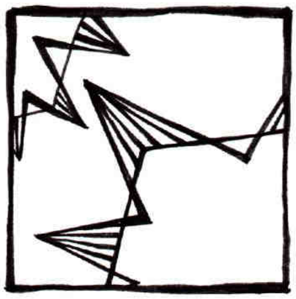


I poligoni stellati da Broscius a Cabrì: spunti didattici e costruzioni geometriche

Nicla Palladino

Riassunto A partire da indicazioni storiche trovate in alcuni trattati e articoli dell'Ottocento, si risale alle origini della teoria dei poligoni stellati e si individuano proprietà, risultati e costruzioni che possono risultare interessanti e didatticamente stimolanti se riproposte oggi nelle scuole primarie e secondarie di primo grado.

L'argomento si focalizza in particolare su una costruzione di poligoni isoperimetrici pensata nel Seicento e sulla misura dell'ampiezza degli angoli interni, formalizzata ad inizio Ottocento. Le costruzioni, riproposte con il Cabrì, possono essere utilizzate nel contesto di un laboratorio di geometria elementare.

Abstract From historical information found in some treaties and articles of the Nineteenth century, in this paper we go back to the origins of the theory of regular star polygons and describe interesting and challenging properties, results and constructions from the educational point of view. In fact they may be proposed in the primary and secondary level schools.

The activity focuses in particular on a construction of isoperimetric polygons thought in the Seventeenth century and the properties of the interior angles of a polygon, formalized in the early Nineteenth century.
The constructions, easily reproducible with geometry software, may be used in the context of a laboratory of elementary geometry.

Nicla Palladino, Università degli Studi di Palermo nicla.palladino@unipa.it

Premessa

Nel periodo a cavallo con l'unificazione dell'Italia, studiosi e scienziati indirizzarono la loro attenzione, tra le altre cose, ad adeguare i libri di testo per le scuole e per le università alle moderne teorie che si stavano sviluppando, attraverso la compilazione di nuovi trattati o la traduzione da volumi stranieri. Nel 1860, il matematico Luigi Cremona pubblica una nota nella rivista "Il Politecnico",[1] che costituisce una recensione alla traduzione italiana del trattato *Leçons nouvelles de géométrie élémentaire*[2] del francese A. Amiot: "Considerazioni di storia della geometria in occasione di un libro di geometria elementare pubblicato a Firenze".[3] Quella di Cremona è fondamentalmente una indagine storica sulle origini delle dimostrazioni, dei concetti e dei problemi presentati da Amiot o apposti dal traduttore Giovanni Novi, condotta a partire dalle indicazioni che il traduttore stesso inserisce nel testo.[4] Il lavoro, che nella sua versione italiana assume il titolo di *Trattato di Geometria Elementare*[5] ed era stato pubblicato nel 1858, appare molto accurato e preciso, ricco di puntuali riferimenti storici, interessanti anche dal punto di vista didattico, in quanto danno una prospettiva dell'intento dell'autore italiano di rendere, agli occhi dello studente, la geometria più gradevole, con spunti che conducono talvolta all'idea di una "matematica creativa" per l'epoca.

Tra gli argomenti che rientrano in questa tipologia, vi sono i poligoni stellati, sui quali Cremona particolarmente si sofferma, passando in rassegna gli autori che ne avevano in precedenza trattato.

Seguendo le indicazioni di Cremona sulle origini dei concetti legati ai poligoni stellati, se ne ripercorre la storia e si esaminano gli studi dei matematici che, a partire dal Trecento, principalmente si occuparono dell'argomento.

La trattazione condotta da Cremona e le indicazioni estese apportate da Novi hanno inoltre stimolato la presentazione dell'argomento sotto forma di attività e ricerca laboratoriali, che consentono di proporre le costruzioni

---

1 La rivista "Il Politecnico", a cadenza mensile, fu fondata a Milano nel 1839 da Carlo Cattaneo (1801-1869), che la diresse e la redasse quasi da solo fino al 1844.

2 [AMIOT 1850].

3 [CREMONA 1860].

