 2\gamma}{\cos 2\gamma} = \frac{\varepsilon_a - 2\varepsilon_b + \varepsilon_c}{\varepsilon_c - \varepsilon_a} = \frac{S}{C} \qquad (8.4)$$

dove il segno superiore (-) si riferisce alla tensione principale maggiore σ_1 e l'inferiore (+) alla tensione principale minore σ_2.
Spesso una o più delle ipotesi riportate all'inizio non sono soddisfatte. Per gli effetti dovuti alla violazione delle suddette ipotesi e per le eventuali correzioni si rimanda alla bibliografia [1.5, 8.2].

8.2.2 Il metodo della cava

Il metodo della cava (o della carota) (Figura 8.2-b) si basa sulla:
1) applicazione di una rosetta estensimetrica generalmente a tre griglie sovrapposte;
2) esecuzione di una cava anulare;
3) misura delle deformazioni prodotte dal rilassamento delle tensioni residue;
4) calcolo delle tensioni residue mediante l'elaborazione delle deformazioni misurate.

Il diametro della cava, per le rosette più piccole, è dell'ordine di 20 mm e quindi tale metodo è più distruttivo di quello del foro per contro la sensibilità è più elevata. Il metodo della cava può essere utilizzato [1.5]:
1) come metodo a rilassamento totale eseguendo una cava passante o di profondità adeguata ;
2) come metodo a rilassamento parziale per la misura delle tensioni variabili nello spessore.

Per gli altri metodi estensimetrici di analisi delle tensioni residue si rimanda alla bibliografia[1] [1.5, 8.4].

8.3 La tensiometria mediante raggi X

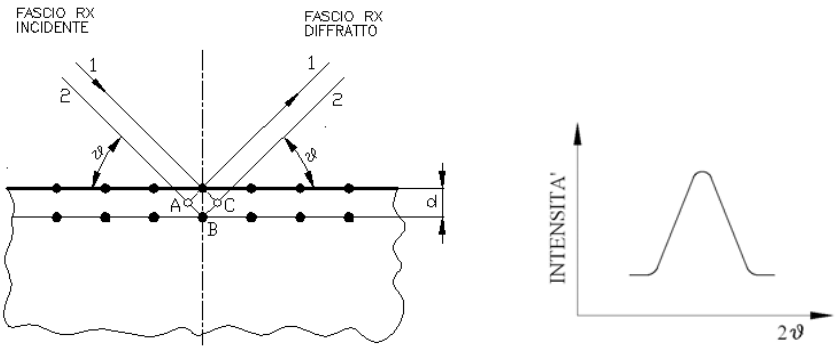
La *tensiometria mediante raggi X* - introdotta nel 1925- si basa sul fatto che: (1) la distanza tra piani reticolari di un materiale policristallino varia con lo stato di tensione; (2) tale distanza può essere misurata mediante la diffrazione di un fascio di raggi X [0.5, 8.3, 8.4]; si utilizza a tal fine la

[1] Si vedeva l'esercizio 8.1, cap. 9 per il metodo della cava rettilinea

seguente *legge di diffrazione di Bragg* in base alla quale si ha un picco di diffrazione quando:

$$2d\sin\theta = n\lambda \quad (\text{n= } 1,2\ldots) \tag{8.5}$$

dove d è la distanza tra i piani reticolari, θ è l'angolo di incidenza (= all'angolo di diffrazione) del fascio di raggi X di lunghezza d'onda λ ed n è l'*ordine di diffrazione* (Figura 8.3).



(a) (b)

Figura 8.3: (a) Diffrazione di un fascio di raggi X incidente con un angolo θ (la variazione di cammino tra i raggi 1 e 2 risulta $\Delta=AB+BC=2d\sin\theta$), (b) picco di diffrazione

Se, per effetto della sollecitazione, la distanza tra i piani reticolari subisce una variazione Δd, anche l'angolo di diffrazione subisce una variazione $\Delta\theta$, per cui in base alla (8.5) si ottiene direttamente la deformazione ε:

$$\varepsilon = \frac{\Delta d}{d} = -\Delta\theta\cot\theta = -\frac{\Delta(2\theta)}{2}\cot\theta \tag{8.6}$$

Le (8.5) e (8.6) mostrano che è possibile, utilizzando la diffrazione dei raggi X, misurare la distanza tra i piani reticolari e quindi la deformazione. In particolare (Figura 8.4) dalla misura delle distanze $d_\perp$ e d_ψ relative ai piani reticolari ortogonali rispettivamente all'asse z e alla direzione formante l'angolo ψ con l'asse z si ottiene:

$$\varepsilon_\psi - \varepsilon_\perp = \frac{d_\psi - d_\perp}{d_o} \approx \frac{d_\psi - d_\perp}{d_\perp} \tag{8.7}$$

essendo ε_ψ ed $\varepsilon_\perp$ le deformazioni nelle direzioni ψ e $\perp$ (ortogonale alla superficie) e d_o è la distanza tra i piani reticolari in assenza di tensioni

