**Autori:** Nicla Palladino, Maria Alessandra Vaccaro*

Università degli Studi di Palermo,

Dipartimento di Matematica e Informatica,

Via Archirafi n. 34, 90123 Palermo,

Tel. 091-23891082, Fax 091-23860710,

e-mail: marialessandra.vaccaro@unipa.it

* Autore di riferimento.

## L'ipocicloide tricuspide: il duplice approccio di Luigi Cremona ed Eugenio Beltrami


**Abstract**

The Hypocycloid tricuspid is one of many examples of "elementary problems" that attracted great mathematicians. This allure is mostly motivated by aesthetic reasons: interpreting such term from a mathematical point of view, it means the extraordinary ability to "see" with the mind's eye the many connections, far from intuitive, among facts, theories and methods that arouse a sense of harmony in those who are able to understand them. In this paper we will emphasize how the sense of "mathematical beauty" is strongly present in mathematicians of the highest level as Luigi Cremona and Eugenio Beltrami.


**Introduzione**

Nel 1864 l'algebrista inglese James Joseph Sylvester scriveva: "*Herein I think one clearly discerns the internal grounds of the coincidence or parallelism, which observation has long made familiar, between the mathematical and musical έθος. May not Music be described as the Mathematic of sense, Mathematic as Music of the reason? the soul of each the same! Thus the musician feels Mathematic, the mathematician thinks Music, – Music the dream, Mathematic the working life – each to receive its consummation from the other when the human intelligence, elevated to its perfect type, shall shine forth glorified in some future Mozart-Dirichlet or Beethoven-Gauss – a union already not indistinctly foreshadowed in the genius and labours of a Helmholtz!*".[1]

Qualche riflessione merita il contesto nel quale il matematico inglese aveva scritto queste osservazioni. È in effetti assai difficile cogliere le assonanze con la musica o più in generale con l'arte in un lavoro che in realtà appare come estremamente tecnico e formale, in un susseguirsi di formule. Una migliore comprensione del suo punto di vista si può avere dalla lettura del passo in cui la nota sul valore artistico della musica è stata inserita. Scriveva Sylvester: "*[...] I have succeeded in evading all necessity for the colossal labours of computation required in M. Hermite's method, and am able to impart to my conclusions the clearness and certainty of any*

[1] [Sylvester 1864, p. 613].

*elementary proposition in geometry, not scrupling to avail myself for such purpose of that copius and inexhaustible wellspring of notions of continuity which is contained in our conception of space, and which renders it so valuable an auxiliary to Mathematic, whose sole proper business seems to me to be the development of the three germinal ideas of which continuity is one and order and number the other two**".[2]

Non quindi la bellezza estetica delle figure geometriche, dei disegni e delle simmetrie. È invece proprio all'interno della matematica che va trovato il suo valore artistico, nella sua "chiarezza e certezza", nell'"evitare ogni bisogno dei calcoli colossali". Una profonda soddisfazione dello spirito riservata a chi sia in grado di vedere le idee dietro i calcoli.

Luigi Cremona ed Eugenio Beltrami furono profondamente colpiti da tale concezione. Nell'aprile del 1865 Cremona aveva scritto all'amico riportando la citazione di Sylvester e Beltrami aveva risposto: "*Credo che ci sia molto di vero nel pensiero del Sylvester che mi trascrivesti. Io non ho mai studiato profondamente la così detta Armonia, che è quella parte della scienza musicale che può in certo qual modo riguardarsi come dottrina razionale, avendo i suoi postulati ed i suoi assiomi, da cui tutto il resto è dedotto. Ma per quel poco che ne so, parmi infatti che il processo mentale ad essa applicabile sia identico o poco meno con quello delle matematiche. Mettendomi per un istante nell'ipotesi materialistica, direi quasi che nell'una e nell'altra scienza sono posti in azione gli stessi organi. Quanto poi alla composizione, nel senso più lato, parmi che subentrino altri elementi, assai differenti dai primi. Comunque sia, è notevole che uno dei più grandi armonisti e compositori dei tempi moderni, Meyerbeer, abbia cominciato collo studiare matematiche, nelle quali si addottorò*".

La lettera del 7 aprile 1865 è contenuta nella Commemorazione di Beltrami, scritta da Cremona, e sembra significativo che il matematico pavese abbia scelto di concludere la memoria del suo amico e collega, forse il più caro tra tutti i suoi amici, con le parole che abbiamo riportato sopra.

In questo lavoro non cercheremo di rintracciare le concezioni teoriche sul rapporto matematica – arte nei due grandi protagonisti della stagione aurea della matematica italiana, quanto piuttosto descrivere uno degli argomenti cui entrambi erano particolarmente affezionati probabilmente per le motivazioni suddette: l'ipocicloide tricuspide e i suoi molteplici collegamenti con le trasformazioni geometriche.

---

[2] Ivi.

In effetti il particolare valore estetico dell'ipocicloide è sempre stato ben noto: "*Ma fra le particolari curve di quart'ordine nessuna gode di tante proprietà eleganti, nessuna fu scopo di tante acute investigazioni, nessuna interviene in così svariate questioni, nessuna è suscettibile di tante generazioni differenti quanto l'ipocicloide tricuspide su cui Steiner attirò l'attenzione del mondo dei geometri con la breve nota Über eine besondere Curve dritter Klasse (und vierten Grades) (Journal für die reine und angewandte Mathematik, 53, 1857)*".[3]

Così Gino Loria presenta l'ipocicloide tricuspide, altrimenti detta quartica di Steiner. Tale curva, di quarto ordine e di terza classe, durante il XIX secolo suscitò l'attenzione di numerosi matematici, tra cui, giusto per citare i più famosi, Jacob Steiner, Ernesto Cesàro, Maurice Fréchet, Heinrich Schröter, Rudolf Friedrich Alfred Clebsch, Giuseppe Battaglini, Edmond Nicolas Laguerre, Arthur Cayley, oltre i già citati Cremona e Beltrami.[4] Il loro interesse è strettamente connesso ad alcune questioni matematiche:

a) la generazione della curva come inviluppo della retta di Simson-Wallace, la cui storia è ricca di passaggi affascinanti;

b) il suo legame con il cerchio di nove punti;

c) la possibilità di ricavare le proprietà dell'ipocicloide tricuspide usando la teoria generale delle curve algebriche ed il fatto che ogni curva dello stesso ordine e della stessa classe è proiettivamente equivalente ad essa;

d) le sue molteplici costruzioni attraverso le trasformazioni geometriche.

Non c'è quindi da stupirsi che l'ipocicloide tricuspide abbia ottenuto una grande popolarità tra i matematici nella seconda metà dell'Ottocento.

Cercheremo quindi di esaminare alcuni aspetti relativi alla storia della retta di Simson-Wallace mostrando che la prima definizione esplicita di tale retta è dovuta a François-Joseph Servois nel 1814 ed è strettamente collegata alla risoluzione di problemi di carattere pratico.

Studieremo la generazione di Steiner dell'ipocicloide tricuspide come inviluppo della retta di Simson-Wallace, analizzeremo un lavoro di Cremona che adoperò metodi più generali della teoria delle curve algebriche per descrivere la quartica e due articoli di Beltrami, che era in stretto contatto con Cremona, nei quali si deducono le proprietà di tale curva mediante l'uso delle trasformazioni quadratiche.

---

[3] [Loria 1896, pp. 74-75].

[4] Una lunga lista è in [Brocard 1896] estesa successivamente da [Mackay 1904].

**La retta di Simson-Wallace**

Dati un triangolo ed un punto arbitrario sulla circonferenza ad esso circoscritta, i piedi delle perpendicolari condotte dal punto ai lati del triangolo (o ai loro prolungamenti) sono allineati su una retta, oggi denominata *retta di Simson-Wallace*. L'inviluppo di tale retta, al variare del punto sulla circonferenza, è un'ipocicloide tricuspide (Fig. 1.).

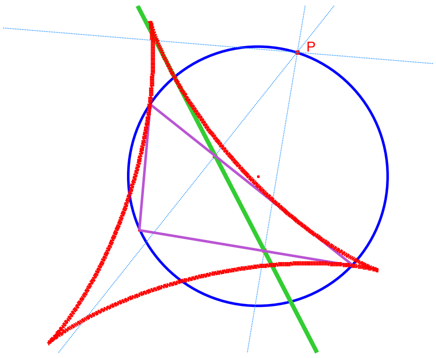


Fig. 1.

Crediamo possa essere appropriata una breve digressione sull'origine del nome della retta di Simson-Wallace, talvolta anche attribuita a Servois[5]. Cremona ne parla nel 1860[6] denominando "problema di Servois" la costruzione della retta: è plausibile che Cremona abbia attribuito a Servois la prima esplicita esibizione del teorema sulla base di quanto affermato da Jean-Victor Poncelet. In effetti nel 1814 Servois, professore alla "école d'artillerie", proponendo la soluzione al problema di geometria pratica: "*Prolonger une droite accessible au delà d'un obstacle qui borne la vue, en n'employant que l'équerre d'arpenteur, et sans faire aucun chaînage?*"[7], utilizza proprio la retta di Simson-Wallace. Servois si avvale del teorema che egli stesso attribuisce a Robert Simson, puntualizzando tuttavia con un "je crois" la sua affermazione: "*La méthode qui vient d'être indiquée plus haut pour déterminer le point C, repose sur le théorème suivant, qui est, je crois, de Simson*"[8]. Successivamente, nel 1822, Poncelet ribadisce che Servois aveva attribuito il teorema a Simson omettendo però il "je crois"[9].

---

[5] Su Servois e le sue opere, si veda [Aebischer – Languereau 2010].
[6] [Cremona 1860].
[7] [Servois 1814, p. 250] "*Prolungare una retta oltre un ostacolo che impedisce la vista, impiegando solo il supporto geometrico, e senza fare alcun concatenamento*?"
[8] [Servois 1814, p. 251] "*Il metodo che è stato appena sopra riportato per determinare il punto C, si basa sul teorema seguente, che è, credo, di Simson*".
[9] [Poncelet 1822, p. 261].

Nel 1890 John Sturgeon Mackay pubblica l'articolo [Mackay 1890] in cui, seguendo [Muir 1884], riconosce la paternità del teorema a Wallace[10]: questa attribuzione è oggi generalmente seguita e la retta è chiamata di Simson-Wallace.

**La generazione di Steiner dell'ipocicloide tricuspide**

Nel 1857 Jacob Steiner per la prima volta, facendo uso di un metodo sintetico, costruisce una curva di quarto ordine e di terza classe[11] (nota come "quartica di Steiner") come inviluppo della retta di Simson-Wallace, non riconoscendola però esplicitamente come ipocicloide tricuspide: "*Die Curve tritt schon beim geradlinigen Dreieck ein. Fället man aus jedem Punkte in der dem Dreieck umschriebenen Kreislinie auf die Seiten Perpendikel, so liegen die je drei Fußpunkte allemal in irgend einer Geraden G, und die Enveloppe aller dieser Geraden ist eine Curve dritter Klasse,* $G^3$*, und vierten Grades, welche die im Unendlichen liegend Gerade,* $G_\infty$*, zur ideellen Doppeltangente hat; ferner hat sie drei Rückkehrpunkte und die drei Rückkehrtangenten schneiden sich in einem und demselben Punkt*".[12]

Steiner determina le rette di Simson-Wallace $G$ e $G_1$ relative ai generici punti $p$ e $p_1$ simmetrici rispetto al centro della circonferenza circoscritta al triangolo fissato e mostra che l'inviluppo delle coppie di rette è una curva di quarto grado e di terza classe, che chiama $G^3$ (Fig. 2.).

