La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Giorgia Bellomonte

Disequazioni variazionali, problemi di ottimo e convessità generalizzata

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 239–242.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_239_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Agosto 2008, 239-242

Disequazioni variazionali, problemi di ottimo e convessità generalizzata

GIORGIA BELLOMONTE

1. – Introduzione.

Il lavoro fatto nella tesi propone un'estensione dei principali teoremi sulle disequazioni variazionali vettoriali (VVI), considerando l'ordinamento indotto da un generico cono C di $\mathbb{R}^p$ (convesso, chiuso, puntato e con interno non vuoto) anziché dal classico cono d'ordine $\mathbb{R}^p_+$. Uno dei principali risultati è l'estensione di un risultato in [2], che lega le VVI ad una famiglia di disequazioni variazionali scalari dipendenti da un parametro. Da esso seguono alcuni dei principali teoremi di esistenza mediante il riconducimento al caso scalare. Il risultato, inoltre, insieme ad opportune ipotesi di C-convessità generalizzata sulla funzione obiettivo, garantisce l'esistenza di soluzioni per problemi di ottimo vettoriale.

Il lavoro si conclude con le dimostrazioni di due nuove condizioni sufficienti di *buona posizione* per una disequazione variazionale vettoriale debole (nel seguito VVI^w) il cui operatore ammette primitiva. La prima amplia la classe delle funzioni per cui viene garantita la buona posizione di VVI$^w(X, Jf)$, facendo uso dell'ipotesi di C-pseudo-convessità per la funzione f, anzichè di quella di C-convessità. L'altra condizione, oltre a far uso di quest'ipotesi più debole su f, richiede la connessione di alcuni insiemi $G_{c^0}(\varepsilon)$ coinvolti nella definizione di buona posizione e la limitatezza dell'insieme delle soluzioni del problema di ottimo vettoriale debole (nel seguito VOP^w). Da tali risultati sono poi dedotte altrettante condizioni sufficienti per la buona posizione di VOP$^w(f, X)$.

2. – Problemi vettoriali.

Per poter confrontare i vettori, considereremo la relazione d'ordine (parziale) generata da un cono $C \subset \mathbb{R}^p$ convesso, chiuso, puntato, con vertice nell'origine e con interno non vuoto definita da: $x \leq_C y \Leftrightarrow y - x \in C$ e $x \not\leq_C y \Leftrightarrow y - x \notin C$.

Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $F : X \to \mathbb{R}^{p\times n}$ una funzione a valori matriciali con $F(x) = (F_1(x), F_2(x), ..., F_p(x))$ e $F_i : X \to \mathbb{R}^n$, $\forall i \in \{1, ..., p\}$. Per brevità, useremo la notazione: $F(x)(v) := (\langle F_1(x), v\rangle, ..., \langle F_p(x), v\rangle),\ \forall x \in X,\ \forall v \in \mathbb{R}^n$.

Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme non vuoto, chiuso e convesso e $F : X \to \mathbb{R}^{p\times n}$ con $F(x) = (F_1(x), F_2(x), ..., F_p(x))$ e $F_i : X \to \mathbb{R}^n$, $\forall i \in \{1, ..., p\}$. Il problema: trovare $x^* \in X$ tale che:

$$F(x^*)(y - x^*) \not\leq_K 0, \qquad \forall\, y \in X$$

si definisce *disequazione variazionale vettoriale* VVI(X, F) se $K = C \setminus \{0\}$, si definisce *disequazione variazionale vettoriale debole* VVI$^w(X, F)$ se $K = int\, C$.
Si dice *cono polare positivo di C*, l'insieme $C^+ = \{\xi \in \mathbb{R}^p | \langle \xi, c\rangle \geq 0,\ \forall c \in C\}$; se vale solo la disuguaglianza stretta si ottiene $int\, C^+$, il *cono polare strettamente positivo di C*. Per ogni $\xi \in C^+$, oppure $\xi \in int\, C^+$, si definisce *disequazione variazionale scalare parametrica associata* il problema: trovare $x^* \in X$ tale che:

$$\Big\langle \sum_{i=1}^{p} \xi_i F_i(x^*), y - x^* \Big\rangle \geq 0, \qquad \forall y \in X. \quad VI_\xi(X, F)$$

Con *sol(VVI)*, *sol*(VVI^w) e *sol*(VI_ξ) indicheremo gli insiemi delle soluzioni dei precedenti problemi.