4 Per Giovanni Novi, si veda [DBI], voce a cura di N. PALLADINO.

5 [NOVI 1858].

mediante software geometrico da riutilizzare nell'ambito di un laboratorio di geometria elementare.

Le origini dei Poligoni stellati

Il matematico Giovanni Novi nel proporre in italiano il trattato di geometria del francese Amiot, non si limita ad una traduzione del testo originale, ma sceglie di aggiungervi dieci estese note finali, oltre a numerose brevi note in calce, che egli stesso definisce come una specie di "Complemento di Geometria" che, nell'intento dell'autore, dovevano servire come stimolo per avvicinare i giovani alla disciplina. Come dichiara nella sua Prefazione, esaminando le finalità didattiche dell'opera e le ragioni del grave divario che intercorreva tra le opere di Geometria elementare e lo stato dell'epoca della ricerca nella materia, con la compilazione delle note e la traduzione del lavoro francese auspica un avvicinamento dei giovani studenti alle nuove e feconde teorie geometriche e spera di contribuire a risollevare gli studi della Geometria nelle scuole.

Quella sui poligoni stellati è una integrazione apportata dal traduttore finalizzata a rendere la geometria più gradevole e stimolante. La teoria introdotta dal Novi è sostanzialmente tratta da quella che è la prima esposizione organica moderna sull'argomento, dovuta al matematico francese Louis Poinsot (1777-1859) che nella *Mémoire sur les polygones et les polyedres* li presenta scrivendo:

D'abord, ces nouveaaux polygones dont je viens de parler, et qui présentent la forme d'une étoile […].
[…] *La différence de ces polygones étoilés aux polygones ordinaires, est que, dans ceux-xi, un côté quelconque aurait besoin d'être prolongé pour être rencontré par les côtés non contigus aussi prolongés; au lieu que dans les autres, les côtés mêmes peuvent être actuellement traversés par les autres côtés*.[6]

Nei poligoni si distinguono l'*ordine* e la *specie*: due poligoni si dicono "dello stesso ordine" quando hanno un ugual numero di lati e "della stessa specie" quando la somma degli angoli è uguale in entrambi. Siccome al variare di quest'ultima somma, in ciascun ordine, varia pure il numero di

6 [POINSOT 1809]. Pagg. 25-26.

volte che il perimetro fa il giro della circonferenza circoscritta, si può indicare la specie con questa quantità.

Cremona, nella nota sul Politecnico, si interessa di passare in rassegna gli autori che avevano, seppur parzialmente, affrontato l'argomento, notando che Boezio, in *De geometria*, dà forse il primo esempio, che sia noto, dell'iscrizione del pentagono regolare stellato nel cerchio, non avendo i più antichi geometri considerato che poligoni, regolari o irregolari, convessi; sussiste comunque la possibilità che piuttosto che un pentagono stellato, la figura di Boezio rappresenti semplicemente un pentagono regolare completo delle le sue diagonali.[7]

Al principio del secolo quattordicesimo, il teologo e matematico britannico Tomaso Bradwardino (c. 1290-1349)[8] crea una teoria dei poligoni stellati in uno dei suoi principali scritti, *Geometria speculativa*,[9] compendio di matematica elementare, in cui si preoccupa di sviluppare concetti non affatto o solo parzialmente contenuti negli Elementi di Euclide.

Bradwardino denomina *semplici* i poligoni convessi ed *egredienti* quelli stellati. Enuncia diverse proposizioni, arrivando ad alcune notevoli conclusioni: il primo poligono stellato di seconda specie è quello a cinque lati; il pentagono stellato ha la somma degli angoli pari a due retti; l'ettagono è la prima figura stellata di terza specie; enuncia il principio generale che la prima figura di una qualunque specie è formata dai prolungamenti dei lati della terza figura costruibile della specie precedente. Egli giunge, per induzione, anche al teorema: la prima figura di ciascun ordine ha la somma dei suoi angoli eguale a due retti, e nelle altre figure dello stesso ordine la somma degli angoli va aumentando di due retti passando da una figura alla successiva.