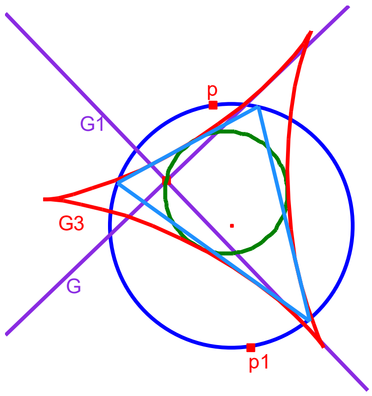


Fig. 2.

[10] [Wallace 1801, p. 111].

[11] La classe di una curva algebrica esprime il numero delle tangenti che da un generico punto si possono tracciare ad essa.

[12] [Steiner 1857, p. 231] "*La curva deriva già da un triangolo. Da un qualsiasi punto del cerchio circoscritto al triangolo si tracciano le perpendicolari ai lati, così certamente i tre piedi giacciono tutti in una qualche retta G, e l'inviluppo di tutte queste rette è una curva di terza classe,* $G^3$*, e di quarto grado, che ha per tangente doppia ideale la retta all'infinito,* $G_\infty$*; inoltre ha tre cuspidi e le tre tangenti cuspidali s'intersecano in uno stesso punto*".

Il luogo dei punti d'intersezione di ogni coppia di rette, a due a due perpendicolari, è il cerchio di nove punti, noto anche come "cerchio di Eulero" o "cerchio di Feuerbach". Esso si costruisce a partire da un qualsiasi triangolo e passa per nove suoi punti notevoli: i punti medi dei lati, i piedi delle altezze e i punti medi dei segmenti che congiungono i vertici del triangolo all'ortocentro (Fig. 3.).

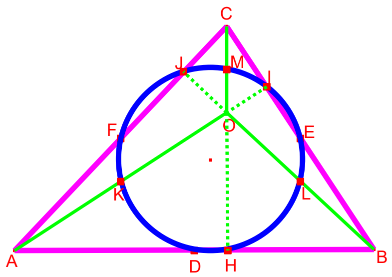


Fig. 3.

L'ipocicloide tricuspide circoscrive il cerchio di nove punti relativo al triangolo che genera la retta di Simson-Wallace. Il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo è doppio del raggio del cerchio di nove punti. Inoltre, quest'ultimo è concentrico con la circonferenza che passa per le tre cuspidi dell'ipocicloide (Fig. 4.).

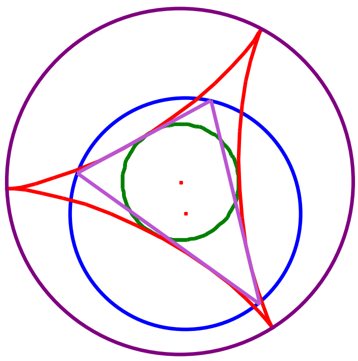

Fig. 4.

L'ipocicloide tricuspide[13] è la curva piana generata da un punto di una circonferenza di raggio $r$ che ruota all'interno di un'altra circonferenza di raggio $3r$ (o, equivalentemente, $2r$) (Fig. 5.).

[13] Per maggiori dettagli, si vedano [Teixeira 1909], [Lemaire 1929], [Loria 1930].

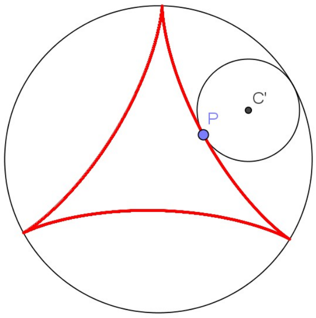


Fig. 5.

Le sue equazioni parametriche sono:

$$\begin{cases} x = r(2\cos\alpha + \cos 2\alpha) \\ y = r(2\sin\alpha - \sin 2\alpha) \end{cases}$$

eliminando il parametro $\alpha$, si ottiene l'equazione cartesiana:

$$(x^2 + y^2)^2 + 8rx(x^2 - 3y^2) + 18r^2(x^2 + y^2) - 27r^4 = 0,$$

Si può vedere facilmente che l'ipocicloide tricuspide passa attraverso i punti circolari impropri ed è ivi tangente alla retta all'infinito.

Come già detto, poiché l'approccio di Steiner è di tipo sintetico, l'autore non identifica la curva da lui costruita come ipocicloide tricuspide, curva comunque già nota in quanto nel 1781 Eulero ne aveva determinato l'equazione[14]. Questa è presente nella prima edizione di [Salmon 1852, p. 214] in cui George Salmon procede partendo dalla definizione classica della curva. È Cremona che dimostra nel 1864 l'equivalenza tra la quartica di Steiner e l'ipocicloide tricuspide attraverso una trattazione puramente geometrica. In seguito nel 1873, nella seconda edizione del suo volume[15], Salmon conduce una dimostrazione algebrica inerente alla stessa equivalenza.

**L'interesse di Cremona per l'ipocicloide tricuspide**

Luigi Cremona è tra coloro che dimostrarono e ampliarono i teoremi di Steiner. Nel 1864 insegna a Bologna ed è già famoso in campo internazionale anche grazie ai lavori sulle curve piane e sulle trasformazioni geometriche[16]. In particolare, la *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* è il primo testo sintetico sull'argomento dopo il lavoro analitico di Salmon del 1852.

---

[14] [Euler 1781].
[15] [Salmon 1873, p. 271].
[16] Su Luigi Cremona e la sua bibliografia, si veda http://www.luigi-cremona.it/.

Cremona si interessa alla quartica di Steiner nel lavoro [Cremona 1864], poiché ogni curva dello stesso ordine e della stessa classe dell'ipocicloide tricuspide può essere in essa trasformata attraverso una omografia, come egli stesso asserisce nell'introduzione: "*La courbe, dont il s'agit dans le mémoire cité de Steiner, passe par les points circulaires à l'infini et a une tangente double, qui est la droite à l'infini. Mais les mêmes théorèmes continuent de subsister pour une courbe quelconque du même ordre et de la même classe: il n'y a presque rien à changer, même aux démonstrations. Il suffit seulement de substituer deux points fixes quelconques aux points circulaires à l'infini: ce qui revient à faire une transformation homographique*"[17].

Inoltre, egli vuole mostrare che le proprietà di detta curva sono conseguenze per dualità, in modo naturale, delle proprietà generali delle curve di terzo ordine che ha trattato nella sua recente memoria [Cremona 1862] "*Je crois qu'il ne sera pas sans intérêt de voir ces propriétés si élégantes découler tout naturellement de la théorie générale des courbes planes du troisième degré (ordre ou classe) […] Cette manière d'envisager la question mettra en évidence le lien naturel qui enchaîne toutes ces propriétés, en apparence si différentes, et fera aussi connaître quelques résultats nouveau*"[18]. Cremona espone le dimostrazioni usando le proprietà generali della teoria delle curve, non solo provando le principali proprietà dell'ipocicloide, alcune delle quali già citate da Steiner, ma anche introducendone di nuove. Gli scopi dell'autore sono fondamentalmente due: provare che ogni curva di quarto grado e terza classe (che chiama $C^3$) che passa attraverso i punti circolari impropri e che ha la retta all'infinito come tangente doppia è una ipocicloide tricuspide (in accordo con la definizione classica di curva generata da una circonferenza che rotola all'interno di un'altra) e dimostrare che essa coincide necessariamente con la quartica di Steiner.

Cremona dimostra una prima proprietà: le tangenti a $C^3$ sono perpendicolari a due a due e i relativi punti di contatto giacciono su una terza tangente [Cremona 1864, par. 2]. È interessante

[17] [Cremona 1864, par. 1] "*La curva, di cui si tratta nella memoria citata da Steiner, passa per i punti circolari all'infinito e ha una tangente doppia, che è la retta impropria. Ma gli stessi teoremi continuano a sussistere per una curva qualunque dello stesso ordine e della stessa classe: non c'è quasi nulla da cambiare, neanche le dimostrazioni. Basta soltanto sostituire due punti fissi qualsiasi ai punti circolari all'infinito: ciò che compete ad una trasformazione omografica*".

[18] [Cremona 1864, par. 1] "*Credo che non sarà privo d'interesse vedere derivare in modo del tutto naturale queste proprietà così eleganti dalla teoria generale delle curve piane di terzo grado (ordine o classe) […] Questa maniera di inquadrare la questione metterà in evidenza il naturale collegamento che concatena tutte queste proprietà, in apparenza così differenti, e inoltre farà conoscere alcuni risultati nuovi*".

vedere come egli utilizzi ragionamenti generali per dimostrare questa proprietà: il fatto che la retta impropria sia una tangente doppia implica che per ogni suo punto passi una e una sola altra tangente alla $C^3$ (o in altri termini, che non ci siano due tangenti alla $C^3$ parallele tra loro). Al variare di un punto $g$ su $C^3$ la tangente in esso incontra la curva in altri due punti, le cui tangenti tagliano nella retta impropria due punti in involuzione rispetto ai punti ciclici: ne discende quanto detto prima.

Inoltre se tre tangenti $G$, $H$, $I$ alla curva $C^3$ passano per uno stesso punto $d$, le tangenti ad esse perpendicolari (coniugate), $G'$, $H'$, $I'$, formano un triangolo $abc$ del quale $G$, $H$ e $I$ costituiscono le altezze. Pertanto le tre coppie di tangenti perpendicolari $GG'$, $HH'$ e $II'$, formano i lati di un quadrangolo completo ortogonale $abcd$ (le cui coppie di lati opposti sono ortogonali, per cui il punto $b$ può essere visto come l'ortocentro del triangolo $adc$) [Cremona 1864, par. 4] (Fig. 6.).

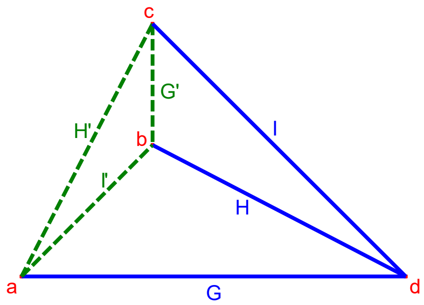


Fig. 6.

La figura successiva mette in evidenza il fatto che ciascun vertice del quadrangolo completo ortogonale è il punto d'intersezione delle altezze del triangolo formato dai tre rimanenti. Inoltre le perpendicolari alle tre tangenti alla curva uscenti dal punto $d$ s'incontrano nei punti $a'$, $b'$ e $c'$ rispettivamente.

