BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

MARIA ALESSANDRA VACCARO

L'azione del gruppo simplettico associata ad un'estensione quadratica di campi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 225–228.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_225_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 225-228

L'azione del gruppo simplettico associata ad un'estensione quadratica di campi.

MARIA ALESSANDRA VACCARO

È ben noto che se L è un campo e (V, f) è uno spazio alternante regolare su L, allora i sottospazi che risultano indecomponibili rispetto ad f, cioè i sottospazi che non si decompongono nella somma ortogonale di due sottospazi propri, sono o rette oppure piani iperbolici. Se K è un sottocampo di L, allora V è anche uno spazio vettoriale su K e nasce spontanea la domanda: quando un K-sottospazio di V è indecomponibile? La classificazione dei K-sottospazi indecomponibili di V permette di determinare le classi d'isometria nell'insieme dei K-sottospazi di V, che non sono altro che le orbite del gruppo simplettico $\mathbf{Sp}_L(V, f)$ in tale insieme.

La classificazione di tali orbite è stata avviata nel 1990 da D. S. Kim e P. Rabau in [3]. Essi determinano le orbite del gruppo simplettico $\mathbf{Sp}_L(V, f)$ nell'insieme dei K-sottospazi di V che risultano totalmente isotropi rispetto alla K-forma alternante $\varphi \circ f$, ove si assegni un'applicazione K-lineare $\varphi : L \to K$.

Il nostro obiettivo è quello di classificare i K-sottospazi indecomponibili di V sotto l'ipotesi che l'estensione L/K sia di grado 2.

Il fatto che l'estensione L/K sia quadratica garantisce che ogni K-sottospazio W di V si decomponga nella somma diretta

$$W = comp_L W \oplus W',$$

dove $comp_L W$ denota la *L-componente di W*, cioè il più grande L-sottospazio di V contenuto in W e W' è una *K-sottostruttura* (si veda [1] e [4]), cioè un K-sottospazio di V generato da vettori linearmente indipendenti su L. Quindi si può associare ad ogni K-sottospazio W di V la coppia di interi

$$(dim_L comp_L W, dim_K W'),$$

che definisce il *tipo di W*. Chiaramente $dim_K W = 2m + n$, se il tipo di W è (m, n). I K-sottospazi di V di tipo $(m, 0)$ e $(0, n)$ sono, rispettivamente, L-sottospazi e K-sottostrutture.

La classificazione delle K-sottostrutture indecomponibili viene portata a termine piuttosto velocemente. Infatti, le classi di isometria nell'insieme delle K-sottostrutture indecomponibili sono determinate direttamente attraverso le classi di isomorfismo dei *K-moduli bialternanti*, cioè delle coppie di forme bilineari alternanti su K. Poiché la classificazione di questi moduli si riconduce, utilizzando un risultato di R. Scharlau [5], a quella dei *K-moduli di Kronecker*, dovuta a J. Dieudonné [2], la classificazione delle orbite del gruppo simplettico $\mathbf{Sp}_L(V, f)$ nell'insieme delle K-sottostrutture di V resta determinata. Essa dipende strettamente dal campo K.

Se W è un K-sottospazio di tipo (m, n) con $m \neq = 0 \neq = n$, allora una condizione necessaria affinché W sia indecomponibile è che $m \leqslant 2$ ed un primo risultato è fornito dal seguente

TEOREMA 1.

(i) *$comp_L W$ è un sottospazio totalmente isotropo di dimensione* $\leqslant 2$ *su L.*

(ii) *Sia U un complemento di $comp_L W$ nello spazio di vettori di W ortogonali a $comp_L W$. Allora $rank(f_{|U}) = 2(p-1)$ e U non si decompone nella somma diretta di due sottospazi ortogonali.*

(iii) *Vale precisamente una delle seguenti affermazioni:*

1. $dim_L(comp_L W) = 1,\ dim_K(U) = 2p - 1$;

2. $dim_L(comp_L W) = 1,\ dim_K(U) = 2p$, *$p$ pari*;

3. $dim_L(comp_L W) = 2,\ dim_K(U) = 2p$, *$p$ pari.*

DEFINITION 1. – *Diremo che un K-sottospazio W è di prima, seconda o terza specie, secondo che valga* **1**, **2** *o* **3**.

A questo punto possiamo enunciare il teorema che ci permette di dare una classificazione completa dei K-sottospazi indecomponibili di V aventi L-componente non banale.