Il cardinale Daniele Barbaro (1514-1570) nel suo trattato di prospettiva[10] mostra che i poligoni regolari danno luogo in due modi a poligoni stellati: la prima maniera è di prolungarne i lati fino al loro incontro a due a due; i punti d'incontro sono i vertici di un nuovo poligono simile al primo. La seconda maniera consiste nel tracciare tutte le diagonali da ciascun vertice ai vertici non adiacenti; esse formano con le loro intersezioni un secondo poligono ancora simile al dato.

---

7 A tal proposito, si possono vedere [GÜNTHER 1873] e [BONCOMPAGNI 1873].

8 Per la figura di studioso e per la biografia, si veda [DOLNIKOWSKI 1995].

9 [BRADWARDINO 1496].

10 [BARBARO 1569].

La teoria dei poligoni egredienti di Bradwardino viene ripresa dal geometra polacco Ioanne Broscio (1585-1652), professore di Matematica e Astrologia all'Accademia di Cracovia,[11] nel lavoro *Apologia pro Aristotele et Euclide contra Petrum Ramum*.[12]

Poligoni ispoperimetrici del '600

Il singolare procedimento che Broscio applica a numerosi poligoni viene da lui descritto come segue (Fig. 1):

Ducantur vel etiam ductae intelligantur rectae AV, VO, OI, IE, EA, & circa eas tamquam axes converti intelligantur Triangula: verbi gratia circa awem AV converti Triangulum AYV in adversam partem, sitque AVG, ut intelligatur Y cadere in G, hoc est ut semel moneam, si super basi AV duo latera AG, VG aequalia duobus lateribus AY, VY, constituas, & sic in aliis: Dico figuram ASEBICODVYA transformatam esse in Pentagonum ordinatum GHKLFG quod est isoperimetrum figurae ASEBICODVYA.

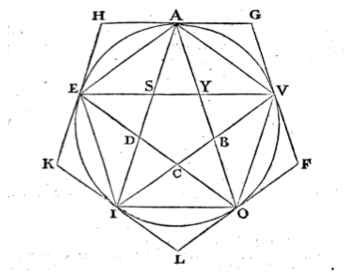


Fig.1

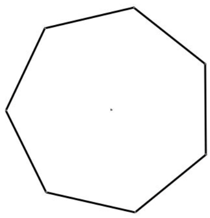
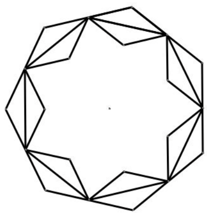
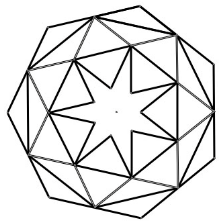
Broscio applica lo stesso procedimento agli ettagoni, come di seguito viene descritto: si dividano a metà tutti i lati di un ettagono regolare convesso. Intorno a ciascun segmento congiungente due punti medi consecutivi, Broscio ribalta il piccolo triangolo che questo segmento stacca dall'ettagono, finché questo triangolo cade nell'interno della figura. Ottiene così un poligono di quattordici lati ad angoli che definisce "salienti" e "rientranti" alternativamente, che ha lo stesso perimetro dell'ettagono proposto.

11 [CHROBOCZEK 2010].

12 [BROSCIO 1652].

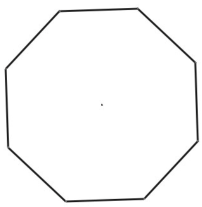
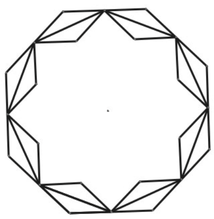
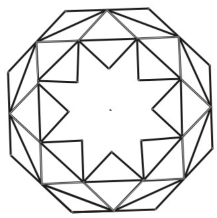
Intorno a ciascun segmento congiungente due vertici d'angoli “rientranti” successivi del poligono di quattordici lati, ribalta il piccolo triangolo da essa distaccato; risulta un nuovo poligono di quattordici lati ad angoli alternativamente “salienti” e “rientranti”, isoperimetrico ai due precedenti. Le due figure cosi generate non sono altro che gli ettagoni di seconda e terza specie. Questi tre poligoni risultano banalmente isoperimetrici fra loro, ma hanno aree diverse (Tabella 1).