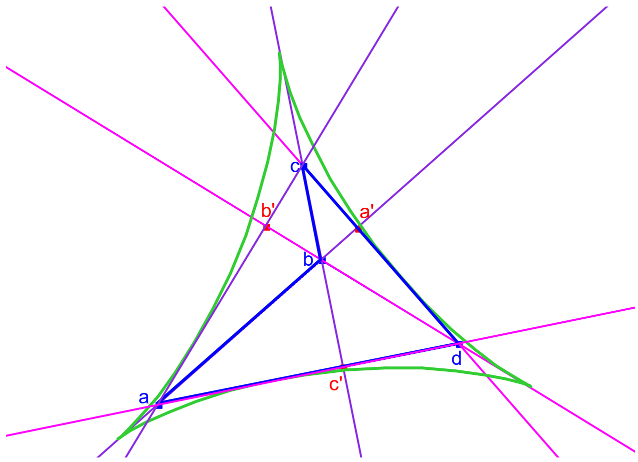


Fig. 7.

Il luogo dei punti comuni alle coppie di tangenti perpendicolari di $C^3$ è una circonferenza, che chiama $C^2$ (il cerchio dei nove punti relativo al triangolo *abc*), unitamente alla retta impropria poiché questa è una tangente autoconiugata. Per ogni punto di $C^2$ passano quindi tre tangenti a $C^3$, di cui due sono ortogonali tra di loro [Cremona 1864, par. 6].

Dalla teoria generale delle curve mostra che $C^3$ ha tre cuspidi, $p$, $q$, $r$, che sono punti reali poiché i punti di contatto della tangente doppia sono punti immaginari[19]. Poiché un punto cuspidale $p$ assorbe tre intersezioni comuni della $C^3$ con la sua tangente in quel punto, tale tangente incontrerà la curva in un altro punto $u$ che appartiene anche al cerchio $C^2$. Indicati con $v$ e $w$ gli analoghi punti di $C^3 \cap C^2$ corrispondenti alle altre due cuspidi $q$ e $r$, si ha che le rette $pu$, $qv$ e $rw$, tangenti nei punti singolari di $C^3$ e perpendicolari alle tangenti in $u$, $v$ e $w$, passano per il centro $o$ di $C^2$. Denotati con $u'$, $v'$ e $w'$ i punti di $C^2$ diametralmente opposti a $u$, $v$ e $w$, ed essendo $u'$, $v'$ e $w'$ i punti medi[20] dei segmenti $pu$, $qv$ e $rw$ rispettivamente, allora si ottiene che $op = 3ou$, $oq = 3ov$ e $or = 3ow$, cioè i punti cuspidali appartengono ad una circonferenza concentrica e avente raggio triplo di $C^2$ [Cremona 1864, par. 8] (Fig. 8.).

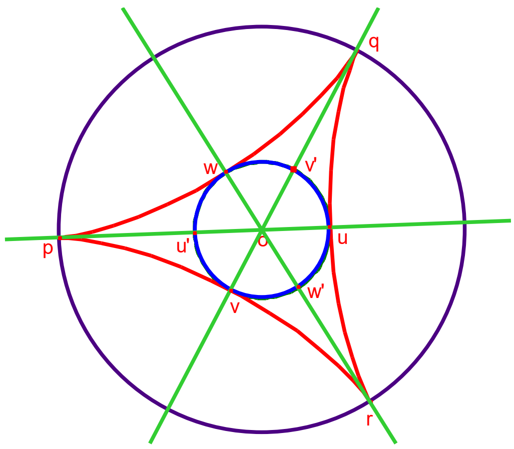


Fig. 8.

Se nella circonferenza passante per $p$, $q$ e $r$, si fa rotolare un'altra circonferenza avente raggio 1/3 di quello della prima, che sia tangente al primo cerchio in $p$, tale punto, considerato come appartenente al cerchio mobile, genera una curva del quarto ordine, che ha tre cuspidi in $p$, $q$ e $r$:

---

[19] Come è facile ricavare dalle formule di Plücker, una curva di terza classe e quarto ordine che possiede una tangente doppia (punto doppio nella duale) ha necessariamente tre cuspidi e non ha altri punti singolari, poiché l'ordine $n$ e la classe $n'$ sono collegate dall'equazione $n' = n\,(n - 1) - 2d - 3c$, dove $d$ è il numero di nodi e $c$ quello delle cuspidi.

[20] L'autore ha dimostrato in [Cremona 1862, par. 134, a] che i punti $p$, $u$, $u'$ e il punto all'infinito della retta $pu$ formano una quaterna armonica, che equivale a dire che $u'$ è il punto medio del segmento $pu$.

questa roulette è esattamente la curva $C^3$. Pertanto Cremona conclude: "*La courbe $C^3$ est donc l'hypocycloïde à trois rebroussements engendrée par un cercle de rayon = 1/3 op (ou, ce qui donne le même résultat, de rayon = 2/3 op) qui roule dans l'intérieur du cercle (pqr). Ainsi toute courbe de troisième classe et quatrième ordre, dont la tangente double soit à l'infini et les points de contact sur un cercle, est nécessairement une hypocycloïde à trois rebroussements. Cette courbe joue donc, parmi les courbes de la troisième classe et du quatrième ordre, le même rôle que le cercle parmi les coniques*"[21].

Ritornando al triangolo *abc* costituito dalle perpendicolari alle tangenti all'ipocicloide uscenti da uno stesso punto *d*, indicati con $a_1$, $b_1$ e $c_1$ i punti d'intersezione delle coppie di lati opposti, tali punti stanno sul cerchio $C^2$. Citando [Feuerbach 1822, p. 38] Cremona afferma che il cerchio di nove punti passa per i punti medi dei sei lati di ogni quadrangolo completo ortogonale circoscritto all'ipocicloide [Cremona 1864, par. 14].

Indicati con $D^2$ la circonferenza circoscritta al triangolo *abc* e con *d'* il suo centro, è noto grazie a [Steiner 1833, p. 51] che *d* è il centro della similitudine diretta (di rapporto 2) che trasforma $C^2$ in $D^2$, pertanto il segmento *dd'* è due volte *od* e $D^2$ ha raggio doppio di quello di $C^2$ [Cremona 1864, par. 18]. Quindi Cremona riprende il teorema citato da Steiner: "*D'un point quelconque f du cercle $D^2$ circonscrit au triangle abc abaissons les perpendiculaires sur les côtés de ce triangle. D'après un théorème très-connu, les pieds des trois perpendiculaires sont allignés sur une droite G. Cherchons l'enveloppe de cette droite, lorsque le point f se déplace sur le cercle $D^2$*"[22]. Il matematico pavese nota che se il punto *f* coincide con uno dei vertici del triangolo *abc*, la retta *G* corrisponde ad una delle altezze $aa_1$, $bb_1$, $cc_1$ del triangolo; invece, se *f* è diametralmente opposto ad uno dei vertici, *G* coincide con uno dei lati *bc*, *ca*, *ab* (Fig. 9.).

[21] [Cremona 1864, par. 9] "*La curva $C^3$ è dunque l'ipocicloide a tre cuspidi generata da un cerchio di raggio = 1/3 op (o, che è lo stesso risultato, di raggio = 2/3 op) che rotola all'interno del cerchio (pqr). Così ogni curva della terza classe e del quarto ordine, la cui tangente doppia sia all'infinito e i punti di contatto su un cerchio, è necessariamente una ipocicloide a tre cuspidi. Questa curva gioca dunque, tra le curve della terza classe e del quarto ordine, lo stesso ruolo del cerchio tra le coniche*".

[22] [Cremona 1864, par. 19] "*Da un qualsiasi punto f del cerchio $D^2$ circoscritto al triangolo abc abbassiamo le perpendicolari sui lati di questo triangolo. Secondo un teorema molto noto, i piedi delle tre perpendicolari sono allineati su una retta G. Cerchiamo l'inviluppo di questa retta, quando il punto f si muove sul cerchio $D^2$*".

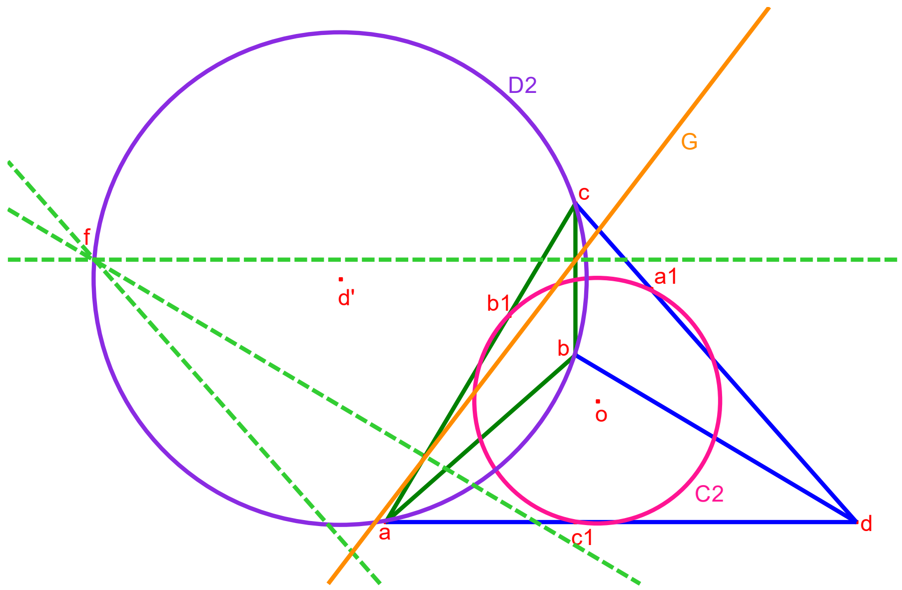


Fig. 9.

Pertanto i sei lati del quadrangolo completo *abcd* sono tangenti dell'inviluppo cercato. Inoltre, la retta impropria è una tangente doppia di tale inviluppo poiché se *f* coincide con uno dei due punti circolari, *G* è la retta all'infinito. Poiché la curva inviluppo è di terza classe e ha dieci tangenti comuni con l'ipocicloide, allora le due curve devono necessariamente coincidere, dunque l'ipocicloide è l'inviluppo delle rette *G* per ogni triangolo analogo ad *abc*. In altre parole, se dai punti in cui i lati del triangolo sono tagliati da una tangente qualsiasi dell'ipocicloide, si tracciano le perpendicolari ai lati, allora queste s'intersecano sulla circonferenza circoscritta al triangolo *abc* [Cremona 1864, par. 19].

Nella seconda parte del lavoro, Cremona esamina proprietà delle coniche che poi utilizza per provare diversi problemi, alcuni dei quali citati da Steiner. Inoltre, presenta procedure alternative sue o di altri matematici per generare l'ipocicloide tricuspide[23]: tra queste vi è il metodo chiamato "generazione di Cremona", che illustriamo nel dettaglio. Considerato che due tangenti perpendicolari all'ipocicloide $C^3$ s'intersecano in un punto $s$ del cerchio $C^2$, tali rette incontreranno $C^2$ in due punti $\mu$ e $\mu'$, estremi di un suo diametro. L'autore, applica ciò che ha già provato in [Cremona 1862, par. 135, c]: tali tangenti $s\mu$ e $s\mu'$ sono coniugate armoniche rispetto alla terza tangente $ss'$ uscente da $s$ e alla tangente a $C^2$ nel punto $s$, e quindi gli angoli formati tra queste ultime due rette sono bisecati dalle tangenti perpendicolari $s\mu$ e $s\mu'$. Pertanto ne deduce che la terza tangente $ss'$ è perpendicolare al diametro $\mu\mu'$ (Fig. 10.).