La tensione σ_ϕ,formante un angolo ϕ , con la direzione della tensione principale σ_1 , risulta:

$$\boxed{\sigma_\phi = \frac{E}{1+\nu}\frac{1}{\sin^2\psi}(\varepsilon_\psi - \varepsilon_\perp)} \qquad (8.8)$$

La tensiometria mediante raggi X viene di solito impiegata per l'analisi non distruttiva delle tensioni residue superficiali nei materiali policristallini. Caratteristica peculiare del metodo è che non è richiesto un provino di riferimento esente cioè da tensioni residue non essendo necessaria [eq.(8.7)] la conoscenza di d_o. Il metodo è non distruttivo ma l'analisi è limitata alla superficie data la bassa penetrazione dei raggi X. Accoppiando la *tecnica di rimozione degli strati* e la tensiometria mediante raggi X è possibile effettuare misure di tensioni residue in profondità. Su principio analogo si basa la *tensiometria neutronica* con la quale è possibile, grazie alla maggiore penetrazione, effettuare misure in profondità in modo non distruttivo.

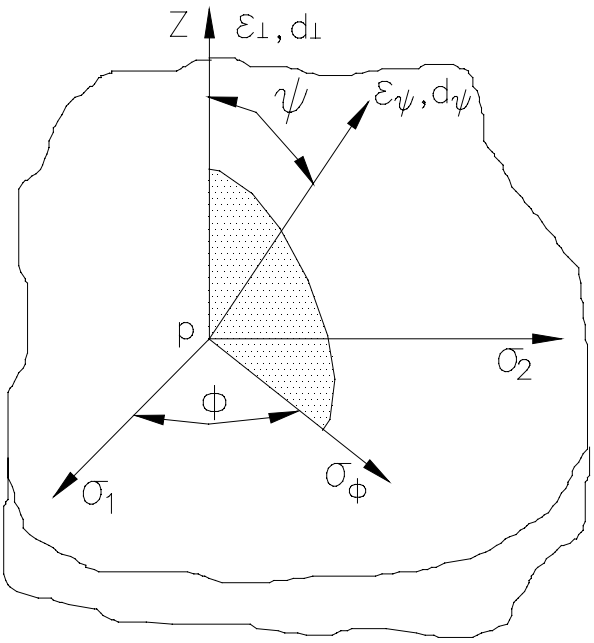


Figura 8.4: Deformazioni e tensioni nell'intorno di un punto P posto in superficie: ε_ψ ed $\varepsilon_\perp$ sono le deformazioni nelle direzioni ψ e $\perp$ (ortogonale alla superficie), σ_1 e σ_1 sono le tensioni residue principali

Capitolo 9

Esercizi

Esercizio 1.1 Incertezza di una misura estensimetrica
Determinare l'incertezza di cui è affetta la deformazione misurata con un ER considerato solamente la tolleranza del fattore di taratura.
Svolgimento – La deformazione è legata alla variazione di resistenza elettrica dalla relazione (1.12) che si riscrive: $\varepsilon = \frac{1}{K}\frac{\Delta R}{R_o}$.
Passando ai logaritmi si ha: $\lg \varepsilon = \lg(\Delta R / R_o) - \lg K$
da cui differenziando: $$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{d(\Delta R / R_o)}{\Delta R / R_o} - \frac{dK}{K}$$

La relazione precedente fornisce l'errore relativo di cui è affetta la misura della deformazione in funzione: 1) dell'errore d(ΔR/Ro)/ΔRo/Ro di misura della variazione di resistenza, 2) della tolleranza dK/K di cui è affetto il fattore di taratura. Tralasciando l'errore di misura della variazione di resistenza che dipende dallo strumento di misura la relazione precedente fornisce: $d\varepsilon/e = -dK/K$, cioè *l'incertezza di una misura estensimetrica non può essere inferiore all'incertezza propria dell'ER, all'incertezza cioè con la quale viene determinato il fattore di taratura K.* In termini numerici la relazione precedente fornisce, dato che in genere (dK/K)%=±1%: $\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\% = \pm 1\%$.

Esercizio 1.2 – Risposta termica di un ER autocompensato nel caso di dilatazione impedita

Una trave perfettamente incastrata ai due estremi, sulla quale è installato un ER autocompensato, subisce una variazione uniforme di temperatura ΔT. Determinare la deformazione indicata dall'ER.