Tabella 1

		
Ettagono regolare convesso (di I specie).	Poligono di 14 lati, isoperimetrico al precedente.	Poligono di 14 lati, isoperimetrico ai precedenti.

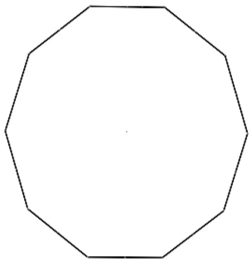
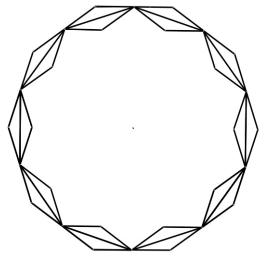
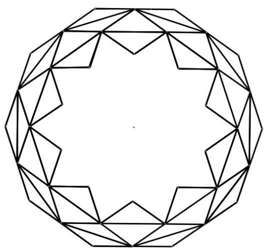
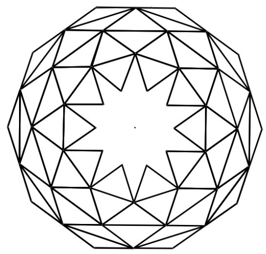
Con lo stesso procedimento si possono ottenere anche poligoni stellati isoperimetrici a partire da un ottagono regolare (Tabella 2):

Tabella 2

		
Ottagono regolare convesso.	Poligono a 16 lati isoperimetrico al precedente.	Poligono a 16 lati isoperimetrico ai precedenti.

Ogni volta, i tre poligoni che si vengono a creare hanno i perimetri uguali, ma chiaramente aree diverse: ogni poligono costruito è interno al precedente e ogni area sarà quindi minore della precedente. Il procedimento potrebbe ancora continuare, fino a creare all’interno, finché è possibile, ancora altri poligoni isoperimetrici al precedente ma con aree sempre minori. Si propone un esempio che riporta misura di aree e perimetri di costruzioni che escono fuori a partire da un decagono regolare (Tabella 3):

Tabella 3

	
Poligono regolare convesso: perimetro=cm 57,15; area=cm^2 251,30.	Primo poligono stellato: perimetro=cm 57,15; area=cm^2 203,34.
	
Secondo poligono stellato: perimetro=cm 57,15; area=cm^2 125,81.	Terzo poligono stellato: perimetro=cm 57,15; area=cm^2 48,08.

Ettagoni come triangoli

Considerati i poligoni stellati, accade che non solo il triangolo ha la somma degli angoli interni pari a due retti, ma che altri infiniti poligoni stellati godono di questa caratteristica.

Scrive Broscio, nel paragrafo VIII "Ostenditur infinitas dari figuras quarum anguli extantes duobus rectis aequantur" del suo trattato:[13]

Sit peripheria centro A descripta. Designandum est Heptagonum aut Enneagonum, aut quotcunque impari numero egredientium angulorum multangulum. Divitatur ergo circumferentia in tot partes, quot egredientes anguli exoptantur, ut hic verbi gratia in septem: & singulis apponantur numeri 1, 2,

13 [Broscio 1652], pag. 22.

3, 4, 5, 6, 7. Deinde dividatur numerus egredientium angulorum in duas partes unitate defferentes. Sic erunt in proposito exemplo 3 & 4. Si igitur ab unitate incipiendo tres septimas subtendas continuo donec ad primum redeas, ut hic videre licebit in sequenti figura connectendo 1, 4, 7, 3, 6, 2, 5, 1 efficies figuram septem egredientium angulorum [...]