[23] Per le proprietà dell'ipocicloide tricuspide mediante un approccio analitico, si veda [Lemaire 1929].

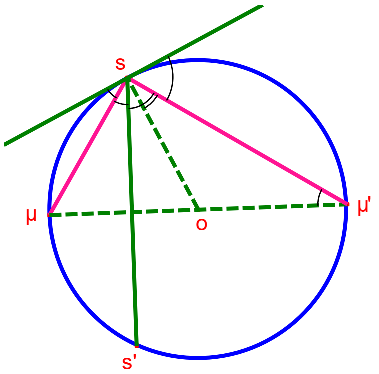


Fig. 10.

Quindi Cremona, a partire dal cerchio $C^2$ e da una qualsiasi tangente a $C^3$, illustra come costruirne ogni altra: da ogni punto $s_i$ sul cerchio $C^2$ basta tracciare la perpendicolare alla tangente $s_{i-1}s_i$ e la corda $s_is_{i+1}$ perpendicolare al diametro passante per $s_{i-1}$ [Cremona 1864, par. 10]. Dal fatto che le tangenti $ss'$ e $\mu\mu'$ sono perpendicolari, tra gli archi $\widehat{\mu s}$ e $\widehat{ss'}$ misurati nello stesso senso, ricava la seguente relazione:

$$\widehat{ss'} + 2\widehat{\mu s} = 2\pi \,.$$

Conclude affermando "*Donc, si deux rayons os, oμ du cercle $C^2$ tournent simultanément autour du point o, en sens opposés et avec la condition que leurs vitesses angulaires aient le rapport constant 2 :1, la corde sμ enveloppera l'hypocycloïde $C^3$ ou une courbe égale à $C^3$*"[24].

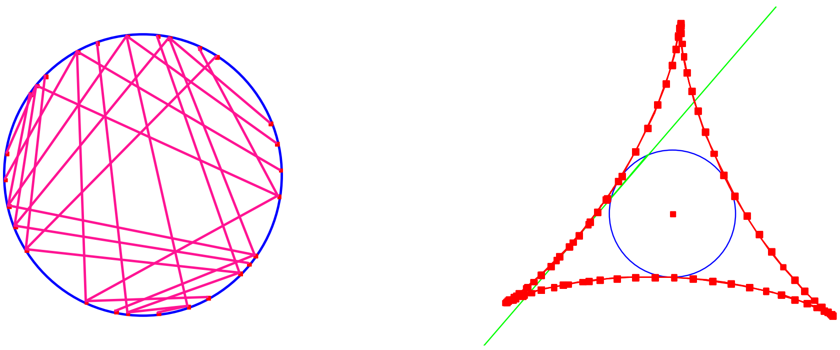

Fig. 11.

Successivamente egli stesso scrive: "*Voici encore une autre moyen d'engendrer cette merveilleuse courbe, douée de propriétés si nombreuses et si élégantes*"[25].

[24] [Cremona 1864, par. 11] "*Dunque, se due raggi os, oμ del cerchio $C^2$ ruotano simultaneamente attorno al punto o, in senso opposto e con la condizione che le loro velocità angolari abbiano il rapporto costante 2:1, la corda sμ inviluppera l'ipocicloide $C^3$ o una curva uguale a $C^3$*".

[25] [Cremona 1864, par. 33] "*Ecco ancora un altro modo di generare questa meravigliosa curva, dotata di proprietà così numerose e così eleganti*".

Dal 29 maggio al 26 giugno del 1864, Thomas Archer Hirst[26] trascorre un periodo della sua vita a Bologna durante il quale familiarizza con Cremona ed ha l'occasione di discutere con lui sulle trasformazioni quadratiche[27]. Nel 1865 pubblica il lavoro [Hirst 1865] che lo stesso Cremona traduce in italiano ([Hirst 1865-a]). Dallo loro corrispondenza epistolare[28] ci si rende conto che Hirst usa le trasformazioni quadratiche anche per generare l'ipocicloide tricuspide. Fino ad allora, tutti i metodi per la generazione di questa curva si basavano su applicazioni di luoghi geometrici, mentre Hirst è il primo ad ideare una costruzione[29] usando le trasformazioni quadratiche: infatti, ottiene l'ipocicloide tricuspide mediante l'inversione quadrica[30] di una circonferenza $B$ rispetto ad una circonferenza (fondamentale) $C$ passante per il centro di $B$ e avente raggio doppio. Indicato con $A$ il centro di similitudine dei due cerchi e con $P$ e $Q$ una coppia di punti corrispondenti, al variare di $P$ su $B$, il suo inverso quadrico, $Q$, descrive la quartica di Steiner. Le tre cuspidi sono in $A$ e nei punti di contatto, $A_1$ e $A_2$, delle due tangenti condotte da $A$ alla circonferenza $C$[31] (Fig. 12.).

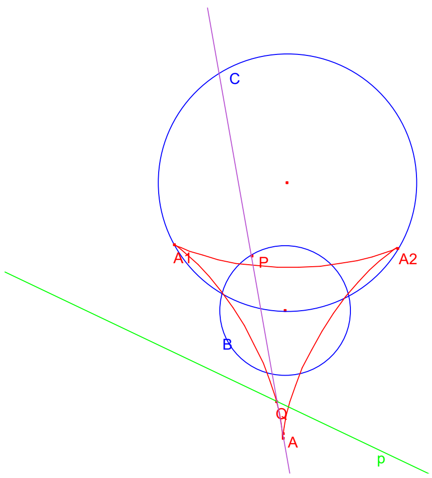

Fig. 12.

[26] Thomas Archer Hirst (1830-1892) nacque in Inghilterra, studiò matematica e fisica in Germania e continuò i suoi studi a Berlino, Parigi e Roma. Nel 1860 tornò in Inghilterra dove intraprese la sua carriera accademica; nel 1865 fu tra i fondatori della London Mathematical Society. Per una biografia più completa, si veda [Gardner – Wilson 1993].

[27] Si veda [Brigaglia – Di Sieno 2012].

[28] Si veda [Nurzia 1999].

[29] In realtà una costruzione analoga, ma successiva, è in [Lemaire 1929].

[30] L'inversione quadrica si definisce a partire da un'origine fissata $A$ e una conica fondamentale $C$: l'inverso di un punto $P$ si ottiene come intersezione della sua polare, rispetto a $C$, con la retta che congiunge $P$ con l'origine $A$. [Hirst 1865]. Si veda anche [Raspanti 2016].

[31] Jacques Lemaire usò la trasformazione quadratica di Hirst per ricavare l'ipocicloide tricuspide a partire da una circonferenza, ma è probabile che egli non conoscesse la teoria del matematico inglese, che rimase non pubblicata [Lemaire 1929, pp. 175-176].

## Il punto di vista di Beltrami

Anche Eugenio Beltrami si cimenta negli stessi anni con problematiche “elementari” legate al cerchio di nove punti e alla ipocicloide tricuspide. Beltrami, che non si era mai laureato, nei primi anni ’60 aveva ripreso gli studi matematici a Milano. Lì, oltre che con Francesco Brioschi e Felice Casorati, era stato in stretto contatto con Giovanni Virginio Schiaparelli, allora secondo astronomo a Brera. Quest’ultimo era impegnato anche nello studio delle trasformazioni quadratiche[32] e su questi argomenti è probabile che i due abbiano discusso a fondo. Nell’ottobre del 1862 Beltrami ottiene, senza concorso, la cattedra di Algebra Complementare e Geometria Analitica all’Università di Bologna, dove ritrova Cremona, con cui era già in rapporti di amicizia. A Bologna, il 12 marzo 1863 Beltrami presenta una prima nota[33] nella quale dimostra analiticamente tutte le proposizioni di Steiner, ma, seguendo il dibattito recente che aveva coinvolto Schiaparelli, Cremona e Hirst,[34] determina ancora un nuovo modo di affrontare tale tematica, stavolta tramite una trasformazione geometrica. Successivamente nel 1874 ritornerà su tale soggetto estendendo i suoi studi all’ipocicloide tricuspide.

Il contesto in cui si pone il lavoro di Beltrami è quello, comune alla maggior parte di quelli su questo argomento, dello sviluppo di proprietà enunciate, ma non dimostrate, da Steiner. Nel suo lavoro del 1844[35], dato il quadrangolo completo ortogonale *ABCG*, Steiner riformula il cerchio di nove punti, ovvero è quello la cui circonferenza passa per i punti medi dei sei lati (*D*, *E*, *M*, *K*, *L*, *F*) e per i tre punti di intersezione dei lati opposti (*H*, *I*, *J*). Questi ultimi punti costituiscono i vertici di un triangolo diagonale, detto *fondamentale* (Fig. 13.).

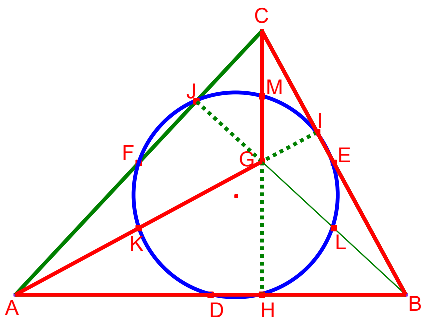


Fig. 13.

[32] [Schiaparelli 1862].
[33] [Beltrami 1862].
[34] Per tale problematica ci riferiamo a [Vaccaro 2016].
[35] [Steiner 1844].

Steiner afferma che, levando la limitazione del quadrangolo ortogonale, il teorema è ancora valido sostituendo la parola cerchio con conica, la *conica di nove punti*, luogo dei centri delle coniche del fascio per $A$, $B$, $C$ e $G$. Inoltre egli aggiunge che una qualsiasi conica $S$ circoscritta al triangolo fondamentale (il triangolo $A_1B_1C_1$ in Fig. 14.), interseca ciascun lato del quadrangolo completo $ABCD$. Se si considera, per ogni lato, il quarto armonico tra gli estremi del lato e il punto d'intersezione, allora questi sei quarti armonici giacciono tutti su una stessa retta $L$: i poli di tale retta rispetto alle coniche del fascio per $A$, $B$, $C$ e $D$ appartengono alla conica $S$.

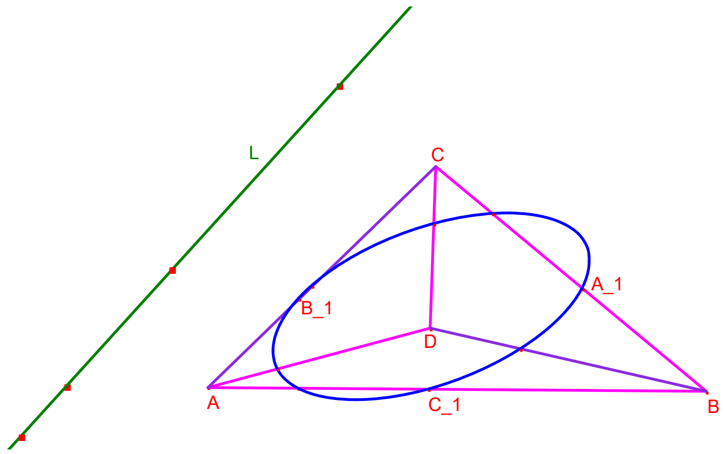


Fig. 14.