Svolgimento – Se la trave fosse non vincolata (libera cioè di espandersi) la deformazione indicata (= risposta termica dell'ER) sarebbe nulla essendo l'ER autocompensato (cap. 1.3.4.2). Comprimendo ora la trave con una tensione $\sigma = -E\alpha\Delta T$ (dove E= modulo di Young, α= coefficiente di dilatazione termica lineare) si passa dallo stato di trave non vincolata allo stato di trave perfettamente incastrata agli estremi; in tali condizioni l'ER segna la corrispondente deformazione dovuta alla tensione σ, cioè $\varepsilon = \sigma / E = -\alpha\Delta T$

Esercizio 1.3 – Scelta della resistenza dell'estensimetro in base al materiale

Determinare la resistenza elettrica minima *Ro* di un ER da utilizzare su di un provino in vetroresina.

Dati: base di misura dell'ER *lo* = 3 mm, larghezza dell'ER *b* = 1,5 mm, tensione di alimentazione del ponte di Wheatstone utilizzato per le prove *V*= 2 V.

Svolgimento - La densità di potenza ammissibile per il materiale in esame è (tabella 1.7): $P_e^{'} = 0{,}0008\ \mathrm{W/mm^2}$. Introducendo nella (1.21) i valori relativi al caso in studio ($A_e = l_o b = 4{,}5\ \mathrm{mm^2}$) si ottiene il valore minimo della resistenza dell'ER:

$$R_o = \frac{V^2}{4}\frac{1}{P_e^{'} A_e} = \frac{2^2}{4}\frac{1}{0{,}0008 x 4{,}5} = 278\,\Omega$$

Dato che gli ER commerciali hanno di solito i seguenti valori di resistenza elettrica:*Ro*=120 – 350 – 700 - … Ω, bisogna in questo caso scegliere ER aventi almeno *Ro* = 350 Ω.

Esercizio 1.4 Correzione dell'effetto dovuto alla resistenza dei cavi

Un ER viene connesso al ponte con un collegamento a *quarto di ponte a tre fili* (cap.1.4.1) di resistenza non trascurabile rispetto a quella dell'ER. Determinare il valore corretto della deformazione (ε) eliminando cioè l'attenuazione della deformazione misurata (ε') dovuta alla resistenza dei cavi.

Dati: resistenza elettrica dell'ER Ro=120 Ω, resistenza elettrica di un singolo cavo di misura Rc=3 Ω, deformazione misurata $\varepsilon' = 980\ \mu\text{m/m}$.

Svolgimento - La deformazione effettiva risulta in base alla (1.27) tenendo conto che la resistenza totale dei cavi in serie all'ER è in questo caso $R_{Tc} = R_c$:

$$\varepsilon = \varepsilon' \frac{R_o + R_{Tc}}{R_o} = 980 \frac{120+3}{120} = 1005 \mu m/m$$

In questo caso, non tenendo conto della resistenza dei cavi, si commetterebbe un errore $e\% = \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\varepsilon}\% = 100\frac{980-1005}{1005} = -2{,}5\%$.

Esercizio 1.5 Disposizione estensimetrica a ponte completo per la trazione

Dimostrare la formula riportata nella riga 2 della tabella 1.8 riguardante la misura della sola deformazione di trazione anche in presenza di momento flettente spurio e di variazione di temperatura nel corso della prova.

Svolgimento – Si tratta di un collegamento a ponte completo per il quale la relazione generale (1.26) fornisce indicando con $\varepsilon_T, \varepsilon_n, \varepsilon_f, \varepsilon_a$ rispettivamente la deformazione totale misurata, la deformazione di trazione, quella di flessione e quella termica apparente:

$$\varepsilon_T = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 = (\varepsilon_n + \varepsilon_f + \varepsilon_a) - \varepsilon_a + (\varepsilon_n - \varepsilon_f + \varepsilon_a) - \varepsilon_a$$

cioè:

$$\varepsilon_T = 2\varepsilon_n$$

Con tale disposizione sono compensate quindi le deformazioni spurie (termica e di flessione), inoltre la deformazione misurata è doppia di quella imposta.

Esercizio 1.6 Disposizione estensimetrica con misura indipendente dal punto di applicazione del carico

Dimostrare che la disposizione estensimetrica, relativa alla trave soggetta a flessione e taglio, riportata in figura 9.1.1 fornisce una misura indipendente dal punto di applicazione del carico *T* (purché a destra del punto B).