Il Teorema seguente è un'estensione (al caso di un generico cono chiuso, convesso e puntato con interno non vuoto) di un risultato in [2].

TEOREMA 1. – *Valgono le seguenti proprietà:*

i)

$$\bigcup_{\xi \in int\, C^+} sol(VI_\xi) \subseteq sol(VVI) \subseteq sol(VVI^w) = \bigcup_{\xi \in C^+ \setminus \{0\}} sol(VI_\xi), \tag{1}$$

ii) *se F è continua, l'insieme sol*(VVI^w) *è chiuso.*

La prova ha richiesto l'impiego di argomenti di separazione che non erano necessari in [2], grazie alla conoscenza del segno delle componenti dei parametri ξ.

Risolvere una VVI^w, dunque, equivale a risolvere la famiglia parametrizzata VI$_\xi$ di disequazioni variazionali. Allora si possono formulare diversi criteri di esistenza per le VVI riconducendosi al caso scalare per sfruttarne la letteratura più vasta, introducendo anche ipotesi di coercività o di C-monotonia generalizzata per l'operatore F. Inoltre, mediante l'impiego del Teorema 1, alcune dimostrazioni di risultati già noti possono essere limitate a qualche semplice osservazione.

Sia Δ una base compatta e convessa di C^+, definiamo $\Delta^o := \Delta \cap int\, C^+$. La (1) può essere riscritta:

$$\bigcup_{\xi \in \Delta^o} sol(VI_\xi) \subseteq sol(VVI) \subseteq sol(VVI^w) = \bigcup_{\xi \in \Delta} sol(VI_\xi).$$

Sia $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso. La funzione $F : Y \to \mathbb{R}^{p \times n}$ è detta *coerciva su Y* quando esistono $x^* \in Y$ e $\xi \in int\, C^+$ tali che:

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{\langle \xi^T F(x) - \xi^T F(x^*), x - x^*\rangle}{\|x - x^*\|} = +\infty$$

con $x \in Y$.

Esempi di dirette conseguenze del Teorema 1 sono i risultati del teorema seguente, che sono estensione, al caso di un generico cono puntato convesso e chiuso, di altrettanti risultati in [2]. Indicheremo con Ω l'insieme $\bigcup_{\xi \in \Delta^o} sol(VI_\xi)$ e con $\bar{\Omega}$ la sua chiusura.

TEOREMA 2. – i) *Se X è non limitato e la funzione F è continua e coerciva su X, allora $sol(VVI)$ è non vuoto.*

ii) *Se la funzione F è fortemente $C-$monotona e le sue componenti $F_i : X \to \mathbb{R}^n$ sono lipschitziane su X, $\forall i \in \{1, ..., p\}$, allora: gli insiemi $sol(VVI)$ e $sol(VVI^w)$ sono non vuoti e $\Omega \subseteq sol(VVI) \subseteq sol(VVI^w) = \bar{\Omega} = \bigcup_{\xi \in \Delta} sol(VI_\xi)$.*

Sia adesso $f = (f_1, ..., f_p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ e $X \subseteq \mathbb{R}^n$ come prima. Il problema di minimo:

$$\begin{cases} \min_K f(x) \\ x \in X \end{cases}$$

è detto problema di minimo vettoriale VOP se $K = C \setminus \{0\}$ e problema di minimo vettoriale debole VOP^w se $K = intC$. Il punto $x^* \in X$ è detto *soluzione efficiente (debole) del problema VOP (VOP^w)*, quando $f(y) \not\leq_K f(x^*)$, $\forall y \in X$. Indicheremo con $sol(VOP)$ e $sol(VOP^w)$ gli insiemi delle soluzioni.

Mediante il Teorema 1 e l'impiego di ipotesi di C-convessità generalizzata, è possibile riottenere risultati di esistenza per i problemi VOP e VOP^w e risultati che legano le soluzioni del problema VVI^w a quelle dei problemi VOP e VOP^w, anche nel caso di un cono puntato convesso e chiuso. Vale, ad esempio, il seguente

COROLLARIO 1 – *Sia f differenziabile su un aperto contenente X, fortemente $C-$convessa in X. Supponiamo che le funzioni ∇f_i siano lipschitziane. Allora:*

i) *gli insiemi $sol(VOP)$ e $sol(VOP^w)$ sono non vuoti;*

ii) *$\Omega \subset sol(VOP) \subset sol(VOP^w) = \bar{\Omega} = \{x(\xi) | \ \xi \in \Delta\}$ con $x(\xi)$ l'unica soluzione di $VI_\xi(X, Jf)$.*

3. – Buona posizione di problemi vettoriali.