Nel suo lavoro del 1863 Beltrami capovolge il punto di vista di Steiner e dimostra il seguente teorema "*Se nel piano di un quadrigono completo si conduce una trasversale, ed in ciascuno dei sei lati di esso si determina il punto conjugato armonico di quello in cui il lato è incontrato dalla trasversale medesima, i sei punti così determinati giacciono in una conica, che passa anche per i tre punti d'incontro dei lati opposti del quadrigono completo*". Pertanto per Beltrami la conica di nove punti è il luogo geometrico dei poli di una qualsiasi retta rispetto al fascio di coniche circoscritte ad un quadrangolo completo. Egli procede per via analitica, solo successivamente proseguirà per via sintetica affermando che "*importa osservare che le proprietà precedentemente dimostrate si potrebbero dedurre semplicemente dal teorema che le polari di un punto rispetto alle infinite coniche circoscritte ad un quadrigono passano tutte per un medesimo punto*". In virtù di questo teorema, allora, basta considerare due sole coniche del fascio, usando per semplicità due coniche degeneri formate da due lati opposti del quadrangolo: le polari di un qualsiasi punto $H$ rispetto a tali coniche s'intersecano in uno stesso punto $H'$. Beltrami dimostra che il luogo dei punti $H'$, al variare di $H$ su una retta, è proprio la conica di nove punti relativa alla retta e al quadrangolo. Ciò determina una trasformazione $f$: $H \rightarrow H'$, definita su tutto il piano, che trasforma punti in punti e rette in coniche circoscritte a un triangolo fissato: essa è pertanto una trasformazione quadratica. Dal punto di vista analitico, nel sistema di riferimento dato dal triangolo fondamentale, la trasformazione si può scrivere come $f(x, y, z) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$, che è la ben nota trasformazione quadratica standard indicata come $T_2$ in [Hudson 1927].

A questo punto Beltrami è in grado di inserire i suoi studi nel più ampio filone delle trasformazioni quadratiche: "*Abbiamo qui dunque una correlazione di punti la quale procede con questa legge, che ad ogni punto del piano corrisponde un altro punto unico ed individuato del piano stesso, e ad ogni retta corrisponde una unica ed individuata conica circoscritta ad un triangolo invariabile di forma e di posizione, e reciprocamente. Questa correlazione rientra in quella più generale che venne già discussa da parecchi geometri, in particolare da Steiner (Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, Berlino 1832), da Magnus (Giornale di Crelle, tomo VIII, 1832), e più recentemente dal chiar. sig. prof. Schiaparelli (Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino, serie 2a, tomo XXI, 1862). Noi qui ne ricercheremo direttamente le principali proprietà*". Per buona parte del resto del lavoro l'autore ricava le principali proprietà della *f*, in una maniera organica che è probabilmente lo studio più completo di tale trasformazione fino a quel momento. La trasformazione *f* di Beltrami, per quanto nota da molto tempo[36], in varie forme e casi particolari, e per quanto coincidente, a meno di una omografia, con la trasformazione iperbolica di Schiaparelli, appare essere stata interessante e in qualche modo rivelatrice per lo stesso Cremona che, in un suo lavoro del 1865[37] (ma scritto l'anno prima[38]) ne utilizza la versione correlativa, attribuendo proprio a Beltrami la paternità della trasformazione stessa.

Vale forse la pena notare che questa prima nota di Beltrami si conclude con l'osservazione che tale trasformazione, nel caso particolare di un quadrangolo ortogonale tale che il suo triangolo fondamentale passi per i due punti circolari all'infinito, si riduce ad un'inversione circolare, trasformazione che, pur nota da tempo, solo in questo periodo inizia ad assumere un ruolo autonomo nell'ambito della matematica.

---

[36] [Poncelet 1822]
[37] [Cremona 1865]
[38] Cremona ha scritto il lavoro sopra citato almeno già dal marzo 1864, come si evince da una lettera inviatagli da Clebsch e pubblicata in [Menghini 1996]. La versione in italiano dell'articolo di Cremona, tradotto in inglese da Hirst, si trova in [Nurzia 1999].

L'anno successivo Beltrami pubblica un ulteriore lavoro[39] in quest'ambito, estendendo le sue considerazioni al caso dello spazio, tema che non affronteremo in questa sede. Per quasi dieci anni il matematico cremonese non pare occuparsi dell'argomento, ma la sua corrispondenza con Jules Hoüel[40] mostra che egli resta un attento osservatore dei grandi sviluppi che lo studio delle trasformazioni quadratiche aveva avuto nel quadro delle trasformazioni birazionali: "*Ce n'est que par suite de conversations avec le prof. Cassani, de cette ville (Venise), ma vieille connaissance, que j'ai repris le sujet des cercles et coniques de neuf points (théorèmes de Feuerbach et de Steiner) considéré au point de vue de la géométrie nouvelle, sujet qui m'a déjà occupé d'autres fois, et que je pense avoir maintenant révoqué à ses principes les plus généraux. Mais n'ayant pas sous les yeux une foule d'écrits que j'aurais besoin de consulter pour me former une idée exacte du degré de nouveauté de mes résultats, je suis sur le point de faire un paquet de mon brouillon-projet, pour ne le rouvrir qu'àprès mon retour à Bologne*"[41].

Nel successivo lavoro del 1874[42] Beltrami capovolge il punto di vista precedente. Stavolta la trasformazione $f$ diviene il punto di partenza e la conica di nove punti è semplicemente l'immagine di una retta mediante questa trasformazione. Le sue proprietà si deducono quindi in modo più "naturale". Per avere un'idea della trattazione di Beltrami diamo per esteso il caso particolare in cui il sistema di riferimento proiettivo è dato dagli assi ortogonali e dalla retta all'infinito: il triangolo fondamentale è quindi $AOB$, dove $A$ e $B$ sono i punti all'infinito degli assi, mentre il quadrangolo dei punti fissi diviene $CDEF$, i cui vertici sono $(\pm 1, \pm 1)$.

Denotate con $R \equiv ux + vy + wz = 0$ l'equazione della retta e con $\Gamma \equiv uyz + vxz + wxy = 0$ quella della conica corrispondente, il fascio di coniche determinato dal quadrangolo è dato da: $px^2 + qy^2 + rz^2 = 0$, con $p + q + r = 0$. Se la retta $R$ passa per uno dei vertici del quadrangolo, la conica passa per quel punto ed è ivi tangente a $R$. Se la retta è quella impropria, la conica per nove punti è quella di Steiner e si riduce alla coppia di assi. L'immagine del punto $P$ mediante la

---

[39] [Beltrami 1863 - II].

[40] Si veda [Boi - Giacardi - Tazzioli 1998].

[41] "*È solo a seguito di conversazioni con il prof. Cassani, di questa città (Venezia), mia vecchia conoscenza, che ho ripreso il tema dei cerchi e coniche di nove punti (teoremi di Feuerbach e di Steiner) considerati dal punto di vista della nuova geometria, soggetto di cui mi sono già occupato altre volte, e che penso di avere adesso revocato ai suoi principi più generali. Ma non avendo sotto gli occhi una gran quantità di scritti che avrei bisogno di consultare per farmi un'idea esatta del grado di novità dei miei risultati, sto per fare un pacco del mio progetto-bozza, per riaprirlo dopo il mio ritorno a Bologna*" [Beltrami- Hoüel, Pordenone 1 ottobre 1870].

[42] [Beltrami 1874].

trasformazione indicata da Beltrami è il punto *P'*, ovvero il quarto armonico tra *E*, *D* e *P* (punto in cui il prolungamento del lato *ED* interseca *R*) (Fig. 15.).

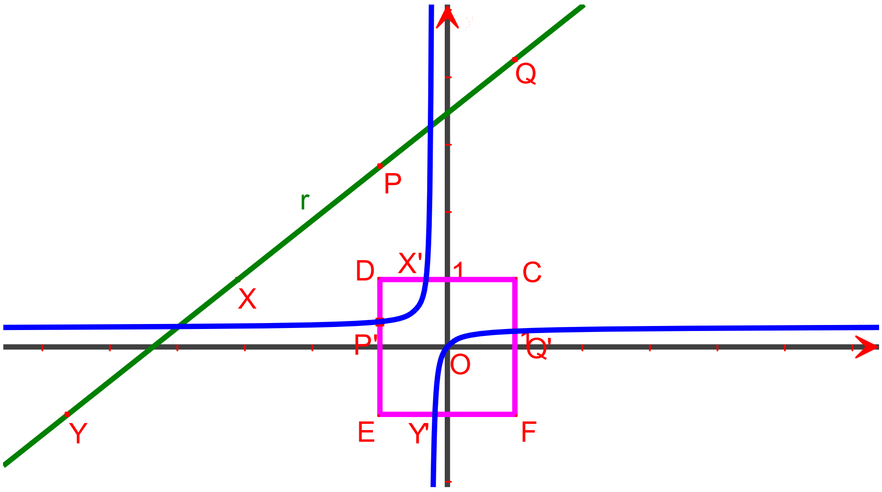


Fig. 15.

Beltrami dimostra che la congiungente un punto *P*, variabile sulla retta *R*, con il suo corrispondente *P'*, che è la tangente alla conica del fascio passante per *P*, genera per inviluppo una quartica razionale *Ω* di terza classe, come egli stesso afferma: "*essa non è che una trasformazione projettiva della cosiddetta ipocicloide tricuspidata*". Si ha dunque una trasformazione *g* che ad ogni punto *P* della retta *R* associa la tangente *t* in *P* alla conica del fascio per *A*, *B*, *C*, *D* e passante per *P*. L'inviluppo di tale retta *t,* al variare di *P,* è una quartica proiettivamente equivalente alla ipocicloide tricuspide (identica ad essa quando la retta è quella impropria)[43] (Fig. 16.).

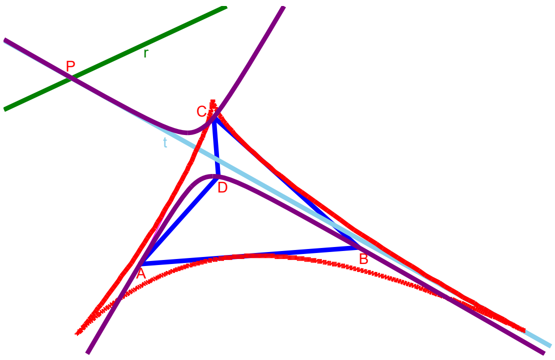


Fig. 16.

[43] Come si è visto, nel 1864 Cremona stesso aveva asserito che ogni curva del quarto ordine e di terza classe è proiettivamente equivalente alla quartica di Steiner.