Svolgimento - I 2 estensimetri, paralleli all'asse della trave e disposti a distanza l_A e l_B dal carico, sono collegati su lati adiacenti del ponte (collegamento a mezzo ponte, figura 9.1.1). La (1.26) fornisce non considerando le azioni spurie:

$$\varepsilon_T = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = (\varepsilon_{fA} + \varepsilon_a) - (-\varepsilon_{fB} + \varepsilon_a) = \varepsilon_{fA} - \varepsilon_{fB}$$

cioè

$$\varepsilon_T = \varepsilon_{fA} - \varepsilon_{fB} = \frac{T}{EW}(l_A - l_B) = \frac{T}{EW} l_{AB}$$

dove W è il modulo di resistenza a flessione e l_{AB} è la distanza tra i due ER. La misura non dipende quindi dal punto di applicazione del carico ma solo dalla distanza tra i due ER.

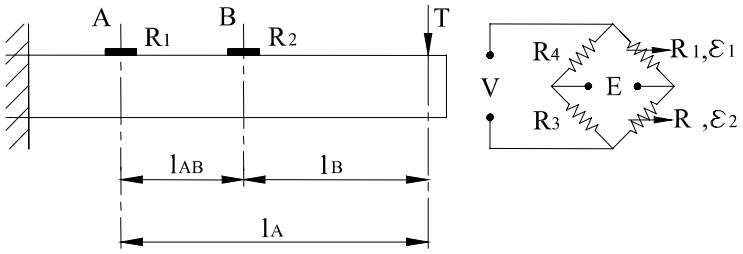


Figura 9.1.1: Disposizione estensimetrica con misura indipendente dal punto di applicazione del carico

Esercizio 1.7 Elaborazione risultati ottenuti con una rosetta estensimetrica

Una rosetta estensimetrica rettangolare fornisce le deformazioni indicate nelle prime tre colonne della tabella 9.1.1. Determinare per ciascun insieme di misure l'angolo (θ_p) che la direzione della deformazione principale maggiore (ε_p) forma con l'asse della griglia *a* della rosetta estensimetrica.

Svolgimento – La relazione (1.35) fornisce l'angolo θ, non identificato, che è riportato in colonna 4:

$$\tan 2\theta = \frac{2\varepsilon_b - (\varepsilon_a + \varepsilon_c)}{\varepsilon_a - \varepsilon_c} = \frac{S}{C}$$

L'ultima colonna riporta invece l'angolo principale correttamente identificato, calcolato mediante la relazione (1.38):

$$\theta_p = \frac{1}{2}\arctan\frac{S}{C} + n90°\ [1]$$

scegliendo $n= 0$ per $C \geq 0$, $n= 1$ per $C<0$ e $S \geq 0$, $n=-1$ per $C<0$ e $S \leq 0$.

[1] Come è facile verificare ciò equivale all'uso della funzione ATAN.2

Tabella 9.1.1: Determinazione dell'angolo principale partendo dalle tre misure ottenute con una rosetta rettangolare a tre griglie

Deformazioni misurate (μm/m)			Angolo principale non identificato (gradi)				Angolo principale identificato (gradi)
ε_a	ε_b	ε_c	$\theta = \frac{1}{2}\arctan\frac{S}{C}$	S	C	n	$\theta_p = \theta + n90°$
200	200	100	22.5	>0	>0	0	22.5
200	100	100	-22.5	<0	>0	0	-22.5
100	200	200	-22.5	>0	<0	1	67.5
100	100	200	22.5	<0	<0	-1	-67.5

Esercizio 2.1 Costante di frangia *F*

La costante di frangia F, data dalla (2.1) si determina mediante taratura effettata con una sorgente monocromatica avente una certa lunghezza d'onda λ_o. Determinare la costante di frangia ad una lunghezza d'onda λ diversa da quella di taratura.

Svolgimento - Dalle relazioni (2.1) e (2.3) si ricava il legame tra la costante di frangia F e la costante fotoelastica C: $F = \lambda/Cd$ dove *d* è lo spessore del modello fotoelastico. Considerando il caso generale in cui la costante C dipenda dalla lunghezza d'onda (*dispersione della birifrangenza*) la relazione precedente si scrive: $F_\lambda = \lambda/C_\lambda d$. Passando dalla lunghezza d'onda di taratura λ_o ad una lunghezza d'onda generica si ha dalla relazione precedente: $F_\lambda = F_{\lambda_o}(\lambda/\lambda_o)(C_o/C_\lambda)$; di conseguenza la nuova costante può essere determinata solo se si conosce la dispersione della birifrangenza cioè la funzione $C_\lambda/C_o = f(\lambda)$. Se la dispersione della birifrangenza è nulla o trascurabile ($C_o/C = 1$) la relazione precedente si riduce a $F_\lambda = F_{\lambda_o}\ \lambda/\lambda_o$.