Non esiste una nozione comunemente accettata di buona posizione per problemi di ottimo vettoriale. Nel seguito faremo riferimento alla definizione data in [1]: un punto $x^* \in X$ si dice una *soluzione efficiente approssimata debole di VOP^w, rispetto a $c^0 \in intC$ e $\varepsilon \geq 0$*, quando:

$$f(x) - f(x^*) + \varepsilon c^0 \notin -intC, \quad \forall x \in X. \tag{2}$$

L'insieme dei punti che soddisfano la (2) è denotato con $sol_{\varepsilon c^0}(VOP^w)$; $\forall \varepsilon \geq 0$ e $c^0 \in intC$ vale l'inclusione $sol(VOP^w) \subseteq sol_{\varepsilon c^0}(VOP^w)$ e vale l'uguaglianza se $\varepsilon = 0$.

Siano $D, E \subseteq \mathbb{R}^n$, definiamo $e(E, D) := \sup_{a \in E} d(a, D)$, dove $d(a, D) := \inf_{x \in D} \|x - a\|$.

La successione $\{A_k\}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ si dice *convergente superiormente a* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *nel senso di Hausdorff* (e si scrive $A_k \rightharpoonup A$), quando $e(A_k, A) \to 0$.
Il problema VOP^w si dice *ben posto* quando, per qualche $c^0 \in int C$:

$$sol_{\varepsilon c^0}(VOP^w) \rightharpoonup sol(VOP^w), \text{ per } \varepsilon \downarrow 0. \tag{3}$$

È equivalente chiedere che la (3) valga per ogni $c^0 \in int C$ (cfr. [1], Prop. 3).

Considerati gli insiemi di livello "direzionali" per $\varepsilon > 0$, $c^0 \in int C$

$$G_{c^0}(\varepsilon) := \{x \in X |\, Jf(x)(y-x) \notin -\sqrt{\varepsilon}\|y-x\|c^0 - int C, \qquad \forall y \in X\}$$

il problema VVI$^w(X, Jf)$ è *ben posto* quando:

$$G_{c^0}(\varepsilon) \rightharpoonup sol(VOP^w), \text{ per } \varepsilon \downarrow 0, \tag{4}$$

per qualche $c^0 \in int C$. È equivalente richiedere che la (4) valga per ogni $c^0 \in int C$.

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, convesso e $f : A \to \mathbb{R}^p$ differenziabile, con matrice jacobiana Jf, f si dice: *C-pseudoconvessa su A* quando $\forall x, y \in A$:

$$Jf(x)(y-x) \not\leq_{int C} 0 \Rightarrow f(y) \not\leq_{int C} f(x).$$

Le nuove condizioni sufficienti di buona posizione per VVI$^w(X, Jf)$ e VOP$^w(f, X)$ sono riassunte nel seguente

TEOREMA 3. – *Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e $f : X \to \mathbb{R}^p$ una funzione di classe C^1 su un insieme aperto contenente X. Sia f C-pseudoconvessa. Se vale una delle seguenti ipotesi:*

i) *X è chiuso ed esistono $\varepsilon > 0$ e $c \in int C$ tali che $G_c(\varepsilon)$ è limitato;*

ii) *$sol(VOP^w)$ è limitato ed esiste qualche $c \in int C$ tale che $G_c(\varepsilon)$ è connesso $\forall \varepsilon > 0$;*

iii) *X è compatto.*

Allora $VVI^w(X, Jf)$ e $VOP^w(f, X)$ sono ben posti.

BIBLIOGRAFIA

[1] CRESPI G.P., GUERRAGGIO A. and ROCCA M., *Well-posedness in Vector Optimization Problems and Vector Variational Inequalities*, J.O.T.A., **132** n. 1 (2007), 213-226.

[2] LEE G.M., KIM D.S., LEE B.S. and YEN N.D., *Vector Variational Inequality as a Tool for Studying Vector Optimization Problems*, Nonlinear Analysis, **34** (1998), 745-765.

Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Università degli Studi di Palermo
e-mail: bellomonte@math.unipa.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Palermo) - Ciclo XVIII
Direttore di ricerca: Prof. Pasquale Vetro, Università degli Studi di Palermo