Seguiamo per grandi linee il procedimento di Beltrami. Se consideriamo un punto $P \equiv (x_0, y_0, z_0)$ sulla retta $R$ e la sua immagine $P' \equiv \left(\frac{1}{x_0}, \frac{1}{y_0}, \frac{1}{z_0}\right)$ sulla conica $\Gamma$, la retta che li unisce ha equazione:

$$\frac{yz_0 - zy_0}{x_0} + \frac{zx_0 - xz_0}{y_0} + \frac{xy_0 - yx_0}{z_0} = 0.$$

Sulla retta $R$, esistono due punti che si corrispondono reciprocamente, $I \equiv (a, b, c)$ e $I' \equiv (a', b', c')$: essi sono le intersezioni tra $R$ e $\Gamma$ e inoltre la retta $R$ è tangente la quartica $\Omega$.

Beltrami pone $P = a^2ux + b^2vy + c^2wz$, $Q = \frac{ux}{a^2} + \frac{vy}{b^2} + \frac{wz}{c^2}$ e $R = ux + vy + wz$. Indicato con $\theta$ un parametro variabile da cui dipende il punto sulla retta e manipolando la sua equazione, la retta che congiunge due punti corrispondenti diviene: $S_\theta \equiv R\theta^3 + P\theta^2 - a^2b^2c^2Q\theta - a^2b^2c^2R = 0$. Detto questo, l'equazione della conica $\Gamma$ si riduce a $PQ - R^2 = 0$ ($R = 0$ è l'equazione della retta $R$ corrispondente a $\Gamma$, $P = 0$ e $Q = 0$ sono le equazioni delle tangenti a $\Gamma$ nei punti $I$ e $I'$ in cui $R$ interseca $\Gamma$).

Detti quindi, per ogni $\theta$, $R_\theta$, $\Gamma_\theta$, $\Omega_\theta$ i punti corrispondenti in $R$, $\Gamma$ e $\Omega$, (dove $\Omega_\theta$ rappresenta il punto di tangenza tra $S_\theta$ e $\Omega$)[44] si ha una corrispondenza quadratica e una di quarto ordine, rispettivamente, tra la retta $R$ e la conica $\Gamma$ e la $R$ e la quartica $\Omega$. È proprio attraverso questa trasformazione $g$ che Beltrami determina le proprietà (peraltro ben note) della quartica. Tra di esse notiamo:

- $R$ è la tangente doppia alla quartica nei punti $I$ e $I'$ in cui essa interseca la conica dei nove punti $\Gamma$;
- la conica e la quartica si toccano in tre punti fissi della corrispondenza che $S_\theta$ induce tra loro;
- la quartica possiede tre cuspidi e quindi nessun'altra singolarità;
- la duale della quartica è una cubica razionale.

Come si è visto, in tutta la trattazione di Beltrami la relazione tra la retta $R$, la conica $\Gamma$ e la quartica $\Omega$ è determinata dalla trasformazione $f$, che a sua volta è determinata dalla scelta del quadrangolo completo e quindi del fascio di coniche. Ma, osserva Beltrami, data la terna $R$, $\Gamma$, $\Omega$,

[44] Beltrami determina anche geometricamente il punto $\Omega_\theta$, come il quarto armonico tra $R_\theta$, $\Gamma_\theta$ e $\Gamma'_\theta$, dove $\Gamma'_\theta$ rappresenta il secondo punto di intersezione tra $S_\theta$ e $\Gamma$, oltre $\Gamma_\theta$.

esistono infiniti quadrangoli che determinano la stessa terna (o, in altre parole, esistono infiniti quadrangoli che determinano trasformazioni che, su *R*, coincidono con *f*). Quello che egli vuole determinare è la natura di questi quadrangoli che saranno quelli che chiamerà quadrangoli tangenziali.

Per raggiungere questo scopo egli introduce il concetto di “tangenti associate”. La sua definizione e i relativi calcoli sono puramente analitici, ma in termini sintetici due tangenti alla quartica $\Omega$ sono associate se tagliano nella retta *R* due punti in involuzione quadratica con i punti *I* e *I′* in cui la *R* è tangente alla quartica (o, come si è visto, i punti in cui la *R* interseca la corrispondente conica di nove punti). Quindi se una tangente interseca la retta *R* in un punto *Q*, la sua associata la interseca nel quarto armonico *Q′* tra *I*, *I′* e *Q*. Due tangenti associate si incontrano in un punto *J* della conica di nove punti $\Gamma$ (Fig. 17.). Da ogni punto di $\Gamma$ delle tre tangenti a $\Omega$, due sono associate e l’altra è quella che unisce il punto alla sua immagine mediante *f*.

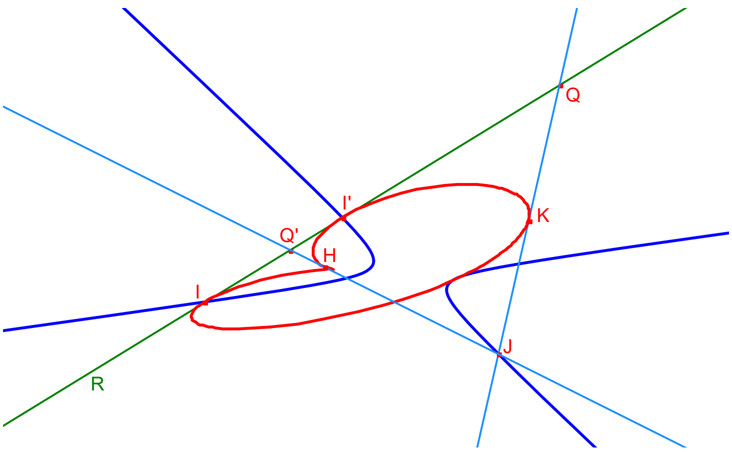


Fig. 17.

Se si guarda il caso particolare in cui la retta è quella impropria, ricordando che rette passanti per punti in involuzione quadratica rispetto ai punti circolari sono ortogonali, le tangenti associate sono quindi perpendicolari e si incontrano in un punto *K* della circonferenza $\Gamma$ iscritta in $\Omega$. Da *K* possiamo ricavare una terza tangente che è la retta $Kf(K)$. Viene quindi dimostrato, con un metodo del tutto diverso, quanto già determinato da Cremona: *le tangenti a* $C^3$ *sono perpendicolari a due a due e i relativi punti di contatto giacciono su una terza tangente*. Beltrami introduce poi un concetto fondamentale che è quello di *triangolo tangenziale*, ovvero il triangolo formato dalle tangenti associate a tre tangenti concorrenti in un punto *F*, che si dice associato al triangolo tangenziale[45]. Nella figura successiva la retta $R$ incontra l'ellisse $\Gamma$ nei punti $H$ e $K$ e la quartica corrispondente $\Omega$ ha due delle sue cuspidi immaginarie. Le tre tangenti a $\Omega$ dal punto $F$ di $\Gamma$ sono le due tra loro associate $FP$ e $FP'$ (i punti $P$ e $P'$ sono coniugati rispetto a $H$ e $K$) e $FG$ (con $G = f(F)$). La retta associata a $FG$ è $JG'$, poiché $G$ e $G'$ sono coniugati con $H$ e $K$. Il triangolo tangenziale associato al punto $F$ è quindi $FIJ$ (Fig. 18.).

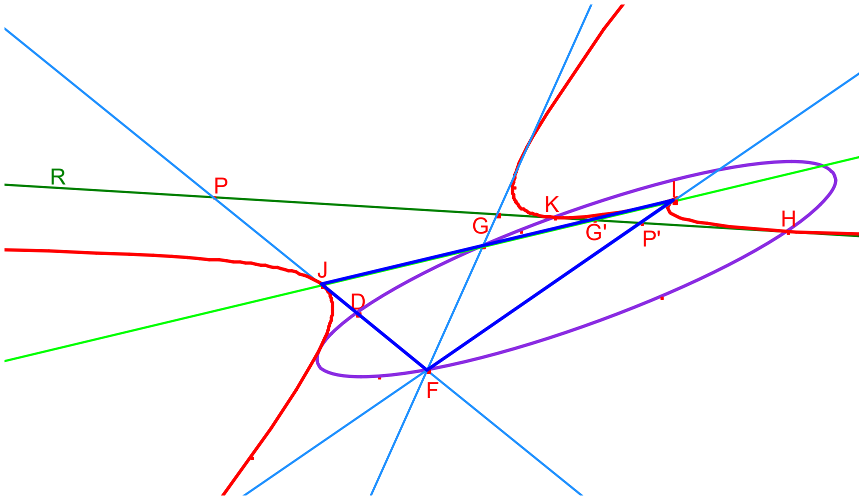


Fig. 18.

Un altro concetto introdotto da Beltrami è quello di *quadrangolo tangenziale*, così definito: considerate due coppie di tangenti tra loro associate, per ciascuno dei quattro punti in cui tali rette si intersecano, passa una terza tangente a $\Omega$. In realtà di queste quattro tangenti solo due sono distinte e associate tra di loro: le sei rette costituiscono un quadrangolo completo che viene detto quadrangolo tangenziale. Nella figura seguente è rappresentato il quadrangolo tangenziale $UVWZ$, costituito dalle coppie di tangenti associate in $F$ e in $G$. In ognuno dei vertici del quadrangolo, i lati che vi concorrono sono le tre tangenti a $\Omega$, mentre i triangoli, ottenuti eliminando a turno uno dei vertici, sono tangenziali. Inoltre il triangolo diagonale $FGI$ del quadrangolo è iscritto nella conica di nove punti $\Gamma$ (Fig. 19.).

[45] Tale triangolo tangenziale è la generalizzazione del triangolo *abc* indicato nella trattazione di Cremona.

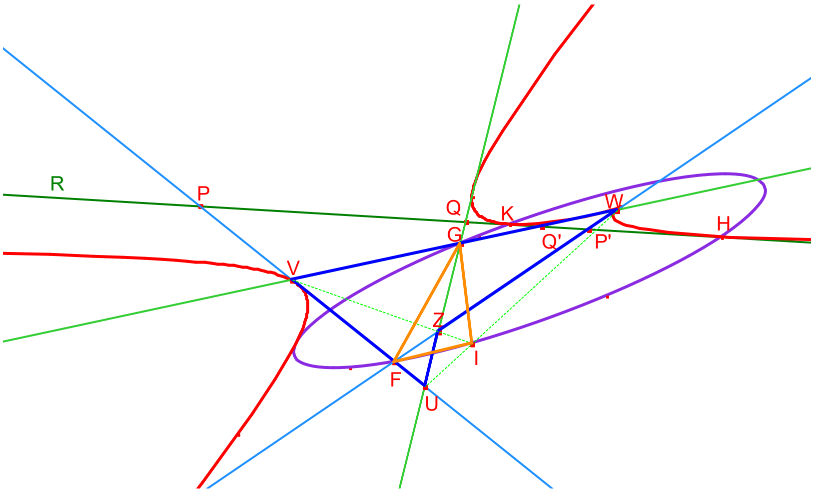


Fig. 19.

Nell'immagine successiva la retta *R* è quella impropria e siamo nella situazione descritta da Cremona. Scegliendo in *Γ* i punti *D* (dove concorrono le tangenti associate, e quindi tra loro perpendicolari, *DH* e *DK*) e *E* (dove concorrono le tangenti associate *EJ* e *EK*) si ha il quadrangolo tangenziale *HKJI*, che, come già indicato da Cremona, è ortogonale e il relativo triangolo diagonale *DEF* (Fig. 20.).