Esercizio 2.2 - Numerazione delle isocromatiche

Con riferimento alla figura 2.3b numerare le isocromatiche in corrispondenza dell'asse di simmetria orizzontale sapendo che il punto in posizione quasi centrale è un punto isotropo e che le tensioni crescono andando dal punto isotropo verso i contorni.

Svolgimento - Le isocromatiche, essendo a campo scuro, hanno ordini interi [eq. (2.5)] $\delta=n=0, 1, 2\ldots..$. Il punto isotropo è la frangia di ordine 0, gli ordini delle altre frange essendo, come detto, le tensioni crescenti sono quelli indicati nella figura 9.2.1

Figura 9.2.1 – Numerazione delle isocromatiche in corrispondenza dell'asse orizzontale di simmetria del modello di figura 2.3b

Esercizio 3.1 – Determinazione della deformazione con il metodo del moiré

Su di un provino soggetto a trazione sono state rilevate frange moiré, parallele ed equidistanti, aventi distanza d=50 mm. Sapendo che la griglia di riferimento ha una frequenza $F = 1/p = 40$ linee/mm, calcolare la deformazione.

Svolgimento – La deformazione si calcola mediante la formula (3.9) che fornisce:

$$\varepsilon = \frac{p}{d} = \frac{1/40}{60} = 0{,}005 \text{ m/m} = 5000 \text{ } \mu\text{m/m}$$

Esercizio 4.1 – Numerazione delle frange in interferometria olografica ad esposizione doppia

Numerare le frange di figura 4.7a.

Svolgimento – Trattandosi di un'esperienza di interferometria olografica ad esposizione doppia le frange hanno ordini frazionari [eq.42.)]: 0,5-1,5-2,5. . Nel caso specifico all'incastro lo spostamento è nullo e gli spostamenti crescono sempre verso l'estremo superiore del provino quindi gli ordini sono sempre crescenti verso l'alto. La prima frangia dal basso ha ordine 0,5 e così via (ad esempio la terza frangia dal basso ha ordine 2,5).

Esercizio 4.2 – Numerazione delle frange in interferometria olografica a media temporale

Numerare le frange di figura 4.7b

Svolgimento – Gli spostamenti sono nulli (0) all'incastro ed in corrispondenza della linea nodale (di massima luminosità). Di conseguenza, in base alla (4.4) la numerazione approssimativa tra la linea nodale e l'incastro è quella riportata in figura 9 4.1.

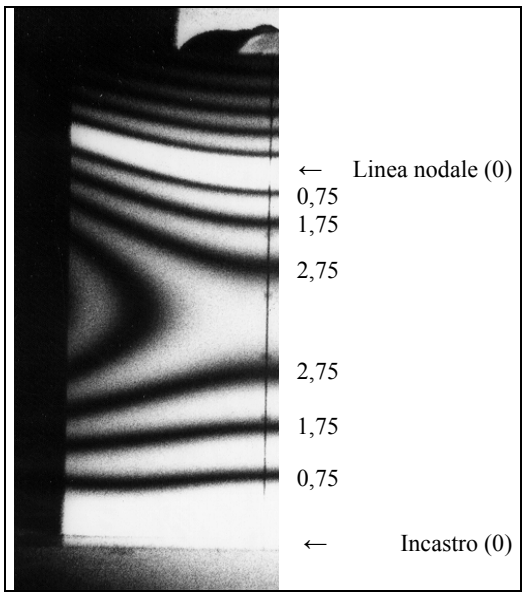


Figura 9.4.1 – Numerazione delle frange in corrispondenza dell'asse verticale di simmetria del modello di figura 4.7b

Esercizio 4.3 – Determinazione dello spostamento in interferometria olografica

Determinare lo spostamento in corrispondenza della frangia di ordine 2,5 di cui all'esercizio 4.1 supponendo $\theta = \varphi = 30°$ e λ = 633 nm (laser elio-neon).

Svolgimento - Lo spostamento *d* coincide, in pratica, con lo spostamento fuori dal piano *w* (Figura 4.12). In base alla (4.18) si ha pertanto:

$$w = \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\lambda}{2}N = \frac{1}{\cos^2 30}\frac{633}{2}2{,}5 = 914 \text{ nm}=0{,}91 \text{ μm}$$

Esercizio 8.1 – Determinazione delle tensioni residue con il metodo della cava rettilinea

Il metodo - Il metodo della cava rettilinea, analogo al metodo della cava anulare, è applicabile nel caso delle travi. Il metodo consiste nella esecuzione di due incassi rettilinei a cavallo di un ER disposto secondo l'asse della trave. Dalla misura delle deformazioni si risale alle tensioni residue mediante la relazione:

$$\sigma = -SE\varepsilon$$

dove ε è la deformazione misurata, S è un coefficiente di rilassamento che risulta uguale ad 1 nel caso di profondità delle cave tali da produrre il rilassamento totale delle tensioni residue.