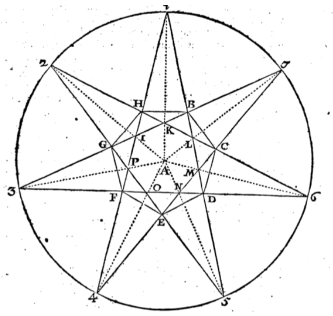


Fig. 2

Dico jam [...] *septem extantes angulos H1B, B7C, C6D, D5E, E4F, F3G, G2H, aequales esse duobus rectis. Producantur enum ex centro A rectae A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7 [...]. Anguli in centro septem 1A2, 2A3, 3A4, 4A5, 5A6, 6A7, 7A1 aequantur qutuor rectis. Ergo anguli in peripheria septem 152, 263, 374, 415, 526, 637, 741, aequabuntur duobus rectis. Seu quod idem est: Anguli ad centrum aequantum septimae circuli parti. Ergo anguli ad peripheriam aequabuntur quatuordecimae circuli parti. Septima autem circuli pars continet gradus* $51\frac{3}{7}$*. Ergo decima quarta continebit gradus* $25\frac{5}{7}$*. At hi septies sumpti componunt 180 gradus. Itaque septem extantes anguli aequabunt duos rectos. Quod fuit demostrandum. Simili modo concludes in omnibus impari numero extantibus angulis.*

Come si sa, la somma degli angoli interni di un poligono convesso è pari al numero di lati, meno due, angoli piatti: $S_i = (n-2)\pi$. Da qui, la conseguenza che nel triangolo la somma degli angoli è pari a 180° (o π radianti), mentre in un qualsiasi quadrilatero essa vale 360° (2π radianti), e così via.
Nei poligoni stellati di *n* lati, si vede facilmente che la somma di tutti gli angoli, sia esterni che interni, è ovviamente $n\pi$. Se si percorre la linea che genera il poligono, essa compie il giro totale della circonferenza esattamente *h* volte per ottenere la costruzione della figura; quindi la somma degli angoli esterni è: $S_e = 2\pi h$.

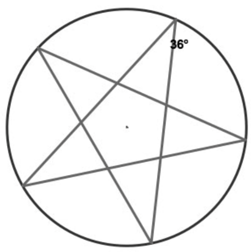
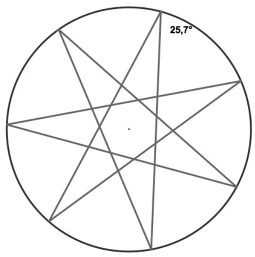
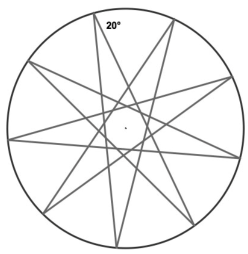
Ne segue che la somma degli angoli interni è data dalla differenza $S_i = S - S_e = \pi n - 2\pi h = \pi(n-2h)$.

Scrive Poinsot nella sua memoria dedicata ai poligoni:

Ainsi l'on verra que le triangle n'est pas le seul polygone où la somme des angles soit égale à deux droits, mais qu'il y a une infinité de polygones d'un nombre quelconque impair de côtés où la même chose a lieu; et de même, qu'il y a une infinité de polygones d'un nombre pair de côtés, où la somme des angles ne vaut que quatre angles droìts, comme dans le quadrilatère, &c.[14]

Ossia, non è solo il triangolo ad avere la somma degli angoli pari a due retti, ma vi sono infiniti poligoni, con numero di lati dispari, a godere di questa caratteristica; così, vi sono infiniti poligoni con un numero pari di lati a godere del fatto che la somma degli angoli interni è pari a quattro retti, come accade nel quadrilatero, ecc.
Ed infatti, nelle immagini che seguono sono stati costruiti alcuni esempi di poligoni stellati in cui la somma delle misure degli angoli interni è pari a due retti (tabella 4).

Tabella 4

		
Pentagono stellato	Ettagono stellato	Ennagono stellato

C'è un metodo per sapere quali sono i poligoni stellati costruibili che abbiano la somma degli angoli pari ad una ampiezza fissata, ricordando la formula $S_i = \pi(n-2h)$.