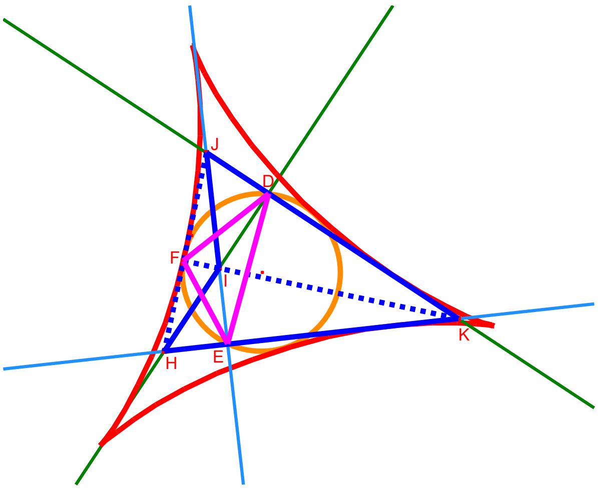


Fig. 20.

Questa costruzione si ricollega al quesito precedente cui Beltrami dà questa risposta: ogni quadrangolo tangenziale determina un fascio di coniche la cui trasformazione associata coincide, su *R*, con la *f*. L'insieme dei fasci così determinati costituisce una rete di coniche. Questa complessa costruzione sarà utilizzata da Beltrami per generalizzare i teoremi di Feuerbach (l'esistenza di quattro cerchi tangenti al cerchio di Feuerbach) e di Steiner (l'esistenza di sedici coniche tangenti alla conica di nove punti). Ci limitiamo ad enunciare il teorema di Beltrami:

*ogni conica passante per i punti (corrispondenti) I e I′ e iscritta in un triangolo tangenziale è tangente alla conica di nove punti.*

Beltrami presenta anche un'altra costruzione della quartica, generandola per punti invece che come inviluppo. Se consideriamo il quadrangolo ortogonale *ABCD* e la retta impropria, detto *P″* il secondo punto d'intersezione (il primo è ovviamente *P′*) tra la retta *PP′* e la conica di nove punti (che in questo caso è una circonferenza), il punto di tangenza *X* con la quartica è il quarto armonico tra *P″, P′* e *P* (Fig. 21.).

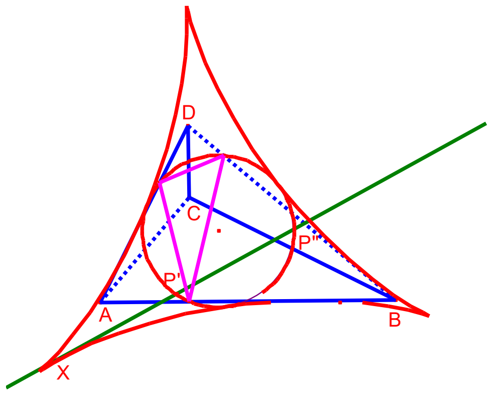


Fig. 21.

Adesso ci concentriamo brevemente sulla generalizzazione della retta di Simson-Wallace operata da Beltrami. Se da ogni punto di una conica *Ψ* passante per i punti omologhi *I* e *I′* e circoscritta ad un triangolo tangenziale si conducono le coniugate armoniche ai lati del triangolo, rispetto a *I* e *I′*, i punti in cui tali rette incontrano ciascuno di questi lati sono allineati e questa retta, che potremmo chiamare di Simson-Beltrami, genera per tangenza la stessa quartica *Ω*. Notiamo inoltre che anche Steiner aveva proposto una generalizzazione della retta di Simson-Wallace[46], ma questa corrisponde a quella di Beltrami solo nel caso della retta impropria, quando la conica è quella di nove punti nel senso di Steiner. Nella figura seguente la conica *Ψ* è l'ellisse passante per i vertici del triangolo tangenziale *UVW* e per i punti coniugati *I* e *I′*. Dal punto *J* di *Ψ* sono tracciate le rette coniugate ai lati rispetto a *I* e *I′* (che sono *JA*, *JB* e *JC*) che incontrano i rispettivi lati del triangolo (o i loro prolungamenti) nei punti allineati *A′*, *B′* e *C′*: la retta *A′C′* inviluppa, al variare di *J*, la medesima quartica *Ω* (Fig. 22.).

---

[46] Data una conica *Γ* e un triangolo in essa iscritto, se per un punto qualsiasi di *Γ* si tracciano le parallele ai diametri che passano per i punti medi dei lati, tali rette incontrano i lati corrispondenti in tre punti allineati.
Si veda [Palladino – Vaccaro 2016].

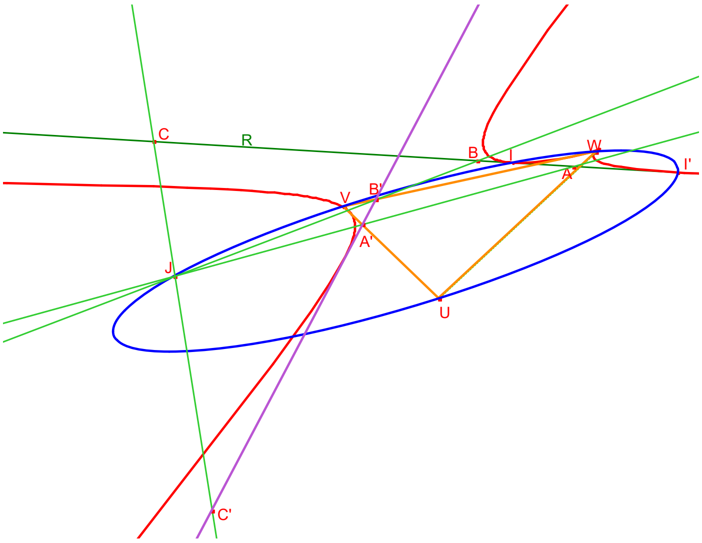


Fig. 22.

Inoltre si vuole sottolineare che Beltrami determina la proiettività che associa alla conica $\Psi$, passante per i punti $I$, $I'$ e circoscritta al triangolo tangenziale $UVW$, la conica di nove punti $\Gamma$. Tale trasformazione è l'omologia armonica di centro $Z$, il punto associato al triangolo tangenziale $UVW$, e di asse la retta $R$. Nella figura seguente si evidenzia come ad un punto $J$ della conica $\Psi$ corrisponde mediante tale omologia il punto $J'$ di $\Gamma$, quarto armonico tra $Z$, $J$ e $H$ (punto d'intersezione della congiungente $JZ$ con la retta $R$) (Fig. 23.).

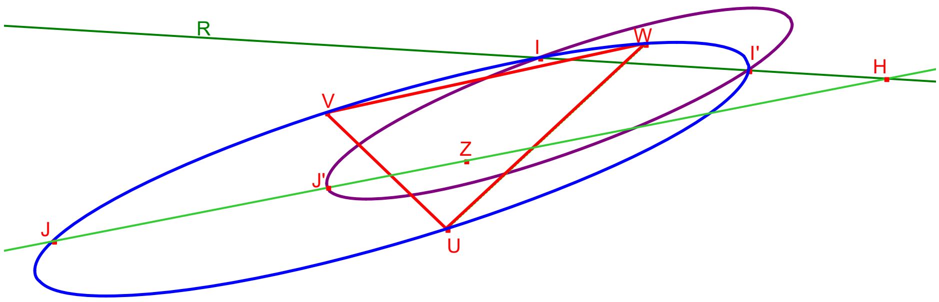


Fig. 23.

Nell'immagine successiva abbiamo rappresentato l'ipocicloide tricuspide $\Omega$ ed il cerchio di nove punti $\Gamma$ in essa iscritto. L'omologia armonica di centro $J$, associato al triangolo tangenziale $KHI$, e asse la retta impropria, trasforma $\Gamma$ nel cerchio circoscritto a $KHI$ e in particolare il punto $A$ nel punto $A'$. La retta che unisce $A$ con il punto improprio $f(A)$ genera, come si è visto, per tangenza l'ipocicloide. Tale retta, che coincide con la retta di Simson-Wallace relativa al triangolo $KHI$ e al punto $A'$, omologo di $A$, genera la stessa quartica secondo il punto di vista di Steiner (Fig. 24.).

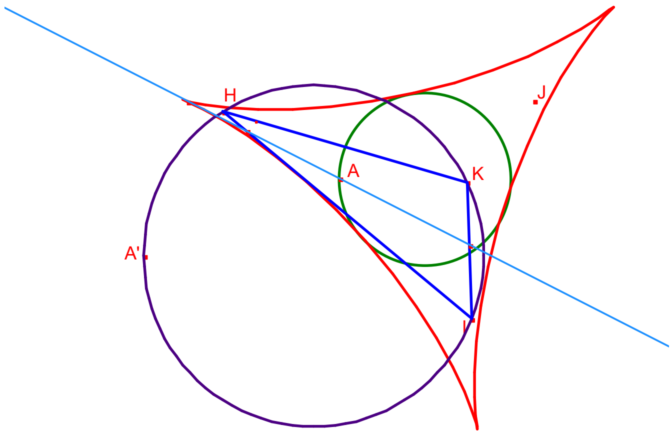


Fig. 24.

Nell'introduzione al lavoro del 1974, Beltrami dichiara le ragioni che l'hanno condotto a tornare sullo stesso oggetto di studio più volte nel corso della sua vita, in differenti momenti della sua attività scientifica: "*In una mia nota Intorno alle coniche dei nove punti e ad alcune quistioni che ne dipendono, […] io m'ero proposto di dimostrare, cogli odierni metodi di geometria analitica, i celebri teoremi di Feuerbach sul cosiddetto circolo dei nove punti, considerandoli nella loro generalità projettiva. Del più elegante e del più riposto fra questi teoremi, di quello cioè relativo ai contatti, non m'era tuttavia riuscito di dare allora una dimostrazione veramente spontanea, […] talché mi rimase sempre il desiderio di completare in questo senso quel primo studio. Ciò parvemi d'avere conseguito alcuni anni più tardi, in una ricerca nuovamente da me istituita sull'argomento; ma la tenuità di questo, a fronte di tanta altezza cui vedemmo crescere, quasi sotto i nostri occhi, la scienza analitico-geometrica, mi fece lungamente dubitare dell'opportunità di ritornare, in pubblico, sull'elegante, ma elementare soggetto. Senonché vedendo che questo non ha mai cessato, né cessa di tenere occupati i cultori della scienza, sia nel suo aspetto sintetico, sia nell'analitico, talché si può ben dire, usando una frase in corso, ch'esso ha già un'estesa letteratura, ho creduto di poter aggiungere ai molti lavori altrui questo mio, che riassume le anzidette ricerche*"[47].

**Conclusioni**

Come si è già visto, sia Cremona che Beltrami, pur nella diversità di metodo, hanno una visione comune sul far discendere lo studio di un particolare problema elementare (in questo caso

[47] [Beltrami 1874, pp. 543-544].

l'ipocicloide tricuspide) da principi generali della matematica più avanzata: la teoria delle cubiche, nel caso di Cremona, le trasformazioni quadratiche per quanto riguarda Beltrami.