Esercizio - Si applichi un ER lungo l'asse x longitudinale di una trave di acciaio (E=270000 MPa) soggetta a tensioni residue costanti lungo l'asse x della trave e lentamente variabili lungo lo spessore (y). Eseguendo le due cave rettilinee di profondità tale ad ottenere il rilassamento totale delle tensioni residue si misura il seguente valore di deformazione: ε_x=350 μm/m. Quanto vale la tensione residua supposta constante lungo la profondità (direzione y) della cava eseguita?

Svolgimento – Trattandosi di metodo a rilassamento totale è applicabile la relazione (8.1) o la relazione precedente ponendo S=1; di conseguenza la tensione residua risulta:

$$\sigma_x = -E\varepsilon_x = -207000 * (-350) * 10^{-6} = 72{,}5 \text{ MPa}$$

Capitolo 10

Bibliografia

10.0 Riferimenti generali

[0.1] Bray, A. - Vicentini, V.: "Meccanica sperimentale - misure e analisi delle sollecitazioni" Levrotto & Bella, Torino (1975).

[0.2] Cloud, G.: "Optical methods of engineering analysis", Cambridge University Press (1995).

[0.3] Rastogi, P.K. (Ed.): " Photomechanics", Springer Berlin (1999).

[0.4] Dally, J.W. - Riley, W.F. (2005): "Experimental stress analysis" College House Enterprises LLC, Glen Cove Dr. Knoxville, 2005, (4th Edition).

[0.5] Sharpe, W.N. (Ed): "Handbook of Experimental Solid Mechanics". Springer, New York (2008).

[0.6] Ajovalasit, A.: "Analisi sperimentale delle tensioni con la FOTOMECCANICA". Aracne Editrice (2009).

10.1 Estensimetri elettrici a resistenza

Libri

[1.1] Perry, C.C.- Lissner, H.R.: " The strain gage primer" Mc Graw-Hill, New York 1962.

[1.2] Pople, J.: "BSSM strain measurement reference book" BSSM, Newcastle upon Tyne 1979.

[1.3] Window, A.L. - Holister, G.S.: "Strain gauge technology" Applied Science Publishers, London 1982..

[1.4] Hoffmann,K.: "An introduction to measurements using strain gages" HBM, Darmstadt 1989.

[1.5] Ajovalasit, A.: "Estensimetri elettrici a resistenza", Aracne Editrice, Roma 2008.

Norme tecniche

[1.6] OIML: "Performance Characteristics of Metallic Resistance Strain Gauges", OIML International Recommendation n°62, 1985.

[1.7] C.N.R.: "Estensimetri elettrici a resistenza - manuale per l'impiego e l'analisi dei risultati" Norma tecnica C.N.R., Bollettino Ufficiale n°131, 1989.
[1.8] C.N.R.: "Qualificazione del personale addetto alle prove estensimetriche e relativa certificazione" Norma tecnica C.N.R., Bollettino Ufficiale n°173, 1994
[1.9] UNI 10478-1 "Prove non distruttive - Controllo mediante estensimetri elettrici a resistenza - Termini e definizioni" (1996), 10478-2 Idem - "Scelta degli estensimetri e dei componenti accessori" (1998), 10478-3 Idem - "Installazione estensimetrica e sua verifica" (1998), 10478-4 Idem - "Circuiti di misura, elaborazione e presentazione dei risultati" (1998), 10478-5 Idem - "Controllo delle caratteristiche" (1998).

Siti riguardanti gli ER, gli accessori e la certificazione

[1.10] http://www.luchsinger.it/ (2008)
[1.11] www.hbm.com (2008), www.hbm-italia.it (2008)
[1.12] www.kyowa-ei.co.jp/english/index_e.htm (2008)
[1.13] www.vishay.com/test-measurements (2008)
[1.14] http://www.cicpnd.it (2008)
[1.15] www.sintechnology.com (2008)

10.2 Fotoelasticità

Libri

[2.1] Kuske, A. - G. Robertson: "Photoelastic stress analysis" New York, John Wiley &Sons (1974).
[2.2] Zandman, F. - Redner, S. - Dally J.W.: "Photoelastic coatings", Westport, Connecticut, Society for Experimental Stress Analysis (1977).
[2.3] Theocaris, P.S. - Gdoutos. E.E.: "Matrix theory of photoelasticity", Springer, Berlin (1979).
[2.4] Cloud, G.: "Optical methods of engineering analysis", Cambridge University Press (1995).
[2.5] Ramesh, K.:“Digital Photoelasticity”, Springer, Berlin (2000).
[2.6] Ajovalasit, A.: "Analisi sperimentale delle tensioni con la Fotomeccanica", Aracne Editrice, Roma 2006.