TEOREMA 2. – *Nello spazio simplettico (V, f) esiste, per ogni intero positivo $n < dim_L V$, esattamente un K-sottospazio di tipo (m, n) con $m \neq 0 \neq n$, indecomponibile rispetto alla forma alternante non degenere f. Se W è un tale K-sottospazio, allora W è somma diretta di due K-sottospazi propri totalmente isotropi, $W = W_1 \oplus W_2$. Quindi $f_{|W}$ si rappresenta mediante una matrice della forma*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & M \\ -{}^{t}M & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

e si ha:

- *W di prima specie. Allora* $n = dim_K U + 2 = 2p + 1$,

$$W_1 = \langle w_1' \rangle_L \oplus \langle w_2', \ldots, w_{p+1}' \rangle_K,$$

$$W_2 = \langle w_1'', \ldots, w_{p+1}'' \rangle_K$$

e

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \eta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \eta & \dots & . & 0 \\ . & 0 & 1 & \dots & 0 & . \\ 0 & . & 0 & \dots & \eta & 0 \\ 0 & 0 & . & \dots & 1 & \eta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{Mat}_{p+1}(L).$$

- *W di seconda specie. Allora* $n = dim_K U + 2 = 2p + 2$,

$$W_1 = \langle w_1' \rangle_L \oplus \langle w_2', \dots, w_{p+1}' \rangle_K,$$

$$W_2 = \langle w_1'', \dots, w_{p+1}'' \rangle_K$$

e

$$M = \left[\begin{array}{cc|ccccc|} 1 & \eta & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \cline{3-7} 0 & 1 & J & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & 0 & \mathbf{I}_2 & J & \mathbf{0} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & J & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & & & \ddots & \mathbf{I}_2 & J \\ \cline{3-7} \end{array} \right] \in \mathbf{Mat}_{(p+1) \times (p+2)}(L),$$

con $J = \begin{pmatrix} \eta & \eta^2 \\ 1 & \eta \end{pmatrix}$.

- *W di terza specie. Allora* $n = dim_K U + 4 = 2p + 4$,

$$W_1 = \langle w_1' \rangle_L \oplus \langle w_2', \dots, w_{p+1}' \rangle_K,$$

$$W_2 = \langle w_1'', \dots, w_{p+1}'' \rangle_K$$

e

$$M = \left[\begin{array}{ccc|cccccc|} 0 & 1 & \eta & 0 & . & . & . & . & 0 \\ -1 & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 \\ -\eta & 0 & . & . & . & . & . & . & 1 \\ \cline{4-9} 0 & 0 & 1 & J & \mathbf{0} & \dots & \dots & & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & 0 & \mathbf{I}_2 & J & \mathbf{0} & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & J & & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & & & \ddots & \mathbf{I}_2 & & J \\ \cline{4-9} \end{array} \right] \in \mathbf{Mat}_{p+3}(L),$$

dove $J = \begin{pmatrix} \eta & \eta^2 \\ 1 & \eta \end{pmatrix}$.

Si noti che esiste un K-sottospazio di tipo $(1, n)$ indecomponibile se e solo se $n \not\equiv 0 \ (mod\ 4)$, invece, ne esiste uno indecomponibile di tipo $(2, n)$ precisamente quando $n \equiv 0 \ (mod\ 4)$. Inoltre, due K-sottospazi indecomponibili dello stesso tipo (m, n), $m = 1, 2$, sono sempre isometrici.

È il caso di sottolineare che, contrariamente al caso delle K-sottostrutture, le orbite del gruppo simplettico $\mathbf{Sp}_L(V, f)$ nell'insieme dei K-sottospazi indecomponibili di V aventi L-componente non banale non dipendono dal campo K ed il numero di tali orbite è esattamente $dim_L V - 1$, una per ogni intero h compreso fra 1 e $dim_L V - 1$.

Infine, si vuole segnalare che il gruppo $\mathbf{G}$ delle isometrie di un K-sottospazio indecomponibile W di V è non risolubile esattamente quando W è di terza specie. Infatti, in tal caso $\mathbf{G}$ ha fattori di Levi isomorfi a $\mathbf{SL}_2(L)$, invece nei rimanenti casi tali fattori sono tori unidimensionali su K.

BIBLIOGRAFIA

[1] ARMAND BOREL, *Linear Algebraic groups*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, Paris, London, Tokyo, Hong Kong, Barcelona (1991).
[2] JEAN DIEUDONNÉ, *Sur la reduction canonique des couples de matrices*, Bull. Soc. math. France, **74** (1946), 130-146.
[3] DAE SAN KIM e PATRICK RABAU, *Field extensions and isotropic subspaces in symplectic geometry*, Geom. Dedicata, **34** (1990), 281-293.
[4] PATRICK RABAU, *Action on Grassmannians associated with a field extension*, Trans. Amer. Math. Soc., **326** (1991), 127-155.
[5] RUDOLPH SCHARLAU, *Paare alternierender Formen*, Math. Z., **147** (1976), 13-19.

Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Università di Palermo
e-mail: vaccaro@dipmat.math.unipa.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Messina) - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. C.G. Bartolone, Università di Palermo