I risultati non differiscono se non per la generalità: Beltrami infatti procede dallo studio generale delle quartiche di terza classe allo specifico dell'ipocicloide, invece Cremona studia direttamente il caso particolare per sottolineare come sia possibile passare a quello generale mediante un'omografia. Tale distinzione d'impostazione è strettamente legata alla differenza tra i metodi, sintetico ed analitico, usati dai due, diversità che viene evidenziata in modo efficace in una lettera inviata da Beltrami allo stesso Cremona nel febbraio 1863 in cui, tra l'altro, si dice "*nella geometria analitica la semplicità dei calcoli deriva piuttosto dalla scelta opportuna degli assi e delle coordinate che da ipotesi speciali fatte sulla natura delle curve. Il metodo del Trudi mi parrebbe opportuno per le ricerche di pura geometria, in cui se può semplificarsi il ragionamento è col semplificare gli oggetti del ragionamento stesso, tanto più che la geometria pura possiede poi i metodi di generalizzazione suoi propri e fecondissimi. Ma mi pare che quando si ricorre all'analisi si debba ottenere con essa sola tutte le necessarie generalità, e la geometria non debba venire che a guidare le operazioni e ad intavolare le equazioni. Questa, sembra a me, è la vera combinazione dell'analisi e della geometria; l'altra non ne è che una mescolanza, come dicono i chimici*". Questa lettera fa parte della corrispondenza Cremona-Beltrami dell'archivio dell'Istituto Mazziniano di Genova in cui il matematico cremonese scambia col collega e amico (da cui riceve stimoli ed incoraggiamenti) impressioni e opinioni riguardo le ricerche che ha in corso e che sfoceranno nella prima nota del 1863.

Un'altra caratteristica che risulta evidente dal taglio dato a questi lavori è l'intima compenetrazione che entrambi ritengono debba esserci tra matematica superiore e la cosiddetta matematica elementare, cosa che si ripeterà più volte nella loro carriera. Ci sembra che valga la pena sottolineare l'interesse dei due autori, nel pieno della loro maturità scientifica, per una tale problematica apparentemente elementare, ma suggestiva per i molteplici e inaspettati contatti con questioni assai diverse, cosa questa che rappresenta il segno distintivo della "bellezza Matematica".

L'ipocicloide tricuspide è solo uno dei tanti esempi di problemi elementari che hanno attirato grandi studiosi, sia che essi abbiano voluto esaminarli approfonditamente, o studiarli soltanto come "amatori".

L'analisi di questo problema si situa inoltre come momento di riflessione di Cremona sulla tematica trattata nelle sue opere maggiori del periodo bolognese: lo studio generale delle curve algebriche e quello delle trasformazioni birazionali. Dunque crediamo che, lungi dall'essere limitato ad un problema elementare, lo studio sull'ipocicloide fa da banco di prova per la potenza dei nuovi metodi. Inedito, ma significativo, appare il ruolo giocato da Beltrami in queste riflessioni di Cremona, ruolo che la corrispondenza Beltrami-Cremona prova ampiamente. Inoltre va tenuto conto della mera attrattiva che lo studio di questa curva tanto amata ha esercitato sui due matematici. Riteniamo che tale attrattiva sia stata principalmente motivata da ragioni "estetiche", interpretando tale termine da un punto di vista matematico: la straordinaria capacità di "vedere" con gli occhi della mente le numerose correlazioni, spesso inaspettate, tra fatti, teorie e metodi, che suscitano un senso di armonia in chi è in grado di comprenderli, le suggestive "riposte armonie" di Enriques. Sembra non essere una coincidenza se Cremona e Beltrami, come abbiamo visto nell'introduzione, si interessarono tanto alle concezioni di Sylvester: il loro punto di vista poteva ben ricollegarsi alla concezione dell'estetica matematica presente nel lavoro del matematico inglese, e questo a prescindere dai diversi stili matematici: sintetico quello di Cremona, analitico quello di Beltrami, algebrico quello di Sylvester.

**Bibliografia**

[Aebischer – Languereau 2010] A. M. Aebischer, H. Languereau, *Servois ou la géométrie à l'école de l'artillerie*, Presses universitaires de Franche-Comté, 2010.

[Beltrami 1862] E. Beltrami, *Intorno alle coniche dei nove punti e ad alcune quistioni che ne dipendono*, Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie II, vol. II, 1862, pp. 361-395.

[Beltrami 1863 - I] E. Beltrami, *Sulle coniche di nove punti*, Giornale di Matematiche, 1, 1863, pp. 109-118.

[Beltrami 1863 - II] E. Beltrami, *Estensione allo spazio a tre dimensioni dei teoremi relativi alle coniche dei nove punti*, Giornale di Matematiche, 1, 1863, pp. 208-217 e 354-360.

[Beltrami 1874] E. Beltrami, *Intorno ad alcuni teoremi di Feuerbach e di Steiner,* Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie III, tomo V, 1874, pp. 543-566.

[Boi – Giacardi – Tazzioli 1998] L. Boi, L. Giacardi, R. Tazzioli, *La découverte de la géométrie non euclidienne sur la pseudosphère, Les lettres d'Eugenio Beltrami à Jules Hoüel (1868-1881)*, Éditions Albert Blanchard Paris, 1998.

[Brigaglia – Di Sieno 2012] A. Brigaglia, S. Di Sieno, *Luigi Cremona's years in Bologna: from research to social commitment*, in "Mathematicians in Bologna 1861-1960", Birkhäuser, 2012, pp. 73-104.

[Brocard 1896] H. Brocard, *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, Vol. 3, pp. 166-168, 1896.

[Cremona 1860] L. Cremona, *Considerazioni di storia della geometria, in occasione di un libro di geometria elementare pubblicato recentemente a Firenze*, in "Il Politecnico", vol. IX, Milano, Editori del Politecnico, 1860, pp. 286-322.

[Cremona 1862] L. Cremona, *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, 12, 1862, pp. 305-436.

[Cremona 1863] L. Cremona, *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane*, Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, 2, 1863, pp. 621-631, Giornale di Matematiche, 1, 1863, pp. 305-311.

[Cremona 1864] L. Cremona, *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1864, Issue 64, pp. 101-123.

[Cremona 1865] L. Cremona, *On normals to conics, a new treatment of the subject*, The Oxford, Cambridge, and Dublin Messenger of Mathematics, vol. 3, n. X, 1865, pp. 88-91.

[Euler 1781] L. Euler, *de duplici genesi tam epicycloïdum quam hypocycloïdum*, Acta Acad. Scient. Imp. Petropolitanae pro anno 1781, pars prior, p.48.

[Feuerbach 1822] K. W. Feuerbach, *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks*, Nürnberg 1822.

[Gardner – Wilson 1993] J. H. Gardner, R. J. Wilson, *Thomas Archer Hirst – Mathematician Xtravagant*, American Mathematical Monthly, 1993, pp. 435-441, 531-538, 619-625, 723-731, 827- 834, 907-915.

[Hirst 1865] T. A. Hirst, *On the quadric inversion of plane curves*, Proceedings of the Royal Society, London, vol. XIV, pp. 91-106, 1865.

[Hirst 1865-a] T. A. Hirst, *Sull'inversione quadrica delle curve piane*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, s. I, VII, 1865, pp. 49-65.

[Hudson 1927] H. P. Hudson, *Cremona transformations in plane and space*, Cambridge University Press, 1927.

[Lemaire 1929] J. Lemaire, *Hypocycloïdes et Épicycloïdes*, Librairie Vuibert, Paris, 1929.

[Loria 1896] G. Loria, *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche,* Carlo Clausen, Torino, 1896.

[Loria 1930] G. Loria, *Curve piane speciali algebriche e trascendenti. Teoria e storia*, Ulrico Hoepli, Milano, 1930.

[Mackay 1890] J. S. Mackay, *The Wallace line and the Wallace point,* Edinburgh Mathematical Society, vol. ix, 1890.

[Mackay 1904] J. S. Mackay, *Bibliography of the Envelope of the Wallace Line (the threecusped Hypocycloid)*, on "Proceedings of The Edinburgh Mathematical Society" vol. 23, 1904, pp. 80-88.

[Menghini 1996] M. Menghini, *La corrispondenza di Luigi Cremona (1830-1903)*, volume III, Quaderni P.RI.ST.EM. N.9, Palermo, 1996.

[Muir 1884] T. Muir, *Historical Note on the so-called Simson line*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, Vol. 3, 1884, p. 104.

[Nurzia 1999] L. Nurzia, *La corrispondenza di Luigi Cremona (1830-1903)*, volume IV, Quaderni P.RI.ST.EM. N.11, Palermo, 1999.

[Palladino – Vaccaro 2016] N. Palladino, M. A. Vaccaro, *Un dibattito che continua in geometria elementare: la retta di Simson-Wallace e le sue molteplici generalizzazioni*, Lettera Matematica Pristem, vol. 97, 2016, pp. 56-64.

[Poncelet 1822] J. V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, Bachelier, Paris, 1822, p. 261.

[Raspanti 2016] M. A. Raspanti, *Dall'inversione circolare all'inversione quadrica: aspetti storici e potenzialità didattiche*, Conferenze e Seminari 2015 - 2016, Associazione Subalpina Mathesis, KWB, 2016, pp. 121-155.

[Salmon 1852] G. Salmon, *A treatise on the higher plane curves: intended as a sequel to A treatise on conic sections*, Dublin: Hodges & Smith, 1852.

[Salmon 1873] G. Salmon, *A treatise on the higher plane curves: intended as a sequel to A treatise on conic sections*, Dublin: Hodges, Foster, and CO, 1873.

[Schiaparelli 1862] G. V. Schiaparelli, *Sulla trasformazione geometrica delle figure ed in particolare sulla trasformazione iperbolica*, Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino, serie 2a, tom. XXI, 1862.

[Servois 1814] F. J. Servois, *Géométrie pratique. Problème. Prolonger une droite accessible audelà d'un obstacle qui borne la vue, en n'employant que l'équerre d'arpenteur, et sans faire aucun chaînage?,* Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 4, 1813-1814, pp. 250-253.

[Sylvester 1864] J. J. Sylvester, *On the Real and Imaginary Roots of Algebraical Equations*, Philosophical Transactions, Part III, 1864, pp. 579-666.

[Steiner 1833] J. Steiner, *Die geometrischen Konstructionen*, Berlin, bei Ferdinand Dümmler, 1833.

[Steiner 1844] J. Steiner, *Teoremi relativi alle coniche iscritte e circoscritte*, Giornale Arcadico di Scienze Lettere ed Arti, 295, 1844, pp. 147-161.

[Steiner 1857] J. Steiner, *Über eine besondere Curve dritter Klasse (und vierten Grades)*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Berlin, 1857, pp. 231-237.

[Teixeira 1909] F. G. Teixeira, *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches*, Coimbre Imprimerie de l'Université, Tom. 2, 1909.

[Vaccaro 2016] M. A. Vaccaro, *Dalle trasformazioni quadratiche alle trasformazioni birazionali. Un percorso attraverso la corrispondenza di Luigi Cremona*, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, XXXVI, 1, 2016, pp. 9-44.

[Wallace 1801] W. Wallace, *Mathematical lucubrations*, in Mathematical Repository, by T. Leybourn, printed by W. Glendinning, London, 1801.