Norme tecniche

[2.7] ASTM C 148: "Standard method for Polariscopic Examination of Glass Containers" Annual Book of ASTM standards.
[2.8] ASTM F218: "Standard method for Analyzing Stress in Glass" Annual Book of ASTM standards.
[2.9] ASTM D4093: "Standard method for Photoelastic Measurement of Birefringence and Residual Strain in Transparent or Translucent Plastic materials" Annual Book of ASTM standards.

[2.10] UNI 7220: 1997 : "Contenitori di vetro. Rilievo delle tensioni residue" (31.03.1997)

Siti

[2.11] http://www.vishay.com/photo-stress-plus/ (2008)
[2.12] www.stressphotonics.com (2008)
[2.13] http://www.luchsinger.it/ (2008)
[2.14]http://www.sharplesstress.com (2008)

10.3 Moiré

[3.1] Theocaris, P.S.: "Moiré fringes in strain analysis", Oxford, Pergamon Press (1969).
[3.2] Durelli, A.J. - Parks, V.J.: " Moiré analysis of strain" Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall (1970)
[3.3] Patorski, K.: "Handbook of the moiré fringe technique" Amsterdam, Elsevier (1993).
[3.4] Post, D. - Han B. - Ifju, P.: "High sensitivity moiré" Berlin, Springer-Verlag (1994).
[3.5] Rastogi, P.K. (Ed.): " Photomechanics", Springer Berlin (1999)

10.4 Olografia

[4.1] Ostrovsky, Y.I. - Butusov, M.M. - Ostrovskaya, G.V.: "Interferometry by holography" Berlin, Springer-Verlag (1980).
[4.2] Abramson, N.: "The making and evaluation of holograms" London , Academic Press (1981).
[4.3] Jones, R., Wykes, C.: "Holographic and speckle interferometry", Cambridge University Press, Cambridge (1983).
[4.4] Hariharan, P. : "Optical holography" Cambridge University Press (1984).
[4.5] Ostrovsky, Y.I. - Shchepinov, V.P, - Yakovlev, V.V.: "Holographic interferometry in experimental mechanics" Berlin, Springer-Verlag (1991).
[4.6] Kreis, T.: "Holographic interferometry", Akademie Verlag, Berlin (1996).
[4.7] Schnars, U., Jueptner, W.: "Digital holography", Springer-Verlag, Berlin (2005)

10.5 Speckle

[5.1] Erf, R.K.: "Speckle metrology", Academic Press, New York (1978).
[5.2] Jones, R. - Wykes, C.: "Holographic and speckle interferometry" Cambridge University Press (1983).
[5.3] Steinchen, W., Yang, L., "Digital shearography", Spie Press Bellingham, Washington USA (2003).
[5.4] http://www.dantec-ettemeyer.com (2008)
[5.5] http://www.gom.com (2008)

[5.6] http://www.steinbichler.de/de/main/espi.htm (2008)

10.6 Metodi a correlazione di immagini digitali

[6.1] Sutton M.A., McNeill S.R., Helm J.D., Chao Y.J.: “Advances in two-dimensional and three-dimensional computer vision” in Photomechanics, (P.K. Rastogi, Ed.). Springer 1999, pp.323-372.
[6.2] SPOTS Project. “Standard guide for image correlation for in-plane displacement/strain analysis in Draft SPOTS Standard Part III(6), Calibration and and assessment of optical strain measurements.]
[6.3] http://www.correlatedsolutions.com (2008)
[6.4] http://www.dantec-ettemeyer.com (2008)
[6.5] http://www.gom.com (2008)
[6.6] http://www.image-instruments.de/ADASIM (2008)
[6.7] http://www.lavision.com (2008)
[6.8] http://www.limess.com (2008)

10.7 Effetto termoelastico

[7.1] Gasper, B.C. (Editor): "Stress analysis by thermoelastic techniques" London 1987 (Proc. of SPIE, volume 731)
[7.2] A. Harwood, W. M. Cummins, (ed.) Thermoelastic Stress Analysis. A. Hilger Pub. 1991, ISBN 0-7503-0075-2
[7.3] http://www.stressphotonics.com (2008)
[7.4] http://www.cedip-infrared.com (2008)

10.8 Tensioni residue

[8.1] ASTM E 837: "Standard Test Method for Determining Residual Stresses by the Hole-Drilling Strain-Gage Method" ASTM Standard Book, Philadelphia Pennsylvania 19103 USA.
[8.2] Valentini, E (Ed.): " Studi per una proposta di raccomandazione sulla Analisi sperimentale delle tensioni residue con il metodo del foro" (a cura del Gruppo di lavoro "Tensioni Residue" dell'AIAS). Quaderno N° 3 dell'AIAS, 1997.
[8.3] SAE J784a: "Residual Stress Measurement by X-Ray Diffraction", SAE Information Report, Warrendale, PA USA 1971.
[8.4] Lu, J.: "Handbook of measurement of residual stresses".SEM Society for Experimental Mechanics, The Fairmont Press (Lilburn, GA 30247) e Prentice Hall, 1996.