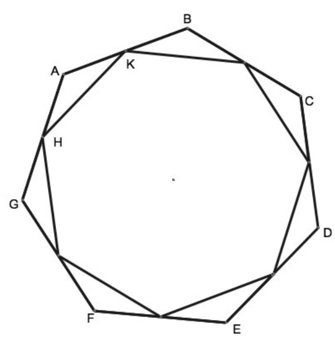
14 [POINSOT 1809], pag. 20

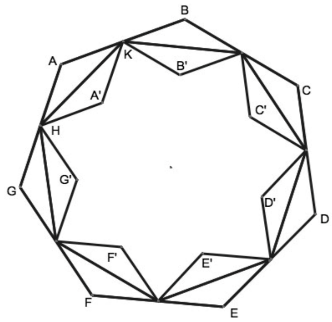
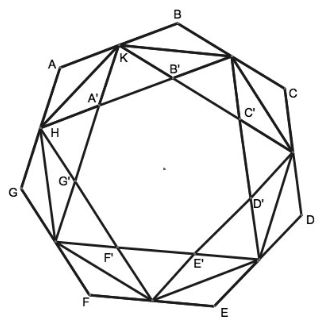
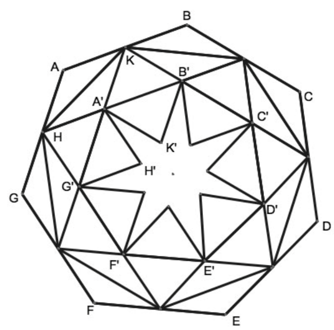
Preso ad esempio un pentagono, se ad esso associo la specie h=2, sostituendo nella relazione trovata, ottengo $S_i = \pi(5-4) = \pi$, pari alla somma interna di un triangolo.
Analogamente, posso provare ad applicare il metodo a partire da un poligono a sette lati; con h=2, avrei $S_i = \pi(7-4) = 3\pi$; ma con h=3 ho ancora la somma pari a quelle di un triangolo: $S_i = \pi(7-6) = \pi$.
Volendo formalizzare la procedura, fissato quindi n, dalla formula in precedenza ricavata $S_i = \pi(n-2h)$, trovo la formula inversa: $h = \frac{n}{2} - \frac{S_i}{2}$.

Il laboratorio

Si presentano, nel dettaglio, le istruzioni da implementare per riprodurre le figure e le costruzioni presentate nei paragrafi precedenti, utilizzando il software di geometria Cabrì®.
Prima attività (Schema 1), per la costruzione degli ettagoni di I, II e III specie (problemi isoperimetrici):

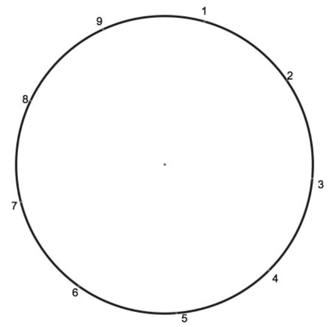
Schema 1

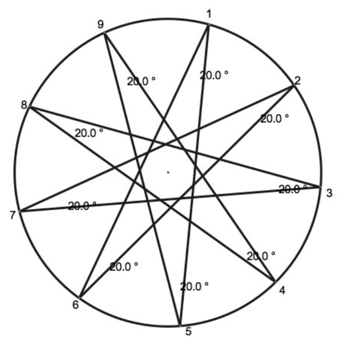
- Con lo strumento *poligono regolare* dalla casella *rette,* costruire un ettagono regolare di vertici A, B, C, D, E, F, G. - Con lo strumento *misura*, *distanza e lunghezza* misurare la lunghezza del perimetro. - Costruire il punto medio di ogni lato. - Con lo strumento *triangolo* dalla casella *rette*, per ogni vertice dell'ettagono, costruire un triangolo con il vertice ed i due punti medi ad esso adiacenti (ad esempio, AHK).	

<table>
<tr><td>- Con la funzione simmetria assiale, dalla casella trasforma, ribaltare ogni triangolo isoscele rispetto alla sua base.
- Usare la funzione poligono per costruire il poligono di vertici H, A’, K, B’,… (ettagono di II specie).
- Misurare la lunghezza del perimetro del poligono appena ottenuto.</td><td></td></tr>
<tr><td>- Mediante segmenti, unire i vertici adiacenti A’B’, B’C’, ecc.
- Per ogni vertice dell’ettagono di II specie (ad esempio K), costruire un triangolo con i due vertici ad esso adiacenti (K con A’ e B’).
- Con la simmetria assiale, ribaltare ogni triangolo sulla sua base.</td><td></td></tr>
<tr><td>- Usare lo strumento poligono per costruire il poligono di vertici H’, A’, K’, B’,… (ettagono di III specie).
- Misurare la lunghezza del perimetro del poligono appena ottenuto.
- Con lo strumento misura, area, misurare le aree dei tre ettagoni costruiti.</td><td></td></tr>
</table>