Capitolo 11

Indice analitico

A
adesivo per estensimetri, 9

B
base di misura dell’estensimetro, 18
bibliografia, 109

C
caratteristiche dell’estensimetro, 10
circuiti di misura per ER, 20
coefficiente di temperatura del fattore di taratura, 13
compensazione della deformazione termica apparente dell’ER, 14, 15
    compensazione sui materiali compositi, 16
componenti dell’estensimetro installato, 4
correlazione delle immagini (DIC/2D), 89, 92
criteri di scelta dell’estensimetro, 19

D
deformazioni di torsione e taglio, 25
deformazioni di trazione e flessione, 23
deriva dell’ER, 18
determinazione degli spostamenti in olografia, 74
determinazione degli spostamenti nel caso piano (olografia), 77
determinazione delle deformazioni con il metodo moiré, 58
DIC, 89
Diffrazione dei raggi X, 104

disposizioni sperimentali per olografia, 69

E
effetto fotoelastico nel rivestimento birifrangente, 49
effetto fotoelastico, 36
effetto rinforzante del rivestimento birifrangente, 450
effetto speckle, 81
equazioni dell'olografia, 67
esercizi, 107
estensimetri autocompensati, 15
estensimetri compensatori, 15
estensimetri elettrici a resistenza, 1

F
fattori di taratura dell'estensimetro, 11
fotoelasticità a variazione di fase, 44
fotoelasticità piana, 36
fotoelasticità RGB, 43
fotoelasticità, 33
frange moiré con griglie allineate aventi passi differenti, 54
frange moiré con griglie inclinate aventi passi uguali, 56
frange moiré nel caso di deformazione non omogenea, 57

G
griglia estensimetrica, 5
griglie moiré, 54

I
influenza dei cavi di collegamento al ponte, 22
installazione dell'ER, 20
interferometria moiré, 61
interferometria olografica a media temporale, 73
interferometria olografica ad esposizione doppia, 71
interferometria olografica , 70
interferometria olografica ad esposizione singola, 70
interferometria speckle a variazione di fase, 86
interferometria speckle, 83
interferometria speckle: misura degli spostamenti fuori del piano, 83
interferometria speckle: misura degli spostamenti nel piano, 86

interpretazione delle isocromatiche, 42

L
livello di alimentazione dell'ER, 18
legge di Bragg, 104
luce bianca in fotoelasticità, 39
luce polarizzata, 34

M
metodi del moiré, 51
metodi meccanici di analisi delle tensioni residue, 102
metodi speckle, 79
metodo del foro, 102
metodo della cava , 104
metodo DIC/2D, 89
misura della temperatura nei metodi basati sull'effetto termoelastico, 97
moiré geometrico, 54
moiré ombra, 60
moiré, 51

O
olografia, 63

P
polariscopio circolare, 38
polariscopio piano ad assi incrociati, 36
prestazioni dei sistemi DIC ed applicazioni, 94
protettivo per estensimetri, 9
prove preliminari dell'ER, 20

R
raggi X, 104
registrazione dell'ologramma, 67
relazione ritardo – spostamento in olografia, 74
relazione vettoriale in olografia, 76
resistenza di isolamento, 17
resistenza elettrica dell'estensimetro, 11
ricostruzione dell'ologramma, 67
rilievo automatico dei dati fotoelastici, 42
rilievo manuale dei dati fotoelastici, 41

rilievo manuale delle isocline, 41
rilievo manuale delle isocromatiche, 41
rivestimenti fotoelastici, 48
rosette estensimetriche, 28

S
sensibilità alla temperatura dell'estensimetro, 14
sensibilità trasversale dell'estensimetro, 11
sistema di acquisizione in fotoelasticità digitale, 42
sovrapposizione delle griglie moiré, 59
speckle oggettivo, 81
speckle soggettivo, 89
speckle, 79
spessore del rivestimento birifrangente, 50
supporto dell'estensimetro, 7

T
tecniche a correlazione di immagini digitali, 89
tecniche basate sull'effetto termoelastico, 97
tensiometria mediante raggi X, 104
tensioni residue, 101
trasferimento dei risultati dal modello al prototipo, 48
TSA, 97

V
variazione di fase (metodi a), 44, 82