Seconda attività (Schema 2), per la costruzione dell’ennagono stellato con la somma degli angoli interni pari a π (ennagono di IV specie):

Schema 2

<table>
<tr>
<td>
- Costruire un poligono regolare di nove lati dalla casella degli strumenti Rette.
- Dalla casella curve, costruire la circonferenza circoscritta al poligono, con centro corrispondente al cento del poligono e raggio che termina in uno dei suoi vertici.
- Cancellare il poligono (restano sulla circonferenza i nove punti di suddivisione).
- Numerare i punti, a partire da uno di essi a piacere, con lo strumento Visualizza, Nomi.
</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>
- A partire dal vertice 1, contare quattro vertici successivi e congiungere il primo con questo (il 5); a partire dal vertice 5, contare quattro vertici che seguono e congiungere il quinto con questo (il 9); continuare così fino a che non si ritorna al vertice 1.
- Con lo strumento Misura dell'angolo, misurare gli angoli del poligono stellato; per misurare l'angolo al vertice 1, si clicchi sul vertice 6 (primo estremo del segmento che forma l'angolo), poi sul vertice 1 ed infine sul vertice 5 (secondo estremo).
- Si potranno verificare due proprietà: gli angoli sono tutti uguali; la loro somma è pari a $180° = \pi$.
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

Bibliografia

Amiot A., 1850, *Leçons nouvelles de géométrie élémentaire*, Dezobry et E. Magdeleine libraires-éditeurs, Parigi.

Barbaro D., 1569, *La pratica della perspettiva*, Camillo e Rutilio Borgominieri fratelli, Venezia.

Boncompagni B., 1873, Intorno ad un passo della Geometria di Boezio relativo al pentagono stellato, in *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche,* 1873; pag. 341-356.

Bradwardino T., 1496, *Geometria speculativa.*

Broscio I., 1652, *Apologia pro Aristotele et Euclide contra Petrum Ramum, & alios*, Dantisci.

Chroboczek J., 2010, Jan Brozek, mathematician, astronomer and biographer of Copernicus (1585-1652), *The Polish Review,* Vol. LV, No. 2, 2010, The Polish Institute of Arts and Sciences of America.

Cremona L., 1860, Considerazioni di storia della geometria, in occasione di un libro di geometria elementare pubblicato recentemente a Firenze, in *Il Politecnico*, vol. IX, Milano, Editori del Politecnico, 1860, pp. 286-322.

DBI, *Dizionario Biografico degli Italiani*, www.treccani.it.

Dolnikowski, E.W., 1995, *Thomas Bradwardine: A View of Time and a Vision of Eternity in Fourteenth-Century Thought*, Brill.

Günther S., 1873, Lo sviluppo storico della teoria dei poligoni stellati, traduzione di A. Sparagna, in *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, 1873; pag. 313-340.

[Novi 1858] Amiot A., *Trattato di Geometria elementare di A. Amiot, prima traduzione italiana con note ed aggiunte di Giovanni Novi, Professore di Meccanica nell'I e R. Liceo militare di Firenze, con un atlante di 59 tavole*, Felice Le Monnier, Firenze.

Palladino N., 2012, Giovanni Novi (1826-1866). La corrispondenza con Enrico Betti ed il suo contributo matematico, in "*Europa Matematica e Risorgimento Italiano*", Bologna Clueb.

Poinsot L., 1809, Mémoire sur les polygones et les polyedres, *Journal de l'École Polytechnique*, Paris, Imprimerie Imperiale, Cahier IX; pag. 16-48.

Poinsot L., 1858, Note sur la théorie des polyedres, *Comptes rendus des Séance de l'Académie des Sciences*, tome quarante-sixième, 1858.

Nicla Palladino